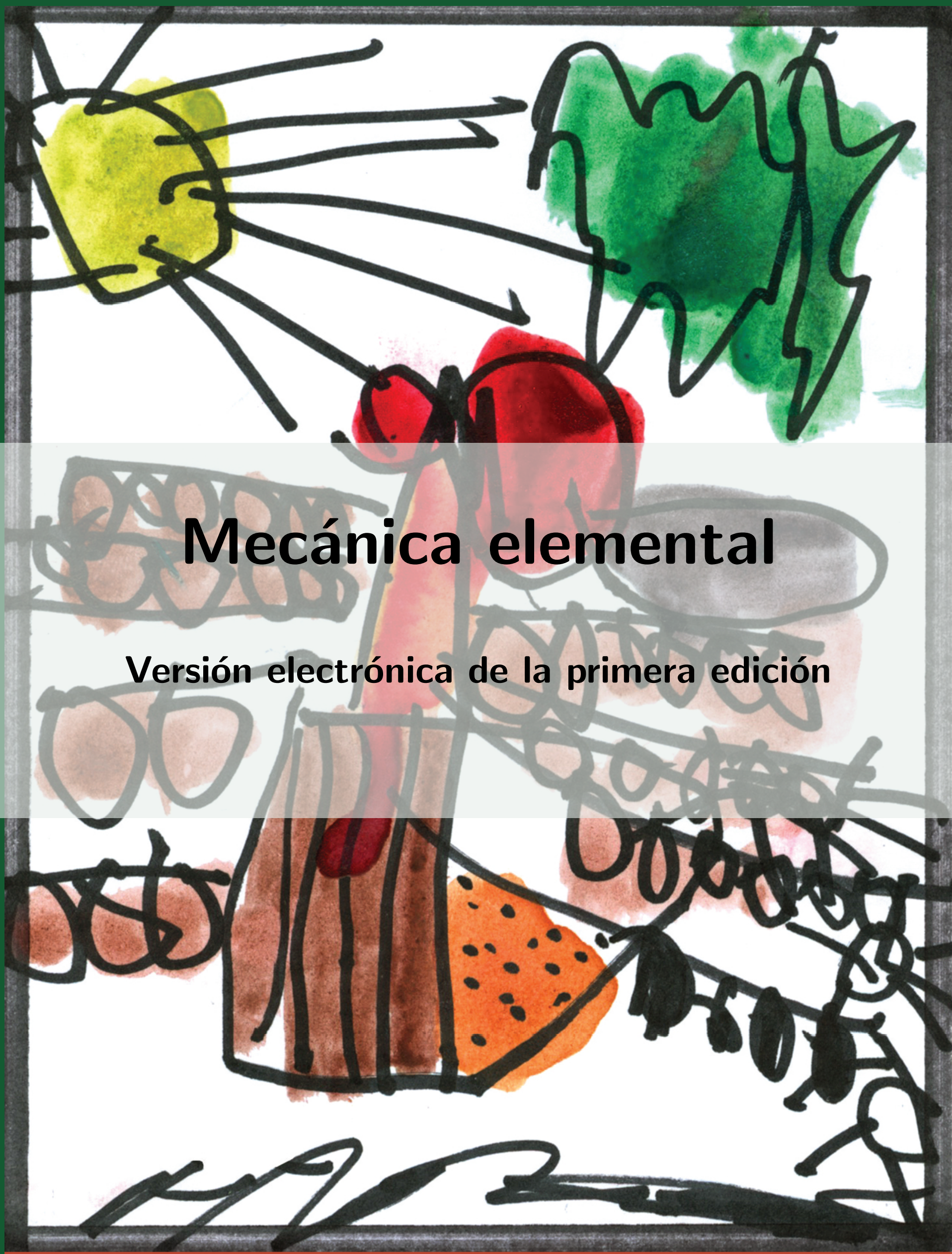
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

Colección CBI

Libro de texto



Mecánica elemental

Versión electrónica de la primera edición

Angel Manzur Guzmán

MECÁNICA ELEMENTAL

Versión electrónica de la primera edición

Angel Manzur Guzmán

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa Ciudad de México, México, 2024

Mecánica Elemental

Versión electrónica de la primera edición
Primera edición: 2024

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, número 186, Col. Leyes de Reforma1a Sección,
Alcaldía Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3108-7

Impreso en México / Printed in Mexico

A mi esposa, hijos y nietos

CONTENIDO

PRESENTACIÓN (primera edición)

El estudio de la física en general, y de la mecánica en particular, es necesario y obligatorio para los alumnos de las licenciaturas de ciencias básicas y de ingeniería, lo cual exige dedicación para dominar los conceptos y ser competente en esta materia.

A pesar de la existencia de buenos libros de texto, muchos alumnos estudian en las notas que ellos toman en la clase de teoría. Sin embargo, muchos de los alumnos que ingresan al nivel universitario, en el primer año no tienen desarrollada la habilidad de tomar adecuados apuntes de la clase; por lo general solamente escriben en su cuaderno lo que el profesor escribe en el pizarrón. En sus apuntes de clase rara vez aparecen las explicaciones, justificaciones y argumentaciones; de tal manera que estos apuntes incompletos son poco útiles para estudiar en ellos y para recordar los detalles del tema. Es claro que copiar lo que aparece escrito en el pizarrón no basta, no se puede confiar todo lo demás a la memoria. Esto ha sido parcialmente resuelto por materiales didácticos de diversos tipos, pero el problema persiste pues algunos alumnos no tienen las habilidades necesarias para tomar buenos apuntes y poder estudiar en ellos. Como consecuencia de esta deficiencia, muchos alumnos no tienen un adecuado desempeño en sus cursos.

Idealmente, las notas de clase deben contener las ideas básicas escritas correctamente, la explicación de lo que se desea calcular, así como los principales pasos algebraicos de las deducciones y la interpretación de los resultados, entre otras más que pudieran ser relevantes a un tema dado. Es difícil lograr escribir buenos apuntes de clase sobretodo cuando se trata de temas nuevos; lo cual no es una sorpresa, pues la adecuada comprensión de un tema difícilmente se logra en la primera exposición. Para ello es necesario tener la capacidad de abstraer las ideas básicas expuestas por el profesor y expresarlas en forma resumida, lo cual implica haber entendido la explicación.

Si los alumnos pudieran tener las notas del curso completo, escritas de manera clara, podrían concentrarse durante las clases en entender el material que les está siendo expuesto y aprovechar la experiencia del profesor.

Con el fin de que la mayoría de los estudiantes de primer ingreso logren un buen desempeño, es recomendable que tengan acceso a textos que contengan todo el material y la información que debe ser expuesta en la clase, con la extensión, profundidad y secuencia exigidas en los programas de estudio. De esta manera se busca que el estudiante ponga todo su esfuerzo en atender y entender los temas sin la distracción que puede representar el tomar apuntes.

Debido a lo expuesto, decidimos presentar este texto, Mecánica Elemental, que seguramente será de utilidad a los alumnos de los cursos obligatorios de Mecánica Elemental 1 y Mecánica Elemental 2 que se imparten, en el primer año, en las nueve licenciaturas de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Estos cursos contemplan sesiones de clases de teoría y sesiones de taller de resolución de problemas. Tienen la característica de que parte de la evaluación se hace a través de tres exámenes departamentales, los cuales son diseñados por los profesores responsables de su impartición.

Este texto contiene la información que el profesor podría exponer durante la clase de teoría, incluyendo ejemplos resueltos de problemas representativos y problemas para resolver, pues para comprender con certeza los conceptos es necesario aplicarlos en la resolución de problemas; muchos de los problemas para resolver fueron tomados de algunos exámenes departamentales que se han aplicado. En el texto no se incluye el material correspondiente a las sesiones de taller.

Los temas tratados se presentan en el orden ya habitual de la mayoría de los libros de texto en esta materia. Algunos temas que son importantes, pero que no forman parte del contenido oficial, fueron incluidos como temas opcionales. Cada tema está desarrollado con la extensión y profundidad adecuadas para garantizar el nivel requerido, contenido en los programas de estudio, y con el lenguaje y las estrategias pedagógicas adecuadas para los alumnos.

El material de la obra está distribuido en quince capítulos que cubren todos los temas oficiales que aparecen en los programas de los dos cursos mencionados; además, cada capítulo incluye ejemplos resueltos y problemas propuestos, así como la bibliografía recomendada para que el alumno consulte sobre algunos detalles de los temas. Al final del texto se incluye una lista de los principales libros de texto a este nivel.

PRESENTACIÓN (Versión electrónica de la primera edición)

Cuando los ejemplares de la primera edición se agotaron fue el momento de efectuar la primera reimpresión. En ella se hicieron las correcciones necesarias teniendo en cuenta los temas incluidos en los programas de los cursos.

En esta segunda edición se incorporaron elementos que no se tenían en la primera, como son: los inicios, las recapitulaciones y las respuestas a los problemas, de todos los capítulos. Otro elemento nuevo es un glosario del libro.

Inicio es un texto breve colocado al principio de cada capítulo en donde se da la bienvenida al lector, se mencionan los principales temas que se analizan o sólo se hace un comentario relacionado con alguno de ellos.

Recapitulación es un texto para recordar en forma breve y ordenada lo que por escrito se ha manifestado con extensión. Ahí se conservan la numeración de las ecuaciones, las fórmulas y las referencias a las figuras del capítulo. Puede llamarse “repaso y resumen”.

Las respuestas a los problemas que aparecen al final de cada capítulo, se presentan al final del libro en forma de un apéndice.

Glosario. Con el propósito de facilitar su uso, se presenta en forma de glosario la definición o la explicación del significado de una selección de términos usados en el libro.

Otra característica importante en esta nueva edición es que se procurará que sea únicamente electrónica.

1 SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Para que exista la comunicación entre las personas es necesario disponer de un lenguaje que sea común entre ellas. Es precisamente en este primer capítulo donde conviene empezar a definir el conjunto de términos (el lenguaje) que se empleará en el estudio de la mecánica.

Introducción

La descripción de fenómenos físicos basada en observaciones experimentales implica la necesidad de medir diversas cantidades relacionadas con el fenómeno y que reciben el nombre de cantidades físicas. La medición no es otra cosa que una comparación entre la cantidad que se quiere medir y un patrón o estándar fijado de antemano.

En mecánica, las cantidades físicas se clasifican en dos grupos: *básicas* y *derivadas*. Las cantidades básicas son tres: longitud, tiempo y masa. Las cantidades como velocidad y aceleración se llaman cantidades derivadas y se expresan en términos de las cantidades básicas. Así, la velocidad se expresa en términos del cociente de una longitud entre un tiempo.

1.1 Sistema SI

El resultado de la medición de una cantidad física se expresa como un número y una unidad. A las cantidades básicas y derivadas se asocian unidades básicas y derivadas, respectivamente. A continuación nos referiremos a las unidades básicas y a las unidades derivadas que forman parte del Sistema Internacional de unidades (SI).

Unidades básicas. En general, en física existen siete unidades básicas que constituyen la base del sistema SI, de las cuales tres corresponden a la mecánica. La tabla siguiente muestra las tres cantidades básicas en mecánica, el nombre de su unidad y el símbolo empleado para la unidad. Los símbolos no son abreviaturas y, por tanto, no se les pone punto (.) ni se pluralizan, cumplen con las mismas reglas que los símbolos usados para los elementos químicos.

Cantidades básicas en mecánica

cantidad	*unidad*	*símbolo*
longitud	metro	m
tiempo	segundo	s
masa	kilogramo	kg

Para expresar magnitudes muy grandes o muy pequeñas de cantidades físicas, se pueden usar potencias de 10 donde la magnitud se escribe como un entero de un dígito seguido por decimales y se le multiplica por una potencia de 10. A esta forma de expresar los valores se le llama *notación científica*; por ejemplo, 1,234,000 m se escribe como 1.234×10^{6} m y 0.000456 s como 4.56×10^{-4} s. Una forma más adecuada para expresar valores muy grandes o muy pequeños es emplear un prefijo en la unidad (como en kilómetro) o el símbolo del prefijo con el símbolo de la unidad (como en km).

Los prefijos (y sus símbolos) mostrados en la tabla siguiente son los más empleados. Los prefijos asociados a factores mayores a la unidad (*múltiplos*) son de origen griego, los símbolos de los tres primeros en orden creciente se escriben con minúsculas y los restantes con mayúsculas. En cambio, la mayoría de los prefijos asociados a los factores menores a la unidad (*submúltiplos*) son de origen latino, pero algunos tienen otro origen; por ejemplo, femto y atto provienen del danés. Todos los símbolos de los prefijos asociados a los submúltiplos se escriben con minúsculas.

Prefijos y símbolos para indicar múltiplos y submúltiplos.

factor	*prefijo*	*símbolo*	*factor*	*prefijo*	*símbolo*
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f

10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yota	Y	10^{-24}	yocto	y

Cada prefijo representa una potencia de 10 que debe ser usada como un factor multiplicativo. Agregar un prefijo a una unidad tiene el efecto de multiplicarla por el factor asociado, y agregar el símbolo de un prefijo al símbolo de la unidad tiene el mismo efecto. De esta manera se habla de kilómetro (km) para representar 10^3 m, de microsegundo (μs) para representar 10^{-6} s, miligramo (mg) para 10^{-3} g, etcétera. Usando los prefijos se pueden expresar valores de cantidades físicas en forma compacta, por ejemplo

$$1{,}234{,}000 \text{ m}=1.234\times10^6 \text{ m}=1.234 \text{ Mm},$$

$$0.000456 \text{ s}=4.56\times10^{-4} \text{ s}=456\ \mu\text{s}.$$

Con el uso de los prefijos y las unidades SI es posible expresar la magnitud de cualquier cantidad física, en particular de las extremadamente grandes, como las astronómicas, y extremadamente pequeñas, como las microscópicas y atómicas. De esta manera puede escribirse la distancia media entre Júpiter y el Sol como 7.78×10^8 km o 7.78×10^{11} m=0.778×10^{12} m=0.778 Tm (terámetro); la masa del protón se escribe como 1.67×10^{-27} kg o como 1.67×10^{-24} g=1.67 yg (yoctogramo). Más ejemplos aparecen en la referencia 1. Algunos de estos prefijos no solamente se usan en las unidades, también se usan para indicar la escala de aplicación o de estudio de algunas disciplinas; de esta manera se han acuñado términos como microbiología y nanotecnología.

Unidades derivadas. A partir de las unidades básicas se obtienen las unidades derivadas, como las correspondientes a la velocidad, aceleración, fuerza, energía, etc. De esta manera, la unidad SI para la velocidad se obtiene en función de las unidades básicas como m/s (léase "metro por segundo"), para aceleración m/s^2, para fuerza kg·m/s^2, para energía kg·m^2/s^2. Algunas unidades derivadas reciben nombres y símbolos especiales; así tenemos para fuerza el kg·m/s^2=newton=N, para energía el kg·m^2/s^2=joule=J, para potencia el joule/s=watt=W. Los nombres de las unidades derivadas se escriben con minúscula y sus símbolos con mayúscula. Por convención internacional, los nombres de estas unidades conservan su ortografía original y no se castellanizan. Así, podemos escribir la magnitud de una fuerza de

1,234 newton como 1.234×10^3 newton o como 1.234 kilonewton o como 1.234 kN, esta última forma es la más aceptable.

Otras unidades. Existen otras unidades de longitud, tiempo y masa que son de uso frecuente; por ejemplo: angstrom, hora, tonelada. A unidades como éstas y otras que aparecen en la tabla siguiente con sus valores y símbolos, se les llama unidades toleradas por el sistema SI. Para obtener más información sobre este sistema, consultar la referencia 2.

Algunas unidades toleradas y conservadas por el SI.

cantidad	*unidad*	*valor*	*símbolo*
longitud	angstrom	10^{-10} m	Å
superficie	hectárea	10^4 m^2	ha
tiempo	minuto	60 s	min
	hora	3,600 s	h
ángulo	grado	(π/180) rad	°
	minuto	(1/60)°	´
	segundo	(1/3600)°	´´
masa	tonelada	10^3 kg	t

Otros sistemas de unidades. Hay dos sistemas de unidades que todavía se usan. Uno es el llamado *guassiano*, con el cual se expresa parte de la literatura de física. El otro es el *sistema inglés*, en donde las cantidades básicas de la mecánica son longitud, tiempo y fuerza, y sus correspondientes unidades y símbolos son pie (ft), segundo (s) y libra (lb).

Conversiones de un sistema a otro. Para transformar las unidades de una cantidad física dentro de un mismo sistema de unidades o de un sistema de unidades a otro, las unidades se usan como *símbolos algebraicos* con un factor de conversión; las unidades también se usan para determinar las unidades que le corresponden a alguna cantidad calculada.
Conversión de unidades. Para cambiar las unidades de una cantidad física se usa el *factor de conversión*. Por ejemplo, sabemos que un minuto (min) es igual a 60 segundos, que se escribe

como 1 min=60 s, lo cual reescribimos como $\frac{1\,min}{60\,s} = 1$ o como $1 = \frac{60\,s}{1\,min}$; estos cocientes se pueden usar como factores de conversión donde cada número y su unidad deben tratarse juntos. Así, para convertir 5 minutos en segundos, procedemos de la manera siguiente

$$5 \text{ min}=5 \text{ min } (1)=5 \text{ min} \left(\frac{60\,s}{1\,min}\right) =300 \text{ s.}$$

Obsérvese que el primer paso para convertir los 5 min fue multiplicarlo por la unidad (uno), pero ese uno en el siguiente paso fue expresado de la forma conveniente para que las unidades que aparecen en la cantidad inicial sean canceladas con las del denominador y que al final solamente se conserven las nuevas unidades. En otras palabras, al efectuar conversiones las unidades obedecen las mismas reglas algebraicas que las variables y los números.

Determinación de unidades. Las unidades también se usan como símbolos algebraicos para determinar las unidades de alguna cantidad calculada. Por ejemplo, supóngase que se desea determinar las unidades de la constante de la gravitación universal (*G*) a partir de la expresión $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, donde *F* representa fuerza, *r* distancia y *m* masa. Primero se despeja *G* resultando $G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$, de donde se obtiene directamente que sus unidades son $N \cdot m^2/kg^2$.

1.2 Cifras significativas

Cuando se escribe el valor de una medición, que representa (por ejemplo) la magnitud de una distancia, como L_1=1.2 m o como L_2=1.20 m, matemáticamente ambas formas significan lo mismo, pero físicamente se está expresando diferente información. Se dice que la primera cantidad tiene 2 cifras significativas (CS) y que la segunda tiene 3. Además, en el primer caso se entiende que la regla con que se hace la medición puede usarse para medir décimos, mientras que en el segundo caso la otra regla puede medir centésimos. En cada caso no pueden ser medidas cantidades más pequeñas como centésimos o milésimos, respectivamente. A falta de información puede suponerse que al escribir L_1=1.2 m, estamos razonablemente seguros de que L_1 se halla entre 1.1 y 1.3 m, mientras que si expresamos L_2 como 1.20 m, quiere decir que L_2 probablemente se halla entre 1.19 y 1.21 m. En otras palabras, puede suponerse que la **incertidumbre experimental** es del tamaño de una unidad del número "dudoso" (dígito menos significativo por su posición respecto al punto decimal).

La atención a las cifras significativas es importante cuando se presentan los resultados de las mediciones y de los cálculos; tan erróneo es incluir demasiadas cifras como demasiado pocas. A continuación se dan algunas reglas sencillas para decidir sobre el número de CS de una cantidad.

Regla 1. Para conocer el número de CS que una cantidad tiene, se debe contar desde la izquierda sin tomar en cuenta los primeros ceros y conservar todos los números. Ejemplo, la cantidad x=0.003 km=3 m tiene 1 CS, sin importar las unidades; en cambio, x=0.0030 km=3.0 m tiene 2 CS.
Evitar anotaciones ambiguas. La cantidad x=300 m no indica con claridad si existen 1, 2 o 3 cifras significativas. Debe escribirse usando potencias de 10 como $x=3\times10^2$ m o $x=3.0\times10^2$ m o $x=3.00\times10^2$ m para expresar que estas cantidades tienen 1, 2 o 3 CS.

Regla 2. Cuando se multiplican o dividen números que tienen diferentes CS, el producto o el cociente debe tener el número de cifras significativas igual al número de cifras significativas que tiene el *factor menos preciso*. Ejemplo, $1.2\times3.456=(4.1472)=4.1$. El producto completo se ha escrito entre paréntesis, pero el resultado se redondea y escribe con 2 CS porque el factor menos preciso tiene 2 CS (1.2 en este caso).
Especial cuidado debe tenerse en operaciones como en $9.8\times1.234=(12.0932)=12.1$, donde el primer factor tiene 2 CS, pero tiene 3 si se redondea y escribe como 10.0. Por tanto, el resultado debe expresarse con 3 cifras significativas.

Regla 3. En el resultado de la suma y la resta, la posición relativa (al punto decimal) del dígito menos significativo de cada cantidad participante es la que importa, el número de CS no es importante. Por ejemplo, sumemos tres cantidades con 3 CS cada una 12.3+3.45+0.567=16.3; la suma completa es 16.317, pero en el resultado sólo aparecen décimos porque en los décimos está el mayor decimal menos significativo de los sumandos, que en este caso corresponde al primer sumando; en otras palabras, al estar el dígito menos significativo (de un sumando) en la posición de los décimos, no es aceptable incluir (en la suma) centésimos ni milésimos; el dígito menos significativo en los otros dos sumandos aparece en la posición de los centésimos y milésimos, respectivamente.

1.3 Análisis dimensional

A cada una de las cantidades físicas básicas se le asignan **dimensiones**. Las dimensiones de las cantidades no dependen de las unidades en que se expresen. En mecánica las cantidades básicas son longitud, tiempo y masa; sus dimensiones son L, T y M, respectivamente. Para expresar la dimensión de una cantidad física, la cantidad se escribe entre paréntesis rectangulares; por ejemplo, [longitud]=L que se lee como "la dimensión de longitud es L". Las dimensiones de las cantidades derivadas se expresan en términos de las dimensiones de las cantidades básicas. Así, por ejemplo, las dimensiones de la velocidad, la aceleración y la fuerza son:

$$[velocidad]=[v]=\left[\frac{longitud}{tiempo}\right]=\frac{L}{T}=LT^{-1}$$

$$[aceleración]=[a]=\left[\frac{velocidad}{tiempo}\right]=\frac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}$$

$$[fuerza]=[F]=[masa \text{ x } aceleración]=MLT^{-2}$$

El argumento de algunas funciones, como las trigonométricas, no tiene dimensión; decimos que el argumento es una *cantidad adimensional*. Por ejemplo, si escribimos y=sen$x$, las cantidades y y x no tienen dimensión; pues por definición la función seno es el cociente de dos longitudes y el argumento x expresado en radianes es otro cociente de longitudes.

El análisis dimensional es muy útil para detectar posibles errores que se pueden cometer al escribir las fórmulas y ecuaciones, también es útil para encontrar la forma algebraica de la dependencia de una cantidad que se sabe o supone depende de otras cantidades.

Detectando errores. Si la ecuación consta de uno o más términos, cada uno de los términos debe tener las mismas dimensiones:

[ecuación]=[término 1]+[término 2]+[término 3]+…

Verificar la *congruencia dimensional* de una fórmula o de una ecuación significa comprobar que las dimensiones de la cantidad que está en el lado izquierdo del signo de igualdad son las mismas dimensiones de la combinación de las cantidades que está en cada uno de los términos del lado derecho. Esta condición es necesaria, pero no suficiente, para que una ecuación sea correcta. Por ejemplo, si escribimos la expresión

$$x = x_0 + v_0 t + at^2,$$

donde x y x_0 tienen dimensión de longitud, v_0 de velocidad, t de tiempo y a de aceleración, sería correcta desde el punto de vista del análisis dimensional pues todos los términos tienen la misma dimensión (de longitud). Pero es incorrecta, como veremos en el capítulo siguiente, porque el último término debe contener un factor adimensional igual a ½ (si a es constante).

Buscando la forma algebraica. El análisis dimensional también estudia las combinaciones, con la dimensionalidad correcta, de cantidades físicas. Por ejemplo, supóngase que la cantidad física *W* depende de las cantidades *X*, *Y*, *Z*, ¿de qué manera se deben combinar estas cantidades (multiplicando o dividiéndolas) para que la dimensión resultante sea correcta? La respuesta la da el análisis de las dimensiones. Debido a que el análisis dimensional no proporciona información sobre constantes adimensionales, se debe incluir la posibilidad de su presencia escribiendo una relación de proporcionalidad y no de igualdad. En general se propone que la relación sea de la forma

$$W \propto X^a Y^b Z^c$$

donde el símbolo ∝ quiere decir "es proporcional a", y los exponentes *a*, *b* y *c* representan potencias numéricas adimensionales a la cuales se tendrán que elevar las cantidades *X*, *Y* y *Z*. Para calcular los exponentes, primero se escriben las dimensiones del lado derecho en términos de las dimensiones de *X*, *Y* y *Z* elevadas a las potencias *a*, *b* y *c*,

$$[W] = [X]^a [Y]^b [Z]^c.$$

A continuación se usa la condición que la potencia final de la dimensión básica *M* en el lado derecho debe ser igual a la potencia que se conoce de *M* en la cantidad *W*. Se hace lo mismo para las dimensiones básicas *L* y *T*. Así se obtienen tres ecuaciones simultáneas que permiten calcular los valores de los exponentes *a*, *b* y *c*. Cuando la cantidad *W* sea una función de más de tres variables se tendrían más de tres potencias desconocidas, pero sólo tres ecuaciones para determinarlas (una para cada dimensión *M*, *L*, *T*). En este caso, aunque sólo puede ser posible obtener una solución parcial, el análisis dimensional sigue siendo útil.

Resumiendo, el análisis dimensional es de gran ayuda para detectar posibles errores en algún resultado algebraico intermedio o en el resultado final; además, proporciona la forma algebraica en que una cantidad física depende de otras cantidades. Pero no proporciona información sobre constantes adimensionales o funciones adimensionales (por ejemplo números y funciones trigonométricas).

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

Ejemplo. Un objeto de masa m se suelta desde una altura h. Supongamos que la velocidad (v_s) con que llega al suelo depende de la masa, de la altura y de la aceleración de la gravedad, g. Usando análisis dimensional, calcular cómo depende v_s de las cantidades m, h y g.

Solución. Ignorando posibles constantes numéricas multiplicativas, se propone que la velocidad sea de la forma

$$v_s \propto m^a h^b g^c,$$

donde a, b y c son exponentes constantes que serán determinados con un análisis dimensional. Se tienen tres ecuaciones, una para cada dimensión M, L y T. En términos de las dimensiones de las cantidades m, h y g, se escribe

$$[v_s] = [m]^a[h]^b[g]^c = (M)^a(L)^b(LT^{-2})^c = M^a L^{b+c} T^{-2c}$$

Como las dimensiones del lado izquierdo (LT^{-1}) y del lado derecho deben ser las mismas, los exponentes deben satisfacer las relaciones siguientes

para M: $0=a$,

para L: $1=b+c$,

para T: $-1=-2c$.

De la última relación se obtiene que c=½, al sustituir este valor en la segunda igualdad se obtiene que b=½. El resultado es que a=0, b=c=½. Por tanto, se obtiene que la velocidad con que el objeto llega al suelo no depende de la masa y que la forma algebraica en que v_s depende de h y g es:

$$v_s \propto (hg)^{\frac{1}{2}}.$$

Si en vez del símbolo $\propto$ se quisiera escribir el signo de igualdad (=), entonces se tendría que introducir una constante multiplicativa adimensional C con lo que el resultado sería

$$v_s = C\sqrt{hg}.$$

El análisis dimensional dice que la velocidad con que el objeto llega al suelo es independiente de su masa.

Recapitulación

En mecánica, las cantidades básicas son longitud, masa y tiempo; sus unidades son metro, kilogramo y segundo cuyos símbolos son m, kg y s. Las unidades SI de algunas cantidades derivadas reciben nombres y símbolos especiales: newton (N) para fuerza, joule (J) para energía, watt (W) para potencia. Para expresar las magnitudes de las cantidades físicas, se usan potencias de 10 (notación científica) o se emplea un prefijo en la unidad (como en kilómetro) o el símbolo del prefijo con el símbolo de la unidad (como en km).

Para convertir las unidades de una cantidad física, las unidades se usan como símbolos algebraicos con un factor de conversión; también se usan para determinar las unidades que le corresponden a alguna cantidad calculada.

La atención a las cifras significativas es importante cuando se presentan los resultados de las mediciones y de los cálculos; tan erróneo es incluir demasiadas cifras como demasiado pocas. Cuando se escribe L_1=1.2 m, puede suponerse que se está razonablemente seguro de que L_1 se halla entre 1.1 y 1.3 m, mientras que si se expresa L_2 como 1.20 m, quiere decir que L_2 probablemente se halla entre 1.19 y 1.21 m. Puede suponerse que la incertidumbre experimental es del tamaño de una unidad del número "dudoso" (dígito menos significativo por su posición respecto al punto decimal). Existen reglas para determinar el número de cifras significativas de las cantidades que resultan de operaciones con cantidades que contienen diferentes cifras significativas.

A cada una de las cantidades físicas básicas se le asignan dimensiones, las de longitud, tiempo y masa son L, T y M, respectivamente. Las dimensiones de las cantidades derivadas se expresan en términos de las dimensiones de las cantidades básicas. El argumento de algunas funciones, como las trigonométricas, no tiene dimensión y se dice que el argumento es una cantidad adimensional. El análisis dimensional es muy útil para detectar posibles errores que se pueden cometer al escribir las fórmulas y ecuaciones, también es útil para encontrar la forma algebraica de la dependencia de una cantidad que se sabe o supone depende de otras cantidades.

Bibliografía

1. Muñoz Gamboa ,C. De yotta a yocto. *Contactos*, 75,5 (enero-marzo 2010).

2. Del Río Haza, F. *El arte de investigar*. Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, México, 1990.

Problemas

1. Expresar las cantidades físicas siguientes en términos de potencias de 10 y en términos de las unidades básicas.

   a) L= 1.2 km

   b) t = 3.4 μs

   c) v = 3.6 km/s

   d) F = 150.0 kN

2. El hierro tiene una densidad (masa por unidad de volumen) de 7.87 gramos por centímetro cúbico; la masa de un átomo de hierro es de 9.27×10^{-26} kg. Si los átomos son esféricos,

   a) calcular el volumen de un átomo de hierro;

   b) si están alineados y en contacto unos con otros, calcular la distancia entre los centros de dos átomos contiguos.

3. El planeta Tierra puede considerarse como una esfera con radio igual a 6.37×10^{6} m. Calcular

   a) su circunferencia en kilómetros,

   b) su área superficial en kilómetros cuadrados y

   c) su volumen en kilómetros cúbicos.

4. Una pelota es lanzada desde el suelo con una velocidad inicial de magnitud v y formando un ángulo θ con la horizontal. El alcance R es la distancia horizontal desde el punto de lanzamiento de la pelota (en el suelo) hasta el punto donde cae al suelo. El alcance depende de la magnitud de la velocidad v, la aceleración de la gravedad g y el ángulo θ. Usando análisis dimensional, calcular la forma de la función para el alcance.

2 CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Se describe el dominio de estudio o campo de acción de la mecánica; después se definen las cantidades apropiadas, como funciones del tiempo, que se emplearán para la descripción del movimiento de un objeto que se traslada en línea recta, ya sea horizontal o vertical.

Introducción

La **mecánica** es el estudio del **movimiento** de los **cuerpos**. El término cuerpo se refiere a un objeto (sistema físico) de extensión limitada, es decir, tiene tamaño, forma y posición en el espacio tridimensional; y el término movimiento se refiere a los cambios temporales de su posición y de su forma.

Varias ramas de la física reciben el nombre de mecánica más un calificativo: mecánica relativista, mecánica estadística, mecánica cuántica y mecánica clásica. La primera estudia cuerpos que se mueven con velocidades cuya magnitud (v) es comparable, pero menor, a la velocidad de la luz (c) (es decir, $v \leq c$). La mecánica estadística estudia sistemas físicos constituidos por muchos cuerpos, como un gas, tantos que es imposible estudiarlos individualmente y se tiene que recurrir a las técnicas estadísticas. La mecánica cuántica estudia cuerpos muy pequeños como moléculas, átomos o más pequeños. En cambio, la mecánica clásica estudia cuerpos más grandes que moléculas y que se mueven lentamente ($v \ll c$). Nosotros aquí estudiaremos la **mecánica clásica** (o simplemente mecánica).

En general, el movimiento de un cuerpo es una combinación de tres movimientos: una traslación, una rotación y una deformación; la figura 2.1 lo ilustra.

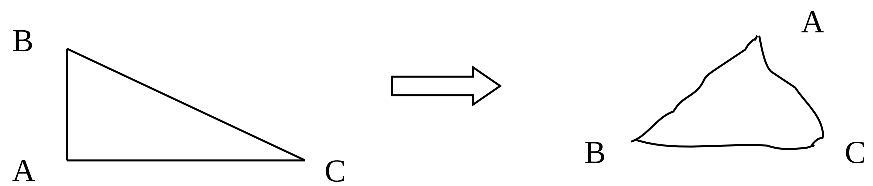


Figura 2.1. Movimiento general = traslación + rotación + deformación.

Para su estudio, los cuerpos se agrupan en dos conjuntos: cuerpos *deformables* o cuerpos *no-deformables* (también llamados cuerpos rígidos). Los cuerpos deformables son los fluidos (gases y líquidos) y los sólidos, los estudian las ramas de la mecánica clásica llamadas hidrodinámica y elasticidad, respectivamente. Los cuerpos rígidos son cuerpos ideales que solamente tienen movimientos de traslación y rotación, como ilustra la figura 2.2. Nosotros, en el estudio de la mecánica elemental, nos restringiremos primero al movimiento de traslación de los cuerpos rígidos, después a su movimiento de rotación y finalmente a los movimientos de traslación y rotación combinados.

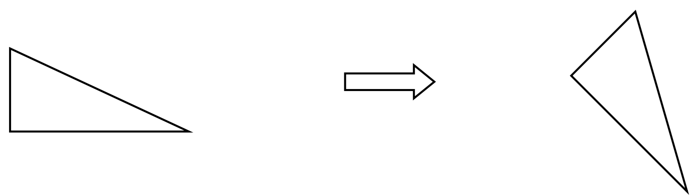


Figura 2.2. Movimiento de cuerpos rígidos: traslación y rotación.

Traslación pura. Cuando el cuerpo solamente tiene movimiento de traslación, cada punto del cuerpo describe la mismísima curva (ver figura 2.3), de tal manera que para describir su movimiento sólo se necesita describir la posición de cualquier punto elegido arbitrariamente, ya sea que se trate de un tren o de una bala. Para describir la traslación del cuerpo en el espacio sólo requerimos fijarnos en uno de sus puntos, pues en traslación pura todos sus puntos siguen trayectorias idénticas. En adelante al cuerpo le llamaremos *partícula*, *punto masa* o *masa puntual* para indicar que para describir su movimiento basta con conocer la posición, no se requiere tomar en cuenta el tamaño ni la forma.

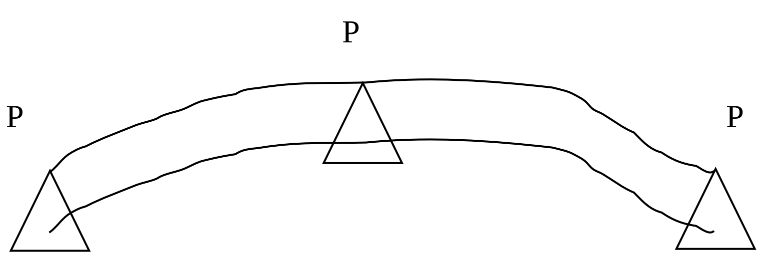


Figura 2.3. En el movimiento de traslación pura, todos los puntos del cuerpo describen la misma curva, como la del vértice P.

La mecánica tiene dos partes: **cinemática** y **dinámica**. La primera se encarga de hacer una descripción del movimiento, en nuestro caso es la cinemática traslacional. La dinámica estudia las causas del movimiento, es decir, la relación entre las fuerzas y el movimiento de los cuerpos.

Cinemática. Para estudiar la cinemática se necesitan tres elementos:

1. Un observador (el que hace la descripción).
2. Un marco de referencia, también llamado referencial o sistema de referencia. Lo representamos por un sistema de coordenadas.
3. Un reloj.

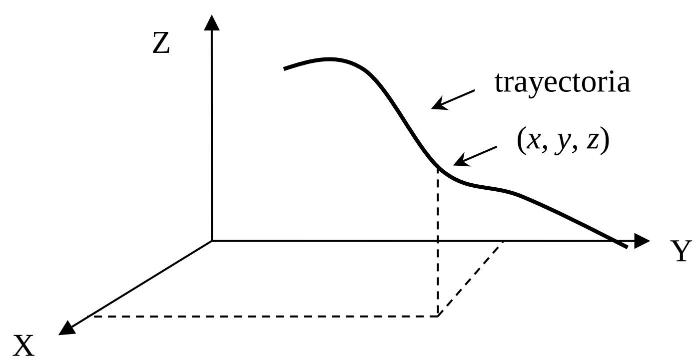


Figura 2.4. El camino que sigue la partícula en el espacio se llama trayectoria.

Llamamos **posición** de la partícula al punto (x, y, z) donde se encuentra, en el espacio tridimensional, en el **tiempo** t en que se observa dicha posición (respecto a algún tiempo t=0, cuando echamos a andar el reloj). Para describir el camino que sigue la partícula es necesario conocer la **ecuación de la trayectoria** (o trayectoria a secas), la cual representa una curva en el espacio y es una función de la posición y del tiempo: $f(x, y, z, t)=0$ (ver figura 2.4).

Por simplicidad, empezaremos a estudiar la cinemática en el caso más sencillo posible, es decir, en una dimensión. Para ello sólo se usará el eje X del sistema de coordenadas cartesianas, a lo largo del cual se supondrá que se mueve la partícula de interés.

2.1 Posición

La pista por donde se mueve la partícula es una recta y, por tanto, su trayectoria un conjunto de segmentos de recta (ver figura 2.5).

Figura 2.5. En el movimiento unidimensional la partícula sólo puede moverse en línea recta.

Para indicar la posición de la partícula es necesario fijar un eje de coordenadas (X) y un origen (O), como ilustra la figura 2.6.

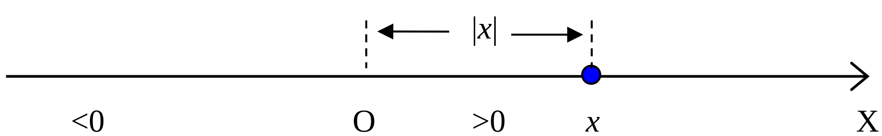


Figura 2.6. Al fijar el eje de coordenadas y el origen, la posición de la partícula queda determinada.

El eje X apunta en el sentido OX de tal manera que los puntos a la izquierda de O son negativos y a la derecha son positivos. La cantidad x representa la *posición* de la partícula en el tiempo t. En cambio, $|x|$ representa la *distancia* medida desde O a donde se encuentra la partícula (le llamamos distancia al origen), es el tamaño de x y se representa con un número positivo más una unidad, la cual es el metro en el sistema SI. Nótese que

el valor de x depende del origen y del sentido de OX

mientras que $|x|$ sólo depende del origen

La posición puede ser positiva o negativa (es un número real, $x \in \Re$); el signo de x depende de cómo se escogen el origen (O) y el sentido (OX) del eje de coordenadas, $|x|$ sólo depende del origen. Necesitamos que la descripción del movimiento no dependa del lugar donde se pone el origen O para que se le considere general y sin restricciones.

2.2 Desplazamiento

Debido a que la partícula se mueve, su posición la escribimos como $x=x(t)$ porque es una función del tiempo; en esta función está contenida toda la información del movimiento. La figura 2.7 muestra una función arbitraria $x(t)$ como función del tiempo. Llamemos x_1 y x_2 a $x(t)$ evaluada en los tiempos t_1 y t_2 (t_2 es posterior a t_1), es decir $x_1=x(t_1)$ y $x_2=x(t_2)$.

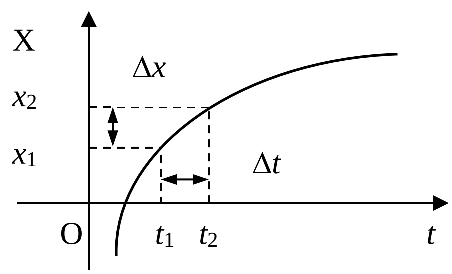


Figura 2.7. La partícula se mueve desde una posición negativa hasta una posición positiva.

Definiciones

Desplazamiento = cambio en la posición: $\Delta x = x_2 - x_1$ es el desplazamiento entre x_1 y x_2.

Lapso = intervalo de tiempo: $\Delta t = t_2 - t_1$ es el tiempo transcurrido.

A diferencia con la posición, ahora se observa que para el desplazamiento:

Δx no depende del origen, sólo depende del sentido OX

$|\Delta x|$ no depende del origen ni del sentido OX

No confundir posición con desplazamiento. Veamos cómo son el signo y el tamaño del desplazamiento con el auxilio de la figura 2.8 que representa el movimiento de una partícula. Como se indica con los trazos verticales en la parte izquierda de la figura, se trata de una partícula que se mueve a lo largo del eje X; parte de una posición positiva, llega a una posición mayor y empieza su viaje de regreso, pasa por el origen y avanza hasta una posición negativa donde nuevamente regresa hacia el origen deteniéndose en una posición negativa cerca del origen.

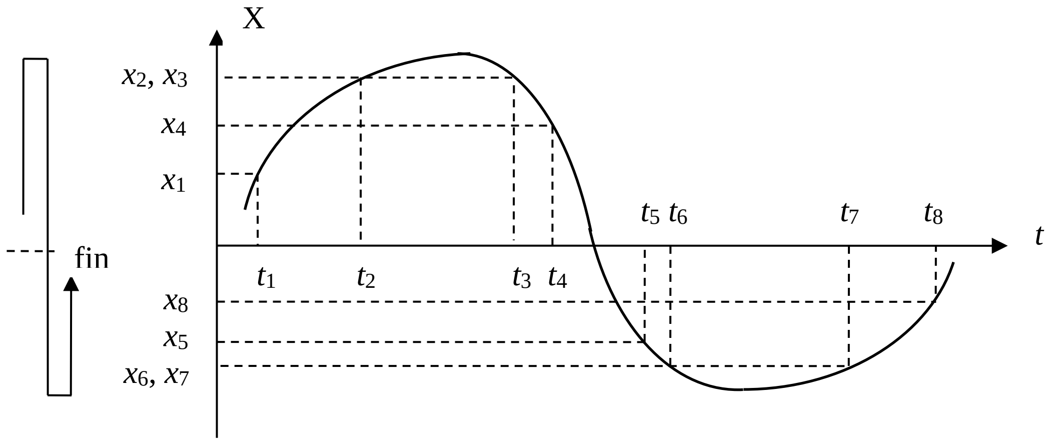


Figura 2.8. Se muestran diferentes posiciones que originan desplazamientos positivos, negativos y nulos.

Las posiciones x_1 a x_4 son positivas mientras que las posiciones x_5 a x_8 son negativas. Algunas posiciones tienen asignados dos tiempos para indicar que la partícula pasó por ahí dos veces: de ida y de regreso (como sucede con x_2 y x_3, o x_6 y x_7); si representamos como $\Delta x_{ij}=x_j-x_i$ el desplazamiento desde la posición x_i hasta la posición x_j, entonces en estos casos el desplazamiento es nulo. Para facilitar el análisis de los desplazamientos mostrados en la figura 2.8, se ha elaborado la tabla siguiente.

Desplazamientos obtenidos de la figura 2.8.

	desplazamiento	respecto al origen, la partícula	la posición x	
1	$\Delta x_{12}=x_2-x_1>0$	se alejó	aumentó	↑
2	$\Delta x_{23}=x_3-x_2=0$	no cambió	no cambió	=
3	$\Delta x_{34}=x_4-x_3<0$	se acercó	disminuyó	↓
4	$\Delta x_{45}=x_5-x_4<0$	se acercó y luego se alejó	disminuyó	↓
5	$\Delta x_{56}=x_6-x_5<0$	se alejó	disminuyó	↓
6	$\Delta x_{67}=x_7-x_6=0$	no cambió	no cambió	=
7	$\Delta x_{78}=x_8-x_7>0$	se acercó	aumentó	↑

En la primera columna de la tabla aparecen numerados en forma consecutiva los desplazamientos indicados en la columna 2, estos desplazamientos pueden ser positivos, nulos o negativos. La columna 3 señala lo que hace la partícula respecto al origen; la columna 4 indica el cambio que sufre la posición. Se observa que si se toma como referencia el origen, en lo mencionado en la columna 3 no hay concordancia con el signo del desplazamiento (columna 2). Por ejemplo, en el renglón 1 el desplazamiento es positivo y la partícula se alejó del origen, en el renglón 3 el desplazamiento es negativo y la partícula se acercó al origen; pero en el renglón 4 donde la partícula se acercó y después se alejó del origen, el desplazamiento es negativo. En cambio, el signo de cada desplazamiento coincide con la información proporcionada por la posición (la última columna la muestra simbólicamente). Nótese que cuando se dice que la posición aumentó o disminuyó, lo hizo **algebraicamente**; es decir, debe tomarse en cuenta el signo. Por ejemplo, el renglón 5 indica que la partícula viaja desde una posición negativa hasta otra posición negativa más alejada del origen (el desplazamiento fue negativo y la posición disminuyó), en el renglón 7 la partícula pasa de una posición negativa a otra posición negativa más cercana al origen (el desplazamiento fue positivo y la posición aumentó).

Puede decirse que el desplazamiento es positivo cuando la partícula se mueve en el sentido OX, y negativo en el caso opuesto. Esto se ilustra en el diagrama siguiente.

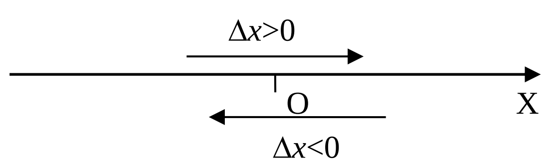


Figura 2.9. El sentido OX del eje de coordenadas define el signo del desplazamiento.

Puede decirse una vez más que

El signo de Δx no depende del origen, sólo depende del sentido del eje.

$|\Delta x|$, el tamaño de Δx no depende del origen ni del sentido del eje.

Es necesario estar alerta porque algunas veces al desplazamiento se llama distancia recorrida, lo cual, en general, es incorrecto.

2.3 Velocidad

Ahora queremos cuantificar la forma en que la posición cambia como una función del tiempo. *Velocidad media.* La velocidad media (v_m) entre dos posiciones x_1 y x_2, o equivalentemente entre los tiempos t_1 y t_2, se define como el cociente siguiente

$$velocidad \cdot media = \frac{desplazamiento}{lapso}$$

con símbolos,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (1)$$

Supondremos que $\Delta t>0$ (aunque no necesariamente), de tal manera que las propiedades de v_m están regidas por las propiedades de Δx; es decir, si el lapso es positivo, entonces

$v_m>0$ cuando $\Delta x>0$, x aumenta algebraicamente, y

$v_m<0$ cuando $\Delta x<0$, x disminuye algebraicamente.

La velocidad media tiene signo y tamaño (al igual que la posición y el desplazamiento), o sea que satisface el orden de los números reales: $-100<-10<10<100$. La unidad SI de la velocidad es m/s. La *rapidez media* es el módulo, magnitud o tamaño de v_m, es decir $|v_m|$. Es la rapidez la que tiene que ver con los conceptos de despacio y rápido.

v_m sólo depende del sentido del eje,

$|v_m|$ es independiente del origen y del sentido del eje.

Interpretación gráfica de v_m. En la figura 2.10 se muestra una curva arbitraria de la posición en función del tiempo; en ella se han marcado dos puntos por los que pasa una recta (secante) que corta la curva. Esta recta forma un ángulo α con el eje de las abscisas (el tiempo). La pendiente, por definición, es igual al cociente de la diferencia de ordenadas entre la diferencia de abscisas de dos puntos cualesquiera de la recta. La pendiente de esta recta secante también es igual a la tangente del ángulo que ella forma con el eje de las abscisas.

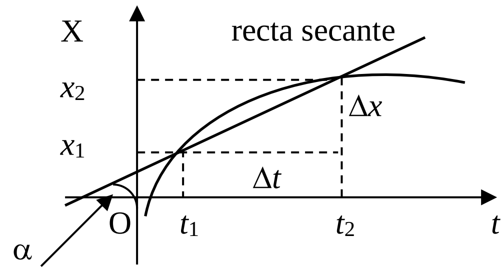


Figura 2.10. La recta secante interseca a la curva $x(t)$ en los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

Matemáticamente se escribe como

$$\text{Pendiente}=tan\alpha = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_m.$$

La relevancia de esta relación está en la igualdad de los valores numéricos únicamente, pues la pendiente es un concepto geométrico cuyas dimensiones son LT^{-1} en este caso, mientras que la función tangente es adimensional. Resulta que la pendiente de la recta secante es numéricamente igual a la velocidad media dada en la ecuación (1). La velocidad media sólo proporciona información de cómo cambió la posición en el tiempo, al pasar la partícula del punto 1 al punto 2 en un lapso $\Delta t = t_2 - t_1$, pero sin proporcionar información sobre el cambio de posición en los puntos intermedios. No se debe confundir velocidad media con velocidad promedio; una velocidad promedio es, por ejemplo, $\frac{v_1+v_2}{2}$.

Velocidad instantánea. Ahora definiremos la velocidad en el instante t arbitrario, a la cual llamaremos velocidad instantánea (o simplemente velocidad). En la figura 2.11 se ha repetido la figura anterior con algunos cambios: a las coordenadas del punto 1 ahora se le llaman t y x; a las coordenadas del punto 2 se le llaman $t+\Delta t$ y $x+\Delta x$. Queremos mover el segundo punto sobre la curva para acercarlo y hacerlo coincidir con el primero, pero manteniendo fijo el primer punto. Al hacer esto, se está reduciendo el tamaño tanto de Δt como de Δx, de tal manera que la recta secante (que pasa por el primero y el segundo puntos) se convierte en la recta tangente a la curva en el primer punto y, consecuentemente, el ángulo α se convierte en el ángulo β.

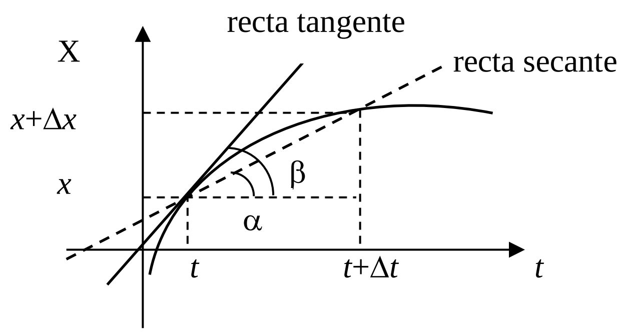


Figura 2.11. La curva es cortada por la recta secante en los puntos (t, x) y (t+Δt, x+Δx); la curva y la recta tangente se tocan en el punto (t, x).

En este proceso de tomar el límite cuando Δt tiende al valor cero, ocurre que:

1. el segundo punto se acerca y se superpone con el primero,
2. la recta secante se convierte en la recta tangente a la curva en el primer punto,
3. el ángulo α se convierte en el ángulo β y, por tanto, la tangente (trigonométrica) de α se convierte en la tangente de β.

Matemáticamente este proceso se expresa como (en la expresión siguiente, $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ debe leerse como “el límite cuando Δt tiende a cero”)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2)$$

La expresión $v = \frac{dx}{dt}$ significa que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo. En otras palabras, la velocidad instantánea es igual al límite, cuando Δt tiende a cero, de la velocidad media. Esta cantidad $v = \frac{dx}{dt}$ también es una función del tiempo, v=v(t). A la magnitud de la velocidad instantánea ($|\Delta x|$) se le llama rapidez instantánea (o simplemente rapidez).

Cuando la posición es expresada explícitamente como una función del tiempo, la velocidad se obtiene usando la operación de derivada. Sin embargo, aun en el caso en que no se sepa la forma analítica de la función x(t), pero que sí se conozca la forma de la curva y, sin calcular la derivada, pueden conocerse algunas características generales. Por ejemplo, la figura 2.12 muestra una curva arbitraria, la cual tiene un máximo y un mínimo; la recta tangente a la curva en estos puntos es paralela al eje de las abscisas, es decir la pendiente es cero y, por tanto, la velocidad en esos puntos también es cero. En los otros puntos de la curva la velocidad es distinta de cero, pero puede saberse su signo pues es el mismo signo de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto en cuestión.

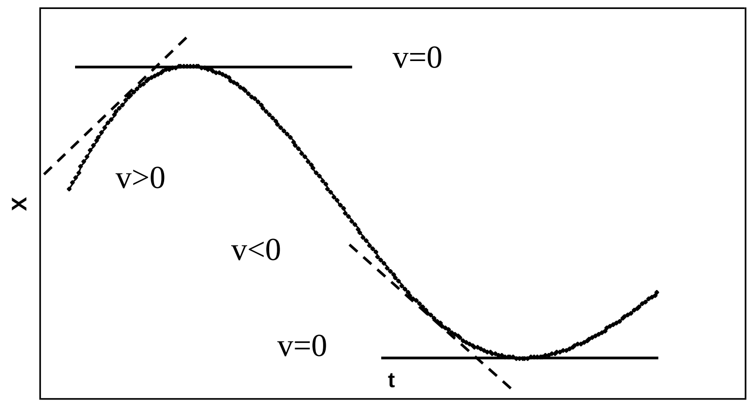


Figura 2.12. El signo de la velocidad en un punto de la curva es el mismo que el de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Aquí se ha dicho que en mecánica la velocidad representa el cambio temporal de la posición y que la rapidez es su magnitud. Al cambio en el tiempo de otras cantidades, diferentes a la posición, a veces se le llama velocidad o rapidez, indistintamente; por ejemplo, se habla de la velocidad con que se produce una reacción química, de la rapidez con que se enfría un objeto que ha sido calentado. En general, el cambio temporal de cualquier cantidad se representa matemáticamente como la derivada de esa cantidad respecto al tiempo.

2.4 Aceleración

La velocidad ha sido definida como el cambio de la posición en el tiempo. En forma análoga, la aceleración es el cambio de la velocidad en el tiempo. Todo lo que se dijo anteriormente en el caso de la velocidad es válido para la aceleración si cambiamos la palabra posición por velocidad y la palabra velocidad por aceleración.

Aceleración media. Se define como

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (3)$$

Δv define el signo de a_m; si Δv aumenta, entonces $a_m>0$, pero si Δv disminuye entonces $a_m<0$ (Δv disminuye cuando v se hace menos positiva o más negativa). Por ejemplo, consideremos la curva de la posición en función del tiempo representada en la figura 2.12. Alrededor del máximo, la velocidad (pendiente de la recta tangente) es positiva antes del máximo, nula en el máximo y es negativa después del máximo; en esta región alrededor del punto máximo en que la velocidad disminuye (algebraicamente), la aceleración es negativa. En cambio, alrededor del mínimo la velocidad tiene el comportamiento opuesto: de negativa pasa a ser positiva, siendo nula en el mínimo; en esta región alrededor del mínimo la aceleración es positiva. En el sistema SI, la aceleración se mide en m/s^2.

Aceleración instantánea. Se define como

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (4)$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo; puede ser también una función del tiempo. Debido a que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo, la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo; es decir,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (5)$$

$\longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \longrightarrow$

Ejemplo 1. Calcular la velocidad y la aceleración en los siguientes tres casos: cuando la posición 1) es una constante, 2) varía linealmente en el tiempo, y 3) varía como una función cuadrática del tiempo. En cada caso trazar las curvas (como función del tiempo) correspondientes a la posición, la velocidad y la aceleración.

Soluciones.

1) *Función constante*. Supóngase que $x=b$ con b constante, en este caso la partícula no se mueve. La velocidad y la aceleración son $v = \frac{dx}{dt} = 0$ y $a = \frac{dv}{dt} = 0$. Sabemos que la posición

es constante e igual a b, pero puede ser positiva o negativa. A continuación en la figura 2.13 están las rectas de trazos que representan la posición, la velocidad y la aceleración.

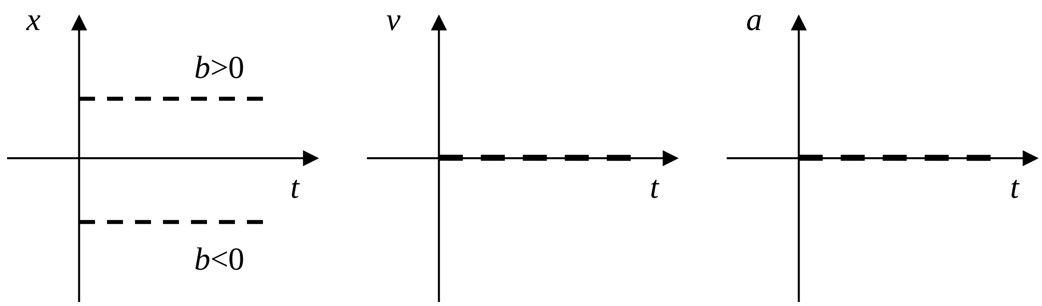


Figura 2.13. Diagramas que representan a la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo para cuando la posición es constante.

2) *Función lineal*. Supóngase que $x=b+ct$ con b y c constantes. La función de la posición es una línea recta con pendiente c y que corta al eje de las ordenadas en el punto b. La velocidad es $v=\frac{d}{dt}(b+ct)=0+\frac{d}{dt}(ct)=c\frac{d}{dt}(t)+t\frac{d}{dt}(c)=c+0=c$. Como la velocidad es constante, se dice que la partícula tiene *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU). La aceleración es $a=\frac{dv}{dt}=0$. En la figura 2.14 se toma en cuenta que b y c pueden ser constantes positivas o negativas. En la gráfica x vs t, la recta trazada con línea continua y gruesa tiene $b>0$ y $c>0$, la trazada con línea continua y delgada tiene $b>0$ y $c<0$, la recta de trazos gruesos tiene $b<0$ y $c>0$, la de trazos delgados tiene $b<0$ y $c<0$. La recta con $b=0$ no fue trazada, pero debe pasar por el origen para cualquier valor de c.

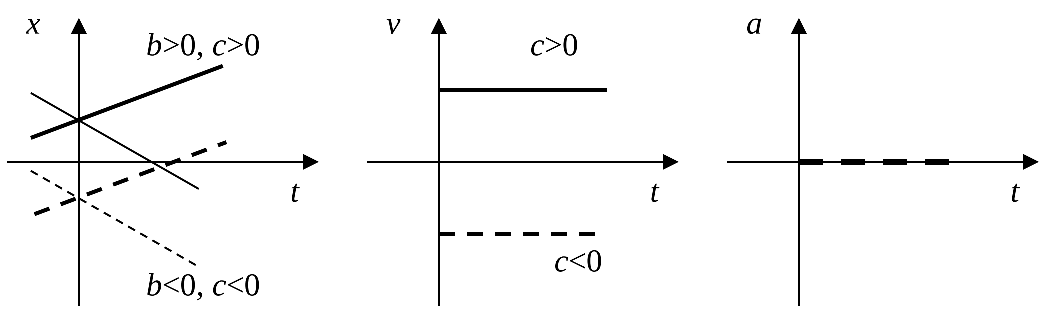


Figura 2.14. Diagramas de la posición, velocidad y aceleración para el caso en que la posición es una función lineal del tiempo.

3) *Función cuadrática*. Ahora supóngase que $x=b+ct+dt^2$ con los parámetros b, c y d constantes. Esta función es una parábola que corta al eje de las ordenadas en el punto b (pues $x=b$ en $t=0$) y sus ramas se abren hacia arriba si $d>0$ o hacia abajo si $d<0$. La velocidad es $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(b + ct + dt^2) = c + 2dt,$ la cual es una recta con ordenada al origen igual a c y pendiente $2d$. La aceleración es $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(c + 2dt) = 2d,$ la cual es una constante. Si la aceleración es constante, se dice que la partícula tiene *movimiento uniformemente acelerado* (MUA). La figura 2.15a corresponde al caso en que $d>0$ y la figura 2.15b corresponde al caso $d<0$. En ambos casos, en la gráfica v vs t se representan las rectas con los dos posibles signos de la constante c.

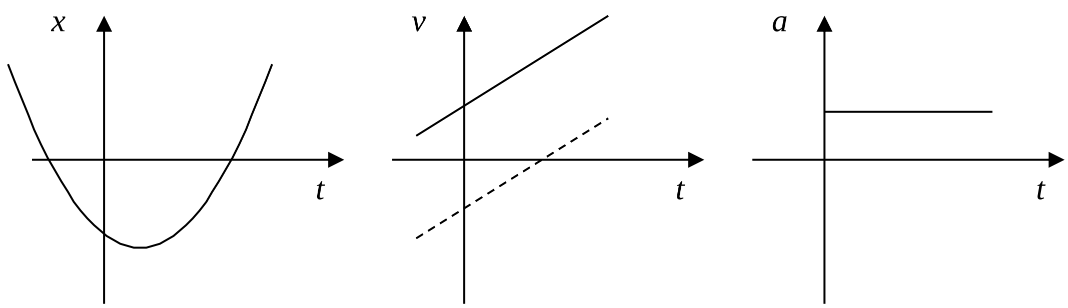


Figura 2.15a. Si la posición es una parábola ($x=b+ct+dt^2$), sus ramas se abren hacia arriba cuando d es positiva.

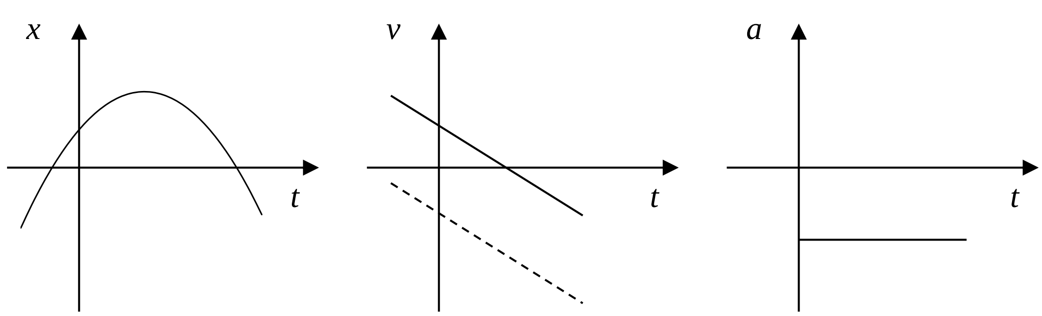


Figura 2.15b. Las ramas de la parábola se abren hacia abajo cuando d es negativa.

En estas tres situaciones del ejemplo 1 la aceleración es constante, pero sólo en la tercera es distinta de cero. Nótese que la situación 3 contiene como casos particulares a las dos primeras. A continuación se determinará el significado físico de las constantes b, c y d y se analizará con mayor detalle la situación 3.

2.5 Movimiento con aceleración constante

Supóngase que cuando se inicia el cronómetro (es decir, en el tiempo t=0), la posición de la partícula es $x(t=0)=x_0$ y que la velocidad en ese mismo instante es $v(t=0)=v_0$; estas dos cantidades (x_0 y v_0) representan las *condiciones iniciales*.

1) En el primero de los casos recién presentados en el ejemplo anterior, se propuso que $x=b$, siendo b una constante. Por tanto, $b=x_0$; el cuerpo no se mueve, su velocidad y aceleración son nulas en todo tiempo.

2) MRU. En el segundo caso la posición fue $x=b+ct$ y la velocidad calculada fue $v=c$, de tal manera que la posición evaluada en $t=0$ es $x(t=0)=b$; por tanto, $b=x_0$ y $c=v_0$; se tiene movimiento rectilíneo uniforme en el que la velocidad es constante y la aceleración es nula.

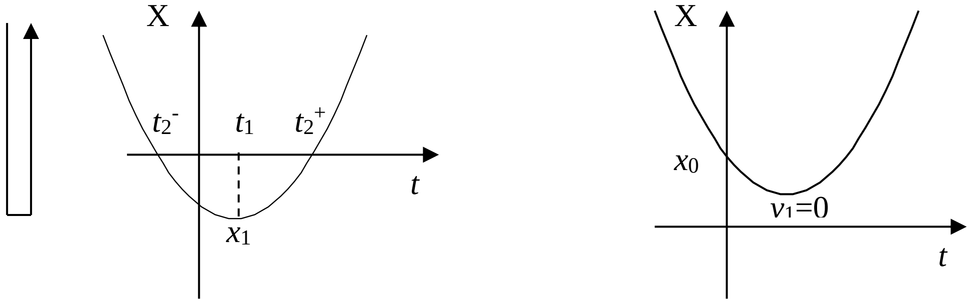
3) MUA. En cambio, en el caso 3 la posición fue $x=b+ct+dt^2$, y la velocidad y la aceleración calculadas fueron $v=c+2dt$ y $a=2d$, respectivamente; estas tres cantidades evaluadas en $t=0$ conducen a que $b=x_0$, $c=v_0$ y $2d=a$; este caso se llama movimiento uniformemente acelerado en el que la aceleración es una constante diferente de cero.

Ahora que se conoce el significado de estas tres constantes (b, c y d), las respectivas funciones pueden expresarse como

$$x=b \longrightarrow x=x_0$$
$$x=b+ct \longrightarrow x=x_0+v_0t$$
$$x=b+ct+dt^2 \longrightarrow x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

El análisis de esta última expresión se facilita gráficamente, representa una parábola en una gráfica x vs t. Primero se considerará el caso $a>0$.

i) *a*>0. En la figura 2.16a se muestra la posición en función del tiempo de una partícula que, dependiendo de las condiciones iniciales, parte de un punto en la región de posiciones positivas, se acerca al origen, avanza a la región de posiciones negativas y después regresa.



(a) (b)

Figura 2.16. La parábola en el dibujo del lado izquierdo corta al eje X en un punto x_0 negativo, mientras que en el dibujo derecho lo corta en un punto x_0 positivo.

La parábola en el diagrama X-t tiene por ecuación a $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ y, debido a que sus ramas se abren hacia arriba (a>0), presenta un mínimo en el punto con coordenadas (t_1, x_1). La parábola en t=0 tiene el valor x_0; si x_1<0 (figura 16a), entonces la curva corta el eje del tiempo en t_2^- y t_2^+ (los superíndices indican que un tiempo es mayor que el otro, no necesariamente que el menor sea negativo). En cambio, si x_1>0 (figura 2.16b) entonces la parábola no corta al eje del tiempo. La velocidad en el punto mínimo es nula, es decir v_1=v(t_1)=0, pues la recta tangente ahí tiene pendiente cero, pero en cualquier instante ligeramente anterior (o posterior) a t_1 la velocidad es negativa (o positiva), en concordancia con el valor de la pendiente de la recta tangente. Estas observaciones hechas a partir de la figura, enseguida serán calculadas analíticamente.

Disponemos de las dos ***ecuaciones cinemáticas básicas*** de una partícula que se mueve con aceleración constante:

posición $$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \qquad (6)$$

velocidad $$\boxed{v = v_0 + at} \qquad (7)$$

Cálculo de las coordenadas del mínimo. La partícula llega a este punto en el tiempo t_1, su posición es x_1, y su velocidad v_1 es nula. Evaluando la ecuación (7) en el tiempo t_1 se obtiene $v_1 = v(t_1) = v_0 + at_1 = 0$, de donde resulta que

$$t_1 = -\frac{v_0}{a}, \qquad (8)$$

el signo de t_1 está determinado por el signo de v_0 pues $a>0$. La posición x_1 se obtiene al sustituir este tiempo t_1 en la ecuación (6):

$$x_1 = x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a {t_1}^2 = x_0 + v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = x_0 - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a},$$

por tanto

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2a}. \qquad (9)$$

Las cantidades t_1 y x_1 dependen de las condiciones iniciales. La posición x_1 es menor o igual que x_0 ($x_1 \leq x_0$), la igualdad se cumple cuando $v_0=0$ en cuyo caso la parábola sería simétrica respecto al eje de las ordenadas X.

Cálculo de t_2. La posición de la partícula es nula, es decir que en los tiempos t_2 pasa por el origen; esto significa que para calcularlos se debe evaluar la ecuación (6) en este tiempo t_2 e igualar a cero:

$$x_2 = x(t_2) = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a {t_2}^2 = 0.$$

Resulta una ecuación de segundo grado cuya solución es

$$t_2 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\left(\frac{a}{2}\right) x_0}}{2\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 a x_0}}{a}. \qquad (10)$$

Con esta fórmula se obtienen los dos valores para el tiempo t_2, en los cuales la partícula pasa por el origen. Analicemos los tres posibles valores del radicando.

1. *Radicando positivo*. $v_0^2 - 2ax_0 > 0 \rightarrow 0 > 2ax_0 - v_0^2$, la desigualdad puede escribirse como $0 > x_0 - \frac{v_0^2}{2a}$; pero esta cantidad es x_1, por tanto $x_0 - \frac{v_0^2}{2a} = x_1 < 0$. Que el radicando sea positivo es equivalente a que x_1 sea negativa, por tanto hay dos valores reales de t_2, como se ha representado en la figura 2.16a.
2. *Radicando negativo*. En este caso se obtienen raíces complejas, lo cual geométricamente significa que la parábola no corta el eje del tiempo y, consecuentemente, $x_1>0$ (ver figura 2.16b).
3. *Radicando nulo*. En este caso $t_2^- = t_2^+ = -\frac{v_0}{a}$, los dos valores t_2 se colapsan en uno solo. Geométricamente quiere decir que el eje del tiempo es tangente a la parábola en su punto mínimo y que, por tanto, $x_1=0$ y $t_1=t_2$.

ii) a<0. En este caso, x_1 y t_1 tienen la misma forma algebraica que en el caso anterior (a>0). Ahora los valores de t_2^- y de t_2^+ son reales si x_1>0 (ver la figura 2.15b), son complejos si x_1<0, y son iguales si x_1=0.

Otras relaciones cinemáticas.

Las ecuaciones cinemáticas básicas para la posición y la velocidad (para el caso de aceleración constante), representadas en las expresiones (6) y (7), respectivamente, son funciones únicamente del tiempo. A menudo conviene tener expresiones para la posición en función de la velocidad o en función de la velocidad y el tiempo. Para lograrlo se despeja t de la expresión (7) y el resultado se sustituye en la (6).

(a). *Relación entre posición y velocidad.* Al despejar t en la ecuación (7) se obtiene $t = \frac{v-v_0}{a}$, que al sustituirlo en (6) resulta

$$x = x_0 + v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2 = x_0 + \frac{v_0}{a}(v-v_0) + \frac{1}{2a}(v-v_0)^2,$$

rearreglando:

$$a(x-x_0) = v_0(v-v_0) + \frac{1}{2}(v-v_0)^2 = (v-v_0)\left[v_0 + \frac{1}{2}(v-v_0)\right] = (v-v_0)\frac{1}{2}(v+v_0),$$

de donde finalmente se obtiene

$$\boxed{2a(x-x_0) = v^2 - v_0^2} \qquad (11)$$

(b). *Relación entre posición, velocidad y tiempo.* Sustituyendo t otra vez en la ecuación (6), pero ahora sólo un factor t en el término cuadrático:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}t(at) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}t(v-v_0) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}vt - \frac{1}{2}v_0t.$$

Por tanto

$$\boxed{x = x_0 + \frac{1}{2}(v+v_0)t} \qquad (12)$$

De las 4 ecuaciones (6), (7), (11) y (12), válidas únicamente si el movimiento es uniformemente acelerado (a=constante), sólo las ecuaciones (6) y (7) son independientes, son las ecuaciones cinemáticas básicas; las ecuaciones cinemáticas derivadas (11) y (12) fueron obtenidas de las ecuaciones (6) y (7). Debe recordarse que en estas cuatro ecuaciones, las cantidades *t*, *x*, y *v* son variables generales y que cuando son evaluadas en algún punto o tiempo particular se deben usar subíndices para enfatizar que son valores particulares.

Ejemplo 2. Un vehículo que viaja en línea recta con una aceleración constante tardó 6.0 s en recorrer la distancia entre dos puntos separados 60.0 m. Cuando pasó por el segundo punto su rapidez era de 15.0 m/s. a) ¿Cuál era su rapidez en el primer punto? b) ¿Cuál era su aceleración? c) ¿A qué distancia antes del primer punto estaba el vehículo en reposo?

Solución. En el diagrama se muestran los datos y las incógnitas en los tres puntos.

Teniendo en cuenta los valores de las condiciones iniciales, las ecuaciones cinemáticas básicas (6) y (7) se reducen a $x = \frac{1}{2}at^2$ y $v = at$; al evaluarlas en los puntos 1 y 2 se obtiene

$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ (a), $x_2 = \frac{1}{2}at_2^2$ (b), $v_1 = at_1$ (c), $v_2 = at_2$ (d).

Con estas cuatro ecuaciones más las dos en el segundo punto, se pueden conocer las 6 incógnitas (x_1, x_2, a, t_1, t_2, v_1). Cada una de estas ecuaciones contiene más de una incógnita. De manera que para resolver el problema es necesario combinarlas para obtener un adecuado sistema de ecuaciones. El problema será resuelto sin tomar en cuenta el orden en que se hacen las preguntas. Restando (b)-(a) y usando la primera ecuación en el punto 2:

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right) = \frac{a}{2}\left(t_1^2 + 12t_1 + 36 - t_1^2\right) = \frac{a}{2}\left(12t_1 + 36\right).$$

Por tanto $x_2 - x_1 = 6at_1 + 18a$. (e)

Usando (d) y otra vez la primera ecuación en el punto 2: $v_2 = at_1 + 6a$. (f)

Con los valores numéricos de x_2-x_1 y de v_2, las ecuaciones (e) y (f) representan dos ecuaciones con dos incógnitas (a y t_1):

$60 = 6at_1 + 18a \rightarrow 10 = at_1 + 3a$; (e')

con el valor de la velocidad en el punto 2: $15 = at_1 + 6a$. (f')

Despejando at_1 de (e') y sustituyendo en (f'): $15 = 10 - 3a + 6a \rightarrow 3a = 5 \therefore a = \frac{5}{3}$.

Es decir, a=1.67 m/s^2.

Usando este valor de a en (e'): $t_1 = \frac{10-3a}{a} = \frac{10-5}{5/3} = 3$. Es decir, t_1=3 s.

Regresando a (a): $x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 9 = \frac{15}{2}$. Es decir, x_1=7.50 m.

Regresando a (c): $v_1 = \frac{5}{3} \times 3 = 5$. O sea, v_1=5.0 m/s.

Ejemplo 3. En el instante en que un semáforo cambia a luz verde, un automóvil arranca desde el reposo con una aceleración constante de 2.0 m/s^2. En el mismo instante un camión, que viaja a una velocidad constante de 10.0 m/s, pasa junto al automóvil.

a) ¿A qué distancia desde el punto de arranque el automóvil alcanzará al camión?

b) ¿A qué velocidad estará viajando el automóvil en ese instante?

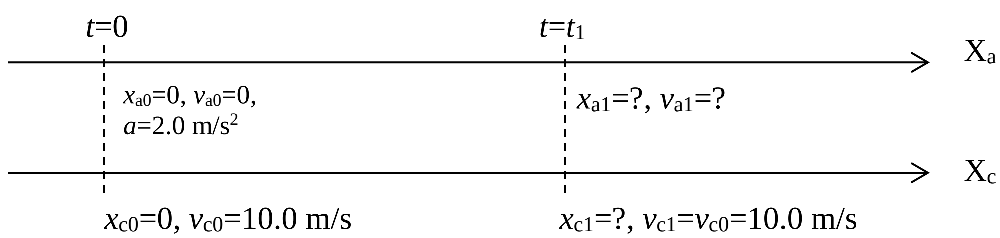
c) Trazar una gráfica cualitativa de posición en función del tiempo para cada vehículo.

Solución. Las ecuaciones cinemáticas básicas para la posición y la velocidad, como funciones del tiempo, de un objeto que se traslada con aceleración constante son

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (6)$$

$$v = v_0 + at \qquad (7)$$

Con los subíndices a y c se representarán las cantidades asociadas al automóvil y al camión, respectivamente. Se escogen las posiciones de los vehículos y el tiempo como cero en el instante en que aparece la luz verde; el automóvil alcanza al camión en el tiempo t_1 en la posición $x_{a1} = x_{c1}$, como ilustra el diagrama



a) A partir de la ecuación (6), las posiciones del automóvil y del camión, en función del tiempo, son

$$x_a = \frac{at^2}{2} \qquad \text{(a)}$$

$$x_c = v_{c0}t \qquad \text{(b)}$$

Estas dos posiciones son iguales en el tiempo t_1. Evaluando la ecuación (b) en t_1 y despejando este tiempo, se obtiene

$$x_{c1} = v_{c0}t_1 \longrightarrow t_1 = \frac{x_{c1}}{v_{c0}} \qquad \text{(c)}$$

Usando (c) en (a) se obtiene $x_{a1} = \frac{at_1^2}{2} = \frac{a}{2}\left(\frac{x_{c1}}{v_{c0}}\right)^2$

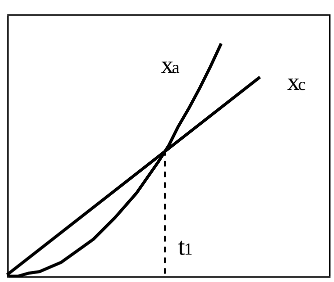
Como $x_{a1}=x_{c1}$, se obtiene que $x_{c1} = \frac{2v_{c0}^2}{a}$ (d)

Con los datos numéricos se obtiene $x_{a1}=x_{c1}=100$ m.

b) La velocidad que el automóvil lleva cuando alcanza al camión se obtiene al evaluar la expresión (7) en el tiempo t_1, y usando (c) y (d), el resultado es

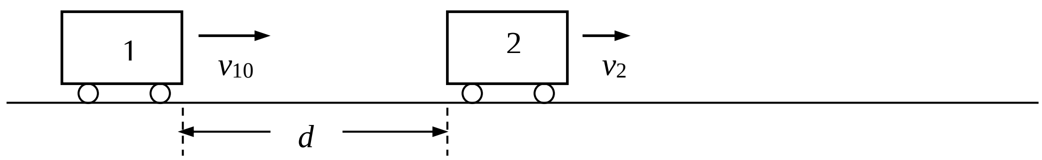
$v_{a1} = at_1 = a\frac{x_{c1}}{v_{c0}} = \left(\frac{a}{v_{c0}}\right)\left(\frac{2v_{c0}^2}{a}\right) = 2v_{c0}$; al dar alcance el automóvil al camión la rapidez del primero es el doble que la del segundo. Por tanto, $v_{a1}=2v_{c0}=20$ m/s.

c) Las coordenadas en que las curvas x_a y x_c se intersecan corresponden al tiempo y la posición en que el automóvil alcanza al camión.

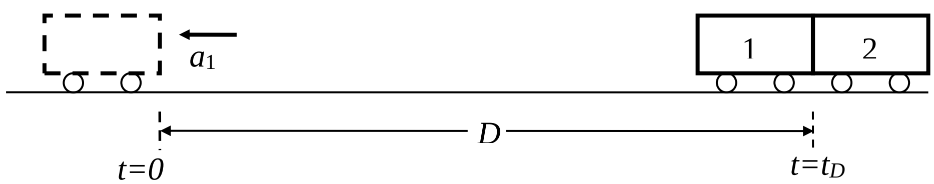


Ejemplo 4. Un tren se mueve con velocidad constante v_{10}; el maquinista observa a otro tren que se encuentra adelantado una distancia d en la misma vía, moviéndose en el mismo sentido, pero con una menor rapidez constante v_2. El maquinista aplica los frenos y el tren adquiere una aceleración constante a_1. Analizar las condiciones en que la colisión puede ocurrir.

Solución. La situación inicial se ilustra en la figura siguiente.



El tiempo t se medirá a partir del momento en que los trenes están separados por la distancia d, y sus respectivas posiciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se medirán desde la posición inicial del tren 1. Suponiendo que el contacto se produce, el tren 1 alcanza al tren 2 cuando el tren 1 ha recorrido una distancia D y ha transcurrido un tiempo t_D, ver la figura.



La información de cada una de estas cantidades puede agruparse como:

- Información que se conoce: d, v_{10}, v_2, a_1, $v_{10} > v_2$.
- Información que no se conoce: D, t_D.

Hasta antes de que se produzca la colisión, en el problema hay dos tipos de cantidades:

- Cantidades constantes: a_1, v_2.
- Cantidades variables: t, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $v_1(t)$.

Se pueden hacer las observaciones y predicciones siguientes:

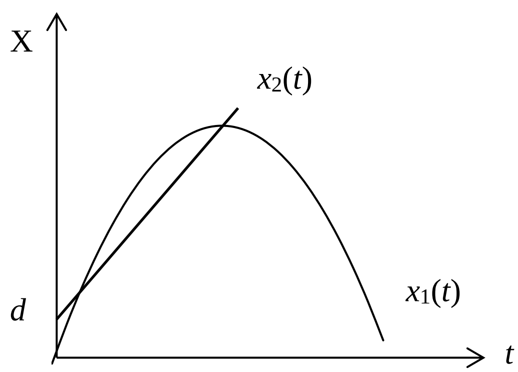
- D y t_D deben ser números reales y positivos.
- Debe obtenerse $D \geq d$, la igualdad $D=d$ se cumplirá cuando $v_2=0$ y que haya contacto.
- Se puede esperar que la colisión se produzca cuando d, v_2 y a_1 tengan valores pequeños.

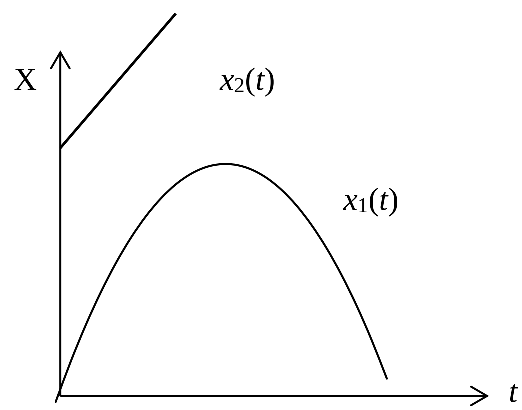
Las ecuaciones cinemáticas básicas para la posición y la velocidad de un cuerpo que se mueve en una línea recta con aceleración constante son: $x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ y $v = v_0 + at$. Con los símbolos ya asignados a las posiciones y velocidades, las ecuaciones cinemáticas son:

$$\text{tren 1: } x_1(t) = v_{10} t - \frac{a_1}{2} t^2 , \qquad \text{(a)}$$

$$\text{tren 2: } x_2(t) = d + v_2 t . \qquad \text{(b)}$$

La ecuación (a) es una parábola y la ecuación (b) es una línea recta. Ambas curvas se muestran con trazos continuos:





Los puntos donde estas dos curvas se intersecan son las soluciones. El primero tiene coordenadas (t_D, D), representa el tiempo y la posición en que el tren 1 alcanza al tren 2. El segundo punto (aunque es solución matemática) carece de significado físico, pues se presenta en un tiempo mayor a t_D. Si el tren 1 frena y se queda parado (v_1=0), entonces solamente los puntos de la parábola que están a la izquierda del punto máximo tienen significado físico. Si la distancia d fuera mayor que la posición del punto máximo de la parábola, no habría posibilidad de colisión; esta situación se representa con la recta en el segundo diagrama cuya pendiente tiene el mismo valor que la recta del primer diagrama. Las ecuaciones (a) y (b) también representan las posiciones de los trenes si se movieran en vías independientes y paralelas, en cuyo caso el primer punto de intersección representaría el tiempo y la posición en que el tren 1 rebasa al tren 2, y el segundo punto representaría el tiempo y la posición en que el tren 2 rebasa al tren 1.

Los puntos de intersección de las curvas satisfacen las dos ecuaciones cinemáticas:

$$D = v_{10} t_D - \frac{a_1}{2} t_D{}^2 , \qquad \text{(c)}$$

$$D = d + v_2 t_D . \qquad \text{(d)}$$

El problema matemático consiste en resolver este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. De la ecuación (d) se obtiene directamente que el tiempo de colisión es

$$t_D = \frac{D-d}{v_2}\,. \qquad \text{(e)}$$

Después de sustituir este tiempo t_D en la ecuación (c) y hacer algunas simplificaciones se llega a una ecuación de segundo grado para la cantidad D, y se obtiene el resultado:

$$D = \frac{v_2}{a_1}(v_{10} - v_2) + d \pm v_2 \sqrt{\frac{2}{a_1}\left[\frac{(v_{10} - v_2)^2}{2a_1} - d\right]}\,. \qquad \text{(f)}$$

Al sustituir el resultado (f) en la ecuación (e), para el tiempo de colisión se obtiene:

$$t_D = \frac{1}{a_1}(v_{10} - v_2) \pm \sqrt{\frac{2}{a_1}\left[\frac{(v_{10} - v_2)^2}{2a_1} - d\right]}\,. \qquad \text{(g)}$$

Con estas fórmulas para D y t_D ya se tiene lo necesario para conocer si se produce o no la colisión. Debido a que los primeros términos en las fórmulas (f) y (g) son positivos, se debe escoger el signo negativo de la raíz cuadrada para obtener la distancia D menor y el tiempo t_D menor. Se exige que la raíz cuadrada sea un número real para que los resultados tengan significado físico, es decir, en el radicando debe cumplirse que

$$\frac{(v_{10} - v_2)^2}{2a_1} > d\,,$$

en este caso habrá colisión. Por el contrario, si

$$\frac{(v_{10} - v_2)^2}{2a_1} < d\,,$$

entonces el radicando es negativo y por tanto la raíz cuadrada no es un número real, lo cual quiere decir geométricamente que las curvas x_1(t) y x_2(t) no se cortan; nunca se produce la colisión en este caso. En cambio, si

$$\frac{(v_{10} - v_2)^2}{2a_1} = d\,,$$

el radicando es nulo; significa que la recta $x_2(t)$ es tangente a la curva $x_1(t)$. El tren 1 se detiene justo en el momento en que alcanza al tren 2, o bien en ese momento los trenes empiezan a alejarse entre sí pero siguen moviéndose en el mismo sentido. Este ejemplo está analizado, con más detalle que el aquí expuesto, en la referencia 1 donde también se analizan extensiones al problema que incluyen situaciones más generales.

Tiro vertical y caída libre

En las cercanías de la superficie terrestre todos los objetos caen hacia la tierra con aceleración constante. Se le llama aceleración de la gravedad, se representa como *g* y en unidades SI tiene el valor 9.8 m/s^2, mientras que en el sistema inglés tiene el valor 32 ft/s^2. El valor de *g* depende de la altitud, en la ciudad de México tiene el valor 9.78 m/s^2 (referencia 2). Las ecuaciones cinemáticas para el movimiento uniformemente acelerado son válidas siempre y cuando la aceleración sea constante y el movimiento sea en el **vacío**, pues hasta este momento no se ha incorporado elemento alguno que represente al medio que produce una fuerza de frenado. En el aire, estas ecuaciones son sólo una buena aproximación.

Tiro vertical. El movimiento en la dirección vertical se describirá usando el eje Z, el cual se escoge positivo hacia arriba y el origen se coloca al nivel del suelo. Con este sistema de referencia la aceleración *g* es negativa siempre. Para usar las ecuaciones cinemáticas (6) a (11), sólo tiene que sustituirse *a* por –*g*. La ecuación (6) de la posición queda como

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \longrightarrow z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (13)$$

donde z_0 y v_0 son la posición y la velocidad medidas en el tiempo t=0; es decir, representan la posición y la velocidad iniciales. La velocidad (7) ahora es

$$v = v_0 + at \longrightarrow v = v_0 - gt\,. \qquad (14)$$

La relación (11) ahora se escribe como $v^2 - {v_0}^2 = -2g(z - z_0)$.

La velocidad inicial (v_0) puede ser positiva, negativa o cero, lo cual significa respectivamente que el objeto ha sido lanzado hacia arriba, lanzado hacia abajo o solamente soltado. En la figura 2.17 se representa la posición vertical en función del tiempo de un objeto que es lanzado hacia arriba con velocidad inicial v_0, desde la altura inicial z_0, y el cual alcanza una altura máxima *h*. En la figura también se representa a la velocidad en función del tiempo, la cual gradualmente va disminuyendo al transcurrir el tiempo y es nula instantáneamente cuando llega a la altura *h*.

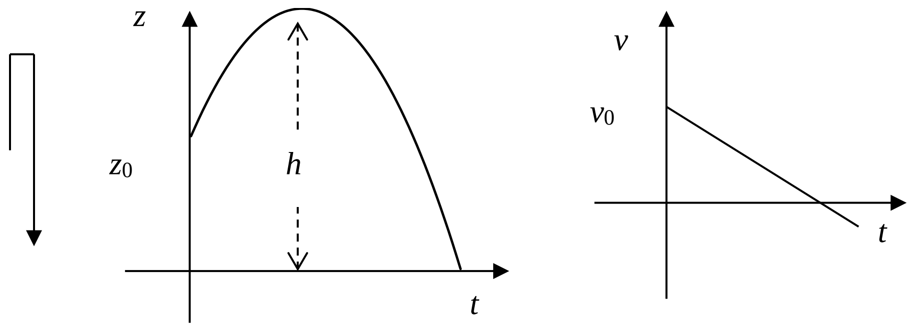


Figura 2.17. La partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0.

La ecuación (14) indica que el objeto está siendo desacelerado (o frenado) en su movimiento de subida provocando que su velocidad disminuya, se detiene instantáneamente (v=0), y después está acelerado en su movimiento de bajada causando que la magnitud de la velocidad aumente. El tiempo y la posición del máximo de la parábola se calculan usando las ecuaciones (13) y (14). El cálculo ya fue hecho (para el mínimo) y se llegó a las expresiones (8) y (9), las cuales con la notación actual son

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} \longrightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}, \qquad (15)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{{v_0}^2}{2a} \longrightarrow z_1 = h = z_0 + \frac{{v_0}^2}{2g}. \qquad (16)$$

Para determinar el tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo, se iguala a cero la ecuación (13). El cálculo ya fue hecho obteniéndose el resultado (10), el cual ahora se expresa como

$$t_2 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 - 2ax_0}}{a} \longrightarrow t_2 = \frac{v_0 \mp \sqrt{{v_0}^2 + 2gz_0}}{g}. \qquad (17)$$

Obsérvese que del doble signo $\mp$ debe escogerse el signo + porque la raíz del radicando representa un valor de magnitud mayor que v_0 y el tiempo debe ser positivo.

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

Ejemplo 5. Un globo aerostático asciende con una velocidad constante de 12 m/s y cuando está a una altura de 80 m sobre el nivel del suelo se deja caer un bulto. a) Calcular el tiempo que el bulto tarda en llegar al suelo y b) la rapidez con que llega al suelo.

Solución. Mediremos el tiempo desde el momento en que el bulto es soltado. Escogemos el eje vertical positivo hacia arriba con origen en el suelo. La velocidad inicial del bulto es la misma que tiene el globo. Disponemos de las dos ecuaciones cinemáticas básicas

$$z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (13)$$

$$v = v_0 - gt \qquad (14)$$

Los datos son: z_0=80 m y v_0=12 m/s. Con el subíndice 1 se identificarán las cantidades cuando el bulto llega al suelo.

a) El tiempo t_1 se calcula haciendo z_1=0 en la ecuación (13):

$0 = z_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^{\,2}$. Al resolver esta ecuación de segundo grado se obtiene

$$t_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^{\,2} + 2 z_0 g}}{g} .$$

Debe escogerse el signo positivo de la raíz cuadrada pues el tiempo es positivo. El resultado numérico es t_1 = 5.5 s.

b) La velocidad v_1 se calcula al evaluar la ecuación (14) en el tiempo t_1, se obtiene

$$v_1 = v_0 - g t_1 = v_0 - v_0 \mp \sqrt{v_0^{\,2} + 2 z_0 g} .$$

Por tanto,

$$v_1 = \mp \sqrt{v_0^{\,2} + 2 z_0 g} .$$

Debe tomarse el signo menos pues la velocidad es hacia abajo (negativa). El resultado numérico de la rapidez (magnitud de la velocidad) es v_1 = 41.4 m/s.

Otra forma de resolver este problema es usando la ecuación (11): $2a(x - x_0) = v^2 - v_0^{\,2}$, que se escribe como $-2g(z - z_0) = v^2 - v_0^{\,2}$; al evaluar en el suelo se obtiene

$v_1^{\,2} - v_0^{\,2} = -2g(z_1 - z_0) = -2g(0 - z_0)$, este resultado es igual al obtenido antes. Para calcular el tiempo t_1 se usa este resultado de v_1 en la ecuación (14)

$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$

Caída libre. Esta situación ocurre cuando la partícula es soltada (velocidad inicial nula) desde una altura z_0. En las ecuaciones (13) a (17) se escribe v_0=0. Para las ecuaciones cinemáticas básicas se obtiene que:

$$z = z_0 - \frac{1}{2} g t^2, \qquad (13’)$$

$$v = -gt. \qquad (14’)$$

Las curvas de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo aparecen en la figura 2.18. La ecuación (13’) representa una parábola simétrica respecto al eje Z, mientras que la ecuación (14’) representa una línea recta de pendiente negativa que pasa por el origen.

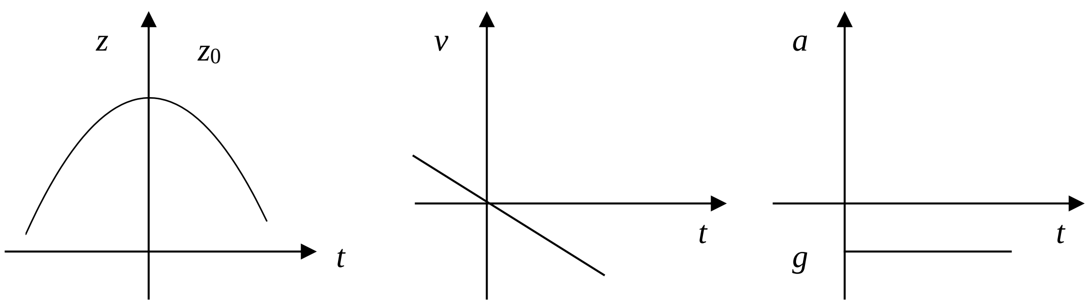


Figura 2.18. Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo para un objeto en caída libre.

2.6 Derivación e integración

Si se conoce la posición como una función del tiempo, entonces se pueden calcular la velocidad y la aceleración a través de la operación de derivación respecto al tiempo. Simbólicamente, este procedimiento puede representarse de la manera siguiente

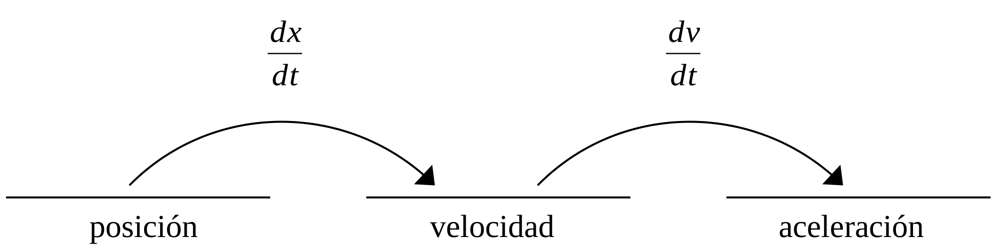


Figura 2.19. Procedimiento para calcular la velocidad y la aceleración a partir de la posición.

El procedimiento en dirección opuesta puede realizarse; es decir, si se conoce explícitamente la aceleración como una función del tiempo, entonces la velocidad y la posición se pueden calcular mediante la operación de integración. A continuación se aplica esta operación para calcular la velocidad y la posición para el caso de movimiento con **aceleración constante**. Al multiplicar la definición de la aceleración por *dt* (diferencial de *t*) se obtiene: $adt = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt$. Recuerde que la diferencial de una función arbitraria *f*(*y*) es igual a la derivada de la función, respecto a la variable independiente, multiplicada por la diferencial de la variable independiente; es decir, $df = \left(\frac{df}{dy}\right)dy$. Usando este resultado, se puede escribir

$$adt = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt = dv.$$

Integrando el primer miembro entre los límites 0 y *t*, y el segundo miembro entre los correspondientes límites v_0 y *v* (las condiciones iniciales están representadas por los límites inferiores), se obtiene el resultado ya conocido (ver ecuación (7)):

$$\int_0^t adt = \int_{v_0}^{v} dv \Rightarrow at = v - v_0. \qquad (18)$$

Ahora que ya se conoce la velocidad en función del tiempo, la operación de integración se aplica otra vez para calcular la posición. Al multiplicar la definición de la velocidad por diferencial de *t* y usando nuevamente el resultado del cálculo diferencial, en relación a la diferencial de una función, se obtiene

$$vdt = \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = dx.$$

Al sustituir la expresión dada en (18) para la velocidad e integrar el primer miembro entre los límites 0 y *t*, y el segundo miembro entre los correspondientes límites x_0 y *x*, se obtiene el resultado ya conocido (ver ecuación (6)):

$$\int_0^t vdt = \int_0^t (v_0 + at)dt = \int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = x - x_0 \qquad (19)$$

La operación de integración es la operación opuesta a la de derivación. La integración realizada puede representarse simbólicamente como en la figura siguiente

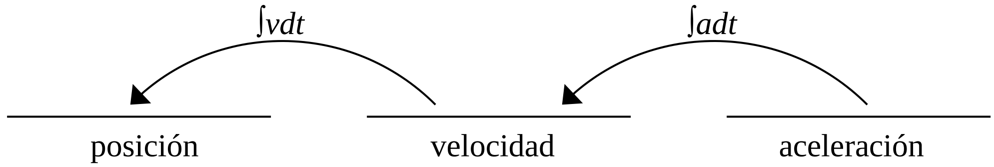


Figura 2.20. Procedimiento para calcular la velocidad y la posición a partir de la aceleración.

Recapitulación
Se empezó a estudiar la cinemática del movimiento de una masa puntual en el caso más sencillo posible: en una dimensión. Se usa el eje X del sistema de coordenadas cartesianas, a lo largo del cual se supone que se mueve la partícula. Se usa x para representar la *posición* de la partícula en el tiempo t. $|x|$ representa la distancia a donde se encuentra la partícula, medida desde el origen, es el tamaño de x y se representa con un número positivo más una unidad, la cual es el metro en el sistema SI. El valor de x depende del origen y del sentido del eje, $|x|$ sólo depende del origen.

La posición se escribe como $x=x(t)$ pues es una función del tiempo; en ella está contenida toda la información del movimiento. Llamemos x_1 y x_2 a $x(t)$ evaluada en los tiempos t_1 y t_2, $x_1=x(t_1)$ y $x_2=x(t_2)$. Se define el desplazamiento como el cambio en la posición: $\Delta x = x_2-x_1$. Se define el lapso como el intervalo de tiempo: $\Delta t = t_2-t_1$. A diferencia con la posición, se observa que para el desplazamiento: Δx no depende del origen, sólo depende del sentido del eje, mientras que $|\Delta x|$ no depende del origen ni del sentido del eje.

La velocidad sirve para saber cómo cambia la posición en el tiempo. La velocidad media (v_m) entre dos posiciones x_1 y x_2, se define como el cociente del desplazamiento entre el lapso $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, tiene signo y tamaño, su unidad SI es m/s. La *rapidez media* es el tamaño de v_m, es decir $|v_m|$. No confundir velocidad media con velocidad promedio. Ahora se define la velocidad instantánea (o simplemente velocidad); se mueve el segundo punto para acercarlo y hacerlo coincidir con el primero, pero manteniendo fijo el primero. Este proceso se expresa como $v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$; $v = \frac{dx}{dt}$ significa que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo. También es función del tiempo, la magnitud ($|v|$) se llama rapidez instantánea (o simplemente rapidez).

La aceleración es el cambio de la velocidad en el tiempo; la *aceleración media* se define como $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$; en el sistema SI, se mide en m/s^2. La *aceleración instantánea* se define como $a = \frac{dv}{dt}$; es la derivada de la velocidad respecto al tiempo; o sea, es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Supóngase que en t=0 la posición de la partícula es x_0 y la velocidad v_0, representan las condiciones iniciales. En el movimiento uniformemente acelerado (o movimiento con aceleración constante), las ecuaciones cinemáticas básicas son: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ **(6)**, y $v = v_0 + at$ **(7)**. La curva de (6) es una parábola, mientras que la de (7) es una línea recta; son funciones únicamente del tiempo. Conviene tener también expresiones para la posición en función de la velocidad o en función de la velocidad y el tiempo. Se despeja t de (7) y se sustituye en (6): $2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$ y $x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$.

Tiro vertical y caída libre. En las cercanías de la superficie terrestre todos los objetos caen con aceleración constante llamada aceleración de la gravedad, g, con valor 9.8 m/s^2. El movimiento en la dirección vertical se describe usando el eje Z, el cual se escoge positivo hacia arriba y el origen se coloca al nivel del suelo. Para usar las ecuaciones cinemáticas sólo tiene que sustituirse a por $-g$.

Bibliografía

1. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la Resolución de Problemas. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2005. Capítulo 2.

2. Riveros, H. Los Placeres del Pensamiento. *Boletín* de la Sociedad Mexicana de Física, (abril-junio 2005).

Problemas

1. En la figura 2.21 se muestra la gráfica velocidad-tiempo de un objeto que se mueve en línea recta.
   a) ¿Qué aceleración instantánea lleva el objeto cuando t = 5 s?
   b) ¿Cuál es la aceleración media entre t = 20 y t = 30 *s*?
   c) ¿Qué distancia recorrió en los 30 s?

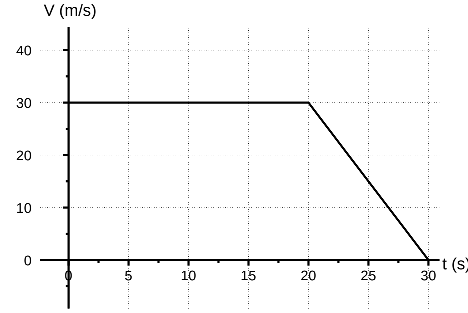


Figura 2.21. Problema 1.

2. El gráfico de la posición versus el tiempo de la figura 2.22 representa el movimiento de un objeto que sigue una trayectoria rectilínea. (a) La velocidad es constante entre los puntos:

A y B: Si No
B y C: Si No
C y D: Si No

(b) Cuál es la velocidad instantánea del objeto en:

t = 0.5 s v = ...
t = 2.0 s v = ...
t = 4.0 s v = ...

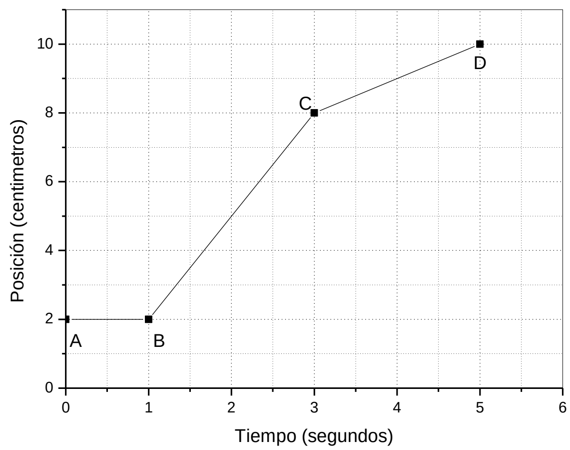


Figura 2.22. Problema 2.

3. Una partícula se mueve a lo largo de un eje X y su posición se ajusta a la función:

$$x\,(t) = (1\ \text{m/s}^2)\,t^2 - (4\ \text{m/s})\,t + 3\ \text{m}$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Encontrar:

a) La velocidad media en los intervalos de t = 1 s a t = 4 s y de t = 1 s a t = 3 s.
b) La velocidad instantánea en t = 1 s y en t = 3 s.
c) La aceleración instantánea para cualquier valor de t.

4. Una partícula se mueve a lo largo del eje X según la ecuación $x\,(t) = \text{A}t + \text{B}t^2$, donde A = 20 m/s y B = 10 m/s^2. Hallar a) la velocidad media durante los primeros 3 s de movimiento, b) la velocidad de la partícula cuando t = 3 s y c) su aceleración en t = 3 s

5. Una partícula se mueve a lo largo del eje X según la siguiente función de la posición:

$$x(t) = -4 - t + 3t^2$$

donde x se mide en metros y t en segundos. Determinar

a) La posición de la partícula en t = 1 s.
b) El punto de retorno de la partícula, y el instante en que ocurre.
c) Determine la velocidad y la aceleración instantáneas en t = 5 s.
d) Determine los desplazamientos en los 2 lapsos: de t = 0 s a t = 1 s, y de t = 1 s a t = 2 s.

6. Un objeto se mueve en línea recta con velocidad constante. Su velocidad instantánea en cualquier tiempo, respecto a su velocidad media, es a) mayor que su velocidad media, b) menor, c) igual.

7. Un automóvil parte del reposo y se mueve en línea recta; durante 20 segundos aumenta su rapidez a una razón constante de 7.2 km/h cada segundo. Calcular su aceleración en m/s^2.

8. Un coche y un autobús que parten del reposo uno a lado del otro en t = 0 s, tienen la misma aceleración, pero el automóvil mantiene su aceleración por el doble de tiempo que el autobús y luego ambos se detienen. Comparado con el autobús, el automóvil recorrerá una distancia a) dos veces mayor, b) cuatro veces mayor, c) igual.

9. Un automóvil arranca desde el reposo con una aceleración constante a de 2 m/s^2. En el mismo instante un camión, que viaja en una pista paralela a una rapidez constante de 45 km/h, rebasa al automóvil.

a) ¿A qué distancia desde el punto de arranque el automóvil alcanza al camión?
b) ¿En cuánto tiempo el automóvil alcanza al camión?
c) ¿A qué velocidad está viajando el automóvil en ese instante?
d) Trazar una gráfica cualitativa de posición en función del tiempo para cada vehículo.

10. Un tren se mueve con velocidad constante v_1; el maquinista observa a otro tren que se encuentra adelantado una distancia d en una vía paralela, moviéndose en sentido contrario, con una rapidez constante v_2. Calcular a) la posición en que los trenes pasan uno frente al otro y b) el tiempo en que eso ocurre.

11. Un globo aerostático asciende con una velocidad constante de 12 m/s y cuando está a una altura de 80 m sobre el nivel del suelo se deja caer un bulto. Calcular a) el tiempo que el bulto tarda en llegar al suelo (desde el instante en que se soltó), b) la velocidad con que llega al suelo, c) el tiempo en que el bulto alcanza su altura máxima, d) la altura máxima que alcanza el bulto desde el suelo,.

12. Una canica cae verticalmente a partir del reposo y golpea el terreno con una rapidez de 24 m/s. a) ¿Desde qué altura cayó? b) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire?

13. Calcular la velocidad con que una pelota debe ser lanzada (desde el suelo) verticalmente hacia arriba para que llegue a una altura máxima de 45 m. Calcular también el tiempo que la pelota tarda en subir.

14. Una pelota es arrojada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 30.0 m/s. Despreciar efectos de resistencia del aire.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a una altura de 40 m cuando va subiendo?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará?
c) ¿Cuánto tiempo tarda en volver a pasar por los 40 m de altura al ir de bajada?

15. Una pelota que es arrojada verticalmente hacia arriba alcanza una altura máxima de 12 m. a) ¿Con qué rapidez se le arrojó inicialmente? b) ¿Cuánto tiempo está en el aire desde que se arroja hasta que vuelve al punto de lanzamiento?

16. Una pelota de tenis se deja caer al piso desde una altura de 4.00 m, rebota a una altura de 2.00 m. Si la pelota estuvo en contacto con el piso durante 12.0 ms, ¿cuál fue su aceleración media durante el contacto? La aceleración apunta hacia arriba o hacia abajo?

17. Una pelota que es arrojada verticalmente hacia arriba le toma 2.0 segundos llegar a una altura de 40 m. a) ¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota? (b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando llega a los 40 m de altura? c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

18. Desde un borde de la azotea de un edificio de 70 m de altura se lanza verticalmente hacia arriba un balín con una velocidad inicial de 80 m/s. a) ¿A qué altura máxima llega el balín con respecto al suelo?, b) ¿con qué velocidad se impacta contra el suelo?

19. Desde una orilla de la azotea de un edificio se lanza una piedra, verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 30 m/s. Determinar a) el tiempo que tarda en llegar hasta el punto más alto de su trayectoria. b) Si la piedra tardó 10 segundos desde su lanzamiento hasta que chocó con el suelo, ¿cuál es la altura del edificio? c) Determinar la altura máxima a la que llega.

20. Una pelota es arrojada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0 desde una altura h. a) ¿Con qué rapidez llega al suelo? b) ¿Cuánto tiempo está en el aire desde que se arroja hasta que llega al suelo? Ahora suponga que la pelota es arrojada hacia abajo con la misma rapidez inicial y desde la misma altura; resolver las dos preguntas anteriores.

21. Un automovilista viaja en línea recta a 18 m/s cuando ve una enorme piedra que bloquea el camino a una distancia de 38 m de donde se encuentra él. Si su tiempo de reacción para aplicar los frenos es de t=0.3 s y desacelera de manera constante a 4.50 m/s^2, ¿cuál será su velocidad cuando llegue a la piedra?

3 ÁLGEBRA VECTORIAL

Existen cantidades físicas que se pueden especificar con solo dar su magnitud. Pero hay otras que requieren que se especifique su magnitud, dirección y sentido. La herramienta matemática usada para cumplir con esto último son los vectores. Además de dar las representaciones gráfica y analítica, se definen algunas de las operaciones entre vectores.

3.1 Vector

Una cantidad que para estar correctamente especificada únicamente requiere de un número real y una unidad (si es que tiene dimensiones) se llama *escalar*. Ejemplos de cantidades escalares son: tiempo, masa, volumen, temperatura. Algunas cantidades escalares pueden ser positivas o negativas (como la temperatura medida en ºC), por lo que, además de la magnitud y la unidad, también tienen signo; es decir, son números reales.

Hay cantidades que, para que estén completamente especificadas, es necesario proporcionar más información además de la magnitud y la unidad. Por ejemplo, considérense las dos afirmaciones siguientes:

1. "El viento tiene una rapidez de 100 km/h en la dirección norte-sur".

2. "Un objeto es movido en línea recta una distancia *d* a partir de un punto A".

La primera afirmación está incompleta porque falta especificar con claridad si el movimiento es hacia el norte o hacia el sur; la magnitud, la dirección y la unidad se indicaron, pero no se proporcionó el sentido. En la segunda afirmación, el objeto pudo haber sido movido a cualquier punto sobre una circunferencia de radio *d* y centro en el punto A; faltó especificar la dirección y el sentido. Para que la cantidad esté completamente especificada, esta segunda afirmación debe ser: "Un objeto es movido en línea recta una distancia *d* a partir de un punto A, a lo largo de una línea L-M que forma un ángulo α con respecto a la línea de referencia R-S y en el sentido de L a M". Esto lo ilustra la figura 3.1.

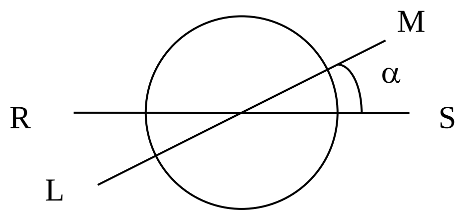


Figura 3.1. El resultado de la afirmación "Un objeto es movido en línea recta una distancia *d* a partir de un punto A" puede ser cualquier punto sobre una circunferencia.

Un *vector* es una cantidad que posee *magnitud*, *dirección* y *sentido*; para que esté correctamente especificada se requiere mencionar sus 3 elementos. Algunas veces el sentido está implícito en la dirección (ejemplo: las gotas caen desde la nube). El vector es una herramienta matemática muy poderosa para el estudio de la mecánica, principalmente cuando se trabaja en más de una dimensión. Ejemplos de cantidades vectoriales son: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza.

3.2 Representación gráfica y propiedades

Un vector se representa gráficamente por una flecha cuya *dirección* señala la del vector y cuya longitud expresa el tamaño, módulo o *magnitud* del vector, y la punta de la flecha señala el *sentido*. Para escribir un vector se usa letra negrita o se usa una flecha horizontal encima de la letra: $\boldsymbol{a}=\vec{a}$. La magnitud, módulo o tamaño "*a*" del vector $\vec{a}$ se escribe como $|\vec{a}|$, $a=|\vec{a}|$, es un número real positivo $a\geq 0$. Estas características se ilustran en la figura 3.2.

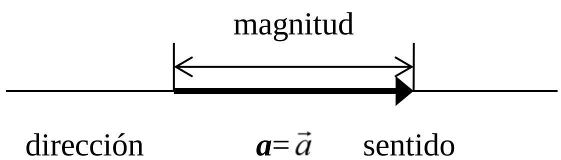


Figura 3.2. Características de un vector representado por una flecha.

Igualdad de vectores. Se dice que dos vectores son iguales si son iguales en magnitud, dirección y sentido. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura 3.3 tienen la misma dirección y sentido, pero sus magnitudes son diferentes; los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ tienen la misma magnitud.

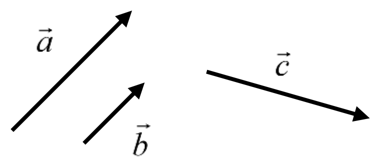


Figura 3.3. Los tres vectores son diferentes.

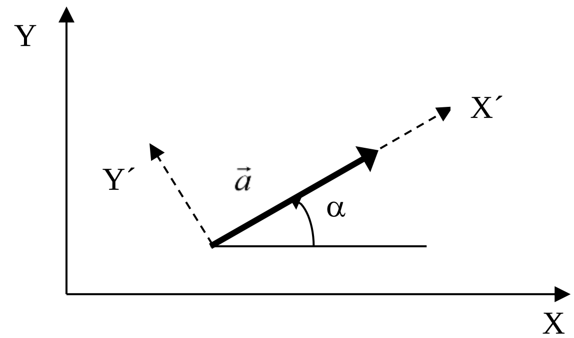


Figura 3.4. Un vector representado en dos sistemas de referencia distintos.

Gráficamente, el vector no depende del sistema de referencia, puede representarse con base al sistema XY o al sistema X´Y´, como indica la figura 3.4. La dirección se especifica con el ángulo que forma el vector con un eje, por ejemplo el eje X. Por convención, el ángulo tiene signo positivo si se mide en contra de las manecillas del reloj, es negativo en el caso contrario.

Suma de vectores. Para sumar gráficamente los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se coloca uno de ellos al final del otro (es decir, la cola del segundo se coloca en la cabeza del primero) y se traza el vector suma (o vector resultante) $\vec{s}$ desde el inicio del primero hasta donde termina el segundo, como ilustra la figura 3.5.

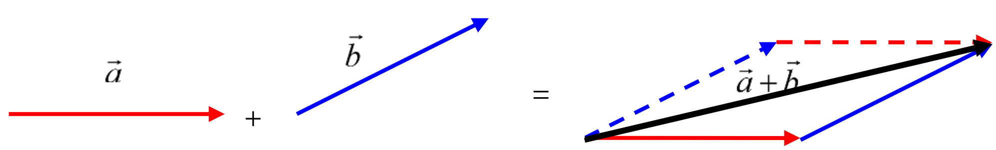


Figura 3.5. La suma de vectores satisface la propiedad conmutativa.

En el último diagrama de la figura 3.5 se trazó con flechas continuas el vector $\vec{a}$ seguido del vector $\vec{b}$. No importa a cual de ellos se le llame como primero, pues cualquiera de ellos se puede trazar al final del otro. Si ahora se traza el vector $\vec{a}$ a continuación del vector $\vec{b}$, representados con flechas de trazos en la figura 3.5, se forma un paralelogramo, de modo que la diagonal mayor corresponde a la suma. Se obtiene que $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, esta es la *propiedad conmutativa*. Se pueden sumar más de 2 vectores si se les asocia de la manera conveniente; por ejemplo,

$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}$; esta es la *propiedad asociativa*.

Producto de un vector por un escalar (cociente de un vector entre un escalar). Si h es un escalar, el producto $h\vec{a}$ es un vector $\vec{p}=h\vec{a}$ con

(i) la misma dirección que $\vec{a}$,

(ii) el sentido

- igual al de $\vec{a}$ si $h>0$ ($\vec{a}$ y $\vec{p}$ son paralelos, ↑↑)
- opuesto al de $\vec{a}$ si $h<0$ ($\vec{a}$ y $\vec{p}$ son antiparalelos, ↑↓),

(iii) y con magnitud $p=|\vec{p}|=|h\vec{a}|=|h||\vec{a}|=ha$.

Observe que si $|h|=h>1$, entonces el efecto de multiplicar este escalar por el vector $\vec{a}$ es expandir el vector; pero si $0<|h|<1$, entonces el efecto sobre el vector $\vec{a}$ es encogerlo. Esto quiere decir que el cociente de un vector entre un escalar puede ser considerado como un caso particular del producto de un vector por un escalar con magnitud $0<|h|<1$.

Si el escalar h multiplica a una suma de vectores, se obtiene $h(\vec{a}+\vec{b})=h\vec{a}+h\vec{b}$. Esta es la *propiedad distributiva*.

Resta de vectores. La resta puede pensarse como un caso particular de la suma si se escribe $\vec{s}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Gráficamente quiere decir que primero se invierte el sentido del vector $\vec{b}$ (se multiplica $\vec{b}$ por -1) y después el resultado se suma al vector $\vec{a}$ (se traza $-\vec{b}$ al final de $\vec{a}$). O bien, habiendo obtenido el vector $-\vec{b}$, se suma el vector $\vec{a}$ al final de $-\vec{b}$. La figura 3.6a ilustra la resta de vectores. Observe que $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{b}-\vec{a}$.

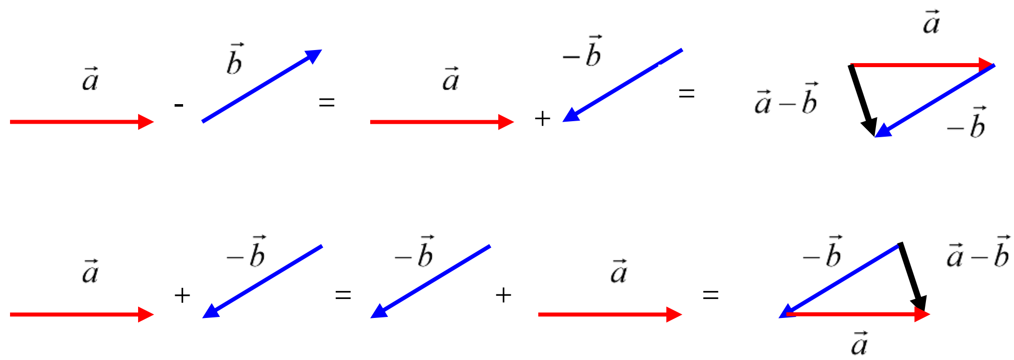


Figura 3.6a. La resta de vectores puede pensarse como un caso particular de la suma de vectores.

Otra manera de obtener el vector $\vec{a}-\vec{b}$ es dibujando los dos vectores partiendo del mismo punto (haciendo coincidir sus colas) y luego trazando el vector que parte de la cabeza de $\vec{b}$ y llega a la cabeza de $\vec{a}$, como se ilustra en la figura 3.6b.

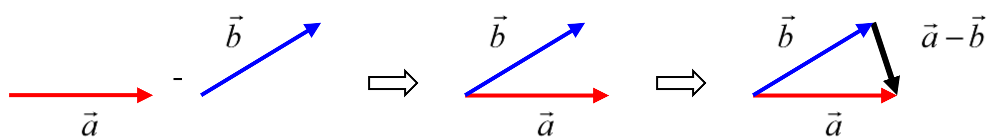


Figura 3.6b. Obtención gráfica de la resta de dos vectores.

Siguiendo el método para restar mostrado en la figura 3.6b, en la figura 3.5 se puede visualizar que el vector $\vec{a}-\vec{b}$ corresponde a la diagonal menor del paralelogramo.

3.3 Componentes de un vector

Suponga que se quiere expresar un vector $\vec{a}$ como la suma de dos vectores. La figura 3.7, en los diagramas (a) y (b), muestra dos posibles pares de vectores sumandos, donde uno de ellos es horizontal. Realmente, hay una infinidad de posibles sumandos. Si se quiere que los sumandos sean únicos, con uno de ellos horizontal, la única posibilidad es que sean perpendiculares entre sí. Esta representación única se muestra en la parte (c) de la figura 3.7, donde también se ha dibujado un sistema de coordenadas cartesianas. Los vectores sumandos $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$ se llaman vectores componentes de $\vec{a}$. El origen del sistema coordenado se ha hecho coincidir con el inicio del vector $\vec{a}$, y la dirección de cada uno de los ejes coordenados se ha escogido de manera que sean paralelos a los vectores sumandos. El vector $\vec{a}$ en términos de los vectores componentes es:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y.$$

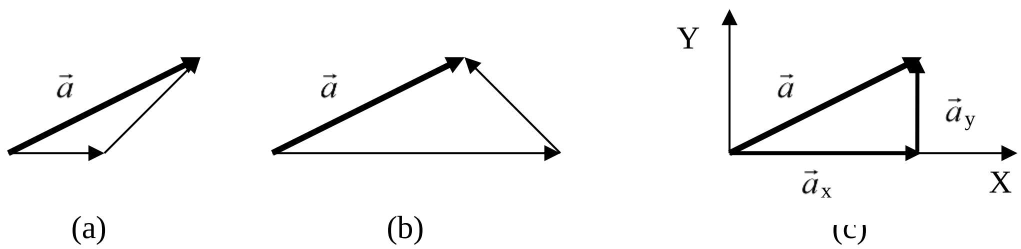


Figura 3.7. Cualquier vector puede representarse como la suma de dos vectores mutuamente perpendiculares.

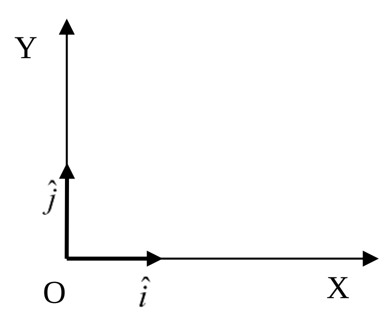
Vectores unitarios

Cualquier vector cuya magnitud sea diferente de cero, puede ser dividido entre su propia magnitud y así construir un vector paralelo de magnitud igual a 1; es decir, $\hat{u} = \vec{a}/|\vec{a}|$ es un vector de magnitud 1 y es paralelo al vector $\vec{a}$. Estos vectores de magnitud 1 se llaman **vectores unitarios**. Nótese que los vectores unitarios no tienen dimensiones y, por consiguiente, no se les asigna unidades.

Los vectores $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$ de la figura 3.7(c) pueden ser expresados como su magnitud multiplicada por un vector de magnitud 1 en la dirección positiva de los ejes X y Y, respectivamente. Al vector unitario en la dirección OX se le expresa como $\hat{i}$ y al vector unitario en la dirección OY como $\hat{j}$ (ver la figura 3.8). Sus magnitudes se expresan como

$|\hat{i}|=1$ y $|\hat{j}|=1$.

Figura 3.8. Los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ están a lo largo de los ejes X y Y.



Llamando Z al tercer eje del sistema coordenado, el vector unitario en la dirección de este eje se expresa como $\hat{k}$ (figura 3.9). A estos vectores unitarios ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) se les representa con un gorro, el cual sustituye a la flecha horizontal usada en los vectores no unitarios**.** Cualquier vector en el espacio tridimensional puede ser expresado en términos de estos tres vectores unitarios.

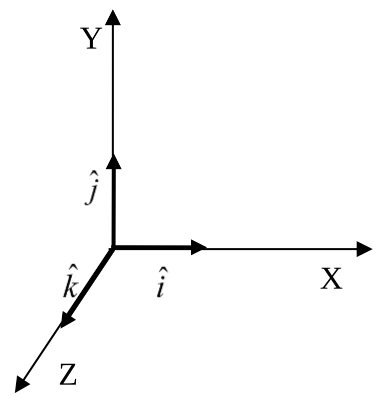


Figura 3.9. Los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ siempre están a lo largo de los ejes X, Y y Z, en ese orden.

Componentes usando los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

Los vectores sumandos ($\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$) de la figura 3.7(c) en términos de los vectores unitarios son $\vec{a}_x = a_x\hat{i}$ y $\vec{a}_y = a_y\hat{j}$. De esta manera el vector $\vec{a}$ se expresa como

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\hat{i} + a_y\hat{j},$$

donde a_x y a_y son las magnitudes de los vectores $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$, respectivamente.

La figura 3.10 muestra las características generales de un vector $\vec{a}$. Con el origen del sistema coordenado coincidiendo con el inicio del vector, el punto final del vector tiene coordenadas (a_x, a_y); así pues, el vector también puede ser referido como las coordenadas de su punto final. Por tanto, el vector $\vec{a}$ puede ser expresado de diferentes maneras

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = (a_x, a_y). \qquad (1)$$

Usando el teorema de Pitágoras se obtiene que la magnitud del vector es

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

El ángulo que el vector forma con el eje X se obtiene a partir de su tangente, es decir,

$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x}.$$

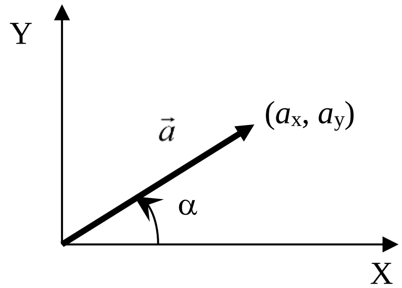


Figura 3.10. El inicio del vector coincide con el origen del sistema de coordenadas.

En términos del ángulo y la magnitud del vector, las componentes son

$$a_x = a\cos\alpha \text{ y } a_y = a\,\text{sen}\,\alpha.$$

Observe que, en general, conociendo dos datos de un vector en dos dimensiones, se pueden calcular todas sus características. Por ejemplo, conociendo las componentes (a_x, a_y) de $\vec{a}$, se puede calcular la magnitud, la dirección y el sentido; conociendo la magnitud y el ángulo, se pueden calcular las componentes.

Las cantidades a_x y a_y son referidas con diferentes nombres:

a_x es la proyección (perpendicular) de $\vec{a}$ sobre el eje OX=componente "x"=abscisa de $\vec{a}$.

a_y es la proyección (perpendicular) de $\vec{a}$ sobre el eje OY=componente "y"=ordenada de $\vec{a}$.

3.4 Operaciones de vectores con escalares

Suponga que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ están expresados en términos de sus componentes como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}, \quad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j}.$$

Si fueran vectores en tres dimensiones, se debe agregar a ellos su componente a lo largo del eje Z: $a_z\hat{k}$, $b_z\hat{k}$, $c_z\hat{k}$.

Producto de un vector por un escalar. Sea $\vec{c} = h\vec{a}$, con h un escalar diferente de cero, entonces

$$\vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} = h(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) = ha_x\hat{i} + ha_y\hat{j} \quad \Rightarrow$$

$$c_x = ha_x,\ \ c_y = ha_y$$

Con palabras, cada componente del vector producto ($\vec{c}$) es igual al escalar (h) multiplicado por la respectiva componente del vector factor ($\vec{a}$).

Suma de vectores. Sea $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$, entonces

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} \quad \Rightarrow$$

$$r_x = a_x + b_x,\ \ r_y = a_y + b_y$$

La abscisa del vector suma (r_x) es igual a la suma de las abscisas de los vectores sumandos ($a_x + b_x$), y la ordenada del vector suma (r_y) es igual a la suma de las ordenadas de los vectores sumandos ($a_y + b_y$).

Resta de vectores. Sea $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$, entonces

$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) - (b_x\hat{i} + b_y\hat{j}) = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} \quad \Rightarrow$$

$$r_x = a_x - b_x,\ \ r_y = a_y - b_y$$

La abscisa del vector diferencia es igual a la resta de las abscisas de los vectores, y la ordenada del vector diferencia es igual a la resta de las ordenadas de los vectores.

Ejemplo 1. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen magnitudes iguales de 10 unidades cada uno, y están orientados como se muestra en la figura 3.11. Encontrar los vectores $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ utilizando el método de componentes cartesianas.

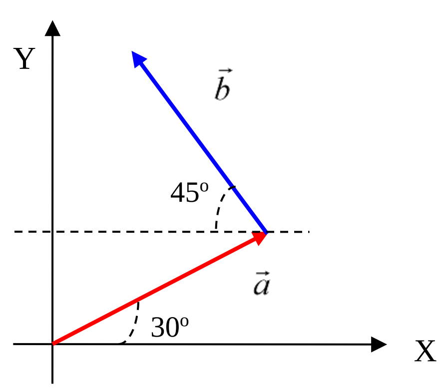


Figura 3.11. Ejemplo 1.

Solución. Primero se escriben los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en términos de sus componentes cartesianas.

$\vec{a}$=(a_x, a_y)=($a$cosθ, $a$senθ)=a(cosθ, senθ)=10(cos30º, sen30º).

Análogamente,

$\vec{b}$ =(b_x, b_y)=($b$cosα, $b$senα)=b(cosα, senα)=10(cos135º, sen135º)

=10[cos(90º+45º), sen(90º+45º)]=10(-sen45º, cos45º).

Para escribir las componentes del vector $\vec{b}$ se usaron las expresiones para el seno de una suma y el coseno de una suma:

$$\text{sen}(\alpha\pm\beta)=\text{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

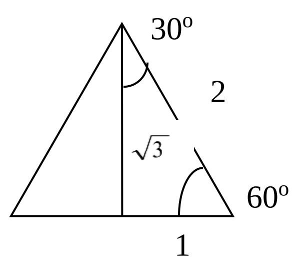
La suma de estos vectores es

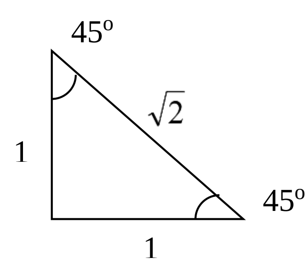
$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y)=10(\cos30^o-\text{sen}45^o,\ \text{sen}30^o+\cos45^o).$$

La diferencia es

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=10(\cos30^o+\text{sen}45^o,\ \text{sen}30^o-\cos45^o).$$

Estas funciones trigonométricas en 30º y 45º pueden ser evaluadas, respectivamente, con la ayuda de un triángulo equilátero con lados de magnitud 2, y un triángulo rectángulo con catetos de magnitud 1, como se ilustra en las figuras siguientes.





Así, las componentes de los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad \vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3.5 Producto escalar o producto punto de dos vectores

Este producto escalar se llama así porque el resultado de la operación es un escalar; también se le llama producto punto porque la operación se representa con un punto. Se define como

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=ab\cos\theta=a(b\cos\theta)=b(a\cos\theta)=\vec{b}\bullet\vec{a},$$

donde θ es el ángulo menor entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuando son trazados compartiendo el punto de inicio. La operación se lee como "*a punto b*" o como "producto escalar entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$". Los extremos de esta fórmula ($\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$) no están en conflicto con la definición del sentido positivo del ángulo, pues la función coseno tiene la propiedad de ser una función par, la cual quiere decir que $\cos\theta=\cos(-\theta)$. La figura 3.12 se usará para explicar la interpretación geométrica de este producto.

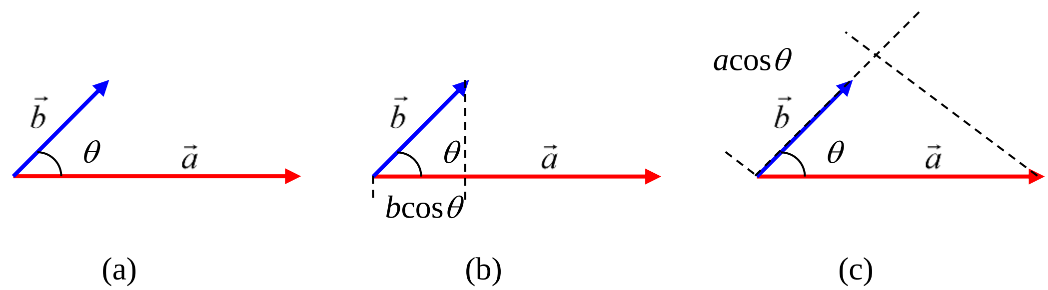


Figura 3.12. Interpretación geométrica del producto escalar.

En el diagrama (a) se representan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con el mismo punto de inicio, y el ángulo menor entre ellos. En el diagrama (b) se ve que la cantidad $b\cos\theta$ es la magnitud de la componente del vector $\vec{b}$ a lo largo de la línea del vector $\vec{a}$. En el diagrama (c) se observa que la cantidad $a\cos\theta$ es la magnitud de la componente del vector $\vec{a}$ a lo largo de la línea del vector $\vec{b}$. Es decir, el producto escalar representa el producto de la componente de un vector a lo largo de la línea del otro vector multiplicada por la magnitud de este otro: $(b\cos\theta)a=(a\cos\theta)b$. Con este resultado, la definición del producto escalar puede ser reescrita como $\vec{a}\bullet\vec{b}=abcos\theta=a(bcos\theta)=(acos\theta)b$. Es decir, el producto escalar de dos vectores satisface la propiedad *conmutativa*: $\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$.

A partir de la definición del producto escalar y de los valores extremos de la función coseno, se ve que:

$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$ si θ=90º, es decir $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, ⊥

$\vec{a}\bullet\vec{b}=ab$ si θ=0º, es decir $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, ↑↑

$\vec{a}\bullet\vec{b}=-ab$ si θ=180º, es decir $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son antiparalelos, ↑↓

Las componentes de un vector pueden ser calculadas a través de su producto escalar con los vectores unitarios a lo largo de los ejes; por ejemplo, la abscisa es

$$\vec{a}\bullet\hat{i}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j})\bullet\hat{i}=a_x\hat{i}\bullet\hat{i}+a_y\hat{j}\bullet\hat{i}=a_x, \qquad \text{pues } \hat{i}\bullet\hat{i}=1 \text{ y } \hat{j}\bullet\hat{i}=0;$$

análogamente, la ordenada es

$$\vec{a}\bullet\hat{j}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j})\bullet\hat{j}=a_x\hat{i}\bullet\hat{j}+a_y\hat{j}\bullet\hat{j}=a_y.$$

El producto escalar en términos de las componentes de los vectores factores es

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j})\bullet(b_x\hat{i}+b_y\hat{j})=a_xb_x\hat{i}\bullet\hat{i}+a_yb_y\hat{j}\bullet\hat{j}+a_xb_y\hat{i}\bullet\hat{j}+a_yb_x\hat{j}\bullet\hat{i}$$

Por tanto,

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y. \qquad (2)$$

Es decir, el producto escalar de dos vectores bidimensionales, en términos de sus componentes, es igual a la suma del producto de las abscisas más el producto de las ordenadas. Si los vectores fueran tridimensionales, a la ecuación (2) es necesario agregar el término a_zb_z.

⟶ ⟶ ⟶

Ejemplo 2. Con los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ determinados en el ejemplo 1, calcular a) el producto escalar $\vec{c}\bullet\vec{d}$ y b) el ángulo menor entre los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$.

Solución.

a) Usando la fórmula (2) el producto escalar es

$$\begin{aligned}\vec{c}\bullet\vec{d}&=c_xd_x+c_yd_y=10(\cos30^o-\mathrm{sen}45^o)10(\cos30^o+\mathrm{sen}45^o)+10(\mathrm{sen}30^o+\cos45^o)10(\mathrm{sen}30^o-\cos45^o)\\&=100(\cos^2 30^o-\mathrm{sen}^2 45^o)+100(\mathrm{sen}^2 30^o-\cos^2 45^o)\\&=100[\mathrm{sen}^2 30^o+\cos^2 30^o-(\mathrm{sen}^2 45^o+\cos^2 45^o)]\\&=100(1-1)\\&=0.\end{aligned}$$

Debido a que $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, este resultado es una consecuencia que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma magnitud, lo cual se demuestra en general de la manera siguiente

$$
\begin{aligned}
\vec{c}\bullet\vec{d} = c_x d_x + c_y d_y &= (a_x+b_x)(a_x-b_x)+(a_y+b_y)(a_y-b_y)\\
&=(a_x^2-b_x^2)+(a_y^2-b_y^2)\\
&=(a_x^2+a_y^2)-(b_x^2+b_y^2)\\
&=a^2 - b^2\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Debido a la igual magnitud de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, en general los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ representan geométricamente las diagonales de un rombo.

b) El producto escalar también se expresa como $\vec{c}\bullet\vec{d}=cd\cos\theta$. Como el resultado del inciso anterior indica que $\vec{c}\bullet\vec{d}=0$, entonces $\cos\theta=0$. Es decir, los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son perpendiculares entre sí, o sea que $\theta=90^o$.

3.6 Producto vectorial o producto cruz de dos vectores

Este producto vectorial se llama así porque el resultado es otro vector; también se le llama producto cruz porque la operación se representa con una cruz. Se representa como $\vec{a}\times\vec{b}$ (léase como "*a cruz b*") y su

magnitud es $|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\,\mathrm{sen}\,\theta$,

dirección es perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$,

sentido es definido por la regla de la mano derecha o del tornillo de rosca derecha.

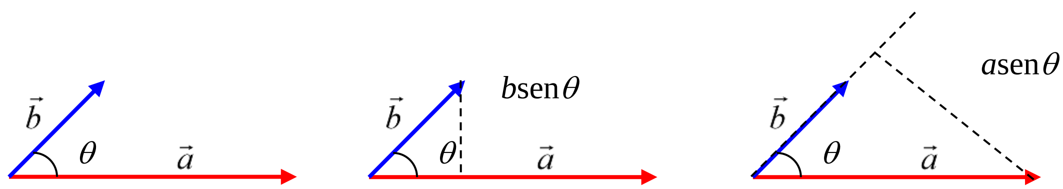
Con referencia al diagrama (a) de la figura 3.13, el ángulo θ es el ángulo menor formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuando ambos se dibujan con el mismo punto de inicio; es decir, $0<\theta<\pi$, en este intervalo angular la función seno es positiva, por lo que la magnitud $|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\,\mathrm{sen}\,\theta$ siempre es positiva.

La regla de la *mano derecha* consiste en mentalmente empujar con los dedos al vector $\vec{a}$ para girarlo hacia el vector $\vec{b}$ (respecto a un eje que pase por el vértice formado por los dos vectores y que sea perpendicular al plano de los vectores), y levantar el pulgar; el pulgar apunta en el sentido del vector que resulta del producto vectorial.

La regla del *tornillo de rosca derecha* consiste en imaginar que el vector $\vec{a}$ es una varilla clavada perpendicularmente al eje del tornillo (el tornillo pasa por el vértice formado por los dos vectores y es perpendicular al plano de los vectores), se gira el tornillo haciendo que el vector $\vec{a}$ gire hacia el vector $\vec{b}$, el sentido del producto vectorial es el mismo en que el tornillo avanza.

De esta manera, el vector que resulta del producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura 3.13(a) es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia fuera (hacia el lector). Observe que $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, lo cual significa que este producto es *no conmutativo*.

La figura 3.13 se usará para explicar la interpretación geométrica del producto $ab\text{sen}\theta$.



(a) (b) (c)

Figura 3.13. Interpretación geométrica del producto $ab\text{sen}\theta$.

En el diagrama (a) se representan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con el mismo punto de inicio, y el ángulo menor entre ellos. En el diagrama (b) se ve que la cantidad $b\text{sen}\theta$ es la magnitud de la componente del vector $\vec{b}$ en dirección perpendicular a la línea del vector $\vec{a}$. En el diagrama (c) se observa que la cantidad $a\text{sen}\theta$ es la magnitud de la componente del vector $\vec{a}$ en dirección perpendicular a la línea del vector $\vec{b}$. Si llamamos a la cantidad $b\text{sen}\theta$ como $b^{\perp}$ y a $a\text{sen}\theta$ como $a^{\perp}$, entonces podemos escribir $ab\text{sen}\theta = a(b\text{sen}\theta) = ab^{\perp} = b(a\text{sen}\theta) = ba^{\perp}$ para enfatizar que el producto $ab\text{sen}\theta$ es igual al producto de la magnitud de un vector multiplicada por la componente del segundo vector en la dirección perpendicular al primero.

Usando la definición del producto vectorial se observa que los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ satisfacen las relaciones siguientes (ver figura 3.9):

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}\,,\ \ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}\,,\ \ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \text{cíclicamente en el orden i, j, k}$$

$$\text{además, } \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}\,.$$

Componentes de $\vec{a} \times \vec{b}$. Para calcular las componentes del producto vectorial en términos de las componentes de los vectores factores, suponga que los vectores están dados como $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ y $\vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}$. Por definición, el vector que resulta del producto vectorial es un vector perpendicular al plano definido por los dos vectores factores. Calculemos el vector $\vec{c}$ que resulta del producto vectorial entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$

$= a_xb_x\hat{i}\times\hat{i} + a_xb_y\hat{i}\times\hat{j} + a_xb_z\hat{i}\times\hat{k} + a_yb_x\hat{j}\times\hat{i} + a_yb_y\hat{j}\times\hat{j} + a_yb_z\hat{j}\times\hat{k} + a_zb_x\hat{k}\times\hat{i} + a_zb_y\hat{k}\times\hat{j} + a_zb_z\hat{k}\times\hat{k}$

$= a_xb_y\hat{i}\times\hat{j} + a_xb_z\hat{i}\times\hat{k} + a_yb_x\hat{j}\times\hat{i} + a_yb_z\hat{j}\times\hat{k} + a_zb_x\hat{k}\times\hat{i} + a_zb_y\hat{k}\times\hat{j}$

$= a_xb_y\hat{k} + a_xb_z(-\hat{j}) + a_yb_x(-\hat{k}) + a_yb_z\hat{i} + a_zb_x\hat{j} + a_zb_y(-\hat{i})$

$= (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$

Finalmente se obtiene que las componentes de $\vec{c}$ son

$$c_x = (a_yb_z - a_zb_y), \quad c_y = (a_zb_x - a_xb_z), \quad c_z = (a_xb_y - a_yb_x) \qquad (3)$$

Observe que el subíndice de cada componente de $\vec{c}$ está en el orden cíclico xyz con los subíndices del primer término, pero no lo está con los del segundo término donde los subíndices están intercambiados respecto al primer término; además, el segundo término tiene signo menos. El producto vectorial también puede ser calculado a través del determinante siguiente:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3. Con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dados en el ejemplo 1, calcular el producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$.

Solución. La magnitud del producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ es

$|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\,\mathrm{sen}\theta=ab\,\mathrm{sen}(180^o-45^o-30^o)=(10)(10)(\mathrm{sen}105^o)=97$.

Debido a que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no tienen componente en el eje Z, pues $\vec{a}=10(\cos30^o, \mathrm{sen}30^o)$ y $\vec{b}=10(-\mathrm{sen}45^o, \cos45^o)$, las componentes de $\vec{a}\times\vec{b}$ expresadas en la fórmula (3) son

$(\vec{a}\times\vec{b})_x=0$,

$(\vec{a}\times\vec{b})_y=0$,

$(\vec{a}\times\vec{b})_z=a_xb_y-a_yb_x$

$$=(10\cos30^o)(10\cos45^o)-(10\mathrm{sen}30^o)(-10\mathrm{sen}45^o)=100\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+100\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=97.$$

En la última parte de este cálculo, las funciones trigonométricas fueron evaluadas usando los triángulos mostrados en el ejemplo 1. O bien, el cálculo puede hacerse de la manera siguiente:

$(\vec{a}\times\vec{b})_z=a_xb_y-a_yb_x$

$$=100(\cos45^o\cos30^o+\mathrm{sen}45^o\mathrm{sen}30^o)=100\cos(45^o-30^o)=100\cos15^o=97$$

Finalmente, el vector es

$$\vec{a}\times\vec{b}=(0, 0, 97).$$

Con el sistema de coordenadas mostrado en la figura del ejemplo 1, puede verse que este vector es perpendicular al plano de esta hoja y apunta hacia el lector.

←——— ←——— ←———

Recapitulación

Un vector es una cantidad que posee *magnitud*, *dirección* y *sentido*. Se representa gráficamente por una flecha cuya dirección señala la del vector, la longitud expresa el tamaño del vector, y la punta de la flecha señala el sentido. Para escribir un vector se usa letra negrita o una flecha horizontal encima de la letra: $\boldsymbol{a}=\vec{a}$. La magnitud o tamaño a del vector $\vec{a}$ se escribe como $|\vec{a}|$, $a=|\vec{a}|$, es un número real positivo $a\geq0$.

Un vector cuya magnitud sea diferente de cero, puede ser dividido entre su propia magnitud y así construir un vector paralelo de magnitud igual a 1, $\hat{u}=\vec{a}/|\vec{a}|$; estos vectores se llaman *vectores unitarios*. A los vectores unitarios en las direcciones de los ejes X, Y y Z se les expresa como $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$, respectivamente. Cualquier vector puede ser expresado en términos de estos vectores unitarios. Con el origen del sistema coordenado cartesiano coincidiendo con el inicio del vector, el punto final del vector bidimensional tiene coordenadas (a_x, a_y); así pues, el vector también puede ser referido como las coordenadas de su punto final. Por tanto, el vector $\vec{a}$ puede ser expresado de diferentes maneras: $\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}=(a_x, a_y)$; la magnitud es $a=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}}$, el ángulo que forma con el eje X se obtiene a partir de su tangente $\tan\alpha=\dfrac{a_y}{a_x}$.

Las operaciones de vectores con escalares son sencillas cuando los vectores se expresan en términos de los vectores unitarios. Por ejemplo, suponga que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$ están expresados en términos de sus componentes como $\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}$ y $\vec{c}=c_x\hat{i}+c_y\hat{j}$; interesa la operación: $\vec{c}=h\vec{a}$, con h un escalar diferente de cero, entonces

$$\vec{c}=h(a_x\hat{i}+a_y\hat{j})=ha_x\hat{i}+ha_y\hat{j} \quad\Rightarrow\quad c_x=ha_x,\ c_y=ha_y$$

Cada componente del vector producto ($\vec{c}$) es igual al escalar (h) multiplicado por la respectiva componente del vector factor ($\vec{a}$).

Producto escalar o producto punto de dos vectores; se llama escalar porque el resultado es un escalar y producto punto porque la operación se representa con un punto. Se define como

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=ab\cos\theta=\vec{b}\bullet\vec{a},$$

θ es el ángulo menor entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ cuando son trazados compartiendo el punto de inicio. La operación se lee como "*a punto b*" o como "producto escalar entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$". Se ve que:

$\vec{a}\bullet\vec{b}=0$ si $\theta=90^o$, es decir $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, $\perp$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=ab$ si $\theta=0^o$, es decir $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, $\uparrow\uparrow$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=-ab$ si $\theta=180^o$, es decir $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son antiparalelos, $\uparrow\downarrow$

El producto escalar en términos de las componentes de los vectores factores es

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y;$$

es igual a la suma del producto de las abscisas más el producto de las ordenadas.

Producto vectorial o producto cruz de dos vectores; se llama así porque el resultado es otro vector, o producto cruz porque la operación se representa con una cruz. Se representa como $\vec{a}\times\vec{b}$ (léase "*a cruz b*") y su

magnitud es $|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\,\mathrm{sen}\,\theta$,

dirección es perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$,

sentido es definido por la regla de la mano derecha o del tornillo de rosca derecha.

El ángulo θ es el menor formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si se dibujan con el mismo punto de inicio. Los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ satisfacen las relaciones siguientes:

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ cíclicamente en el orden i, j, k; además, $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$.

Componentes de $\vec{a} \times \vec{b}$. Para calcular las componentes del producto vectorial en términos de las componentes de los vectores factores, suponer que los vectores están dados como $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ y $\vec{c} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}$. El vector $\vec{c}$ que resulta del producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene componentes

$$c_x = (a_y b_z - a_z b_y), \quad c_y = (a_z b_x - a_x b_z), \quad c_z = (a_x b_y - a_y b_x).$$

El subíndice de cada componente de $\vec{c}$ está en el orden cíclico xyz con los subíndices del primer término, pero no lo está con los del segundo término donde los subíndices están intercambiados respecto al primer término; además, el segundo término tiene signo menos.

Problemas

1. La manecilla minutera de un reloj de pared mide 11.3 cm desde el eje hasta la punta.
a) Utilizando los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ determinar el vector desplazamiento de su punta, desde un cuarto de hora hasta la media hora. b) Determinar su magnitud y dirección.

2. Al explorar una cueva, una espeleóloga aficionada comienza en la entrada y recorre las siguientes distancias: se desplaza 75.0 m al norte, luego 125 m en un ángulo de 30° al norte del este. Encontrar el desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

3. Una muchacha se desplaza 5.30 m al este, luego 4.10 m en dirección 60° al sur del oeste. Elegir el eje X apuntando al este y el eje Y apuntando hacia el norte.
a) Hallar las componentes del desplazamiento resultante.
b) Hallar la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante.

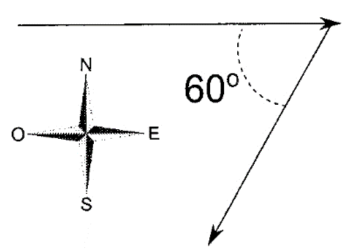


Figura 3.14. Problema 3.

4. En la maniobra de despegue, un avión recorre horizontalmente 2 km y enseguida se eleva con un ángulo de inclinación de 30° recorriendo 12 km en línea recta. Calcular el desplazamiento del avión desde el arranque.

5. Encuentre las componentes horizontal y vertical de un vector cuya magnitud es de 100 m, como se muestra en la figura 3.15.

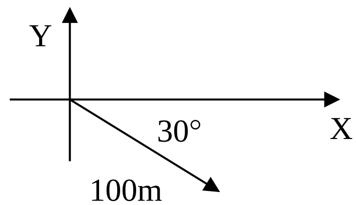


Figura 3.15. Problema 5.

6. Dos vectores están dados por $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ y $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$. Encontrar los vectores a) $\vec{a}+\vec{b}$, b) $\vec{a}-\vec{b}$, y c) el vector $\vec{c}$ tal que $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

7. La suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene como resultante al vector $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ y su diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ da como resultado el vector $\vec{d}=-2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$. Encontrar los dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y sus magnitudes.

8. Dados los vectores $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}$ y $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}$ encontrar la magnitud y dirección de: a) $\vec{r}_1=\vec{a}+\vec{b}$, y b) $\vec{r}_2=\vec{a}-\vec{b}$

9. Tres vectores deben cumplir la relación $\vec{R}=\vec{A}+2\vec{B}-\vec{C}$. Si $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ y $\vec{B}=-4\hat{i}+\hat{j}$. ¿Cuáles deben ser las componentes del vector $\vec{C}$ para que el vector resultante sea $\vec{R}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$?

10. Dos vectores están dados por $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ y $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$. a) Usando las componentes de los vectores, calcular el producto escalar $\vec{a}\bullet\vec{b}$. b) Calcular el ángulo entre los vectores.

11. Dos vectores están dados por $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ y $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$. a) Usando las componentes de los vectores, calcular las componentes del producto vectorial $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. b) Calcular el ángulo menor entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

12. Las componentes en metros del vector $\vec{a}$ son a_x=3.2 y a_y=1.6. Hay dos vectores en el plano XY que son perpendiculares al vector $\vec{a}$ y que tienen una magnitud de 5.0 m. Uno, el vector $\vec{b}$ tiene una componente x positiva y el otro, el vector $\vec{c}$, una componente x negativa. ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{b}$? ¿Cuáles son las componentes del vector $\vec{c}$?

4 CINEMÁTICA EN EL PLANO

Las cantidades físicas estudiadas en el capítulo 2 en el caso de un cuerpo que se traslada en línea recta, ahora se estudian usando vectores con lo cual se incluye el movimiento de traslación en 2 y 3 dimensiones. Después se describe el movimiento de un objeto cuando es observado desde dos sistemas de referencia distintos: uno fijo y otro móvil.

Introducción

Para describir el movimiento de una partícula en el plano, se usará un sistema de coordenadas cartesianas XY, como ilustra el diagrama (a) de la figura 4.1. La curva que se muestra corresponde al camino que sigue la partícula, es decir, la trayectoria. La partícula se encuentra en el tiempo t en la posición con coordenadas (x, y); ambas coordenadas son funciones del tiempo. Cuando la partícula es observada desde una posición de perfil al plano en una línea paralela al eje Y, se le vería que se mueve a lo largo del eje X; es decir, se observaría la proyección de la trayectoria sobre el eje X. Análogamente, cuando se le observa desde otra posición de perfil al plano en una línea paralela al eje X, se vería la proyección de la trayectoria sobre el eje Y. En ambos casos se verían movimientos unidimensionales.

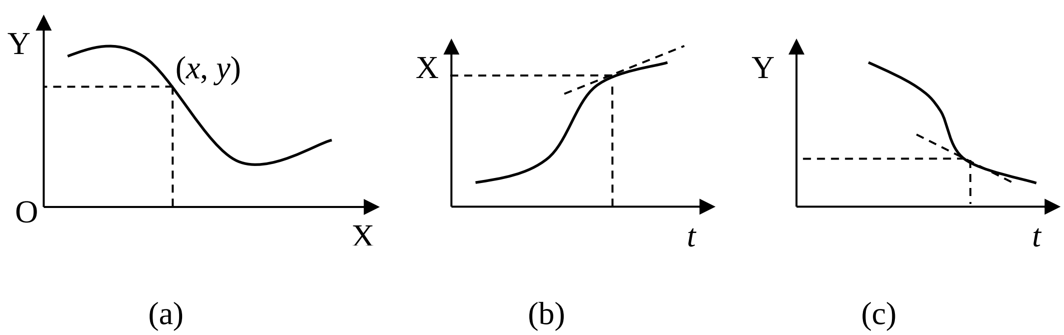


Figura 4.1 (a). La curva continua describe la trayectoria de la partícula. (b) y (c), curvas de la posición, en función del tiempo, a lo largo de los ejes X y Y.

Los diagramas (b) y (c) de la figura 4.1 ilustran las coordenadas $x(t)$ y $y(t)$ como funciones del tiempo a lo largo del eje X y del eje Y, respectivamente. La pendiente de las rectas tangentes a estas curvas representa la velocidad instantánea en ese punto; esto es,

$v_x = \dfrac{dx}{dt}$, y $v_y = \dfrac{dy}{dt}$. Con el subíndice se indica que se trata de la componente de la velocidad a lo largo del eje correspondiente; análogamente, también con un subíndice se indica la componente de cualquier otra cantidad vectorial a lo largo de un eje. De esta manera, la aceleración a lo largo del eje X y del eje Y, respectivamente, es $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ y $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$.

Como resultado de las dos proyecciones de la trayectoria sobre los ejes coordenados, puede asegurarse que el movimiento en el plano es la combinación de dos movimientos unidimensionales rectilíneos. La mejor descripción del movimiento es mediante vectores. La figura 4.2 reproduce la trayectoria seguida por la partícula representada en la figura 4.1(a); la partícula se mueve en el plano XY (por ejemplo, en un plano horizontal).

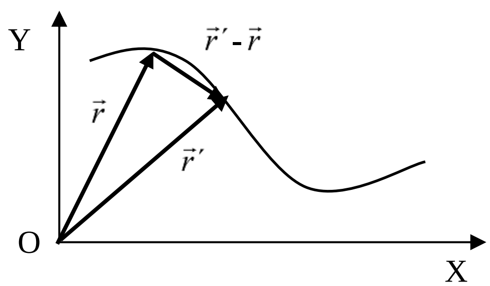


Figura 4.2. El vector $\vec{r}$ señala la posición de la partícula en el tiempo *t*, el vector $\vec{r}\,'$ señala la posición de la partícula en un tiempo posterior *t*´.

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

Vector posición. Al vector $\vec{r}$ representado en la figura 4.2 se le llama vector de posición porque señala la posición en que se encuentra la partícula en el tiempo *t*; se representa por las coordenadas (*x*, *y*), las cuales son funciones del tiempo. El vector $\vec{r}$ es una función del tiempo, aunque por facilidad sólo se escriba $\vec{r}$ en lugar de $\vec{r}\,(t)$. En un tiempo posterior *t*´, la partícula se ha movido a la posición $\vec{r}\,'$. La diferencia entre estos vectores es el *vector desplazamiento*, es decir $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$, es la diferencia entre la posición en un tiempo posterior *t*´ y la posición en un tiempo anterior *t*; la diferencia entre estos dos tiempos es el lapso, intervalo de tiempo o tiempo transcurrido: $\Delta t = t' - t$. Con estas dos cantidades se define la velocidad media.

Vector velocidad media. Es el cociente del vector desplazamiento entre el lapso (es un vector porque el desplazamiento lo es y el lapso es un escalar):

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Velocidad instantánea. Es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Aceleración media. Es el cociente del cambio en la velocidad entre el tiempo que dura el cambio:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Aceleración instantánea (o aceleración, simplemente). Es el límite de la aceleración media cuando Δt tiende al valor cero:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

En estas últimas cuatro expresiones sólo t es escalar, las otras cantidades son vectores. Estos son ejemplos de que los vectores al ser derivados con respecto del tiempo, son también vectores.

Estas cantidades en términos de sus componentes se expresan como sigue.

Las posiciones son

$$\vec{r} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j} \quad \text{en el tiempo } t,$$

$$\vec{r}\,' = (x', y') = x'\hat{i} + y'\hat{j} \quad \text{en el tiempo } t'.$$

El desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = (x'\hat{i} + y'\hat{j}) - (x\hat{i} + y\hat{j}) = (x'-x)\hat{i} + (y'-y)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j},$$

donde se utilizan explícitamente los desplazamientos Δx y Δy, a lo largo de los ejes X y Y, respectivamente.

La velocidad media es

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} = v_{mx}\hat{i} + v_{my}\hat{j} = (v_{mx}, v_{my}).$$

La velocidad instantánea es

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\hat{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (v_x, v_y).$$

Análogamente, se obtienen las expresiones correspondientes a la aceleración media y la aceleración, pues la aceleración representa el cambio temporal de la velocidad. Recuerde que cuando se dice que un vector es función del tiempo, significa que tanto su magnitud como su dirección son funciones del tiempo. Puede suceder, en situaciones particulares, como en el movimiento circular uniforme, que la magnitud de la velocidad sea constante, pero no su dirección, lo cual hace que el vector de la aceleración sea diferente de cero.

Estos vectores pueden ser generalizados al caso de tres dimensiones si se agrega a cada uno de ellos su componente z. Estas relaciones son generales. En lo que sigue se considerará el caso particular de aceleración constante.

4.2 Movimiento con aceleración constante

Para el movimiento unidimensional con aceleración constante se obtuvo en el capítulo 2, "Cinemática del movimiento rectilíneo", que la posición y la velocidad, como funciones del tiempo, están dadas por

posición $$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

velocidad $$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at.$$

Combinando estas dos ecuaciones unidimensionales se obtuvo la relación entre la posición y la velocidad

$$2a(x - x_0) = v^2 - {v_0}^2$$

y la relación entre posición, velocidad y tiempo

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t.$$

Debido a que el movimiento de traslación en el plano es la combinación de dos movimientos unidimensionales rectilíneos, las correspondientes ecuaciones en cada uno de los ejes coordenados deben tener la misma forma algebraica; pero en ellas se necesita especificar apropiadamente la componente de cada cantidad física. Las cuatro ecuaciones anteriores se escriben a continuación para cada eje coordenado, y después se combinan para expresarlas en forma vectorial. Con los subíndices apropiados para cada eje coordenado, las ecuaciones para la posición de la partícula son

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 , \qquad (1)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 . \qquad (2)$$

Las ecuaciones para la velocidad son

$$v_x = v_{0x} + a_x t , \qquad (3)$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t . \qquad (4)$$

La relación entre la posición y la velocidad en cada eje coordenado:

$$2a_x(x - x_0) = v_x{}^2 - v_{0x}{}^2 , \qquad (5)$$

$$2a_y(y - y_0) = v_y{}^2 - v_{0y}{}^2 . \qquad (6)$$

Las expresiones apropiadas, en cada eje coordenado, para la relación entre posición, velocidad y tiempo son

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})t , \qquad (7)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_y + v_{0y})t . \qquad (8)$$

Cada uno de estos pares de ecuaciones puede ser representado en forma vectorial, lo cual a continuación se hace.

Ecuaciones cinemáticas en forma vectorial

Posición. Al multiplicar la ecuación (1) por el vector unitario $\hat{i}$, la ecuación (2) por el vector unitario $\hat{j}$ y sumar los resultados, se obtiene

$$x\hat{i} + y\hat{j} = (x_0\hat{i} + y_0\hat{j}) + (v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2$$

El primer miembro se reconoce como el vector de posición $\vec{r}$. El contenido del primer paréntesis en el segundo miembro es el vector de la posición inicial $\vec{r}_0$; el contenido del segundo paréntesis corresponde a la velocidad inicial $\vec{v}_0$; el último paréntesis contiene el vector aceleración $\vec{a}$. De esta manera se obtiene la posición en forma vectorial

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2. \qquad (9)$$

Velocidad. Al multiplicar la ecuación (3) por el vector unitario $\hat{i}$, la ecuación (4) por el vector unitario $\hat{j}$ y sumar los resultados, se obtiene

$$v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}) + (a_x \hat{i} + a_y \hat{j})t.$$

De donde se obtiene la velocidad en forma vectorial

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \qquad (10)$$

Relación entre posición y velocidad. Al sumar directamente las ecuaciones (5) y (6) se obtiene que

$$2a_x(x-x_0) + 2a_y(y-y_0) = (v_x^2+v_y^2)-(v_{0x}^2+v_{0y}^2),$$

con la cual, usando la definición de producto escalar, se logra que

$$2\vec{a} \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = v^2 - v_0^2. \qquad (11)$$

Relación entre posición, velocidad y tiempo. Al multiplicar la ecuación (7) por el vector unitario $\hat{i}$, la ecuación (8) por el vector unitario $\hat{j}$ y sumar los resultados, se obtiene

$$x\hat{i} + y\hat{j} = (x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}) + \frac{1}{2}(v_x+v_{0x})t\hat{i} + \frac{1}{2}(v_y+v_{0y})t\hat{j}$$

$$= (x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}) + \frac{1}{2}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j})t + \frac{1}{2}(v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j})t.$$

De donde se obtiene la forma vectorial

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_0)t. \qquad (12)$$

Estas cuatro expresiones vectoriales (9)-(12) también son válidas en tres dimensiones.

4.3 Movimiento de proyectiles en el vacío (tiro parabólico)

En la descripción del movimiento de un objeto que es lanzado al aire, en la cercanía de la superficie terrestre, se supondrá que el aire no opone resistencia, en cuyo caso son aplicables las ecuaciones anteriores. Un caso más realista en que el aire opone resistencia al movimiento se estudiará en el capítulo 6. El objeto es lanzado desde el origen de coordenadas, el cual está situado en el suelo, se lanza con una velocidad inicial $\vec{v}_0$, la cual forma un ángulo θ_0 con la línea horizontal. Se usará un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en el punto de lanzamiento, con el eje de las abscisas en la dirección horizontal y positivo hacia donde se mueve el objeto, y el eje de las ordenadas vertical y positivo hacia arriba, como ilustra la figura 4.3.

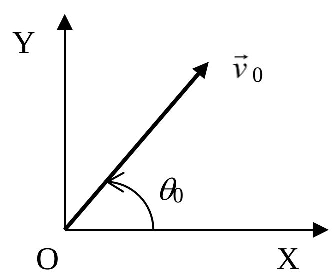


Figura 4.3. El origen del sistema de coordenadas coincide con el punto de lanzamiento.

La aceleración de la gravedad sólo tiene componente en la dirección vertical con su sentido hacia la tierra, es decir, el vector aceleración es $\vec{a}=(0, -g)=-g\,\hat{j}$. El tiempo se mide a partir del momento de lanzamiento. Las *condiciones iniciales* son:

en $t=0$ las coordenadas de la posición son $x_0=0$ y $y_0=0$; en $t=0$ las componentes de la velocidad inicial son $v_{0x}=v_0\cos\theta_0$ y $v_{0y}=v_0\operatorname{sen}\theta_0$, donde θ_0 es el ángulo inicial y v_0 la magnitud de la velocidad inicial, los cuales también se expresan como $\tan\theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ y $v_0 = \sqrt{v_{0x}{}^2 + v_{0y}{}^2}$, respectivamente.

Debido a que la aceleración no tiene componente en la dirección horizontal, las componentes del vector de la posición, representado en la ecuación (9), a lo largo de los ejes X y Y son

$$x = v_{0x} t\,, \qquad (9a)$$

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 . \qquad (9b)$$

Las componentes del vector de la velocidad son:

$$v_x = v_{0x}\,, \qquad (10a)$$

$$v_y = v_{0y} - gt\,. \qquad (10b)$$

En cualquier instante, la magnitud de la velocidad es $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$, sus componentes son $v_x = v\cos\theta$ y $v_y = v sen\theta$, y el ángulo se determina usando $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$. Debido a que la componente vertical de la velocidad es función del tiempo (ecuación (10b)), el ángulo también lo es; en cambio, la componente horizontal de la velocidad es constante, como ilustra la figura 4.4.

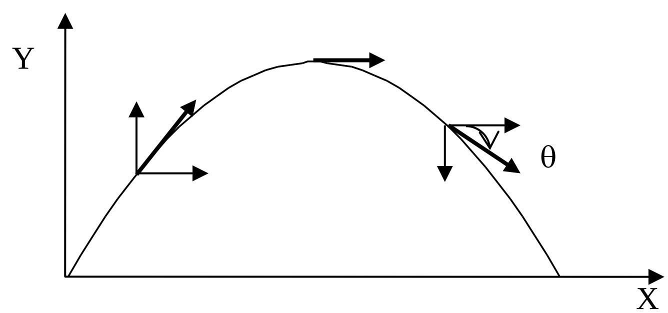


Figura 4.4. Se muestran la trayectoria seguida por la partícula y las componentes de la velocidad en tres posiciones sobre la trayectoria.

Cálculo de la trayectoria. La curva que describe la partícula en su movimiento se llama trayectoria, la cual es una función de la posición. Para calcular su ecuación (*y* como función de *x*, o sea *y*=*y*(*x*)), se despeja el tiempo *t* de la ecuación (9a) y se sustituye en la (9b):

$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$, de donde se obtiene que la ecuación de la trayectoria es

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^{\;2}}x^2. \qquad (13a)$$

Los coeficientes de x y de x^2 pueden escribirse en términos del ángulo θ_0 y de la velocidad v_0 como

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan\theta_0$$

y como

$$\frac{1}{v_{0x}^{\;2}} = \frac{1}{v_0^{\;2}\cos^2\theta_0} = \frac{\cos^2\theta_0 + sen^2\theta_0}{v_0^{\;2}\cos^2\theta_0} = \frac{1}{v_0^{\;2}}\left(1 + \tan^2\theta_0\right).$$

De tal manera que la ecuación de la trayectoria también puede expresarse como

$$y = \left(\tan\theta_0\right)x - \frac{g\left(1 + \tan^2\theta_0\right)}{2v_0^{\;2}}x^2. \qquad (13b)$$

La ecuación de la trayectoria corresponde a una parábola. Es por ello que a este movimiento también se le llama tiro parabólico. En la figura 4.5 está representada esta curva, que casi tiene la forma que observamos cuando lanzamos al aire una pelota; la pelota llega hasta una altura máxima (y_m) y después regresa al suelo, siempre se mueve con velocidad constante en la dirección horizontal.

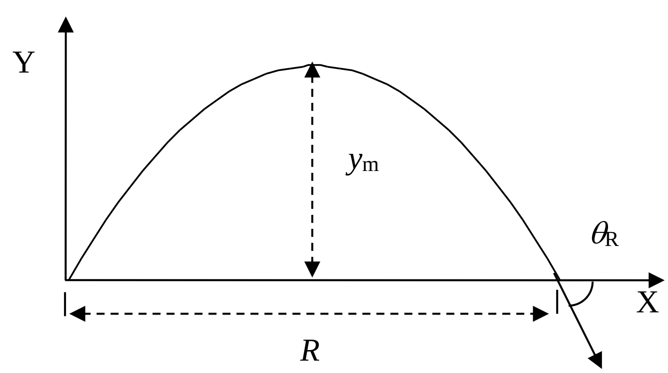


Figura 4.5. La trayectoria del proyectil es una parábola si se supone que el aire no presenta resistencia alguna.

Altura máxima. La componente vertical de la velocidad en el punto máximo de la parábola es nula, lo que significa que ahí el objeto comienza a bajar. El objeto llega a la altura máxima y_m en el tiempo t_m. Por tanto, para calcular t_m, la velocidad (10b) se evalúa en este tiempo y se iguala a cero:

$v_y(t_m) = v_{0y} - gt_m = 0$, de donde se obtiene

$$t_m = \frac{v_{0y}}{g}. \qquad (14)$$

Para calcular la altura máxima, la posición vertical (9b) se evalúa en el tiempo t_m:

$y_m = y(t_m) = v_{0y}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2$, de donde se obtiene que

$$y_m = \frac{{v_{0y}}^2}{2g}. \qquad (15)$$

Este resultado también se obtiene directamente de la ecuación (6) al sustituir a_y por $-g$ y usar el valor de y_0 dado en las condiciones iniciales.

Alcance. La distancia R a la que cae el objeto, al mismo nivel horizontal desde donde fue lanzado, se llama *alcance*. Para calcular el alcance se evalúa la ecuación de la trayectoria ((13a) o (13b)) en y=0 y se resuelve la ecuación de segundo grado que resulta. Una forma alternativa de hacerlo es escribiendo la ecuación de la trayectoria (13a) en la forma siguiente

$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2{v_{0x}}^2}x\right)x. \qquad (13a)$$

Para que y valga cero, sólo uno de los dos factores debe ser nulo a la vez; si el segundo factor es nulo, x=0, esta posición corresponde al punto de lanzamiento; en cambio, si el primer factor es nulo, a cuya posición x le llamaremos R, se obtiene el punto en que el objeto llega al suelo; es decir

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{2{v_{0x}}^2}R = 0 \Rightarrow R = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}.$$

Esta expresión puede ser escrita en otra forma si se usa la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos ángulos; es decir, $\text{sen}(\alpha+\beta)=\text{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\beta$; cuando $\alpha=\beta=\theta_0$ se obtiene $\text{sen}(2\theta_0)=2\,\text{sen}\theta_0\cos\theta_0$. La expresión para el alcance se transforma en

$$R=\frac{2}{g}v_0{}^2\cos\theta_0 sen\theta_0=\frac{v_0{}^2}{g}sen(2\theta_0)\,. \qquad (16)$$

Supóngase ahora que se lanza el proyectil con el mismo valor de v_0 pero el valor de θ_0 puede ser variado, lo cual significa que el dispositivo de disparo puede tener diferentes inclinaciones. El alcance es nulo, R=0, cuando el lanzamiento es horizontal y cuando es vertical, pero $R\neq 0$ para lanzamientos en otras direcciones. Esto quiere decir que existe un valor máximo para R, el cual se obtiene cuando sen($2\theta_0$)=1, o sea cuando $\theta_0=\frac{\pi}{4}$. En este caso

$$R_{\max}=\frac{v_0{}^2}{g}\,.$$

Tiempo de vuelo. El tiempo total de vuelo es el tiempo que el objeto tarda en llegar al punto (R, 0), se designará como t_R. En la ecuación (9b) hay dos valores de t que hacen que la ordenada y sea nula: el que corresponde al momento de lanzamiento y el que corresponde al momento de regresar al suelo. A partir de (9b) se obtiene

$$y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2=\left(v_{0y}-\frac{gt}{2}\right)t=0\Rightarrow t_R=\frac{2v_{0y}}{g}\,. \qquad (17)$$

Al comparar este resultado con la expresión (14), se tiene que $t_R=2t_m$; es decir, el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada, lo cual es una consecuencia de que el medio (vacío) no opone resistencia.

Velocidad en el punto (R, 0). Usando las ecuaciones (10a) y (10b) se pueden calcular las componentes de la velocidad en cualquier tiempo. En particular, en el tiempo t_R son: $v_{Rx}=v_{0x}$ pues esta componente es constante, pero la componente y es

$$v_{Ry}=v_y(t_R)=v_{0y}-gt_R=v_{0y}-g\left(\frac{2v_{0y}}{g}\right)=-v_{0y}\,.$$

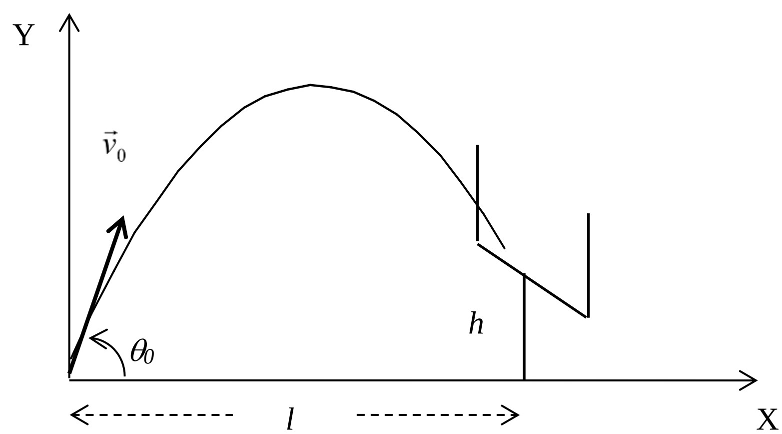
La magnitud de la velocidad completa en el punto de caída es igual a la de la velocidad de disparo, pero la dirección y el sentido son diferentes. Como ya conocemos las componentes de la velocidad $\vec{v}_R$, el ángulo θ_R que forma este vector con la línea horizontal puede ser calculado

$$\tan\theta_R=\frac{v_{Ry}}{v_{Rx}}=\frac{-v_{0y}}{v_{0x}}=-\frac{v_0 sen\theta_0}{v_0\cos\theta_0}=-\tan\theta_0\,, \quad \text{por tanto, } \theta_R=-\theta_0.$$

Observe que estos resultados de que las magnitudes de la velocidad y del ángulo de caída sean iguales a sus respectivas magnitudes en el disparo, son consecuencia de que las ecuaciones cinemáticas usadas son válidas en el vacío.

Ejemplo 1. *Para anotar gol*. El pateador de un equipo de futbol americano puede suministrar a la pelota una velocidad inicial v_0. Se encuentra situado a una distancia *l* (sobre el terreno) enfrente de los postes de gol, cuya barra horizontal está a una altura *h* sobre el terreno. ¿Dentro de qué intervalo angular deberá ser pateada la pelota para anotar un gol de campo?

Solución. En la figura se muestran el sistema de coordenadas que se usará, datos del problema y una posible trayectoria. El origen está en la posición inicial de la pelota, el eje Y es vertical y positivo hacia arriba y el eje X es horizontal y positivo hacia la portería.



La pelota es pateada en una dirección especificada por el ángulo θ_0, y debe pasar por el punto (*l*, *h*) o por arriba. Primero usar la ecuación de la trayectoria correspondiente al ángulo θ_0; después, sustituir los valores del punto (*l*, *h*) en la ecuación de la trayectoria. La fórmula que resulte debe ser una cuadrática y a partir de ella se deben obtener los dos ángulos iniciales que representan los límites del intervalo angular que se busca.

La ecuación de la trayectoria de un proyectil lanzado desde el origen, en términos de la velocidad y ángulo iniciales, está representada por la ecuación (13b) del texto

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g(1+\tan^2\theta_0)}{2{v_0}^2}x^2. \qquad (13b)$$

Esta ecuación describe a todos los puntos de la trayectoria; en particular, al punto con coordenadas (*l*, *h*). La fórmula (13b) evaluada en este punto es una ecuación de segundo grado en $\tan\theta_0$, la cual al rearreglar los términos puede escribirse como

$$\tan^2\theta_0 - \frac{2{v_0}^2}{gl}\tan\theta_0 + \left(1 + \frac{2{v_0}^2 h}{gl^2}\right) = 0 .$$

Al resolver para la tangente del ángulo se obtiene

$$\tan\theta_0 = \frac{{v_0}^2}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{{v_0}^2}{gl}\right)^2 - \left(1 + \frac{2{v_0}^2 h}{gl^2}\right)} . \qquad \text{(a)}$$

A partir de este resultado se obtienen los dos ángulos de disparo (θ_0^- y θ_0^+) que hacen que la trayectoria pase por el punto (*l*, *h*); el superíndice en el ángulo se refiere al signo tomado en la raíz cuadrada de la fórmula (a). Para cualquier otro ángulo comprendido entre θ_0^- y θ_0^+, la pelota pasará por arriba del punto (*l*, *h*). Es decir, el pateador anotará un gol de campo para cualquier ángulo inicial de disparo comprendido en el intervalo $\theta_0^- \le \theta_0 \le \theta_0^+$.

Para que el resultado tenga significado físico, se exige que el radicando en (a) sea un número positivo; es decir, debe cumplirse que

$$\left(\frac{{v_0}^2}{gl}\right)^2 \ge \left(1 + \frac{2{v_0}^2 h}{gl^2}\right) \qquad \text{(b)}$$

Cuando la igualdad en (b) se cumple, el radicando en la ecuación (a) es cero y en este caso particular las dos posibles soluciones se colapsan en una sola.

La fórmula (a) contiene información más específica que la obtenida en (b); para mostrar esta información, la fórmula (a) puede escribirse como

$$\tan\theta_0 = \frac{{v_0}^2}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{{v_0}^2}{gl} + 1\right)\left(\frac{{v_0}^2}{gl} - 1\right) - \frac{2{v_0}^2 h}{gl^2}} . \qquad \text{(c)}$$

Aquí se ve claro que para que el producto de los dos factores entre paréntesis sea positivo, debe cumplirse necesariamente que

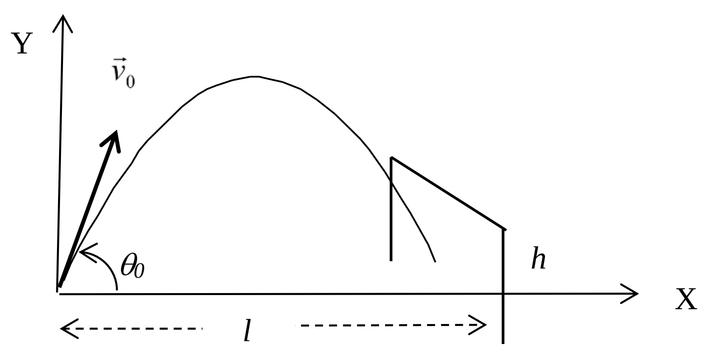
$$\frac{{v_0}^2}{gl} > 1$$

Esta desigualdad es independiente de *h* y es importante porque está diciendo que los valores de v_0 y *l* no pueden ser arbitrarios.

Este ejemplo está analizado con más detalle que el aquí expuesto en la referencia 1 donde también se presentan gráficas correspondientes a valores típicos, se analizan casos particulares y extensiones a otros deportes.

Ejemplo 2. *Dos intervalos angulares en el futbol*. Un jugador de un equipo de futbol puede suministrar a la pelota una velocidad inicial v_0. Se encuentra situado sobre el terreno a una distancia *l* enfrente de la portería, cuyo travesaño está a una altura *h*. ¿Dentro de cuáles intervalos angulares deberá ser pateada la pelota para anotar un gol?

Solución. La figura muestra el sistema de coordenadas y una posible trayectoria. El origen de coordenadas coincide con la posición inicial del balón, el eje Y es vertical y positivo hacia arriba y el eje X es horizontal y positivo hacia la portería.



El balón tiene una rapidez inicial v_0 en la dirección θ_0, y debe pasar entre el punto con coordenadas (*l*, 0) y el punto con coordenadas (*l*, *h*). Para resolver el problema primero se debe encontrar la ecuación de la trayectoria correspondiente al ángulo θ_0, después sustituir en ella los valores de los puntos (*l*, 0) y (*l*, *h*). La ecuación de la trayectoria evaluada en cada punto produce dos ángulos, por lo que se obtendrán cuatro ángulos, los cuales representan los límites de los dos intervalos angulares.

Se hará referencia a la solución encontrada en el ejemplo anterior (del futbol americano) para describir el caso de futbol (balompié, futbol soccer, fútbol o futbol a secas), pero es necesario hacer algunas aclaraciones. Las ecuaciones describen el movimiento de la pelota desde el punto de disparo hasta que llega al suelo, no describen los rebotes que la pelota pueda dar en el suelo, por tanto, éstos no pueden tomarse en cuenta. En este nuevo caso la situación es más complicada que en el ejemplo anterior; para anotar un gol de campo en el futbol americano se tiene que cumplir la restricción de que la pelota pase por arriba del travesaño; mientras que en este otro futbol hay que cumplir con dos restricciones: que pase por arriba del suelo y al mismo tiempo que pase por abajo del travesaño.

En el ejemplo anterior se obtuvo que la ecuación de la trayectoria al ser evaluada en el punto (l, h), la tangente del ángulo resultó ser

$$\tan\theta_0 = \frac{v_0^{\ 2}}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^{\ 2}}{gl}+1\right)\left(\frac{v_0^{\ 2}}{gl}-1\right) - \frac{2v_0^{\ 2}h}{gl^2}}\ . \qquad \text{(c)}$$

Al evaluar esta expresión en h=0 se obtiene

$$\tan\theta_0 = \frac{v_0^{\ 2}}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^{\ 2}}{gl}+1\right)\left(\frac{v_0^{\ 2}}{gl}-1\right)}. \qquad \text{(d)}$$

La trayectoria con el ángulo de disparo más pequeño corresponde a aquella trayectoria cuyo alcance es igual a l, es decir, cuando la pelota cae al suelo en el plano del marco de la portería. Llamemos $\theta_{0f}^{\ -}$ a este ángulo, el subíndice f indica que se trata de futbol, el de la pelota redonda. Para la otra trayectoria parabólica que tiene el mismo alcance l, la pelota es disparada a un ángulo $\theta_{0f}^{\ +}$. Estos dos ángulos están dados por la fórmula (d). Muchos de los ángulos comprendidos entre estos dos valores corresponderán a gol, pero no todos ellos, pues existe la restricción de que la pelota debe pasar por abajo del travesaño. La altura h define el valor de los ángulos de disparo que hacen que la pelota pase justo por el travesaño; a éstos les hemos llamado $\theta_0^{\ -}$ y $\theta_0^{\ +}$. Ahora se tienen 4 ángulos para los cuales la pelota pasa por los límites verticales del marco de la portería: al ras del suelo o al ras del travesaño. Al observar las expresiones algebraicas de estos cuatro ángulos, dados por las fórmulas (c) y (d), se ve que cumplen con las siguientes relaciones

$$tan\theta_{0f}^{\ -} < tan\theta_0^{\ -} < tan\theta_0^{\ +} < tan\theta_{0f}^{\ +}$$

En el ejemplo del pateador de futbol americano se vio que cuando el ángulo de disparo está comprendido entre $\theta_0^{\ -}$ y $\theta_0^{\ +}$ la pelota pasa por arriba del travesaño, de tal manera que este intervalo angular está prohibido para el caso del futbol soccer. Para este deporte (balompié) existen dos intervalos angulares para el ángulo de disparo con la condición de que la pelota pase por la portería; estos intervalos son

$$\theta_{0f}^{\;-} \le \theta_0 \le \theta_0^- \quad \text{y} \quad \theta_0^+ \le \theta_0 \le \theta_{0f}^{\;+}.$$

En este caso del balompié los valores típicos de l, h y v_0 son diferentes a los del futbol americano, los cuales deberán tomarse en cuenta para calcular los ángulos; por ejemplo, el valor de h para el balompié es de 2.44 m.

$\longleftarrow \qquad \longleftarrow \qquad \longleftarrow$

4.4 Movimiento relativo

Imagínese que un observador viaja en un vehículo que se mueve con velocidad constante en una carretera horizontal, lanza una pelota verticalmente y la atrapa al caer. Otro observador parado en la orilla de la carretera observa que la pelota lanzada describe una trayectoria parabólica. Ambos observadores deben estar de acuerdo en la descripción del movimiento de la pelota.

Supóngase que hay dos observadores colocados, cada uno, en el origen de sistemas de referencia diferentes. El sistema S está fijo en el espacio (carretera), mientras que el sistema S´ (vehículo) se mueve respecto al sistema S con una **velocidad constante** (en magnitud, dirección y sentido). Se dice que los sistemas, y por tanto los observadores, están en movimiento uniforme entre sí. Ambos observadores describen el movimiento de un objeto, el cual no tiene restricción alguna; su movimiento observado en ambos sistemas de referencia puede estar acelerado.

Para describir en forma precisa las cantidades de interés conviene usar en sus símbolos dos subíndices: con el primer subíndice se señala el objeto de que se trata (de la partícula P o del sistema de referencia S´) y con el segundo subíndice se señala el sistema de referencia desde donde el objeto es observado (desde el sistema S o desde el sistema S´). Suponga que en el instante t la posición de una partícula P y la posición del sistema S´ están descritas como

$\vec{r}_{\mathbf{PS}}$ = la posición de P con respecto a S

$\vec{r}_{\mathbf{PS'}}$ = la posición de P con respecto a S´

$\vec{r}_{\mathbf{S'S}}$ = la posición de S´ con respecto a S

Estos vectores están representados en dos dimensiones en la figura 4.6a donde el plano XY es paralelo al plano X´Y´ (pero los ejes X y X´, y Y y Y´, podrían no ser paralelos). De acuerdo con la figura, la relación entre estos vectores es

$$\vec{r}_{\mathbf{PS}} = \vec{r}_{\mathbf{S'S}} + \vec{r}_{\mathbf{PS'}} = \vec{r}_{\mathbf{PS'}} + \vec{r}_{\mathbf{S'S}} \qquad (18)$$

Esta relación establece que la posición de P medida en S es igual a la posición de P medida en S´ más la posición de S´ medida en S.

La velocidad de la partícula P se obtiene derivando respecto al tiempo la relación vectorial anterior, esto es

$$\vec{v}_{\mathbf{PS}} = \vec{v}_{\mathbf{PS'}} + \vec{v}_{\mathbf{S'S}}. \qquad (19)$$

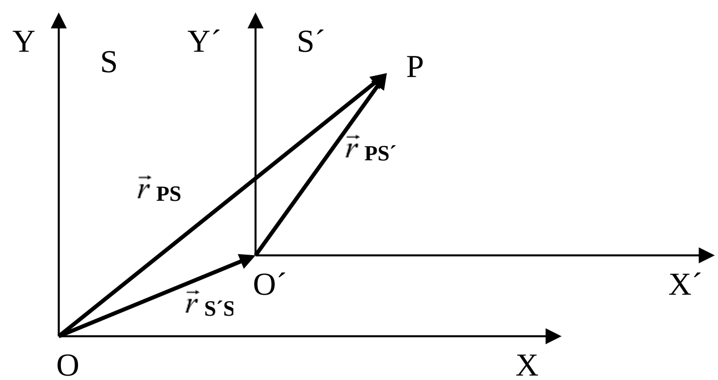


Figura 4.6a. El sistema S está fijo en el espacio. El sistema S´ se mueve con velocidad constante. La posición de la partícula P es medida respecto a los sistemas de referencia S y S´. El movimiento de P es arbitrario, puede ser acelerado.

En cualquier instante, la velocidad de P según es medida en el sistema S es igual a la velocidad de P medida en S´ más la velocidad relativa de S´ con respecto a S. A la velocidad $\vec{v}_{S'S}$ se le llama *velocidad relativa*.

Para obtener la aceleración se deriva la velocidad (19) respecto al tiempo. Tomando en cuenta que $\vec{v}_{S'S}$ es constante, entonces

$$\vec{a}_{\mathbf{PS}} = \vec{a}_{\mathbf{PS'}}. \qquad (20)$$

Esta relación es equivalente a que $\frac{d^2\vec{r}_{S'S}}{dt^2} = 0$, la cual significa que la velocidad relativa entre los sistemas S y S´ es constante. Se obtiene que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas de referencia. Tales sistemas de referencia (S y S´), que pueden moverse uno con relación al otro con velocidad constante, en los cuales los observadores encuentran el mismo valor para la aceleración de una partícula en movimiento, se llaman *sistemas inerciales* (o marcos de referencia inerciales). Debido a que la aceleración no depende del sistema de referencia inercial, es una buena candidata para usarla en las leyes de la física.

Veamos un ejemplo de cómo se transforman las posiciones y velocidades. Supongamos que los sistemas S y S´ son paralelos; además, los ejes OX y O´X´ son paralelos, también los ejes OY y O´Y´. El movimiento relativo se efectúa en la dirección X; esto es, el sistema S´ se mueve en la dirección X con velocidad constante $v_{S'Sx}$ respecto a S; si los orígenes coinciden en t=0, entonces en el tiempo t el sistema S´ está separado del sistema S por la distancia $v_{S'Sx}t$, como lo ilustra la figura 4.6b.

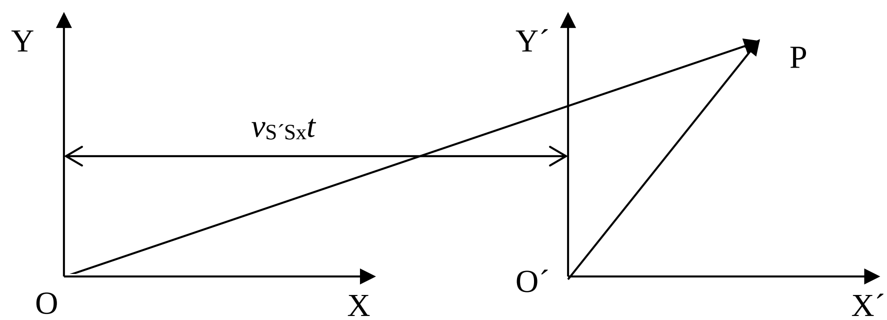


Figura 4.6b. El sistema de referencia X´Y´se mueve con velocidad constante $v_{S'Sx}$ en la dirección OX.

Las coordenadas de la posición de un suceso o un punto P observado en S son

$$\vec{r}_{PS} = (x, y, z),$$

las correspondientes coordenadas observadas en S´ son

$$\vec{r}_{PS'} = (x', y', z').$$

Las coordenadas de la posición del origen O´ respecto al origen O en el tiempo t son

$$\vec{r}_{S'S}=(v_{S'Sx}t, 0, 0).$$

De acuerdo con la expresión (18), las coordenadas del suceso se pueden escribir como

$$x = x'+v_{S'Sx}t \qquad (18a)$$

$$y = y' \qquad (18b)$$

$$z = z' \qquad (18c)$$

El conjunto de ecuaciones (18a) a (18c), o la ecuación vectorial (18), es denominado una *transformación galileana*. Derivando respecto al tiempo los vectores $\vec{r}_{PS}$, $\vec{r}_{PS'}$ y $\vec{r}_{S'S}$, se obtienen las respectivas velocidades relacionadas por la expresión (19); equivalentemente, las correspondientes componentes de las velocidades se obtienen al derivar respecto al tiempo las ecuaciones (18a) a (18c); para este ejemplo, el resultado en términos de las componentes es

$$v_x = v_{x'}+v_{S'Sx} \qquad (19a)$$

$$v_y = v_{y'} \qquad (19b)$$

$$v_z = v_{z'} \qquad (19c)$$

Las ecuaciones (19a) a (19c), o la ecuación vectorial (19), dan la regla galileana para comparar la velocidad de un cuerpo medida por dos observadores en movimiento de traslación relativo.

La Tierra es un marco de referencia inercial sólo aproximadamente porque además del movimiento de traslación tiene movimiento de rotación. La transformación de Galileo es válida en movimientos de traslación con velocidad pequeña, comparada con la velocidad de la luz, donde puede ser usado el mismo tipo de reloj tanto en S como en S´. A velocidades grandes (muy cercana al valor de la velocidad de la luz) se tiene que usar otra transformación (la de Lorentz) para considerar cómo cambia el tiempo en ambos sistemas de referencia.

En los dos ejemplos siguientes se ilustra el uso de la ecuación (19) en una dimensión y en dos dimensiones, respectivamente.

Ejemplo 3. *Nadando en un río*. La corriente de un río fluye con una rapidez de 0.5 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1000 m y después nada de regreso al punto de partida. Si el estudiante puede nadar a una rapidez de 1.2 m/s en aguas en calma, ¿cuánto tarda el viaje redondo? Comparar este resultado con el tiempo que tardaría si no hubiera corriente.

Solución. Usaremos los subíndices: a=agua, e=estudiante, s=suelo. Datos: v_{as}=0.5 m/s, v_{ea}=1.2 m/s, d=1000 m. La relación vectorial entre las velocidades es:

$$\vec{v}_{PS} = \vec{v}_{PS'} + \vec{v}_{S'S} \longrightarrow \vec{v}_{es} = \vec{v}_{ea} + \vec{v}_{as}.$$

Estos vectores en los dos viajes son:

De ida $\longleftarrow$ $\vec{v}_{as}$ $\longrightarrow$ $\vec{v}_{ea}$ $\longrightarrow$ $\vec{v}_{es}$

De regreso $\longleftarrow$ $\vec{v}_{as}$ $\longleftarrow$ $\vec{v}_{ea}$ $\longleftarrow$ $\vec{v}_{es}$

La magnitud de la velocidad del estudiante respecto al suelo para el viaje de ida es

$$v_{esi} = v_{ea} - v_{as}.$$

Por tanto, el tiempo de ida es

$$t_i = d/v_{esi} = d/(v_{ea} - v_{as}) = 1428.6 \text{ s}=23.8 \text{ min}.$$

La magnitud de la velocidad del estudiante respecto al suelo para el viaje de regreso es

$$v_{esr} = v_{ea} + v_{as}.$$

Por tanto, el tiempo de regreso es

$$t_r = d/v_{esr} = d/(v_{ea} + v_{as}) = 588.2 \text{ s}=9.8 \text{ min}.$$

Estos dos tiempos (de ida y de regreso) están de acuerdo con nuestra experiencia, pues en el viaje de regreso la corriente del agua ayuda a llegar en un tiempo menor. El tiempo del viaje completo es

$$T = t_i + t_r = 2016.8 \text{ s} = 33.6 \text{ min}.$$

Si el agua no se mueve, entonces $v_{esi} = v_{esr} = v_{es} = v_{ea}$. Por tanto, el tiempo total sería

$$T' = 2d/v_{es} = 2d/v_{ea} = 1666.7 \text{ s}= 27.8 \text{ min}.$$

Ejemplo 4. *Cruzando un río*. Un río tiene una anchura *d* y por él fluye una corriente que se mueve con una rapidez v_1. Una persona desea cruzarlo en un bote de motor que puede navegar a una rapidez v_2 respecto a la corriente. La persona quiere llegar a un punto en la orilla opuesta situado a una distancia *l* corriente arriba desde el punto directamente opuesto a donde se encuentra.

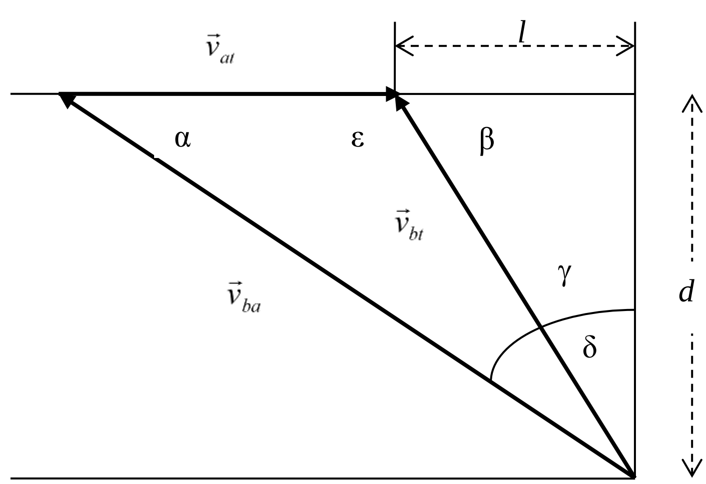
a) ¿En qué dirección debe dirigir el bote para navegar en línea recta y llegar al punto deseado?

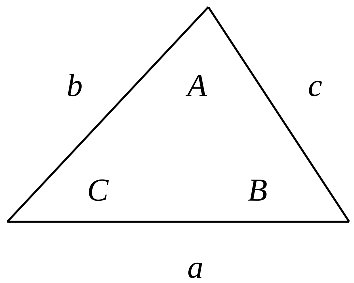
b) ¿Cuánto tarda el bote en cruzar el río y llegar a su destino?

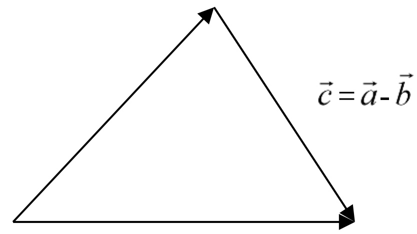
Solución. Usaremos los subíndices a=agua, b=bote, t=terreno para reescribir los datos de las velocidades como: $v_{at}=v_1$, $v_{ba}=v_2$. La relación vectorial entre las velocidades es:

$$\vec{v}_{bt} = \vec{v}_{ba} + \vec{v}_{at}.$$

a) Las figuras siguientes ayudarán a resolver el problema. El ángulo que está marcado es γ y la diferencia γ-δ es el ángulo entre los vectores $\vec{v}_{ba}$ y $\vec{v}_{bt}$. Nótese que aparecen dos triángulos: uno de distancias y uno de velocidades, y que se han etiquetado todos los ángulos.







El triángulo de velocidades no es rectángulo, por lo que para conocer sus ángulos es necesario usar las leyes de los senos y de los cosenos. Para un triángulo de lados *a*, *b* y *c* y ángulos *A*, *B* y *C*, como se ilustra en la figura, estas leyes se escriben como $\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$, y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; la ley de los cosenos se obtiene al calcular el cuadrado de la magnitud del vector $\vec{a} - \vec{b}$. Para el triángulo de las velocidades, estas relaciones son

$$\frac{sen\varepsilon}{v_{ba}} = \frac{sen\alpha}{v_{bt}} = \frac{sen(\gamma - \delta)}{v_{at}} \qquad \text{(a)}$$

$$v_{bt}{}^2 = v_{ba}{}^2 + v_{at}{}^2 - 2v_{ba}v_{at}\cos\alpha \qquad \text{(b)}$$

El bote debe dirigirse en la dirección indicada por el ángulo γ; además, las velocidades conocidas son v_{ba} y v_{at}; por tanto, para calcular el ángulo γ conviene usar los cocientes primero y tercero de la relación (a). Para aplicar la ley de los senos, a partir de la primera figura se ve que $\varepsilon = \pi - \beta$, por tanto,

$$sen\varepsilon = sen(\pi - \beta) = sen\pi\cos\beta - \cos\pi sen\beta = sen\beta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}}, \qquad \text{(c)}$$

$$sen(\gamma - \delta) = sen\gamma\cos\delta - \cos\gamma sen\delta = sen\gamma\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}} - \cos\gamma\frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}}. \qquad \text{(d)}$$

Usando (c) y (d) en (a) se obtiene $\frac{d}{\sqrt{d^2 + l^2}v_{ba}} = \frac{dsen\gamma - l\cos\gamma}{\sqrt{d^2 + l^2}v_{at}}$. (e)

En esta ecuación (e) la única cantidad desconocida es el ángulo *γ*. Usando $\cos\gamma = \sqrt{1 - sen^2\gamma}$ se obtiene la siguiente relación $d\frac{v_{at}}{v_{ba}} = dsen\gamma - l\sqrt{1 - sen^2\gamma}$, la cual se reescribe como

$l\sqrt{1-sen^2\gamma} = d\left(sen\gamma - \frac{v_{at}}{v_{ba}}\right)$. Al elevar al cuadrado ambos miembros y reacomodar los términos, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado en *senγ*:

$$sen^2\gamma - \frac{2d^2 v_{at}}{v_{ba}(d^2+l^2)} sen\gamma + \left(\frac{v_{at}{}^2}{v_{ba}{}^2} - \frac{l^2}{d^2}\right)\left(\frac{d^2}{d^2+l^2}\right) = 0 .$$

Conociendo los valores numéricos del problema se calcula el valor de este ángulo.

b) El tiempo está dado por la distancia recorrida entre la velocidad: $t_1 = \frac{\sqrt{d^2+l^2}}{v_{bt}}$.

Para usar la relación (b) se ve que los ángulos en el triángulo de las velocidades están relacionados como $\alpha+\varepsilon+(\gamma-\delta)=\pi$ y como $\varepsilon = \pi - \beta$; por tanto $\alpha+\pi-\beta+\gamma-\delta=\pi \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$, pero $\beta+\delta=\pi/2$; por tanto $\alpha = \frac{\pi}{2}-\gamma$. El valor de γ se obtuvo en el inciso (a), por tanto ya se conoce α, con lo cual se puede aplicar la relación (b) para obtener el valor de v_{bt}, para finalmente calcular el tiempo t_1.

←――― ←――― ←―――

Recapitulación

La trayectoria de una partícula que se mueve en un plano puede descomponerse en proyecciones sobre los ejes coordenados cartesianos. El *vector de posición* $\vec{r}$ de la figura 4.2 señala la posición en que se encuentra la partícula en el tiempo *t*; se representa por las coordenadas (*x*, *y*), las cuales son funciones del tiempo. En un tiempo posterior *t´*, la nueva posición es $\vec{r}\,´$. La diferencia entre estos vectores es el *desplazamiento*, $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,´ - \vec{r}$; la diferencia entre estos tiempos es el lapso, $\Delta t = t´ - t$. *Vector velocidad media*: es el cociente del desplazamiento entre el lapso $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. *Velocidad instantánea*: es el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero $\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. *Aceleración media*: es el cociente del cambio en la velocidad entre el lapso $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. *Aceleración instantánea*: es el límite de la aceleración media cuando Δt tiende a cero $\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Las posiciones en términos de sus componentes se expresan como $\vec{r} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ en el tiempo *t* y $\vec{r}\,´ = (x´, y´) = x´\hat{i} + y´\hat{j}$ en el tiempo *t´*. Análogamente, se escriben las expresiones correspondientes a las otras cantidades.

Para el movimiento unidimensional con aceleración constante se obtuvo que la posición es $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Las correspondientes ecuaciones en cada uno de los ejes coordenados deben tener la misma forma algebraica, las ecuaciones para la posición son

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \textbf{(1)} \quad \text{y} \quad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad \textbf{(2)}.$$

Al multiplicar la ecuación (1) por $\hat{i}$, la ecuación (2) por $\hat{j}$ y sumar los resultados, se obtiene

$$x\hat{i} + y\hat{j} = (x_0\hat{i} + y_0\hat{j}) + (v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t^2.$$

El miembro izquierdo es el vector $\vec{r}$. El contenido del primer paréntesis es el vector posición inicial $\vec{r}_0$; el del segundo paréntesis corresponde a la velocidad inicial $\vec{v}_0$; el último paréntesis contiene el vector $\vec{a}$. La posición en forma vectorial es $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$. Análogamente, se obtienen relaciones vectoriales correspondientes a relaciones obtenidas en una dimensión. Los resultados son $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, $2\vec{a} \bullet (\vec{r} - \vec{r}_0) = v^2 - v_0^2$, y $\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}_0)t$.

Movimiento de proyectiles en el vacío. El objeto es lanzado desde el origen de coordenadas con velocidad inicial $\vec{v}_0$, que forma un ángulo θ_0 con la línea horizontal. El eje X está en la dirección horizontal, positivo hacia donde se mueve el objeto, y el eje Y es vertical y positivo hacia arriba; la aceleración es $\vec{a} = (0, -g)$ y el tiempo se mide a partir del lanzamiento. En $t=0$ las coordenadas de la posición son $x_0=0$ y $y_0=0$, las componentes de la velocidad inicial son $v_{0x}=v_0\cos\theta_0$ y $v_{0y}=v_0\operatorname{sen}\theta_0$. Se obtiene y como función de x, ie, la ecuación de la trayectoria.

Suponer dos observadores, cada uno, en el origen de sistemas de referencia diferentes. El sistema S está fijo en el espacio, el sistema S´ se mueve respecto a S con *velocidad constante*. Ambos observadores describen el movimiento de un objeto, el cual puede estar acelerado. Conviene usar dos subíndices, con el primero se señala el objeto de que se trata (partícula P o sistema S´) y con el segundo se señala el sistema de referencia desde donde el objeto es observado (desde sistema S o desde S´). En el instante t la posición de P y la posición de S´ son

$\vec{r}_{\mathbf{PS}}$ = la posición de P con respecto a S,

$\vec{r}_{\mathbf{PS'}}$ = la posición de P con respecto a S´ y

$\vec{r}_{\mathbf{S'S}}$ = la posición de S´ con respecto a S.

Estos vectores están representados en la figura 4.6a donde el plano XY es paralelo al plano X´Y´. La relación entre estos vectores es $\vec{r}_{\mathbf{PS}} = \vec{r}_{\mathbf{PS'}} + \vec{r}_{\mathbf{S'S}}$. La posición de P medida en S es igual a la posición de P medida en S´ más la posición de S´ medida en S. $\vec{v}_{\mathbf{PS}} = \vec{v}_{\mathbf{PS'}} + \vec{v}_{\mathbf{S'S}}$, la velocidad de P según se mide en S es igual a la velocidad de P medida en S´ más la velocidad de S´ con respecto a S; $\vec{v}_{\mathrm{S'S}}$ es la *velocidad relativa*. La aceleración es $\vec{a}_{\mathbf{PS}} = \vec{a}_{\mathbf{PS'}}$. Tales sistemas de referencia, que se mueven entre sí con velocidad constante, son *sistemas inerciales*.

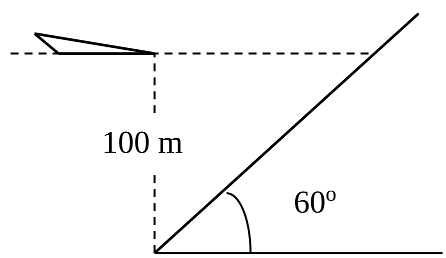
Bibliografía

1. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la Resolución de Problemas. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2005. Capítulo 3.

Problemas

1. La velocidad $\vec{v}$ de una partícula que se mueve en el plano XY está dada por: $\vec{v} = (6t - 4t^2)\,\hat{i} + 8.0\,\vec{j}$, con $\vec{v}$ en metros por segundo y t en segundos.
a) ¿Cuál es la aceleración instantánea cuando $t = 3$ s? b) ¿Llega a ser cero la aceleración?, si es así ¿en qué tiempo? c) ¿Llega a ser cero la velocidad instantánea?, si es así ¿en qué tiempo?

2. Un avión viaja planeando en línea recta horizontal con una rapidez constante de 30 km/h a una altura de 100 m sobre suelo. Justo en la línea de vuelo se encuentra la ladera recta de una montaña que tiene una pendiente de 60° sobre la horizontal. A partir del momento en que se sitúa en un punto justo arriba de la ladera, como se muestra en la figura, ¿cuánto tiempo tardará el avión en chocar con la montaña si no cambia su dirección de vuelo?.



3. Una partícula se desplaza sobre una mesa horizontal sin fricción con una velocidad v_o, al llegar al borde de la mesa se separa de ella. La altura de la mesa es h = 1.2 m. A una distancia horizontal d = 0.8 m desde la base de la mesa hay una barrera de 1 m de altura. Calcular el mínimo valor de v_o de tal forma que la partícula pase por encima de la barrera.

4. Un futbolista intenta meter un gol frente a la portería rival desde una distancia de 40 m con un disparo ejecutado a una velocidad de 90 km/h. El ángulo de tiro al que es pateado el balón es de 15° y la altura del travesaño de la portería es de 2.44 m. ¿Entra el balón a la portería, suponiendo que el portero no lograra detenerlo? Considerar que la pelota debe entrar directamente, sin rebotar.

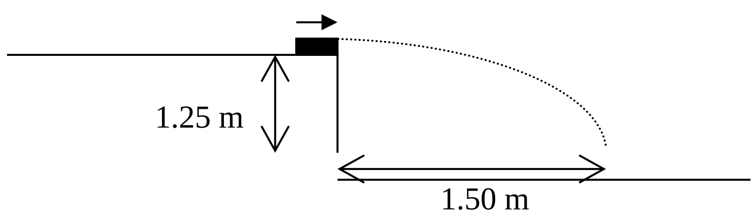
5. Se lanza una piedra desde una altura de 20 m sobre el suelo, con una velocidad inicial cuyas componentes horizontal y vertical son iguales a 10 m/s, formando así un ángulo de 45º arriba de la horizontal. Despreciar efectos de fricción. (a) ¿Cuánto tiempo estará la piedra en el aire antes de chocar con el suelo? (b) En la dirección horizontal, ¿qué tan lejos del punto de disparo choca con el suelo? (c) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza con respecto al suelo? d) Calcular el vector velocidad en cualquier instante y e) la rapidez a los dos segundos de vuelo.

6. Un rifle dispara una bala con una rapidez en la boca de 500 m/s a un blanco situado a 50 m de distancia horizontal. Si el blanco y la boca del arma están a la misma altura, ¿a que altura del blanco debe ser apuntado el rifle para que la bala de en el blanco?

7. Una piedra se lanza en dirección horizontal desde un puente sobre un río a una velocidad inicial de 30 m/s y se observa que tarda 4 s en llegar al nivel del agua. a) ¿Cuál es la altura del puente desde el nivel del agua del río? b) ¿A qué distancia horizontal se desplaza la piedra hasta llegar al nivel del agua? c)¿Cuál es la velocidad de la piedra en magnitud y dirección, justamente al momento de chocar en el agua?

8. Dos segundos después del lanzamiento de un proyectil, desde el nivel del piso, se ha desplazado 40 m horizontalmente y 53 m verticalmente medidos desde el punto de lanzamiento. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil? En el instante en que el proyectil llega a su altura máxima sobre el suelo, ¿cuál es su distancia horizontal recorrida desde la posición inicial?

9. Un bloque resbala hacia fuera del borde de una mesa horizontal de 1.25 m de altura. Se separa de la mesa y cae al suelo en un punto situado a una distancia horizontal de 1.50 m, medida desde el borde de la mesa, como se muestra en la figura. a) ¿Durante cuanto tiempo permanece el bloque en el aire? b) ¿Cuál era su velocidad en el instante en que dejó la mesa?



10. Los bomberos intentan apagar un incendio en un edificio. La manguera proyecta el agua con una rapidez inicial de 30 m/s. Ellos se encuentran a una distancia horizontal de 10 m de la pared del edificio y dirigen el agua a un ángulo de 30°. Suponga que la trayectoria del agua es como la de un proyectil (tiro parabólico). a) ¿A qué altura del edificio llegará el chorro? b) ¿Cuánto tiempo tarda el agua en chocar con el edificio desde que sale de la boca de la manguera? c) ¿Qué dirección lleva el chorro cuando alcanza al edificio?

11. Una pelota de futbol americano es pateada con una velocidad inicial de 20 m/s y un ángulo de disparo de 42º sobre la horizontal. Un receptor en la línea de gol situado a 50 m en la dirección de la patada comienza a correr en ese instante para atrapar la pelota.
¿Cuál debe ser su velocidad media si tiene que atrapar la pelota en el momento justo antes de que llegue al suelo? Debe correr hacia la meta o hacia el pateador? ¿Qué distancia corre?.

12. Un jugador de tenis parado a 12.6 m de la red golpea la bola a 3.0º sobre la horizontal. Para librar la red la pelota debe elevarse al menos 0.33 m respecto del nivel de lanzamiento. Si la pelota apenas libra la red en el punto más alto de su trayectoria, ¿qué tan rápido se estaba moviendo la bola cuando se separó de la raqueta?

13. Un jugador de frontón proyecta la pelota con una rapidez de 25.0 m/s y a un ángulo de 40° sobre la horizontal. En ese momento, la pared de la cancha está a una distancia de 35.0 m del jugador. a) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en alcanzar la pared? b) ¿A qué altura sobre el punto de lanzamiento pega la pelota sobre la pared?

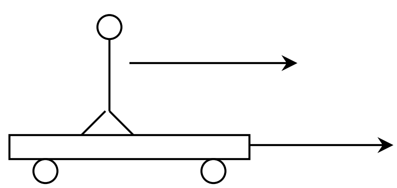
14. Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 15 m/s desde el nivel del suelo a un blanco que está en el suelo, a una distancia de 20.0 m. ¿Cuáles son los ángulos mínimo y máximo que permitirán que el proyectil acierte en el blanco?

15. Un pasajero (P) se encuentra en reposo sobre la banda transportadora (S') de un aeropuerto, la cual lo mueve un total de 100 m en línea recta, con respecto al suelo fijo (S) del aeropuerto, en un total de 45 s. Si el pasajero caminara sobre esta banda en movimiento, el tiempo que tardaría en recorrer estos mismos 100 m sería sólo de 30 s; en este caso, a) ¿a qué velocidad se mueve el pasajero con respecto a la banda transportadora?, b) ¿qué distancia recorre con respecto a la banda misma?

16. Un comprador que está en una tienda puede caminar al piso siguiente sobre una escalera mecánica en 30 s cuando está detenida. Cuando la escalera funciona normalmente, puede llevar al comprador sin caminar al siguiente piso en 20 s. ¿Cuánto tiempo le tomará al comprador subir caminando con la escalera mecánica en movimiento?

17. Una persona camina sobre una plataforma de ferrocarril con una rapidez de 10 m/s respecto a la plataforma. La plataforma se mueve con una rapidez de 5 m/s con respecto al piso y en el mismo sentido de la persona, como indica la figura 4.7. Calcular a) la rapidez de la persona con respecto a un observador en reposo; b) la velocidad de la persona y de la plataforma si la persona deja de caminar sobre la plataforma.

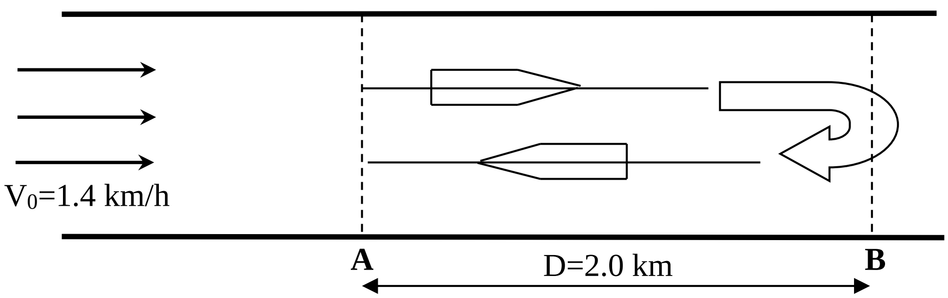
Figura 4.7. Problema 17.



18. Un bañista se aventura a nadar aguas arriba de un río una distancia de 500 m respecto de tierra. Las aguas del río tienen una rapidez constante de 15.0 m/min. Sin tomar descanso, el bañista regresa al punto de partida. Si sabemos que esta persona nada con una rapidez constante de 45.0 m/min en agua tranquila, ¿cuánto tiempo dura su recorrido? Comparar con el tiempo que duraría el recorrido si el agua estuviera quieta.

19. Dos embarcaderos, A y B, están separados 2.0 km uno del otro sobre la misma orilla de un río como se muestra en la figura. Las aguas del río fluyen con una rapidez V_0= 1.4 km/h respecto de tierra. Una lancha hace el recorrido de ida y vuelta entre los dos embarcaderos en un tiempo total de 50 min. En todo momento, el velocímetro de la lancha indica la misma lectura (V_L) para su rapidez respecto del agua. Determine la lectura (V_L) del velocímetro.

Figura 4.8.
Problema 19.



20. Está lloviendo verticalmente a una rapidez constante de 8 m/s. a) ¿Con qué ángulo con respecto a la vertical y b) a qué velocidad parecen estar cayendo las gotas de agua según las ve el conductor de un automóvil que viaja en una carretera recta horizontal a una velocidad de 50 km/h?

21. Un río tiene una anchura d y por él fluye una corriente que se mueve con una rapidez v_1. Una persona desea cruzarlo en un bote de motor que puede navegar a una rapidez v_2 respecto a la corriente. La persona quiere llegar a un punto (en la orilla opuesta) directamente opuesto a donde se encuentra. Usar d=200 m, v_1=1.1 m/s, v_2=4.0 m/s. a) ¿En qué dirección debe dirigir el bote para navegar en línea recta y llegar al punto deseado? b) ¿Cuánto tarda el bote en cruzar el río y llegar a su destino?

22. Un avión viaja al este, pero el piloto tiene que dirigirlo al sureste para contrarrestar el efecto de un viento estacionario que sopla al noreste. El avión tiene velocidad ($\vec{v}_{av}$) respecto al viento con magnitud de 215 km/h y un ángulo θ al sureste. El viento tiene velocidad ($\vec{v}_{vt}$) respecto al terreno, con magnitud de 65 km/h, dirigida 20º al noreste. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del avión respecto al terreno ($\vec{v}_{at}$) y cuál la magnitud de θ?

5 LAS LEYES DE NEWTON

Se empieza a estudiar la causa del movimiento de traslación de los cuerpos, para lo cual se introduce el concepto de fuerza. En mecánica, las fuerzas satisfacen las tres leyes de Newton. Se analizan algunas fuerzas y se explica el uso de las leyes de Newton a través de algunos ejemplos.

5.1 Dinámica

La **dinámica** es la parte de la mecánica que estudia la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas de ese movimiento. El movimiento de un cuerpo queda determinado por la *naturaleza* y la *disposición* de los otros cuerpos, es decir de su entorno o medio ambiente. Por ejemplo, si una pelota es lanzada contra una pared, la pelota podría quedar adherida a la pared si la pared tuviera algún pegamento, podría rebotar en una dirección que depende de la dirección con que la pelota incide o si la superficie de la pared es lisa o rugosa.

El **problema central** de la mecánica clásica puede enunciarse de la manera siguiente. ¿Cuál es el movimiento de un cuerpo conocido que está colocado en un medio ambiente conocido? También se conocen las *condiciones iniciales* (posición y velocidad iniciales).

5.2 Fuerza

El movimiento de un cuerpo es el resultado directo de sus *interacciones* con los cuerpos que lo rodean. Las interacciones se describen convenientemente a través del concepto llamado *fuerza*. La fuerza es una relación entre el medio ambiente y el movimiento del cuerpo.

Para resolver el problema central:

Primero se introduce el concepto de fuerza definiéndola en función de la *aceleración* que experimenta un determinado cuerpo.

Segundo, se asigna una *masa* al cuerpo para hacer ver que diferentes cuerpos experimentan diferentes aceleraciones en el mismo entorno.

Tercero, se buscan las formas de calcular las fuerzas que actúan sobre un cuerpo a partir de las propiedades del cuerpo y de su medio ambiente; es decir, se buscan las *leyes de las fuerzas*, las cuales se expresan convenientemente a través de una fórmula.

La fuerza, que básicamente es una forma de relacionar al entorno con el movimiento del cuerpo, aparece en las *leyes del movimiento*, las cuales determinan la aceleración que experimenta un cuerpo dado bajo la acción de una fuerza dada. El éxito de la mecánica clásica radica en su poder de predicción de resultados que coinciden con el experimento y la observación, y en que las leyes de las fuerzas tienen una forma sencilla.

5.3 Sistema inercial

Definición. Un ***sistema de referencia inercial*** es un sistema que **no** está siendo **acelerado**; es decir, el observador anclado en el sistema de referencia inercial no experimenta ninguna aceleración.

Al sistema de referencia inercial también se le llama marco inercial, sistema inercial o referencial inercial. La noción de marco inercial es importante porque todas las leyes de la dinámica deben ser las mismas en todos los marcos inerciales (esto es el *principio clásico de la relatividad*). Una vez que hayamos encontrado un marco inercial, podemos encontrar muchos más porque un marco de referencia que se mueva a velocidad constante respecto a un marco inercial es también un marco inercial.

Consecuencias:

1. Hay muchos marcos inerciales. Por la transformación para las velocidades (transformación de Galileo) se puede obtener otro marco inercial S´ que se mueva con velocidad constante $\vec{V}$ respecto al marco inercial S. La relación entre las velocidades es $\vec{v} = \vec{v}´ + \vec{V}$**,** donde $\vec{v}$ es la velocidad de un objeto medida en S y $\vec{v}´$ es la velocidad del mismo objeto medida en S´. Si $\vec{v}$ es constante en S, entonces $\vec{v}´$ es constante también; por tanto, S´ también es inercial.
2. Las leyes de la física (y de la mecánica) no pueden enunciarse en términos de las posiciones o de las velocidades, porque ellas dependen del marco inercial que se use. Por ejemplo, si $\vec{v} = \vec{0}$ en S, entonces $\vec{v}´ = -\vec{V}$ en S´.
3. Las aceleraciones medidas en S y en S´ son las mismas: $\vec{a} = \vec{a}´$. Por tanto, las leyes de la mecánica sí pueden involucrar la aceleración.

Aun cuando la Tierra esté girando, en la mayoría de los casos prácticos puede considerarse que un marco de referencia unido a la Tierra (laboratorio terrestre) es *aproximadamente* un marco de referencia inercial. Es aproximado porque se debería cancelar o reducir el efecto de la acción de otros cuerpos como la resistencia del aire, la fricción (escogiendo superficies lisas o lubricándolas). El efecto debido a la rotación de la Tierra es pequeño y puede ignorarse (estrictamente, un sistema de referencia unido a la Tierra no es inercial pues describe un movimiento circular, cuando es visto desde el espacio exterior, y por tanto está acelerado).

5.4 Primera ley de Newton

Esta ley se enuncia como: "Todo cuerpo persiste en su estado de reposo, o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que se vea obligado a cambiar dicho estado por la acción del medio ambiente que actúa sobre él". En otras palabras, si algo se mueve, sin que nada lo toque o perturbe, se moverá eternamente con velocidad uniforme en línea recta. Esto ocurrirá solamente si se observa al cuerpo en un sistema de referencia inercial. A esta ley también se le llama *ley de la inercia* o *principio de inercia*.

La propiedad que tienen los cuerpos de resistirse a cambiar su estado de reposo o de movimiento uniforme se llama *inercia*. La inercia se mide por medio de la masa. Newton asoció la masa a la cantidad de materia que contiene un cuerpo. La masa m es un número escalar positivo, su dimensión es M (es decir, $[m]$=M) y su unidad en el sistema SI es el kilogramo (kg).

5.5 Segunda ley de Newton

Supongamos ahora que realizamos un experimento en donde un agente externo ejerce una acción sobre un cuerpo que inicialmente se encuentra en reposo. Escogemos un carro que contiene una caja con un objeto adentro; la suma de las masas de los tres cuerpos es m; el carro está colocado sobre una superficie horizontal y está unido a una pared vertical a través de un hilo. Entre el carro y la pared está puesto un resorte comprimido (figura 5.1). Al cortar el hilo, el carro es lanzado por la acción del resorte, adquiriendo una aceleración a; esta aceleración es el efecto cinemático causado por la acción del resorte. El hilo es cortado en el tiempo t=0; a partir de los cambios en la posición del carro se determina su velocidad, la cual está creciendo mientras dura la acción del resorte; cuando cesa la acción del resorte, la velocidad del carro tiene un valor constante como indica cualitativamente la figura 5.2.

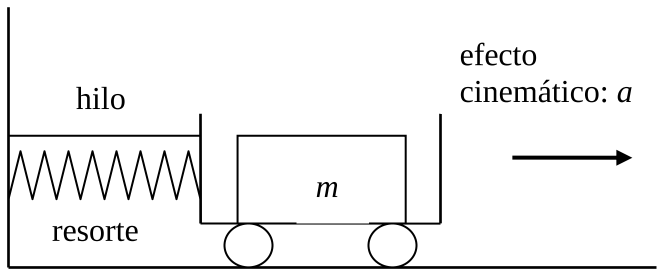


Figura 5.1. El carro y su contenido están sometidos a la acción de un resorte.

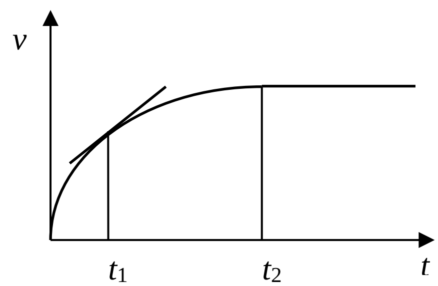


Figura 5.2. La curva velocidad-tiempo se obtiene a partir de cambios en la posición.

La acción del resorte sobre el carro dura hasta el instante t_2, a partir de este momento el carro se mueve con velocidad constante. En la figura 5.2 se ha supuesto que la velocidad como función del tiempo es una curva creciente arbitraria, pues aún no sabemos cómo se comporta un resorte. A partir de la curva velocidad-tiempo se calcula la aceleración del carro trazando la recta tangente a la curva en un tiempo t_1 (el cual corresponde a una compresión intermedia x_1 del resorte) y midiendo su pendiente.

Ahora se repite el experimento usando el mismo resorte y comprimiéndolo de forma idéntica que antes, pero colocando distintos objetos en la caja del carro. Para cada caso se calcula la aceleración del carro en el tiempo correspondiente a la misma compresión intermedia x_1. Se traza una gráfica de la aceleración del carro en función de la masa total, es decir, la masa del carro + la masa de la caja + la masa del objeto en cada caso. En la figura 5.3 se muestra que la curva a vs m es decreciente, esto significa que la aceleración es cada vez menor al aumentar la masa, como es de esperarse.

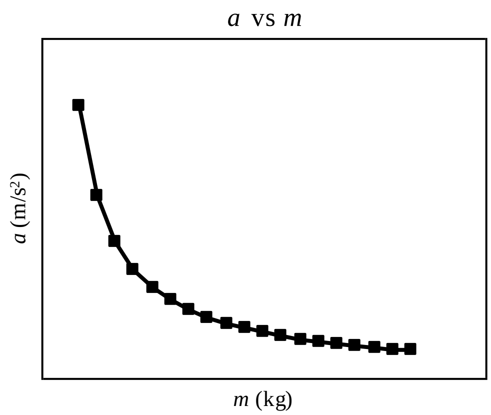


Figura 5.3. Al aumentar la masa, la aceleración es menor (para la misma acción del resorte).

Si en vez de graficar a vs m se grafica a en función de $\frac{1}{m}$, se obtiene que los puntos están sobre una línea recta (figura 5.4), lo cual significa que $a \sim \frac{1}{m}$ (a es proporcional al inverso de m). La constante de proporcionalidad se escoge como la magnitud de la fuerza $\left(a = F\frac{1}{m}\right)$. Se llama *fuerza* al agente externo que, observado en un sistema inercial, cambia la velocidad de un cuerpo; es decir, la fuerza es el agente externo que suministra una aceleración a un cuerpo.

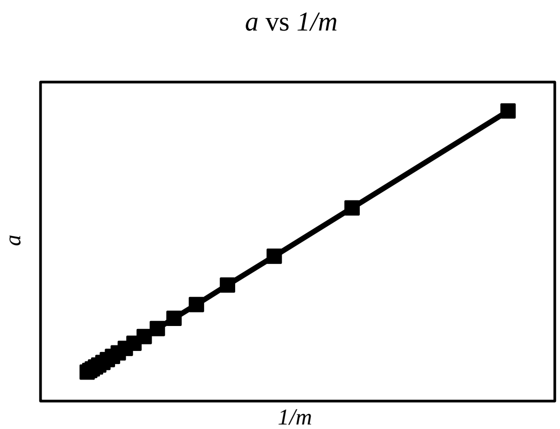


Figura 5.4. Al graficar la aceleración contra el inverso de la masa se obtiene una línea recta.

Ahora se realiza el experimento con otro resorte y usando sucesivamente masas diferentes, luego se usan otros resortes distintos (individuales o combinados); para cada resorte usado se obtienen resultados análogos como los mostrados en las figuras 5.3 y 5.4.

Como resultado de lo anterior, puede decirse que si $\vec{F}$ es la fuerza que un agente externo ejerce sobre un cuerpo de masa m y si $\vec{a}$ es la aceleración que resulta de la aplicación de esa fuerza, entonces, para un observador en un sistema de referencia inercial, se tiene que

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

En esta ecuación la cantidad $\vec{F}$ representa la propiedad del agente externo (la causa del movimiento), m es la propiedad del cuerpo, y el vector $\vec{a}$ representa el efecto cinemático producido por el agente externo. Esta ecuación es una relación causa-efecto, $\vec{F}$ es la causa y $\vec{a}$ es el efecto. Debido a que m es un escalar y $\vec{a}$ es un vector, entonces $\vec{F}$ es un vector. La ecuación (1) es la *segunda ley de Newton*.

Si en vez de aplicar una sola fuerza se aplican simultáneamente muchas fuerzas sobre un mismo cuerpo, entonces se obtiene que

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = m\vec{a},$$

las fuerzas se suman como vectores, cumplen el *principio de superposición*. La fuerza $\vec{F}$ que aparece en la ecuación (1) representa la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es la fuerza neta, total o resultante. Por otra parte, si en vez de un solo objeto se tiene un cuerpo compuesto por varios objetos de masas diferentes, entonces

$$\vec{F} = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)\vec{a} = m\vec{a}.$$

Es decir, la masa que aparece en la ecuación (1) es la masa total del cuerpo compuesto que se mueve como una sola pieza. Esto es cierto siempre y cuando los cuerpos se muevan con la misma $\vec{a}$; esto supone que el cuerpo compuesto no cambia su estructura.

La segunda ley de Newton suministra la *ecuación de movimiento*. Para resolverla explícitamente se necesita conocer la masa y la fuerza resultante. Conociendo la fuerza puede conocerse la aceleración y, por tanto (al integrar para obtener $\vec{r}(t)$), la trayectoria. Inversamente, si se conoce la trayectoria puede conocerse la aceleración y, por tanto, la fuerza. Esto se ilustra en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \text{fuerza} & \rightarrow & \text{aceleración} & \rightarrow & \text{trayectoria} \\ \text{fuerza} & \leftarrow & \text{aceleración} & \leftarrow & \text{trayectoria} \end{array}$$

La fuerza tiene las dimensiones del producto masa por aceleración, esto es $[F]=[m][a]=\mathrm{MLT}^{-2}$. Su unidad en el sistema SI es kg·m/s^2, se le llama newton y su símbolo es N. La ecuación (1) expresa que cuando $\vec{F}=\vec{0}$, entonces la aceleración es nula ($\vec{a}=\vec{0}$); por tanto la velocidad es constante, $\vec{v}$=constante. Como $\vec{F}$ mide la acción de los otros cuerpos, es consistente con la primera ley. Pero la primera ley **no** es un caso particular de la segunda (la primera ley se enuncia sin la acción de agente externo).

Al aplicar la segunda ley para la resolución de un problema, es de gran ayuda trazar un diagrama que muestre el cuerpo en cuestión, o como si fuera una partícula, y que también muestre todos los vectores fuerza que actúan sobre él. Este diagrama llamado *diagrama de cuerpo libre* constituye un paso importante en la resolución de problemas.

5.6 Tercera ley de Newton

Supongamos ahora que el carro de la figura 5.1 no está atado a la pared sino a otro carro, como se ilustra en la figura 5.5. Ambos carros están unidos por un hilo y entre ellos está colocado un resorte comprimido, pero no atado a los carros. Al cortar el hilo ambos carros se mueven separándose uno del otro.

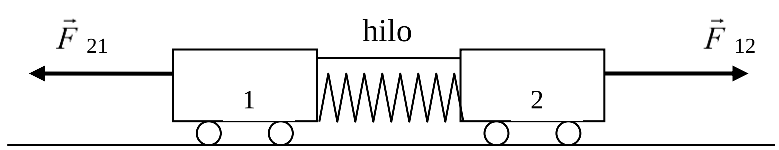


Figura 5.5. Entre los dos carros está colocado un resorte comprimido.

El carro 1 se mueve debido a que el carro 2 ejerce una fuerza $\vec{F}_{21}$ sobre el carro 1, a través del resorte, mientras que el carro 2 siente una fuerza $\vec{F}_{12}$ producida por el carro 1 a través del resorte. Estas fuerzas existen mientras el resorte permanezca en contacto con los carros y sus magnitudes cambian al cambiar la configuración (geometría) del resorte. En cualquier configuración del resorte ambas fuerzas tienen igual magnitud, la dirección en que actúan es la misma, pero tienen sentidos opuestos. Es decir,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (2)$$

Si a una de estas fuerzas le llamamos *acción*, a la otra se le llama *reacción*, lo que en conjunto se le llama un par de acción y reacción.

La *tercera ley de Newton*, representada por la ecuación (2), puede enunciarse como sigue. Si un observador en un sistema de referencia inercial observa que un cuerpo 1 ejerce una fuerza $\vec{F}_{12}$ sobre un cuerpo 2, entonces el cuerpo 2 reacciona y ejerce sobre 1 una fuerza $\vec{F}_{21}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{F}_{12}$, la misma dirección que $\vec{F}_{12}$ y sentido opuesto a $\vec{F}_{12}$.

Es importante enfatizar que

(a) la acción y la reacción ocurren solamente para fuerzas registradas por observadores inerciales, y que

(b) la acción y la reacción actúan sobre cuerpos distintos.

Ahora aplicaremos las leyes de Newton para resolver algunos problemas. En general, la estrategia seguida en la resolución de los problemas es: 1. Analizar aisladamente el cuerpo o los cuerpos de interés. 2. Escoger un sistema de referencia. 3. Hacer un diagrama de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. 4. Aplicar la segunda ley de Newton a cada cuerpo.

5.7 Algunos ejemplos de fuerzas

Peso. La ley de la gravitación universal establece que todos los cuerpos del universo se atraen entre sí con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. La dirección de esta fuerza es a lo largo de la línea que los une. Así, la magnitud de la fuerza gravitatoria que ejercen entre sí dos cuerpos de masas m_1 y m_2 y separados una distancia r es $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$; donde G es una constante universal cuyo valor es G=6.67x10^{-11} Nm^2/kg^2. Apliquemos esta relación para calcular la magnitud de la fuerza con que la Tierra atrae a un objeto de masa m colocado en su superficie. La masa de la tierra es M=5.98x10^{24} kg y el radio medio es R=6.37x10^6 m. Escribiendo la relación anterior como $F = m\left(\frac{GM}{R^2}\right) = mg$ y usando los valores numéricos anteriores, se obtiene que g=9.8 m/s^2. La fuerza $\vec{F} = m\vec{g}$ es la fuerza con que la Tierra atrae a un objeto de masa m colocado en su superficie, a esta fuerza se le llama *peso*; $\vec{g}$ es la aceleración de la gravedad de la Tierra en su superficie, dirigida hacia su centro.

La masa es una característica intrínseca de cada cuerpo, mientras que el peso está asociado con la acción de la gravedad que se le imprime en el lugar en que se encuentra el cuerpo. El peso es una fuerza.

Tensión en cuerda ideal. Suponga que un bloque de masa M se encuentra sobre una superficie horizontal carente de fricción. Por medio de una cuerda de masa m, también horizontal, se le jala en un extremo con una fuerza $\vec{F}_1$. ¿Qué aceleración experimenta el bloque?
La figura siguiente muestra los datos del problema.

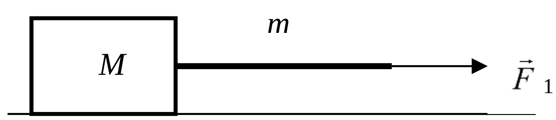


Figura 5.6. El bloque es jalado por una fuerza horizontal a través de una cuerda ideal.

Los ejes coordenados y los diagramas de cuerpo libre (con el bloque y la cuerda colocados en el origen, en cada caso) se ilustran en la figura 5.7.

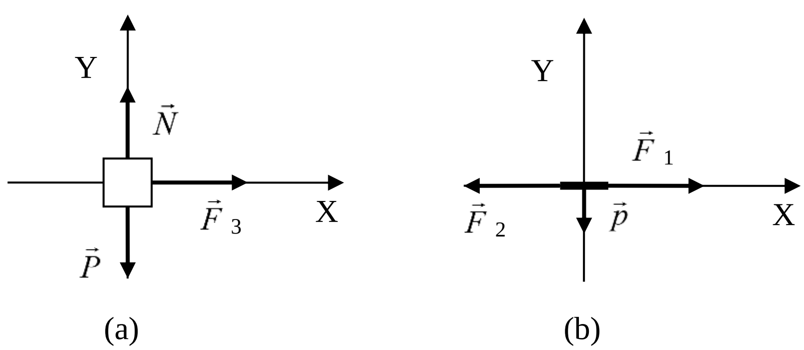


Figura 5.7. Fuerzas que actúan sobre (a) el bloque y (b) sobre la cuerda.

Con letras mayúsculas nos referiremos a cantidades relacionadas al bloque y con minúsculas a la cuerda. El bloque siente tres fuerzas: la fuerza horizontal $\vec{F}_3$ debida a la cuerda, la fuerza vertical $\vec{N}$ que ejerce la superficie horizontal, y su peso $\vec{P}$; la fuerza $\vec{N}$ se llama fuerza normal porque es perpendicular a las superficies en contacto, es la fuerza con que la superficie horizontal soporta al cuerpo. La cuerda también siente tres fuerzas: la fuerza $\vec{F}_1$ que le aplica el agente externo, la fuerza $\vec{F}_2$ que ejerce el bloque, y su peso $\vec{p}$.

Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo se obtiene

para el bloque: $\vec{F}_3+\vec{N}+\vec{P}=M\vec{A}$, (3)

para la cuerda: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{p}=m\vec{a}$. (4)

Usando la tercera ley de Newton, en el punto de contacto entre el bloque y la cuerda, las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ satisfacen la relación

$$\vec{F}_2=-\vec{F}_3; \qquad (5)$$

de donde se obtiene que las magnitudes son iguales, $F_2=F_3$. A partir de las ecuaciones (3) a (5) se obtiene que las <u>componentes horizontales</u> son

para el bloque: $F_3=MA$, (6)

para la cuerda: $F_1-F_2=ma$. (7)

Además, ya sabemos que: $F_2=F_3$. (5´)

Si la cuerda es *inextensible*, todos sus puntos tienen la misma aceleración, incluyendo el punto de contacto con el bloque; es decir, la cuerda y el bloque se mueven como un solo cuerpo, entonces debe suceder que

$$A=a. \qquad (8)$$

La aceleración en términos de la fuerza aplicada se obtiene usando sucesivamente en la ecuación (7) la información contenida en las ecuaciones (5´) y (6): el miembro izquierdo de (7) es

$$F_1-F_2=F_1-F_3=F_1-MA.$$

Usando (8), el miembro derecho de (7) es $ma=mA$; por tanto se obtiene que

$$F_1-MA=mA;$$

de donde la aceleración es

$$A=\frac{F_1}{M+m}. \qquad (9)$$

Queremos conocer la fuerza F_3 que acelera al bloque en términos del dato F_1. Al sustituir esta aceleración (9) en (6) se obtiene

$$F_3 = MA = \frac{M}{M+m} F_1 . \qquad (10)$$

Nótese que $F_3 < F_1$. La cuerda al ser acelerada no trasmite completamente la fuerza F_1 al bloque. Para que la cuerda acelerándose trasmita al bloque completamente la fuerza que se le aplica, su masa debe ser *despreciable* comparada con M; es decir, debe cumplirse que $m \ll M$. En este caso podemos escribir $\frac{M}{M+m} \approx \frac{M}{M} = 1$ y, por tanto, $F_3 \approx F_1$.

La fuerza trasmitida por una cuerda (o un alambre) se llama *tensión*. Con la ayuda de este ejemplo podemos definir una *cuerda ideal* como una cuerda *inextensible* y de *masa despreciable*. Inextensible quiere decir que todos sus puntos tienen la misma aceleración y que sea de masa despreciable significa que trasmite toda la fuerza pues $m \ll M$.

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

5.8 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1. *Efecto del peso de la cuerda*. Cuando una cuerda es sostenida por sus extremos (al mismo nivel vertical), forma una curva simétrica respecto a la línea vertical que pasa por su centro (la curva es llamada catenaria); las fuerzas aplicadas en sus extremos ($\vec{F}\,'_1$ y $\vec{F}\,'_2$) son tangentes a la cuerda, como lo ilustra la figura 5.8. Analizar el efecto del peso de la cuerda.

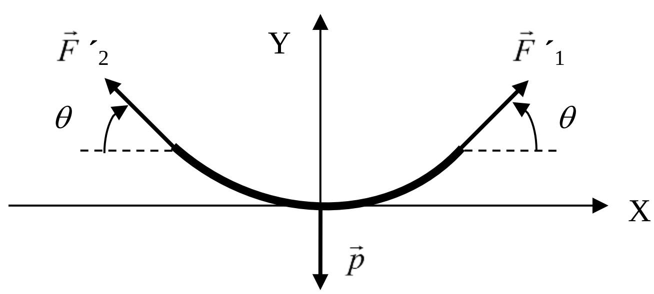


Figura 5.8. Una cuerda sostenida por sus extremos a la misma altura forma una curva simétrica respecto al eje Y.

Solución. El peso de la cuerda tiene que ser cancelado con una fuerza vertical de igual magnitud y de sentido hacia arriba para que la cuerda no se acelere verticalmente. Esta fuerza la proporcionan las componentes verticales de $\vec{F}\,'_1$ y de $\vec{F}\,'_2$. Debido a la simetría de la curva y a que estas dos fuerzas se aplican al mismo nivel vertical, sus magnitudes son iguales y forman el mismo ángulo θ con la línea horizontal. La suma de las componentes verticales de las fuerzas es $F'_1 \text{sen}\theta + F'_2 \text{sen}\theta - p = 0$; por tanto, resulta que $2F'_1 \text{sen}\theta = p = mg$, de donde se obtiene que

$$sen\theta = \frac{mg}{2F'_1}. \qquad (11)$$

Esta ecuación (11) está mostrando que para que el ángulo sea cero, la masa *m* debe ser nula (o la magnitud de la fuerza $\vec{F}'_1$ debe ser infinita, pero ésta no existe; en cambio, sí podemos conseguir una cuerda de masa despreciable). Es decir, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de la figura 5.7(b), rigurosamente, no pueden ser horizontales.

Ejemplo 2. *Plano inclinado***.** Un bloque de masa *m* se coloca sobre un plano inclinado carente de fricción y se suelta; el plano inclinado permanece fijo y forma un ángulo θ con la horizontal. ¿Qué movimiento realiza el bloque?

Solución. En la figura 5.9 se muestran los datos del problema, las coordenadas que se usarán y el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el bloque (considerado como una partícula).

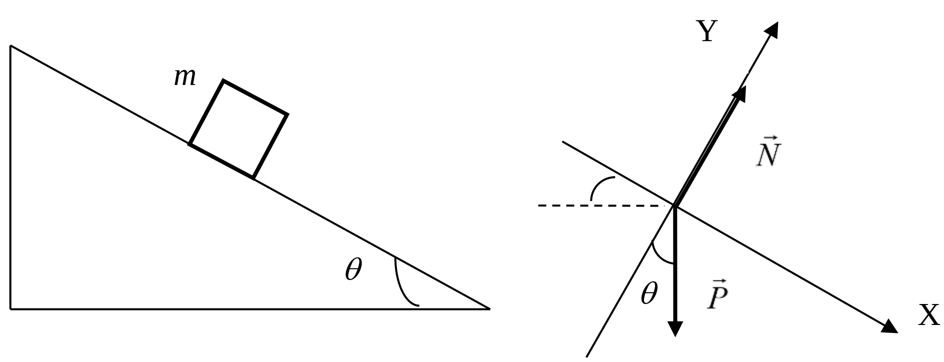


Figura 5.9. La dirección del eje X es paralela al plano inclinado y la dirección del eje Y es perpendicular al plano.

Se escoge un sistema de coordenadas con el eje X apuntando en la dirección en que se supone que el cuerpo se moverá, es decir, a lo largo del plano y hacia abajo, y el eje Y perpendicular al plano y hacia arriba. En ausencia de fricción, sobre el bloque actúan dos fuerzas: la fuerza **normal** $\vec{N}$ que ejerce el plano inclinado y el peso $\vec{P}$. La fuerza $\vec{N}$**,** por ser perpendicular al plano, apunta en la dirección del eje Y. Con este sistema de coordenadas el peso tiene dos componentes; la componente del peso a lo largo del eje Y debe ser igual a la magnitud N pues en la dirección del eje Y no hay movimiento. La componente del peso a lo largo del eje X hará que el cuerpo se mueva hacia abajo. La segunda ley de Newton aplicada al bloque exige que

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}. \qquad (12)$$

Las componentes de las fuerzas de esta ecuación a lo largo de los ejes X y Y en términos de la magnitud del peso y del ángulo son:

En X: $P_x = P\text{sen}\theta = ma$, (13)

En Y: $N - P_y = 0$. (14)

Debido a que la magnitud del peso es mg, entonces de la ecuación (13) se obtiene que la aceleración del bloque es

$$a = g\text{sen}\theta. \qquad (15)$$

En relación a esta ecuación (15) es conveniente hacer los comentarios siguientes.

1. La cantidad $g\text{sen}\theta$ es positiva, lo cual indica que la suposición de que el bloque se mueve a lo largo del eje X es correcta. Si se hubiera escogido el eje X en el sentido opuesto, la aceleración hubiera resultado negativa.
2. Como $g\text{sen}\theta$ es una cantidad constante, se tiene un movimiento uniformemente acelerado.
3. Como el valor de la función seno no puede ser mayor que 1, es decir $\text{sen}\theta \leq 1$, entonces se tiene que $a \leq g$. Esto significa que escogiendo adecuadamente el ángulo, en el laboratorio se puede obtener una aceleración tan pequeña como se desee.

Finalmente, la ecuación (14) expresa lo que se había comentado anteriormente que la componente "y" del peso debe ser igual a la magnitud de N, pues no hay movimiento en la dirección del eje Y. Se obtiene que

$$N = mg\cos\theta.$$

Ejemplo 3. *Plano inclinado dentro de un elevador*. Ahora suponga que el plano inclinado del ejemplo anterior se encuentra en el interior de un elevador acelerado. Calcular la fuerza normal y la aceleración del bloque.

Solución. Si el elevador asciende o desciende con velocidad constante, entonces la aceleración con que se desliza el bloque sobre el plano inclinado tiene el valor $g\text{sen}\theta$. Este valor es el mismo sin importar si el movimiento lo observamos en un sistema de referencia fijo en el edificio o en uno fijo en el elevador, pues en este caso ambos sistemas son inerciales. Pero si el elevador está acelerado, entonces el observador en cada sistema de referencia tiene diferente forma de razonar, aunque ambos obtendrán el mismo resultado para la aceleración del bloque.

Se calculará la aceleración a del bloque cuando el elevador asciende o desciende con aceleración constante A, se hará respecto a un sistema inercial fijo al edificio. También se calculará la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre el bloque; es decir, la fuerza normal.

Se escoge el sistema S fijo en el edificio (sistema inercial) y los ejes coordenados del sistema de referencia en las direcciones vertical y horizontal, como ilustra la figura 5.10.

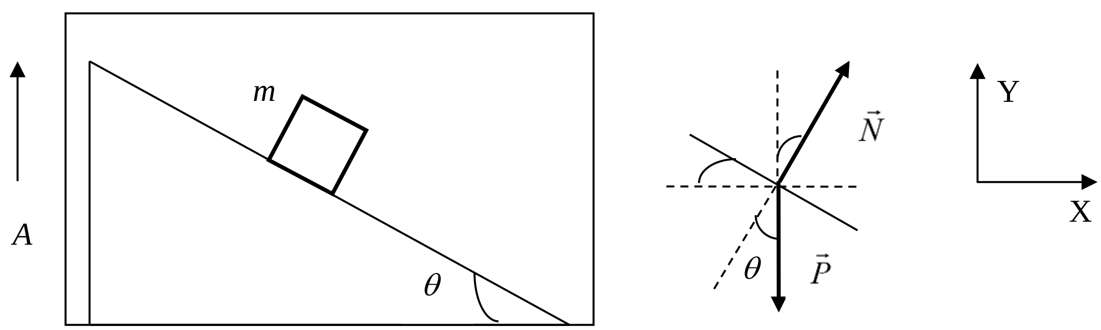


Figura 5.10. El bloque se mueve siempre estando en contacto con el plano inclinado, mientras que el elevador se mueve en la dirección vertical.

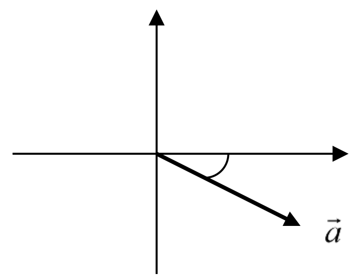
Aplicando la segunda ley de Newton en el sistema inercial XY, se obtiene

$$\text{X:} \quad N\text{sen}\theta = ma_x, \qquad (17)$$

$$\text{Y:} \quad N\cos\theta - mg = m(a_y + A). \qquad (18)$$

Con ayuda del siguiente diagrama adjunto, el vector $\vec{a} = a\cos\theta\ \hat{i} - a\text{sen}\theta\ \hat{j}$ está dirigido a lo largo del plano inclinado y hacia abajo. Por tanto, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{A}$ son

$$\vec{a} = (a\cos\theta, -a\text{sen}\theta), \quad \vec{A} = A\,\hat{j}. \qquad (19)$$



Es conveniente observar que, de acuerdo con el sistema de referencia elegido, $\vec{A}$ es positiva si el elevador está siendo acelerado y su movimiento es de ascenso o si el elevador está siendo desacelerado (frenado) en su movimiento de descenso; en cambio, $\vec{A}$ es negativa si el elevador sube y está siendo frenado o si el elevador baja y está siendo acelerado.

Usando (19) en (17) y (18) se obtiene

$$N\mathrm{sen}\theta = ma\cos\theta, \qquad (17')$$

$$N\cos\theta - mg = m(-a\mathrm{sen}\theta + A). \qquad (18')$$

Con lo anterior hemos conseguido dos ecuaciones con dos incógnitas (*a* y *N*). Primero se calculará *a*. Despejando N en (17') y sustituyéndola en (18') se tiene

$$\left(ma\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right)\cos\theta - mg = -masen\theta + mA$$

al multiplicar ambos miembros por senθ y despejar *a* se obtiene

$$a = (g+A)\mathrm{sen}\theta. \qquad (20)$$

Esta es la magnitud de la aceleración del bloque vista desde el edificio. Si *A*=0, es decir, si el elevador se mueve con velocidad constante, el resultado (20) se reduce al resultado (15).

La fuerza que ejerce el plano sobre el bloque es la fuerza normal *N*, la cual se obtiene al sustituir el resultado (20) en la expresión (17'):

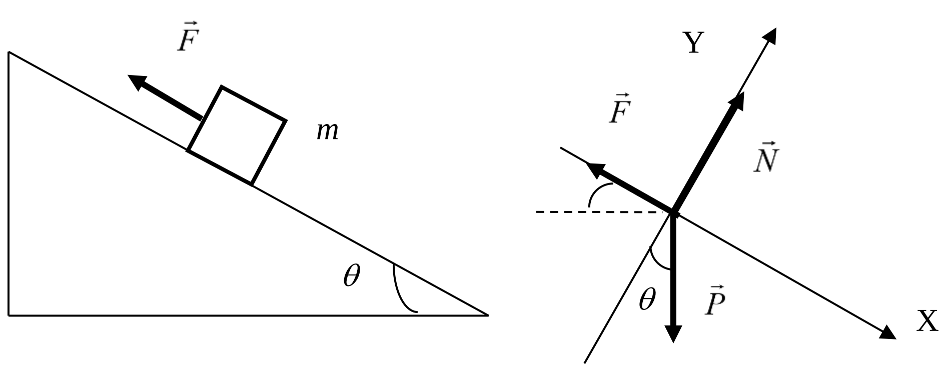
$$N = m(g+A)\cos\theta. \qquad (21)$$

Aquí está de manifiesto el efecto de la aceleración del elevador; dependiendo del signo de *A*, la fuerza normal es mayor o menor que cuando el elevador se mueve con velocidad constante.

Caso particular. θ=0. Haciendo cero el ángulo en la ecuación (21), el plano inclinado se convierte en el suelo del elevador. Si *A* es positiva, la fuerza normal es mayor que el peso, pero si *A* es negativa la normal es menor. Esta fuerza normal es igual al peso cuando el elevador se mueve con velocidad constante. Si en vez del bloque se piensa en una persona parada en el suelo del elevador, entonces cuando *A* es positiva (ya sea que el elevador esté acelerando en su ascenso o que esté frenando en su descenso), la fuerza normal es mayor que el peso y la persona se siente aplastada contra el suelo. Siente lo opuesto cuando *A* es negativa, es decir, sentimos que nuestro peso es menor cuando el elevador frena en su ascenso o cuando acelera en su descenso. Podemos medir esta fuerza normal si en lugar de pararnos en el suelo nos colocamos encima de una báscula dentro del elevador; en este caso estaríamos usando la báscula como un medidor de fuerza normal y a partir de su valor podríamos calcular la aceleración *A* (ecuación (21) con $\cos\theta$=1). La aceleración de elevadores de edificios altos típicamente está en el intervalo de 0.1 a 0.3*g*, dura de 1 a 4 segundos dependiendo de la altura del edificio y de la rapidez de crucero, la cual varía entre 2 y 3 m/s (referencia 1).

Ejemplo 4. *Bajando una caja sobre un plano inclinado*. Se desea bajar una caja grande de masa *m* desde un transporte de carga usando un plano inclinado. Un obrero aplica a la caja una fuerza $\vec{F}$, a través de una cuerda, paralela al plano y hacia arriba para contrarrestar el peso y permitir que la caja baje con velocidad constante. El plano inclinado forma un ángulo θ con el suelo y no presenta fricción con la caja. Considerar θ=30º y *m*=100 kg. Trazar el diagrama de cuerpo libre y calcular la fuerza *F*.

Solución. En ausencia de fricción, sobre la caja actúan tres fuerzas: la fuerza $\vec{F}$ del obrero, la fuerza normal $\vec{N}$ que ejerce el plano inclinado y el peso $\vec{P}$, como ilustra la figura siguiente.



Al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

X: $P sen\theta - F = 0$, pues la caja baja con velocidad constante, Y: $N - P\cos\theta = 0$, pues la caja sólo se puede mover a lo largo del plano inclinado.

Debido a que el peso P=mg, entonces de la primera ecuación se obtiene que

$F = mgsen\theta$.

Numéricamente, F=100 kg×9.8 m/s^2×sen30º=490 N.

Recapitulación

La dinámica estudia la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas de ese movimiento. El movimiento de un cuerpo lo determinan la *naturaleza* y la *disposición* de los otros cuerpos, es decir, su entorno o medio ambiente. El problema central de la mecánica clásica puede enunciarse así: ¿cuál es el movimiento de un cuerpo conocido que está colocado en un medio ambiente conocido?

El movimiento de un cuerpo es el resultado de sus interacciones con los cuerpos que lo rodean. Las interacciones se describen convenientemente a través del concepto llamado *fuerza*: relación entre el medio ambiente y el movimiento del cuerpo. La fuerza aparece en las *leyes del movimiento*, las cuales determinan la aceleración. El éxito de la mecánica clásica radica en su poder de predicción de resultados que coinciden con el experimento y la observación.

Un *sistema* de referencia *inercial* es uno que no está acelerado. La noción de marco inercial es importante porque todas las leyes de la dinámica deben ser las mismas en todos los marcos inerciales. Una vez que se haya encontrado un marco inercial, se pueden encontrar muchos más porque un marco de referencia que se mueva a velocidad constante respecto a un marco inercial es también inercial.

La primera ley de Newton se enuncia como: “Todo cuerpo persiste en su estado de reposo, o de <u>movimiento uniforme</u> en <u>línea recta</u>, a menos que se vea obligado a cambiar dicho estado por la acción del medio ambiente que actúa sobre él”. Es decir, si algo se mueve, sin que nada lo perturbe, se moverá eternamente con velocidad uniforme en línea recta. También se le llama ley de la inercia; la propiedad que tienen los cuerpos de resistirse a cambiar su estado de reposo o de movimiento uniforme se llama *inercia*. La inercia se mide por medio de la masa.

Si $\vec{F}$ es la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo de masa m y si $\vec{a}$ es la aceleración que resulta de la aplicación de esa fuerza, entonces, para un observador en un sistema de referencia inercial, se tiene que

$$\vec{F} = m\vec{a};$$

$\vec{F}$ es la causa del movimiento, m es una propiedad del cuerpo y $\vec{a}$ es el efecto cinemático producido. Esta ecuación (llamada segunda ley de Newton) es una relación causa-efecto, suministra la *ecuación de movimiento*. Conociendo la fuerza y la masa puede conocerse la aceleración y, por tanto (al integrar para obtener $\vec{r}\,(t)$), la trayectoria. Inversamente, si se conoce la trayectoria puede conocerse la aceleración y, por tanto, la fuerza. Al aplicar la segunda ley para la resolución de un problema, es de gran ayuda trazar un diagrama que muestre el cuerpo en cuestión y todos los vectores fuerza que actúan sobre él, es el llamado *diagrama de cuerpo libre*.

Veamos qué es la tercera ley de Newton. Ambos carros de la figura 5.5 están unidos por un hilo y entre ellos está colocado un resorte comprimido, pero no atado a los carros. Al cortar el hilo ambos carros se mueven separándose. El carro 1 se mueve debido a que el carro 2 ejerce una fuerza $\vec{F}_{21}$ sobre él a través del resorte, mientras que el carro 2 siente una fuerza $\vec{F}_{12}$ producida por el carro 1 a través del resorte. Estas fuerzas existen mientras el resorte permanezca en contacto con los carros y sus magnitudes cambian con la configuración del resorte. Las fuerzas tienen igual magnitud, igual dirección, pero sentidos opuestos. Es decir,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Si a una de estas fuerzas se le llama *acción*, a la otra se le llama *reacción*.

En general, la estrategia en la resolución de los problemas es: 1. Analizar aisladamente los cuerpos de interés. 2. Escoger un sistema de referencia. 3. Hacer un diagrama de las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. 4. Aplicar las leyes de Newton a cada cuerpo.

Bibliografía

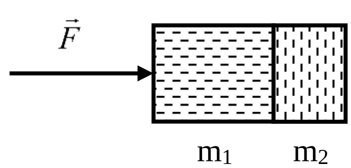
1. Soules, J. A. Full-Scale Demonstration of Acceleration. *American Journal of Physics*, 40 (8), 1173 (1972).

Problemas

1. Si un objeto se coloca sobre un plano inclinado, cuanto mayor sea el ángulo de inclinación respecto a la horizontal, ¿la magnitud de la fuerza normal será mayor, menor, o no depende de la inclinación?

2. Dos bloques están en contacto entre sí y sobre una mesa sin fricción. Las masas de los bloques son m_1 y m_2, con $m_1>m_2$. Una fuerza horizontal $\vec{F}$ se aplica sobre el bloque de masa m_1. a) Calcular la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques. b) Ahora suponga que los cuerpos intercambian su posición de manera que la fuerza $\vec{F}$ se aplica sobre el cuerpo de masa m_2, calcular la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques. c) ¿En cuál caso es mayor la magnitud de la fuerza de contacto entre los bloques?

Figura 5.11. Problema 2.



3. Sobre una superficie sin fricción, plana y horizontal, se deslizan dos objetos unidos por una cuerda ideal como indica la figura. Al objeto m_1 se le jala con una fuerza F = 30 N dirigida θ = 20º sobre la horizontal. Si m_1 = 2 kg y m_2 = 3 kg, a) hallar la aceleración del sistema y b) la tensión T de la cuerda entre los dos objetos.

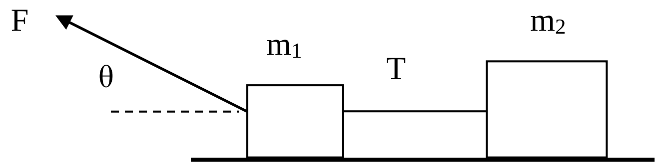


Figura 5.12. Problema 3.

4. Tres bloques están unidos entre sí por cuerdas, están colocados sobre una mesa horizontal carente de fricción y son jalados hacia la derecha con una fuerza T_3=6.5 N. Los valores de las masas son m_1=1.0 kg, m_2=2.0 kg, y m_3=3.0 kg. a) Calcular la aceleración del sistema. b) Calcular las tensiones T_1 y T_2.

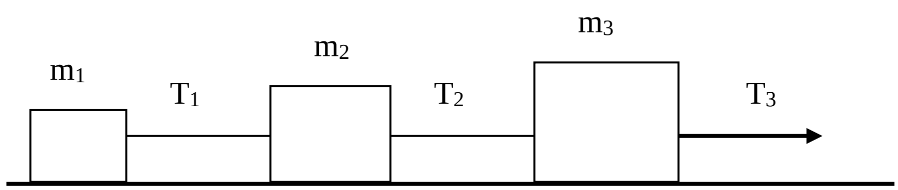


Figura 5.13. Problema 4.

5. Un globo de investigación con una masa total *M* está descendiendo verticalmente con una aceleración de magnitud *a* hacia abajo. ¿Cuánta masa (lastre) debe ser arrojada de la canastilla para dar al globo una aceleración de magnitud *a* hacia arriba, suponiendo que la fuerza ascensional del gas sobre el globo no cambia?

6. Un bloque de masa m_1=1.00 kg está sobre un plano inclinado sin fricción, de ángulo θ=30º, y unido por una cuerda ideal que pasa por una polea pequeña (sin fricción y sin masa) a un segundo bloque de masa m_2=1.00 kg que cuelga verticalmente. a) Calcular la magnitud y la dirección de la aceleración de cada bloque. b) Calcular la tensión en la cuerda.

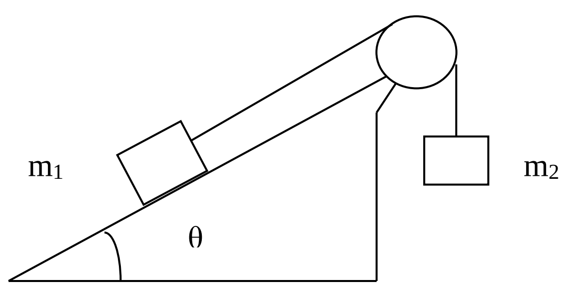


Figura 5.14. Problema 6.

7. Un bloque de masa m_1 está sobre un plano inclinado sin fricción, de ángulo θ=30º, y unido por una cuerda ideal que pasa por una polea pequeña (sin fricción y sin masa) a un segundo bloque de masa m_2 que cuelga verticalmente, con $m_2 \leq m_1$. a) Calcular la magnitud y la dirección de la aceleración de cada bloque. b) Calcular la tensión en la cuerda. Analizar el caso particular en que m_2=m_1.

8. Se quiere subir una caja de masa m a un transporte de carga usando un plano inclinado. Un obrero aplica a la caja una fuerza $\vec{F}$, a través de una cuerda, paralela al plano de manera que la

caja se mueve con velocidad constante. El plano inclinado forma un ángulo θ con la horizontal y no presenta fricción con la caja. Considerar θ=30º y m=100 kg. a) Trazar el diagrama de cuerpo libre y b) calcular la fuerza F.

9. Dos bloques, uno de masa m_1 y otro de masa m_2, están unidos por medio de una cuerda ideal paralela a un plano inclinado por el que ambos resbalan juntos hacia abajo. El ángulo del plano inclinado es θ respecto a la horizontal. No existe fricción entre los bloques y el plano inclinado. Suponiendo que el bloque de masa m_2 es el que va adelante (ver figura 5.15), determinar a) la aceleración de los bloques y b) la tensión en la cuerda. Usar m_1=4 kg, m_2=8 kg, θ=30º.

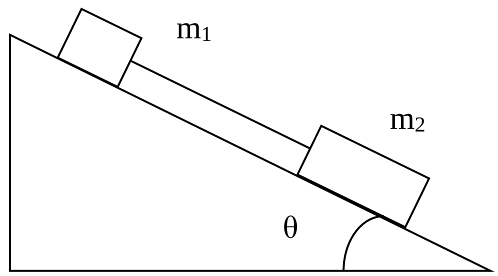


Figura 5.15. Problema 9.

10. Una persona de 50 kg de masa se encuentra sobre una báscula dentro de un elevador que desciende disminuyendo su rapidez, a razón de 0.5 m/s^2. Bajo esas condiciones, ¿cuál es la lectura de la báscula, en kilogramos?

6 LAS FUERZAS EN LA NATURALEZA

Las fuerzas se clasifican como fundamentales o fenomenológicas. Pueden ser constantes, dependientes de la posición o de la velocidad del cuerpo (por separado), o del tiempo, o de estas tres cantidades. Se analizan las fuerzas de contacto entre dos cuerpos sólidos, la fuerza producida por la deformación de un cuerpo, y las que aparecen en un sistema de referencia acelerado.

Introducción

Se ha dicho que la fuerza es una función de las propiedades del cuerpo y del medio ambiente en que el cuerpo se encuentra. Suponiendo que se conoce la masa del cuerpo, con la segunda ley de Newton

1. se puede encontrar la aceleración si se conoce la fuerza,

2. se puede encontrar la fuerza si se conoce la aceleración.

A partir del uso de la segunda ley de Newton se ha aprendido mucho, según se ha mencionado en el punto 2, pero se necesita saber algo más de las fuerzas. Usando las leyes de Newton hemos podido analizar y calcular los *efectos* de las fuerzas; pero eso no es suficiente, también nos interesa entender las *causas* de las fuerzas.

6.1 Fuerzas fundamentales y fenomenológicas

Todas las fuerzas pueden ser clasificadas en dos grupos: fundamentales o fenomenológicas. Existen cuatro fuerzas fundamentales: gravitacional, electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte. Son fenomenológicas todas las demás.

Fundamentales

(1) La *fuerza de gravitación.* La masa es la responsable de esta fuerza, es decir, la masa, la propiedad que poseen los cuerpos, da origen a esta fuerza. Esta fuerza siempre es atractiva, es decir, hace que los cuerpos se atraigan. Supongamos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r (figura 6.1).

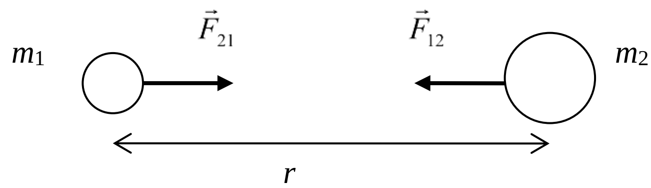


Figura 6.1. Las masas m_1 y m_2 se atraen por la fuerza de gravitación.

La fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2 se expresa como

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r \,. \qquad (1)$$

Donde G es la constante universal de gravitación, $\hat{u}_r$ es un vector unitario que está en la línea de m_1 a m_2 y el signo menos indica que la fuerza está dirigida en sentido opuesto al vector $\hat{u}_r$, lo cual dice que la fuerza es atractiva. La fuerza que el cuerpo 2 ejerce sobre el cuerpo 1 es

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \,.$$

(2) La *fuerza electromagnética* incluye las interacciones eléctricas y magnéticas; la más elemental de las interacciones eléctricas es la producida por dos cargas eléctricas (fuerza electrostática). Suponga dos cuerpos que portan cargas eléctricas q_1 y q_2 separados por una distancia r (figura 6.2). La fuerza que la carga q_1 ejerce sobre la carga q_2 se expresa como

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{u}_r \,, \qquad (2)$$

donde ε_0 es una constante. Observe la similitud de esta fuerza con la gravitacional, pero ahora la fuerza puede ser atractiva o repulsiva; cargas de igual signo se repelen mientras que cargas de signos opuestos se atraen. La fuerza que la carga q_2 ejerce sobre la carga q_1 es

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \,.$$

La carga eléctrica, la propiedad de estos cuerpos, es la responsable de la fuerza electrostática.

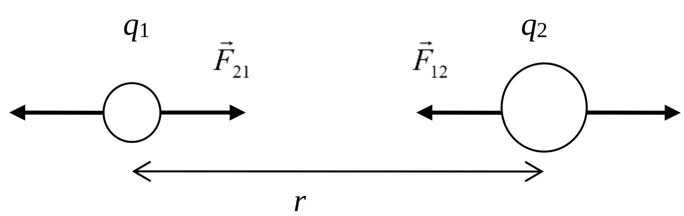


Figura 6.2. La fuerza entre dos cargas eléctricas puede ser atractiva o repulsiva.

(3) La *fuerza nuclear débil* genera determinados procesos de desintegración radiactiva y ciertas reacciones entre partículas más fundamentales.

(4) La *fuerza nuclear fuerte* opera entre las partículas fundamentales y es responsable de la estabilidad del núcleo atómico.

Fenomenológicas.

Las fuerzas fenomenológicas pueden ser explicadas en términos de las fuerzas fundamentales, y son muy útiles en muchas aplicaciones. Ejemplos: fuerza de contacto entre dos cuerpos sólidos (fricción y normal), fuerza elástica, fuerza de arrastre.

Fuerzas constantes o variables. Las fuerzas también pueden clasificarse como constantes o variables; estas últimas pueden depender del tiempo, o de la posición del cuerpo o de su velocidad por separado, o del tiempo, posición y velocidad simultáneamente.

A continuación se analizarán algunas de estas fuerzas fenomenológicas.

6.2 Fuerzas de contacto (fricción y normal)

La fuerza de contacto entre dos sólidos tiene dos componentes: la fuerza normal que es perpendicular a las superficies en contacto y la fuerza de fricción que es tangencial a las superficies en contacto. La fricción es una interacción debida a que los dos sólidos están en contacto. Queremos saber cómo expresar la fuerza de fricción en términos de las propiedades del cuerpo y de su medio ambiente; es decir, se quiere conocer la ley de la fuerza. Para ello, consideremos el movimiento de *deslizamiento* (no el de rodamiento) de una superficie seca sobre otra (sin lubricar).

A un bloque, que se encuentra inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal, se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ cuya magnitud se aumenta en forma controlada hasta que el bloque se mueva con velocidad constante; se mide la fuerza con un dinamómetro. Cuando se aplica una fuerza de magnitud pequeña el bloque no se mueve porque la fuerza aplicada está equilibrada por una fuerza de fricción en sentido opuesto, ejercida por la superficie horizontal. Al seguir aumentando la magnitud de la fuerza aplicada, se encuentra un valor de su magnitud con la cual el bloque empieza a moverse en forma acelerada. Luego se reduce la magnitud de la fuerza aplicada hasta que el bloque se mueva con velocidad constante.

En este proceso, recién descrito, hay dos etapas: cuando se aplica una fuerza pero el bloque permanece estático y, cuando se aplica otra fuerza y el bloque se mueve con velocidad constante. Estas dos etapas las hemos sentido cuando empujamos horizontalmente un cuerpo (como una caja pesada, un refrigerador) para que resbale sobre el suelo; primero tenemos que empujar con una fuerza grande para que el cuerpo empiece a ser desplazado; pero después que el cuerpo inicia el movimiento, aplicamos una fuerza menor para mantener el cuerpo en movimiento con velocidad constante.

En general, la fuerza de fricción que actúa entre dos superficies en contacto y en reposo se llama fuerza de *fricción estática*, mientras que la fuerza de fricción que actúa entre dos superficies en movimiento relativo de una respecto a la otra se llama fuerza de *fricción cinética*.

En la figura 6.3 se presentan los resultados típicos obtenidos en un experimento, en que un bloque es deslizado, para determinar las fuerzas de fricción. Se observa que la fuerza de fricción estática aumenta desde cero hasta un valor máximo alrededor de 1.6 N, el cual se obtiene poco después de 4 segundos en este experimento; después la fuerza de fricción disminuye hasta adquirir un valor constante, que corresponde a la fuerza de fricción cinética.

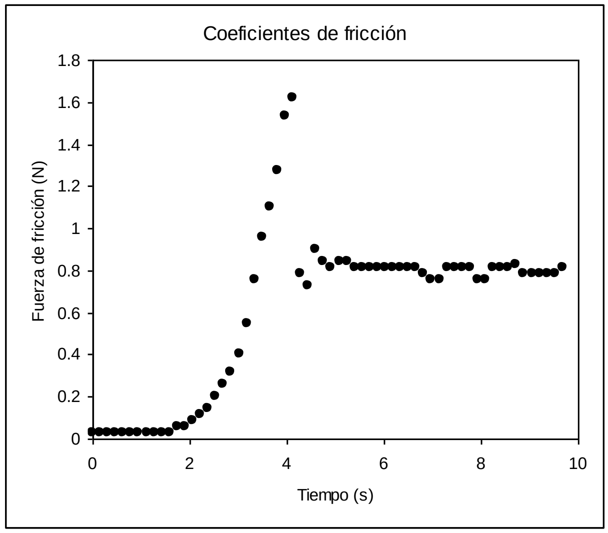


Figura 6.3. La fuerza de fricción. Gráfica construida con los valores experimentales reportados en la referencia 1.

La magnitud más grande de la fuerza de fricción estática (f_e) entre dos superficies sólidas responde a dos leyes empíricas:

(1) es aproximadamente independiente del área de contacto, y

(2) es proporcional a la fuerza normal.

La constante de proporcionalidad se llama *coeficiente de fricción estática*, se representa con la letra griega μ (mu) minúscula y con el subíndice e que se refiere a estática, μ_e. Es igual al cociente de la magnitud de la fuerza máxima de fricción estática (f_e) entre la magnitud de la fuerza normal (N). Teniendo en cuenta que f_e aumenta hasta su valor máximo según la figura 6.3, entonces puede escribirse

$$f_e \leq \mu_e N. \qquad (3)$$

La igualdad en esta ecuación (3) se cumple solamente cuando f_e adquiere su valor más grande. Cuando f_e no adquiere su valor más grande, la desigualdad en (3) se debe cumplir.

La magnitud de la fuerza de fricción cinética f_c entre dos superficies sólidas sigue las mismas dos leyes empíricas que las de fricción estática: (1) es aproximadamente independiente del área de contacto, y (2) es proporcional a la fuerza normal. Además, es casi independiente de la velocidad relativa de las dos superficies cuando esta velocidad no es muy grande. El cociente de la magnitud de la fuerza de fricción cinética (f_c) entre la magnitud de la fuerza normal (N) se llama *coeficiente de fricción cinética* (μ_c):

$$f_c=\mu_c N. \qquad (4)$$

Nótese que tanto μ_e como μ_c son constantes sin dimensión, pues ambas son el cociente de las magnitudes de dos fuerzas. En general, para un par de superficies se cumple que $\mu_c<\mu_e$ y sus valores numéricos dependen del material con que estén hechas las superficies en contacto y del acabado de ellas (es decir, de qué tan pulidas estén). Ambas fuerzas de fricción estática y cinética siempre se oponen al movimiento de deslizamiento del cuerpo; son antiparalelas al vector de la velocidad, es decir, su dirección es la de la velocidad del cuerpo, pero su sentido es opuesto.

A manera de resumen de lo dicho sobre las fuerzas de fricción, considérese el ejemplo siguiente. Suponga que un cuerpo A se encuentra sobre una superficie horizontal B; sobre el cuerpo A se aplica una fuerza $\vec{F}$ cuya magnitud puede ser controlada (figura 6.4).

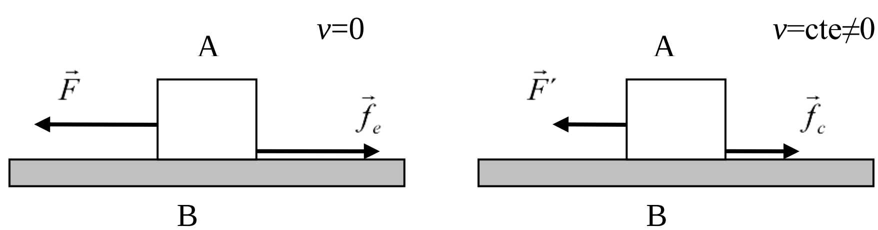


Figura 6.4. Cuando los cuerpos en contacto no están en movimiento, uno respecto al otro, la fuerza de fricción estática actúa, pero si hay movimiento relativo lo hace la fuerza de fricción cinética.

En el diagrama del lado izquierdo se muestra una fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre el cuerpo A, pero el cuerpo no se mueve, es decir, su velocidad es nula; la fuerza aplicada es compensada por la fuerza de fricción estática. La magnitud de la fuerza aplicada se sigue aumentando y en el momento justo en que el cuerpo empieza a moverse, las magnitudes de las fuerzas horizontales son iguales, $F=f_e$. En el diagrama del lado derecho, el cuerpo se mueve con velocidad constante, $v\neq 0$, por lo que necesariamente $F'= f_c$. Experimentalmente se encuentra que la magnitud de la fuerza aplicada F' es menor que la requerida para vencer la fuerza de fricción estática, $F'<F$; por tanto, $f_c<f_e$.

En general, la magnitud y el sentido de las fuerzas de contacto dependen de cómo se aplican las otras fuerzas. Ejemplo, suponga que un bloque se encuentra sobre una superficie horizontal, el bloque tiene varillas o agarraderas para aplicar una fuerza $\vec{F}$ (ya sea jalando o empujando) dirigida a lo largo de una de las varillas. Analizaremos el caso en que el bloque permanece estático, pero está en el umbral de iniciar su movimiento, es decir, cuando la fuerza de fricción estática adquiere su valor más grande. La figura 6.5 muestra el sistema.

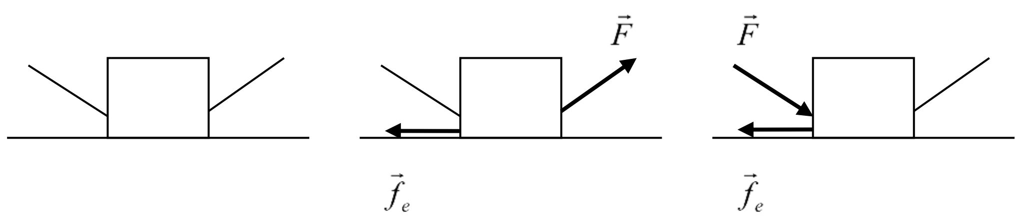


Figura 6.5. En el segundo diagrama la fuerza aplicada jala al cuerpo, en el tercero la fuerza lo empuja.

Cuando la fuerza $\vec{F}$ se aplica jalando al bloque, las componentes verticales de las fuerzas están en equilibrio: $N_1+F_y-P=0$, donde N_1 y P son las magnitudes de la fuerza normal y el peso; de aquí se obtiene que la fuerza normal es $N_1=P-F_y$. En cambio, cuando la fuerza $\vec{F}$ se aplica empujando al bloque a través de una de las varillas, las componentes verticales son $N_2-F_y-P=0$; de aquí se obtiene que la magnitud de la fuerza normal es $N_2=P+F_y$. En ambos casos la magnitud de la fuerza de fricción estática máxima es $f_e=\mu_e N$. La magnitud de la fuerza de fricción es diferente en cada caso pues la fuerza normal también es diferente en cada caso, ya que depende de cómo se aplique $\vec{F}$. La fuerza normal sería la misma en ambos casos, y por tanto también la fuerza de fricción sería la misma, sólo si la fuerza $\vec{F}$ fuera horizontal. Este resultado indica que es más fácil jalar que empujar: al aplicar la fuerza con una componente hacia abajo, el bloque hace presión sobre la superficie horizontal causando que la fuerza normal aumente; en cambio, cuando la fuerza tiene una componente hacia arriba, ésta ayuda a levantar el bloque provocando que la fuerza normal disminuya.

Visión microscópica de la fricción. El origen de la fuerza de fricción son las protuberancias o rugosidades de las superficies de ambos cuerpos sólidos en contacto, como se ilustra en la figura 6.6.

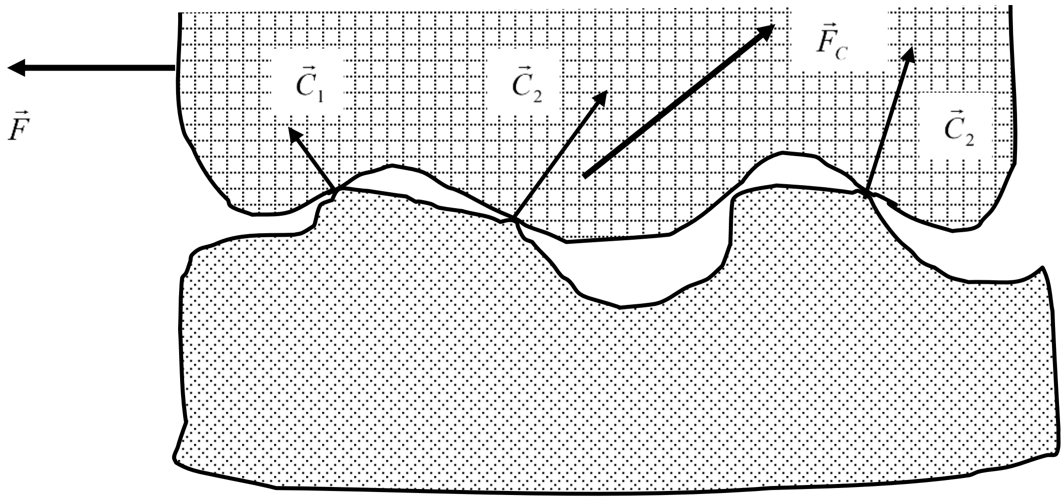


Figura 6.6. Vista microscópica de dos sólidos en contacto.

Suponga que el cuerpo inferior está fijo y que al cuerpo superior se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ hacia la izquierda. Los puntos de contacto entre los dos cuerpos son los puntos donde aparecen las fuerzas microscópicas de contacto marcadas como del tipo $\vec{C}_1$ y $\vec{C}_2$. Debido a las rugosidades de las superficies, al aplicar la fuerza $\vec{F}$ las fuerzas de tipo $\vec{C}_2$ crecen en magnitud mientras que las fuerzas de tipo $\vec{C}_1$ pierden magnitud. En el movimiento de un cuerpo respecto al otro, muchas rugosidades se rompen; por ejemplo, después de arrastrar un ladrillo sobre el suelo queda polvo de ladrillo en el suelo. La fuerza macroscópica de contacto resultante de todas estas fuerzas ($\vec{F}_C$) tiene una componente horizontal (paralela a las superficies en contacto) diferente de cero y dirigida en sentido opuesto al de $\vec{F}$, es la fuerza de fricción. La componente vertical de $\vec{F}_C$ es la fuerza normal.

En general, el valor del coeficiente de fricción depende de varios factores, tales como el *material* con que están hechos los cuerpos en contacto, el *pulido* de las superficies, las *películas* sobre las superficies (como el óxido en metales) y la *temperatura*.

Ejemplo 1. *Máxima fuerza horizontal aplicada sobre un bloque*. Un bloque de masa m_1 = 5.0 kg se encuentra sobre otro bloque cuya masa es m_2 = 10 kg el cual, a su vez, se encuentra sobre una mesa horizontal con coeficiente de fricción cinética μ_2=0.15 entre ella y el bloque m_2, ver figura 6.7a. El coeficiente de fricción estática entre los dos bloques es de μ_1 = 0.25. Encuentre: a) la máxima magnitud F de la fuerza horizontal que se puede aplicar al bloque inferior, m_2, para que los dos bloques se mantengan unidos durante su movimiento, y b) la aceleración del sistema cuando se aplica esa F máxima.

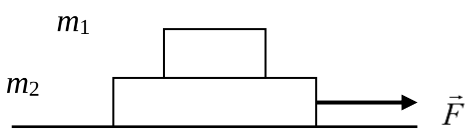


Figura 6.7a. Ejemplo 1.

Solución. Al aplicar la fuerza F sobre el bloque inferior, las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo están representadas en la figura siguiente

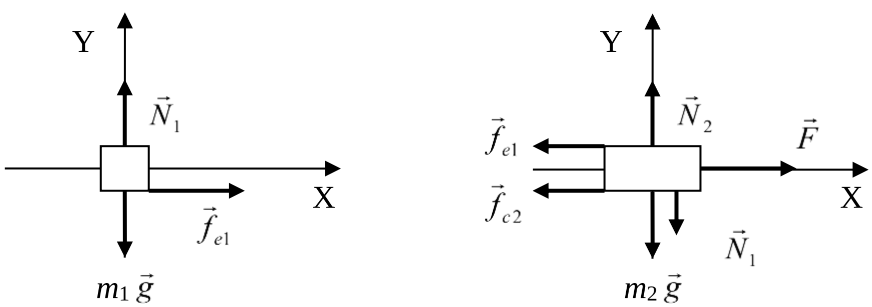


Figura 6.7b. Fuerzas que actúan sobre cada bloque.

Para cada cuerpo, las ecuaciones de movimiento en las direcciones X y Y, la condición de la máxima fuerza de fricción estática y/o la fuerza de fricción cinética, respectivamente, son

Para 1: $f_{e1} = m_1 a_1$, $\quad N_1 = m_1 g$, $\quad f_{e1} = \mu_1 N_1$

Para 2: $F - f_{e1} - f_{c2} = m_2 a_2$, $\quad N_2 = m_2 g + N_1$, $\quad f_{c2} = \mu_2 N_2$

Ya que los bloques deben permanecer juntos, sus aceleraciones son iguales, $a_1 = a_2 = a$. Usando las ecuaciones para el cuerpo 1 se obtiene $f_{e1} = \mu_1 m_1 g$, por tanto

$$a = \mu_1 g \ .$$

Usando este resultado en las ecuaciones para el cuerpo 2 se obtiene

$F = m_2 a + f_{e1} + f_{c2} = m_2 a + m_1 a + \mu_2 (m_2 g + m_1 g).$

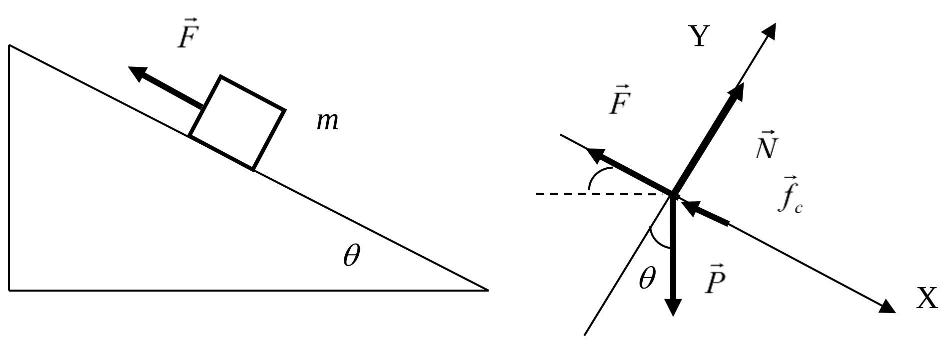
Por tanto

$$F = (m_1 + m_2)\mu_1 g + (m_1 + m_2)\mu_2 g = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2) g.$$

Con los valores numéricos se obtiene que la aceleración es $a = 2.45$ m/s^2 y la máxima fuerza es F=58.8 N.

Ejemplo 2. *Bajando una caja sobre un plano inclinado*. Se desea bajar una caja grande de masa m desde un transporte de carga usando un plano inclinado. Un obrero aplica a la caja una fuerza $\vec{F}$, a través de una cuerda, paralela al plano y hacia arriba para contrarrestar el peso y permitir que la caja baje con velocidad constante. El plano inclinado forma un ángulo θ con el suelo y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y la caja es μ_c. Considerar θ=30º, m=100 kg y μ_c=0.1. Calcular las fuerzas: normal, de fricción y F (comparar el resultado para F con el obtenido en el ejemplo 4 del capítulo 5).

Solución. Sobre la caja actúan cuatro fuerzas: la fuerza $\vec{F}$ del obrero, la fuerza normal $\vec{N}$ que ejerce el plano inclinado, la fuerza de fricción cinética $\vec{f}_c$ entre el plano y la caja, y el peso $\vec{P}$, como ilustra la figura siguiente.



Al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

X: $P sen\theta - F - f_c = 0$, pues la caja baja con velocidad constante,

Y: $N - P\cos\theta = 0$, pues la caja sólo se puede mover a lo largo del plano inclinado.

Además, se sabe que $f_c = \mu_c N$.

Debido a que el peso P=mg, entonces de la segunda ecuación se obtiene que

$N = mg\cos\theta$.

Usando este resultado en la tercera ecuación se obtiene

$f_c = \mu_c mg\cos\theta$.

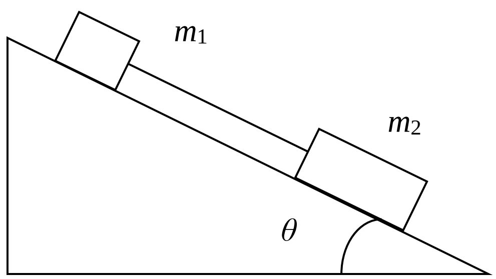
Finalmente, usando este resultado en la primera ecuación se obtiene

$F = mgsen\theta - \mu_c mg\cos\theta$.

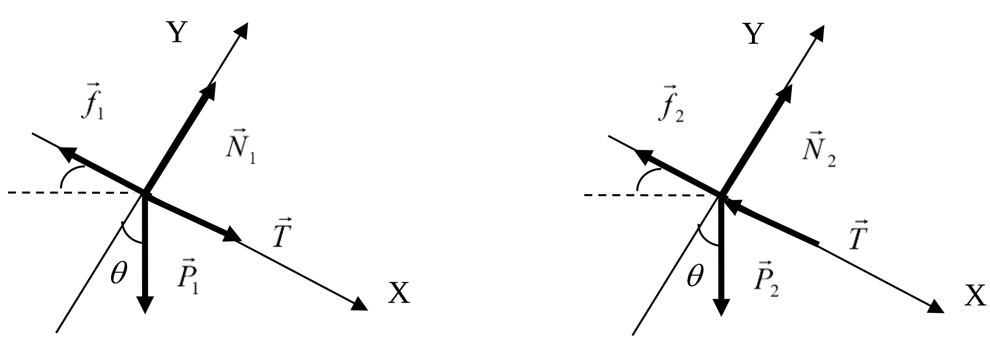
El obrero debe aplicar una fuerza de magnitud menor que en el caso sin fricción, pues la fuerza de fricción le ayuda.

Numéricamente se obtiene que N=848.7 N, f_c=84.9 N, F=405.1 N.

Ejemplo 3. Dos bloques de masas m_1=1.5 kg y m_2=3.0 kg están unidos por una cuerda ideal paralela a la superficie de un plano inclinado, θ=30º, por el cual ambos bloques resbalan descendiendo como muestra la figura, m_2 jalando a m_1. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque 1 y el plano es μ_1=0.2 y entre el bloque 2 y el plano es μ_2=0.1. Calcular a) la tensión en la cuerda y b) la aceleración común de los dos bloques.



Solución. Sobre cada bloque actúan cuatro fuerzas: la fuerza $\vec{f}$ de fricción cinética, la fuerza normal $\vec{N}$ que ejerce el plano inclinado, el peso $\vec{P}$ y la tensión $\vec{T}$ de la cuerda, como ilustra la figura siguiente.



Para cada cuerpo, las ecuaciones de movimiento en las direcciones X y Y, y la relación entre las dos componentes de la fuerza de contacto, respectivamente, son

Para 1: $T - f_1 + m_1 g sen\theta = m_1 a$, $N_1 = m_1 g \cos\theta$, $f_1 = \mu_1 N_1$.

De aquí se obtiene

$$T - \mu_1 m_1 g \cos\theta + m_1 g sen\theta = m_1 a \qquad \text{(a)}$$

Para 2: $-T - f_2 + m_2 g sen\theta = m_2 a$, $N_2 = m_2 g \cos\theta$, $f_2 = \mu_2 N_2$.

De aquí se obtiene

$$-T - \mu_2 m_2 g \cos\theta + m_2 g sen\theta = m_2 a \qquad \text{(b)}$$

Las dos ecuaciones (a) y (b) contienen a las dos incógnitas de interés. Al sumarlas se obtiene $(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2) g sen\theta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos\theta$. De donde se obtiene que la aceleración es

$$a = g sen\theta - \frac{(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos\theta}{m_1 + m_2}.$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (a) y simplificar se obtiene que la tensión es

$$T = \frac{(\mu_1 - \mu_2) m_1 m_2 g \cos\theta}{m_1 + m_2}.$$

Los resultados numéricos son: a=3.77 m/s^2 y T=0.85 N.

←——— ←——— ←———

6.3 Fuerzas dependientes del tiempo

Considérese el caso de una dimensión. Si la fuerza depende del tiempo ($F(t)$), la aceleración también depende del tiempo, $a(t)$; de tal manera que la segunda ley se puede escribir como $a(t) = \frac{F(t)}{m}$. Para calcular la velocidad y la posición se siguen los mismos pasos usados al final del capítulo 2 (Cinemática del Movimiento Rectilíneo).

Recuerde que del cálculo diferencial se sabe que la diferencial de una función arbitraria $f(y)$ es igual a la derivada de la función (respecto a la variable independiente) multiplicada por la diferencial de la variable independiente; es decir, $df = \left(\frac{df}{dy}\right)dy$. Ahora, al multiplicar por dt la definición de la aceleración y usando este teorema del cálculo diferencial, se puede escribir

$$adt = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt = dv.$$

Integrando el primer miembro desde el tiempo t=0 hasta el tiempo t, y el segundo miembro entre los correspondientes límites de la velocidad, v_0 y v, se obtiene el resultado siguiente:

$$\int_0^t a(t)dt = \int_{v_0}^{v} dv,$$

de donde se obtiene que

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt. \qquad (5)$$

Ahora que ya se conoce la velocidad en términos de la integral de $a(t)$, la operación de integración se aplica otra vez para calcular la posición. Al multiplicar la definición de la velocidad por diferencial de t y usando nuevamente el resultado del cálculo diferencial en relación a la diferencial de una función, se obtiene

$$vdt = \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = dx.$$

Integremos esta expresión desde t=0 (cuando la partícula está en la posición x_0) hasta el tiempo t (cuando la partícula tiene la posición x):

$$\int_0^t v(t)dt = \int_{x_0}^{x} dx,$$

de donde se obtiene que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt. \qquad (6)$$

Si se conoce la forma explícita de la fuerza dependiente del tiempo $F(t)$, entonces también se conoce la aceleración $a(t)$ y puede efectuarse la integración de la ecuación (5) en forma analítica o numérica; por tanto, también la integración (6) puede efectuarse.

6.4 Fuerza de arrastre (opcional)

Un ejemplo de fuerza que depende de la magnitud de la velocidad ($\vec{F}\,(v)$) es la fuerza de *arrastre* (fuerza de resistencia del medio) que experimenta un cuerpo, digamos un sólido, cuando se mueve en un fluido (líquido o gas); esta fuerza aumenta con la velocidad del cuerpo. Pero la velocidad no crece sin límite, el cuerpo alcanza una *velocidad máxima* o *velocidad terminal*. Esta velocidad terminal se obtiene a partir del momento en que la fuerza neta sobre la partícula es nula. Las fuerzas de arrastre tienen su sentido opuesto al sentido de la velocidad (el mismo comportamiento que tiene la fuerza de fricción).

Consideremos el caso de una dimensión; la segunda ley es $F(v)=ma(v)$, al escribirla así se enfatiza que al ser la fuerza una función de la magnitud de la velocidad v, la aceleración también lo es. Al multiplicar por dt la definición de la aceleración y usando el teorema del cálculo diferencial que ya hemos empleado, se puede escribir

$$a(v)dt = \left(\frac{dv}{dt}\right)dt = dv\,.$$

Reacomodando las variables de manera que en el lado izquierdo estén las cantidades que dependen del tiempo y en el derecho las que dependen de la velocidad, se obtiene que

$$dt = \frac{dv}{a(v)}\,.$$

Al integrar el primer miembro desde el tiempo t=0 hasta el tiempo t, y el segundo miembro entre los correspondientes límites de la velocidad, v_0 y v, se obtiene el resultado siguiente:

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}\,. \qquad (7)$$

La integración puede realizarse cuando se conoce explícitamente la dependencia de la aceleración con la velocidad.

Aplicaciones.

Caída no tan libre. Suponga que nos interesa describir el movimiento de un objeto que cae en el aire partiendo del reposo (por ejemplo, un granizo o una pelota). El objeto en su movimiento vertical está sometido a la fuerza de gravedad ($m\vec{g}$) y a la fuerza de arrastre o de resistencia ($\vec{D}$) la cual apunta hacia arriba; estas fuerzas m$\vec{g}$ y $\vec{D}$ son antiparalelas. Experimentalmente se ha determinado que la magnitud de la fuerza de arrastre (D) es proporcional a la magnitud de la velocidad o, en otras circunstancias, es proporcional al cuadrado de la magnitud de la velocidad, dependiendo de la geometría del objeto y de su velocidad: $D \sim v$ o $D \sim v^2$; la constante de proporcionalidad en ambos casos depende del objeto que se mueve (por ejemplo, de su tamaño y forma) y del medio (especialmente de la densidad del fluido). En las referencias 2 y 3 se presentan resultados experimentales. Consideraremos estos dos casos por separado.

Fuerza proporcional a la velocidad, $D_1=bv$. Cuando el cuerpo empieza a caer, $D_1=0$ porque su velocidad es cero, D_1 aumenta con v pero hasta un valor límite. La segunda ley de Newton en forma vectorial es

$$m\vec{g} + \vec{D}_1 = m\vec{a} .$$

En cierto momento, el cuerpo en su movimiento de caída no experimenta fuerza alguna y, consecuentemente, no tiene aceleración (su velocidad es constante); es decir, cuando v aumenta se llega a un punto donde $a=0$, lo cual ocurre cuando $mg=bv$; llamemos v_{T1} a esta velocidad, es la *velocidad terminal*, su valor es

$$v_{T1} = \frac{mg}{b} .$$

Fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad, $D_2=\frac{1}{2}C\rho A v^2$. En esta expresión ρ es la densidad del fluido, A es el área efectiva de la sección transversal del objeto (área de la sección transversal perpendicular al vector velocidad) y C es un parámetro adimensional llamado *coeficiente de arrastre*, que depende de la forma del cuerpo. Nuevamente podemos escribir la ecuación de movimiento como $m\vec{g} + \vec{D}_2 = m\vec{a}$. El cuerpo adquiere su velocidad terminal cuando estas dos fuerzas tienen magnitudes iguales: $mg=D_2$. La velocidad terminal es

$$v_{T2} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}} .$$

Movimiento vertical. Supóngase que una partícula de masa m es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial v_{0z} en un medio fluido estático, en el aire por ejemplo. Suponemos que la magnitud de la fuerza de arrastre D es proporcional a la magnitud de la velocidad: $D=bv$; en forma vectorial es $\vec{D} = -b\vec{v}$, pues $\vec{D}$ y $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos. La constante b depende del objeto que se mueve (por ejemplo, de su tamaño y forma) y del medio (especialmente de la densidad del fluido).

Nos interesa calcular la velocidad y la posición, ambas en función del tiempo. Si se escoge el eje Z positivo hacia arriba, entonces los vectores involucrados en la ecuación de movimiento son $m\vec{g} = -mg\hat{k}$, $\vec{v} = v\hat{k}$; de tal manera que la segunda ley de Newton es

$$m\vec{g} + \vec{D} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Como el movimiento es unidimensional, se puede escribir $-mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$, o bien como

$$-(mg + bv)dt = mdv;$$

reacomodando los factores para que los que involucren la velocidad estén en el mismo miembro e integrando el tiempo desde t=0, correspondiente al instante del lanzamiento, se puede escribir

$$-\int_0^t \frac{dt}{m} = \int_{v_{0z}}^{v} \frac{dv}{mg + bv}.$$

Al multiplicar ambos miembros por la constante b se obtiene que las integrales por resolver son

$$-\int_0^t \frac{bdt}{m} = \int_{v_{0z}}^{v} \frac{bdv}{mg + bv}$$

La integral en el lado izquierdo es inmediata. El integrando en el lado derecho tiene la forma de la diferencial de una función entre la función misma, la integral es la función logaritmo natural de la función. El resultado de la integración es

$$-\frac{bt}{m} = \ln(mg + bv)_{v_{0z}}^{v} = \ln(mg + bv) - \ln(mg + bv_{0z}) = \ln\left(\frac{mg + bv}{mg + bv_{0z}}\right). \qquad (8)$$

El miembro derecho de esta expresión también es una cantidad negativa, pues el denominador es mayor que el numerador porque la magnitud de v disminuye al transcurrir el tiempo. Aplicando la función exponencial (que es la función inversa de la función logaritmo) en ambos lados obtenemos

$$\exp\left(-\frac{bt}{m}\right) = \frac{mg + bv}{mg + bv_{0z}}.$$

(Para obtener esta fórmula se usó una de las propiedades fundamentales de los logaritmos; suponga que $y=e^x$, por la definición de logaritmo se tiene que $\ln y=x$, por tanto $y=e^{\ln y}$). Al despejar bv se obtiene $\left(mg+bv_{0z}\right)e^{-\frac{bt}{m}}-mg=bv$, de donde finalmente resulta que la velocidad como función del tiempo es

$$v=\left(\frac{mg}{b}+v_{0z}\right)e^{-\frac{bt}{m}}-\frac{mg}{b}. \qquad (8a)$$

Note que la velocidad sólo depende del medio fluido a través del parámetro b, y de la masa del cuerpo; no depende explícitamente del tamaño ni de la forma del cuerpo (esta información puede estar contenida en el valor numérico de la constante b). Esta expresión (8a) para la velocidad es válida tanto para el movimiento de subida como el de bajada. La partícula llega a su altura máxima en el tiempo t_1, cuando su velocidad es nula. Haciendo $v(t_1)=0$ en (8) se obtiene la fórmula siguiente para el tiempo t_1.

$$-\frac{bt_1}{m}=\ln\left(\frac{mg}{mg+bv_{0z}}\right).$$

El miembro derecho de esta expresión también es una cantidad negativa, pues el denominador es mayor que el numerador.

Como la función exponencial e^{-x} tiende al valor cero cuando x tiende a infinito, al tomar el límite de la velocidad (8a) cuando el tiempo tiende a infinito resulta

$$v_T=-\frac{mg}{b}. \qquad (8b)$$

Esta es la velocidad terminal. El signo negativo indica que esta velocidad se alcanza cuando el objeto está descendiendo.

La posición en función del tiempo se calcula usando la ecuación (8a). Recordando la definición de velocidad como $v=\frac{dz}{dt}$ y multiplicando por dt, se puede escribir $dz=\left(\frac{mg}{b}+v_{0z}\right)e^{-\frac{bt}{m}}dt-\frac{mg}{b}dt$. Al integrar se obtiene

$$z=\left(\frac{mg}{b}+v_{0z}\right)\left(-\frac{m}{b}e^{-\frac{bt}{m}}\right)_0^t-\frac{mg}{b}t=\left(\frac{mg}{b}+v_{0z}\right)\left(-\frac{m}{b}\right)\left(e^{-\frac{bt}{m}}-1\right)-\frac{mg}{b}t.$$

De donde finalmente resulta que

$$z=\frac{m}{b}\left(\frac{mg}{b}+v_{0z}\right)\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right)-\frac{mg}{b}t\;. \qquad (8c)$$

6.5 Movimiento de proyectiles en el aire (opcional)

En el capítulo 4 (Cinemática en el Plano) se estudió el movimiento de proyectiles en el vacío, donde se obtuvo que la trayectoria es una parábola, por lo cual usualmente se llama tiro parabólico a este movimiento. Ahora vamos a suponer que la resistencia del aire es una fuerza de arrastre proporcional a la magnitud de la velocidad, $\vec{D}=-b\vec{v}$. Debido a que el movimiento en el plano vertical es la combinación de un movimiento vertical y uno en dirección horizontal y que, además, como ya se analizó el movimiento vertical, para calcular la trayectoria que sigue el proyectil sólo hace falta conocer el movimiento horizontal.

Movimiento horizontal. La ecuación por resolver para el movimiento en la dirección horizontal es $-bv=m\frac{dv}{dt}$. Reacomodando los factores resulta que $-\frac{b}{m}dt=\frac{dv}{v}$. Al integrar el segundo miembro se obtiene la función logaritmo natural y, después de aplicar la función exponencial, finalmente resulta que (se puede usar la ecuación (8a) con g=0)

$$v_x=v_{0x}e^{-\frac{bt}{m}}. \qquad (9a)$$

Para obtener la posición horizontal como función del tiempo debe integrarse otra vez. Sin embargo, no es necesario efectuar esta integración en detalle, pues haciendo g=0 puede considerarse un caso particular del cálculo que condujo a la expresión (8c) del movimiento vertical. Se obtiene que

$$x=v_{0x}\left(-\frac{m}{b}\right)\left[e^{-\frac{bt}{m}}\right]_0^t=-\frac{mv_{0x}}{b}\left(e^{-\frac{bt}{m}}-1\right);$$

el resultado final es

$$x=\frac{mv_{0x}}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right). \qquad (9b)$$

Trayectoria del proyectil. Ahora que ya conocemos las posiciones vertical y horizontal a través de las relaciones (8c) y (9b), podemos combinarlas para eliminar el tiempo y obtener $z=z(x)$; es decir, la ecuación de la trayectoria que describe la partícula en el plano XZ cuando es lanzada desde el origen con velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ_0 con la línea horizontal. El resultado es

$$z = \left(\frac{mg + bv_{0z}}{bv_{0x}} \right) x + \frac{m^2 g}{b^2} \ln \left(\frac{mv_{0x} - bx}{mv_{0x}} \right). \qquad (10)$$

Es interesante comparar las trayectorias de un objeto lanzado en el vacío y en el aire. Tomemos una pelota de béisbol con los siguientes datos típicos (referencia 4): m=0.14 kg, v_0=45 m/s, θ_0=45º, b=0.033 N/(m/s). En la figura 6.7 se han trazado, usando estos datos, las trayectorias correspondiente a la ecuación (13a) del capítulo 4 y la ecuación (10) de éste. Se observa que para este ángulo de lanzamiento, el alcance en el aire es un poco menor que la mitad del alcance en el vacío, la curva en el aire no es simétrica, las curvas prácticamente coinciden sólo en los primeros 20 metros.

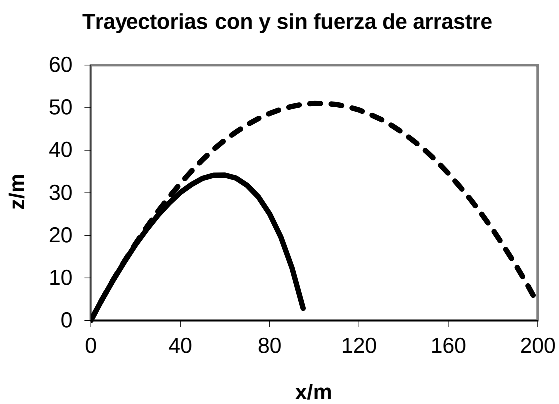


Figura 6.7. Trayectoria de una pelota de béisbol lanzada
con un ángulo de 45º respecto a la horizontal,
en el aire (curva continua) y en el vacío.

6.6 Fuerza elástica

En general, las fuerzas elásticas son producidas por la deformación de los cuerpos; por ejemplo, la fuerza que el trampolín ejerce sobre el clavadista. En el caso de un resorte la fuerza es ejercida debido a la elongación o compresión que sufre el resorte. Consideremos una masa m que está atada a un resorte horizontal, como ilustra la figura 6.8. La longitud normal del resorte es l_0; si lo estiramos hasta la longitud l_1 y lo soltamos, entonces el resorte ejerce una fuerza (sobre la masa m) hacia la izquierda cuya magnitud es proporcional a la elongación l_1-l_0; si ahora lo comprimimos para que su longitud sea l_2, en este caso el resorte ejerce una fuerza hacia la derecha con una magnitud proporcional a l_0-l_2. En cualquiera de las dos situaciones, elongación o compresión, la fuerza ejercida por el resorte sobre la masa *m* está dirigida hacia la posición normal del resorte, que es la posición de equilibrio. Si medimos la posición de la partícula *m* a partir de la posición de equilibrio y la designamos como *x* (llamamos a la elongación como $x=l_1-l_0$ o a la compresión como $x=l_0-l_2$), entonces la fuerza que ejerce el resorte es

$$F=-k\,x \qquad (11)$$

Donde *k* es una constante positiva característica de cada resorte, se le llama *constante elástica* o *constante de fuerza* del resorte; cuanto más grande sea el valor de *k* significa que es más difícil elongar o comprimir el resorte; sus unidades en el sistema SI son N/m. El signo menos indica que el sentido de la fuerza es opuesto al sentido del desplazamiento de la masa *m*. La ecuación (11) es la *ley de la fuerza* para los resortes, se le conoce como *ley de* Hooke. A esta fuerza del resorte se le llama *fuerza de restitución* porque siempre tiende a restablecer a la partícula a su posición de equilibrio (x=0). Esta es la fuerza producida por un resorte ideal; es ideal porque el resorte no tiene masa y satisface la ley de Hooke. Los resortes reales satisfacen razonablemente esta ecuación siempre que no sea deformado más allá de cierto límite (si se estira más allá de su elongación límite, su longitud normal l_0 se modifica).

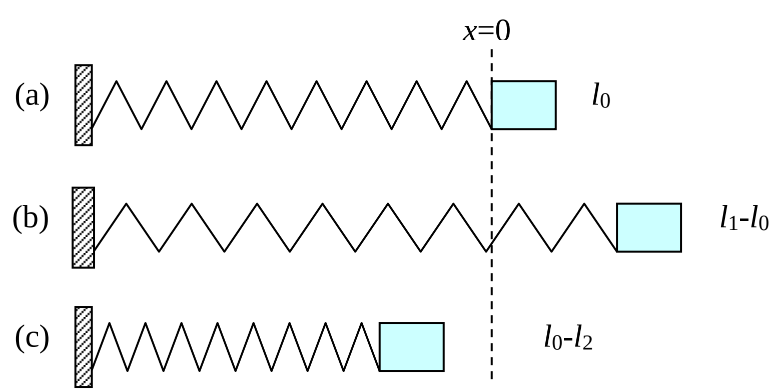


Figura 6.8. (a) Posición normal del resorte; (b) posición estirada; (c) posición comprimida.

6.7 Sistemas no inerciales

En el capítulo de Cinemática en el Plano se presentó el tema del movimiento relativo observado en dos sistemas de referencia inerciales S y S´. Si el sistema S está fijo y el sistema S´ se mueve con velocidad $\vec{V}$ constante (relativa a S), entonces la relación entre la posición ($\vec{r}$) de una partícula observada en S y la posición ($\vec{r}\,'$) observada en S´ es $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$ donde $\vec{R}$ es la posición de S´ respecto a S. Al derivar las posiciones respecto al tiempo, se obtuvo que la relación entre las velocidades es $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$. Si $\vec{V}$ es constante, entonces ambos observadores miden la misma aceleración, $\vec{a} = \vec{a}\,'$.

Supongamos ahora que el sistema S´ no se mueve con velocidad constante, sino que está acelerado. En este caso, al derivar las velocidades respecto al tiempo se obtiene la siguiente relación entre las aceleraciones

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{A}$$

donde $\vec{A}$ es la aceleración del sistema S´ respecto al sistema inercial S. En el sistema de referencia inercial (S), la segunda ley de Newton es

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

donde $\vec{F}$ es la *fuerza de interacción* (también llamada, en forma inadecuada, fuerza newtoniana o fuerza real) entre el cuerpo de masa *m* y su medio ambiente, y $\vec{a}$ es la aceleración que el cuerpo adquiere en respuesta a esa fuerza. En cambio, en un sistema de referencia acelerado S´ (*sistema no inercial*) moviéndose con una aceleración $\vec{A}$ respecto a uno inercial, el observador ahí montado exige que para él la segunda ley de Newton tenga la forma $\vec{F}\,' = m\vec{a}\,'$, donde $\vec{F}\,'$ es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo vista en S´ y $\vec{a}\,'$ es la aceleración medida también en S´. Con esta exigencia y sabiendo el observador en S´ que está acelerado con aceleración $\vec{A}$, la segunda ley de Newton toma la forma

$$\vec{F}\,' = m\vec{a}\,' = m\vec{a} - m\vec{A} = \vec{F} - m\vec{A} = \vec{F} + \vec{F}_i\,.$$

El observador en el sistema S´ ve que la fuerza neta es $\vec{F} + \vec{F}_i$, donde a $\vec{F}_i$ (= –m $\vec{A}$) se le llama *fuerza inercial*, también mal llamada fuerza no newtoniana, fuerza ficticia o seudofuerza. Esta fuerza adicional aparece como consecuencia de que el sistema de referencia está acelerado. Esta fuerza –m $\vec{A}$ tiene diferentes expresiones matemáticas y, por tanto, diferentes nombres dependiendo de las características y condiciones del sistema bajo estudio. Ilustremos a través de un ejemplo el razonamiento que cada observador lleva a cabo, en su respectivo sistema de referencia, para describir el movimiento unidimensional de un cuerpo.

Para ilustrar estas ideas, consideremos un cuerpo de masa *m* que está colgado a través de una cuerda a la tapa superior de una caja. La caja puede moverse con aceleración constante $\vec{A}$ a lo largo de una línea recta. Nos interesa describir el movimiento de la masa *m* cuando es visto desde un sistema de referencia en reposo fuera de la caja (sistema inercial) y desde un sistema de referencia dentro de ella (sistema no inercial). La figura 6.9 muestra la caja, la masa *m* y los dos sistemas de referencia que se usarán: uno fijo en el suelo y el otro fijo en la caja. Analizaremos dos casos particulares, tomados de la referencia 5.

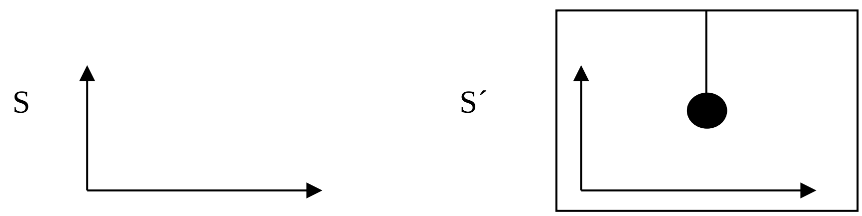


Figura 6.9. El sistema de referencia S está fijo en el suelo, mientras que el sistema S´ está fijo en la caja acelerada.

Caso 1. *Caja acelerada con movimiento en línea recta vertical*.

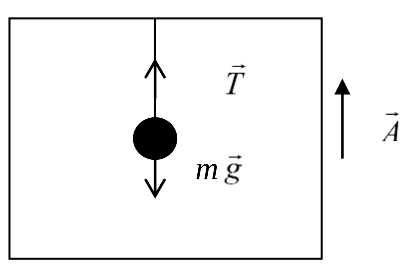
Respecto a S. En un marco de referencia colocado en el suelo, fuera de la caja, se ve que sobre el cuerpo actúan dos fuerzas de interacción: la tensión $\vec{T}$ que ejerce la cuerda y el peso $m\vec{g}$ (figura 6.10); la aceleración $\vec{A}$ de la caja y de su contenido es positiva hacia arriba. La ecuación de movimiento es

$$T-mg=mA,$$

de donde se obtiene que

$$T=m(g+A).$$

Figura 6.10. En el sistema S aparecen las dos fuerzas de interacción.



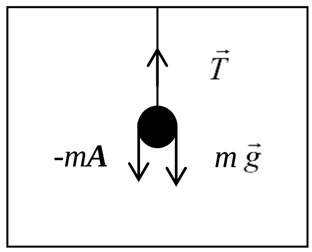
Respecto a S´. Con respecto al sistema de referencia que se mueve con la caja, la masa *m* está en equilibrio bajo la influencia de las dos fuerzas de interacción (la tensión y el peso) y de la fuerza inercial $\vec{F}_i = -m\vec{A}$, como ilustra la figura 6.11. De acuerdo con un observador en S´ la aceleración $\vec{a}´$ es cero, por tanto

$$T\text{-}mg\text{-}mA=0,$$

de donde nuevamente se obtiene que

$$T=m(g+A).$$

Figura 6.11. En el sistema S´ aparecen las dos fuerzas de interacción más la fuerza inercial.



Si $\vec{A}$ es positiva la tensión es mayor que el peso, pero si $\vec{A}$ es negativa la tensión es menor. Si en vez de una caja se piensa en un elevador, y si en vez del cuerpo que pende de un hilo, una persona está parada en el piso del elevador, entonces en lugar de *T* estaríamos hablando de la fuerza normal que el suelo ejerce sobre la persona. Esta fuerza normal es igual al peso cuando el elevador se mueve con velocidad constante; pero cuando $\vec{A}$ es positiva (ya sea que el elevador esté acelerado en su ascenso o que esté frenando en su descenso), la fuerza normal es mayor que el peso y nos sentimos aplastados contra el suelo. Sentimos lo opuesto cuando $\vec{A}$ es negativa, es decir, sentimos que nuestro peso es menor cuando el elevador frena en su ascenso o cuando acelera en su descenso. Podemos medir esta fuerza normal si en lugar de pararnos en el suelo nos colocamos encima de una báscula dentro del elevador; en este caso estaríamos usando la báscula como un medidor de aceleración, o sea, como un acelerómetro. La aceleración experimentada en elevadores típicamente (referencia 6) está en el intervalo desde 0.1 hasta 0.3g y dura de 1 a 4 segundos dependiendo de la altura del edificio. La rapidez de crucero está en el intervalo de 30 a 360 m/min, pero la mayoría de los elevadores para pasajeros en edificios altos la tienen de 120 a 180 m/min.

Caso 2. *Caja acelerada con movimiento en línea recta horizontal*.

Respecto a S. El observador que describe el movimiento respecto al suelo dice que la masa *m* está sometida a la influencia de dos fuerzas de interacción, la tensión $\vec{T}$ y el peso $m\,\vec{g}$. Está en equilibrio en la dirección vertical y acelerada en la dirección horizontal. Aplicando la segunda ley de Newton, en ambas direcciones (ver la figura 6.12) se obtiene que

$$T\cos\theta - mg = 0$$

y que

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta = mA.$$

Combinando estas dos ecuaciones se puede calcular el ángulo que forma la cuerda con la línea vertical; el resultado que se obtiene es

$$\tan\theta = \frac{A}{g}.$$

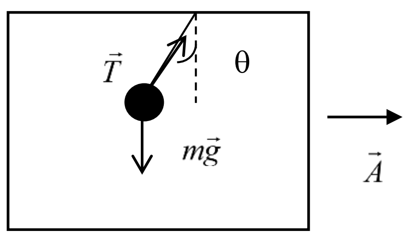


Figura 6.12. La masa *m* se desplaza hacia la izquierda porque la caja está acelerada hacia la derecha.

Respecto a S´. Un observador que se encuentre en reposo en el interior de la caja (sistema S´) asegura que el cuerpo de masa *m* debe estar en equilibrio porque, respecto a él, está en reposo. Las fuerzas de interacción sobre *m*, como antes, son la tensión $\vec{T}$ y el peso $m\vec{g}$. Pero debido a que el sistema es no inercial, aparece la fuerza inercial $-m\vec{A}$. La figura 6.13 muestra estas tres fuerzas. Aplicando la segunda ley de Newton en el sistema S´, las componentes de las fuerzas en las direcciones vertical y horizontal son

$$T\cos\theta - mg = 0$$

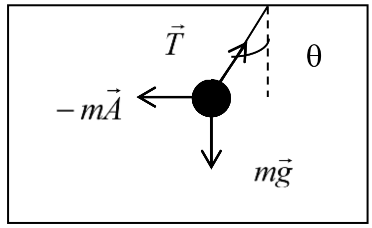
y

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta - mA = 0\,.$$

De aquí se obtiene nuevamente que

$$\tan\theta = \frac{A}{g}.$$

Figura 6.13. Respecto a S´ la masa *m* está en equilibrio ante las dos fuerzas de interacción y la fuerza inercial.



Debido a que la tangente del ángulo es proporcional a la aceleración, si se mide el ángulo entonces una plomada colgada del techo de un vehículo puede usarse como un acelerómetro.

Si en vez de la caja acelerada pensamos que se trata de un vehículo acelerado en cuyo interior estamos sentados, nos daríamos cuenta que la fuerza inercial $-m\vec{A}$ que sentimos hacia atrás debe ser compensada por la fuerza que ejerce el respaldo del asiento (que equivaldría a la componente $T\text{sen}\theta$ que siente la masa *m*). En cambio, cuando la aceleración es en sentido opuesto (cuando el vehículo está frenando) sentimos que la fuerza $-m\vec{A}$ nos empuja hacia adelante y, en este caso, el cinturón de seguridad nos detiene para que no terminemos en el parabrisas.

Para los dos casos discutidos, en cada uno de los dos sistemas de referencia se obtiene el mismo resultado, como debe ser. Sin embargo, debe notarse que aunque los pasos algebraicos en ambos cálculos son similares, el razonamiento utilizado es diferente en cada marco de referencia. Es importante enfatizar que las fuerzas inerciales aparecen únicamente en sistemas acelerados (sistemas no inerciales). En la naturaleza existen otras fuerzas inerciales, como la de Coriolis, que es consecuencia de que la Tierra gira respecto a su propio eje y que, entre otros efectos, es la responsable de la desviación de las corrientes marinas.

Recapitulación

Las fuerzas se clasifican como fundamentales o fenomenológicas. Veamos dos ejemplos de fundamentales. La masa de los cuerpos da origen a la *fuerza de gravitación*, que siempre es atractiva. Para dos cuerpos de masas m_1 y m_2, separados una distancia *r*, la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el 2 es $\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r$; donde *G* es la constante universal de gravitación, $\hat{u}_r$ es un vector unitario en la línea de m_1 a m_2 y el signo menos indica que la fuerza está dirigida en sentido opuesto a $\hat{u}_r$. La más elemental de las interacciones eléctricas es la *fuerza electrostática*; para dos cuerpos que portan cargas eléctricas q_1 y q_2, separados una distancia *r*,

q_1 ejerce sobre q_2 la fuerza $\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{u}_r$; donde ε_0 es una constante. Esta fuerza puede ser repulsiva o atractiva; cargas de igual signo se repelen, cargas de signos opuestos se atraen. La carga eléctrica es la responsable de la fuerza electrostática.
Las fuerzas fenomenológicas pueden ser explicadas en términos de las fundamentales.

La fuerza de contacto entre dos sólidos tiene dos componentes: la *normal* que es perpendicular a las superficies en contacto y la de *fricción* que es tangencial a las superficies. Consideremos el *deslizamiento* de una superficie seca sobre otra; a un bloque en reposo sobre una superficie horizontal se aplica una fuerza horizontal cuya magnitud se aumenta en forma gradual hasta que el bloque se mueva con velocidad constante.
La fuerza de fricción que actúa entre dos superficies en reposo se llama fuerza de *fricción estática*, la que actúa entre dos superficies con movimiento relativo se llama de *fricción cinética*. La magnitud más grande de la fuerza de fricción estática (f_e) entre dos superficies sólidas responde a dos leyes empíricas: 1) es aproximadamente independiente del área de contacto, y 2) es proporcional a la fuerza normal (N). La constante de proporcionalidad se llama *coeficiente de fricción estática*, μ_e. Debido a que f_e aumenta hasta su valor máximo, entonces $f_e \leq \mu_e N$. La magnitud de la fuerza de fricción cinética f_c entre dos sólidos sigue las mismas dos leyes empíricas anteriores. El cociente de la fuerza de fricción cinética entre la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción cinética* (μ_c): $f_c = \mu_c N$. Para un par de superficies se cumple que $\mu_c < \mu_e$ y sus valores numéricos dependen del material de las superficies.

Si la fuerza sólo depende del tiempo, la aceleración también; al multiplicar por dt la definición de la aceleración, se puede escribir $adt = \left(\dfrac{dv}{dt}\right)dt = dv$. Integrando desde t=0 hasta t, y la velocidad entre los correspondientes límites, v_0 y v, se obtiene $v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt$ **(5)**. La integración se aplica otra vez para calcular la posición; al multiplicar la velocidad por dt se obtiene $vdt = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)dt = dx$. Integrando desde t=0 hasta t se obtiene $x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt$ **(6)**.

La fuerza que ejerce un resorte se debe a su deformación. Suponga una masa m atada a un resorte horizontal, figura 6.8. La longitud normal del resorte es l_0; si lo estiramos hasta la longitud l_1 y lo soltamos, entonces el resorte ejerce una fuerza cuya magnitud es proporcional a la elongación l_1-l_0; si lo comprimimos para que su longitud sea l_2, el resorte ejerce una fuerza con magnitud proporcional a l_0-l_2. En las dos situaciones, la fuerza ejercida por el resorte está dirigida hacia la posición normal del resorte. Si medimos la posición de la partícula a partir de la posición de equilibrio, entonces la fuerza es $F = -kx$; k es una constante positiva característica de cada resorte, llamada *constante elástica*. El signo menos indica que el sentido de la fuerza es opuesto al sentido del desplazamiento de la masa *m*. Esta ecuación es la ley de la fuerza para resortes sin masa, conocida como ley de Hooke.

En el capítulo 4 se estudió el movimiento relativo observado en sistemas inerciales; suponer ahora que el sistema S´ está acelerado. Se obtiene la relación entre las aceleraciones $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$; $\vec{A}$ es la aceleración de S´ respecto S. En el sistema S la segunda ley de Newton es $\vec{F} = m\vec{a}$, con $\vec{F}$ la *fuerza de interacción* y $\vec{a}$ la aceleración. En S´ (*sistema no inercial*) moviéndose con aceleración $\vec{A}$ respecto a uno inercial, el observador ahí montado exige que para él la segunda ley de Newton tenga la forma $\vec{F}' = m\vec{a}'$, donde $\vec{F}'$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo vista en S´ y $\vec{a}'$ es la aceleración medida también en S´. Con esta exigencia y sabiendo el observador en S´ que está acelerado, la segunda ley de Newton toma la forma $\vec{F}' = m\vec{a} - m\vec{A} = \vec{F} + \vec{F}_i$. El observador en S´ ve que la fuerza neta es $\vec{F} + \vec{F}_i$, donde a $\vec{F}_i$ $(= -m\vec{A})$ se le llama *fuerza inercial*. Esta fuerza aparece como consecuencia de que el sistema de referencia está acelerado.

Bibliografía

1. Priest, J. y Snider, J. Undergraduate computer-interfacing projects, *The Physics Teacher*, mayo 1987, p. 303.

2. Gribbin, J. E.. Not so free fall. *The Physics Teacher*, **10**, (3), 153 (1972).

3. Maroto, J. A., Dueñas-Molina, J. y de Dios, J. Experimental evaluation of the drag coefficient for smooth spheres by free fall experiments in old mines. *European Journal of Physics*, **26**, 323 (2005).

4. Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. S. *Física*, quinta edición en inglés (cuarta edición en español). CECSA, México, 2002. Sección 4-4, p. 132.

5. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la Resolución de Problemas. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2005. Capítulo 5.

6. Soules, J. A. Full-Scale Demonstration of Acceleration. *American Journal of Physics*, **40** (8), 1173 (1972).

Problemas

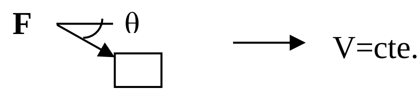
1. Un bloque de 20 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. Es empujado con una fuerza de 5 N hacia la derecha, pero no se logra moverlo. Calcular la fuerza de fricción estática.

2. Un bloque de masa m = 5 kg es impulsado con una velocidad inicial de 10 m/s sobre una superficie horizontal, habiendo un coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie

de μ_c = 0.4. Determinar a qué distancia llegará el bloque hasta detenerse, a partir de la posición inicial.

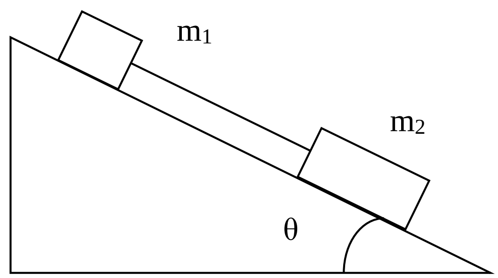
3. Un bloque de masa m = 3 kg que se encuentra sobre una superficie horizontal es empujado por una fuerza **F** de 40 N dirigida a un ángulo de θ = 30º con la horizontal, ver figura. ¿Cuánto debe valer el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la superficie de tal forma que el bloque se deslice con velocidad constante?

Figura 6.14. Problema 3



4. Dos masas m_1=1.6 kg y m_2=3.2 kg están unidas por una varilla sin masa paralela a un plano inclinado, por el cual ambas masas resbalan descendiendo como muestra la figura, tirando m_2 de m_1. El ángulo de inclinación es θ=30º. El coeficiente de fricción cinética entre las masas y el plano es μ_c=0.226. Calcular a) la tensión de la varilla que une a m_1 y m_2, y b) la aceleración común de las dos masas.

Figura 6.15. Problemas 4 y 6.



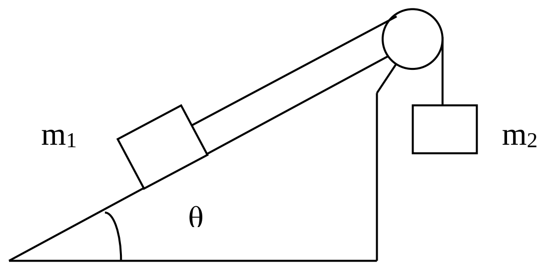
5. Un objeto de masa m = 5 kg se encuentra apoyado sobre un plano inclinado de θ = 30°. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre las superficies son μ_e = 0.3 y μ_c = 0.2, respectivamente. Se requiere que el objeto se mantenga en reposo sobre el plano, para lo cual se empuja hacia arriba con una fuerza $\vec{F}$ paralela al plano. a) ¿Qué magnitud mínima debe tener esa fuerza $\vec{F}$ para que el bloque no se deslice hacia abajo? b) Si se deja de aplicar la fuerza $\vec{F}$, ¿con qué aceleración desciende? c) ¿Cuál es la fuerza necesaria para mover al bloque hacia arriba a velocidad constante?

6. Un bloque de masa m_1 y otro de masa m_2 están unidos por medio de una varilla carente de masa paralela al plano inclinado por el que ambos bloques resbalan juntos hacia abajo. El ángulo del plano inclinado es θ respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_1 y el plano es μ_1 y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_2 y el plano es μ_2. Suponiendo que el bloque de masa m_2 es el que va adelante, determinar a) la aceleración de los bloques y b) la tensión en la varilla. c) ¿Cómo cambian las respuestas si se intercambian las posiciones de los bloques? Usar m_1=4 kg, m_2=8 kg, θ=30º, μ_1=0.2, μ_2=0.1.

7. En el problema anterior sustituir la varilla por una cuerda ideal y responder los tres incisos usando los mismos valores numéricos; comentar las diferencias, en caso de haberlas.

8. Un bloque de masa m_1 = 3 kg se encuentra sobre un plano inclinado de ángulo θ = 30º, y con un coeficiente de fricción cinética μ_c = 0.3. El bloque de masa m_1 se une al extremo de una cuerda ideal, la cual pasa por una polea en la parte superior del plano inclinado, y en el otro extremo de la cuerda cuelga otro bloque de masa desconocida m_2. a) ¿Cuál debe ser el valor de m_2 para que los bloques se muevan con velocidad constante con el bloque m_1 descendiendo? b) En estas condiciones, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

Figura 6.16. Problemas 8 y 20.



9. Dos bloques de masas m_1 = 2 kg y m_2 = 3 kg están en contacto y colocados sobre una superficie horizontal con un coeficiente de fricción cinética μ =0.1, para ambos bloques. El bloque m_1 está a la izquierda del bloque m_2. Se aplica una fuerza horizontal constante F = 12 N hacia la derecha, sobre el bloque de masa m_1. Calcular a) la aceleración del sistema y b) la fuerza de contacto entre los dos bloques.

10. Un trozo de hielo se desliza desde el reposo por un plano inclinado rugoso de 30º en el doble del tiempo que le toma deslizarse por otro plano igual, pero sin fricción, de la misma longitud. Hallar el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el plano inclinado rugoso.

11. Un bloque de masa *m* se sitúa sobre un plano inclinado a 35º respecto a la horizontal. Se observa que el bloque se desliza hacia abajo del plano con una aceleración constante de magnitud g/3, determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano.

12. Un bloque de masa m_1 se encuentra sobre una mesa horizontal, con un coeficiente de fricción cinética μ_c entre ambos. Una cuerda ligera se une a este bloque y se hace pasar por una polea ligera situada en un extremo de la mesa, y en el otro extremo de la cuerda se une otro bloque de masa m_2, ver figura. Al dejar en libertad el sistema la cuerda queda en tensión y se observa que ambos bloques empiezan a moverse de tal manera que el bloque que cuelga desciende. Calcular la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda.

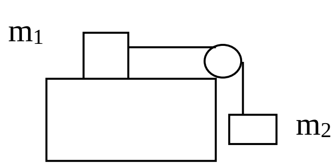


Figura 6.17. Problema 12.

13. Un bloque de masa m_1 = 5.0 kg se encuentra sobre otro bloque cuya masa es m_2 = 10 kg el cual, a su vez, se encuentra sobre una mesa horizontal sin fricción, tal como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática entre los dos bloques es de $\mu_e = \mu_s = 0.25$. Encontrar: a) la máxima magnitud F de la fuerza horizontal que se puede aplicar al bloque inferior, m_2, para que los dos bloques se mantengan unidos durante su movimiento, y b) la aceleración del sistema cuando se aplica esa F máxima.

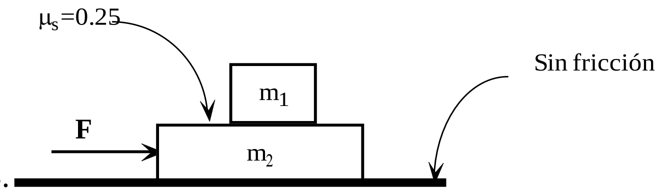
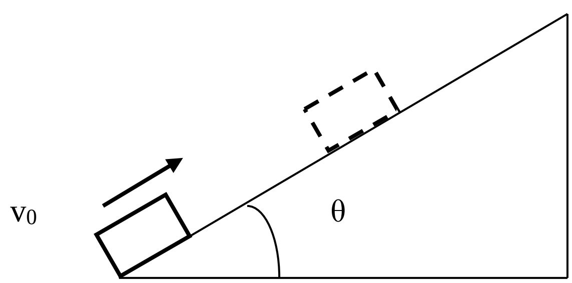


Figura 6.18. Problema 13.

14. Un bloque se desliza por un plano inclinado con un ángulo de pendiente θ a velocidad constante. Luego es lanzado hacia arriba por el mismo plano con una velocidad inicial v_0.
a) ¿A qué distancia subirá por el plano hasta llegar al reposo?
b) ¿Se deslizará de nuevo hacia abajo?

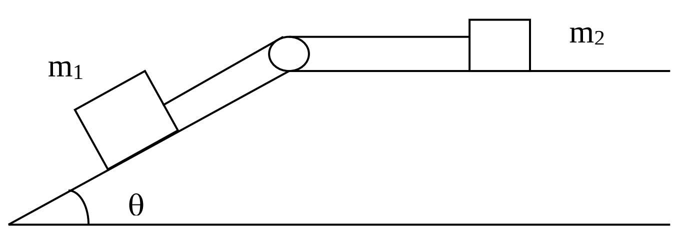
Figura 6.19. Problemas 14 y 15.



15. Se suministra una velocidad inicial a un bloque para que suba por un plano inclinado a 30º. El coeficiente de fricción cinética entre el plano y el objeto es $\mu_c = 0.4$, el de fricción estática es $\mu_e = 0.6$. a) ¿Cuál es la aceleración del bloque? b) ¿Qué distancia recorre sobre el plano antes de detenerse? c) Una vez que se detiene ¿comenzará a descender o se quedará en reposo?

16. El bloque m_1 de la figura tiene una masa de 3.00 kg y el bloque m_2 tiene una masa de 2.00 kg. Una cuerda ideal conecta los bloques y pasa por la polea. El coeficiente de fricción cinética entre m_2 y el plano horizontal es de 0.4. El plano inclinado tiene un ángulo de 30º y carece de fricción. Hallar a) la aceleración de los bloques y b) la tensión en la cuerda.

Figura 6.20. Problema 16.



17. Un bloque está en reposo sobre un plano cuyo ángulo de inclinación es ajustable. Partiendo de $\theta = 0°$ y aumentando el ángulo poco a poco se observa que el objeto empieza a resbalar cuando $\theta_e = 25°$. Una vez el bloque se ha puesto en movimiento, se encuentra que ajustando el plano a un ángulo de inclinación un poco menor al anterior ($\theta_c = 21°$), el objeto se desliza con velocidad constante. a) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática μ_e de las superficies? b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética μ_c?

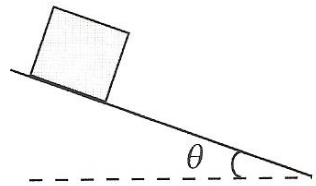


Figura 6.21. Problema 17.

18. Un bloque asciende desde la parte inferior de un plano inclinado de 30º con una rapidez inicial de 10 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_c = 0.2$, calcule la distancia que el bloque recorre sobre el plano antes de detenerse.

19. Un bloque de 8.00 kg descansa sobre un plano inclinado a 22º respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción estática es de 0.25, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.15. a) ¿Cuál es la fuerza mínima, paralela al plano, que impedirá que el bloque se deslice por el plano hacia abajo? b) ¿Cuál es la fuerza necesaria para mover al bloque hacia arriba a velocidad constante?

20. Un bloque de masa $m_1 = 3$ kg se encuentra sobre un plano inclinado de ángulo $\theta = 30º$ con un coeficiente de fricción cinética $\mu_c = 0.3$. El bloque de masa m_1 se une al extremo de una cuerda ideal, la cual pasa por una polea en la parte superior del plano inclinado, y en el otro extremo de la cuerda cuelga otro bloque de masa desconocida m_2. Ver figura 6.16.
a) ¿Cuál debe ser el valor de m_2 para que los bloques se muevan con velocidad constante, con el bloque m_1 ascendiendo?
b) En estas condiciones, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

21. Se quiere subir una caja de masa m a un transporte de carga usando un plano inclinado. Un obrero aplica a la caja una fuerza $\vec{F}$, a través de una cuerda, paralela al plano de manera que la caja se mueve con velocidad constante. El plano inclinado forma un ángulo θ con la horizontal y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y la caja es μ_c. Considerar θ=30º, m=100 kg y μ_c=0.1. Calcular las fuerzas: normal, de fricción y F, (comparar el resultado para F con el obtenido en el problema 8 del capítulo 5).

22. Se quiere colocar un bloque de masa m = 5 kg sobre un plano inclinado a 30º respecto a la horizontal**.** El coeficiente de fricción estática es $\mu_e = \mu$, mientras que el coeficiente de fricción cinética es $\mu_c = \mu / 2$, usar μ=0.2. a) Si se coloca el bloque en reposo sobre el plano inclinado y se suelta, determine si permanece en reposo o si empezará a deslizarse. En caso de moverse, ¿cuál es su aceleración? b) ¿Cuál es la fuerza F mínima paralela al plano que mantiene al bloque sin deslizarse hacia abajo? c) ¿Cuál es la fuerza F necesaria para mover el bloque hacia arriba con velocidad constante?

7 TRABAJO, ENERGÍA CINÉTICA, POTENCIA

Analizando el movimiento de un cuerpo, en 1 y 2 dimensiones, producido por una fuerza constante o una fuerza dependiente de la posición, se llega a los conceptos de trabajo y de energía cinética, los cuales resultan estar relacionados. Después, al analizar la rapidez con que la fuerza realiza el trabajo o cambia la energía cinética se llega al concepto de potencia.

Introducción

Un problema fundamental de la dinámica de las partículas es el de calcular la posición como una función del tiempo cuando se conoce la fuerza que se aplica. La segunda ley de Newton proporciona la ecuación de movimiento, la cual para una fuerza que en general dependa de la posición, de la velocidad y del tiempo, se escribe como

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ . \qquad (1)$$

Para resolver esta ecuación usamos los métodos de integración. Estamos interesados en calcular los efectos sobre el cuerpo cuando la fuerza es conocida, suponiendo que la masa es constante. El análisis de estos efectos conducirá a los conceptos de trabajo y de energía cinética. Primero haremos el cálculo para una fuerza constante y después para una fuerza variable.

7.1 Efectos de una fuerza constante

1. *Fuerza unidimensional*. Consideremos que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es constante y que el cuerpo mismo está restringido a moverse sobre una línea recta horizontal. Supongamos primero que la fuerza aplicada está dirigida en la dirección en que el cuerpo se mueve, como ilustra la figura 7.1.

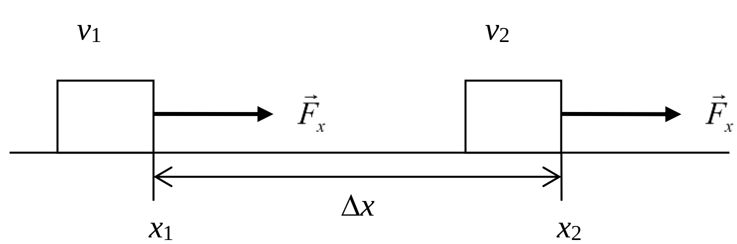


Figura 7.1. El cuerpo se mueve en la dirección en que la fuerza constante es aplicada.

Cuando el cuerpo de masa m está en la posición x_1 tiene una velocidad v_1, cuando llega a la posición x_2 tiene velocidad v_2 y ha tenido un desplazamiento Δx. Como la fuerza es constante, entonces el cuerpo se traslada con aceleración constante, a. Por cinemática sabemos que estas cantidades están relacionadas a través de

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1) = 2a\Delta x. \qquad (2)$$

De donde el valor de la aceleración es

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x}.$$

Pero por la segunda ley de Newton sabemos que $a = \frac{F_x}{m}$. Por tanto, a partir de estas dos formas de escribir la aceleración se obtiene que

$$\frac{F_x}{m} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x}.$$

Esta expresión puede ser reescrita como

$$F_x \Delta x = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right).$$

Este resultado también puede escribirse como

$$F_x \Delta x = \frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = \Delta\left(\frac{1}{2} m v^2\right); \qquad (3)$$

es decir, la fuerza multiplicada por el desplazamiento es igual al cambio que experimenta la cantidad $\frac{1}{2} m v^2$.

Si los cambios son infinitesimales (es decir, si el desplazamiento es infinitesimal y el cambio en $\frac{1}{2} m v^2$ también es infinitesimal), entonces el símbolo Δ lo reemplazamos por el de diferencial para expresar

$$F_x dx = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right). \qquad (4)$$

En el primer miembro de esta ecuación aparece la cantidad asociada a la *causa* que produce el movimiento del cuerpo (la fuerza F_x) y su *efecto* (el desplazamiento dx); en cambio, en el segundo miembro, aparte de la propiedad del cuerpo (la masa m), aparece el cambio de una propiedad del *movimiento instantáneo* del cuerpo llamada *energía cinética* $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$.

2. *Fuerza bidimensional*. Ahora supongamos que la fuerza constante no se aplica en la misma dirección del movimiento del cuerpo, pero el cuerpo mantiene la restricción de moverse sobre la misma pista horizontal, como lo ilustra la figura 7.2. Las posiciones y las velocidades son las mismas que las mostradas en la figura 7.1, pero la fuerza forma un ángulo θ con la línea horizontal y las posiciones inicial y final están señaladas con los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respecto a un origen arbitrario O, de tal manera que ahora el desplazamiento está representado por el vector $\Delta\vec{r}$, pero su magnitud sigue siendo igual a Δx, es decir, $\Delta r = \Delta x$.

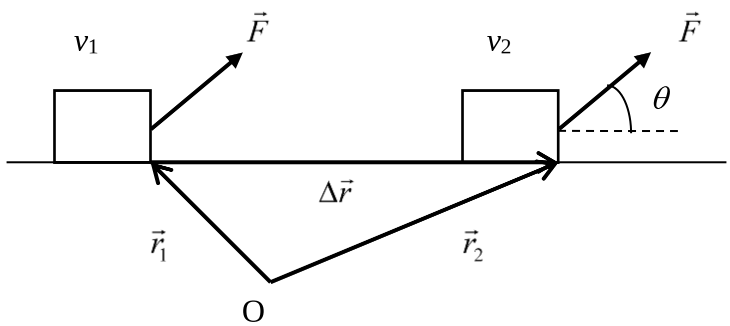


Figura 7.2. Ahora la fuerza constante forma un ángulo θ con la dirección en que el cuerpo se mueve.

Como el resultado de trasladar el cuerpo de una posición a otra es el mismo (mismo desplazamiento), con las mismas velocidades al inicio y al final (mostradas en estas dos figuras), entonces la relación (3) sigue siendo válida pero tenemos que expresarla como

$$(F\cos\theta)\Delta r = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \qquad (5)$$

Ahora la acción del agente externo que se transforma en propiedad del movimiento del cuerpo ya no es F_x, sino $F\cos\theta$; o sea que solamente la componente de $\vec{F}$ a lo largo de la dirección del movimiento es la que contribuye a cambiar el movimiento del cuerpo. Recordando la definición del producto escalar (o producto punto) entre vectores y suponiendo nuevamente que los cambios son diferenciales, la ecuación (5) puede escribirse como

$$\vec{F} \bullet d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \qquad (6)$$

7.2 Efectos de una fuerza que depende de la posición

1. *Fuerza unidimensional*. Consideremos una fuerza que depende de la posición y, por sencillez, la supondremos en una dimensión; es decir, la fuerza es una función de x, $F=F(x)$. De nuevo suponemos que la fuerza se aplica a un cuerpo cuya masa es constante. Al expresar la segunda ley de Newton como $F=m\dfrac{dv}{dt}$ y multiplicar ambos miembros por v se obtiene

$Fv=mv\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}(½mv^2)$.

Ahora multiplicamos ambos miembros por diferencial de tiempo dt para obtener

$$Fvdt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt.$$

Recuerde que la diferencial de una función arbitraria $f(y)$ es igual a la derivada de la función (respecto a la variable independiente) multiplicada por la diferencial de la variable independiente; es decir $df = \left(\dfrac{df}{dy}\right)dy$. Usando este resultado, se puede escribir $vdt=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)dt=dx$ en el primer miembro y $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)dt = d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ en el segundo miembro. Por tanto, la ecuación anterior se transforma en

$$Fdx = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \qquad (7)$$

2. *Fuerza bidimensional*. Ahora consideremos una fuerza que depende de la posición, pero en dos dimensiones; es decir, la fuerza es una función de x y de y, $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$. En la figura 7.3 se muestra el camino (trayectoria) que recorre el cuerpo en el plano XY, al aplicarle una fuerza que depende de la posición $\vec{r}$; la fuerza aplicada en el punto 1 está representada como $\vec{F}(1)$ y en el punto 2 como $\vec{F}(2)$.

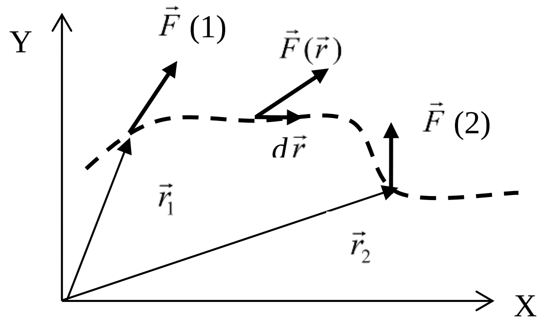


Figura 7.3. El cuerpo se mueve en el plano XY debido a la acción de una fuerza que depende de la posición, $F(x, y)$.

Repetiremos los pasos seguidos en el caso de 1 dimensión. Al multiplicar *escalarmente* por $\vec{v}$ ambos miembros de la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ y usando el resultado general para vectores que establece que $\vec{v} \bullet \frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{dv}{dt}$, se obtiene

$$\vec{F} \bullet \vec{v} = m\vec{v} \bullet \frac{d\vec{v}}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(½mv^2).$$

Ahora multiplicamos ambos miembros por dt para obtener

$$\vec{F} \bullet \vec{v}dt = \frac{d}{dt}(½mv^2)dt.$$

Pero $\vec{v}dt = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = d\vec{r}$ en el primer miembro y $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ en el segundo miembro. La ecuación anterior se transforma en

$$\vec{F} \bullet d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \qquad (8)$$

Los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ se muestran en la figura 7.3.

Recapitulando, los resultados obtenidos en los casos de fuerza constante y de fuerza dependiente de la posición, en una y dos dimensiones, observamos que todos ellos son iguales. Los resultados expresados en las ecuaciones (4), (6), (7) y (8) tienen la misma forma matemática. Esto quiere decir que estamos ante una situación muy importante. El primer miembro de la ecuación (8) lo definimos como la **diferencial de trabajo** (dW) realizado por la fuerza $\vec{F}$ al mover el cuerpo una diferencial de desplazamiento $d\vec{r}$. La diferencial en el segundo miembro de (8) la definimos como la **diferencial de energía cinética** $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, la cual llamaremos dK. Con estas definiciones, la ecuación (8) puede ser escrita como

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK. \qquad (9)$$

Para calcular el trabajo W y la energía cinética debemos efectuar las integraciones correspondientes, digamos entre los puntos 1 y 2 de la figura 7.3:

$$W = \int_1^2 dW = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{r}\,, \qquad (10)$$

El trabajo W se puede conocer cuando se sustituye la forma explícita en que la fuerza depende de la posición. En cambio, la segunda parte de la ecuación (9) puede integrarse inmediatamente, es decir

$$\int_1^2 dK = K_2 - K_1$$

o equivalentemente

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \left(\frac{mv_2^{\,2}}{2}\right) - \left(\frac{mv_1^{\,2}}{2}\right). \qquad (11)$$

Estas expresiones que son válidas para el movimiento en dos dimensiones, también lo son para cuando el movimiento es en tres dimensiones. Analicemos las expresiones (10) y (11) por separado.

7.3 Trabajo

En el caso unidimensional en que la fuerza constante y el movimiento del cuerpo están en la misma línea, y si entre los puntos 1 y 2 el desplazamiento es s, entonces el resultado de la integral en (10) es

$$W = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_1^2 F\cos 0^{\circ} ds = F\int_1^2 ds = Fs.$$

El trabajo efectuado por la fuerza F sobre el cuerpo es igual al producto de la fuerza por el desplazamiento s. Análogamente, pero en el caso que la fuerza constante aplicada al cuerpo forma un ángulo θ con la línea en que se mueve el cuerpo, y si el desplazamiento sigue siendo *s*, entonces el resultado de la integral (10) es

$$W=\int_1^2 \vec{F}\bullet d\vec{s}=\int_1^2 F\cos\theta ds=F\cos\theta\int_1^2 ds=Fs\cos\theta.$$

El trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula es el producto de la componente de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento ($F\cos\theta$) y la magnitud del desplazamiento (*s*). En estos dos casos de una fuerza constante, el valor numérico de la integral en (10) representa el área de la gráfica de la fuerza y el eje X entre los límites x_1 y x_2, donde x_2-x_1=s; esto se ilustra en la figura 7.4 donde el valor constante de la ordenada de *F* representa la magnitud de la fuerza *F* o $F\cos\theta$.

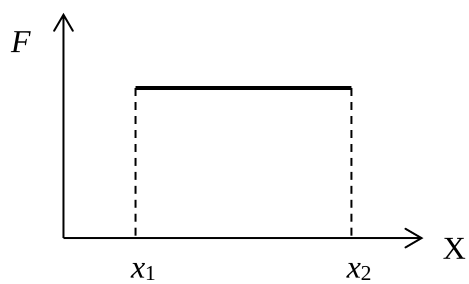


Figura 7.4. Cuando la fuerza es constante, el valor de la integral representada en (10) es igual al área del rectángulo.

Cuando la fuerza aplicada es una función de la posición en una dimensión, para efectuar la integral representada en (10) la función $F(x)$ debe conocerse explícitamente. La figura 7.5 representa una función $F(x)$ arbitraria, donde el área bajo la curva de la fuerza y el eje X entre los límites x_1 y x_2 representa al trabajo.

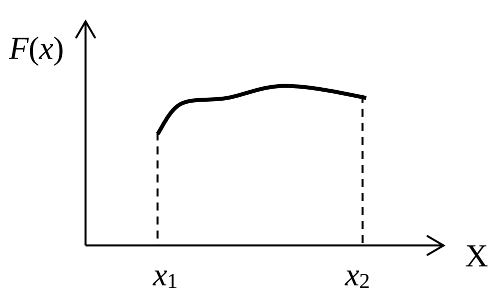


Figura 7.5. Para una fuerza $F(x)$, la integral representada en (10) es igual al área limitada por la curva, las líneas punteadas y el eje X.

Análogamente, si la fuerza aplicada depende de la posición en dos dimensiones (o más dimensiones), para efectuar la integral representada en (10) la función $\vec{F}(x, y)$ debe conocerse explícitamente. En este caso, siendo el integrando un producto escalar, puede escribirse como $\vec{F} \bullet d\vec{r} = F\cos\phi dr$ donde ϕ es el ángulo entre la fuerza y la diferencial de desplazamiento (cuya magnitud es dr), o como $\vec{F} \bullet d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$, pues $d\vec{r} = (dx, dy)$. La integral que resulta se llama *integral de línea*. La integral se evalúa a lo largo de la trayectoria que sigue la partícula entre los puntos 1 y 2.

Debido a las características del producto escalar que aparece en (9) o, equivalentemente, en el integrando de la ecuación (10), la diferencial de trabajo puede ser positiva, negativa o nula. Cuando $dW>0$ se dice que $\vec{F}$ realiza trabajo *sobre* el cuerpo, cuando $dW<0$ se dice que el cuerpo realiza trabajo *contra* la fuerza. Ejemplo: al lanzar verticalmente hacia arriba un objeto, en la etapa de subida el trabajo $m\vec{g} \bullet d\vec{r}$ es negativo, pero en la etapa de bajada $m\vec{g} \bullet d\vec{r}$ es positivo. Cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento, esa fuerza no produce trabajo; por ejemplo, cuando se sostiene con la mano y se desplaza horizontalmente un objeto, la fuerza vertical que se aplica para vencer el peso no produce trabajo.

El trabajo tiene dimensiones de fuerza por longitud: $[W]=[F][x]=\frac{ML}{T^2}L = \frac{ML^2}{T^2}$. La unidad de trabajo en el Sistema Internacional de unidades (SI) es el newton-metro; esta unidad recibe el nombre de joule, con símbolo J.

En la ecuación (10) la fuerza $\vec{F}$ representa la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo. Si esta fuerza es la suma vectorial de varias fuerzas, digamos $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$, entonces

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} = \vec{F}_1 \bullet d\vec{r} + \vec{F}_2 \bullet d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_N \bullet d\vec{r} = dW_1 + dW_2 + \ldots + dW_N.$$

Es decir, W en la ecuación (10) representa la suma algebraica del trabajo producido por cada fuerza.

7.4 Energía cinética

Hemos visto que al aplicar una fuerza neta, ya sea constante o dependiente de la posición, sobre una partícula se produce trabajo. Como consecuencia de la aplicación de la fuerza, la velocidad de la partícula cambia y, por tanto, su energía cinética que definimos como $K=\frac{mv^2}{2}$ también cambia. A este cambio en el valor de la energía cinética, calculada en dos posiciones diferentes, expresado en la ecuación (11) lo representaremos como $\Delta K=K_2-K_1=\left(\frac{mv_2^{\,2}}{2}\right)-\left(\frac{mv_1^{\,2}}{2}\right)$.

Observe que la energía cinética es una cantidad positiva siempre, mientras que ΔK puede ser positiva, negativa o nula.

Para que la ecuación (9) sea dimensionalmente consistente, la energía cinética debe ser medida en las mismas unidades que el trabajo; esto es, su unidad SI es el joule.

7.5 Teorema trabajo-energía cinética

La relación diferencial expresada en la ecuación (9), o equivalentemente las formas integrales expresadas en las ecuaciones (10) y (11), establece que

$$W=\Delta K=K_2-K_1=\frac{m}{2}v_2^2-\frac{m}{2}v_1^2. \qquad (12)$$

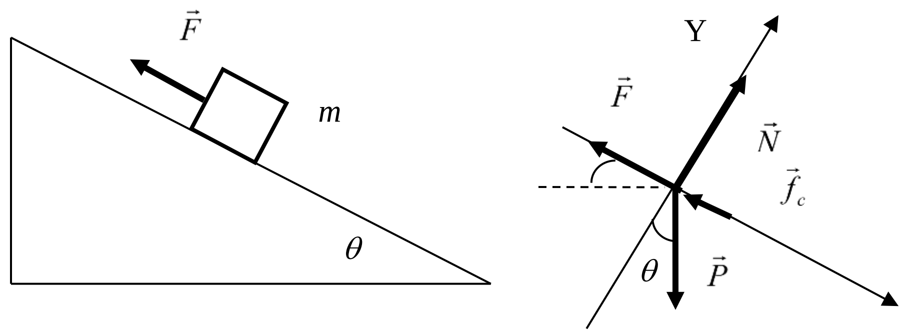
Lo cual significa que el trabajo producido por la **fuerza neta** que actúa sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. Es importante enfatizar que se trata del trabajo producido por la fuerza neta (o fuerza total o fuerza resultante). A esta relación se le conoce como *teorema trabajo-energía cinética*.

Debido a que los valores tanto del desplazamiento como de la velocidad dependen del sistema de referencia inercial en que se observen, los valores asignados al trabajo y a la energía cinética también dependen del sistema inercial usado. Aunque estos valores sean diferentes para observadores inerciales diferentes, los observadores encontrarán que la relación $W=\Delta K$ se satisface.

$\longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \longrightarrow$

Ejemplo 1. *Bajando una caja sobre un plano inclinado*. Se desea bajar una caja grande de masa m desde un transporte de carga usando un plano inclinado. Un obrero aplica a la caja una fuerza $\vec{F}$, a través de una cuerda, paralela al plano y hacia arriba para contrarrestar el peso y permitir que la caja baje con velocidad constante. El plano inclinado forma un ángulo θ con el suelo y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y la caja es μ_c. La caja se desliza sobre el plano una distancia l. Considerar θ=30º, m=100 kg, μ_c=0.1 y l=2 m. Calcular el trabajo realizado por a) la fuerza normal, b) la fuerza de fricción, c) la fuerza F, d) el peso y e) la fuerza neta.

Solución. En el ejemplo 2 del capítulo 6 se obtuvieron las expresiones siguientes para las magnitudes de las fuerzas mostradas en la siguiente figura.



Para la fuerza normal: $N = mg\cos\theta$.

Para la fuerza de fricción cinética: $f_c = \mu_c mg\cos\theta$.

Para la fuerza que el obrero aplica: $F = mgsen\theta - \mu_c mg\cos\theta$.

Para calcular el trabajo debe aplicarse la ecuación (10) teniendo en cuenta que la fuerza y el desplazamiento son vectores.

a) El trabajo realizado por la fuerza normal es nulo, pues esta fuerza es perpendicular al vector desplazamiento:

$$W_N = \vec{N} \bullet \vec{l} = Nl\cos 90^o = 0.$$

b) El vector de la fuerza de fricción cinética y el vector del desplazamiento son antiparalelos; por tanto, el trabajo de esta fuerza es negativo

$$W_f = \vec{f}_c \bullet \vec{l} = f_c l\cos 180^o = -\mu_c mgl\cos\theta.$$

Numéricamente, W_f=-169.8 J.

c) Análogamente, el vector de la fuerza F y el vector del desplazamiento son antiparalelos; por tanto, el trabajo de esta fuerza F también es negativo

$$W_F = \vec{F} \bullet \vec{l} = Fl\cos 180^o = -(sen\theta - \mu_c\cos\theta)mgl.$$

Numéricamente, W_F=-810.2 J.

d) En cambio, el ángulo que forman los vectores peso y desplazamiento es 90º-θ (ver figura anterior), por lo que el trabajo es positivo

$$W_g = m\vec{g} \bullet \vec{l} = mgl\cos(\pi/2-\theta) = mglsen\theta.$$

Numéricamente, W_g=980.0 J.

e) El trabajo realizado por la fuerza neta es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas individuales. Convénzase el lector que este trabajo es nulo: $W = W_N + W_f + W_F + W_g = 0$. Este resultado es consistente con el teorema trabajo-energía cinética (ecuación (12)), pues al ser bajada la caja con velocidad constante su energía cinética no cambia.

←——— ←——— ←———

7.6 Potencia

Hasta aquí hemos calculado el trabajo que realiza una fuerza, pero no nos hemos preocupado por la rapidez con que se efectúa ese trabajo. Definimos a la potencia *P* como la rapidez a la que se efectúa el trabajo. En forma análoga a como definimos velocidad media y velocidad instantánea en el capítulo de Cinemática del Movimiento Rectilíneo, ahora lo hacemos para la potencia media y la potencia instantánea. La *potencia media* P_m desarrollada por un agente que ejerce una fuerza sobre un cuerpo es el trabajo total efectuado por esa fuerza dividido entre el lapso total *t*; es decir,

$$P_m = \frac{trabajo}{lapso} = \frac{W}{t}. \qquad (13)$$

La *potencia instantánea P* producida por un agente externo es la derivada respecto al tiempo del trabajo

$$P = \frac{dW}{dt}. \qquad (14)$$

La potencia instantánea representa a la rapidez con que el trabajo se realiza. En general, podemos escribir $Pdt=dW$. Cuando la potencia es constante, esta última expresión puede integrarse y se obtiene que

$$W=Pt. \qquad (15)$$

En la ecuación (9) se obtuvo que

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r},$$

pero la diferencial de trabajo es $dW = \frac{dW}{dt}dt$ y la diferencial de $\vec{r}$ es $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt$; por tanto, podemos escribir $\frac{dW}{dt}dt = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt}dt$ de donde resulta que

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}\,. \qquad (16)$$

Debido a que esta relación es un producto escalar, la potencia puede ser positiva, negativa o nula.

Como el trabajo total está relacionado con el cambio de la energía cinética, la potencia también representa la rapidez con que el cuerpo gana o pierde energía cinética.

La unidad de potencia en el sistema SI es el joule por segundo (J/s); a esta unidad se le llama watt, con símbolo W. Como lo sugiere la fórmula (15), el trabajo también puede expresarse en unidades de potencia-tiempo; este es el origen del término kilowatt-hora usado en los medidores que usa la compañía de electricidad. En el sistema inglés la unidad de potencia es la libra-pie/seg, aunque es más usual la unidad hp (hp=horse-power que algunos erróneamente llaman caballo de fuerza y otros correctamente llaman caballo de potencia), 1 hp=745.7 W.

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

Ejemplo 2. Supóngase que en el ejemplo anterior el tiempo invertido en bajar la caja es de 1 minuto. Calcular la potencia media desarrollada por cada fuerza.

Solución. Debido a que en el ejemplo 1 ya fue calculado el trabajo efectuado por cada fuerza, se puede aplicar la relación (13) para determinar la potencia media desarrollada por cada fuerza. Los resultados son:

$$P_N = \frac{W_N}{t} = 0, \quad P_f = \frac{W_f}{t} = \frac{-169.8J}{60s} = -2.8W\,,$$

$$P_F = \frac{W_F}{t} = \frac{-810.2J}{60s} = -13.5W\,, \quad P_g = \frac{W_g}{t} = \frac{980.0J}{60s} = 16.3W.$$

Otra manera de calcular la potencia es usando la relación (16). La velocidad con que la caja se desliza es un vector a lo largo del eje X y su magnitud es $v = \frac{l}{t}$. Los resultados son

$$P_N = \vec{N} \bullet \vec{v} = Nv\cos 90^o = 0\,, \quad P_f = \vec{f}_c \bullet \vec{v} = f_c v \cos 180^o = -\mu_c mg\frac{l}{t}\cos\theta\,,$$

$$P_F = \vec{F}\bullet\vec{v} = Fv\cos 180^o = -(sen\theta - \mu_c\cos\theta)mg\frac{l}{t},$$

$$P_g = m\vec{g}\bullet\vec{v} = mg\frac{l}{t}\cos(\pi/2-\theta) = mgsen\theta\frac{l}{t}.$$

$\longleftarrow \qquad \longleftarrow \qquad \longleftarrow$

Recapitulación

Una fuerza horizontal constante actúa sobre un cuerpo que se mueve en una línea recta horizontal. Cuando el cuerpo está en la posición x_1 tiene velocidad v_1, en la posición x_2 tiene velocidad v_2 y ha tenido un desplazamiento Δx. Por cinemática sabemos que $a = \frac{v_2{}^2 - v_1{}^2}{2\Delta x}$, pero por la segunda ley de Newton $a = \frac{F_x}{m}$. La fuerza multiplicada por el desplazamiento es igual al cambio que experimenta la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. Si los cambios son infinitesimales, entonces $F_x dx = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ **(4)**. En el primer miembro aparece la *causa* del movimiento (F_x) y su *efecto* (dx), en el segundo aparece el cambio de una propiedad instantánea del movimiento llamada *energía cinética* $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$. Suponer que el cuerpo se mueve sobre la misma pista, pero la fuerza forma un ángulo θ con la horizontal y las posiciones están señaladas con $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$; el desplazamiento es $\Delta\vec{r}$ y su magnitud es Δx. Como el resultado de trasladar el cuerpo es el mismo, entonces (4) sigue siendo válida, pero la acción del agente externo que se transforma en propiedad del movimiento del cuerpo ahora es $F\cos\theta$; entonces $\vec{F}\bullet d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ **(6)**.

Para una fuerza que depende de la posición, al expresar la segunda ley como $F=m\frac{dv}{dt}$ y multiplicar por v se obtiene $Fv=mv\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(½mv^2)$. Multiplicamos ambos miembros por dt $Fvdt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$; esta ecuación es $Fdx = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ **(7)**. Suponer ahora que la fuerza es función de x y de y, en la figura 7.3 se muestra la trayectoria del cuerpo en el plano XY. Multiplicar primero por $\vec{v}$ ambos miembros de la segunda ley de Newton y después por dt para obtener $\vec{F}\bullet\vec{v}dt = \frac{d}{dt}(½mv^2)dt$; i.e. $\vec{F}\bullet d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ **(8)**. Los resultados expresados en (4), (6), (7) y (8) tienen la misma forma matemática. El primer miembro de (8) lo definimos como la *diferencial de trabajo* (dW) realizado por la fuerza $\vec{F}$ al mover el cuerpo una diferencial de desplazamiento $d\vec{r}$; en el segundo miembro definimos la *diferencial de energía cinética* $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, dK. Con estas definiciones, (8) puede escribirse como $dW= \vec{F} \bullet d\vec{r} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dK$ **(9)**.

El trabajo efectuado por la fuerza constante es el producto de la fuerza a lo largo de la línea del movimiento (F o $F\cos\theta$) y la magnitud del desplazamiento (s). En estos dos casos de una fuerza constante, el valor numérico de la integral de dW representa el área de la gráfica de la fuerza y el eje X. Para efectuar la integral de dW la función $F(x)$ debe conocerse explícitamente. La figura 7.5 representa una función $F(x)$ arbitraria, donde el área bajo la curva de la fuerza y el eje X representa al trabajo. Análogamente, si la fuerza aplicada depende de la posición en dos dimensiones, la función $\vec{F}(x, y)$ debe conocerse. Al aplicar una fuerza sobre una partícula se produce trabajo, la velocidad de la partícula cambia y su energía cinética también. A este cambio en la energía cinética lo representamos como $\Delta K=K_2-K_1=\left(\frac{mv_2{}^2}{2}\right)-\left(\frac{mv_1{}^2}{2}\right)$.

La relación (9) es $W=\Delta K=K_2 - K_1 = \frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2$. Significa que el trabajo producido por la *fuerza neta* que actúa sobre una partícula es igual al cambio en su energía cinética. Este es el Teorema trabajo-energía cinética.

La potencia es la rapidez a la que se efectúa el trabajo. La *potencia media* P_m desarrollada por una fuerza sobre un cuerpo es el trabajo total efectuado por esa fuerza dividido entre el lapso $P_m = \frac{trabajo}{lapso} = \frac{W}{t}$. La *potencia instantánea P* producida por un agente externo es la derivada respecto al tiempo del trabajo $P=\frac{dW}{dt}$. Usando la diferencial de trabajo y la diferencial de $\vec{r}$ en (9), podemos escribir $\frac{dW}{dt}dt=\vec{F}\bullet\frac{d\vec{r}}{dt}dt$ de donde resulta que $P=\frac{dW}{dt}=\vec{F}\bullet\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\bullet\vec{v}$. La potencia también representa la rapidez con que el cuerpo gana o pierde energía cinética.

Problemas

1. Un bloque de masa m = 5 kg es impulsado con una velocidad inicial de 10 m/s sobre una superficie horizontal, habiendo un coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie de μ_c = 0.4. Determinar a qué distancia llegará el bloque hasta detenerse. Determinar la energía cinética perdida.

2. Una caja voluminosa de masa m = 20 kg inicialmente en reposo se empuja una distancia d = 10 m por un piso horizontal y rugoso, con una fuerza aplicada horizontal constante $\vec{F}$ (F = 200 N). Si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso es μ_c = 0.5 y g=10 ms^{-2}, determinar a) el trabajo realizado por la fuerza aplicada $\vec{F}$, b) la energía cinética perdida, c) el

trabajo realizado por la fuerza normal, d) el trabajo realizado por la gravedad, e) el cambio de energía cinética de la caja y f) la rapidez final de la caja.

3. Se utiliza una cuerda para bajar verticalmente un bloque de masa M, que estaba en reposo, con una aceleración constante hacia abajo de magnitud g/4. Cuando el bloque ha bajado una distancia D, determinar a) el trabajo que la fuerza de la cuerda realiza sobre el bloque, b) el trabajo que la fuerza gravitacional realiza sobre el bloque, c) la energía cinética del bloque y d) la rapidez del bloque.

4. Un bloque de 250 g se deja caer sobre un resorte vertical que tiene una constante de fuerza k=2.5 N/cm. El bloque se pega al resorte, y el resorte se comprime 10 cm antes de alcanzar el reposo momentáneamente. Cuando el resorte ha sido comprimido, ¿cuánto trabajo efectúan a) la fuerza de gravedad y b) el resorte? c) Calcular la velocidad del bloque inmediatamente antes de estar en contacto con el resorte.

5. Un obrero empuja una caja de 50 kg por un plano inclinado a θ=45° aplicando una fuerza $\vec{F}$ paralela al plano inclinado y con el que la fricción es despreciable. Cuando la caja se ha deslizado 4 m hacia arriba a velocidad constante, calcular a) la magnitud de la fuerza aplicada por el obrero, b) el trabajo realizado por el obrero, c) el trabajo realizado por la fuerza de gravedad y d) el trabajo realizado por la fuerza normal que ejerce el plano inclinado.

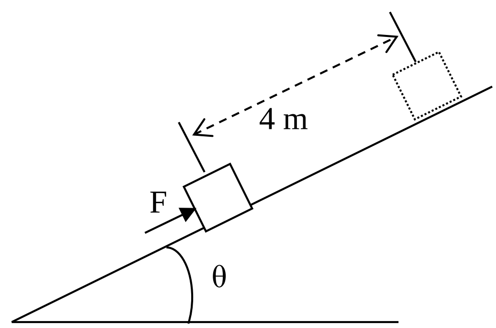


Figura 7.6. Problemas 5 y 6.

6. Un obrero empuja una caja de 50 kg por un plano inclinado a θ=25° aplicando una fuerza $\vec{F}$ paralela al plano inclinado de manera que la caja se mueve con velocidad constante. El coeficiente de fricción entre la caja y el plano es $\mu_c = 0.1$. Cuando la caja se ha deslizado 4 m hacia arriba, como se observa en la figura 7.6, calcular a) el trabajo realizado por el obrero, b) el trabajo realizado por la fuerza de gravedad y c) el trabajo realizado por la fuerza normal que ejerce el plano inclinado.

7. Durante las operaciones de salvamento tras un pasado "tsunami" en Indonesia, se rescató con helicóptero y mediante un cable a una persona desde la superficie del mar. El helicóptero se estacionó a 15 m de la superficie del mar, la persona rescatada, cuya masa es de 60 kg, llegó a la aeronave con una rapidez constante de 2 m/s. a) ¿Qué trabajo hizo la fuerza de gravedad sobre la persona? b) ¿Cuál fue la tensión del cable al realizar esta operación? c) Obtener el trabajo y la potencia desarrollada por el cable sobre la persona.

8. Un bloque de hielo de masa *m* se desliza hacia abajo por un plano inclinado de longitud *s* y de altura *h*. Un obrero lo empuja (hacia arriba) paralelamente al plano inclinado de modo que el bloque se deslice hacia abajo a velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el plano inclinado es μ. Usar m=50 kg, s=2.00 m, h=1.00 m y μ=0.10. Calcular a) la fuerza ejercida por el obrero, b) el trabajo efectuado por el obrero sobre el bloque de hielo, y c) el trabajo efectuado por la gravedad sobre el bloque de hielo.

9. Un baúl de 55 kg se empuja hacia arriba sobre un plano inclinado a 28º respecto de la horizontal, una distancia de 5 m y con una velocidad constante de 1.5 m/s. La dirección de la fuerza con que se empuja al bloque es paralela al plano. El coeficiente de fricción cinética entre el baúl y el plano es de μ_c = 0.2. Calcule el trabajo hecho por a) la fuerza aplicada, b) la gravedad, c) el plano inclinado, (d) y la fuerza de fricción. e) ¿Cuál es la potencia desarrollada por la fuerza aplicada?

10. Un bloque de masa *m* se encuentra sobre una superficie horizontal, con un coeficiente de fricción cinética μ_c entre ambos. El bloque inicialmente está en reposo, apoyado contra un resorte de constante k comprimido por una distancia l. Al descomprimirse el resorte, el bloque sale despedido y recorrerá una cierta distancia hasta quedar en reposo debido a la fuerza de fricción. Aplicando el teorema trabajo-energía cinética, calcule la distancia total que se desplaza el bloque a partir de su posición inicial.

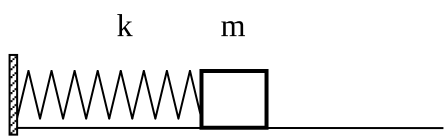


Figura 7.7. Problema 10.

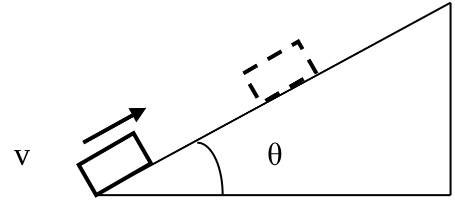
11. Un elevador de 100 kg lleva a dos personas, una de 70 kg y la otra de 55 kg. Sube del segundo al quinto piso, una diferencia de altura de h = 10 m, a una velocidad constante de v = 1.0 m/s.

a) ¿Qué trabajo realiza la tensión del cable que sostiene al elevador?
b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de gravedad?
c) ¿Qué potencia desarrolla la tensión del cable?

12. ¿Qué potencia desarrolla un gimnasta de 70 kg que asciende por una cuerda vertical de 10 m de longitud, en un tiempo de 12 s con rapidez constante?

13. Un bloque de masa m colocado en la base de un plano inclinado de ángulo θ = 30º, con un coeficiente de fricción cinética de 0.25, se lanza hacia arriba del plano inclinado con una velocidad inicial de 6 m/s. Por medio del teorema del trabajo y la energía cinética, encuentre la distancia recorrida por el bloque hasta llegar al reposo.

Figura 7.8. Problema 13.



14. Un obrero empuja hacia arriba una caja por una rampa larga (un plano inclinado) a velocidad constante. La inclinación del plano es de $\theta = 15°$ por arriba de la horizontal, la masa de la caja es de 25 kg. El obrero ejerce una fuerza paralela al plano de 150 N a lo largo de 10 m ¿Cuánto trabajo se efectuó sobre la caja por a) el obrero?, b) la fuerza de gravedad?, c) la normal al plano? y d) la fuerza de fricción?

15. Un proyectil de masa m=0.05 kg se dispara con una rapidez v_0 = 720 m/s contra un saco de arena. Se observa que el proyectil se detiene dentro del saco después de viajar una distancia d= 0.25 m. Suponer que el proyectil se frena con aceleración constante. a) ¿Cuál es la desaceleración del proyectil? b) ¿Cuánto vale la fuerza de frenado sobre el proyectil? c) ¿Cuánta energía se disipó en el proceso de frenado? d) ¿Qué potencia se desarrolló en el proceso de frenado?

16. Se empuja un carrito de supermercado con una fuerza constante de 40 N dirigida 20º por debajo de la horizontal, el resultado es que se mueve con una velocidad constante de 0.5 m/s sobre el pasillo. ¿Qué potencia desarrolla la persona que empuja el carrito?

17. Una carretilla es empujada sobre el suelo una distancia de 8 m, con una fuerza de 100 N pero dirigida 30º hacia abajo de la horizontal durante un tiempo de 10 s.
a) ¿Cuánto trabajo mecánico se realiza sobre la carretilla?
b) ¿Qué potencia se desarrolla?
c) ¿Cuánto trabajo hace la fuerza normal a la superficie?

18. Se quiere subir una caja de masa m a un transporte de carga usando un plano inclinado. Un obrero aplica a la caja una fuerza $\vec{F}$, a través de una cuerda, paralela al plano de manera que la caja sube con velocidad constante. El plano inclinado forma un ángulo θ con la horizontal y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y la caja es μ_c. La caja se desliza sobre el plano una distancia l. Considerar θ=30º, m=100 kg, μ_c=0.1 y l=2 m. Calcular el trabajo realizado por a) la fuerza normal, b) la fuerza de fricción, c) la fuerza F, d) el peso y e) la fuerza neta.

19. Supóngase que en el problema anterior el tiempo invertido en subir la caja es de 1 minuto. Calcular la potencia media desarrollada por cada fuerza.

20. Un bulto de 59 kg descansa sobre un piso horizontal. ¿Cuánto trabajo se necesita para moverlo con una rapidez constante cuando se le desplaza: a) 12 m horizontalmente a lo largo del piso con una fuerza de fricción de 150 N y b) 12 m verticalmente?

8 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Usando los conceptos de energía cinética y trabajo se analizan algunas fuerzas y se llega a su clasificación en fuerzas conservativas y no conservativas. Como consecuencia, se define la energía potencial la cual sumada con la energía cinética constituye la ley de la conservación de la energía mecánica. También se da un ejemplo de una fuerza no conservativa.

Introducción

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética se sabe que el trabajo producido por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de dicha partícula. En forma matemática este teorema se expresa como

$$W=\int_1^2 \vec{F}\bullet d\vec{r} = K_2 - K_1 = \Delta K. \qquad (1)$$

Como esta fuerza es la suma de las fuerzas, $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_N$, entonces el trabajo total producido por estas fuerzas es $W=W_1+W_2+\ldots+W_N$. Estas N fuerzas podemos clasificarlas en dos categorías como fuerzas conservativas o fuerzas no conservativas, a través de este teorema.

8.1 Fuerzas conservativas

Energía cinética. Supongamos que un resorte ideal (sin masa y que cumple con la ley de Hooke) está colocado sobre una superficie horizontal carente de fricción. Un bloque de masa m se mueve con velocidad constante v_0 hacia el resorte, en la línea de éste; el bloque hace contacto con el resorte en la posición x=0 (línea de trazos de la figura 8.1); lo comprime hasta la posición x_1 donde el bloque adquiere instantáneamente velocidad cero; después el resorte lo hace regresar a la posición x=0 donde el bloque pierde contacto con el resorte, el bloque recupera su velocidad inicial v_0 y su movimiento es en la misma línea original pero en sentido opuesto.

Primero se analizará el lado derecho de la relación (1). Mientras el bloque se dirige hacia el resorte y en el momento que hace contacto con el resorte (figura 8.1(a)) su energía cinética es $K_a=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$. Cuando el bloque ha comprimido al resorte por la cantidad x_1 (figura 8.1(b)) su velocidad instantáneamente es nula y, por tanto, su energía cinética también es nula, K_b=0. En este momento el bloque empieza a moverse hacia la posición de equilibrio del resorte, aumentando su velocidad; cuando el contacto con el resorte se pierde el valor de su velocidad nuevamente es v_0 y, por tanto, su energía cinética vuelve a tener el valor que inicialmente tenía, $K_c=K_a$. El bloque ha realizado un viaje de ida y de regreso donde, al inicio y al final del contacto con el resorte, el valor de la energía cinética es el mismo. Se enuncia que si la energía cinética al inicio y al final del viaje de ida y de regreso es la misma, entonces la fuerza es conservativa (la fuerza del resorte en este caso).

$K_a = \frac{1}{2} m v_0^{\;2}$ (a)

$W_{ab} = -\frac{1}{2} k x_1^{\;2}, \quad K_b=0$ (b)

$W_{bc} = \frac{1}{2} k x_1^{\;2}, \quad K_c = \frac{1}{2} m v_0^{\;2}$ (c)

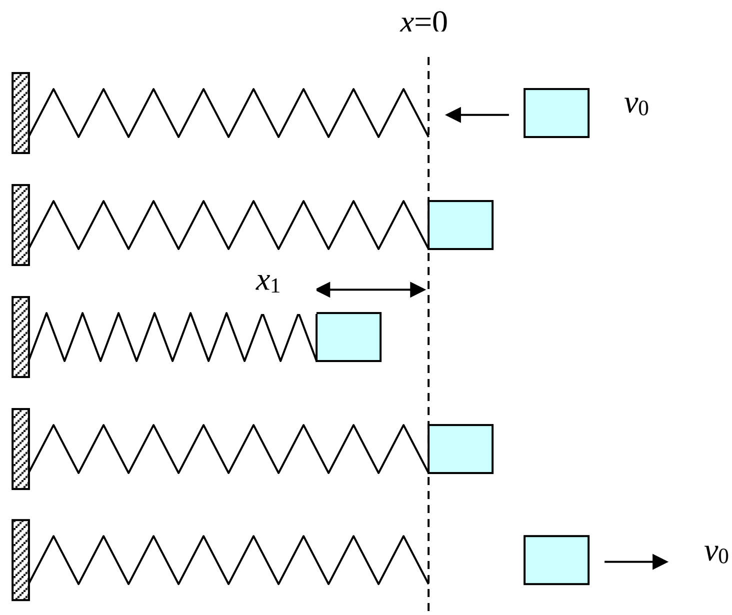


Figura 8.1. El bloque se mueve hacia el resorte, entra en contacto con él en x=0 y lo comprime hasta x_1; luego el resorte lo regresa.

Trabajo. Primero se calculará, en general, el trabajo (W_r) realizado por un resorte ideal al mover a un objeto desde una posición inicial arbitraria x_i hasta otra posición final arbitraria x_f. Si se mide la posición x a partir de la posición de equilibrio del resorte, la fuerza que ejerce el resorte sobre la partícula es $-kx$, cuando ésta se encuentra en la posición x. El resultado de calcular el trabajo es

$$W_r = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} -kxdx = \left(\frac{-k}{2}\right)\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2}k\left[(x_f)^2 - (x_i)^2\right] = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2}.$$

El valor del trabajo realizado por el resorte puede ser positivo, negativo o nulo, dependiendo de los valores de las posiciones x_i y x_f. Es positivo si la partícula termina más cerca de la posición de equilibrio de lo que estaba inicialmente (es decir, si $x_f<x_i$), es negativo si termina más alejada, y es cero si las posiciones son iguales.

Ahora se analizará el lado izquierdo de la ecuación (1) usando el mismo sistema mostrado en la figura 8.1. El trabajo que realiza el resorte al pasar de la posición x=0 a la posición x=-x_1 (es decir, de la configuración (a) a la configuración (b) de la figura 8.1) es

$$W_{ab} = \int_0^{-x_1} -kxdx = -\frac{1}{2}k[(-x_1)^2 - 0] = -\frac{1}{2}kx_1^{\,2}.$$

Para regresar la partícula a su posición x=0 (de la configuración (b) a la configuración (c) de la figura 8.1), el trabajo que realiza el resorte es

$$W_{bc} = \int_{-x_1}^{0} -kxdx = -\frac{1}{2}k[0-(-x_1)^2] = \frac{1}{2}kx_1^{\,2}.$$

El resultado que se obtiene es que el trabajo total realizado por el resorte en el viaje de ida y de regreso es W_{ab}+W_{bc}=0. Este resultado es consistente con el obtenido para el cambio en la energía cinética, como debe ser pues la relación (1) se cumple. Podemos decir que *una fuerza es conservativa si el trabajo hecho por la fuerza para mover a una partícula es cero, al realizar un viaje de ida y de regreso*; si esto no sucede, la fuerza es no conservativa.

Trabajo independiente de la trayectoria. Continuemos usando el sistema mostrado en la figura 8.1. Ahora se calculará el trabajo que efectúa el resorte para llevar a la partícula de la posición x=0 a la posición x=-x_1/2, pero a través de dos trayectorias. En la trayectoria 1 la partícula viaja directamente entre estas dos posiciones; el trabajo es

$$W_1 = \int_0^{-x_1/2} -kxdx = -\frac{1}{2}k[(-x_1/2)^2 - 0] = -\frac{1}{8}kx_1^{\,2}.$$

En la trayectoria 2 la partícula viaja primero de la posición x=0 a la posición x=-x_1 y después regresa de la posición x=-x_1 a la posición x=-x_1/2. El trabajo es

$$W_2 = \int_0^{-x_1} -kxdx + \int_{-x_1}^{-x_1/2} -kxdx = -\frac{1}{2}k[(-x_1)^2 - 0] + \left(-\frac{1}{2}k[(-x_1/2)^2 - (-x_1)^2]\right)$$

$$W_2 = -\frac{1}{2}kx_1^{\,2} + \left(-\frac{1}{2}k[-3x_1^{\,2}/4]\right) = -\frac{1}{8}kx_1^{\,2}.$$

El resultado que se obtiene para las dos trayectorias es el mismo. Podemos enunciar que: *una fuerza es conservativa si el trabajo hecho por ella sobre una partícula que se mueve entre dos* *puntos depende únicamente de estos puntos, pero no de la trayectoria seguida*. Si esto no se cumple, entonces la fuerza es no conservativa.

Fuerza de gravedad. A partir de los estudios de cinemática en dirección vertical se sabe que cuando una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 y si el aire no opone resistencia, es decir en el vacío, al regresar la partícula a la misma posición del lanzamiento tiene una velocidad de magnitud v_0 (con sentido hacia abajo). La posición vertical como función del tiempo es $z = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \left(v_0 - \frac{gt}{2}\right)t$ y su velocidad en cualquier tiempo es $v = v_0 - gt$; en el tiempo t=0 la partícula está en z=0 pues ahí es lanzada, en el tiempo $t_1 = \frac{2v_0}{g}$ regresa a z=0 con velocidad $v_1 = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = -v_0$. Esto quiere decir que la energía cinética de la partícula al regresar a su posición vertical inicial es igual a la energía cinética que tenía en el momento de su lanzamiento. Esto es, la fuerza de gravedad también es una fuerza conservativa.

Como la fuerza de gravedad es conservativa, el trabajo que ella realiza debe ser independiente de la trayectoria. Supóngase que, debido a la acción de la fuerza de gravedad, una partícula baja desde una posición *a* hasta una posición *b*, las cuales no están sobre la misma línea vertical. La partícula hace el viaje usando dos posibles trayectorias, como ilustra la figura 8.2.

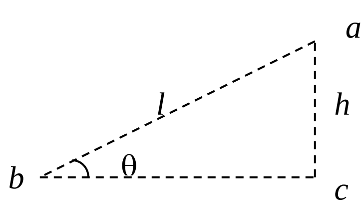


Figura 8.2. La partícula baja de la posición *a* a la posición *b* por la acción de la gravedad.

Trayectoria 1. La partícula baja en línea recta de *a* a *b*, lo cual podría ser sobre un plano inclinado sin fricción. La componente de la fuerza de gravedad a lo largo de la línea *ab* es $mgsen\theta$ y el desplazamiento es *l*, por lo que el trabajo es W_1=$mglsen\theta$; por tanto W_1=mgh.

Trayectoria 2. Ahora la partícula se mueve por la trayectoria *acb*. El trabajo que hace la fuerza de gravedad para llevar a la partícula de *a* a *c* es *mgh* pues la fuerza y el desplazamiento son vectores paralelos; en cambio, el trabajo de la fuerza de gravedad para llevar la partícula de *c* a *b* es nulo pues los vectores de la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares. Encontramos que el trabajo es $W_2=mgh$, el mismo valor del trabajo obtenido en la trayectoria 1. El trabajo sólo depende de los puntos inicial y final porque la fuerza de gravedad es conservativa.

En este momento ya conocemos dos fuerzas conservativas: la fuerza producida por un resorte ideal y la fuerza de gravedad (fuerza gravitacional).

Independencia de la trayectoria

En general, la independencia de la trayectoria que tiene el trabajo producido por una fuerza conservativa puede ser visualizada con ayuda de la figura 8.3. La partícula en la figura se mueve desde el punto *a* hasta el punto *b* siguiendo la trayectoria 1, luego regresa al punto *a* por la trayectoria 2.

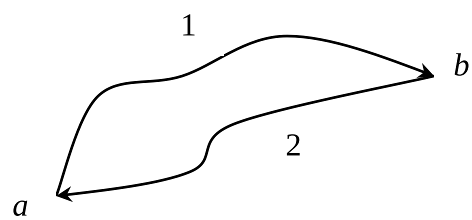


Figura 8.3. Una partícula viaja del punto *a* al punto *b* siguiendo la trayectoria 1, luego regresa al punto *a* por la trayectoria 2.

Como el trabajo total es cero (pues la partícula regresa al punto de partida), $W_{ab,1}+W_{ba,2}=0$; de donde se obtiene que

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2}$$

Ahora suponer que la partícula se mueve desde el punto *a* hasta el punto *b* siguiendo la trayectoria 2 y luego regresa al punto *a* por la misma trayectoria 2. Como el trabajo total es cero, $W_{ab,2}+W_{ba,2}=0$; de donde se sigue que

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2}\,.$$

Juntando estos dos resultados se obtiene que

$$W_{ab,1}=W_{ab,2}.$$

Este resultado se escribe matemáticamente como

$$\int_{a,1}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{a,2}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \qquad (2)$$

El trabajo producido por una fuerza conservativa en un circuito cerrado también se expresa matemáticamente como

$$\oint \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0.$$

8.2 **Energía potencial**

Regresemos otra vez al sistema sin fricción mostrado en la figura 8.1. La configuración (la geometría) del sistema formado por el resorte deformado y la masa cambia de punto a punto; por ejemplo, al pasar de la configuración (a) donde el resorte está en su estado normal a la configuración (b) donde el resorte está comprimido y el bloque está momentáneamente en reposo, la longitud del resorte debido a la compresión es diferente en cada punto intermedio en que se encuentra la masa. Al pasar de (a) a (b), el valor del trabajo pasó de cero en (a) al valor $W_{ab} = -\frac{1}{2}kx_1^{\ 2}$ en (b), mientras que la energía cinética pasó de $K_a = \frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$ a K_b=0. Esto quiere decir que al ir disminuyendo la energía cinética del bloque y al ir cambiando la configuración del sistema, está apareciendo una energía asociada a la configuración del sistema.

La *energía de configuración* o *energía potencial*, representada por el símbolo U, se define como la energía almacenada en el sistema a causa de la posición relativa (o configuración) de las partes del sistema. Se define la diferencial de la energía potencial dU como el negativo de la diferencial de trabajo, $-dW$ (es decir, $dU = -dW$). Al integrar estas diferenciales se obtiene el cambio en la energía potencial ΔU, correspondiente a un cambio finito en la configuración del sistema, el resultado es

$$\Delta U = -W \qquad (3)$$

Esta relación (3) significa que el cambio en la energía potencial durante el proceso es igual al negativo del trabajo efectuado por la fuerza conservativa. Esta relación proporciona la manera de calcular el cambio en U.

Por otra parte, el teorema trabajo-energía cinética, representado por la ecuación (1) establece que $W = \Delta K$; pero a partir de (3) se obtiene que $W = -\Delta U$, por lo que $\Delta K = -\Delta U$, es decir

$$\Delta K + \Delta U = 0. \qquad (4)$$

Esta ecuación (4) establece que, *en un sistema donde actúen solamente fuerzas conservativas, cualquier cambio en la energía cinética resulta en un cambio igual en magnitud pero de signo opuesto en la energía potencial*.

En el ejemplo que se ha estado considerando (ver figura 8.1), al pasar de la configuración (a) a la configuración (b) el trabajo fue $W_{ab} = -\frac{1}{2}kx_1^{\,2}$. Por tanto, el cambio en la energía potencial según la ecuación (3) (válida solamente para fuerzas conservativas) es $\Delta U = -W = -W_{ab} = \frac{1}{2}kx_1^{\,2}$. Por otra parte, según el teorema trabajo-energía cinética representado por la ecuación (1) (el cual es válido en general), el cambio en la energía cinética del bloque es $\Delta K = W = W_{ab} = -\frac{1}{2}kx_1^{\,2}$. Al sumar estas dos expresiones se cumple la ecuación (4).

Es importante recalcar que el teorema trabajo-energía cinética (representado en la ecuación (1)) es válido para todo tipo de fuerzas, mientras que la ecuación (3) solamente es válida para fuerzas conservativas. Dicho en otras palabras, *la energía potencial sólo tiene significado para fuerzas conservativas*.

8.3 Sistemas conservativos unidimensionales

La relación (4) también puede ser expresada como

$$\Delta(U+K)=0. \qquad (5)$$

Lo cual significa que para los procesos que involucran fuerzas conservativas, el cambio total en la cantidad $U+K$ es cero; es decir, $U+K$ es una constante durante el movimiento a que está sometido el sistema. Esta constante representada por E es la energía mecánica del sistema conservativo:

$$U+K=E. \qquad (6)$$

Esta ecuación representa la *conservación de la energía mecánica*. En cualquier sistema aislado donde actúan sólo fuerzas conservativas la energía puede ser transferida de cinética a potencial y viceversa, pero el cambio en la energía total es cero; la suma de las energías cinética y potencial permanece constante.

Debido a que la energía potencial depende de la configuración del sistema, es decir de la forma en que estén colocadas las partes del sistema, ahora nos interesa conocer la energía potencial como una función de la posición. Para el caso de una dimensión, expresamos la diferencial de trabajo (dW) que produce una fuerza dependiente de la posición ($F(x)$) al mover el cuerpo una diferencial de desplazamiento (dx), y usamos la definición de la energía potencial (la ecuación (3) la cual indica que $dU = -dW$); esto es

$$dU = -dW = -F(x)dx. \qquad (7)$$

Como $dU = \frac{dU}{dx}dx$, entonces podemos escribir

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}. \qquad (8)$$

Esta ecuación indica que la energía potencial también es una función de la posición, tal que el negativo de su derivada respecto a la posición es la fuerza.

Al integrar la ecuación (7) entre los límites x_0 y x para la posición, se obtiene

$$U(x)-U(x_0)=\Delta U=-W = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx. \qquad (9)$$

Esta ecuación indica que sólo se puede calcular ΔU cuando la fuerza F dependa únicamente de la posición de la partícula (o sea, de la configuración del sistema).

Si se considera a x_0 como un punto de referencia arbitrario, entonces se puede obtener en general la función $U(x)$. Se tiene la libertad de escoger el valor de $U(x_0)$ como mejor convenga ya que sólo los cambios de la energía potencial son significativos y $U(x_0)$ representa un valor fijo. Se acostumbra, arbitrariamente, asignar el nivel cero de energía potencial, $U(x_0)=0$, cuando la partícula se encuentra en el punto de referencia x_0.

Debido a que la energía potencial depende de la posición y que el valor de la posición depende del sistema de referencia inercial en que se mida, los valores asignados a la energía potencial también dependen del sistema inercial usado. Aunque estos valores sean diferentes para observadores inerciales diferentes, los observadores encontrarán que el cambio en la energía potencial ΔU tiene el mismo valor. El mismo comentario puede hacerse respecto a la energía cinética pues depende de la velocidad y ésta, a su vez, depende del sistema inercial en que sea medida. Análogamente, los observadores en cada sistema inercial encontrarán que la relación $U+K=E$ se satisface.

Al cambiar la configuración del sistema, es decir, al moverse la partícula desde un estado representado por la posición x_1 hasta otro representado por x_2, su velocidad cambia desde el valor v_1 hasta el valor v_2. De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética se tiene que

$$W=\Delta K=K_2-K_1=\frac{1}{2}mv_2^{\,2}-\frac{1}{2}mv_1^{\,2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10a)$$

Por su parte la ecuación (9) establece que el cambio en la energía potencial entre esos dos estados es

$$-W=\Delta U=U_2-U_1=U(x_2)-U(x_1). \qquad (10b)$$

Al sumar miembro a miembro estas dos expresiones (10a) y (10b) se obtiene que

$$0=\Delta K+\Delta U=K_2-K_1+U_2-U_1=(K_2+U_2)-(K_1+U_1).$$

Este resultado significa que la suma de la energía cinética más la energía potencial tiene el mismo valor en el estado 1 y en el estado 2. Si a esta suma se le llama E y se quitan los subíndices en la expresión anterior, se puede escribir la siguiente expresión para un estado general

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x)=E\,. \qquad (11)$$

Esta es la *ley de conservación de la energía mecánica total* para cuando las fuerzas en el sistema son conservativas. Esta ecuación involucra solamente a la posición y a la velocidad, en ella no aparecen la fuerza ni la aceleración. Ahora ilustraremos el cálculo de la energía potencial para las dos fuerzas conservativas que ya conocemos.

Fuerza de gravedad y la energía potencial asociada. Una partícula de masa m se encuentra en las cercanías de la superficie de la Tierra. Se escoge el sistema de coordenadas con el eje Y positivo hacia arriba. Se elige el nivel cero de la energía potencial en la posición y=0, es decir $U(y=0)=0$; esta posición se puede escoger en el suelo, sobre la mesa o en cualquier altura, pues en las cercanías de la superficie terrestre la aceleración de la gravedad es constante. Usando la ecuación (9) podemos calcular la función $U(y)$ al sustituir $F(y)=-mg$, se obtiene

$$U(y)=-\int_0^y -mg\,dy=mgy. \qquad (12)$$

Al graficar $U(y)$ como función de y se obtiene una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente es mg. Al aplicar la ecuación (8) a $U(y)$ se obtiene que la fuerza es

$$F(y) = -\frac{dU}{dy} = -mg\,. \tag{13}$$

Si la partícula se mueve desde una altura h_1 hasta una altura h_2, en cuyas posiciones las velocidades son v_1 y v_2, la relación (11) conduce a

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + mgh_2 = E\,. \tag{14}$$

Fuerza del resorte y la energía potencial asociada. Escogemos la posición de referencia x_0=0 en el estado normal del resorte, es decir, cuando no ejerce fuerza sobre la partícula, y escogemos que $U(x_0)$=0 en esa posición. Usando la ecuación (9) con $F(x) = -kx$ podemos calcular la función $U(x)$, se obtiene

$$U(x) = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{15}$$

Al aplicar la ecuación (8) a $U(x)$ se obtiene la fuerza del resorte

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx\,. \tag{16}$$

La gráfica de la fuerza $F(x)$ como una función de x es una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente es $-k$, como lo ilustra la figura 8.4. La compresión y la elongación máximas del resorte están representadas con $-x_1$ y x_1, respectivamente; para elongaciones mayores el resorte puede cambiar sus características, por ejemplo su longitud en el estado no deformado puede quedar alterada.

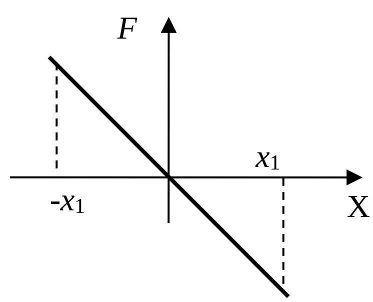


Figura 8.4. La fuerza producida por un resorte ideal.

Si la partícula se mueve desde una posición x_2 hasta una posición x_3, en cuyas posiciones las velocidades son v_2 y v_3, la relación (11) conduce a

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2+\frac{1}{2}kx_2{}^2=\frac{1}{2}mv_3{}^2+\frac{1}{2}kx_3{}^2=E\,. \qquad (17)$$

La gráfica de $U(x)$ (ecuación (15)) como función de x es una parábola que pasa por el origen y es simétrica respecto al eje de las ordenadas, ilustrada en la figura 8.5. La curva de la energía potencial tiene un mínimo en x=0. Al moverse la partícula desde esta posición, su velocidad disminuye al acercarse ya sea a $-x_1$ o a x_1; la partícula se detiene instantáneamente en estos puntos, donde su velocidad es nula; a estos puntos se les llama *puntos de retorno*. En la región del lado izquierdo del mínimo, la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto es negativa ($\frac{dU}{dx}<0$); por tanto, la fuerza que actúa sobre la partícula está dirigida hacia la derecha (F>0), hacia la posición de equilibrio. En cambio, cuando la partícula se encuentra a la derecha del mínimo, donde la pendiente de la recta tangente es positiva, la fuerza es hacia la izquierda (hacia la posición de equilibrio), como indica la ecuación (16).

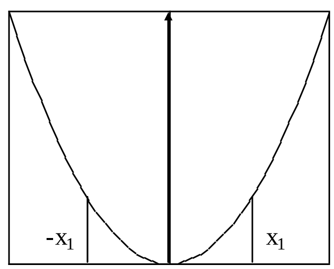


Figura 8.5. La energía potencial de un resorte ideal es una parábola.

Sistema con dos fuerzas conservativas. Ahora que ya conocemos dos fuerzas conservativas (la de gravedad y la del resorte ideal), se puede escoger un sistema que las incluya. Un ejemplo de un sistema con estas características es el de una masa unida al extremo inferior de un resorte ideal colocado en posición vertical, como ilustra la figura 8.6.

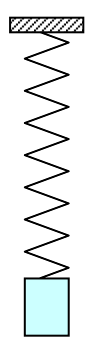


Figura 8.6. Sistema resorte-masa en posición vertical.

Sobre la masa actúan la fuerza del resorte y la de gravedad. Cuando el resorte es comprimido o estirado y luego soltado, estas fuerzas realizan trabajo. Usando la ecuación (3) ($\Delta U=-W$, W es el trabajo total producido por estas dos fuerzas) se puede asociar un cambio de la energía potencial con el trabajo efectuado por cada fuerza; por tanto, la ecuación (4) se transforma en

$$\Delta U_{\text{resorte}}+\Delta U_{\text{gravedad}}+\Delta K=0. \qquad (4')$$

donde aparece la energía potencial asociada a cada fuerza conservativa. Por su parte la ecuación (6) se convierte en

$$U_{\text{resorte}}+U_{\text{gravedad}}+K=E. \qquad (6')$$

Ejemplo 1. Un resorte ideal de constante k se encuentra en la parte inferior y a lo largo de un plano inclinado. Un bloque de masa m es soltado desde lo alto del plano inclinado, siendo el ángulo θ la inclinación del plano. El bloque llega momentáneamente al reposo después de haber comprimido al resorte una longitud l. No hay fricción entre el bloque y el plano inclinado.

a) ¿Cuánto se movió el bloque hacia abajo a lo largo del plano?

b) ¿Cuál era la velocidad del bloque en el momento en que toca al resorte?

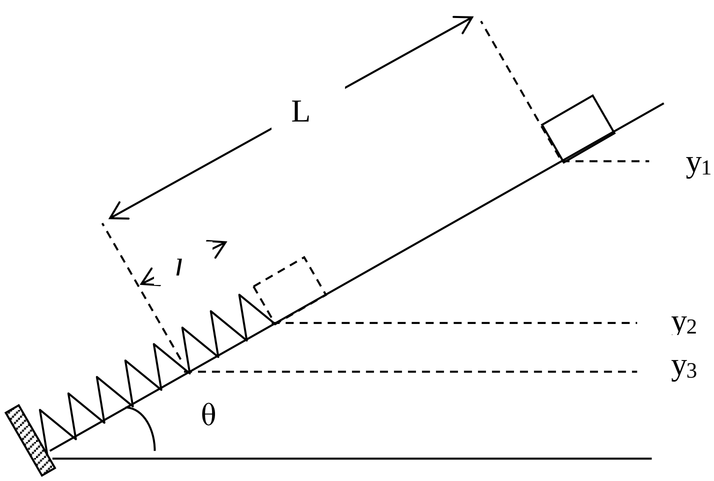


Figura 8.7. Ejemplo 1.

Solución. Debido a que en el movimiento del sistema sólo la fuerza de gravedad y la del resorte están involucradas, la energía mecánica total se conserva. Usando la coordenada vertical Y positiva hacia arriba, calculemos la energía en tres puntos sobre el plano inclinado: el primer punto es la posición inicial del bloque y está representada por la coordenada y_1 (ver la figura 8.7), el segundo punto tiene coordenada y_2 y representa la posición en que el bloque y el resorte entran en contacto, y el tercer punto con coordenada y_3 representa la posición en que el bloque se detiene momentáneamente. En todo momento la energía mecánica total (E) es la suma de la energía cinética del bloque (K) más la energía potencial asociada a la gravedad (U_g) más la energía potencial asociada al resorte (U_r), o sea $E = K + U_g + U_r$.

Escogemos el origen del eje Y en el nivel del tercer punto, es decir $y_3=0$. En este nivel la energía potencial gravitacional $U_g=0$ y la velocidad del bloque es nula $v_3=0$. Por tanto,

$$E_3 = K_3 + U_{g3} + U_{r3} = 0 + 0 + \frac{kl^2}{2} = \frac{kl^2}{2}.$$

La energía en la posición inicial del bloque es

$$E_1 = K_1 + U_{g1} + U_{r1} = 0 + mgy_1 + 0 = mgy_1 = mgLsen\theta.$$

En el punto de contacto entre el bloque y el resorte, la energía es

$$E_2 = K_2 + U_{g2} + U_{r2} = \frac{mv_2{}^2}{2} + mgy_2 + 0 = \frac{mv_2{}^2}{2} + mglsen\theta.$$

a) Para calcular la longitud L que recorre el bloque se usarán E_1 y E_3.

$$E_1 = E_3 \Rightarrow mgLsen\theta = \frac{kl^2}{2}.$$

Por tanto,

$$L = \frac{kl^2}{2mgsen\theta}.$$

b) Para calcular la velocidad del bloque cuando se produce el contacto se usarán E_1 y E_2.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgLsen\theta = \frac{mv_2{}^2}{2} + mglsen\theta.$$

Por tanto,

$$v_2 = \sqrt{2gsen\theta(L-l)}.$$

Este resultado depende del valor de L, calculado en el inciso anterior. La velocidad también puede calcularse usando E_3 y E_2, resultando $v_2 = \sqrt{\frac{kl^2}{m} - 2glsen\theta}$.

Es preferible usar este segundo resultado para la velocidad porque está expresado en términos de los datos.

8.4 Un sistema unidimensional conservativo arbitrario

Regresemos a la ecuación (11) que expresa la conservación de la energía mecánica, la cual hemos observado que involucra solamente a la posición (coordenada) y a la velocidad de la partícula, en ella no aparecen la fuerza ni la aceleración. Si se quisiera usar la segunda ley de Newton ($F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$), para calcular la velocidad se tendría que realizar una integral y que si se quisiera calcular la posición se tendría que integrar dos veces. Siendo E una constante, para conocer la posición sólo se tiene que realizar una integral. Es por ello que se dice que la ecuación (11) representa una *primera integral de movimiento*. Al despejar la velocidad de la ecuación (11) se obtiene

$$v^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(x)\right] \longrightarrow v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}$$

Al multiplicar ambos miembros por dt, observando que $vdt=dx$, separando las cantidades que dependen explícitamente de x y las que dependen del tiempo, e integrando entre los tiempos t_0 y t y la posición entre x_0 y x se obtiene

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}. \qquad (18)$$

El tiempo t_0 en esta ecuación corresponde a cuando la partícula se encuentra en la posición x_0. La integral del lado izquierdo da directamente el tiempo. En cambio, para realizar la integral del lado derecho deben conocerse el valor de E y la función $U(x)$; el signo que se tome en la raíz cuadrada depende de si la velocidad apunta hacia la dirección de x positiva o negativa. Esta ecuación indica que para que el movimiento de la partícula tenga realidad física debe cumplirse que $E \geq U(x)$; es decir, la región de los valores permitidos de x está restringida, pues la energía cinética de la partícula siempre es una cantidad positiva.

Curva de una función $U(x)$ arbitraria

Para una función $U(x)$ arbitraria y un valor fijo de E, se puede hacer una descripción cualitativa de los tipos de movimientos posibles al hacer una gráfica de $U(x)$ vs x. La figura 8.8 muestra una curva de energía potencial $U(x)$ arbitraria en función de x, en ella se han representado diferentes valores constantes de la energía total E. En cualquier posición x debe cumplirse que $E \geq U(x)$ y que $E=K+U$, como se ilustra en la posición x_4. Si E_0 es el valor de E más pequeño, para este valor se tiene que $E=E_0=U$, en este caso $K=0$ en x_0, ahí la partícula está en reposo. Si la partícula tuviera un valor E_1 más grande, se podría mover entre las posiciones x_1 y x_2, por lo que habrían 2 puntos de retorno. Para la energía E_2 existen 4 puntos de retorno, la partícula puede moverse en cualquiera de los dos valles de potencial, pero no tiene la energía suficiente para pasar de un valle al otro. Para la energía E_3 sólo hay un punto de retorno en x_3. Para una energía mayor que E_4 no hay punto de retorno.

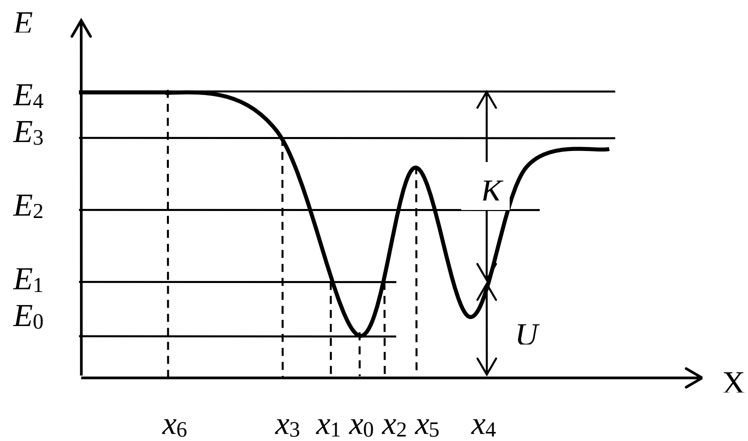


Figura 8.8. Curva de una función potencial arbitraria que exhibe un máximo y dos mínimos.

En los puntos donde la energía potencial tiene un *mínimo*, la pendiente de la recta tangente en ese punto es nula; la fuerza en ese punto es cero, de acuerdo con la ecuación (8). Si la partícula es desplazada ligeramente desde esta posición del mínimo y soltada, la fuerza tiende a regresarla; se dice que el mínimo es un punto de *equilibrio estable*. Por el contrario, en los puntos donde U tiene un *máximo* la fuerza también es cero, pero si la partícula es desplazada ligeramente desde esta posición del máximo y soltada, la fuerza tiende a alejarla de la posición del máximo; se dice que el máximo es un punto de *equilibrio inestable*, como el punto x_5. En los intervalos de x donde U es constante, su derivada respecto a la posición es nula y, por tanto, la fuerza también es nula; al desplazar la partícula a otra posición de ese intervalo, la partícula ahí se quedará; los puntos de ese intervalo son puntos de *equilibrio neutro* o *indiferente*, como el punto x_6.

8.5 Ejemplo de una fuerza no conservativa

Regresemos una vez más al sistema descrito en la figura 8.1, pero ahora supongamos que sí existe una fuerza de fricción actuando sobre el bloque. Todas las fuerzas que actúan sobre el bloque son: la fuerza de fricción $\vec{f}$ (entre el bloque y la superficie horizontal), la fuerza del resorte $\vec{F}_r$, la fuerza normal $\vec{N}$ y el peso $m\vec{g}$. El trabajo total producido por estas fuerzas en el viaje de ida y de regreso (al pasar de la configuración (a) a la configuración (c)) es $W=W_f+W_r+W_N+W_g$. El trabajo efectuado por el resorte es nulo porque su fuerza es conservativa, los trabajos producidos por $\vec{N}$ y por $m\vec{g}$ son también nulos porque el desplazamiento es perpendicular a estas fuerzas. Como la fuerza de fricción siempre se opone a la velocidad del bloque (y, por tanto, tiene sentido opuesto al desplazamiento), su trabajo es negativo siempre. Cuando el bloque regresa a la posición $x=0$, el trabajo total efectuado en el recorrido completo es una cantidad negativa. De todas estas fuerzas sólo la fuerza de fricción produce un trabajo no nulo y es negativo. Por tanto, este trabajo es

$$W=W_f<0.$$

El trabajo producido por la fuerza de fricción en el viaje de ida (de la configuración (a) a la configuración (b)) es $-fx'_1$; en el viaje de regreso (de la configuración (b) a la configuración (c)) el trabajo de esta fuerza es $-fx'_1$; de manera que el trabajo de esta fuerza en el viaje de ida y de regreso es

$$W_f = -2fx'_1.$$

Debido a que esta cantidad no es nula, entonces se dice que la fuerza de fricción es una fuerza no conservativa.

Por otra parte, con este resultado y al aplicar el teorema trabajo-energía cinética dado en la relación (1), se obtiene que

$$W=W_f=\Delta K=K_c-K_a<0$$

Es decir, el bloque regresa a la posición $x=0$ con una energía cinética menor, después del viaje completo. La fuerza de fricción es no conservativa, pues el trabajo que realiza en el viaje de ida y de regreso no es nulo y tampoco es nulo el cambio en la energía cinética. Esta energía que se pierde debido a la fuerza de fricción se convierte en energía en forma de calor, la cual se manifiesta por un aumento de la temperatura de las superficies en contacto. Este aumento de la temperatura lo sentimos, por ejemplo, cuando nos frotamos vigorosamente las manos para quitarnos el frío.

$\longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \longrightarrow$

Ejemplo 2. Un bloque de masa *m* se encuentra sobre una superficie horizontal con un coeficiente de fricción cinética μ_c. El bloque se coloca inicialmente en reposo comprimiendo horizontalmente a un resorte de constante *k* por una distancia *l* (el resorte no se encuentra atado al bloque). Al soltarlo, el bloque saldrá disparado. Calcular a) la velocidad del bloque justo cuando se separa del resorte y b) la distancia total recorrida por el bloque desde su posición inicial hasta que vuelve a quedar en reposo.

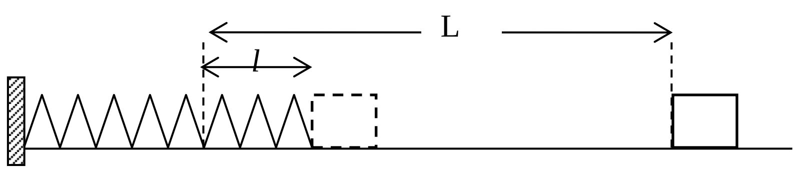


Figura 8.9. Ejemplo 2.

Solución.

a) Al aplicar el teorema trabajo-energía cinética desde que el bloque empieza a moverse hasta que se separa del resorte, se obtiene

$$W = W_r + W_f = \Delta K = K_0 - K_i \qquad \text{(a)}$$

Donde el trabajo producido por el resorte es $W_r = \int_0^l kxdx = \frac{kl^2}{2}$, el trabajo producido por la fuerza de fricción es $W_f = -\int_0^l fdx = -\mu_c mgl$, la energía cinética del bloque al separarse del resorte es $K_0 = \frac{mv_0^{\,2}}{2}$ y la energía cinética inicial es nula $K_i = 0$. Por tanto la relación (a) se escribe como

$$\frac{kl^2}{2} - \mu_c mgl = \frac{mv_0^{\,2}}{2}.$$

A partir de esta relación se obtiene la velocidad: $v_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{m} - 2\mu_c gl}$.

b) A partir de la separación, sólo la fuerza de fricción actúa produciendo una desaceleración:

$$-f=-ma\Rightarrow a=\frac{f}{m}=\frac{\mu_c mg}{m}=\mu_c g\,.$$

El bloque se detiene en la posición x_1 a partir de la separación. Por cinemática tenemos que

$$v_1^{\,2}-v_0^{\,2}=-2ax_1\text{, con } v_1=0\,.$$

Por tanto, $x_1=\frac{v_0^{\,2}}{2a}=\frac{v_0^{\,2}}{2\mu_c g}$.

El bloque se detiene al recorrer la distancia L dada por

$$L=l+x_1=l+\frac{v_0^{\,2}}{2\mu_c g}\,.$$

$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$

Recapitulación

Para analizar las fuerzas de gravedad y del resorte ideal usaremos el teorema trabajo-energía cinética que se expresa como $W=\int_1^2 \vec{F}\bullet d\vec{r}=\Delta K$. Suponer un resorte ideal colocado sobre una superficie horizontal sin fricción; un bloque se mueve con velocidad constante hacia el resorte, en la línea de éste, hace contacto con el resorte en x=0, lo comprime hasta x_1 donde adquiere instantáneamente velocidad cero; después el resorte lo hace regresar a x=0 donde pierde contacto con el resorte y recupera su velocidad inicial. Cuando el bloque hace contacto su energía cinética es $K_a=\frac{1}{2}mv_0^{\,2}$, cuando ha comprimido al resorte su energía cinética es nula. El bloque empieza a moverse hacia la posición x=0; cuando el contacto con el resorte se pierde su energía cinética vuelve a tener el valor inicial. Debido a que la energía cinética al inicio y al final del viaje de ida y de regreso es la misma, se dice que la fuerza es conservativa (la del resorte). El trabajo del resorte al pasar de x=0 a x=-x_1 es $-\frac{1}{2}kx_1^2$; para regresar a x=0, el trabajo del resorte es $\frac{1}{2}kx_1^2$. El resultado es que el trabajo en el viaje de ida y de regreso es nulo. Una fuerza es conservativa si el trabajo hecho por ella para mover una partícula, en un viaje de ida y de regreso, es cero. Ahora se calcula el trabajo que efectúa el resorte para llevar a la partícula desde x=0 hasta x=-x_1/2, pero a través de dos trayectorias. Resulta que es el mismo; una fuerza es conservativa si el trabajo hecho por ella sobre una partícula que se mueve entre dos puntos depende únicamente de estos puntos.

Cuando una partícula es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0, y si el aire no opone resistencia, al regresar la partícula a la posición del lanzamiento tiene una velocidad de magnitud v_0. Esto dice que la fuerza de gravedad también es conservativa, por tanto, el trabajo que realiza debe ser independiente de la trayectoria.

La configuración del sistema formado por el resorte y el bloque cambia continuamente. Esto quiere decir que al disminuir la energía cinética del bloque y al cambiar la configuración del sistema, está apareciendo una energía asociada a la configuración. La energía de configuración o energía potencial se define como la energía almacenada en el sistema a causa de la posición relativa de las partes del sistema. Se define la diferencial de la energía potencial dU como el negativo de la diferencial de trabajo $-dW$. Al integrar estas diferenciales se obtiene el cambio en la energía potencial: $\Delta U=-W$. Pero el teorema trabajo-energía cinética establece que $W=\Delta K$; es decir, $\Delta K+\Delta U=0$ **(4)**.

La relación (4) también puede ser expresada como $\Delta(U+K)=0$. Lo cual significa que para procesos que involucran fuerzas conservativas, el cambio total en la cantidad $U+K$ es cero; es una constante, es la energía mecánica $U+K=E$. Para el caso de una dimensión, la diferencial de trabajo dW que produce una fuerza dependiente de la posición $F(x)$ al mover el cuerpo una diferencial de desplazamiento es $dU=-dW=-F(x)dx$ **(7)**; podemos escribir $F(x)=-\frac{dU}{dx}$. La energía potencial es función de la posición, tal que el negativo de su derivada respecto a la posición es la fuerza. Al integrar (7) se obtiene $U(x)-U(x_0)=\Delta U=-W=-\int_{x_0}^{x} F(x)dx$ **(9)**; indica que sólo se puede calcular ΔU cuando la fuerza dependa únicamente de la posición de la partícula. Al cambiar la configuración del sistema, al moverse la partícula desde un estado x_1 hasta x_2, su velocidad cambia desde v_1 hasta v_2. De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética se tiene que $W=\Delta K=K_2-K_1$ **(10a)**. Por su parte (9) establece que el cambio en la energía potencial entre esos dos estados es $-W=\Delta U=U_2-U_1$. **(10b)**. Al sumar (10a) y (10b) se obtiene que $0=\Delta K+\Delta U=(K_2+U_2)-(K_1+U_1)$. Esto significa que la suma de la energía cinética y la energía potencial tiene el mismo valor en el estado 1 y en el 2. Si a la suma se le llama E y se quitan los subíndices, se puede escribir $\frac{1}{2}mv^2+U(x)=E$. Es la ley de conservación de la energía mecánica total para cuando las fuerzas en el sistema son conservativas.

Ahora supongamos que sí existe una fuerza de fricción actuando sobre el bloque. Todas las fuerzas que actúan sobre el bloque son: la de fricción $\vec{f}$, la del resorte $\vec{F}_r$, la normal $\vec{N}$ y el peso $m\vec{g}$. El trabajo total producido por estas fuerzas en el viaje de ida y de regreso es $W=W_f+W_r+W_N+W_g$. El trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}_r$ es nulo porque es conservativa, los trabajos producidos por $\vec{N}$ y por $m\vec{g}$ son también nulos porque el desplazamiento es perpendicular a estas fuerzas. Como la fuerza de fricción siempre se opone a la velocidad del bloque, su trabajo es negativo; el trabajo total efectuado en el recorrido completo es una cantidad negativa. El trabajo producido por la fuerza de fricción en el viaje de ida y de regreso es $W_f=-2fx'_1$. Con este resultado y al aplicar el teorema trabajo-energía cinética se obtiene que $W=W_f=\Delta K<0$. El bloque regresa a la posición $x=0$ con una energía cinética menor. La fuerza de fricción es no conservativa, pues el trabajo que realiza en el viaje de ida y de regreso no es nulo y tampoco es nulo el cambio en la energía cinética. Esta energía que se pierde debido a la fuerza de fricción se convierte en energía en forma de calor.

Problemas

1. Un bloque de 5 kg se mantiene en reposo comprimiendo un resorte horizontal de constante k=1000 N/m. La compresión del resorte es de 10 cm y no hay fricción entre el bloque y la superficie horizontal solamente en el tramo en que el bloque y el resorte están en contacto.

   a) Calcular la energía potencial elástica con el bloque en reposo.

   b) El resorte y el bloque no están amarrados, de manera que se separan después de liberar el sistema. Calcular la velocidad con la que se separa el bloque del resorte.

   c) Suponga que a partir de la posición en que el bloque se separa del resorte, la superficie es rugosa, con un coeficiente de fricción cinética de $\mu_c = 0.1$. Calcular la distancia que recorre el bloque hasta detenerse, desde que se separa del resorte.

2. Un bloque de 2 kg de masa se encuentra sobre una superficie horizontal con un coeficiente de fricción cinética μ_c=0.2. El bloque se coloca inicialmente en reposo comprimiendo horizontalmente a un resorte de constante k=500 N/m por una distancia de 0.06 m. (el resorte no se encuentra atado al bloque). Al soltarlo, el bloque saldrá disparado. Calcular a) la velocidad del bloque justo cuando se separa del resorte y b) la distancia total recorrida por el bloque desde su posición inicial hasta que vuelve a quedar en reposo.

3. Sobre el riel que se muestra en la figura, un bloque de 10 kg de masa desciende sin fricción desde un punto A hasta un punto B. ¿Con qué rapidez se debe lanzar desde el punto A de tal manera que llegue al punto B con una rapidez V_B = 30 m/s, si la diferencia de alturas entre A y B es de 20 m?

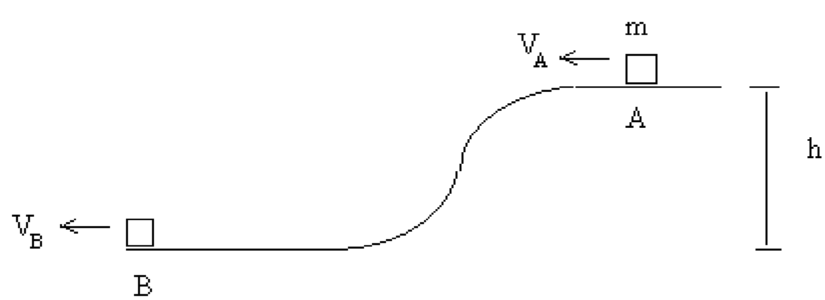
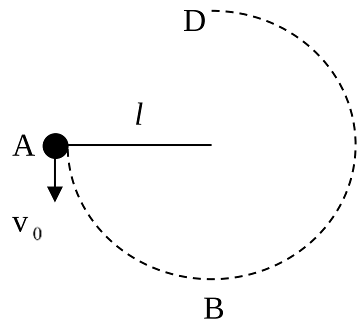


Figura 8.10. Problema 3.

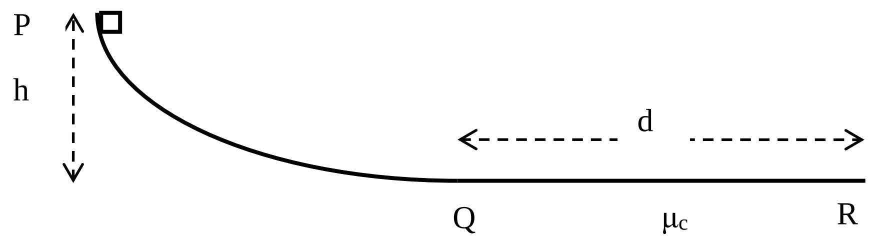
4. Una varilla rígida muy ligera, cuya longitud es *l*, tiene una bola de masa *m* fija a uno de sus extremos. El otro extremo puede pivotear sin fricción, de tal manera que la bola se mueve en un círculo vertical. El sistema se lanza desde la posición horizontal A con una velocidad inicial hacia abajo v_0. La bola alcanza justamente el punto D (la parte más alta del círculo) donde se detiene. a) Obtener una expresión para la velocidad inicial v_0.

Figura 8.11. Problema 4



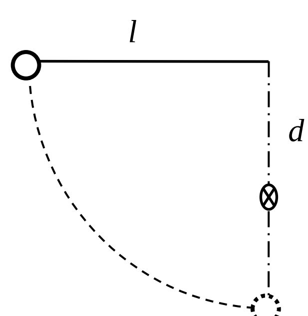
5. Un bloque de masa m = 25 kg se suelta desde el punto P de una rampa curva que no tiene fricción. Desciende una altura h = 7 m. Al llegar al punto Q, el bloque empieza a moverse sobre una superficie horizontal rugosa. Se desplaza una distancia d = 14 m hasta detenerse en el punto R. Usando argumentos de energía y/o trabajo, calcular: a) la velocidad del bloque en el punto Q, b) el trabajo realizado por la fuerza de fricción hasta que el objeto se detiene y c) el valor del coeficiente de fricción cinética μ_c.

Figura 8.12. Problema 5.



6. Una cuerda ideal de longitud l=80 cm tiene una pelota unida en un extremo y está fija en el otro extremo (ver la figura). A partir del extremo fijo y a una distancia d de 50 cm está un clavo. Cuando la pelota se suelta desde el reposo en la posición horizontal mostrada, se mueve a lo largo de la trayectoria circular punteada. Cuando la cuerda llega a su posición vertical hace contacto con el clavo y la pelota describe otra trayectoria circular con centro en el clavo. Calcular la velocidad de la pelota cuando llega al punto más bajo de su trayectoria y cuando llega al punto más alto, después que la cuerda hace contacto con el clavo.

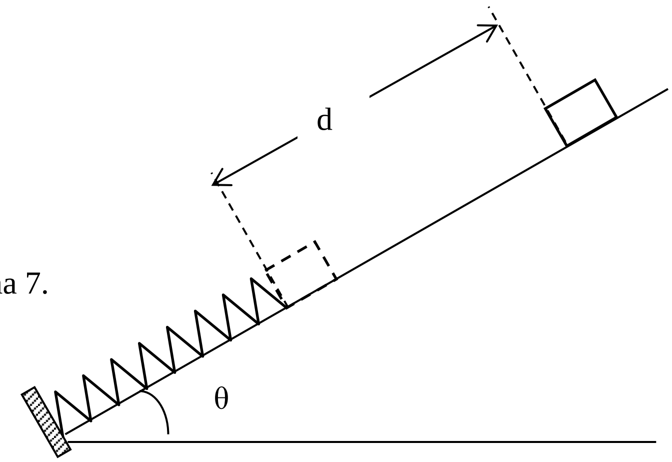
Figura 8.13. Problema 6.



7. Partiendo del reposo, un bloque de 2.0 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo de 30º con la horizontal, tal como se muestra en la figura 8.14. Después de recorrer 4.0 m a lo largo del plano el bloque choca con un resorte ideal cuya

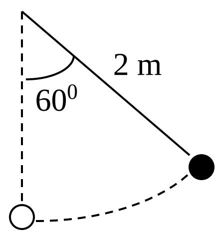
constante de fuerza es igual a 100 N/m, y lo comprime hasta detenerse. a) Encuentre la velocidad del bloque justo antes de que choque con el resorte, y b) la compresión del resorte.

Figura 8.14. Problema 7.



8. La lenteja de un péndulo se suelta cuando la cuerda ideal que lo sostiene forma un ángulo de 60° con la vertical. ¿Qué rapidez lleva en el punto más bajo de su trayectoria si la cuerda mide 2.0 m?

Figura 8.15. Problema 8.



9. Una piedra de peso 5.29 N es lanzada verticalmente desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 20.0 m/s, la resistencia del aire sobre ella es de 0.265 N en todo el trayecto. ¿Cuáles son la altura máxima alcanzada por la piedra y su rapidez justo antes de llegar al suelo?

10. Un proyectil de masa 1.0 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 65.0 m/s; debido a la fricción con el aire, el proyectil disipa durante la subida 880.0 J de su energía en forma de calor.
a) ¿Cuál es el valor de la altura máxima?
b) ¿Cuál es la energía potencial del proyectil al llegar a esa altura máxima?

11. Un proyectil de 9.40 kg es disparado verticalmente hacia arriba. La resistencia del aire reduce la energía mecánica del sistema proyectil-Tierra en 68.0 kJ durante el ascenso del proyectil. ¿Cuánto más alto habría llegado el proyectil si no hubiera la resistencia del aire?

12. Una pelota de 0.63 kg es lanzada directamente hacia arriba con rapidez inicial de 14 m/s, llega a una altura máxima de 8.1 m. ¿Cuál es el cambio en la energía mecánica del sistema pelota-Tierra en el ascenso de la pelota hasta esa altura?

13. Una piedra de 8 kg se coloca sobre un resorte vertical y lo comprime 10 cm. a) Calcular la constante de fuerza del resorte. Después la piedra es empujada hacia abajo 30 cm más y se le suelta. b) ¿Cuánta energía potencial hay almacenada en el resorte en el momento antes de que sea soltada la piedra? c) ¿A qué altura se elevará la piedra sobre esta nueva posición (la más baja)?

14. Un bloque de 250 g se deja caer sobre un resorte vertical que tiene una constante de fuerza k=2.5 N/cm. El bloque se pega al resorte, y el resorte se comprime 10 cm al alcanzar el reposo momentáneamente. Cuando el resorte está siendo comprimido, calcular el trabajo efectuado por a) la fuerza de gravedad y b) el resorte.
c) Aplicando el teorema trabajo-energía cinética, calcular la velocidad del bloque en el momento justo de entrar en contacto con el resorte.
d) Aplicando la ley de la conservación de la energía mecánica, calcular la altura desde donde se dejó caer el bloque.

15. Un resorte ideal que puede comprimirse 2.5 cm por una fuerza de 250 N, se encuentra en la parte inferior y a lo largo de un plano inclinado. Un bloque de masa m=3 kg es soltado desde lo alto del plano inclinado, siendo 30º la inclinación del plano. El bloque llega momentáneamente al reposo después de haber comprimido al resorte 5.0 cm. No hay fricción entre el bloque y el plano inclinado.

a) ¿Cuánto se movió el bloque hacia abajo a lo largo del plano?
b) ¿Cuál era la velocidad del bloque en el momento en que toca al resorte?

9 CENTRO DE MASA E ÍMPETU LINEAL

Se define y calcula el centro de masa de un sistema de partículas o de un cuerpo sólido. El ímpetu del sistema o del cuerpo se define como el producto de la masa por la velocidad, con lo cual la fuerza en la segunda ley de Newton se expresa como la derivada del ímpetu respecto al tiempo; cuando esta expresión es nula se habla de la ley de conservación del ímpetu.

Introducción

En los capítulos anteriores se ha analizado el movimiento de traslación de partículas y de cuerpos sólidos; debido a que todos los puntos del sólido describen la misma trayectoria, no ha importado el punto que se escoge para describir el movimiento, ya sea que se trate de una piedra, de un tren o de una bala. De entre todos los puntos del sistema bajo estudio, existe uno que es muy importante en mecánica y que se llama centro de masa. Este punto, en el movimiento de traslación, se comporta como una partícula que contuviera toda la masa del sistema. La importancia del centro de masa estriba en que, en el movimiento de rotación, muchas propiedades del sistema se describen como una propiedad del centro de masa más esa misma propiedad respecto al centro de masa. Primero se estudiará el centro de masa (cm) de un sistema de partículas y después el centro de masa de cuerpos sólidos.

9.1 Centro de masa de sistemas de partículas

Dos partículas en una línea recta

Posición del cm. Debido a que dos puntos definen una línea recta, sobre esta recta se colocan las dos partículas y también el eje X. Supóngase que las partículas tienen las posiciones x_1 y x_2, y que sus masas son m_1 y m_2, como ilustra la figura 9.1.

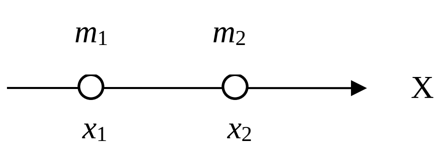


Figura 9.1. El centro de masa está ubicado en una posición entre x_1 y x_2.

Definimos la posición del centro de masa, cm, de las dos partículas como

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_ix_i \qquad (1)$$

donde M es la suma de las masas, es decir, es la masa total del sistema. Nótese que si las masas son iguales (digamos $m_1=m_2=m$), entonces x_{cm} adquiere el valor $x_{cm}=\frac{mx_1+mx_2}{m+m}=\frac{x_1+x_2}{2}$; este resultado indica que el centro de masa se encuentra a la mitad de la separación de las 2 masas, pues $x_{cm}=x_1+\frac{x_2-x_1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$ (ver figura 9.1). Si las masas son diferentes, el centro de masa se localiza más cerca de la masa mayor, pero siempre sobre la línea que las une y en una posición entre ambas.

Velocidad y aceleración del cm. En general, estas dos partículas no están estáticas. Aunque cada partícula podría moverse arbitrariamente, por simplicidad consideremos en este momento que sus movimientos están a lo largo de la misma línea recta que las une. Supóngase que sus velocidades son v_1 y v_2 de tal manera que podemos calcular la velocidad con que se mueve el centro de masa. Al derivar respecto al tiempo la ecuación (1) se obtiene

$$v_{cm}=\frac{d}{dt}x_{cm}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_iv_i. \qquad (2)$$

Análogamente, si las partículas tienen aceleraciones a_1 y a_2, la aceleración del centro de masa se calcula derivando respecto al tiempo la velocidad (2):

$$a_{cm}=\frac{d}{dt}v_{cm}=\frac{m_1a_1+m_2a_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_ia_i. \qquad (3)$$

En estas tres ecuaciones aparece la masa total M del sistema de las dos partículas colocadas en una misma línea, el sistema se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en la posición x_{cm}, lo hiciera con velocidad v_{cm} y con aceleración a_{cm}.

Tres partículas en un plano

Posición del cm. Si las 3 partículas están colocadas sobre una misma línea recta, la extensión de la ecuación (1) es inmediata: $x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_ix_i$. En general, las posiciones arbitrarias de las tres partículas definen un plano (digamos el plano XY). Las posiciones están representadas por los vectores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ o equivalentemente por los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) (figura 9.2).

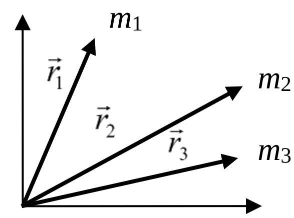


Figura 9.2. Tres partículas en un plano.

Las proyecciones perpendiculares de estos puntos sobre cada eje aparecen como si las partículas estuvieran colocadas sobre el eje en cuestión. De esta manera las componentes del vector de la posición del cm son

$$x_{cm}=\frac{1}{M}(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_ix_i,$$

$$y_{cm}=\frac{1}{M}(m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_iy_i.$$

Aquí también M representa la masa total del sistema de partículas. Al multiplicar estas dos ecuaciones por los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$, respectivamente, y luego sumar los resultados, se obtiene que la posición del centro de masa en notación vectorial es

$$\vec{r}_{cm}=\frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{r}_i. \qquad (4)$$

Velocidad del cm. Supongamos que las tres partículas se mueven en el plano XY. Empleando el mismo procedimiento que usamos para calcular la velocidad y la aceleración del cm en el caso de dos partículas, ahora a partir de las ecuaciones para x_{cm} y y_{cm} obtenemos que la velocidad del centro de masa tiene las componentes

$$v_{cmx}=\frac{1}{M}(m_1v_{1x}+m_2v_{2x}+m_3v_{3x})=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_iv_{ix},$$

$$v_{cmy}=\frac{1}{M}(m_1v_{1y}+m_2v_{2y}+m_3v_{3y})=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_iv_{iy}.$$

En forma vectorial se escribe como

$$\vec{v}_{cm}=\frac{1}{M}(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{v}_i. \qquad (5)$$

Aceleración del cm. Las componentes de la aceleración del centro de masa son

$$a_{cmx}=\frac{1}{M}(m_1a_{1x}+m_2a_{2x}+m_3a_{3x})=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_ia_{ix},$$

$$a_{cmy}=\frac{1}{M}(m_1a_{1y}+m_2a_{2y}+m_3a_{3y})=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_ia_{iy}.$$

En forma vectorial se escribe como

$$\vec{a}_{cm}=\frac{1}{M}(m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2+m_3\vec{a}_3)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i\vec{a}_i. \qquad (6)$$

N partículas en el espacio tridimensional

Posición del cm. Supóngase ahora que el sistema consta de N partículas de masas m_1, m_2, …, m_N en las posiciones $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,…, $\vec{r}_N$, respectivamente. En general, ahora los vectores son tridimensionales, la posición de la i-ésima partícula, con masa m_i, es $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Las componentes del vector que representa la posición del centro de masa son

$$x_{cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_ix_i\ , \qquad y_{cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_iy_i\ , \qquad z_{cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_iz_i. \qquad (7)$$

En forma vectorial estas relaciones se escriben como

$$\vec{r}_{cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i. \qquad (7a)$$

En esta expresión la cantidad M, como antes, es la masa total del sistema:

$$M=m_1+m_2+\ldots+m_N=\sum_{i=1}^{N} m_i\ . \qquad (8)$$

La posición del centro de masa de un sistema de partículas sólo depende de las masas de las partículas y de sus posiciones. El centro de masa es un punto en el espacio donde no necesariamente se encuentra una partícula.

Velocidad y aceleración del cm. La velocidad y la aceleración del centro de masa, respectivamente, son:

$$\vec{v}_{\rm cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_{\rm i}\vec{v}_{\rm i}, \qquad (9)$$

$$\vec{a}_{\rm cm}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_{\rm i}\vec{a}_{\rm i}. \qquad (10)$$

Observe que si el sistema de coordenadas tiene su origen colocado en el centro de masa, entonces $\vec{r}_{\rm cm}=\vec{0}$. Ejemplo: considere 4 partículas de masas iguales colocadas de tal manera que sus posiciones definen los vértices de un rectángulo de lados 2*a* y 2*b*. Con respecto a un sistema de coordenadas con el origen colocado en el centro geométrico del rectángulo y con los ejes paralelos a las aristas, las posiciones son: (*a*, *b*), (-*a*, *b*), (-*a*, -*b*) y (*a*, -*b*). Es claro que al aplicar las ecuaciones (7), se obtiene que el cm está en la posición (0, 0), coincidiendo con el origen.

9.2 Centro de masa de objetos sólidos

Para calcular la posición del centro de masa de un cuerpo sólido, dividimos mentalmente el cuerpo en *N* pequeños elementos de masa δm. Al hacer que estos elementos de masa se vuelvan infinitesimalmente pequeños (al mismo tiempo que *N* tiende a infinito), los elementos δm se convierten en *dm* (diferencial de masa) localizada en $\vec{r}$; las sumas representadas en las relaciones (7) se transforman en integrales. Es decir,

$$x_{\rm cm}=\frac{1}{M}\lim_{\delta m\to 0}\sum_{i=1}^{N}\delta m x_{\rm i}=\frac{1}{M}\int x dm, \qquad y_{\rm cm}=\frac{1}{M}\int y dm, \qquad z_{\rm cm}=\frac{1}{M}\int z dm.$$

En forma vectorial estas expresiones se escriben como

$$\vec{r}_{\rm cm}=\frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm, \qquad (11)$$

donde $M=\int dm$. Estas integrales en la masa pueden expresarse como integrales en el volumen del cuerpo, para lo cual se usa la *densidad de masa* definida como $\rho=\frac{M}{V}$, donde *V* es el volumen que ocupa *M*. La densidad ρ es una cantidad que puede variar de punto a punto. La Tierra (como planeta) es un ejemplo en que ρ depende de la posición. Sin embargo, cuando la masa del cuerpo está distribuida *uniformemente*, entonces en ese caso ρ es constante y un elemento de masa *dm* ocupa el volumen *dV* ($dm = \rho dV$) (ver la figura 9.3). Debido a que el elemento de masa se encuentra en $\vec{r} = (x, y, z)$, entonces podemos escribir la ecuación (11) como

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\int (x, y, z)\rho dV}{\int \rho dV} = \frac{1}{V}\iiint (x, y, z) dV . \qquad (12)$$

En esta expresión V es el volumen del cuerpo y la integral se realiza sobre todo su volumen. Las tres coordenadas del vector $\vec{r}_{\text{cm}}$ son:

$$x_{cm} = \frac{1}{V}\iiint x dV , \quad y_{cm} = \frac{1}{V}\iiint y dV , \quad z_{cm} = \frac{1}{V}\iiint z dV .$$

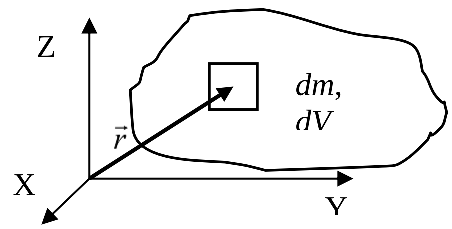


Figura 9.3. El elemento de masa *dm* ocupa un elemento de volumen *dV*.

El cálculo de la posición del centro de masa se simplifica si el cuerpo, además de tener su masa distribuida uniformemente, posee alguna simetría. Si el cuerpo tiene *simetría esférica*, el centro de masa se encuentra en el centro geométrico, como es el caso de una pelota o de un cascarón esférico; el centro de masa coincide con el punto donde se cruzan tres planos perpendiculares entre sí y que pasen por el centro geométrico. Si el cuerpo es simétrico con respecto a una línea, llamada eje de simetría, tiene *simetría cilíndrica* y el centro de masa se encuentra sobre el eje de simetría, como en un cono, un cilindro o una dona; en los casos del cilindro y la dona el centro de masa coincide con el punto donde se intersecan el eje de simetría y el plano perpendicular al eje y que pase por el centro geométrico; en cambio, en el caso del cono no existe un plano perpendicular al eje de simetría que corte al cono en dos mitades simétricas, solamente se puede decir que el centro de masa se localiza en algún punto en el eje de simetría. Cuerpos con un *plano de simetría* tienen su centro de masa en dicho plano, como en un paralelepípedo o un cubo; en estos cuerpos el centro de masa coincide con el centro geométrico que es el punto donde se intersecan tres planos perpendiculares entre sí (paralelos a las caras) y que pasen por el centro geométrico.

El cálculo se simplifica aún más en el caso de cuerpos laminares planos; en este caso de placas delgadas de espesor *e*, la integral de volumen se reduce a una integral de área, pues *dV=edA* de modo que la posición del centro de masa expresada en la relación (12) se reduce a

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{A}\iint (x, y)\, dA. \tag{13}$$

Aquí *A* es el área del cuerpo, colocado en el plano XY, y las integrales se efectúan sobre toda el área del cuerpo. Si *dA=dxdy*, entonces esta ecuación (13) en términos de las componentes se escribe como

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\iint x\,dx\,dy, \qquad y_{cm} = \frac{1}{A}\iint y\,dx\,dy.$$

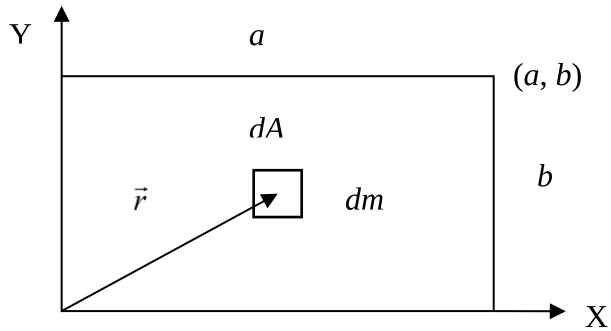
El movimiento de traslación de un objeto sólido puede describirse como el movimiento de traslación del centro de masa, es decir, como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto. En otras palabras, el movimiento de traslación del objeto sólido se reduce al movimiento de una partícula. En la posición del centro de masa podría no haber materia como en el caso de una esfera hueca o de una herradura.

Si ahora el sistema bajo estudio consiste de un cuerpo compuesto de varios objetos, el centro de masa de este cuerpo compuesto es el centro de masa de los centros de masa de los objetos individuales, pues sus centros de masa se comportan como partículas y en este caso volvemos a usar la expresión (7). En los dos ejemplos que siguen, se ilustra el uso de la ecuación (13).

⟶ ⟶ ⟶

Ejemplo 1. *Lámina rectangular*. Calcular la posición del centro de masa de una placa delgada de forma rectangular de lados *a* y *b*, respecto a una esquina.

Solución. El elemento de masa *dm* ocupa una área *dA* dada por *dA=dxdy* (base por altura). Colocamos el origen del sistema de coordenadas cartesianas en una esquina de la placa. Por simetría sabemos que el centro de masa debe estar en el punto con coordenadas $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, pero hagamos el cálculo.



La abscisa del cm es

$$x_{cm} = \frac{1}{A}\iint xdxdy = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{a} xdx\left\{\int_{y=0}^{b} dy = b\right\} = \frac{b}{A}\int_{0}^{a} xdx = \frac{b}{A}\frac{a^2}{2},$$

pero A=ab, por tanto $x_{cm} = \frac{a}{2}$.

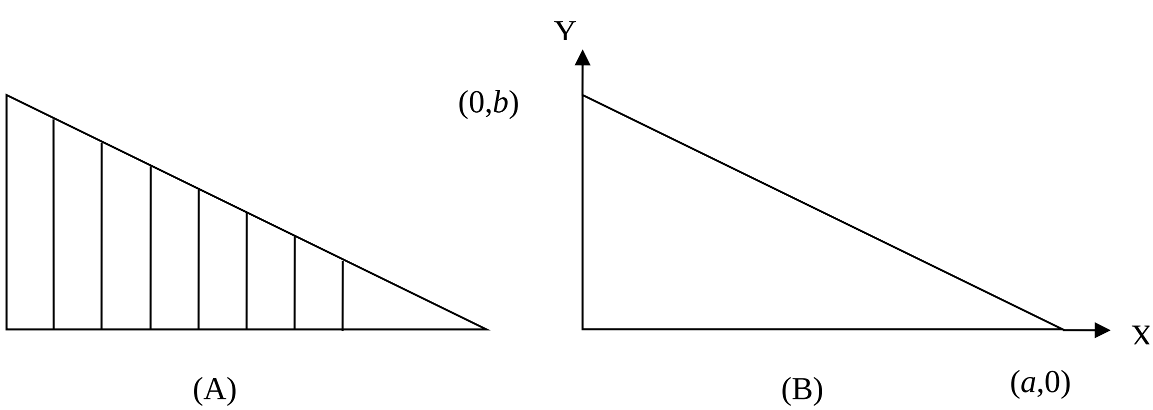
La ordenada del cm es

$$y_{cm} = \frac{1}{A}\iint ydxdy = \frac{1}{A}\int_{x=0}^{a} dx\left\{\int_{y=0}^{b} ydy = \frac{b^2}{2}\right\} = \frac{b^2}{2A}\left(\int_{0}^{a} dx = a\right) = \frac{b^2}{2A}a.$$

Pero como A=ab, entonces $y_{cm} = \frac{b}{2}$.

Finalmente, la posición del cm se escribe como $\vec{r}_{cm} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

Ejemplo 2. *Lámina triangular*. Calcular la posición del centro de masa de una placa delgada con forma de triángulo rectángulo con catetos *a* y *b*, desde el ángulo recto.



Solución.

Método geométrico. En el diagrama (A) de la figura se han trazado líneas paralelas al cateto izquierdo; el centro de masa de cada línea está en su centro, de tal manera que la línea que une esos centros es una recta que pasa por el centro del cateto izquierdo y el vértice derecho del triángulo; esta línea se llama *mediana*. Si se traza otra recta que pase por otro vértice y por el centro del lado opuesto, es decir otra mediana, puede demostrarse que las medianas se cruzan en el punto que corresponde a la posición del centro de masa del triángulo.

Método de integrales. Para aplicar la fórmula (13) en el cálculo del cm del triángulo, haremos referencia al diagrama (B). Primero calcularemos la ecuación de la hipotenusa. En general, la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos arbitrarios (x,y), (x_1,y_1) y (x_2,y_2) se obtiene escribiendo la pendiente y despejando y, el resultado es

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1 .$$

Al identificar los puntos (a,0)=(x_1,y_1) y (0,b)=(x_2,y_2), se obtiene que la ecuación de la recta que representa a la hipotenusa es

$$y=\frac{b-0}{0-a}(x-a)+0=-\frac{b}{a}(x-a) .$$

Por tanto la hipotenusa está representada por $y=-\frac{b}{a}x+b$.

La abscisa del centro de masa es

$$x_{cm}=\frac{1}{A}\iint xdxdy=\frac{1}{A}\int_{x=0}^{a}xdx\left\{\int_{y=0}^{-\frac{b}{a}x+b}dy=-\frac{b}{a}x+b\right\}=\frac{1}{A}\int_{0}^{a}\left(-\frac{b}{a}x^2dx+bxdx\right)=\frac{1}{A}\left(-\frac{ba^3}{3a}+\frac{ba^2}{2}\right)$$

$$x_{cm}=\frac{1}{A}\left(-\frac{2a^2b}{6}+\frac{3a^2b}{6}=\frac{ab}{2}\frac{a}{3}\right).$$

Pero el área es $A=\frac{ab}{2}$, por tanto $x_{cm}=\frac{a}{3}$.

La ordenada del cm es

$$y_{cm}=\frac{1}{A}\iint ydxdy=\frac{1}{A}\int_{x=0}^{a}dx\left\{\int_{y=0}^{-\frac{b}{a}x+b}ydy=\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}x+b\right)^2\right\}=\frac{1}{A}\int_{0}^{a}\left(\frac{b^2}{2a^2}x^2-\frac{b^2}{a}x+\frac{b^2}{2}\right)dx ,$$

$$y_{cm}=\frac{1}{A}\left(\frac{b^2}{2a^2}\frac{a^3}{3}-\frac{b^2}{a}\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}a=\frac{ab}{2}\frac{b}{3}-\frac{ab}{2}b+\frac{ab}{2}b=\frac{ab}{2}\frac{b}{3}\right).$$

Por tanto $y_{cm}=\frac{b}{3}$.

La posición del cm del triángulo rectángulo medida desde el ángulo recto es $\vec{r}_{cm} = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

9.3 Ímpetu de sistemas de partículas

Una partícula. Sabemos que la segunda ley de Newton se expresa como $\vec{F} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}$ es la fuerza resultante o fuerza neta que actúa sobre la partícula de masa *m*. Invocando la definición de la aceleración y si la masa de dicha partícula no cambia en el tiempo, o sea que si *m* es una constante, entonces la segunda ley de Newton puede escribirse como

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}\,. \qquad (14)$$

En esta ecuación hemos definido el vector

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (15)$$

como la masa de la partícula multiplicada por su velocidad. A esta cantidad se le conoce como ímpetu o ímpetu lineal o momento lineal o cantidad de movimiento lineal. Se debe agregar el adjetivo lineal para distinguirlo del ímpetu angular, el cual se asocia con la rotación de cuerpos y que estudiaremos más adelante; por ahora solamente le llamaremos ímpetu, por brevedad. La unidad para medir el ímpetu en el sistema SI es el kilogramo por metro por segundo (kg·m/s).

La ecuación (14) establece que la rapidez con que cambia el ímpetu de una partícula es igual a la fuerza resultante que actúa sobre la partícula y que, como la relación es vectorial, ese cambio está en la dirección de la fuerza. En otras palabras, la ecuación (14) dice que la fuerza neta sobre una partícula hace que cambie el ímpetu de la partícula. Inversamente, el ímpetu sólo puede ser cambiado por una fuerza. Si la fuerza neta es cero (*partícula aislada*), entonces la ecuación (14) implica que el ímpetu $\vec{p}$ es una cantidad constante. Debido a que la ecuación (14) representa una relación vectorial, en términos de las componentes en los ejes X, Y y Z esto quiere decir que si

$$F_x=0 \;\Rightarrow\; p_x=mv_x=\text{constante 1},$$

$$F_y=0 \;\Rightarrow\; p_y=mv_y=\text{constante 2},$$

$$F_z=0 \;\Rightarrow\; p_z=mv_z=\text{constante 3}.$$

Puede suceder que sólo algunas componentes de la fuerza sean nulas en cuyo caso los correspondientes ímpetus asociados son constantes. Por ejemplo, en el lanzamiento de proyectiles en el vacío, cuyo movimiento se realiza en el plano vertical XY siendo X horizontal y Y vertical, la fuerza (fuerza gravitacional) está dirigida a lo largo del eje Y mientras que en el eje X no hay fuerza alguna. En este caso la cantidad mv_x a lo largo del eje X es una constante.

Dos partículas. Consideremos dos partículas de masas m_1 y m_2, sus velocidades son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, y sus aceleraciones son $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. Cada partícula tiene su propio ímpetu: $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ y $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$. Sobre la partícula 1 actúa la fuerza neta $\vec{F}_1 = \frac{d}{dt}\vec{p}_1$, sobre la partícula 2 la fuerza neta es $\vec{F}_2 = \frac{d}{dt}\vec{p}_2$. Al sumar todas las fuerzas se obtiene que la fuerza total sobre el sistema es

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\,.$$

Separemos las fuerzas en fuerzas externas y en fuerzas internas. Supongamos que sobre cada una de las partículas actúa solamente una fuerza externa que representaremos como $(\vec{F}_1)_{ext}$ y $(\vec{F}_2)_{ext}$. Además, las partículas pueden interaccionar entre sí (por ejemplo, a través de un resorte que las une). De tal manera que la fuerza $\vec{F}_1$ es la suma de dos fuerzas: la fuerza que la partícula 2 ejerce sobre la 1 ($\vec{F}_{12}$) y la fuerza externa sobre la partícula 1 $(\vec{F}_1)_{ext}$ (ver figura 9.4), es decir,

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + (\vec{F}_1)_{ext} = (\vec{F}_1)_{int} + (\vec{F}_1)_{ext}.$$

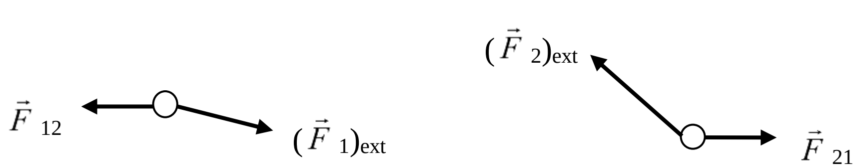


Figura 9.4. Se muestran las fuerzas externas e internas sobre cada partícula.

Análogamente, para la otra partícula las fuerzas son

$$\vec{F}_2=\vec{F}_{21}+(\vec{F}_2)_{ext}=(\vec{F}_2)_{int}+(\vec{F}_2)_{ext}$$

donde $\vec{F}_{21}$ es la fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la 2 y $(\vec{F}_2)_{ext}$ es la fuerza externa sobre la partícula 2. Las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ son fuerzas internas que las hemos representado, en las ecuaciones recién escritas, como $(\vec{F}_1)_{int}$ y $(\vec{F}_2)_{int}$, respectivamente. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1 es igual en magnitud y dirección pero de sentido opuesto a la fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la 2 ($\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$). Al sumar todas las fuerzas que actúan sobre este sistema de dos partículas se obtiene que

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2 = \vec{F}_{12}+(\vec{F}_1)_{ext}+\vec{F}_{21}+(\vec{F}_2)_{ext} = (\vec{F}_1)_{ext}+(\vec{F}_2)_{ext}$$

Si a la suma de estas fuerzas externas le llamamos $\vec{F}_{ext}$, entonces podemos escribir

$$\vec{F}_{ext}=\frac{d}{dt}\vec{P}$$

donde $\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$ es el ímpetu total. La fuerza externa total sobre el sistema es igual al cambio (en el tiempo) del ímpetu lineal total.

N partículas. Ahora supongamos que el sistema consta de N partículas de masas m_1, m_2, …, m_N, y cuidamos que al sistema no entran ni salen partículas (sistema cerrado); es decir, la masa total es constante e igual a M:

$$M=m_1+m_2+\ldots+m_N=\sum_{i=1}^{N} m_i\ .$$

Sobre la partícula 1 actúa la fuerza neta $\vec{F}_1=\frac{d}{dt}\vec{p}_1$, sobre la partícula 2 actúa la fuerza neta $\vec{F}_2=\frac{d}{dt}\vec{p}_2$,…, sobre la partícula i actúa la fuerza neta

$$\vec{F}_i=\frac{d}{dt}\vec{p}_i.$$

Al sumar todas estas fuerzas encontramos la fuerza total sobre el sistema completo, es decir,

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i. \qquad (16)$$

Consideremos primero el lado izquierdo de esta ecuación (16). El primer término en la suma es la fuerza neta $\vec{F}_1$ que actúa sobre la partícula 1; esta fuerza es la suma de las fuerzas internas (producidas por las otras partículas del sistema) más una fuerza neta externa; es decir,

$$\vec{F}_1=(\vec{F}_1)_{int}+(\vec{F}_1)_{ext}.$$

Análogamente para las otras partículas; en particular, para la partícula i:

$$\vec{F}_i=(\vec{F}_i)_{int}+(\vec{F}_i)_{ext}.$$

Sobre cada partícula actúa sólo una fuerza externa, $(\vec{F}_i)_{ext}$.

La fuerza $(\vec{F}_1)_{int}$ es la fuerza resultante de todas las fuerzas internas que actúan sobre la partícula 1. De esta manera podemos escribir que la fuerza neta interna sobre la partícula 1 es

$$(\vec{F}_1)_{int}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ldots+\vec{F}_{1j}+\ldots+\vec{F}_{1N}=\sum_{j\neq 1}^{N}\vec{F}_{1j}$$

donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza que la partícula 2 ejerce sobre la 1, $\vec{F}_{13}$ es la fuerza que la partícula 3 ejerce sobre la 1, etc.; $\vec{F}_{1j}$ es la fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula 1 siendo j diferente de 1, pues ninguna partícula ejerce fuerza sobre sí misma. Análogamente, la fuerza interna sobre la partícula i es $(\vec{F}_i)_{int}$, con i=1, 2, …, N,

$$(\vec{F}_i)_{int}=\vec{F}_{i1}+\vec{F}_{i2}+\ldots+\vec{F}_{iN}=\sum_{j\neq i}^{N}\vec{F}_{ij}. \qquad (17)$$

Ahora el lado izquierdo de la ecuación (16) puede ser escrito como

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{int}+\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{ext}. \qquad (18)$$

Insertando la ecuación (17) en la primera suma del lado derecho de (18), se ve que las fuerzas internas que se suman son

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{int}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\vec{F}_{ij}=&\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ldots+\vec{F}_{1N}\\ &+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\ldots+\vec{F}_{2N}\\ &+\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}+\ldots+\vec{F}_{3N}\\ &+\ldots\end{aligned}$$

Pero por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1 es igual en magnitud y dirección pero de sentido opuesto a la fuerza que la partícula 1 ejerce sobre la 2, es decir $\vec{F}_{12}$=-$\vec{F}_{21}$. En general, se puede decir que $\vec{F}_{ij}$=-$\vec{F}_{ji}$, de tal manera que las fuerzas internas se cancelan por parejas dando como resultado que la suma de todas las fuerzas internas es nula. En la ecuación (18) solamente sobreviven las fuerzas externas que actúan sobre las partículas, las cuales al ser sumadas producen la fuerza resultante sobre el sistema de las N partículas. Representemos a esta suma como $\vec{F}_{ext}$ o simplemente como $\vec{F}$, de tal manera que el lado izquierdo de (16) (o lado izquierdo de (18)) queda como

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i)_{ext}=\vec{F}_{ext}=\vec{F}.$$

A su vez, el lado derecho de la ecuación (16) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i=\frac{d}{dt}\vec{p}_1+\frac{d}{dt}\vec{p}_2+\ldots+\frac{d}{dt}\vec{p}_N=\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\frac{d}{dt}\vec{P}$$

donde $\vec{P}$ es el ímpetu total del sistema de las N partículas. Finalmente, la ecuación (16) queda como

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\vec{P}. \qquad (19)$$

Llegamos al resultado de que el cambio en el ímpetu total del sistema sólo depende de las fuerzas externas, las fuerzas internas no lo modifican. Las ecuaciones (14) y (19) tienen la misma forma matemática, representan la segunda ley de Newton para una partícula y para un sistema de N partículas, respectivamente.

9.4 Movimiento del centro de masa y conservación del ímpetu lineal

Calculemos el ímpetu total de un sistema de N partículas. El ímpetu que tiene la i-ésima partícula, cuya masa es constante y recordando su definición en la ecuación (15) ($\vec{p}=m\vec{v}$), puede escribirse como

$$\vec{p}_i=m_i\vec{v}_i=m_i\frac{d}{dt}\vec{r}_i=\frac{d}{dt}(m_i\vec{r}_i).$$

Para conocer el ímpetu total de las N partículas, tenemos que sumar los ímpetus individuales

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}(m_i\vec{r}_i)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i.$$

La suma en el lado derecho de esta ecuación la identificamos como el vector que representa la posición del centro de masa multiplicada por la masa total, dada en la ecuación (7a)

$$\vec{r}_{\text{cm}}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_{\text{i}}\vec{r}_{\text{i}} \qquad \text{(7a)}$$

donde *M* representa la masa total del sistema de las N partículas. Usando esta expresión para la posición del centro de masa, el ímpetu total del conjunto de N partículas es

$$\vec{P}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_{\text{i}}\vec{r}_{\text{i}}=\frac{d}{dt}(M\vec{r}_{\text{cm}})=M\frac{d}{dt}\vec{r}_{\text{cm}}=M\vec{v}_{\text{cm}}. \qquad (20)$$

El vector $\vec{v}_{\text{cm}}$ es la velocidad con que se mueve el centro de masa. Esta expresión dice que el ímpetu total de un sistema de N partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad del centro de masa del sistema. Vemos que las expresiones (15) y (20) tienen la misma estructura matemática, ambas dicen que el ímpetu es igual a la masa por la velocidad. Pero en la ecuación (20) se tiene la masa total *M*, como si toda la masa estuviera concentrada en el punto con posición $\vec{r}_{\text{cm}}$, el cual se mueve con velocidad $\vec{v}_{\text{cm}}$.

Ahora regresemos a la ecuación (19), pero usando (20) expresémosla como

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}\vec{P}=\frac{d}{dt}(M\vec{v}_{\text{cm}})=M\frac{d}{dt}\vec{v}_{\text{cm}}=M\vec{a}_{\text{cm}}. \qquad (21)$$

El vector $\vec{a}_{\text{cm}}$ es la aceleración del centro de masa. Esta expresión dice que la fuerza externa total que actúa sobre un sistema de N partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la aceleración del centro de masa. Vemos que las expresiones (14) y (21) tienen la misma estructura matemática, ambas expresan la segunda ley de Newton. Pero en la ecuación (21) aparece la masa total *M*, como si toda la masa estuviera concentrada en el punto con posición $\vec{r}_{\text{cm}}$, que se mueve con aceleración $\vec{a}_{\text{cm}}$, y como si la fuerza total externa estuviera aplicada en el punto cm. A partir de la ecuación (21), nuevamente puede decirse que si la fuerza neta externa es cero (en cuyo caso se tiene un *sistema aislado*), entonces el ímpetu $\vec{P}$ es una cantidad constante (es decir, el centro de masa del sistema se mueve con velocidad constante, como también lo expresa la ecuación (20)). En otras palabras, en ausencia de fuerzas externas sobre el sistema, el ímpetu se conserva. Esta es la *ley de conservación del ímpetu*.

Los observadores colocados en referenciales inerciales distintos asignarán valores distintos al ímpetu total del sistema, pero todos ellos coinciden (suponiendo fuerza externa nula) en que el valor de $\vec{P}$ determinado por cada uno de ellos permanece inalterado. Aun cuando $\vec{P}$ sea constante, los ímpetus de las partículas individuales pueden cambiar. El ímpetu es una cantidad vectorial y, por tanto, su conservación establece tres condiciones al movimiento del sistema al cual se aplica (por ejemplo: colisiones, explosiones)

En la resolución de problemas que involucran la conservación del ímpetu, primero hay que estar seguro de que se trata de un sistema cerrado y aislado. Cerrado significa que al sistema no entran ni salen partículas. Aislado significa que la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero. Si alguna componente de la fuerza externa no es nula, entonces el sistema no es aislado; pero una componente del ímpetu se conserva si la correspondiente componente de la fuerza externa neta es cero. Luego se escriben las expresiones para el ímpetu, correspondientes a dos estados apropiados del sistema (por ejemplo, estado inicial $\vec{P}_{\mathrm{i}}$ y estado final $\vec{P}_{\mathrm{f}}$) y finalmente se igualan esas expresiones ($\vec{P}_{\mathrm{i}} = \vec{P}_{f}$). A continuación se ilustra la conservación del ímpetu en una dimensión y en dos dimensiones.

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

Ejemplo 3. *Intercambio de posiciones*. Ricardo, de 80 kg de masa, y Lupita, que es más liviana, están disfrutando un atardecer en una canoa de 30 kg. Cuando ésta permanece en reposo en aguas tranquilas, intercambian asientos, que están a 3 m de distancia y ubicados simétricamente con respecto al centro de la canoa. Ricardo observa que la canoa se mueve 40 cm, en la misma línea de las dos personas, con respecto a un tronco sumergido durante el intercambio y calcula la masa de Lupita. ¿Cuál es esa masa? (suponer que no hay fricción entre el agua y la canoa).

Solución. Como no hay fuerzas externas horizontales, $\vec{P}$ es constante, y debido a que el sistema inicialmente está estático, $\vec{P}$ es nulo; por tanto, la posición del cm del sistema no cambia.

Datos: l=3 m, l_1=0.4 m, m_R=80 kg, m_c=30 kg. Incógnita: m_L. La figura 9.5 ilustra las posiciones de los tres cuerpos antes y después del intercambio.

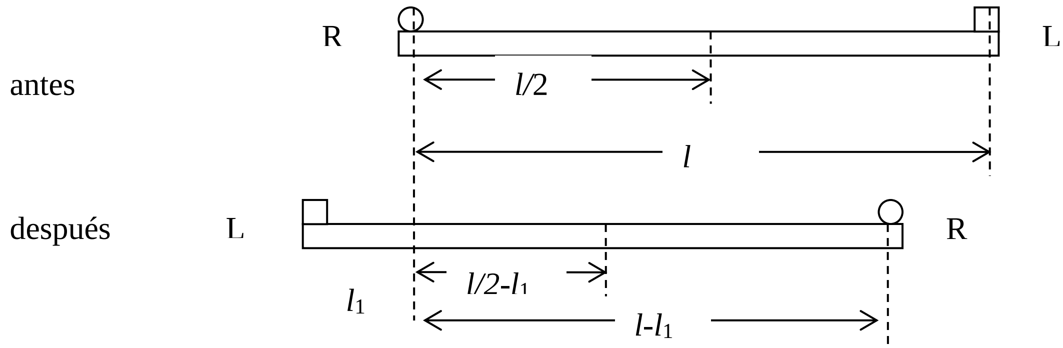


Figura 9.5. Ejemplo 3.

Debido a que P=0, la posición del cm es la misma antes y después del intercambio de asientos. Respecto a la posición inicial de Ricardo, el cm está inicialmente en

$$x_{cm} = \frac{m_R(0) + m_c(l/2) + m_L(l)}{m_R + m_c + m_L}$$

Con las nuevas posiciones el cm no se mueve, por tanto

$$x_{cm} = \frac{m_R(l - l_1) + m_c(l/2 - l_1) + m_L(-l_1)}{m_R + m_c + m_L}$$

Igualando los numeradores, se obtiene

$m_c l/2 + m_L l = m_R(l - l_1) + m_c(l/2 - l_1) - m_L l_1$,

$m_L(l + l_1) = m_R(l - l_1) - m_c l_1$.

Por tanto, $m_L = \dfrac{m_R(l - l_1) - m_c l_1}{l + l_1}$.

Numéricamente, $m_L = \dfrac{80 \times (3 - 0.4) - 30 \times 0.4}{3 + 0.4} = 57.6$ kg.

Este resultado numérico es consistente con la información dada que Lupita es más liviana. En el enunciado no se dice en qué sentido se mueve la canoa, pero en la solución dada se supuso que se mueve en sentido opuesto al de Ricardo. ¿Qué cambio debe hacerse en la solución para considerar el caso en que la masa de Lupita fuera mayor que la de Ricardo?

Ejemplo 4. *Perro caminando en un bote*. Un perro de 4.5 kg está parado en un bote de fondo plano de 18 kg a 6.1 m de la orilla. La longitud del bote es perpendicular a la orilla. El perro camina 2.4 m a lo largo del bote hacia la orilla y luego se detiene. Suponiendo que no haya fricción entre el bote y el agua, encuentre a qué distancia queda el perro de la orilla.

Solución. Los datos son m_p = 4.5 kg, m_b = 18 kg, L = 6.1 m, d = 2.4 m. L es la distancia inicial a la orilla y d es la distancia caminada.

En el diagrama se muestran las dos situaciones: antes y después de que el perro camina. Debido a que no hay fuerzas externas horizontales, $\vec{P}$ es constante, y debido a que el sistema perro-bote inicialmente está estático, $\vec{P}$ es nulo; por tanto, la posición del cm del sistema no cambia. Esto significa que al caminar el perro hacia la izquierda, el bote se mueve hacia la derecha.

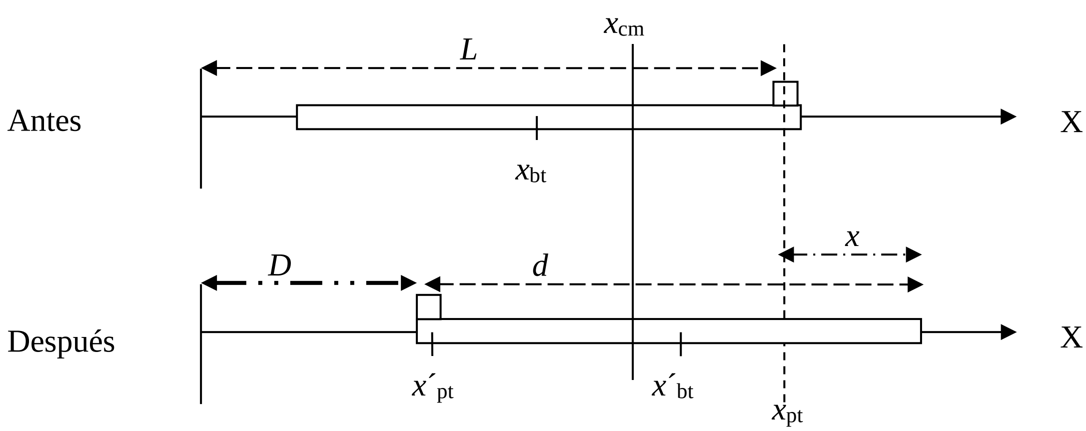


Figura 9.6. Ejemplo 4.

El problema se resolverá usando dos métodos: (a) centro de masa y distancias y (b) centro de masa y movimiento relativo.

Método centro de masa y distancias. Calcularemos la distancia D en términos de las distancias L, d y las masas. El bote se mueve la distancia x. Tomaremos la posición inicial del perro como el origen de coordenadas (es decir, x_{pt}=0); respecto a esta línea punteada, el cm es

$$\text{Antes} \qquad x_{cm} = \frac{m_p(0) + m_b(\frac{d}{2})}{m_p + m_b}$$

$$\text{Después} \qquad x'_{cm} = \frac{m_p(d-x) + m_b(\frac{d}{2} - x)}{m_p + m_b}$$

Como la posición del cm no cambia, entonces $m_b d/2=m_p(d-x)+m_b(d/2-x)$.

Por tanto,

$m_p d-m_p x-m_b x=0 \quad \longrightarrow \quad x=\dfrac{m_p d}{m_p+m_b}$.

La nueva distancia del perro a la orilla es

$D=L-(d-x)=L-d+\dfrac{m_p d}{m_p+m_b}=L-\dfrac{m_p d+m_b d-m_p d}{m_p+m_b}$.

En términos de los datos es $\quad D=L-\dfrac{m_b d}{m_p+m_b}$. Numéricamente: D= 4.2 m.

Método centro de masa y movimiento relativo. Ahora mediremos las posiciones desde la orilla (en la orilla está el origen de coordenadas). Las posiciones mostradas en el diagrama significan:

x_{pt} y x'_{pt} son la posición inicial y final del perro respecto al terreno,

x_{bt} y x'_{bt} son la posición inicial y final del cm del bote respecto al terreno.

De esta manera las posiciones del cm del sistema perro-bote antes y después son

Antes $\quad (m_p+m_b)x_{cm} = m_p x_{pt}+m_b\, x_{bt}$

Después $\quad (m_p+m_b)x'_{cm} = m_p x'_{pt}+m_b\, x'_{bt}$

Como la posición del cm no cambia, entonces $m_p x_{pt}+m_b\, x_{bt} = m_p x'_{pt}+m_b\, x'_{bt}$ de donde se obtiene

$$m_b(x'_{bt}-x_{bt}) = m_p(x_{pt}-x'_{pt}) = -m_p(x'_{pt}-x_{pt}). \qquad (a)$$

Observamos que esta ecuación es una relación entre desplazamientos. Sabemos que el desplazamiento del perro respecto al terreno (orilla) ($\Delta_{pt} = x'_{pt}-x_{pt}$) debe ser igual al desplazamiento del perro respecto al bote ($\Delta_{pb} = x'_{pb}-x_{pb}$) más el desplazamiento del bote respecto al terreno ($\Delta_{bt} = x'_{bt}-x_{bt}$), i.e. $\Delta_{pt} = \Delta_{pb} + \Delta_{bt}$. Como el perro se mueve hacia la región negativa del eje X, entonces $\Delta_{pb} = x'_{pb}-x_{pb} = -d$. La relación entre los desplazamientos es

$\Delta_{pb} = -d = \Delta_{pt} - \Delta_{bt} \quad \longrightarrow \quad -d = (x'_{pt}-x_{pt}) - (x'_{bt}-x_{bt})$.

Usando la relación (a) en ésta:

$-d = (x'_{pt}-x_{pt}) - \left(-\dfrac{m_p}{m_b}\right)(x'_{pt}-x_{pt}) \quad \longrightarrow \quad -m_b d = m_b x'_{pt} - m_b x_{pt} + m_p x'_{pt} - m_p\, x_{pt}$

$\longrightarrow \quad -m_b d + (m_p + m_b)x_{pt} = (m_p + m_b)x'_{pt}$.

Finalmente se obtiene $x'_{pt} = x_{pt} - \dfrac{m_b d}{m_p + m_b} = L - \dfrac{m_b d}{m_p + m_b}$.

Con los dos métodos se obtiene el mismo resultado, como debe ser. Obsérvese que en este segundo método no fue necesario argumentar que el perro y el bote se mueven en sentidos opuestos, solamente se calculó la posición final del perro.

Ejemplo 5. *Explosión.* Al explotar una granada en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, se desintegra en tres partes que se mueven sobre la misma superficie. Dos de ellas, con masas iguales, vuelan en direcciones perpendiculares entre sí con la misma rapidez de 30 m/s. La tercera tiene una masa tres veces mayor que la masa de cada una de las otras piezas. ¿Cuál es la magnitud y la dirección de su velocidad inmediatamente después de la explosión?

Solución. El sistema de referencia lo escogemos en el plano horizontal (ver figura 9.7).

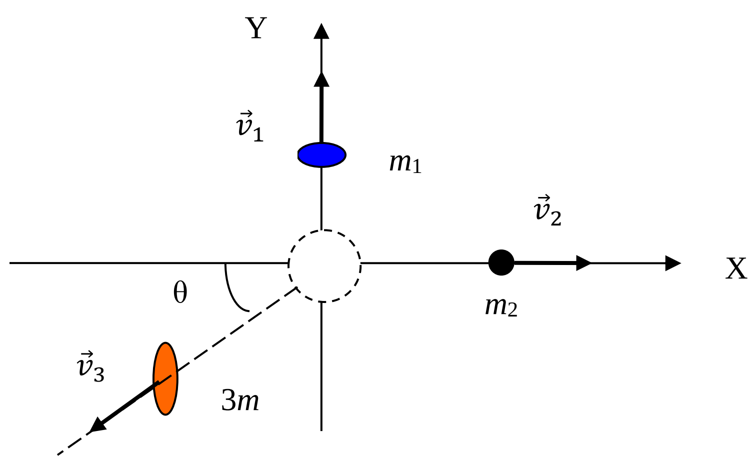


Figura 9.7. Ejemplo 5.

La granada está en el origen. Una masa se mueve a lo largo de X, la otra masa se mueve a lo largo de Y. La masa 3m se mueve con ángulo θ desde la línea del eje X.

El sistema, que consiste inicialmente de la granada y luego de las tres partes es cerrado pero no es aislado, porque tanto la granada como las piezas sienten una fuerza normal (producida por el suelo) y su peso. Sin embargo, estas fuerzas son ambas verticales y no pueden cambiar la componente horizontal del ímpetu del sistema. Tampoco las fuerzas que producen la explosión, pues son internas al sistema. Por tanto, la componente horizontal del ímpetu del sistema se conserva.

El ímpetu inicial es el de la granada y es nulo: $\vec{P}_i = \vec{0}$.

El ímpetu final es: $\vec{P}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$.

Debido a que el ímpetu se conserva, entonces $\vec{P}_i = \vec{P}_f$. En términos de las componentes y sabiendo que las masas m_1 y m_2 son iguales y tienen velocidad con igual magnitud v, podemos escribir

$$X: \quad 0 = mv - 3mv_3\cos\theta \qquad (a)$$

$$Y: \quad 0 = mv - 3mv_3\mathrm{sen}\theta \qquad (b)$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (v_3 y θ). Eliminando las masas se obtiene que $v = 3v_3\cos\theta$, $v = 3v_3\mathrm{sen}\theta$. De donde se obtiene que $\mathrm{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta = 1$, es decir $\theta = 45°$ o sea 135° respecto a las otras partes. Insertando este valor de θ en la ecuación (a) obtenemos que

$$v_3 = v/(3\cos 45°) = 14 \text{ m/s}.$$

←— ←— ←—

Recapitulación

Suponer que el sistema consta de N partículas de masas constantes m_1, m_2,…, m_N en posiciones $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,…, $\vec{r}_N$; la posición de la i-ésima partícula es $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Las coordenadas del centro de masa (cm) son $x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i$, $y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i$, $z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i$; M es la masa del sistema. La velocidad y la aceleración del cm son: $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$ y $\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$. Para calcular la posición del cm de un sólido, dividimos el cuerpo en elementos de masa dm localizada en $\vec{r}$; las sumas se transforman en integrales $x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm$, $y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$, $z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm$ y $M = \int dm$. Estas integrales en la masa pueden expresarse como integrales en el volumen usando la densidad de masa $\rho = \frac{M}{V}$ donde V es el volumen que ocupa M. Cuando la masa está distribuida uniformemente ρ es constante y $\vec{r}_{cm} =$

$\frac{\int (x,y,z)\rho dV}{\int \rho dV} = \frac{1}{V}\iiint (x,y,z)dV$. Para placas delgadas de espesor *e*, la integral de volumen se reduce a una integral de área, $\vec{r}_{cm}=\frac{1}{A}\iint (x,y)dA$.

La segunda ley de Newton se expresa como $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$ **(14)**; en esta ecuación se ha definido el vector $\vec{p} = m\vec{v}$, conocido como ímpetu lineal. La ecuación establece que la rapidez con que cambia el ímpetu es igual a la fuerza resultante que actúa sobre la partícula. Suponer que al sistema no entran ni salen partículas; sobre la partícula 1 actúa la fuerza $\vec{F}_1=\frac{d}{dt}\vec{p}_1$,…, sobre la partícula i actúa la fuerza neta $\vec{F}_i=\frac{d}{dt}\vec{p}_i$. Al sumar estas fuerzas encontramos la fuerza total sobre el sistema completo, $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i$ **(16)**. Considerar primero el lado izquierdo de (16). El primer término es $\vec{F}_1$, la suma de las fuerzas internas (producidas por las otras partículas del sistema) más una fuerza neta externa: $\vec{F}_1=(\vec{F}_1)_{int}+(\vec{F}_1)_{ext}$; análogamente para la partícula i: $\vec{F}_i=(\vec{F}_i)_{int}+(\vec{F}_i)_{ext}$. Sobre cada partícula actúa sólo una fuerza externa; $(\vec{F}_i)_{int}$ es la fuerza resultante de las fuerzas internas que actúan sobre la partícula i: $(\vec{F}_i)_{int}=\vec{F}_{i1}+\vec{F}_{i2}+\ldots+\vec{F}_{iN}=\sum_{j\neq i}^{N}\vec{F}_{ij}$ **(17)**. La fuerza que la partícula j ejerce sobre la partícula i siendo j diferente de i es $\vec{F}_{ij}$. El lado izquierdo de (16) puede ser escrito como $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{int}+\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{ext}$ **(18)**. Insertando (17) en la primera suma del lado derecho, se ve que las fuerzas internas son $\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i)_{int}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}\vec{F}_{ij}=0$. Es cero porque por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i es igual en magnitud y dirección pero de sentido opuesto a la fuerza que la partícula i ejerce sobre la partícula j, $\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$. De tal manera que las fuerzas internas se cancelan por parejas. En la ecuación (18) solamente sobreviven las fuerzas externas, las cuales al ser sumadas producen la fuerza resultante sobre el sistema. Representemos a esta suma como $\vec{F}$, de manera que el lado izquierdo de (16) queda como $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=\vec{F}$. A su vez, el lado derecho de la ecuación (16) puede escribirse como $\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\vec{p}_i=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i=\frac{d}{dt}\vec{P}$, $\vec{P}$ es el ímpetu total del sistema. Finalmente, la ecuación (16) es $\vec{F}=\frac{d}{dt}\vec{P}$ **(19)**. Llegamos al resultado de que el cambio en el ímpetu total del sistema sólo depende de las fuerzas externas. Las ecuaciones (14) y (19) representan la segunda ley de Newton para una partícula y para un sistema de N partículas.

El ímpetu de la i-ésima partícula es $\vec{p}_i = \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)$; para conocer el ímpetu total de las N partículas, tenemos que sumar los ímpetus individuales $\vec{P} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$. La suma en esta ecuación la identificamos como el vector que representa la posición del cm multiplicada por la masa total del sistema. El ímpetu total es $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$ **(20)**, el producto de la masa total por la velocidad del cm. Usando (20) en (19): $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{cm} = M\vec{a}_{cm}$ **(21)**. La fuerza externa total que actúa sobre un sistema de partículas es igual al producto de la masa total por la aceleración del cm. En (21) aparece como si toda la masa estuviera concentrada en el punto con posición $\vec{r}_{cm}$, que se mueve con aceleración $\vec{a}_{cm}$, y como si la fuerza total externa estuviera aplicada en ese punto. Si la fuerza neta es cero (sistema aislado), entonces el ímpetu $\vec{P}$ es constante. Esta es la ley de conservación del ímpetu.

Problemas

1. Encontrar el centro de masa de la placa de densidad uniforme y grosor despreciable mostrada en la figura 9.9. Colocar el origen de coordenadas en la esquina externa del lado izquierdo en la parte baja.

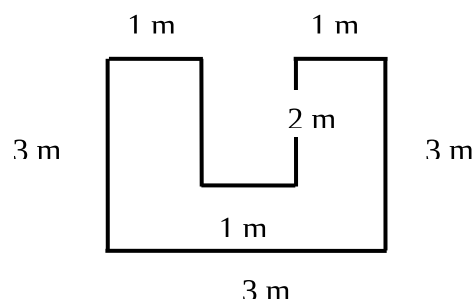


Figura 9.9. Problema 1.

2. La molécula de agua se compone de un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno (ver figura). La masa del átomo de hidrógeno es m_H y la del átomo de oxígeno es $m_O = 16m_H$. El ángulo entre los enlaces O-H es de 106º. Si cada enlace tiene la longitud $\mathrm{d} = 0.1 \times 10^{-9}$ m, ¿dónde está el centro de masa de la molécula?

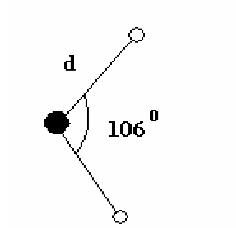


Figura 9.10. Problema 2.

3. Una pieza uniforme de lámina de acero tiene la forma mostrada en la figura. Calcule las coordenadas del centro de masa de la pieza.

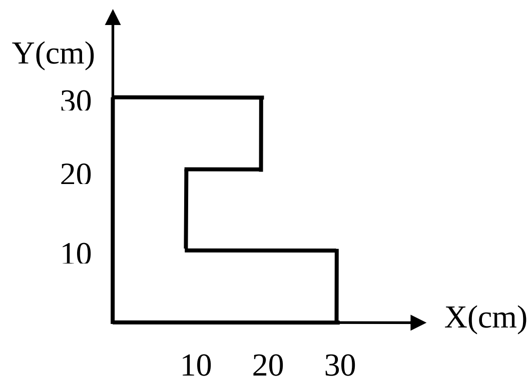


Figura 9.11. Problema 3.

4. Sólo en cinco de los seis vértices de un hexágono regular hay una masa m_0. Encontrar la posición del centro de masa.

5. El rifle especial de un guardabosque dispara balas de hule de 12.6 g a una velocidad de salida de 975 m/s. ¿Cuántas balas debe disparar contra un animal de 84.7 kg que empieza a caminar hacia el guardabosque a 3.87 m/s con objeto de detener al animal en su marcha? Suponga que las balas viajan horizontalmente y que se detienen cuando dan en el blanco.

6. Una nave espacial viaja a 3860 Km/h respecto a la tierra, cuando el motor agotado del cohete se separa y se envía hacia atrás con una rapidez de 125 Km/h respecto al módulo de comando. La masa del motor es cuatro veces la del módulo. ¿Qué velocidad tiene el módulo de comando después de la separación?

7. Una astronauta de 60.0 kg se encuentra en el espacio alejada de la nave espacial cuando la cuerda que la mantiene unida a la nave se rompe. Ella puede lanzar su tanque de oxígeno de 10.0 kg de manera que éste se aleje de la nave espacial con una velocidad de 12.0 m/s para impulsarse a sí misma de regreso a la nave. Suponiendo que inicia su movimiento desde el reposo (respecto de la nave), determine la distancia máxima a la cual puede estar del vehículo espacial cuando la cuerda se rompe para que pueda regresar en menos de 60.0 s (el tiempo que aguanta sin respirar).

8. Un hombre de masa M se encuentra parado sobre una superficie horizontal carente de fricción, lanza horizontalmente una piedra de masa m con una rapidez v_0. ¿Qué rapidez adquiere el hombre como resultado del lanzamiento? Usar M=60 kg, m=60 g, v_0=4.0 m/s.

9. Un hombre de masa M se encuentra parado sobre una superficie horizontal carente de fricción, lanza una piedra de masa m con una rapidez v_0 a un ángulo θ respecto a la horizontal. ¿Qué rapidez horizontal adquiere el hombre como resultado del lanzamiento? Usar M=60 kg, m=60 g, v_0=4.0 m/s, θ=30º.

10. Un patinador de masa M se desliza con velocidad V sobre una pista horizontal carente de fricción; lleva una arma con balas de masa m y que salen del arma con velocidad v respecto a la pista. El patinador hace dos disparos horizontales, una vez hacia adelante y después hacia

atrás. Suponer que en el valor de M se incluye la masa del arma y de las balas no disparadas. ¿En qué caso la velocidad del patinador es mayor, después de disparar? Usar M=80 kg, V=2 m/s, m= 10 g, v= 1000 m/s.

11. Un cuerpo que estaba en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, explota rompiéndose en 3 fragmentos. Los tres fragmentos se mueven sobre la superficie. El primero tiene una masa de 1.0 kg y se mueve a 2.0 m/s en la dirección positiva del eje X. El segundo tiene el doble de la masa del primero y se mueve a 1.0 m/s en la dirección positiva del eje Y. El tercer fragmento tiene igual masa que el primero. Calcular la dirección y la magnitud de su velocidad inmediatamente después de la explosión.

12. Un objeto de 90.0 kg, inicialmente en reposo, explota en 3 pedazos iguales que salen volando horizontalmente. Uno de los pedazos se mueve hacia el norte a 30.0 m/s, otro lo hace hacia el oeste a 45.0 m/s. Determinar la magnitud y dirección de la velocidad del tercer pedazo. ¿Cuál fue la energía cinética cedida a cada pedazo durante la explosión?

10 COLISIONES

Al analizar lo que sucede durante una colisión y aplicando la segunda ley de Newton, se llega al concepto de impulso y a su relación con el ímpetu. Se estudian colisiones producidas en una y dos dimensiones; también se analizan respecto a un sistema de referencia móvil cuyo origen está en el centro de masa.

Introducción

En el lenguaje coloquial se dice que una colisión ocurre cuando dos o más objetos sólidos chocan entre sí. Estos objetos pueden ser casi de cualquier naturaleza; por ejemplo, el bate y la pelota en el beisbol, una bala disparada por un arma y un bloque de madera, o dos vehículos. Como siempre se hace en mecánica al tratar cualquier tema por primera vez, el estudio de las colisiones lo haremos partiendo de situaciones sencillas.

Para empezar considérense dos partículas que chocan a lo largo de una línea recta y que después del choque ambas se mueven sobre la misma línea recta. En forma equivalente, los centros de masa de los dos cuerpos se encuentran sobre una misma línea recta antes y después de chocar. Supondremos que la recta donde se produce el evento es horizontal. El evento puede separarse, en general, en dos etapas bien definidas: antes y después. Definamos la situación antes de la colisión usando la figura 10.1.

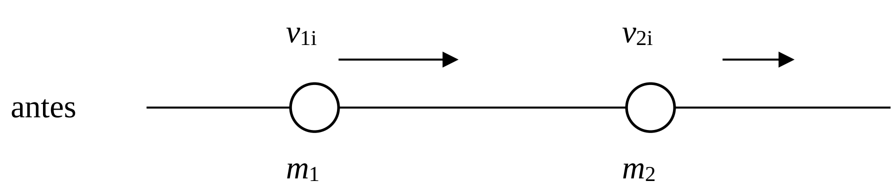


Figura 10.1. Si $v_{1i}>v_{2i}$, la partícula 1 choca con la partícula 2.

Las partículas tienen masas m_1 y m_2 y se mueven inicialmente a la derecha con velocidades v_{1i} y v_{2i}, respectivamente, cuyas magnitudes están representadas por el tamaño de las flechas. La colisión ocurrirá si la velocidad de m_1 es mayor que la de m_2. Es claro que la colisión no ocurrirá cuando v_{1i} sea menor que v_{2i} o cuando estas velocidades tengan igual magnitud. En cambio, la colisión se producirá en otras situaciones como cuando la masa m_2 está en reposo o se mueve hacia la izquierda; por ejemplo, esto último sucede entre el bate y la pelota. Cuando la masa m_2 esté en reposo o su rapidez sea menor, al cuerpo de masa m_1 le llamaremos indistintamente partícula *incidente* o *proyectil* y a la masa m_2 partícula *objetivo* o *blanco*.

Después que la colisión ocurre, debido a la interacción entre las partículas durante el choque, puede obtenerse uno de los resultados representados en la figura 10.2, donde no están representados todos los posibles resultados; por ejemplo, falta el caso en que la partícula incidente quede detenida sin movimiento.

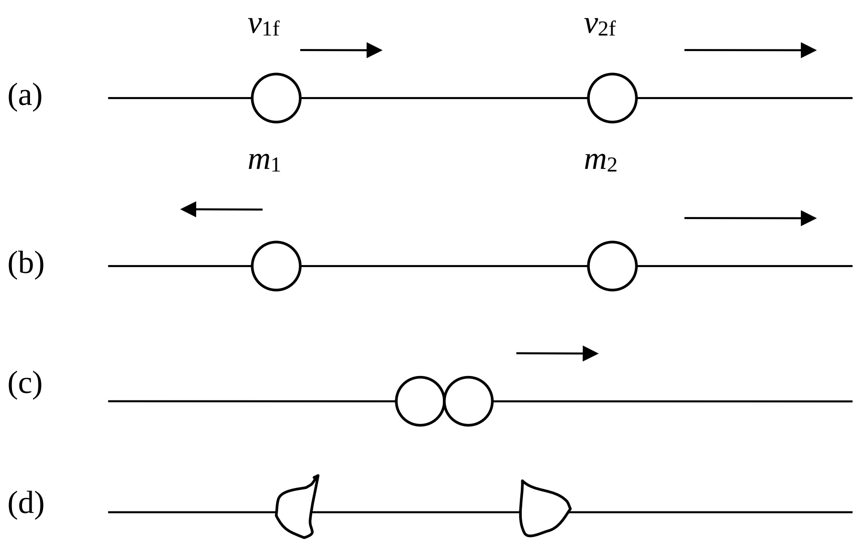


Figura 10.2. Después del choque, en general, las partículas tienen velocidades v_{1f} y v_{2f} diferentes a las velocidades iniciales.

En el resultado representado en el diagrama (a), las dos partículas se mueven hacia la derecha como inicialmente lo hacían, pero sus respectivas velocidades v_{1f} y v_{2f} tienen magnitudes diferentes a las iniciales. El diagrama (b) muestra que la partícula de masa m_1 rebota y se mueve en sentido opuesto a como lo hacía antes de chocar. El diagrama (c) dice que las partículas, como consecuencia de la colisión, quedaron adheridas entre sí y ahora se mueven unidas como una sola pieza. Supóngase que en este caso (c) se toma una película desde antes de la colisión hasta que las partículas se mueven como una pieza; ahora la película se proyecta en el sentido inverso (en reversa), es decir de adelante hacia atrás; se observará que la pieza explota en dos partes. En otras palabras, una explosión puede considerarse, para su estudio, como una colisión. El diagrama (d) muestra que, como resultado del choque, los cuerpos cambiaron de forma y pueden moverse en el mismo sentido o en sentidos opuestos. En este curso no se considerarán casos como el mostrado en el diagrama (d); solamente se considerarán cuerpos rígidos; es decir, cuerpos que no se deforman y que, además, ante una colisión conservan sus masas individuales.

Todas las colisiones presentan dos características que les son comunes:

1. Existe una clara distinción entre “antes” y “después” del suceso.

2. Las leyes de conservación del ímpetu y de la energía mecánica proporcionan mucha información aun cuando se sepa poco sobre las leyes de las fuerzas que operan “durante” el suceso mismo.

10.1 Ímpetu lineal e impulso

Para analizar lo que sucede “durante” la colisión invoquemos la segunda ley de Newton, la cual escribimos como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} .$$

Multiplicamos ambos miembros por diferencial del tiempo (*dt*) y usamos el teorema del cálculo diferencial que establece que la diferencial de una función *f* que depende de la variable *x* es igual a la derivada de la función *f* respecto de *x* multiplicada por la diferencial de la variable independiente: $df = \frac{df}{dx}dx$; entonces la relación anterior puede escribirse como

$$\vec{F}dt = \frac{d\vec{P}}{dt}dt = d\vec{P} .$$

Si la colisión empieza en el tiempo t_i y termina en el tiempo t_f, el primer miembro de la ecuación anterior puede integrarse entre estos tiempos y el segundo miembro puede integrarse entre los ímpetus justo antes y justo después de la colisión; es decir,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_i}^{\vec{P}_f} d\vec{P} . \qquad (1)$$

Recuérdese que esta $\vec{F}$ es la fuerza neta, la cual incluye a las fuerzas externas que puedan estar presentes y a la fuerza que aparece durante la colisión $\vec{F} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{imp}$; esta nueva fuerza es función del tiempo y se llama *fuerza impulsiva*. La integral de la fuerza impulsiva en el tiempo que dura la colisión (tiempo en que la fuerza impulsiva actúa) se llama *impulso* $\vec{J}$, esto es

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{imp} dt = \vec{J} \ . \qquad (2)$$

En general, esta fuerza impulsiva tiene magnitud muy grande (comparada con la magnitud de otras fuerzas), actúa en un tiempo corto y depende del tiempo que dura la colisión, o sea que $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{ext} dt \approx 0$. Debido a esto puede considerarse que durante la colisión $\vec{F} \approx \vec{F}_{imp}$.

El miembro derecho de la ecuación (1) es $\Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$, es el cambio en el ímpetu debido a la colisión. Es decir,

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{\vec{P}_i}^{\vec{P}_f} d\vec{P} \Rightarrow \vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i \, .$$

Por tanto, puede decirse que el cambio producido por una fuerza impulsiva en el ímpetu de un cuerpo es igual al impulso. A la relación representada en la ecuación vectorial (1), o equivalentemente ésta última, se le conoce como *teorema impulso-ímpetu lineal*.

Consideremos la ecuación (2) en una dimensión; puede escribirse como

$$\int_{t_i}^{t_f} F dt = J \ .$$

Esta integral está representada en la figura 10.3.

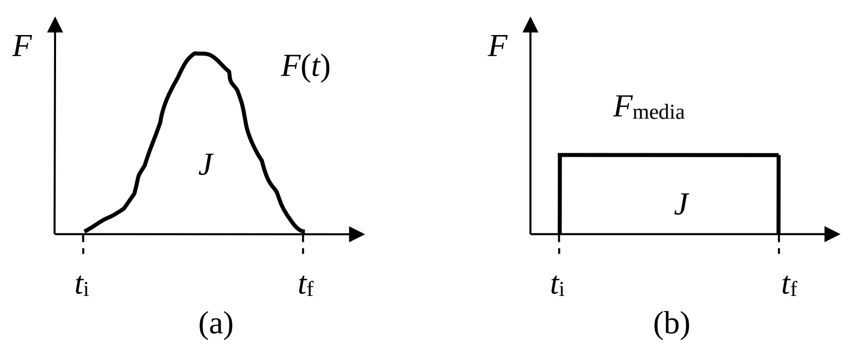


Figura 10.3. El área bajo la curva en (a) es igual al área del rectángulo en (b).

La magnitud del impulso J es igual al área delimitada por la curva $F(t)$ y el eje del tiempo entre los valores t_i y t_f, como ilustra la figura 10.3(a). En otras palabras, la magnitud del impulso es igual al área bajo la curva F vs t. Para fines prácticos no es necesario conocer los detalles de la curva ($F(t)$), el área puede ser representada por el área de un rectángulo donde su altura representa la fuerza media F_{media} que actúa sobre el cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$, ver figura 10.3(b). Es decir,

$$\int_{t_i}^{t_f} F dt = \int_{t_i}^{t_f} F_{media} dt = F_{media} \Delta t = J \ . \qquad (3)$$

10.2 Conservación del ímpetu lineal durante las colisiones

Supongamos que no hay fuerzas externas. En la figura siguiente se ilustran las tres etapas que suceden en una colisión entre dos cuerpos, en particular nos interesa lo que acontece en la etapa “durante”. La figura muestra una colisión sobre una línea recta para facilitar la exposición del tema. Pero la colisión podría ocurrir en un plano, por ejemplo. Por tanto, seguiremos usando la notación vectorial para no perder generalidad.

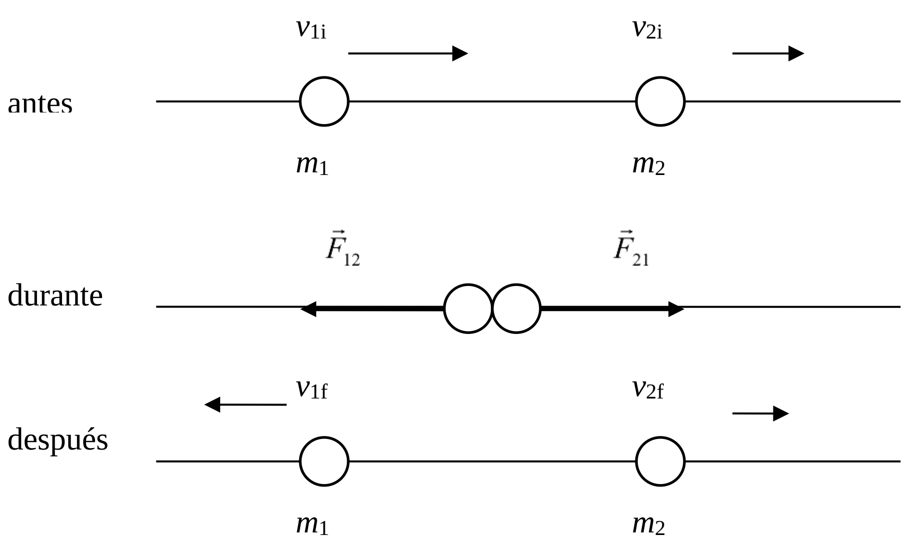


Figura 10.4. Etapas que se presentan en una colisión.

Durante el tiempo que dura la colisión, el cuerpo 1 siente que el cuerpo 2 ejerce sobre él una fuerza $\vec{F}_{12}$; a su vez, el cuerpo 2 siente una fuerza $\vec{F}_{21}$ producida por el cuerpo 1. Al aplicar la ecuación (3) para calcular el impulso en cada cuerpo, se obtiene

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12media} dt = \vec{F}_{12media} \Delta t = \vec{J}_1 = \Delta \vec{p}_1 ,$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21media} dt = \vec{F}_{21media} \Delta t = \vec{J}_2 = \Delta \vec{p}_2 .$$

Debido a que se ha supuesto que no actúan otras fuerzas, el cambio en el ímpetu de cada partícula es $\Delta \vec{p}_1$ y $\Delta \vec{p}_2$. Además, al aplicar la tercera ley de Newton se tiene que $\vec{F}_{12media} = -\vec{F}_{21media}$, lo cual sucede para todo tiempo mientras dura el contacto; por tanto

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 . \qquad (4)$$

Por otra parte, el ímpetu inicial total es $\vec{P}_i = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}$ y el ímpetu final total es $\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$, por lo que el cambio en el ímpetu total, usando el resultado (4), es

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = (\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}) - (\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}) = (\vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i}) + (\vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i}) = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0} .$$

Por tanto, si no hay fuerzas externas, la colisión no altera el ímpetu total del sistema. Las fuerzas impulsivas que actúan durante la colisión son fuerzas internas que no producen efecto alguno sobre el ímpetu total del sistema. En las colisiones (usualmente) sucede que las fuerzas impulsivas son muy grandes comparadas con las fuerzas externas que pudieran actuar. En la práctica se puede aplicar la ley de conservación del ímpetu durante las colisiones, con tal que el tiempo de la colisión sea suficientemente pequeño. Puede decirse que $\vec{P}_i$ justo antes de la colisión es igual a $\vec{P}_f$ justo después de la colisión.

Definición de colisión. Como resultado de la discusión anterior, ahora podemos dar una definición formal de colisión desde el punto de vista de la mecánica:

> una colisión es un evento en el que dos o más cuerpos (los que participan en la colisión) ejercen fuerzas relativamente grandes entre sí durante un tiempo relativamente corto.

En una colisión los cuerpos no necesariamente entran en contacto. Por ejemplo, en una colisión entre dos imanes de barra con sus polos de igual signo encontrados no se produce contacto entre ellos, pues los de signo igual se repelen.

Clasificación de las colisiones

Las colisiones se clasifican en términos de la energía cinética como elásticas o inelásticas. Una colisión es *elástica* si la energía cinética se conserva; es decir, si su valor es el mismo antes y después de la colisión. Si la energía cinética no se conserva, se dice que la colisión es *inelástica*. Además, si los cuerpos se quedan adheridos después de la colisión, se dice que es una colisión *completamente inelástica*.

Sabemos que el ímpetu se conserva en todo tipo de colisión, que podemos ignorar a las fuerzas impulsivas, y que en algunos casos también se conserva la energía cinética; pero no siempre se puede conocer el resultado de la colisión en términos de las características que el sistema tiene antes de la colisión. Aun cuando se desconozcan las fuerzas que actúan durante la colisión, los movimientos de las partículas después de que la colisión ocurre se pueden describir en términos del conocimiento completo de sus movimientos antes de la misma, solamente en dos situaciones particulares:

siempre que la colisión sea completamente inelástica, o

que la colisión sea binaria, elástica y en una dimensión.

Para conocer el movimiento completo después del choque, en las otras situaciones se necesita información adicional a la que se tiene del movimiento antes de la colisión; por ejemplo, información experimental.

10.3 Colisiones en una línea recta

En lo que sigue se hará la suposición que los dos cuerpos antes y después del choque se mueven en la misma línea recta; también se supondrá que esa línea recta es horizontal. Consecuentemente, no es necesario tomar en cuenta la forma y tamaño de los cuerpos; es decir, se comportan como partículas (masa de cada cuerpo concentrada en su centro de masa).

Colisión inelástica. Las partículas que participan en la colisión tienen masas m_1 y m_2, inicialmente se mueven con velocidades v_{1i} y v_{2i}, respectivamente. La partícula objetivo (m_2) podría tener velocidad en sentido opuesto al mostrado en la figura 10.5a o tener velocidad nula.

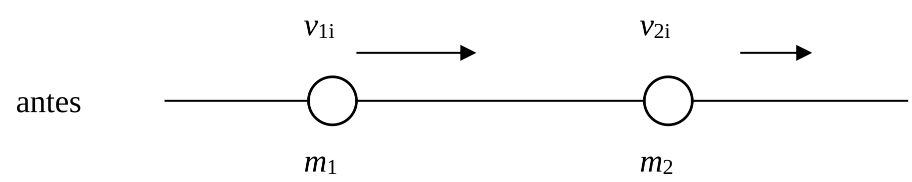


Figura 10.5a. La partícula objetivo podría estar en reposo o moviéndose hacia la izquierda.

El ímpetu inicial de este sistema de dos partículas es

$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}.$$

Después que la colisión se produce, las partículas se mueven con velocidades v_{1f} y v_{2f}; la partícula proyectil podría tener velocidad en el mismo sentido o en sentido opuesto al que tenía inicialmente (ver figura 10.5b) o bien tener velocidad nula.

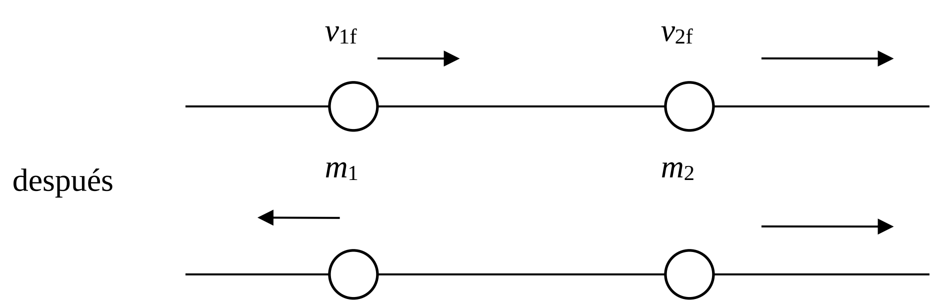


Figura 10.5b. Se muestran dos posibles movimientos de la partícula proyectil.

El ímpetu del sistema después de la colisión es

$$P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

Debido a que el ímpetu tiene el mismo valor antes y después de la colisión, se obtiene que

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \qquad (5)$$

Esta ecuación (5) enuncia la conservación del ímpetu. También enuncia que la velocidad del centro de masa del sistema tiene el mismo valor antes y después de la colisión (pues

$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)V_{cm}$ que para dos partículas es la ecuación (20) del capítulo 9). Es decir, ambos enunciados son equivalentes en un sistema unidimensional cerrado y aislado. En la ecuación (5) aparecen cuatro velocidades, de manera tal que si se quiere calcular alguna de ellas es necesario conocer las tres restantes.

Colisión completamente inelástica. Supóngase ahora que como resultado de la colisión las partículas quedan adheridas; es decir, después de la colisión se tiene un cuerpo de masa m_1+m_2 con velocidad v_f, como ilustra la figura 10.5c. En este caso la ecuación (5) se reduce a

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=(m_1+m_2)v_f. \qquad (5´)$$

Ésta es una de las dos situaciones en que con sólo conocer las masas y las velocidades iniciales se puede determinar la velocidad final.

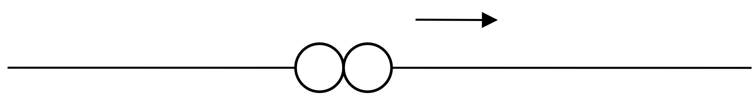


Figura 10.5c. En una colisión completamente inelástica las partículas quedan adheridas.

Colisión elástica. En esta situación, además de la conservación del ímpetu, se satisface la conservación de la energía cinética. Si colocamos el nivel cero de la energía potencial en la misma línea horizontal de la colisión, entonces puede decirse que la energía mecánica (U+K) también se conserva. La energía cinética antes de la colisión está dada como

$$K_i = \frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2}\,.$$

Después de la colisión la energía cinética es

$$K_f = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2}\,.$$

Que esta energía se conserve significa que K_i=K_f, es decir

$$\frac{m_1 v_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2f}^2}{2}\,. \qquad (6)$$

Ahora se tienen dos ecuaciones ((5) y (6)) con las cuales se pueden calcular dos incógnitas. Ésta es la otra situación en que con el conocimiento del movimiento antes de la colisión se puede conocer completamente el movimiento del sistema de dos partículas después de la colisión. Supóngase que se conocen las velocidades iniciales y las masas, en este caso se dispone de las dos ecuaciones (5) y (6) con las que se pueden calcular las dos velocidades finales, usando el método que más convenga. Para lograrlo se puede proceder de la manera siguiente. Las ecuaciones (5) y (6) se reescriben, respectivamente, como

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \,, \qquad (5´´)$$

$$m_1(v_{1i}^{\ 2} - v_{1f}^{\ 2}) = m_2(v_{2f}^{\ 2} - v_{2i}^{\ 2}) \,. \qquad (6´)$$

Al dividir miembro a miembro la ecuación (6´) entre la ecuación (5´´) y suponiendo que $v_{1i} \neq v_{1f}$ y que $v_{2i} \neq v_{2f}$, se obtiene que

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} \,;$$

esta expresión puede ser escrita como

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} = -(v_{1f} - v_{2f}) \,. \qquad (7)$$

Esta relación entre las velocidades iniciales y las velocidades finales está diciendo que en una colisión elástica en una dimensión, la velocidad relativa de acercamiento ($v_{12,i}=v_{1i}-v_{2i}$) de las partículas entre sí, antes de la colisión, es igual y opuesta a la velocidad relativa de separación ($v_{12,f}=-(v_{1f}-v_{2f})$) de las partículas entre sí después de la colisión.

Para calcular las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales se pueden usar dos de las tres ecuaciones (5), (6) o (7); es más fácil despejar una velocidad final de la ecuación (7) y sustituirla en la ecuación (5) porque no es necesario elevarla al cuadrado, cosa que sí se requiere si se sustituye en (6). De (7) se obtiene

$$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i} \,,$$

al sustituir este valor en (5´´) y resolver para v_{1f} se obtiene

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{1i} + v_{1f} - v_{2i} - v_{2i}) \,,$$

$$m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} = m_2 v_{1i} + m_2 v_{1f} - 2m_2 v_{2i} \,,$$

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i} + 2m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{1f} \,.$$

Por tanto,

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \,. \qquad (8a)$$

En forma análoga se despeja v_{1f} de la ecuación (7) y se sustituye en la ecuación (5´´) para obtener la velocidad v_{2f}, el resultado es

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} . \qquad (8b)$$

Una manera alternativa y fácil de obtener la fórmula (8b) es usando la fórmula (8a) e intercambiando los subíndices 1 y 2 en las masas y en las velocidades, pues hay simetría ante el intercambio de las partículas 1 y 2. Estas ecuaciones (8) contienen la información sobre las velocidades finales de las dos partículas que participan en una colisión elástica, en términos de las velocidades iniciales.

Casos particulares. Ahora se analizarán casos particulares de la información contenida en las fórmulas (8).

(i) Masas iguales. Supóngase que $m_1=m_2=m$, como sucede con las bolas de billar. Los resultados (8a) y (8b) se reducen, respectivamente, a

$$v_{1f}=v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f}=v_{1i}.$$

Es decir, las partículas intercambian sus velocidades.

(ii) Partícula blanco en reposo inicialmente. En este caso la velocidad $v_{2i}=0$ y las fórmulas (8a) y (8b) se reducen, respectivamente, a

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} .$$

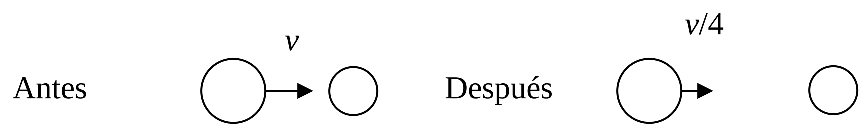
Con estas dos últimas expresiones se pueden analizar tres subcasos relacionados al tamaño de las masas.

- $m_1=m_2$. Cuando las masas son iguales, entonces sucede que $v_{1f}=0$ y $v_{2f}=v_{1i}$. Es decir, la partícula proyectil transfiere todo su estado de movimiento a la partícula blanco.
- $m_1 \ll m_2$. Cuando la masa de la partícula blanco es mucho mayor que la masa de la partícula proyectil (como en el caso de una pelota de basquetbol contra el tablero o una pelota lanzada contra una pared), entonces $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx \frac{2m_1}{m_2} v_{1i}$ o $v_{2f} \approx 0$. Para el proyectil, el ímpetu inicial es $p_{1i}=m_1v_{1i}$ y el ímpetu final es $p_{1f} = m_1 v_{1f} \approx -m_1 v_{1i}$, de manera que el cambio en el ímpetu es $\Delta p_1 \approx -2m_1 v_{1i}$.

- m_1»m_2. Cuando la masa de la partícula blanco es mucho menor que la masa de la partícula proyectil (como en el caso de una bola de boliche que choca contra los pinos), entonces $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$.

Ejemplo 1. *Colisión elástica*. Un cuerpo de 2.0 kg de masa hace una colisión elástica con otro cuerpo en reposo y continúa moviéndose, en la dirección horizontal original, pero con un cuarto de su velocidad original. a) ¿Cuál es la masa del otro cuerpo? b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa de los dos cuerpos si la velocidad inicial del cuerpo de 2.0 kg es de 4.0 m/s?

Solución. La figura ilustra las situaciones antes y después de la colisión.



a) Si no hay fuerzas externas horizontales, el ímpetu se conserva. El ímpetu antes del choque es $p_i=m_1v$. El ímpetu después del choque es $p_f=m_1v_1+m_2v_2=m_1\left(\frac{v}{4}\right)+m_2v_2$. La conservación del ímpetu conduce a

$$m_1 v = m_1\left(\frac{v}{4}\right) + m_2 v_2 . \qquad (a)$$

La conservación de la energía cinética indica que

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{v}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,2} . \qquad (b)$$

Reescribo estas 2 ecuaciones como

$$m_1\left(v - \frac{v}{4}\right) = m_2 v_2 , \qquad (a')$$

$$m_1\left(v^2 - \frac{v^2}{16}\right) = m_2 v_2^{\,2} . \qquad (b')$$

Dividiendo miembro a miembro la ecuación (b’) entre la ecuación (a’) se obtiene

$$v + \frac{v}{4} = v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{5v}{4} .$$

Al insertar este valor de v_2 en la ecuación (a) se obtiene

$m_1 v = m_1 \frac{v}{4} + m_2 \frac{5v}{4} \Rightarrow m_2 = \frac{3}{5} m_1$. Por tanto, $m_2 = 1.2$ kg.

Otra forma equivalente (para evitar la división de (b') entre (a')). Como buscamos la masa m_2, elevo al cuadrado ambos miembros de la ecuación (a') y despejo m_2, el resultado es

$m_2 = \frac{\frac{9}{16} m_1^2 v^2}{m_2 v_2^2}$. Ahora sustituyo el denominador de esta expresión por el primer miembro de la ecuación (b'), se obtiene

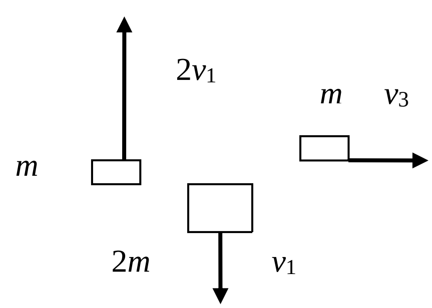
$m_2 = \frac{\frac{9}{16} m_1^2 v^2}{m_2 v_2^2} = \frac{\frac{9}{16} m_1^2 v^2}{\frac{15}{16} m_1 v^2} = \frac{9}{15} m_1 = \frac{3}{5} m_1$. Por tanto, $m_2 = 1.2$ kg.

b) La velocidad del centro de masa antes de la colisión es

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{2.0 \times 4.0}{2.0 + 1.2} = 2.5 .$$

Por tanto, $V_{cm} = 2.5$ m/s.

Ejemplo 2. *Explosión.* La figura muestra el instante después de la explosión de un proyectil en tres pedazos, sobre una superficie horizontal sin fricción. (a) Encontrar la velocidad (magnitud y dirección) del proyectil en el instante anterior a la explosión y (b) la energía cinética antes de la explosión.



Solución. La figura muestra que el pedazo con rapidez v_3 se mueve en dirección paralela al eje X y que los otros pedazos lo hacen en dirección paralela al eje Y.

a) Ímpetu inicial: $\vec{P}_i = M\vec{v}_i = 4m\vec{v}_i$,

ímpetu final: $\vec{P}_f = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$, $\vec{P}_f = m2v_1\hat{j} - 2mv_1\hat{j} + mv_3\hat{i} = mv_3\hat{i}$.

Por conservación de ímpetu:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f = 4m\vec{v}_i = mv_3\hat{i} \therefore \vec{v}_i = \frac{v_3}{4}\hat{i} .$$

b) La energía cinética inicial es $K_i = \frac{1}{2}Mv_i^{\ 2} = \frac{1}{2}(4m)\left(\frac{v_3}{4}\right)^2$. Por tanto, $K_i = \frac{1}{8}mv_3^{\ 2}$.

Ejemplo 3. *Colisión vertical*. Una pelota pequeña de masa m_1 está encima de una pelota grande de masa m_2 y las dos se dejan caer simultáneamente desde una altura h. Suponer que las pelotas no están en contacto, sino separadas por una distancia despreciable, la cual se mantiene durante la caída de ambas. La pelota grande choca con el piso y en su rebote choca con la pelota pequeña. Después de la colisión entre ellas, la pelota menor sube hasta una altura mayor que h. Si la colisión entre la pelota mayor y el piso es elástica y si la colisión entre las dos pelotas también es elástica, determinar el valor del cociente m_1/m_2 para lograr que la pelota grande se detenga al chocar con la pelota pequeña y para que la altura que alcanza la pelota pequeña sea mayor que h.

Solución. Ninguna pelota, soltada individualmente, sube hasta su altura inicial porque la energía mecánica no se conserva. Que la pelota de encima rebota hasta una altura mayor que la inicial, significa que ganó una energía que es mayor que la que pierde cuando cae ella sola; la única posibilidad de adquirirla es que la tome de la otra pelota, durante el choque. Suponer colisiones en una línea recta y elásticas equivale a pedir que la energía cinética y el ímpetu lineal se conserven. Sin embargo, es importante estar consciente que el ímpetu no se conserva en la dirección vertical pues están presentes la fuerza de gravedad y la resistencia del aire; el tiempo de colisión es muy pequeño y por tanto el efecto de la fuerza de gravedad es despreciable.

Si las pelotas por separado caen desde la altura h+R (R=radio), tienen masas m_i y si se conservara la energía mecánica, con energía potencial cero en la altura R, entonces cada una llegaría al suelo con velocidad v_i y se cumpliría que $m_igh=m_iv_i^2/2$, de donde se obtiene que $v_i^2=2gh$. Justo antes que la pelota inferior toque el suelo, ambas pelotas están separadas por una distancia lo bastante pequeña para que sus velocidades puedan considerarse iguales, pero lo suficientemente grande para que la pelota inferior tenga tiempo de chocar primero con el suelo y después con la otra justo cuando empiece a rebotar. Se puede suponer que al caer casi juntas desde la altura h llegan al suelo con la misma velocidad si $R << h$. Como la colisión de la pelota con el suelo es elástica, la magnitud de su velocidad con que llega al suelo es la misma con que rebota.

La parte (a) de la figura siguiente ilustra la situación antes que la pelota de encima (etiquetada como 1) choque con la pelota 2, la cual en ese momento empieza a subir con la misma rapidez v_{2a} con que llegó al suelo y que es el mismo valor de la velocidad que la pelota 1 lleva, $v_{1a}=v_{2a}$. La parte (b) de la figura ilustra la situación después que la pelota 1 choca con la pelota 2, ésta se queda sin movimiento ($v_{2d}=0$) y la pelota 1 empieza a subir con velocidad v_{1d}.

Tomando la dirección positiva hacia arriba, el ímpetu antes de la colisión entre las pelotas es $p_a = m_2 v_{2a} - m_1 v_{1a}$ y después es $p_d = m_1 v_{1d}$. Igualándolos y sabiendo que $v_{1a}=v_{2a}$, se obtiene

$$m_1 v_{1d} = (m_2 - m_1) v_{1a} . \qquad (a)$$

(a) (b)

La energía cinética antes de la colisión es $K_a = \frac{m_1 v_{1a}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2a}^2}{2}$ y después es $K_d = \frac{m_1 v_{1d}^2}{2}$. Al escoger la energía potencial cero en la posición donde ocurre la colisión ($y=2R_2$), entonces en la conservación de la energía mecánica es suficiente considerar solo la energía cinética. Igualando K_a y K_d se llega a que

$$m_1 v_{1d}^2 = m_1 v_{1a}^2 + m_2 v_{2a}^2 . \qquad (b)$$

Dividiendo miembro a miembro la fórmula (b) entre la (a), y usando $v_{1a}=v_{2a}$, se obtiene

$$v_{1d} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} v_{1a} . \qquad (c)$$

Sustituyendo este valor de v_{1d} en las expresión (a) se obtiene la relación que las masas deben satisfacer

$m_1\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_2-m_1}\right)v_{1a} = (m_2-m_1)v_{1a}$. De donde $m_1^{\,2} + m_1m_2 = (m_2-m_1)^2 = m_2^{\,2} + m_1^{\,2} - 2m_1m_2$.

Por tanto,

$$m_2 = 3m_1 . \qquad (d)$$

Con estos resultados para v_{1d} y m_2 puede ser calculada la altura a la que llegaría la pelota 1 en su rebote, si se cumplieran las dos leyes de conservación. Experimentalmente se logra el resultado espectacular de que la pelota 1 llega hasta una altura del orden del doble de la altura inicial. Este ejemplo aparece como problema en la referencia 1 y se resuelve en la referencia 2.

10.4 Colisiones en el marco de referencia del centro de masa

Para dos partículas que chocan el ímpetu del sistema puede escribirse (en forma vectorial) a partir de la ecuación (5) como

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V}_{cm} .$$

En esta expresión hay tres aspectos que deben notarse: 1) aparece la definición de la velocidad del centro de masa; 2) se usó el carácter vectorial, lo cual significa que es válida en cualquier número de dimensiones; 3) puede representar el ímpetu inicial o el ímpetu final, para que represente a uno o al otro solamente falta agregar los subíndices i o f en el ímpetu y en las velocidades.

Si no hay fuerzas externas el ímpetu del sistema se conserva, es el mismo antes y después de la colisión. Por tanto, la velocidad del centro de masa es uniforme, sin importar si la colisión es inelástica o elástica; solamente cambia la distribución de los ímpetus.

Colisión unidimensional. Recordemos que en el capítulo del Movimiento en el Plano estudiamos la relación entre las velocidades medidas en sistemas inerciales distintos: $\vec{v}_{PS} = \vec{v}_{PS'} + \vec{v}_{S'S}$, que significa que la velocidad del objeto *P* respecto al sistema fijo *S* es igual a la velocidad del objeto *P* respecto al sistema móvil *S*' más la velocidad del sistema móvil *S*' respecto al sistema fijo *S*. Respecto a un sistema móvil que se mueva con velocidad V_{cm} la relación entre las velocidades en una dimensión es $v=v'+V_{cm}$, donde se ha usado el apóstrofe (´) para indicar que se trata de la velocidad medida en el sistema móvil. Sabiendo que la velocidad del centro de masa es $V_{cm}=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$, calcularemos enseguida las velocidades iniciales respecto al sistema del cm (sistema móvil) de las dos partículas que colisionan. Las velocidades son

$$v'_{1i}=v_{1i}-V_{cmi}=v_{1i}-\frac{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_{1i}+m_2v_{1i}-m_1v_{1i}-m_2v_{2i}}{m_1+m_2}=\frac{m_2(v_{1i}-v_{2i})}{m_1+m_2}, \qquad (9a)$$

$$v'_{2i}=v_{2i}-V_{cmi}=v_{2i}-\frac{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_{2i}+m_2v_{2i}-m_1v_{1i}-m_2v_{2i}}{m_1+m_2}=-\frac{m_1(v_{1i}-v_{2i})}{m_1+m_2}. \qquad (9b)$$

Nótese la simetría que aparece en estas dos expresiones: las partículas vistas desde el centro de masa se están acercando al cm (es decir, se mueven en sentidos opuestos). En el caso particular de masas iguales, las rapideces v'_{1i} y v'_{2i} son iguales.

Colisión elástica. En el sistema de referencia del laboratorio (sistema fijo) las ecuaciones (8a) y (8b) para las velocidades finales son válidas. Debido a que el ímpetu se conserva $P_i=P_f$, pero $P_i=MV_{cmi}$ y $P_f=MV_{cmf}$, por tanto, $V_{cmi}=V_{cmf}=V_{cm}$, las velocidades finales representadas en las ecuaciones (8) para expresarlas en el sistema cm se transforman como

$$v'_{1f}=v_{1f}-V_{cm}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i}-\frac{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}}{m_1+m_2}=\frac{m_2(v_{2i}-v_{1i})}{m_1+m_2}\equiv -v'_{1i}\,. \qquad (10a)$$

En forma completamente análoga se obtiene que

$$v'_{2f}=-v'_{2i}\,. \qquad (10b)$$

Estos dos resultados (10) quieren decir que en el marco de referencia del centro de masa, las velocidades de m_1 y m_2 simplemente invierten sus sentidos debido a la colisión.

Es importante enfatizar que la velocidad del centro de masa es nula si es medida respecto a un referencial que se mueve con el centro de masa, sin importar si la colisión es elástica o inelástica; esto puede verificarse usando la definición de velocidad del centro de masa y las velocidades dadas en las ecuaciones (9) y (10):

usando (9): $V'_{cmi}=\dfrac{m_1 v'_{1i}+m_2 v'_{2i}}{m_1+m_2}=\dfrac{1}{m_1+m_2}\left\{\dfrac{m_1 m_2 (v_{1i}-v_{2i})}{m_1+m_2}-\dfrac{m_1 m_2 (v_{1i}-v_{2i})}{m_1+m_2}\right\}=0$,

usando (10): $V'_{cmf}=\dfrac{m_1 v'_{1f}+m_2 v'_{2f}}{m_1+m_2}=\dfrac{1}{m_1+m_2}\left\{-m_1 v'_{1i}-m_2 v'_{2i}\right\}=-V'_{cmi}=0$.

El resultado que se obtiene es el ya anunciado: $V'_{cmi}=V'_{cmf}=V'_{cm}=0$.

Colisión inelástica. En este caso solamente el ímpetu se conserva, es decir

$$m_1 v_{1i}+m_2 v_{2i}=m_1 v_{1f}+m_2 v_{2f}. \qquad (5)$$

Las velocidades iniciales medidas respecto al sistema móvil, v'_{1i} y v'_{2i}, son exactamente iguales a las dadas en las ecuaciones (9), pues en la deducción de las fórmulas (9) sólo se usaron las definiciones de velocidad relativa y de velocidad del centro de masa. Las velocidades finales respecto al sistema móvil, v'_{1f} y v'_{2f}, no pueden ser calculadas ambas pues no se conocen las dos velocidades finales respecto al sistema fijo, v_{1f} y v_{2f}, ya que sólo se dispone de la conservación del ímpetu; únicamente puede conocerse una de ellas en términos de la otra.

Para el caso de colisión *completamente inelástica*, a partir de la ecuación (5´) se obtiene que la velocidad final respecto al sistema fijo es

$$v_f=\frac{m_1 v_{1i}+m_2 v_{2i}}{m_1+m_2}\equiv V_{cm}.$$

Por tanto, la velocidad final respecto al sistema móvil es $v'_f=v_f-V_{cm}=0$. Este resultado era de esperarse pues los cuerpos se quedan pegados después de colisionar.

Con estos resultados se aprecia la gran ventaja de describir las colisiones desde un sistema de referencia colocado en el centro de masa.

10.5 Colisiones en el plano.

Ahora el estudio de las colisiones lo trataremos en dos dimensiones y se hará respecto a un sistema de referencia fijo (por ejemplo, en el laboratorio). Para simplificar el análisis, igual que en el caso de en una línea recta, sólo se considerarán dos cuerpos que participan en la colisión. Supóngase que los cuerpos son discos circulares que se deslizan sobre una superficie sin fricción y que la colisión no es frontal, o sea que los centros de masa no se mueven a lo largo de una misma línea sino que sus movimientos son en líneas paralelas, como se ilustra en la figura 10.6. Por simplicidad, suponer que ambas partículas se mueven en un plano horizontal. A la separación entre estas dos líneas paralelas se le llama *parámetro de impacto*. Para que la colisión se produzca, en este caso, la suma de los radios de los dos discos debe ser menor a este parámetro.

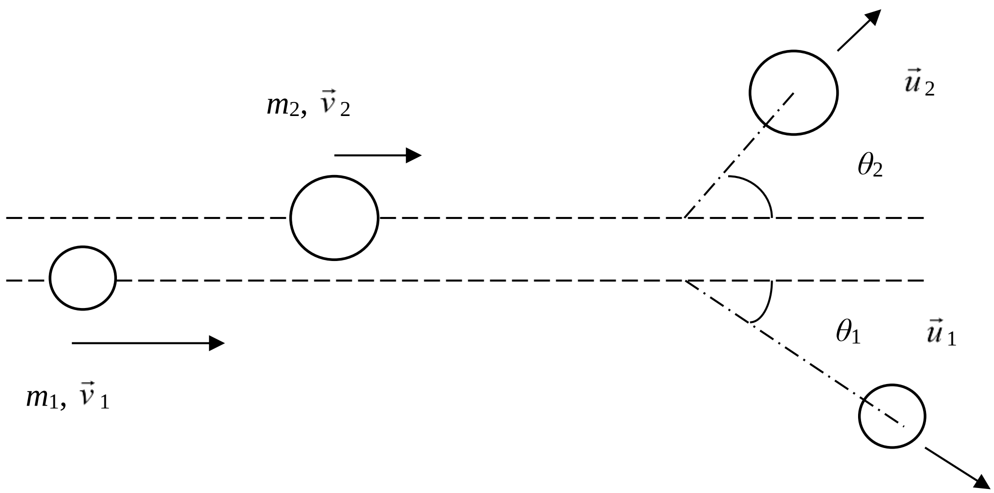


Figura 10.6. Las velocidades antes de la colisión son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, después de la colisión son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.

Supondremos que la partícula de masa m_1 inicialmente se mueve con velocidad $\vec{v}_1$ y que la partícula de masa m_2 lo hace con velocidad $\vec{v}_2$ en una trayectoria paralela a la de la partícula 1. Después de la colisión las partículas no se mueven en líneas paralelas, sino que sus velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ lo hacen en direcciones que forman los ángulos θ_1 y θ_2 con las direcciones originales, respectivamente. Escogemos un sistema de coordenadas de tal manera que el eje X sea paralelo a las direcciones de los movimientos originales y el eje Y positivo hacia arriba en el plano de la figura. La conservación del ímpetu en términos de las componentes la representamos como

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \qquad (11a)$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} \qquad (11b)$$

La suposición de que los cuerpos antes de la colisión se muevan siguiendo trayectorias paralelas, realmente no es necesaria; se le ha supuesto así solamente con fines didácticos para ayudar a visualizar el sistema.

Colisión inelástica. En este caso solamente se dispone de este par de ecuaciones (11). Aun si se conocieran las velocidades iniciales, las velocidades finales del sistema no pueden determinarse pues se tienen cuatro incógnitas: las dos componentes de cada una de las dos velocidades finales o, en forma equivalente, las magnitudes de las dos velocidades finales y sus correspondientes ángulos. Para resolver el sistema se necesita tener más información; por ejemplo, la que se obtiene al realizar el experimento.

Colisión completamente inelástica. En este caso especial las partículas quedan adheridas. La conservación del ímpetu indica que

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\,\vec{u}\,. \qquad (12)$$

Resulta que la velocidad final $\vec{u}$ es igual a la velocidad inicial del centro de masa.

Colisión elástica. Además del ímpetu, ahora también se conserva la energía cinética. La energía cinética antes de la colisión está dada como

$$K_i=\frac{m_1 v_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2 v_2^{\,2}}{2}\,.$$

Después de la colisión la energía cinética es

$$K_f=\frac{m_1 u_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2 u_2^{\,2}}{2}\,.$$

Que esta energía se conserve significa que K_i=K_f, es decir

$$\frac{m_1 v_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2 v_2^{\,2}}{2}=\frac{m_1 u_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2 u_2^{\,2}}{2}\,. \qquad (13)$$

Ahora se tienen tres ecuaciones (ecuaciones 11 y 13) y cuatro incógnitas (u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}), con las cuales no es posible determinar todas las características del movimiento después de la colisión solamente conociendo las características del movimiento antes de la colisión. Se necesita información adicional, la cual podría obtenerse experimentalmente.

Recapitulación

Dos partículas chocan en una línea recta horizontal y después se mueven sobre la misma línea. Para analizar lo que sucede "durante" la colisión invoquemos la segunda ley de Newton: $\vec{F}dt=\frac{d\vec{P}}{dt}dt=d\vec{P}$. Si la colisión inicia en el tiempo t_i y termina en t_f, el primer miembro puede integrarse entre estos tiempos y el segundo puede integrarse entre los ímpetus antes y después de la colisión, $\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \int_{\vec{P}_i}^{\vec{P}_f} d\vec{P}$ **(1)**. Esta fuerza incluye a las fuerzas externas y a la que aparece durante la colisión: $\vec{F} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{imp}$; esta fuerza es función del tiempo y se llama fuerza impulsiva. La integral de la fuerza impulsiva durante la colisión se llama impulso $\vec{J}$. Esta fuerza impulsiva tiene magnitud muy grande, actúa en un tiempo corto y depende del tiempo de la colisión i.e. $\vec{F} \approx \vec{F}_{imp}$. De (1): $\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$; el impulso es igual al cambio producido por la fuerza impulsiva en el ímpetu. Esto es el teorema impulso-ímpetu lineal.

Se puede aplicar la conservación del ímpetu durante las colisiones. Las colisiones se clasifican en elástica si la energía cinética se conserva; si no se conserva, la colisión es inelástica*;* si los cuerpos quedan adheridos, es una colisión completamente inelástica.

Las partículas tienen masas m_1 y m_2, inicialmente tienen velocidades v_{1i} y v_{2i}, después de la colisión tienen velocidades v_{1f} y v_{2f}. Debido a que el ímpetu se conserva, se obtiene que $m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f}$ **(5)**. Esta ecuación enuncia que la velocidad del centro de masa tiene el mismo valor antes y después de la colisión. Después de la colisión completamente inelástica se tiene un cuerpo de masa m_1+m_2 con velocidad v_f. En este caso (5) se reduce a $m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=(m_1+m_2)v_f$ **(5´)**. En una colisión elástica, además del ímpetu, se conserva la energía cinética: $\frac{m_1v_{1i}^2}{2}+\frac{m_2v_{2i}^2}{2}=\frac{m_1v_{1f}^2}{2}+\frac{m_2v_{2f}^2}{2}$ **(6)**. Se tienen dos ecuaciones con las cuales se pueden calcular dos incógnitas. Suponer que se conocen las velocidades iniciales y las masas, se dispone de ecuaciones (5) y (6) para calcular las dos velocidades finales. Se obtiene: $v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i}$ **(8a)** y $v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i}$ **(8b)**.

La relación entre las velocidades medidas en sistemas inerciales distintos es $v=v'+V$, i.e. la velocidad v del objeto respecto al sistema fijo S es igual a la velocidad v' respecto al sistema móvil S' más la velocidad V del sistema móvil respecto al sistema fijo. Respecto a un sistema que se mueva con velocidad V_{cm} la relación entre las velocidades es $v=v'+V_{cm}$. Conociendo la velocidad del cm, las velocidades iniciales respecto al sistema del cm son $v_{1i}' = \frac{m_2(v_{1i}-v_{2i})}{m_1+m_2}$ **(9a)** y $v_{2i}' = -\frac{m_1(v_{1i}-v_{2i})}{m_1+m_2}$ **(9b)**. Las partículas se acercan.

Colisión elástica: la velocidad final (8a), en el sistema cm es $v_{1f}' = v_{1f} - V_{cm} = \frac{m_2(v_{2i}-v_{1i})}{m_1+m_2} = -v_{1i}'$ (10a). En forma análoga se obtiene que $v'_{2f} = -v'_{2i}$ (10b). Estos dos resultados (10) dicen que en el marco de referencia del cm, las velocidades de m_1 y m_2 simplemente invierten sus sentidos debido a la colisión. En colisión inelástica, solamente el ímpetu se conserva. Las velocidades iniciales medidas respecto al sistema móvil, son las dadas en las ecuaciones (9). Las velocidades finales respecto al sistema móvil, v'_{1f} y v'_{2f}, no pueden ser calculadas ambas pues no se conocen las dos velocidades finales respecto al sistema fijo, ya que sólo se dispone de la conservación del ímpetu. Para colisión completamente inelástica, a partir de (5´) se obtiene la velocidad final respecto al sistema fijo $v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \equiv V_{cm}$; por tanto, respecto al sistema móvil es $v\acute{}_f = v_f - V_{cm} = 0$.

Suponer dos discos circulares que se deslizan sobre una superficie horizontal sin fricción y su colisión no es frontal, los cm se mueven a lo largo de líneas paralelas cuya separación es menor que la suma de los radios. La masa m_1 inicialmente se mueve con velocidad $\vec{v}_1$ y la m_2 con velocidad $\vec{v}_2$. Después de la colisión las velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ se mueven en direcciones que forman ángulos θ_1 y θ_2 con las direcciones originales. La conservación del ímpetu es $m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1u_{1x}+m_2u_{2x}$ **(11a)** y $m_1v_{1y}+m_2v_{2y}=m_1u_{1y}+m_2u_{2y}$ **(11b)**. Colisión inelástica: se dispone de este par de ecuaciones (11) y se tienen cuatro incógnitas. Colisión completamente inelástica: el ímpetu indica que $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{u}$ **(12)**. La velocidad final $\vec{u}$ es igual a la velocidad inicial del cm. Colisión elástica: se conserva la energía cinética, $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$ **(13)**. Se tienen tres ecuaciones y cuatro incógnitas.

Bibliografía

1. Halliday, D., Resnick, R. y Walker, J. *Fundamentos de Física*, Vol 1, octava edición. Patria, México, 2010, problema 9-69

2. Manzur Guzmán, A. *Experimentos de Demostración, Ejemplos de Mecánica Elemental*. Segunda edición. Plaza y Valdés, y UAM, México, 2009, capítulo 13.

Problemas

1. Una pelota de 2.4 kg cae verticalmente, golpea el piso con una rapidez de 2.5 m/s y rebota con una rapidez de 1.5 m/s. ¿Cuál es la magnitud del impulso ejercido por el piso sobre la pelota?

2. Una pelota de tenis de masa 53.8 g se deja caer al piso desde una altura de 4.00 m, rebota a una altura de 2.00 m. Si la pelota estuvo en contacto con el piso durante 12.0 ms, calcular la fuerza media que actuó sobre la pelota. La aceleración apunta ¿hacia arriba o hacia abajo?

3. En un juego de futbol el balón tiene una masa de 0.40 kg. Inicialmente el balón se mueve horizontalmente hacia la izquierda con una velocidad de 20 m/s, pero un jugador del equipo contrario llega y le pega dándole una velocidad a 45º hacia arriba y hacia la derecha, con una magnitud de 30 m/s. a) Determinar el impulso y b) la fuerza media, suponiendo que la duración de la colisión fue de $\Delta t=0.010$ s.

4. Una bola de croquet de 0.64 kg se mueve sobre una superficie lisa, sin fricción, con una velocidad de 1.4 m/s directamente hacia un mazo que maneja un jugador. a) ¿Qué impulso se requiere para detener la bola? b) ¿Cuál es la fuerza media ejercida en este caso por el mazo sobre la bola, si el mazo y la bola están en contacto durante 0.2 s?

5. Tres bloques de masas m_1=1 kg, m_2=2 kg y m_3=3 kg están unidos por una varilla y un resorte ideales como se muestra en la figura 10.7**.** El sistema está inicialmente en reposo y el resorte se encuentra comprimido. Al liberarse el resorte el bloque más liviano tarda 0.1 s en moverse hacia la derecha y alcanzar una rapidez v_1=10 m/s respecto del piso, provocando que los otros dos bloques unidos por la varilla se muevan hacia la izquierda. a) ¿Con qué rapidez respecto del piso salieron los dos bloques que quedaron unidos? b) ¿Qué fuerza media ejerció el bloque más liviano sobre los otros dos? c) ¿Cuál es la velocidad del cm del sistema después de que el bloque 1 es lanzado hacia la derecha?

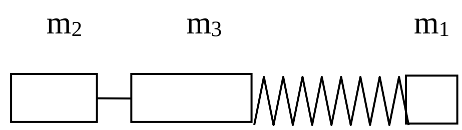


Figura 10.7. Problema 5.

6. Una bola de 325 g y una rapidez de 6.0 m/s golpea una pared vertical con un ángulo de 33.0° y luego rebota con la misma rapidez y ángulo, en un plano horizontal (ver figura). Está en contacto con la pared durante 10.4 ns. (a) ¿Qué impulso experimentó la bola? b) ¿Cuál fue la fuerza media ejercida por la bola contra la pared?

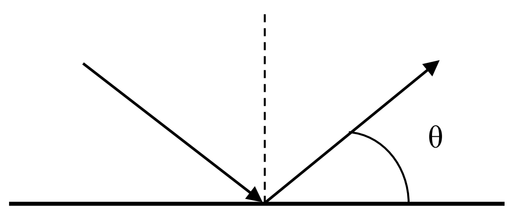


Figura 10.8. Problema 6.

7 Una partícula viaja en la dirección X positiva con rapidez v. Una segunda partícula con la mitad de la masa de la primera viaja en la dirección opuesta con la misma rapidez. Las dos experimentan un choque totalmente inelástico. Calcular la velocidad final.

8. Un bloque, con velocidad v_1, golpea elástica y frontalmente a un bloque idéntico en reposo. Calcular las velocidades finales de los bloques proyectil y blanco.

9. Dos bloques están a lo largo de una línea recta sin fricción y sufrirán una colisión elástica. El bloque 1 tiene masa *m*, mientras que el bloque 2 tiene masa 3*m*. Antes de la colisión la velocidad del bloque 1 es $\vec{v}$ hacia la derecha, tal como se muestra en la figura, y el bloque 2 está en reposo. Calcular las velocidades de cada uno de los cuerpos después de la colisión. Interpretar el resultado diciendo en qué sentido se mueve cada uno de los bloques.

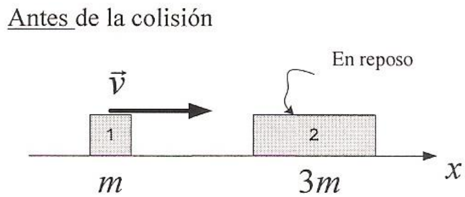


Figura 10.9. Problema 9.

10. Dos bloques se deslizan sobre una superficie horizontal sin fricción. Sus masas son de 2 kg y 3 kg y se mueven en la misma línea con velocidades de 4 m/s y 2 m/s, respectivamente, en el mismo sentido. Después de la colisión el bloque de mayor masa se mueve con velocidad de 3 m/s en el mismo sentido que antes. a) Calcular la velocidad del bloque de masa menor después de la colisión. b) Determinar si la colisión es elástica.

11. Sobre una mesa sin fricción un bloque de masa m_1=1 kg se proyecta con una rapidez de 0.04 m/s contra otro de masa m_2=2 kg que está inicialmente en reposo. Este último tiene unido un resorte ideal de constante k = 32/3 N/m, como se indica en la figura 10.10. Cuando los bloques chocan, ¿cuál es la máxima compresión del resorte? Suponga que en el instante de máxima compresión, los bloques están unidos y se mueven como un solo cuerpo.

Figura 10.10. Problema 11.

12. Un bloque de masa m_1 = 2 kg se mueve sobre una mesa sin fricción con una velocidad de 10 m/s. Otro bloque de masa m_2 = 5 kg se mueve en la misma dirección y sentido que m_1 con una velocidad de 3 m/s. Un resorte de masa despreciable y constante k = 1120 N/m se encuentra sujeto a la masa m_2 como se muestra en la figura 10.11. a) Determinar la velocidad del centro de masa del sistema antes de que la masa m_1 haga contacto con el resorte. b) Determinar la velocidad de los bloques cuando el resorte está comprimido al máximo.

Figura 10.11. Problema 12.

13. Entre dos objetos ocurre una colisión elástica. La masa del primer objeto es de 20 kg y la masa del segundo es de 25 kg. Justo antes del choque el primer objeto viaja a razón de 8 m/s hacia la derecha, la velocidad del segundo es desconocida. Después del choque el primero sale con cierta velocidad y el segundo lo hace con 5 m/s hacia la derecha. Calcular las velocidades faltantes. Considerar que el movimiento de los objetos es unidimensional.

14. Una bala de 5.20 g que se mueve a 672 m/s polpea un bloque de madera de 700 g en reposo sobre una superficie sin fricción. La bala emerge, avanzando en la misma dirección con su velocidad reducida a 428 m/s. a) ¿Cuál es la velocidad resultante del bloque? b) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del sistema formado por la bala y el bloque?

15. Una bala de 10 g se mueve horizontalmente con una rapidez de 2.0 km/s, golpea y pasa a través de un bloque de 4.0 kg que se está moviendo con una rapidez de 4.2 m/s en dirección opuesta sobre una superficie horizontal sin fricción. Si el bloque alcanza el reposo causado por la colisión, ¿cuál es la energía cinética de la bala cuando sale del bloque?

16. Un proyectil de masa *m* viaja horizontalmente con una velocidad $\vec{v}$ justo antes de chocar con un bloque de masa 9*m* que está en reposo en el borde de una mesa de altura *H*, tal como se muestra en la figura 10.12. Considerar dos casos: a) colisión completamente inelástica y b) colisión elástica. Calcular a qué distancia horizontal *d* desde la mesa el bloque cae al suelo, como función de *H, v* y *g*. Desprecie efectos de fricción con el aire y la mesa, así como el tamaño del bloque, el cual debe ser considerado como una partícula.

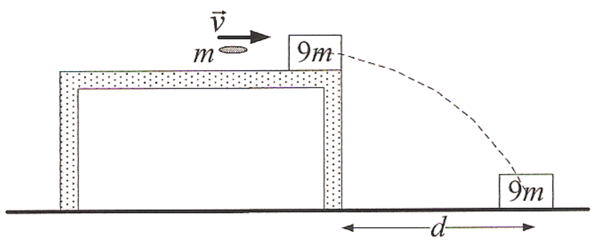


Figura 10.12. Problema 16.

17. Un vagón de ferrocarril de 2.5×10^4 kg de masa que se mueve con una velocidad de 4 m/s choca para conectarse con otros tres vagones de ferrocarril acoplados, cada uno de la misma masa que el primero y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 2 m/s. a) ¿Cuál es la velocidad de los cuatro vagones después del choque? b) ¿Cuánta energía se pierde en el choque?

18. Una bala de masa m_b=0.01 kg se dispara horizontalmente con una velocidad de magnitud v_b desconocida. La bala se incrusta en un bloque de madera de masa M=10 kg, el cual se encontraba inicialmente en reposo. El bloque junto con la bala incrustada se mueve hasta detenerse a una distancia d=2.5 m desde su posición original. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el piso es $\mu_c = 0.25$, ¿cuál es la velocidad de la bala?.

19. Una masa de 3.0 kg se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción con una rapidez de 3.0 m/s cuando choca con una masa de 1.0 kg, que está inicialmente en reposo al pie de un plano inclinado sin fricción y ángulo de 20º. Las masas se quedan pegadas y se deslizan sobre el plano. ¿Hasta qué altura máxima, h, arriba de la horizontal se deslizan las masas?

20. Después de participar en una colisión completamente inelástica, se encuentra que dos objetos de la misma masa y con la misma rapidez inicial se alejan juntos con la mitad de su rapidez inicial. Encontrar el ángulo entre las velocidades iniciales de los objetos.

21. Dos pelotas A y B chocan, tienen masas diferentes y desconocidas. Inicialmente A está en reposo y B tiene una velocidad de magnitud v. Después de la colisión, la velocidad de B tiene magnitud v/2 y forma un ángulo recto respecto al movimiento original. Hallar la dirección en que la pelota A se mueve después de la colisión.

22. Un disco de goma de 0.20 kg, que se mueve inicialmente a lo largo del eje X con una velocidad de 2.0 m/s, golpea a otro disco de masa 0.30 kg inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Después del choque, el disco de 0.20 kg tiene una velocidad de 1.0 m/s a un ángulo de $\theta = 53^{\circ}$ con el eje X positivo.

a) Determinar la velocidad del disco de 0.30 kg después del choque.

b) Encontrar la fracción de energía cinética perdida en el choque.

23. Una pelota que se desplaza a 10 m/s lleva a cabo un choque elástico no frontal con otra pelota de igual masa inicialmente en reposo. La pelota incidente es desviada 30 grados respecto de su dirección original de movimiento. Calcular la velocidad de cada pelota después del choque.

24. Un objeto de 4.2 kg, inicialmente en reposo, "explota" en tres partes de igual masa. Se determinó que dos de ellas tienen la magnitud de sus velocidades iguales (5.0 m/s) y sus direcciones difieren por 90°. ¿Cuánta energía cinética fue liberada en la explosión?

11 CINEMÁTICA DE ROTACIÓN PURA

En el caso del movimiento de traslación pura de los cuerpos, primero se estudió la cinemática, es decir, la descripción del movimiento sin importar la causa que lo produjo. En forma totalmente análoga, ahora se estudiará la cinemática del movimiento de rotación pura.

Introducción

Un cuerpo rígido es una idealización que se hace de un cuerpo al que no se le permite deformación alguna. Hasta ahora hemos considerado solamente el movimiento de traslación de los cuerpos rígidos, pero ellos también pueden girar, dar vuelta; es decir, también pueden tener movimiento de rotación. En general, los cuerpos rígidos pueden tener combinados los dos tipos de movimiento,

movimiento general = movimiento de traslación + movimiento de rotación

Para describir la traslación de un cuerpo se necesitan tres coordenadas para señalar su posición en el espacio tridimensional y para la rotación general se necesitan tres ángulos para indicar su orientación. Por ejemplo, para un objeto que se traslada sobre una superficie plana se necesitan dos coordenadas, para describir un punto sobre la superficie de una esfera se requieren dos ángulos: latitud y longitud; para un lugar en la superficie de la Tierra, además de la latitud y de la longitud se tiene que agregar la altura sobre el nivel del mar.

Iniciaremos el estudio de las rotaciones considerando el caso en una dimensión. Es decir, sólo se necesita un ángulo para describir la rotación. Este es el caso de un cuerpo rígido (por ejemplo, un disco) que se mueve rotando respecto a un eje de rotación que permanece fijo; cada partícula del cuerpo se mueve en un círculo cuyo centro está sobre el eje de rotación. Cuando el cuerpo sólo rota (no se traslada), se dice que su movimiento es de rotación pura.

11.1 Cinemática rotacional

La cinemática rotacional es la descripción del movimiento rotacional sin importar las causas que lo producen. Ante una rotación pura respecto a un eje fijo, cada punto del cuerpo describe una trayectoria circular centrada en el eje. En cierto instante, un punto del cuerpo que describe una circunferencia de radio r, su posición puede describirse por un ángulo. Hay dos unidades para medir ángulos en un plano: *grados* y *radianes*. La segunda es la más importante en física.

Para expresar un ángulo en radianes (rad), se traza con un radio arbitrario r el arco de círculo AB con centro en el punto O (figura 11.1(a)). El ángulo θ expresado en radianes se escribe como

$$\theta = \frac{s}{r}, \qquad (1)$$

donde s es la longitud del arco AB. Al reescribir esta relación como $s=r\theta$, se obtiene la relación entre grados y radianes; usemos la longitud s_1 de la circunferencia de un círculo de radio r, que es $2\pi r$, con lo cual se obtiene que el ángulo $\theta_1 = \frac{s_1}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \Rightarrow$ 360º=2π rad.

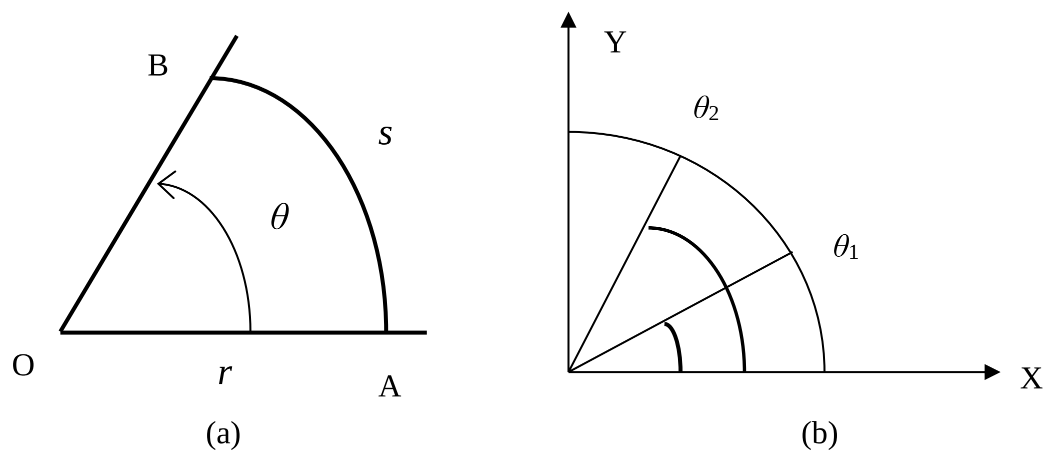


Figura 11.1. (a) El ángulo θ medido en radianes es igual a la longitud de arco s entre el radio r del círculo. (b) Las posiciones angulares θ_1 y θ_2 corresponden a los tiempos t_1 y t_2.

El ángulo se mide en radianes desde una línea de referencia, el eje X por ejemplo, y es positivo en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. La posición angular es una función que depende del tiempo, es decir, $\theta = \theta(t)$. Si el tiempo se mide desde el instante en que el punto pasa por el eje X, entonces el ángulo es nulo (θ=0) en t=0. Supóngase que la posición angular del punto en un instante t_1 se representa por θ_1 ($\theta_1 = \theta(t_1)$) y que en un tiempo posterior t_2 se representa por θ_2, como se ilustra en la figura 11.1(b). En analogía a como se hizo en el caso de traslación, se definen las dos cantidades siguientes: desplazamiento angular y lapso.

Desplazamiento angular del punto P (o partícula) es la diferencia entre la posición angular final y la posición angular inicial (o entre una posterior y una anterior):

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \qquad (2)$$

Al ser θ una función del tiempo, también el desplazamiento lo es. Este desplazamiento angular se produce durante el tiempo transcurrido o *lapso*:

$$\Delta t = t_2 - t_1. \qquad (3)$$

Con estas dos definiciones se construye la *rapidez angular media* que el punto P tiene al pasar de su primera posición angular a la segunda:

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Aunque, en general, el término rapidez se reserva para la magnitud de la velocidad, en este caso del movimiento en una dimensión se puede hablar indistintamente de rapidez o de velocidad. La velocidad angular media representa la rapidez (tasa) con que la posición angular cambia en el tiempo. Se le representa con la letra griega omega minúscula (ω). Esta cantidad ω es una característica del cuerpo como un todo, pues todos sus puntos se mueven con la misma rapidez angular. Su dimensión es $[\omega]=T^{-1}$, se mide en radianes/segundo (rad/s) o en revoluciones/segundo (una revolución es una vuelta expresada en radianes, 1 revolución=2π radianes).

Al tomar la posición angular θ_2 cada vez más cerca de la posición θ_1, es decir al reducir la magnitud del desplazamiento angular, el lapso también se reduce. En el límite cuando el lapso tiende a cero se obtiene la *velocidad angular instantánea* que el punto P (o partícula) tiene en la primera posición angular; es decir,

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (5)$$

Al ser el desplazamiento angular una función del tiempo, también la velocidad angular instantánea lo es. La velocidad angular instantánea es igual a la derivada de la posición angular respecto al tiempo.

Supóngase que al pasar el punto de la primera posición angular (θ_1) a la segunda (θ_2), también la velocidad angular instantánea cambia de su valor ω_1 a un nuevo valor ω_2 en el lapso Δt. La *aceleración angular media* se define como

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (6)$$

La dimensión es $[\alpha_m]$=T^{-2}, la aceleración angular se mide en radianes/segundo^2 (rad/s^2) o en revoluciones/segundo^2. La aceleración angular media representa a la rapidez (tasa) con que la velocidad angular cambia en el tiempo. Se le representa con la letra griega alfa minúscula (α). Al tomar la velocidad angular del punto en la posición angular θ_2 cada vez más cerca de la posición θ_1, o sea al reducir la magnitud del cambio en la velocidad angular, el lapso también se reduce. En el límite cuando el lapso tiende a cero se obtiene la *aceleración angular instantánea* del punto en la primera posición angular donde tiene la primera velocidad angular; es decir,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (7)$$

La aceleración angular instantánea es igual a la derivada de la velocidad angular instantánea respecto al tiempo. Al ser la velocidad angular la derivada de la posición angular respecto al tiempo, la aceleración angular es la segunda derivada de la posición angular respecto al tiempo

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \qquad (8)$$

La descripción del movimiento de rotación de un cuerpo (o de un punto del cuerpo) respecto a un eje de rotación fijo tiene correspondencia formal con la descripción del movimiento de traslación a lo largo de una línea recta:

$$\theta \leftrightarrow x, \quad \omega \leftrightarrow v, \quad \alpha \leftrightarrow a.$$

Al pasar el punto de la posición angular θ_1 a la posición θ_2, lo hace a lo largo de un arco de círculo de longitud s y sobre la circunferencia de radio r. La relación (1) establece que $s=r\theta$ también es una función del tiempo pues el ángulo lo es. De manera que la derivada de s respecto al tiempo es una cantidad que es tangente a la trayectoria circular, a la cual se le conoce como *velocidad tangencial* (v_t),

$$v_t = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega.$$

Si se considera un cuerpo rígido (una varilla, por ejemplo) que está rotando respecto a un eje fijo, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad angular ω, pero la velocidad tangencial es diferente para cada punto del cuerpo pues los puntos están a distintas distancias r del eje de rotación. La dimensión de v_t es $[v_t]$=LT^{-1}.

Si ω es una función del tiempo, entonces v_t también es función del tiempo. De manera que la derivada de la velocidad tangencial respecto al tiempo es la *aceleración tangencial*,

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \ .$$

Un cuerpo que rota respecto a un eje fijo tiene todos sus puntos rotando con la misma aceleración angular α, pero la aceleración tangencial a_t es diferente para cada punto con distancia diferente al eje de rotación. La dimensión de a_t es $[a_t]$=LT^{-2}.

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

Ejemplo 1. La posición angular de un punto situado en la periferia de una rueda en rotación pura está descrita por $\phi = 4t - 3t^2 + t^3$, donde ϕ está en radianes y t en segundos. La rueda tiene un radio de 10 cm. (a) Calcular la velocidad angular media en el intervalo de tiempo que comienza en t = 1 s y termina en t = 2 s. (b) Calcular la velocidad angular instantánea en el tiempo t = 1 s. (c) Calcular la aceleración angular media en el intervalo de tiempo que comienza en t = 1 s y termina en t = 2 s. (d) Calcular la aceleración angular instantánea en el tiempo t = 1 s. (e) Calcular la velocidad tangencial instantánea en el tiempo t = 1 s. (f) Calcular la aceleración tangencial instantánea en el tiempo t = 1 s.

Solución. La posición angular es $\phi = 4t - 3t^2 + t^3$; su derivada respecto al tiempo es $\omega = \dfrac{d\phi}{dt} = 4 - 6t + 3t^2$; su segunda derivada respecto al tiempo es $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = -6 + 6t$. Estas cantidades evaluadas en t = 1 s y en t = 2 s se identificarán con los subíndices 1 y 2, respectivamente. Así, ϕ_1=2 rad, ϕ_2=4 rad, ω_1 = 1 rad/s, ω_2 = 4 rad/s y α_1 = 0 rad/s^2.

(a) La velocidad angular media entre 1 y 2 s es: $\omega_m = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = \dfrac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = 2$ rad/s.

(b) La velocidad angular instantánea en 1 s es: ω_1 = 1 rad/s.

(c) La aceleración angular media entre 1 y 2 s es: $\alpha_m = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = 3$ rad/s^2.

(d) La aceleración angular instantánea en 1 s es: α_1 = 0 rad/s^2.

(e) La velocidad tangencial instantánea en t=1 s es $v_{t1} = r\omega_1 = 10 \times 1 = 10$ cm/s.

(f) La aceleración tangencial instantánea en t=1 s es $a_{t1} = r\alpha_1 = 0$ cm/s^2.

11.2 Rotación con aceleración angular constante

A continuación, el estudio de la cinemática rotacional en una dimensión se restringirá al caso particular de aceleración angular constante. Suponga que cuando echamos a andar el cronómetro (es decir, en el tiempo t=0), la posición de la partícula es $\theta(t=0)=\theta_0$ y que la velocidad angular en ese mismo instante es $\omega(t=0)=\omega_0$; estas dos cantidades (θ_0 y ω_0) son las *condiciones iniciales*.

Si se conoce la posición angular como una función del tiempo, entonces se pueden calcular la velocidad y la aceleración angulares a través de la operación de derivación respecto al tiempo. Simbólicamente, este procedimiento puede representarse de la manera siguiente

$$\text{posición angular} \xrightarrow{\frac{d\theta}{dt}} \text{velocidad angular} \xrightarrow{\frac{d\omega}{dt}} \text{aceleración angular}$$

El procedimiento en sentido opuesto puede realizarse; es decir, si se conoce explícitamente la aceleración angular como una función del tiempo, entonces la velocidad y la posición angulares se pueden calcular mediante la operación de integración. A continuación se aplica esta operación para calcular la velocidad y la posición para el caso de **aceleración angular constante** (α constante).

Al multiplicar la definición de la aceleración $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ por dt (diferencial de t) se obtiene $\alpha dt = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)dt$. Recuerde que la diferencial de una función arbitraria $f(y)$ es igual a la derivada de la función, respecto a la variable independiente, multiplicada por la diferencial de la variable independiente; es decir, $df = \left(\frac{df}{dy}\right)dy$. Usando este resultado, se puede escribir

$$\alpha dt = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)dt = d\omega\,.$$

Ahora, integrando el primer miembro entre los límites 0 y t, y el segundo miembro entre los correspondientes límites ω_0 y ω, se obtiene el resultado

$$\int_0^t \alpha dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \Rightarrow \alpha t = \omega - \omega_0\,.$$

Esta expresión se reescribe como

$$\text{velocidad angular} \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t\,. \tag{9}$$

Como ya se conoce la velocidad angular en función del tiempo, $\omega(t)$, la operación de integración se aplica otra vez para calcular la posición angular en función del tiempo, $\theta(t)$. Al multiplicar la definición de la velocidad angular $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ por diferencial de t y usando nuevamente el resultado del cálculo diferencial, en relación a la diferencial de una función, se obtiene

$$\omega dt = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)dt = d\theta\,.$$

Al sustituir la expresión dada en (9) para la velocidad e integrar el primer miembro entre los límites 0 y t, y el segundo miembro entre los correspondientes límites θ_0 y θ, se obtiene el resultado

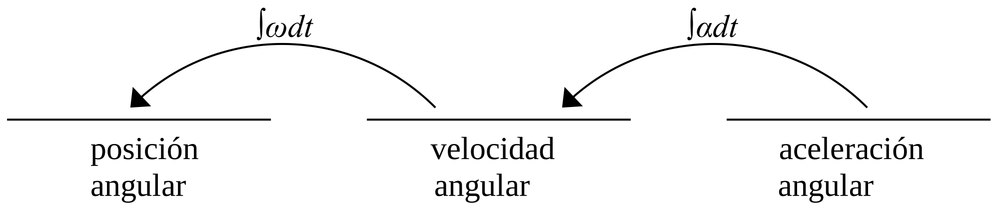
$$\int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \Rightarrow \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \theta - \theta_0\,.$$

Finalmente, esta expresión se reescribe como

$$\text{posición angular} \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2\,. \tag{10}$$

Las expresiones (9) y (10) son las *ecuaciones cinemáticas angulares básicas* para un cuerpo que rota con aceleración angular (α) constante.

La operación de integración es la operación opuesta a la de derivación. La integración que se realiza de la aceleración para obtener la velocidad y la integración que se hace de la velocidad para obtener la posición pueden representarse simbólicamente como en el dibujo siguiente



Otras relaciones cinemáticas. Las ecuaciones cinemáticas angulares básicas para la posición y la velocidad (para el caso de aceleración angular constante), representadas en las expresiones (9) y (10), son funciones únicamente del tiempo. A menudo conviene tener expresiones para la posición en función de la velocidad o en función de la velocidad y el tiempo. Al despejar el tiempo t en (9) se obtiene

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \,,$$

que al sustituirlo en (10), para obtener la posición en función de la velocidad, resulta

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2 = \theta_0 + \frac{\omega_0}{\alpha}(\omega - \omega_0) + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\alpha} \,,$$

rearreglando:

$$\alpha(\theta - \theta_0) = \omega_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 = (\omega - \omega_0)\left[\omega_0 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)\right] = (\omega - \omega_0)\frac{1}{2}(\omega + \omega_0),$$

de donde finalmente se obtiene

$$2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - {\omega_0}^2 . \qquad (11)$$

Sustituyendo t otra vez en (10), pero ahora sólo un factor t en el término cuadrático, para obtener la posición en función de la velocidad y el tiempo, resulta

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}t(\alpha t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}t(\omega - \omega_0) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{2}\omega_0 t \,.$$

Por tanto

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t \,. \qquad (12)$$

De las cuatro ecuaciones (9), (10), (11) y (12), válidas únicamente si el movimiento es uniformemente acelerado (α=constante), sólo las ecuaciones (9) y (10) son independientes. Recuérdese que, en nuestra notación, los símbolos que tienen subíndice representan cantidades constantes (como las condiciones iniciales) y que si no tienen subíndice significa que son cantidades variables.

Ejemplo 2. Un disco, respecto a un eje que pasa por su centro y que es perpendicular a su plano, gira θ_1 revoluciones a medida que reduce su velocidad angular desde un valor ω_0 hasta detenerse. a) Encontrar el tiempo para que se detenga suponiendo una aceleración angular constante. b) ¿Cuál es su aceleración angular? c) Calcular el tiempo requerido para completar las primeras $\theta_1/2$ de las θ_1 revoluciones. Usar θ_1=40 rev, ω_0=1.5 rad/s.

Solución. Por simplicidad se hace nulo el ángulo inicial θ_0 en t=0. En el diagrama se muestran los datos y las incógnitas en diferentes tiempos.

$t_0=0$	$t_2=?$	$t_1=?$	t
$\theta_0=0$	$\theta_2=20$	$\theta_1=40$	
$\omega_0=1.5$		$\omega_1=0$	

a). Al evaluar la ecuación (12) ($\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$) en el tiempo t_1 se obtiene $\theta_1 = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0)t_1 = \frac{\omega_0 t_1}{2}$ y al despejar t_1 se obtiene $t_1 = \frac{2\theta_1}{\omega_0}$.

Con los valores numéricos se obtiene $t_1 = \dfrac{2 \times 40 rev\left(\dfrac{2\pi rad}{rev}\right)}{1.5\dfrac{rad}{s}} = 335 s$.

b) Al evaluar la ecuación (11) ($2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - {\omega_0}^2$) con los datos en el tiempo t_1 resulta $2\alpha(\theta_1 - \theta_0) = {\omega_1}^2 - {\omega_0}^2$ con lo cual la aceleración angular es $\alpha = -\frac{{\omega_0}^2}{2\theta_1}$.

Con los valores numéricos, resulta $\alpha = -\dfrac{(1.5 rad/s)^2}{2 \times 40 rev(2\pi rad/rev)} = -4.5 \times 10^{-3} rad/s^2$.

c) La ecuación (10) ($\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$) evaluada en el tiempo t_2 es $\theta_2 = \theta_0 + \omega_0 t_2 + \frac{1}{2}\alpha {t_2}^2$; usando los valores numéricos, la ecuación de segundo grado que se obtiene es

$$ {t_2}^2 - 666.7 t_2 + 55{,}850.5 = 0 .$$

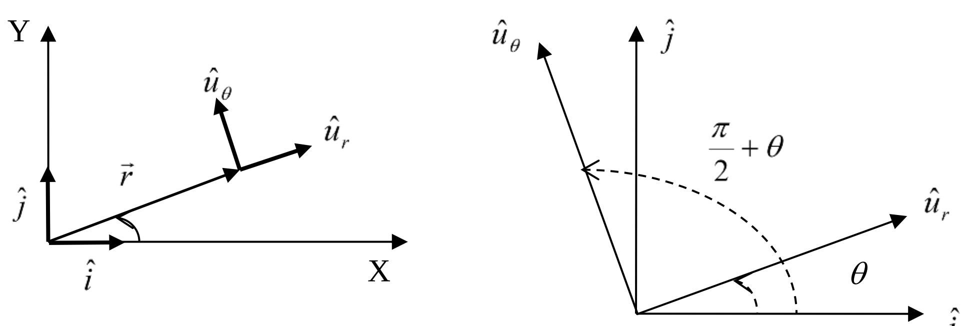
Las dos soluciones que se obtienen son t_2^+=568.4 s y t_2^-=98.2 s; de éstas, solamente la segunda es aceptable físicamente pues debe ser menor que t_1.

11.3 Movimiento circular

Hasta ahora, para describir el movimiento en el plano XY hemos usado los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ del sistema de coordenadas cartesianas. El movimiento de una partícula cuya trayectoria es una circunferencia se describe más fácilmente usando coordenadas polares planas que con coordenadas cartesianas. Para ello se introducen dos nuevos vectores unitarios $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$. El vector $\hat{u}_r$ apunta hacia fuera, en la dirección en que el vector $\vec{r}$ crece; $\hat{u}_\theta$ apunta en la dirección en que el ángulo θ crece; $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ son perpendiculares entre sí (ver figura 11.2(a)). A diferencia de $\hat{i}$ y $\hat{j}$, que son constantes, los vectores unitarios $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ no son constantes pues sus direcciones varían de punto a punto; por tanto, cuando se calculen derivadas de cantidades vectoriales que los involucren, ellos también deben ser derivados. Los vectores $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ en términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son (ver figura 11.2(b))

$$\hat{u}_r = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad (13)$$

$$\hat{u}_\theta = \hat{i}\cos(\pi/2+\theta) + \hat{j}\,\mathrm{sen}(\pi/2+\theta) = -\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta. \qquad (14)$$



(a) (b)

Figura 11.2. (a) $\hat{u}_r$ apunta en la dirección en que $\vec{r}$ crece, $\hat{u}_\theta$ apunta en la dirección en que θ crece. (b) El origen de los vectores $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ se hace coincidir con el origen de los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$.

Vectorialmente, la posición $\vec{r}$ de la partícula se escribe como el producto de la distancia radial r por el vector unitario $\hat{u}_r$ (ver figura 11.2(a)):

$$\vec{r} = r\,\hat{u}_r \,. \qquad (15)$$

En general, al moverse la partícula, las cantidades r y $\hat{u}_r$ varían pues ambas son funciones del tiempo.

Consideremos el caso particular en que la trayectoria que describe la partícula es una circunferencia de radio R; es decir, r=R constante. Al derivar respecto al tiempo la expresión (15), que ahora es $\vec{r} = R\,\hat{u}_r$, se obtiene la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\,\vec{r} = \frac{d}{dt}\,(R\,\hat{u}_r) = \frac{dR}{dt}\,\hat{u}_r + R\,\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r = R\,\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r \,. \qquad (15')$$

Necesitamos calcular la derivada del vector unitario $\hat{u}_r$. Usando (13) se obtiene

$$\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r = \frac{d}{dt}\,(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{d}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}\,(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta) = -\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} + \hat{j}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$
$$= (-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta)\,\frac{d\theta}{dt} \,.$$

El factor entre paréntesis es $\hat{u}_\theta$ dado en (14). Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r = \hat{u}_\theta\,\frac{d\theta}{dt} \,. \qquad (16a)$$

En forma análoga se obtiene la derivada respecto al tiempo del otro vector unitario

$$\frac{d}{dt}\,\hat{u}_\theta = \frac{d}{dt}\,(-\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta) = -\hat{i}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} - \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\frac{d\theta}{dt} \,.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\,\hat{u}_\theta = -\hat{u}_r\,\frac{d\theta}{dt} \,. \qquad (16b)$$

El signo menos indica que el sentido del cambio de $\hat{u}_\theta$ en el tiempo es opuesto al sentido de $\hat{u}_r$, como ilustra la figura 11.3. Estos resultados representados en (16a) y (16b) también pueden visualizarse geométricamente como ilustra la figura 11.3. Si $\Delta\theta$ es muy pequeño, los vectores $\Delta\hat{u}_r$ y $\Delta\hat{u}_\theta$ son aproximadamente perpendiculares a $\hat{u}_r$ y a $\hat{u}_\theta$, respectivamente, y sus magnitudes son aproximadamente iguales a $\Delta\theta$, lo que se obtiene al aplicar la relación (1) ($|\Delta\hat{u}_r| \approx s = |\hat{u}_r|\Delta\theta = \Delta\theta$). El cambio en el ángulo ($\Delta\theta$) se produce en un tiempo Δt; de manera que a partir de los cocientes de $\Delta\hat{u}_r$ y $\Delta\hat{u}_\theta$ entre Δt, en el límite cuando Δt tiende a cero, se obtienen las fórmulas (16a) y (16b). Es decir, la magnitud $|\Delta\vec{u}_r|$ es casi igual a $\Delta\theta$, y la dirección de $\Delta\hat{u}_r$ es casi perpendicular a $\hat{u}_r$ ($\Delta\hat{u}_r \approx \hat{u}_\theta \Delta\theta$); al dividir entre Δt y tomar el límite cuando Δt tiende a cero, se obtiene la ecuación (16a). Análogamente, el cambio en el vector unitario $\hat{u}_\theta$ está dado por la aproximación $\Delta\hat{u}_\theta \approx -\hat{u}_r \Delta\theta$ y, en consecuencia, se obtiene la ecuación (16b).

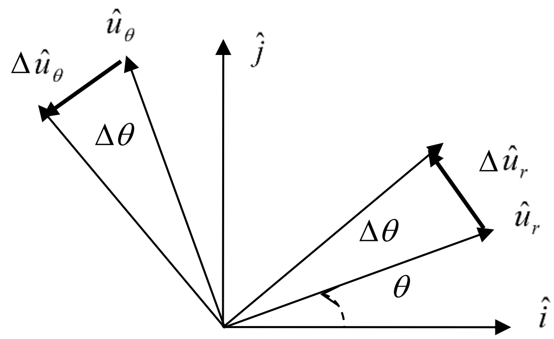


Figura 11.3. Al cambiar el ángulo de la figura 11.2(b) de θ a $\theta+\Delta\theta$, el cambio en los vectores unitarios $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ es $\Delta\hat{u}_r$ y $\Delta\hat{u}_\theta$.

Finalmente se obtiene que la velocidad (15´) es

$$\vec{v} = R\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta . \qquad (17)$$

La velocidad sólo tiene componente angular pues la partícula se mueve en la trayectoria circular. El factor $R\dfrac{d\theta}{dt}$ es la magnitud de la velocidad tangencial, se apellida tangencial porque es un vector tangente a la trayectoria circular.

Para encontrar la aceleración, se calcula la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{u}_\theta + R\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d}{dt}\,\hat{u}_\theta .$$

Usando el resultado para la derivada respecto al tiempo del vector unitario $\hat{u}_\theta$, se obtiene

$$\vec{a} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{u}_\theta + R\frac{d\theta}{dt}\left(-\hat{u}_r\,\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Finalmente, la aceleración se escribe como

$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_r + \left(R\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\hat{u}_\theta . \qquad (18)$$

En esta expresión se observa que la magnitud de la componente radial de la aceleración es

$$a_r = R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad (19)$$

y que la magnitud de la componente angular es

$$a_\theta = R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,. \qquad (20)$$

Las ecuaciones (17) y (18) para la velocidad y la aceleración son válidas para la partícula con trayectoria circular. En el *movimiento circular* la velocidad sólo tiene componente angular (componente tangencial), pero la aceleración tiene componentes radial y angular (ver figura 11.4).

Movimiento circular uniforme.

Ahora se verá un caso particular del movimiento circular. Si la partícula describe una trayectoria circular de radio R y, además, la magnitud de su velocidad es constante (es decir, $\frac{d\theta}{dt}$ es constante), entonces la ecuación (17) no sufre cambio alguno, pero la ecuación (18) se reduce a

$$\vec{a} = -R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \hat{u}_r\,. \qquad (21)$$

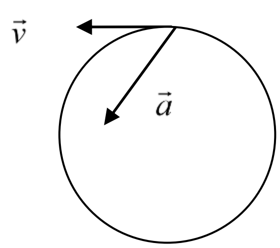


Figura 11.4. Vectores velocidad y aceleración en el movimiento circular.

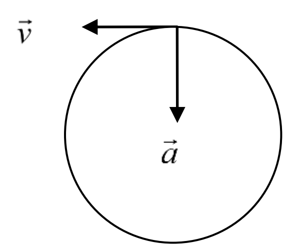


Figura 11.5. Vectores velocidad y aceleración en el movimiento circular uniforme.

En el *movimiento circular uniforme*, la velocidad sigue siendo tangencial mientras que la aceleración es radial únicamente y apunta hacia el centro del círculo (figura 11.5). A esta aceleración se le llama **aceleración centrípeta**. Hemos llamado ω a la derivada de θ respecto al tiempo, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; por tanto, las magnitudes de la velocidad y la aceleración pueden escribirse como

$$v = R\omega, \qquad (22)$$

$$a = R\omega^2. \qquad (23)$$

Usando (22) en la expresión (23), la magnitud de la aceleración centrípeta también puede escribirse como

$$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}. \qquad (24)$$

A la cantidad ω también se le llama *frecuencia angular*. En este caso de movimiento circular uniforme, el movimiento es periódico y la partícula pasa por cada punto de la trayectoria circular a intervalos iguales de tiempo, cada intervalo se llama período. La cantidad ω también se expresa como

$$\omega = 2\pi f,$$

donde f es la *frecuencia*; la frecuencia es el número de revoluciones o vueltas completas por unidad de tiempo. Al inverso de f se le llama *período* T y representa el tiempo requerido para dar una vuelta completa, es decir

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (25)$$

De esta manera, si en el tiempo t la partícula realiza n revoluciones, el período es $T = t/\mathrm{n}$ y la frecuencia es $f = \mathrm{n}/t$. Cuando el período se expresa en segundos, la frecuencia f debe expresarse en $(\text{segundos})^{-1}$ o s^{-1}, unidad denominada *hertz*, con símbolo Hz.

Los conceptos de período y frecuencia son aplicables a todos los procesos periódicos que ocurren en forma cíclica; esto es, aquellos procesos que se repiten después de completar cada ciclo. Por ejemplo, el movimiento de la Tierra alrededor del Sol no es circular ni uniforme, pero es periódico. Es un movimiento que se repite cada vez que la Tierra completa una órbita.

11.4 Velocidad y aceleración en coordenadas polares

En esta sección se calcularán en general la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve en un plano sin la restricción de describir una trayectoria circular. Para ello el cálculo se realizará en coordenadas polares y el tema se desarrollará a partir de la ecuación (15) de la sección anterior.

Sabemos que la posición $\vec{r}$ de la partícula se escribe como el producto de la distancia radial r por el vector unitario $\hat{u}_r$ y que estas cantidades r y $\hat{u}_r$ ambas son funciones del tiempo:

$$\vec{r} = r\,\hat{u}_r\,. \qquad (15)$$

Al derivar respecto al tiempo esta expresión (15) se obtiene la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\,\vec{r} = \frac{d}{dt}\,(r\,\hat{u}_r) = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r\,. \qquad (26)$$

Pero las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$ ya fueron calculadas, se obtuvo

$$\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r = \hat{u}_\theta\,\frac{d\theta}{dt} \qquad (16a)$$

y

$$\frac{d}{dt}\,\hat{u}_\theta = -\hat{u}_r\,\frac{d\theta}{dt}\,. \qquad (16b)$$

Usando el resultado (16a) en la ecuación (26) se obtiene que la velocidad es

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta\,. \qquad (27)$$

En esta ecuación $\frac{dr}{dt}$ es la magnitud de la componente radial del vector velocidad, y el producto $r\frac{d\theta}{dt}$ es la magnitud de la componente angular.

Para encontrar la aceleración se calcula la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\,\vec{v} = \frac{d}{dt}\,(\frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta) = \frac{d^2r}{dt^2}\,\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d}{dt}\,\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d}{dt}\,\hat{u}_\theta\,.$$

Usando (16a) y (16b) se obtiene

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\,\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\,(\hat{u}_\theta\,\frac{d\theta}{dt}) + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\,(-\hat{u}_r\,\frac{d\theta}{dt}).$$

Agrupando los términos en $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$, resulta

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{u}_r + \left(r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta\,. \qquad (28)$$

En esta expresión (28) se observa que la magnitud de la componente radial del vector aceleración es

$$a_{\mathrm{r}}=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad (29)$$

y que la magnitud de la componente angular es

$$a_{\theta}=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}. \qquad (30)$$

Las ecuaciones (27) y (28) para la velocidad y la aceleración son generales. Si ahora nos restringimos al caso particular en que r es constante, se obtienen los resultados vistos en la sección anterior.

11.5 Fuerza en el movimiento circular uniforme

Si un cuerpo se mueve con movimiento circular uniforme, experimenta una aceleración centrípeta (dirigida hacia el centro del círculo) cuya magnitud es $\frac{v^2}{R}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, en el sistema inercial de observación vemos que la magnitud de la fuerza neta (F) que causa este movimiento es

$$F = ma = \frac{mv^2}{R}. \qquad (31)$$

Esta fuerza neta se llama fuerza centrípeta. Esta no es una nueva clase de fuerza, se llama así porque el cuerpo describe una trayectoria circular (o un arco de círculo); esta fuerza resulta de la combinación de las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

$\longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \longrightarrow$

Ejemplo 3. *Curva peraltada*. Suponga que la mancuerna dibujada en la figura 11.6 representa dos llantas (unidas por un eje) de un vehículo que se mueve con rapidez constante v sobre una curva circular de radio R (pista circular o arco circular). La pista plana no es horizontal, sino que está inclinada y forma un ángulo β constante respecto a la línea horizontal. Calcular el ángulo correcto para que se produzca el movimiento circular uniforme sin que el cuerpo resbale, con v y R fijos. A este ángulo se le llama peralte.

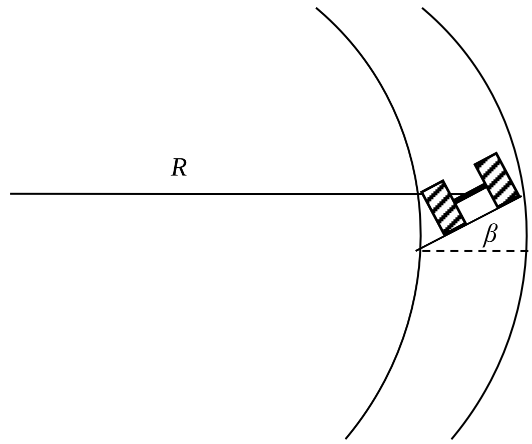


Figura 11.6. Vehículo en una curva peraltada de una carretera.

Solución. Calcularemos el ángulo en dos casos: sin fricción y con fricción.

Sin fricción. Escogemos un sistema de coordenadas cuyos ejes son horizontal y vertical (figura 11.7(a)). Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso y la normal, la cual forma el ángulo β con la vertical. En la dirección vertical no hay movimiento, por lo que las componentes verticales de las fuerzas conducen a que

$$N\cos\beta = mg. \qquad (32)$$

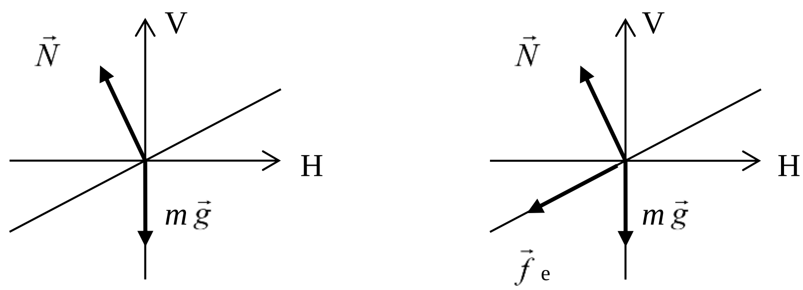
La fuerza normal tiene su componente horizontal en el sentido negativo del eje H; es decir, apunta hacia el centro del círculo; esta componente proporciona la fuerza centrípeta; por tanto, $-N\text{sen}\beta = -m\dfrac{v^2}{R}$ de donde se obtiene que

$$Nsen\beta = \frac{mv^2}{R}. \qquad (33)$$

Dividiendo la ecuación (33) entre la (32) se obtiene

$$\tan\beta = \frac{v^2}{Rg}. \qquad (34)$$

Este es el ángulo que debe tener la curva peraltada para que el cuerpo no resbale, suponiendo velocidad y radio fijos. El ángulo no depende de la masa del cuerpo.



(a) (b)

Figura 11.7. Diagrama de las fuerzas que actúan sobre el vehículo que se mueve en un arco circular; (a) sin fuerza de fricción, (b) con fuerza de fricción.

Con fricción. Para que los vehículos puedan exceder esta velocidad (34), debe existir una fuerza adicional que aumente la fuerza centrípeta necesaria para tomar la curva con seguridad, según se deduce de la fórmula (33). Esta fuerza adicional es la fuerza de fricción entre las llantas y el camino. En el caso del vehículo suponemos que las llantas ruedan sin resbalar, lo cual quiere decir que no hay deslizamiento (patinamiento) de las llantas en la dirección del movimiento circular (es decir, en la dirección perpendicular al plano de la figura 11.7). El diagrama (b) de la figura 11.7 muestra las fuerzas que actúan sobre las llantas del vehículo. Si la velocidad fuera muy grande, el vehículo se saldría de la pista hacia arriba; la fuerza de fricción se opone a que esto suceda; es decir, la fuerza de fricción estática apunta hacia abajo, siendo perpendicular a la dirección del movimiento circular. Supongamos que la fuerza de fricción estática alcanza su mayor valor $f_e=\mu_e N$ justo antes de que se produzca el deslizamiento. La segunda ley de Newton expresada en términos de sus componentes vertical y horizontal es

$$N\cos\beta - f_e sen\beta - mg = 0\,,$$

$$-Nsen\beta - f_e\cos\beta = -\frac{mv^2}{R}\,.$$

Usando la relación $f_e=\mu_e N$ en estas dos ecuaciones se obtiene:

$$N(\cos\beta - \mu_e sen\beta) = mg$$

$$N(sen\beta + \mu_e\cos\beta) = \frac{mv^2}{R}\,.$$

Dividiendo miembro a miembro estas dos relaciones (la segunda entre la primera) para eliminar a N, obtenemos

$$\frac{sen\beta + \mu_e \cos\beta}{\cos\beta - \mu_e sen\beta} = \frac{v^2}{Rg}. \qquad (35)$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación (34) cuando no hay fricción, es decir, cuando el coeficiente de fricción estática es nulo. Cuando el pavimento está mojado la fricción disminuye y, por seguridad, conviene reducir la velocidad. Los canales ("dibujo") en las llantas de los vehículos sirven para desplazar a través de ellos el agua acumulada entre cada llanta y el suelo. La ecuación (35) dice que nuevamente el ángulo no depende de la masa del cuerpo en movimiento.

Comparemos los valores de las velocidades obtenidas en (34) y en (35). Al dividir entre $\cos\beta$ el numerador y el denominador de (35) resulta que:

$$\frac{\tan\beta + \mu_e}{1 - \mu_e \tan\beta} = \frac{v^2}{Rg}. \qquad (35')$$

Al renombrar como v_0 la velocidad obtenida en (34) y usar la cantidad $\tan\beta$ dada en (34), en vez de la usada en (35'), se llega a:

$$\frac{\frac{v_0^{\,2}}{Rg} + \mu_e}{1 - \mu_e \frac{v_0^{\,2}}{Rg}} = \frac{v^2}{Rg}.$$

Esta expresión se reescribe como

$$v^2 = \frac{v_0^{\,2} + \mu_e Rg}{1 - \mu_e \frac{v_0^{\,2}}{Rg}}. \qquad (36)$$

El denominador, a su vez, puede reescribirse usando el teorema del binomio, el cual establece que para $x^2<1$: $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 \mp \ldots$.El resultado de aplicar este teorema, conservando solamente los dos primeros términos de la serie, es

$$v^2 = \left(v_0^{\,2} + \mu_e Rg\right)\left(1 + \mu_e \frac{v_0^{\,2}}{Rg}\right).$$

Con este cálculo queda claro que la fuerza de fricción ayuda a que la velocidad del vehículo pueda ser mayor que cuando no hay fricción, pues $v^2 > v_0^2$.

Ejemplo 4. *Sillas voladoras*. Movimiento circular uniforme en un plano horizontal. Un cuerpo de masa m está colgado a través de una cuerda a la tapa superior de una caja. La caja puede moverse con aceleración constante $\vec{A}$ en una trayectoria circular en un plano horizontal. Describir el movimiento de la masa m cuando es vista desde un sistema de referencia en reposo fuera de la caja (sistema inercial S) y desde un sistema de referencia dentro de ella (sistema no inercial S').

Solución.

Respecto a S. La caja y su contenido se mueven describiendo un movimiento circular uniforme de radio R en un plano horizontal. La plomada no permanece en su posición vertical, se desplaza un ángulo β alejándose del centro del círculo. La componente horizontal de la tensión de la cuerda proporciona la fuerza centrípeta (en la dirección radial y hacia el centro del círculo). La aceleración $\vec{A}$ es la aceleración centrípeta cuya magnitud es $A=v^2/R$, donde v es la velocidad tangencial a la trayectoria circular. Las fuerzas sobre m se ilustran en la figura 11.8; las ecuaciones de movimiento en las direcciones vertical y radial son

$$T\cos\beta - m\mathrm{g}=0,$$

$$T\mathrm{sen}\beta = mA=mv^2/R.$$

Se obtiene que $\tan\beta = A/g=v^2/Rg$.

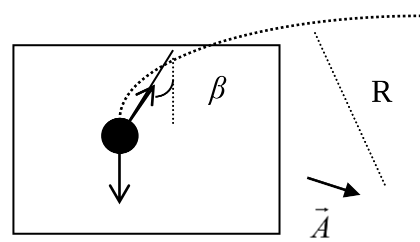


Figura 11.8. Fuerzas aplicadas sobre la masa m. La aceleración centrípeta $\vec{A}$ apunta hacia el centro de la trayectoria circular horizontal.

Respecto a S'. La plomada está en reposo respecto a un observador en este otro sistema. La fuerza inercial, que llamamos $\vec{F}_i = -m\vec{A}$ en el capítulo 6, cuya magnitud es mv^2/R, apunta hacia afuera del círculo y se le llama *fuerza centrífuga*, ilustrada en la figura 11.9. Ahora las ecuaciones en las direcciones vertical y radial (horizontal) son

$$T\cos\beta - mg=0,$$

$$T\mathrm{sen}\beta - mv^2/R=0;$$

con lo que se obtiene el mismo resultado anterior para el ángulo β. Esta fuerza centrífuga la hemos sentido muchas veces: cuando nos subimos a las sillas voladoras de los parques de diversiones o cuando viajamos en un vehículo y parte de la carretera forma un arco de círculo horizontal. Si se mide el ángulo β, entonces la plomada puede ser usada como acelerómetro (A=gtanβ), o como velocímetro si se conoce *R* (v^2=Rgtanβ), o para calcular *R* si se conoce *v* ($R = \dfrac{v^2}{g \tan \beta}$).

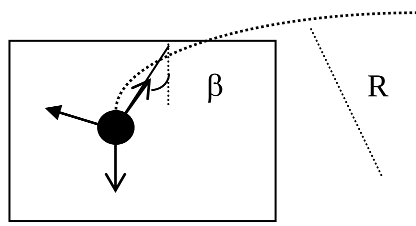


Figura 11.9. Esta fuerza inercial que aparece en el sistema acelerado es llamada fuerza centrífuga.

11.6 Las cantidades angulares son vectores

Relación de variables lineales y angulares en forma escalar. Regresemos a la relación (1) (también véanse las figuras 11.1(a) y 11.10) que la reescribimos como $s=r'\theta$, la cual al tomar la derivada respecto al tiempo, manteniendo el radio *r´* constante, se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = r'\frac{d\theta}{dt} . \qquad (37)$$

El primer miembro representa la rapidez con que la partícula recorre la trayectoria; es decir, representa la velocidad tangencial (v) de la partícula en su trayectoria circular. En el segundo miembro, la derivada del ángulo respecto al tiempo es la velocidad angular (ω). Esta relación puede escribirse como

$$v = r'\omega . \qquad (37')$$

Al derivar respecto al tiempo esta última relación se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = r'\frac{d\omega}{dt} . \qquad (38)$$

El lado izquierdo es la aceleración lineal (tangencial) (a) y la derivada en el lado derecho es la aceleración angular (α). Esta relación se reescribe como

$$a = r'\alpha\,. \qquad (38')$$

Este radio de la trayectoria circular es constante si se le considera como una cantidad escalar, pero no es constante cuando se le considera como un vector que indica la posición de la partícula como una función del tiempo.

Relación de variables lineales y angulares en forma vectorial. Seguiremos considerando el caso en que el eje de rotación permanece fijo, y lo escogemos como el eje Z (ver figura 11.10).

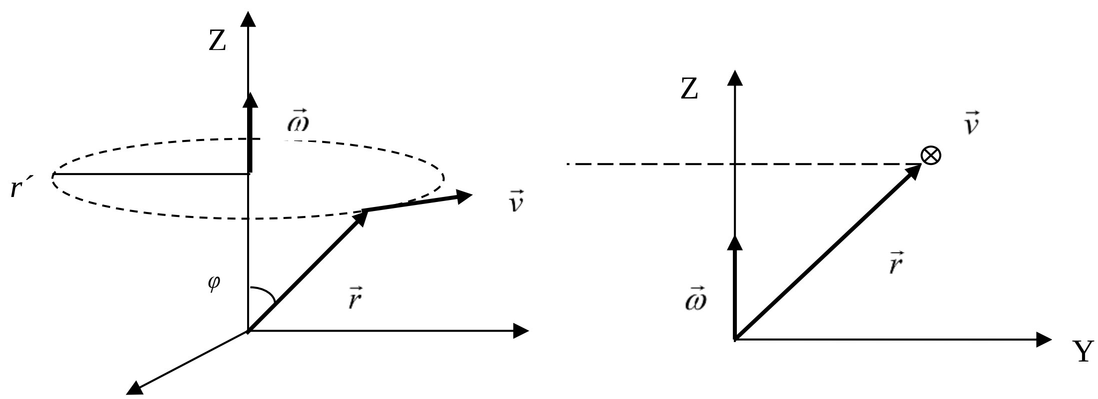


Figura 11.10. Cada punto del cuerpo describe una trayectoria circular al girar en torno del eje fijo Z. La segunda figura muestra el sistema cuando cruza el plano YZ, se resalta que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

Ahora el radio r' de la trayectoria circular es igual a $r\text{sen}\varphi$ donde φ es el ángulo que forma el vector $\vec{r}$ con el eje Z, de manera que la velocidad tangencial (37') tiene magnitud igual a

$$v=\omega r\text{sen}\varphi.$$

Por convención, si los dedos de la mano derecha rodean al eje en la dirección de la rotación de la partícula, el pulgar extendido apunta a lo largo de la dirección y en el sentido del vector de velocidad angular. En otras palabras, la velocidad angular puede expresarse como una cantidad vectorial cuya dirección es perpendicular al plano del movimiento rotacional y en el sentido de avance de un tornillo de rosca derecha girando en el mismo sentido en que se mueve la partícula. Es decir, el vector $\vec{\omega}$ está en la línea del eje de rotación, $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$. De tal manera que la relación anterior se puede identificar como la magnitud del producto vectorial entre los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$, esto es

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \ . \qquad (39)$$

Estos tres vectores están representados en la figura 11.10. La velocidad lineal $\vec{v}$ es un vector tangente a la trayectoria circular y es perpendicular tanto a la velocidad angular $\vec{\omega}$ como al vector de posición $\vec{r}$ (ver figura 11.10).

Debido a que la derivada de la velocidad respecto al tiempo es la aceleración, en la derivada respecto al tiempo de (39) debe incluirse la derivada de $\vec{r}$ pues su dirección es función del tiempo, se obtiene

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \ .$$

Al identificar a estos dos últimos factores que representan las derivadas respecto al tiempo como la aceleración angular y como la velocidad lineal, respectivamente, esta relación se escribe como

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \ . \qquad (40)$$

El vector aceleración angular $\vec{\alpha}$, al igual que el vector velocidad angular $\vec{\omega}$, también está a lo largo del eje de rotación (ver figura 11.11). El primer producto vectorial en (40) $(\vec{\alpha} \times \vec{r})$ es un vector tangente ($\vec{a}_t$) a la trayectoria circular, como se ilustra en la segunda figura 11.11 usando el plano YZ; en cambio, el otro producto vectorial $(\vec{\omega} \times \vec{v})$ es un vector en la dirección radial ($\vec{a}_r$) con sentido hacia el centro del círculo (véanse la segunda parte de las figuras 11.10 y 11.11).

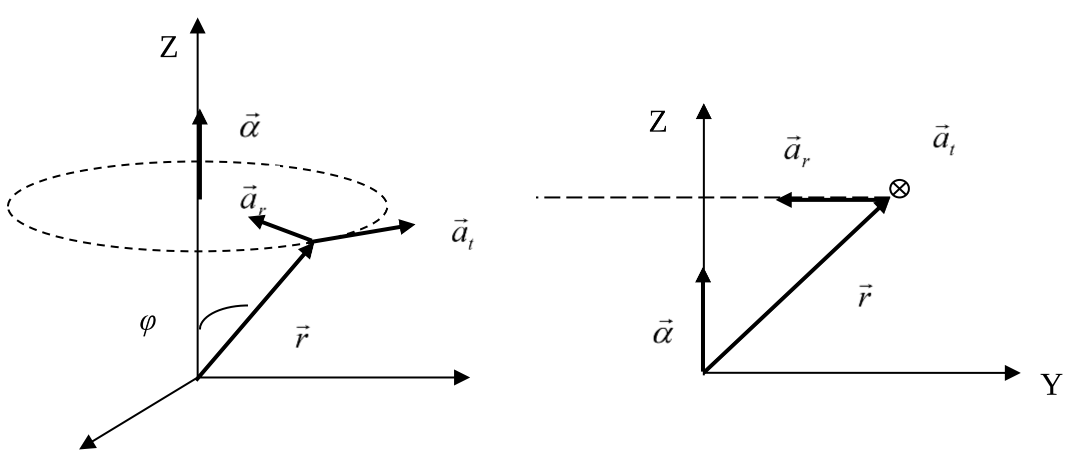


Figura 11.11. La aceleración lineal tiene dos componentes en el plano de la trayectoria circular: una componente radial y una tangencial.

Resulta que la aceleración lineal $\vec{a}$ tiene dos componentes: una componente tangente a la trayectoria circular y una componente radial. Estas aceleraciones tangencial y radial son:

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \qquad (41)$$

y

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}\,. \qquad (42)$$

La magnitud de la aceleración tangencial a_t y la magnitud de la aceleración radial a_r deben ser las mismas que las aceleraciones obtenidas en el estudio del movimiento circular y representadas por las ecuaciones (20) y (19), respectivamente. Comparemos la magnitud de la expresión (41) que es igual a $a_t=\alpha(r\text{sen}\varphi)$ con la magnitud expresada en (20) obtenida para el movimiento circular: $a_t=\alpha r\text{sen}\varphi=\alpha R=a_\theta$, donde $R = rsen\varphi$ es el radio de la trayectoria circular; esta es la magnitud dada en la ecuación (20). Las magnitudes en (20) y (41) son iguales.

Ahora comparemos la magnitud de la expresión (42) con la magnitud de (19) obtenida para el movimiento circular. El vector representado en (42) es (usando (39))

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right).$$

La magnitud del vector es: $|\vec{a}_r| = |\vec{\omega} \times \vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{v}|sen\,\frac{\pi}{2} = \omega|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega(\omega rsen\varphi) = \omega^2 R$; donde nuevamente R es el radio. Esta última igualdad es la ecuación (19). Es decir, las magnitudes en las ecuaciones (19) y (42) son iguales.

Recapitulación

Cinemática rotacional es la descripción del movimiento rotacional sin importar su causa. En una rotación respecto a un eje fijo, cada punto del cuerpo describe una trayectoria circular de radio r centrada en el eje, que puede describirse por un ángulo $\theta = \frac{s}{r}$ **(1)**. El ángulo depende del tiempo, en t_1 es θ_1 y en tiempo posterior t_2 es θ_2. Desplazamiento angular, es la diferencia entre posicion final e inicial $\Delta\theta = \theta_2-\theta_1$, se produce durante el lapso $\Delta t = t_2-t_1$. La rapidez angular media al ir de una posición angular a otra es $\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$; es característica del cuerpo como un todo. Cuando el lapso tiende a cero se obtiene la velocidad angular instantánea $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$. Al pasar de θ_1 a θ_2, también la velocidad angular instantánea cambia de ω_1 a ω_2. La aceleración angular media es $\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$; cuando el lapso tiende a cero se obtiene la aceleración angular instantánea $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$. Al pasar el punto de θ_1 a θ_2, lo hace por un arco de círculo de longitud s y radio r, $s=r\theta$, la derivada de s respecto al tiempo es tangente a la trayectoria, llamada velocidad tangencial $v_t = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$. La derivada de la velocidad tangencial en el tiempo es la aceleración tangencial $a_t = \frac{dv_t}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$.

Rotación con aceleración angular constante. La posición $\theta(t=0)=\theta_0$ y la velocidad angular $\omega(t=0)=\omega_0$ son las condiciones iniciales. Al multiplicar la aceleración angular por dt es $\alpha dt = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)dt = d\omega$; integrando se obtiene $\int_0^t \alpha dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \Rightarrow \alpha t = \omega - \omega_0$, $\omega = \omega_0 + \alpha t$ **(9)**. La operación de integración se aplica otra vez para calcular la posición angular en función del tiempo. Al multiplicar la velocidad angular por dt se obtiene $\omega dt = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)dt = d\theta$; al sustituir (9) e integrar se obtiene $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ **(10)**. Conviene tener expresiones para la posición en función de la velocidad o en función de la velocidad y el tiempo. Al despejar t en (9) y usarlo en (10), se obtienen $2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2$ y $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$.

Para el movimiento circular usemos dos vectores unitarios perpendiculares $\hat{u}_r$ y $\hat{u}_\theta$; $\hat{u}_r$ apunta hacia fuera en la dirección en que el vector $\vec{r}$ crece; $\hat{u}_\theta$ apunta en la dirección en que el ángulo θ crece. En términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son $\hat{u}_r = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\hat{u}_\theta = -\hat{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \hat{j}\cos\theta$; $\vec{r}$ se escribe como $\vec{r} = r\hat{u}_r$ **(15)**. Se calculan la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve en un plano, en coordenadas polares a partir de la ecuación (15). Al derivar respecto al tiempo se obtiene que la velocidad es $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$. La derivada de la velocidad respecto al tiempo es $\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\hat{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$.

Relación de variables lineales y angulares en forma escalar. La relación (1) la reescribimos como $s=r\acute{}\theta$, su derivada en el tiempo es $\frac{ds}{dt}=r\acute{}\frac{d\theta}{dt}$. El primer miembro es la rapidez con que la partícula recorre la trayectoria (v); en el segundo miembro, la derivada respecto al tiempo es la velocidad angular (ω): $v=r\acute{}\omega$. Al derivar respecto al tiempo se obtiene $\frac{dv}{dt}=r\acute{}\frac{d\omega}{dt}$; el lado izquierdo es la aceleración lineal (a) y la derivada en el derecho es la aceleración angular (α), escríbase como $a=r\acute{}\alpha$.

Relación de variables lineales y angulares en forma vectorial. Suponer eje de rotación fijo, Z. El radio $r\acute{}$ de la trayectoria circular es $r$senφ, φ es el ángulo entre $\vec{r}$ y el eje, por lo que la velocidad tangencial tiene magnitud $v=\omega r$senφ. $\vec{\omega}$ está en la línea del eje, $\vec{\omega}=\omega\hat{k}$. De tal manera que la relación anterior se identifica como la magnitud del producto vectorial entre $\vec{\omega}$ y $\vec{r}$, $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$. La derivada de la velocidad tangencial es la aceleración $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$. Los factores con derivadas son aceleración angular y velocidad lineal: $\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$. El primer producto es un vector tangente ($\vec{a}_t$) a la trayectoria circular; el otro producto vectorial es un vector en la dirección radial ($\vec{a}_r$).

Problemas

1. La posición angular de un punto situado en la periferia de una rueda en rotación está descrita por $\phi = 4t - 3t^2 + t^3$, donde ϕ está en radianes y t en segundos. La rueda tiene un radio de 10 cm.
a) Calcular la aceleración angular media en el intervalo de tiempo que comienza en t = 1 s y termina en t = 2 s. b) Calcular la aceleración angular instantánea en el tiempo t = 1 s. c) Calcular la aceleración tangencial instantánea en el tiempo t = 1 s. d) Calcular la aceleración radial instantánea en el tiempo t = 1 s.

2. La posición angular de un punto situado en la periferia de una rueda en rotación está descrita por $\phi = 4t - 3t^2$, donde ϕ está en radianes y t en segundos. La rueda tiene un radio de 10 cm. En el intervalo de tiempo que comienza en t = 1 s y termina en t = 2 s, calcular a) la velocidad angular media y b) la aceleración angular media. c) Calcular la aceleración angular instantánea en los tiempos t = 1 s y t = 2 s. En el tiempo t = 2 s, calcular d) la aceleración tangencial instantánea y e) la aceleración radial instantánea.

3. Una partícula se encuentra a 1 metro de distancia de un eje vertical fijo y su posición angular está descrita por $\varphi=0.30t^2$, donde t en segundos da el ángulo en radianes. En el tiempo t=6.0 s, calcular a) la velocidad angular, b) la velocidad tangencial, c) la aceleración tangencial, y d) la aceleración radial.

4. Una partícula gira en una trayectoria circular de radio 1 m y su posición angular está descrita por $\theta = 10t-t^2$, donde θ se mide en radianes y t en segundos. Determinar a) la

aceleración angular, b) el tiempo t_1 en el que la velocidad angular se anula, c) la aceleración tangencial en el tiempo t_1,

5. Un coche viaja hacia el norte y sus llantas llevan una velocidad angular de 1 rev/s hacia el oeste. Cuando la luz del semáforo cambia a rojo, el chofer frena uniformemente hasta pararse en un intervalo de 2 s. En este intervalo, determinar la aceleración angular de las ruedas.

6. Un punto en la periferia de una rueda abrasiva de 0.75 m de diámetro cambia su velocidad uniformemente de 12 m/s a 25 m/s en 6.2 s. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda durante este intervalo?

7. Un automóvil que viaja a 100 km/h tiene ruedas de 80 cm de diámetro que ruedan sin resbalar. a) Encontrar la velocidad angular de las ruedas con respecto a su eje. b) El automóvil llega al reposo de manera uniforme a las 30 vueltas de las ruedas. Calcular la aceleración angular. c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante el tiempo de frenado?

8. Una rueda que parte del reposo gira sobre un eje fijo con una aceleración angular constante de 2.0 rad/s^2. a) Calcular el tiempo requerido para dar 2.4 revoluciones. b) Determinar la velocidad angular al final de este intervalo.

9. Dos mariquitas (catarinas) están sobre una tornamesa. La hembra está en el borde. El macho está a la mitad entre el borde y el eje de rotación. La tornamesa gira a una rapidez constante de una vuelta por segundo. Elija la opción correcta.
La velocidad angular del macho respecto de la velocidad angular de la hembra es
(a) El doble. (b) La mitad. (c) Es igual para los dos.
La velocidad tangencial del macho respecto de la velocidad tangencial de la hembra es
(a) El doble. (b) La mitad. (c) Es igual para los dos.

10. Considere un disco circular de 1.00 m de radio que gira alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro. Se observa que a partir del reposo el disco necesita dar 20 vueltas completas en 40.0 s para alcanzar su velocidad angular final. a) Encontrar la aceleración angular del disco, supuesta constante; b) calcular la velocidad angular final de este sistema y c) encontrar la aceleración tangencial y la aceleración centrípeta de un punto situado justo en el borde del disco.

11. Un disco uniforme de radio R puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro. Si el disco parte del reposo y acelera con aceleración angular constante α, encontrar: a) la velocidad angular del disco, b) la aceleración tangencial y la aceleración radial de un punto en la periferia del disco y c) la velocidad tangencial de este mismo punto como función de t, α y R.

12. Un niño coloca una canasta de comida campestre en el borde exterior de un carrusel que tiene 4.6 m de radio y que completa un giro cada 24 s. ¿Cuál debe ser el coeficiente de fricción estática para que la canasta permanezca en el carrusel?

13. Un objeto pequeño de masa m que se encuentra sobre una mesa horizontal sin fricción está atado a un bloque colgante de masa M por medio de una cuerda que pasa por un orificio

en el centro de la mesa. Hallar a) la velocidad con que debe moverse el objeto pequeño en un círculo de radio r para que el bloque permanezca en reposo y b) la tensión de la cuerda. Usar m=0.25 kg, M=1 kg, r=1.0 m.

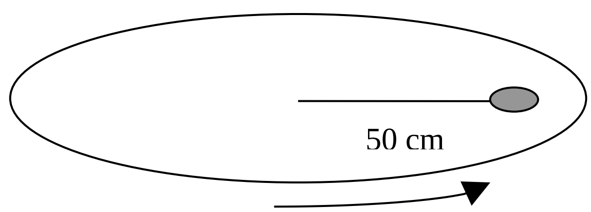
14. Un engrane circular de 50 cm de diámetro se encuentra dando vueltas alrededor de su centro con una velocidad angular de 200 rev/min. Se aplica un proceso de desaceleración angular constante durante 5 horas hasta que se logra detenerlo completamente. Calcular el número de vueltas que realizó el engrane durante ese tiempo y la distancia que recorrió un punto en la periferia del engrane durante el periodo de frenado.

15. Por medio de una cuerda se hace girar una partícula que describe un movimiento circular uniforme de un metro de radio, en un plano horizontal. a) Encontrar la magnitud constante que debe tener la velocidad tangencial para que la magnitud de la aceleración centrípeta sea igual a "*g*", recordando que g = 9.8 m/s^2. b) En este caso, ¿cuál es la velocidad angular ω de la partícula, en radianes por segundo?

16. Un niño hace girar una piedra en un círculo horizontal situado a 1.5 m sobre el suelo por medio de una cuerda de 1.5 m de longitud. La cuerda se rompe, y la piedra sale disparada horizontalmente, golpeando el suelo a 9 m de distancia horizontal, medidos horizontalmente desde donde abandonó la trayectoria circular. ¿Cuál era la aceleración centrípeta de la piedra mientras estaba en movimiento circular?

17. Una moneda situada a una distancia de 50.0 cm del centro de una mesa giratoria horizontal empieza a deslizar cuando su rapidez llega a 30.0 cm/s. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la superficie de la mesa giratoria?

Figura 11.12. Problema 17.



18. Una cuenta de collar puede deslizarse con un rozamiento despreciable por un alambre circular de radio 15 cm como se muestra en la figura. El círculo siempre se encuentra en posición vertical, y gira alrededor de su diámetro vertical con un período de 0.45 s. La posición de la cuenta se describe mediante el ángulo inferior θ que la línea vertical forma con la línea radial que une el centro del círculo con la cuenta. ¿Con qué ángulo respecto a la parte inferior del círculo, puede permanecer la cuenta en una posición fija con respecto al círculo rotatorio?

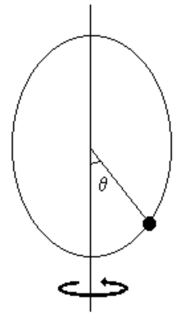


Figura 11.13. Problema 18.

19. Una masa puntual m parte del reposo y resbala hacia abajo sobre la superficie sin fricción de una semiesfera sólida de radio R. Midiendo el ángulo respecto a la vertical y la energía potencial respecto a la parte inferior, determinar a) la energía potencial de la masa como función del ángulo, b) la suma de la energía potencial y la energía cinética como función del ángulo, c) las aceleraciones radial y tangencial como funciones del ángulo y d) el ángulo al cual la masa m se separa de la semiesfera.

20. Un bloque pequeño de masa m = 0.6 kg resbala sin fricción partiendo del reposo desde la parte más alta de un hemisferio de hielo de radio R = 1.2 m. Demostrar que la altura en la que se separa del hemisferio es h = 0.8 m, en ese punto la fuerza centrípeta es la proyección del peso a lo largo del radio.

21. Cierto cordón puede soportar una tensión máxima de 40.0 N sin romperse. Un niño ata una piedra de 4.0 N a un extremo y, sujetando el otro extremo, hace girar a la piedra en un círculo vertical de 0.90 m de radio, aumentando lentamente la velocidad hasta que el cordón se rompe. a) ¿En qué lugar de la trayectoria circular es más probable que se rompa el cordón? b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra al romperse el cordón?

22. Se quiere construir una curva en forma de arco circular en una carretera plana peraltada. El peralte debe ser tal que no se necesite de la fuerza de fricción entre el pavimento y los neumáticos cuando se circula a 80 km/h. El radio de curvatura debe ser de 400 m. ¿Qué ángulo de peralte es el correcto para esas condiciones?

23. Un pequeño bloque de 0.1 kg viaja en un plano horizontal dentro de un estrecho canal circular de 10 cm de radio; inicialmente su velocidad es igual a $\sqrt{10\pi}$ m/s pero se detiene después de algún tiempo. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el fondo del canal es igual a 0.25, a) encontrar cuántas vueltas da este bloque antes de detenerse. Utilice el teorema de trabajo y energía cinética para realizar este cálculo. Las paredes laterales del canal no ofrecen fricción.

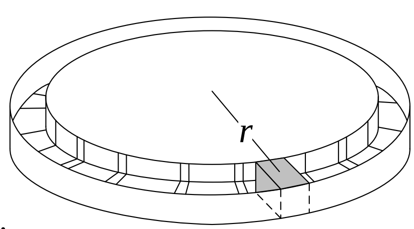


Figura 11.14. Problema 23.

12 ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN, TRABAJO, POTENCIA

Se continúa con el estudio de la cinemática de la rotación pura calculando la energía cinética de un sistema de partículas y de cuerpos sólidos. Se estudia la causa que produce el movimiento de rotación y se aplican los conceptos de trabajo y potencia; se empieza a considerar cuerpos con movimientos de traslación y de rotación combinados.

Introducción

Seguiremos describiendo el movimiento de rotación pura; es decir, el caso en que el eje de rotación permanece fijo. Se calculará la energía cinética rotacional para una partícula y después para N partículas. Después de presentar los conceptos de torca, trabajo y potencia en el caso rotacional, se considerará el movimiento combinado de rotación más traslación.

12.1 Energía cinética rotacional y momento de inercia

Una partícula. Al moverse la partícula en una circunferencia de radio r y con velocidad angular ω (la cual puede ser constante o no), su velocidad lineal (tangencial) es $v=r\omega$ (ver figura 12.1(a)). La energía cinética de rotación es

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\left(mr^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 . \qquad (1)$$

Donde $I=mr^2$. Esta cantidad se llama momento de inercia o inercia rotacional de la partícula; es la masa multiplicada por el cuadrado de la distancia perpendicular desde la posición de la partícula hasta el eje de rotación.

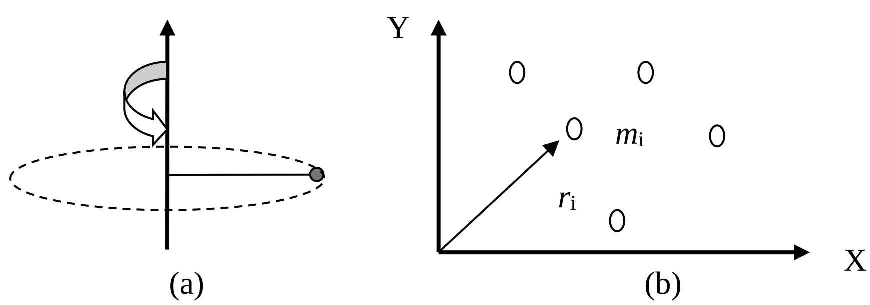


Figura 12.1. (a) Una partícula describe una trayectoria circular en torno a un eje fijo. (b) N partículas tienen movimiento circular (en el plano XY) en torno al eje Z.

N partículas. Supóngase que todas las partículas se encuentran en el plano XY describiendo trayectorias circulares alrededor del origen, tienen la misma velocidad angular ω respecto a un eje perpendicular a la página y que coincide con el eje Z (ver figura 12.1(b)); es decir, sus posiciones relativas no cambian. La velocidad tangencial de la i-ésima partícula del sistema que gira en torno al eje fijo es $v_i = r_i\omega$ donde r_i es el radio de la trayectoria circular, a su vez r_i es la distancia perpendicular desde la posición de la partícula hasta el eje Z. La energía cinética de rotación del sistema de las N partículas es la suma de las energías cinéticas individuales

$$K = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{N} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_Z \omega^2 \qquad (2)$$

donde

$$I_Z = \sum_{1}^{N} m_i r_i^2 \qquad (3)$$

y r_i es la distancia perpendicular desde la posición de m_i al eje de rotación. A la cantidad I_Z se le conoce como *momento de inercia*, también llamada inercia rotacional o inercia de la rotación. I_Z depende de la forma en que esté distribuida la masa del sistema (es decir, de la posición de cada masa) con respecto al eje alrededor del cual el sistema esté girando; para identificar el eje de rotación se acostumbra hacerlo con un subíndice (I_Z). Las dimensiones del momento de inercia son $[I] = ML^2$ y sus unidades en el sistema SI son $kg \cdot m^2$.

Teorema de ejes paralelos para el momento de inercia

Calculemos el momento de inercia de un sistema de N partículas respecto al eje Z, que pasa por el origen O del sistema de coordenadas arbitrario XY, y su relación con respecto al eje Z´ de un sistema de referencia paralelo S´, con origen en el centro de masa de las partículas, como se ilustra en la figura 12.2.

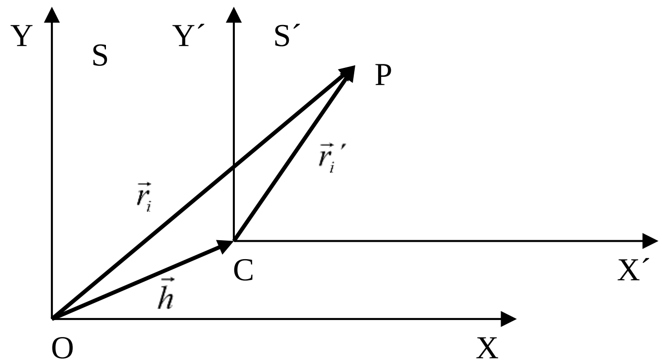


Figura 12.2. El origen del sistema S está en el punto arbitrario O mientras que el sistema S´ es paralelo al sistema S y su origen está en el centro de masa C.

El sistema de coordenadas S´ es paralelo al sistema S, su origen está colocado en el centro de masa C del sistema de N partículas. La magnitud del vector $\vec{h}$ es la distancia que separa a los ejes paralelos Z y Z´. El punto P en la figura 12.2 representa una partícula de masa m_i con posición $\vec{r}_i$ respecto al sistema S y posición $\vec{r}_i\,'$ respecto al sistema S´. Las coordenadas de estos tres vectores son:

$$\vec{h}=(x_{cm},\, y_{cm}), \qquad \vec{r}_i=(x_i,\, y_i) \quad \text{y} \quad \vec{r}_i\,'=(x_i',\, y_i').$$

Los tres vectores están relacionados como $\vec{r}_i=\vec{h}+\vec{r}_i\,'$, tal como lo ilustra la figura 12.2. El momento de inercia que buscamos (dado por la expresión (3)) es

$$I_Z=\sum m_i r_i^2=\sum m_i\left(x_i^2+y_i^2\right).$$

Pero $x_i=x_{cm}+x_i'$ y $y_i=y_{cm}+y_i'$, por lo que

$$I_Z=\sum m_i\left[\left(x_{cm}+x_i'\right)^2+\left(y_{cm}+y_i'\right)^2\right]=\sum m_i\left(x_{cm}^2+y_{cm}^2+x_i'^2+y_i'^2+2x_{cm}x_i'+2y_{cm}y_i'\right).$$

Reagrupando los términos primero y segundo en una suma, los términos tercero y cuarto en otra suma, y los dos últimos términos en sumas separadas, se obtienen cuatro sumas

$$I_Z=\sum m_i\left(x_{cm}^2+y_{cm}^2\right)+\sum m_i\left(x_i'^2+y_i'^2\right)+2x_{cm}\sum m_i x_i'+2y_{cm}\sum m_i y_i'.$$

El contenido del paréntesis en la primera suma es igual al cuadrado de la magnitud del vector $\vec{h}$; mientras que el contenido del paréntesis en la segunda suma es igual al cuadrado de la magnitud del vector $\vec{r}_i\,'$. Cada una de las dos últimas sumas es cero porque, respectivamente, son proporcionales a la abscisa y a la ordenada del centro de masa del sistema de N partículas medidas respecto al sistema de coordenadas cuyo origen está en el centro de masa. Por tanto, la relación anterior puede escribirse como

$$I_Z = \sum m_i h^2 + \sum m_i r_i'^2 .$$

La primera suma es igual a la masa total multiplicada por h^2, la segunda suma es el momento de inercia respecto al eje Z´; finalmente se escribe

$$I_Z = Mh^2 + I_{Z',cm} . \qquad (4)$$

Esta relación (4) se conoce como el *teorema de ejes paralelos*. Establece que el momento de inercia de las N partículas (o de cualquier cuerpo rígido) en torno a un eje arbitrario es igual a la masa total multiplicada por el cuadrado de la distancia que separa a los ejes paralelos (Z y Z´) más el momento de inercia alrededor del eje paralelo (Z´) que pasa por el centro de masa.

En general, el momento de inercia proporciona información sobre la distribución de la masa del sistema respecto a un eje; claramente, el momento de inercia es diferente respecto a ejes distintos. Por ejemplo, suponga un sistema de tres partículas colocadas de tal manera que forman los vértices de un triángulo; el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano del triángulo y que pasa por uno de los vértices es diferente al momento de inercia respecto a un eje también perpendicular al plano y que pasa por el centro de masa, pero están relacionados a través de este teorema.

12.2 Momento de inercia de cuerpos sólidos.

Para usar la relación representada en la fórmula (3) en el caso de un cuerpo continuo, la masa m_i se sustituye por un elemento pequeño de masa δm_i colocada a una distancia perpendicular r del eje, se toma el límite cuando δm_i tiende a cero (al mismo tiempo N se hace muy grande) y entonces la suma se convierte en integral

$$I = \lim_{\delta m_i \to 0} \sum r^2 \delta m_i = \int r^2 dm . \qquad (5)$$

La cantidad r es la distancia perpendicular del elemento dm al eje de giro y la integral se efectúa sobre todo el objeto. La figura 12.3 ilustra el eje de giro, la distancia r y la diferencial de masa.

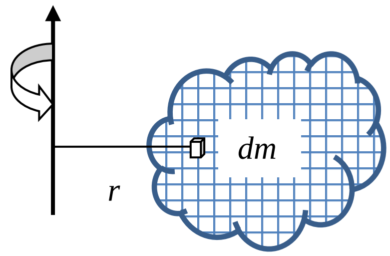


Figura 12.3. Para calcular el momento de inercia de un cuerpo homogéneo, se escoge un elemento de masa *dm* colocado a una distancia perpendicular *r* del eje.

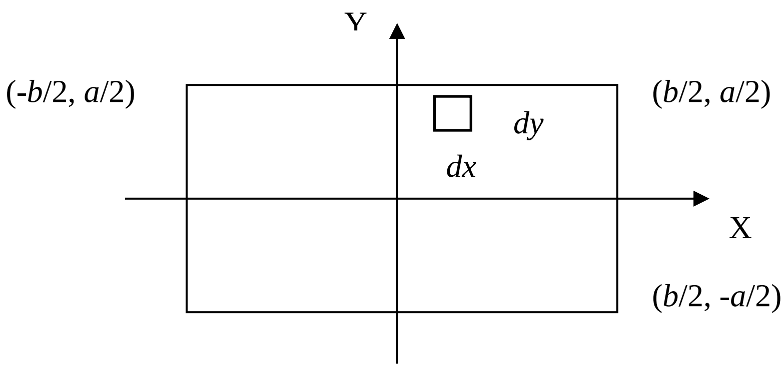
En general, para determinar el momento de inercia de un cuerpo sólido respecto a un eje arbitrario, conviene primero determinar el momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masa y después usar el teorema de ejes paralelos. Los momentos de inercia respecto a ejes que pasen por el centro de masa de varios cuerpos regulares ya se encuentran tabulados, de manera que no se necesita calcularlos. En la tabla siguiente se reproducen las fórmulas para los momentos de inercia de varios de los cuerpos regulares más comunes, fueron tomados de la referencia 1 pero son del dominio público.

Momentos de inercia de principales cuerpos geométricos de masa *m*.

Cuerpo	El eje pasa por el cm y es	Momento de inercia
Varilla delgada de longitud *l*	perpendicular a la longitud	$\frac{ml^2}{12}$
Hoja rectangular delgada, lados *a* y *b*	paralelo al lado *b*	$\frac{ma^2}{12}$
Hoja rectangular delgada, lados *a* y *b*	perpendicular a la hoja	$\frac{m(a^2+b^2)}{12}$
Disco o cilindro sólido delgado, radio *r*	el eje de simetría	$\frac{mr^2}{2}$
Disco delgado, radio *r*	cualquier diámetro	$\frac{mr^2}{4}$
Cilindro sólido de longitud *l* y radio *r*	perpendicular a la longitud	$m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$
Aro o cáscara cilíndrica circular, radio *r*	el eje de simetría	mr^2
Esfera sólida, radio *r*	cualquier diámetro	$\frac{2mr^2}{5}$

Cáscara esférica, radio *r*	cualquier diámetro	$\frac{2mr^2}{3}$

Ejemplo 1. *Lámina rectangular*. Calcular el momento de inercia de una lámina rectangular homogénea, de lados *a* y *b*, (a) respecto a un eje perpendicular a la lámina y que pasa por el cm, (b) respecto a un eje que sea paralelo a un lado y que pasa por el cm, y (c) respecto a un eje perpendicular al plano de la lámina y que pasa por una esquina.



Solución. En la figura se muestra el sistema de coordenadas con ejes paralelos a los lados de la lámina y con origen en el cm.

(a) El eje perpendicular a la lámina y que pasa por el cm es el eje Z. El cuadrado de la distancia perpendicular desde el elemento de masa al eje Z es $r^2=x^2+y^2$. Con la densidad superficial de masa σ, definida como la masa entre el área ($\sigma = \frac{m}{ab}$), se tiene que $dm=\sigma dA$. El elemento de área ubicado entre x y $x+dx$ y entre y y $y+dy$ es $dA=dxdy$. Por tanto

$$I_{Z,cm} = \int r^2 dm = \int \sigma\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \sigma\int x^2 dxdy + \sigma\int y^2 dxdy$$

$$I_{Z,cm} = \sigma a\int x^2 dx + \sigma b\int y^2 dy = \sigma a\frac{1}{3}\left(\frac{b^3}{8}+\frac{b^3}{8}\right) + \sigma b\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{8}+\frac{a^3}{8}\right) = \sigma ab\frac{a^2+b^2}{12}$$

Pero σab es la masa de la lámina, por tanto

$$I_{Z,cm} = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$$

(b) Escogemos el eje que sea paralelo a un lado y que pase por el cm como el eje Y. En este caso la distancia perpendicular desde el elemento de masa al eje Y es $r^2=x^2$. Por tanto,

$$I_{Y,cm} = \int r^2 dm = \int \sigma\left(x^2\right)dxdy = \sigma \int x^2 dxdy$$

Nótese que esta integral ya fue calculada en el inciso anterior. El resultado final es

$$I_{Y,cm} = \frac{mb^2}{12} .$$

Obsérvese también que $I_{X,cm} = \frac{ma^2}{12}$; por tanto $I_{Z,cm} = I_{X,cm} + I_{Y,cm}$, esto es válido únicamente en este caso particular de una lámina rectangular (no lo es en general).

(c) Llamemos Z´ al eje perpendicular a la lámina y que pasa por una esquina. La distancia entre los ejes paralelos Z y Z´ es

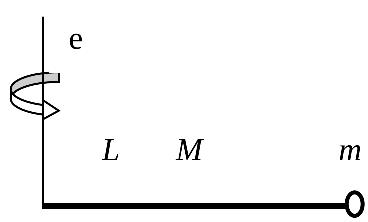
$$h = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} .$$

Al aplicar el teorema de ejes paralelos, se obtiene que

$$I_{Z'} = mh^2 + I_{Z,cm} = \frac{m}{4}\left(a^2 + b^2\right) + \frac{m}{12}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{3}m\left(a^2 + b^2\right).$$

Ejemplo 2. Una varilla delgada horizontal de longitud *L* y masa *M* tiene un extremo atado a un eje de rotación vertical fijo sin fricción y en el otro extremo se coloca una partícula de masa *m*. La combinación varilla-partícula gira en un plano horizontal alrededor del eje de rotación con velocidad angular ω constante. a) Calcular el momento de inercia del cuerpo compuesto. b) Calcular la energía cinética de la combinación.

Solución. La figura ilustra el sistema varilla-partícula.



a) El momento de inercia de una varilla de masa *M* y longitud *L* respecto a un eje perpendicular a la longitud y que pasa por su centro es $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Para calcular el momento de inercia de la varilla respecto a un eje que pasa por su extremo I_{ev} se usa el teorema de ejes paralelos, resulta $I_{ev} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$.

El momento de inercia de la partícula respecto al eje que pasa por el extremo izquierdo de la varilla es $I_{ep} = mL^2$. El momento de inercia del cuerpo compuesto es
$I_e = I_{ev} + I_{ep} = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2$.

b) La energía cinética de la combinación es $K = \frac{1}{2}I_e\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M + m\right)L^2\omega^2$.

12.3 Torca

A partir de la dinámica traslacional sabemos que la fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa *m* es la causa que hace que el cuerpo se acelere; esta relación causa-efecto se representa por la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cm}$.

Ahora estudiaremos la dinámica rotacional; es decir, describiremos el movimiento de rotación tomando en cuenta las causas que lo producen. Para ello consideraremos la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo respecto a un referencial inercial. Por ejemplo, para abrir una puerta pensemos en las diferencias que se tienen si la fuerza aplicada es perpendicular al plano de la puerta o si forma un ángulo entre 0 y 90º con la puerta, o si el punto de aplicación de la fuerza está lo más alejado del eje de las bisagras o muy cerca de él.

Se define la *torca*, también llamada torque o momento de la fuerza, como el vector $\vec{\tau}$ (tau, letra griega minúscula) que resulta del producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ donde se aplica la fuerza y el vector fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \, . \qquad (6)$$

De acuerdo con las propiedades del producto vectorial, la torca es un vector perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ ($\vec{\tau} \perp \mathcal{P}(\vec{r}, \vec{F})$), y su sentido está determinado por la regla de la mano derecha o por el sentido en que avanza un tornillo de rosca derecha. Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están por ejemplo en el plano XY, entonces el vector $\vec{\tau}$ es paralelo al eje Z como lo ilustra la figura 12.4. La magnitud es

$$\tau = rF\,\mathrm{sen}\,\beta. \qquad (7)$$

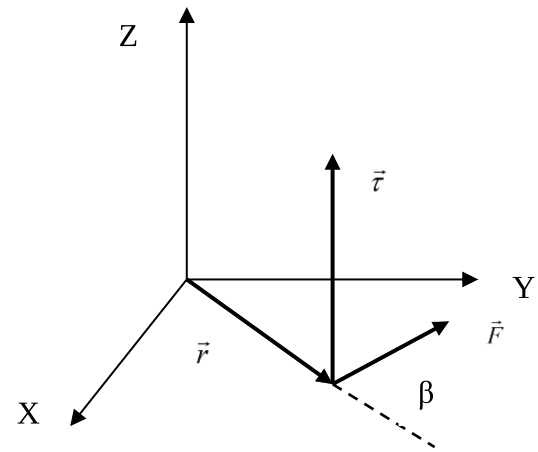


Figura 12.4. Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en el plano XY,
entonces el vector $\vec{\tau}$ es paralelo al eje Z.

Reacomodemos la figura 12.4 para ser vista desde el eje Z; es decir, veamos directamente el plano XY, como se ilustra en la figura 12.5a. Las cantidades que aparecen en la magnitud de la torca pueden asociarse de la manera siguiente:

$$\text{como} \quad \tau = r(F\text{sen}\beta) \quad \text{o como} \quad \tau = F(r\text{sen}\beta)$$

El factor en el primer paréntesis, Fsenβ, significa la componente de $\vec{r}$ en la dirección perpendicular a la línea de $\vec{r}$ y la representamos como $F_{\perp}$; en cambio, el factor $r$senβ representa a la componente de $\vec{r}$ en la dirección perpendicular a la línea de $\vec{r}$ y le llamamos $r_{\perp}$. De esta manera las relaciones anteriores pueden reescribirse, respectivamente

$$\text{como} \quad \tau = r\,F_{\perp} \quad \text{o como} \quad \tau = F\,r_{\perp}$$

Este factor $r_{\perp} = r\text{sen}\beta$ se conoce como brazo de momento o *brazo de palanca*. Estas interpretaciones geométricas se muestran en la figura 12.5a. La interpretación se facilita aun más si los dos vectores se dibujan con un origen común, como lo ilustra la figura 12.5b. Al aplicar la torca, el vector $\vec{r}$ gira hacia $\vec{F}$.

Las dimensiones de la torca son $[\tau]=[r][F]=ML^2T^{-2}$, y su unidad en el sistema SI es newton·metro=N·m. Se deja así, pues la unidad de la torca no es el joule.

El vector $\vec{\tau}$ depende de la magnitud y dirección de la fuerza y del punto de aplicación de la fuerza (lo cual quiere decir que la torca depende del origen del sistema de referencia).

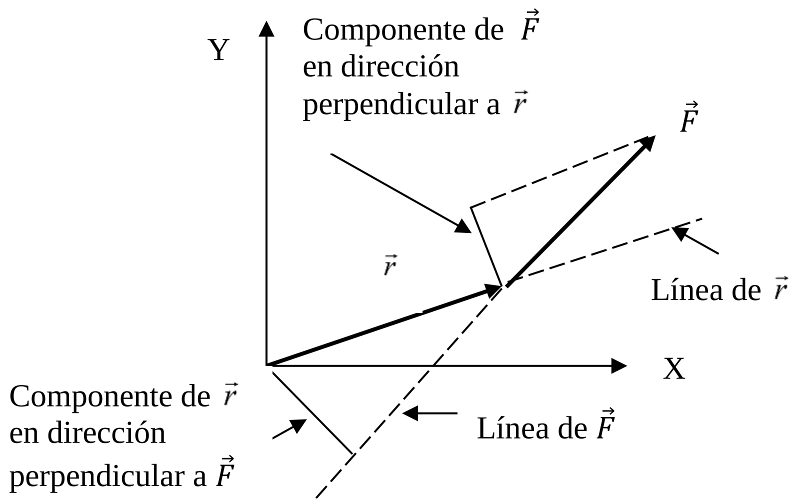


Figura 12.5a. Interpretación geométrica de la magnitud del producto vectorial entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

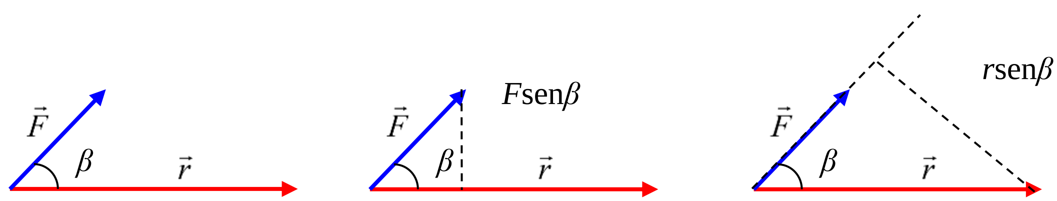


Figura 12.5b. Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están dibujados a partir de un punto común.

La magnitud de la torca es nula (τ=0) cuando el ángulo es β=0 o β=π; es decir, cuando los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son colineales (paralelos o antiparalelos, respectivamente); en este caso la fuerza sólo produce traslación. En cambio, la magnitud de la torca es máxima ($\tau=rF$) cuando β= π/2, que es cuando los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son perpendiculares entre sí, o cuando, además, la fuerza F se aplica a la distancia r más grande (como ejemplo puede pensarse nuevamente en el ejercicio de abrir la puerta aplicando perpendicularmente la fuerza en diferentes posiciones r desde el eje de rotación).

12.4 Trabajo

Supóngase que una fuerza externa $\vec{F}$ en el plano XY actúa sobre un punto P de un cuerpo rígido a una distancia *r* del origen O, obligándolo a girar en torno al eje Z, como se ilustra en la figura 12.6a.

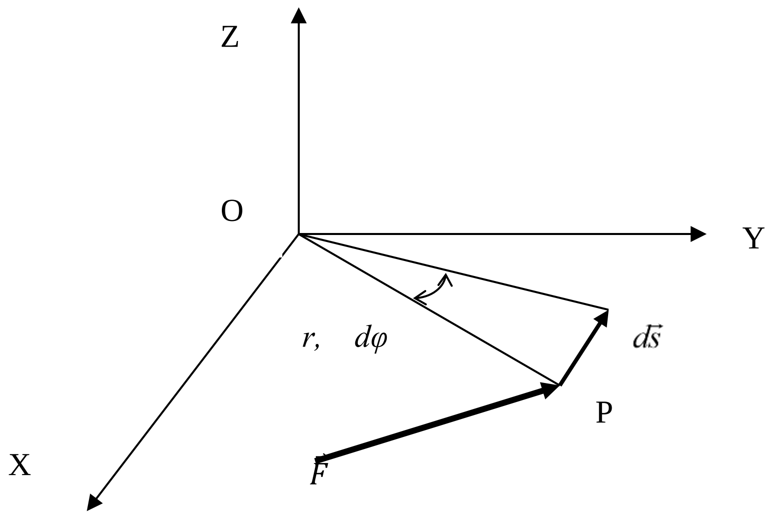


Figura 12.6a. La fuerza $\vec{F}$ en el plano XY hace que el punto P (de un cuerpo rígido no mostrado) gire en torno al eje Z.

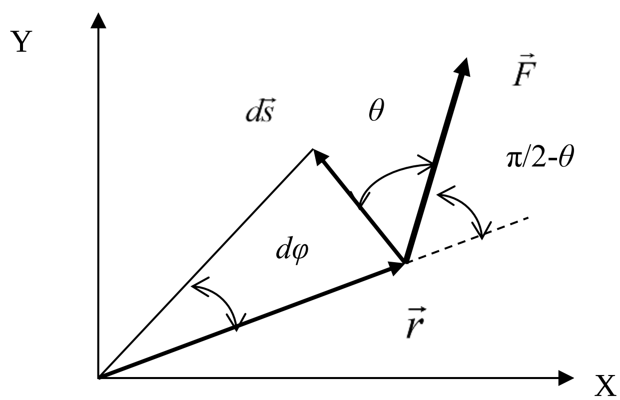


Figura 12.6b. Cantidades importantes de la figura 12.6a mostradas en el plano XY.

Debido a la fuerza aplicada, el punto P gira un ángulo $d\varphi$ y se desplaza una cantidad $ds=rd\varphi$ en su trayectoria circular, como lo ilustra la figura 12.6b. Observe que los vectores $\vec{r}$ y $d\vec{s}$ casi son perpendiculares entre sí cuando $d\varphi$ es muy pequeño. Los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{s}$ forman un ángulo θ, mientras que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ forman un ángulo $\pi/2-\theta$ pues $\vec{r}$ y $d\vec{s}$ son perpendiculares entre sí. Usando los ángulos y los vectores mostrados en esta figura, el trabajo realizado por la fuerza puede ser calculado. La diferencial de trabajo dW que efectúa la fuerza en desplazar el punto una cantidad $d\vec{s}$ es el producto escalar entre $\vec{r}$ y $d\vec{s}$:

$$dW=\vec{r}\bullet d\vec{s}=Fds\cos\theta,$$

pero la magnitud del vector $d\vec{s}$ es $ds=rd\varphi$, aproximadamente; por tanto,

$$dW=Frd\varphi\cos\theta=(Fr\cos\theta)d\varphi.$$

Por otra parte, la torca instantánea es $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{r}$ y su magnitud es $\tau=rF\text{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta)=rF\cos\theta$.

Por tanto,

$$dW=(Fr\cos\theta)d\varphi=\tau\, d\varphi$$

y se llega a que

$$dW=\tau d\varphi. \qquad (8)$$

En el caso de existir varias fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,…, en el plano XY aplicadas en diferentes puntos del cuerpo, el trabajo neto efectuado por estas fuerzas sobre el cuerpo en una rotación $d\varphi$ es

$$dW_{\text{neto}}=(F_1r_1\cos\theta_1)d\varphi+(F_2r_2\cos\theta_2)d\varphi+\ldots=(\tau_1+\tau_2+\ldots)d\varphi$$

donde $(F_ir_i\cos\theta_i)$ es la magnitud τ_i de la torca externa con respecto al origen O. Cada torca se calcula usando la regla de la mano derecha para decidir su signo. Puede decirse que para una rotación pura del cuerpo rígido

$$dW_{\text{neto}}=\left(\sum\tau_i\right)d\varphi\,. \qquad (9)$$

Este resultado significa que el trabajo dW de la ecuación (8) representa el trabajo neto producido por la torca neta τ.

Trabajo-energía cinética rotacional. Durante el tiempo dt, tiempo en que la torca produce el trabajo dW (la fuerza rota al punto P un ángulo $d\varphi$), la energía cinética de rotación cambia en una cantidad dK dada por

$$dK=d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)d\omega=I\omega d\omega=I\omega\alpha dt \qquad (10)$$

pues $d\omega=\frac{d\omega}{dt}dt=\alpha dt$.

Sabemos que el teorema trabajo-energía cinética establece que

$$dW = dK.$$

Usando las expresiones (8) y (10) en este teorema y usando $d\varphi = \frac{d\varphi}{dt}dt = \omega dt$, se obtiene

$$\tau d\varphi = \tau\omega dt = I\omega\alpha dt\ .$$

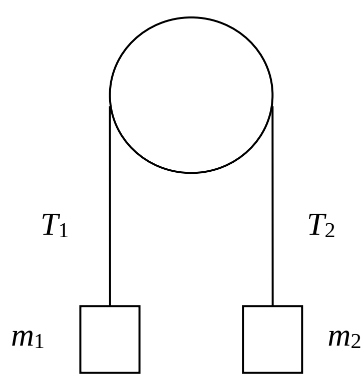
Por tanto, para rotación pura alrededor de un eje fijo se obtiene

$$\tau = I\alpha\ . \qquad (11)$$

Esta torca representa la suma de todas las torcas externas. Esta ecuación (11) es el análogo de $F=ma$ en una dimensión; es decir, representa la *segunda ley de Newton para rotaciones* y proporciona la ecuación de movimiento rotacional.

Ejemplo 3. *Máquina de Atwood*. La máquina de Atwood consiste en dos bloques de masas m_1 y m_2, con $m_1>m_2$, que cuelgan de los extremos de una cuerda ideal que pasa sobre una polea colocada en una posición vertical fija. La polea está montada en un eje horizontal con fricción despreciable y tiene un radio r; el eje de rotación de la polea pasa por su centro y es perpendicular a su plano. Cuando se suelta desde el reposo, el bloque 1 cae una distancia L_1 en un tiempo t_1 sin que la cuerda resbale en la polea. Calcular la tensión que la cuerda ejerce sobre cada bloque, la magnitud de la aceleración de los bloques, la magnitud de la aceleración angular de la polea y el momento de inercia de la polea respecto a su eje. Usar m_1=500 g, m_2=460 g, r=5.0 cm, L_1=75.0 cm y t_1=5.0 s.

Solución. La dirección positiva de la traslación se tomará como la del bloque 1 (hacia abajo) y la dirección positiva de la rotación de la polea se tomará contraria a las manecillas. Sobre cada bloque actúan dos fuerzas: su peso y la tensión de la cuerda; sobre la polea actúan las dos tensiones, la fuerza normal del soporte (eje) y su peso, pero respecto al eje de rotación solamente las tensiones producen torca.



Al aplicar la segunda ley de Newton para la traslación de los bloques, se obtiene

$$m_1 g - T_1 = m_1 a \quad \text{y} \quad T_2 - m_2 g = m_2 a\,.$$

De aquí se obtienen las expresiones para las tensiones:

$$T_1 = m_1(g-a), \qquad T_2 = m_2(g+a)$$

La segunda ley de Newton para la rotación de la polea respecto a su eje conduce a

$$\tau_O = rT_1 - rT_2 = I_O\alpha$$

Debido a que la cuerda no resbala, las aceleraciones tangenciales de dos puntos en contacto, uno de la cuerda con un punto en la polea, son iguales, $a = r\alpha$; es decir

$$T_1 - T_2 = I_O \frac{a}{r^2}$$

Al sustituir en esta expresión las tensiones se obtiene que

$$T_1 - T_2 = m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a = I_O \frac{a}{r^2} \therefore I_O = \frac{r^2}{a}\left[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a\right]$$

Se obtiene que la aceleración a es una cantidad constante; es decir son aplicables las ecuaciones cinemáticas del movimiento uniformemente acelerado: $y = \frac{1}{2}at^2$. Por tanto

$$a = \frac{2L_1}{t_1^{\,2}}\,.$$

Con este resultado para la aceleración se obtiene que las tensiones son

$$T_1 = m_1(g-a) = m_1\left(g - \frac{2L_1}{t_1^{\,2}}\right) \qquad \text{y} \qquad T_2 = m_2(g+a) = m_2\left(g + \frac{2L_1}{t_1^{\,2}}\right).$$

La aceleración angular de la polea es

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2L_1}{rt_1^{\,2}}\,.$$

Finalmente, el momento de inercia de la polea respecto a su eje es

$$I_O = I_{cm} = \frac{r^2}{a}\left[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a\right] = r^2\left[(m_1 - m_2)\frac{gt_1^{\,2}}{2L_1} - (m_1 + m_2)\right].$$

Usando los valores numéricos, se obtienen los resultados siguientes:

a= 0.06 m/s^2, T_1= 4.87 N, T_2= 4.54 N, α= 1.20 rad/s^2, I_{cm}= 0.0139 kgm^2.

Este ejemplo permite diseñar un sistema para estudiar experimentalmente el movimiento acelerado de un objeto que cae (o que sube) con aceleración muy pequeña, de tal manera que el movimiento pueda verse en "cámara lenta". El dispositivo también puede usarse para determinar el momento de inercia de la polea.

12.5 Potencia

Cada lado de la ecuación que representa el teorema trabajo-energía cinética ($dW=dK$) puede escribirse, respectivamente, como $dW = \frac{dW}{dt}dt$ y $dK = \frac{dK}{dt}dt$. Por tanto,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt};$$

es decir, la rapidez con que se produce el trabajo es igual al cambio temporal en la energía cinética, a esta cantidad se le llama *potencia instantánea*.

Por su parte la diferencial de trabajo, representada por la expresión (8): $dW=\tau d\varphi$, puede reescribirse como $\frac{dW}{dt}dt = \tau\frac{d\varphi}{dt}dt = \tau\omega dt$, lo cual implica que

$$\frac{dW}{dt} = \tau\omega .$$

La potencia instantánea, que es la rapidez con que se produce el trabajo (o la rapidez con que cambia la energía cinética), también puede escribirse como

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} = \tau\omega . \qquad (12)$$

Esta ecuación es el análogo rotacional de la relación traslacional $P=\vec{F}\bullet\vec{v}$.

12.6 Movimientos de traslación y rotación combinados

Hemos estado considerando únicamente cuerpos con movimiento de rotación pura, en la cual el eje de rotación se mantiene fijo en el marco de referencia inercial elegido. Ahora permitiremos que el cuerpo también tenga movimiento de traslación. Pero supondremos que el eje de rotación no cambia de dirección para que el movimiento del cuerpo sea de rotación pura más de traslación pura del eje de rotación. Por ejemplo, pensemos en el caso de una rueda de bicicleta; cuando el centro de masa se traslada con velocidad v_{cm}, un observador que se mueve (paralelamente) en un marco inercial con esta misma velocidad verá que el cm permanece quieto. Para este observador el movimiento es de rotación pura siempre que:

(a) el eje de rotación pase por el cm, y

(b) el eje tenga siempre la misma dirección en el espacio.

Energía cinética. Demostraremos primero que, en este caso especial de rotación pura alrededor de un eje con orientación constante más traslación pura del eje, la energía cinética de un sistema de partículas (o un cuerpo sólido arbitrario) puede expresarse como la suma de los correspondientes términos independientes asociados a la rotación y a la traslación. Supóngase que el movimiento de traslación del sistema se produce en el plano XY y que, además, el sistema gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje perpendicular al plano XY y que pasa por el centro de masa.

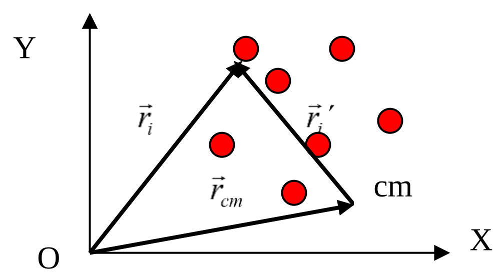


Figura 12.7. El sistema de partículas gira con velocidad angular ω respecto a un eje perpendicular al plano XY que pasa por el cm.

Por definición, la posición del centro de masa respecto al origen O es $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$; la posición de la i-ésima partícula es $\vec{r}_i$ respecto al origen O y es $\vec{r}_i\,'$ respecto a la posición del centro de masa; estas tres posiciones están relacionadas a través de $\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i\,'$ (ver figura 12.7). La relación entre las correspondientes velocidades es $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,'$. Con relación al punto O, la energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2} m_i v_i^2$, y la energía cinética total es la suma de la energía cinética de todas las partículas:

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \,(\vec{v}_i \bullet \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\sum m_i \,\left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,'\right)\bullet\left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,'\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum m_i v_{cm}{}^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_i{}'^2+\sum m_i\ \vec{v}_{cm}\bullet\vec{v}_i{}'$$

La última suma puede escribirse como $\vec{v}_{cm}\bullet\left(\sum m_i\vec{v}_i{}'\right)=\vec{v}_{cm}\bullet\frac{d}{dt}\left(\sum m_i\vec{r}_i{}'\right)=0$; es cero porque esta última suma es proporcional a la posición del cm calculada respecto al cm. Por tanto, la energía cinética del sistema es

$$K=\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2+\frac{1}{2}\sum m_i v_i{}'^2\,. \qquad (13)$$

Es decir, la energía cinética total del sistema es igual a la energía cinética de traslación del cm más la energía cinética calculada respecto al cm. Para cualquier sistema de partículas, un cuerpo rígido en particular, que sólo tiene movimiento de traslación pura, el segundo término es nulo. En cambio, para un cuerpo que sólo tiene movimiento de rotación pura respecto a un eje que pasa por el cm, el primer término es nulo.

Como se ha supuesto que todas las partículas giran con la misma velocidad angular ω respecto a un eje que pasa por el cm y que es perpendicular al plano donde se encuentran, entonces la magnitud de la velocidad tangencial a la trayectoria circular es $v_i{}'=r_i{}'\omega$ para la i-ésima partícula, con lo cual obtenemos que la ecuación (13) se convierte en

$$K=\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\left(r_i{}'\omega\right)^2=\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2+\frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i{}'^2\right)\omega^2\,.$$

La suma que se encuentra entre paréntesis es el momento de inercia respecto al eje perpendicular al plano XY y que pasa por el cm (I_{cm}). Por tanto,

$$K=\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2\,. \qquad (14)$$

Esta expresión dice que la energía cinética total del sistema es igual a la energía cinética de traslación del cm más la energía cinética de rotación respecto al eje perpendicular a la dirección de traslación y que pasa por el cm; o sea, la energía cinética total es igual a la energía cinética del movimiento de traslación más la energía cinética del movimiento rotacional. Las velocidades v_{cm} y ω son independientes entre sí.

Rodar sin resbalar. Consideremos ahora un caso particular de movimiento combinado de traslación y de rotación en el cual un cuerpo con simetría cilíndrica o esférica rueda sobre una superficie plana horizontal o inclinada, pero de modo que en el *punto instantáneo de contacto* no existe movimiento relativo entre el cuerpo y la superficie. La fuerza de fricción entre el cuerpo y la superficie es la causante de que el cuerpo ruede sin deslizar, pero la fuerza de fricción no realiza trabajo y, por tanto, no hay disipación de la energía porque no existe movimiento relativo entre las superficies en contacto; es decir, la fuerza es de fricción estática.

El movimiento de un disco, que se traslada y al mismo tiempo rueda, puede considerarse como la superposición de la traslación pura de todos los puntos más la rotación pura de todos los puntos respecto al eje de giro que pasa por el cm y que es perpendicular al plano del disco. Fijemos nuestra atención en tres puntos particulares del disco: el más alto, el centro de masa y el más bajo (el que está en contacto con la superficie), como se muestra en la figura 12.8. En el diagrama (a) el movimiento es de traslación pura, todos los puntos del cuerpo se trasladan con la misma velocidad lineal, $\vec{v}_{cm}$. En el diagrama (b) el movimiento es de rotación pura, todos los puntos del cuerpo giran con la misma velocidad angular (ω) alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro de masa (que coincide con el centro geométrico si la masa está distribuida uniformemente). La velocidad tangencial del punto más alto y del más bajo es horizontal, con una magnitud $v=\omega R$.

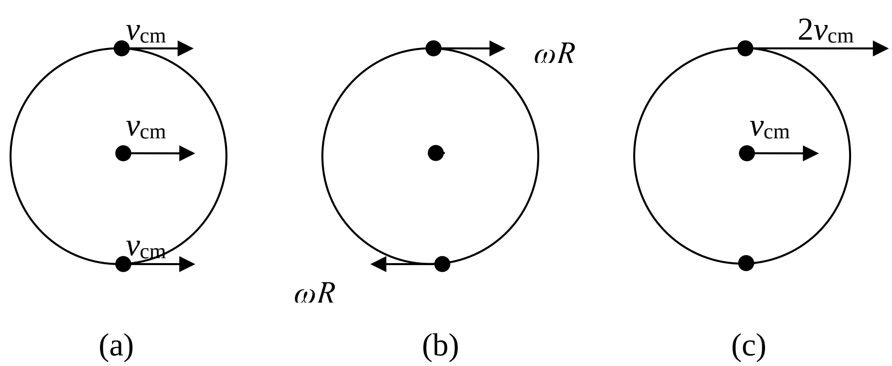


Figura 12.8. (a) Traslación pura; (b) rotación pura respecto a un eje que pasa por el centro y que coincide con el eje de simetría; (c) traslación y rotación combinadas.

Cuando se superponen los dos movimientos (diagrama (c)), la velocidad de cada punto es la suma vectorial de las velocidades de traslación y de rotación. En particular, el punto más bajo del disco tiene una velocidad horizontal que es igual a la suma vectorial de la velocidad de traslación y la velocidad tangencial, la magnitud resultante es v_{cm}-ωR; si esta velocidad es cero, de modo que el punto de contacto esté en reposo instantáneamente, entonces debemos tener que

$$v_{cm}=\omega R. \qquad (15)$$

Este resultado se aplica únicamente en el caso de que el cuerpo rueda sin resbalar. La relación (15) es la condición de *rodar sin resbalar*. Esta relación también se ha usado para calcular el valor de la velocidad horizontal resultante del punto más alto en el diagrama (c). En este diagrama (c) se han superpuesto los movimientos representados en los diagramas (a) y (b); las velocidades en los puntos más alto, central y más bajo han sido obtenidas como la suma vectorial de las correspondientes velocidades de traslación y de rotación.

En este caso de rodar sin deslizar, los dos términos que tiene la energía cinética, ecuación (14), al usar la condición (15) pueden ser escritos como una función de solamente v_{cm} o de solamente ω:

$$K=\frac{Mv_{cm}{}^2}{2}+\frac{I_{cm}v_{cm}{}^2}{2R^2}=\frac{1}{2}\left(M+\frac{I_{cm}}{R^2}\right)v_{cm}{}^2\,; \qquad (16a)$$

o como

$$K=\frac{M\omega^2R^2}{2}+\frac{I_{cm}\omega^2}{2}=\frac{1}{2}\left(MR^2+I_{cm}\right)\omega^2\,. \qquad (16b)$$

En el caso general de movimientos de traslación y rotación combinados, pero en el que se permite que haya deslizamiento, la velocidad horizontal tangencial $v=\omega R$ del punto más bajo o del más alto en la periferia del cuerpo rodante no es igual a v_{cm}.

Eje instantáneo de giro. Consideremos nuevamente el punto más bajo del disco (el que está en contacto con la superficie horizontal) mostrado en la figura 12.8(c). Calculemos la energía cinética respecto a un eje que pase por este punto de contacto y que sea perpendicular al plano del disco. Cuando no hay deslizamiento, puede pensarse que la rotación es producida respecto a un eje que pase por el punto de contacto. Conforme el cuerpo avanza en su movimiento de rodar sin deslizar, el punto de contacto va cambiando a diferentes puntos del disco y del suelo. Bajo estas condiciones el eje de rotación que pasa por el punto más bajo del disco es llamado *eje instantáneo de giro*. La energía cinética respecto al punto de contacto (B) es

$$K=\frac{1}{2}I_B\omega_B{}^2\,. \qquad (17)$$

Aquí las cantidades I_B y ω_B^2 están referidas al eje de rotación que pasa por el punto más bajo. Por el teorema de ejes paralelos, tenemos que $I_B = I_{\text{cm}} + MR^2$. Además, la velocidad tangencial del cm es $v_{\text{cm}} = R\omega_B$. Por tanto,

$$K = \frac{1}{2} I_B \omega_B{}^2 = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + MR^2\right)\omega_B{}^2 = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + MR^2\right)\frac{v_{cm}{}^2}{R^2}. \qquad (18)$$

Esta ecuación (18) es idéntica a la ecuación (16a). Por otra parte, la velocidad angular del cm respecto al punto más bajo debe ser la misma que la velocidad angular de este punto (B) respecto al cm; entonces $\omega_{\text{B}} = \omega$. Por tanto, la ecuación (18) también es idéntica a la ecuación (16b).

$\longrightarrow \qquad \longrightarrow \qquad \longrightarrow$

Ejemplo 4. *La carrera de los redondos*. Sobre un plano inclinado se encuentran varios cuerpos redondos (con simetría esférica o cilíndrica) con densidad de masa uniforme; algunos son macizos y otros son cascarones. Todos tienen igual masa e igual radio, pero están hechos de diferente material. Se les permite empezar a bajar simultáneamente. Si el movimiento es de rodamiento sin deslizamiento, ¿en qué orden llegan a la parte inferior del plano?

Solución. Los objetos pueden ser una esfera maciza, un cascarón esférico, un cilindro macizo o un cascarón cilíndrico. Como la distancia recorrida es la misma para todos, el que llega primero es porque su aceleración a es mayor. Estos cuerpos tienen diferente momento de inercia. Cada uno rueda respecto a un eje horizontal a través del cm y perpendicular a la dirección del movimiento traslacional. El problema puede ser resuelto usando varios caminos: (1) calculando la velocidad de traslación en la parte inferior del plano, para ello conviene usar la conservación de la energía mecánica; (2) calculando la aceleración de traslación, para lo cual conviene usar la dinámica producida por las fuerzas y torcas. Se usará el segundo camino.

Suponiendo despreciable el efecto de la resistencia del aire, las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo, representadas en la figura, son el peso $m\vec{g}$, la fuerza normal $\vec{N}$ y la de fricción estática $\vec{f}$.

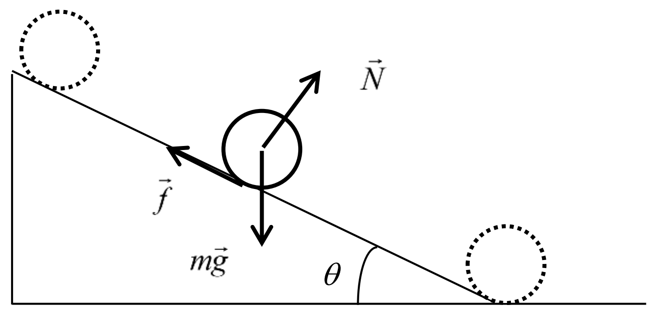


Figura 12.9. Ejemplo 4.

Escogemos un referencial con un eje perpendicular al plano inclinado y el otro paralelo al plano y hacia abajo. La ecuación que describe la falta de traslación del cm en dirección perpendicular al plano es

$$N - mg\cos\theta = 0\,, \qquad (a)$$

el movimiento de traslación en la dirección paralela al plano inclinado es

$$mgsen\theta - f = ma\,. \qquad (b)$$

Solamente la fuerza de fricción produce torca respecto al eje de rotación, pues su línea de acción no pasa por el cm. Por tanto, la ecuación que describe el movimiento de rotación es

$$fR = I\alpha\,. \qquad (c)$$

La condición de rodamiento sin deslizamiento en términos de las aceleraciones lineal a y angular α se expresa como $a = R\alpha$; de manera que la ecuación (c) se transforma en

$$fR = \frac{Ia}{R}\,. \qquad (d)$$

Al sustituir este valor de f en la ecuación (b) y despejar la aceleración del cm, se obtiene que

$$a = \frac{g\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+k}\,, \qquad (e)$$

donde se ha definido $k = \dfrac{I}{mR^2}$ como el parámetro adimensional que identifica a cada cuerpo.

Es importante notar que este resultado, (e), no depende explícitamente del tamaño de los objetos, ni de la masa; sólo depende del ángulo y de la forma en que su masa está distribuida. El cuerpo que llega primero a la parte inferior del plano es el que tiene mayor aceleración, es decir, el que posee el valor de k más pequeño. Para identificarlo se debe conocer el valor de I.

La esfera maciza tiene el valor de k más pequeño y, por tanto, llega primero a la base del plano; luego el cilindro macizo, después el cascarón esférico, y al final el cascarón cilíndrico.

Al sustituir en (d) la aceleración (e), se obtiene para la fuerza de fricción la expresión

$$f = \frac{k}{1+k} mg \operatorname{sen}\theta .$$

Cada cuerpo siente una fuerza de fricción diferente, cuya magnitud depende de su geometría y de la distribución de la masa. En la referencia 2 se resuelve este problema siguiendo diferentes caminos.

$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$

Recapitulación

Suponer partículas en el plano XY describiendo trayectorias circulares alrededor del origen, tienen velocidad angular ω respecto al eje de giro, Z. La velocidad de la i-ésima partícula es $v_i = r_i\omega$, su energía cinética de rotación es $K_i = \frac{1}{2} I_i \omega^2$, donde $I_i = m_i r_i^2$ es el momento de inercia. La energía cinética de rotación del sistema es la suma de las energías cinéticas $K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$ donde $I_z = \sum_1^N m_i\, r_i^2$ es el momento de inercia.

Momento de inercia respecto al eje Z y su relación con respecto al eje Z´ de un sistema de referencia paralelo S´, con origen en el centro de masa, figura 12.2. La magnitud del vector $\vec{h}$ es la separación de los ejes paralelos Z y Z´. El punto P en la figura representa una partícula de masa m_i con posición $\vec{r}_i$ respecto a S y $\vec{r}_i{}'$ respecto a S´; las coordenadas son $\vec{h} = (x_{cm}, y_{cm})$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ y $\vec{r}_i{}' = (x_i', y_i')$, están relacionadas como $\vec{r}_i = \vec{h} + \vec{r}_i{}'$. El momento de inercia es $I_Z = Mh^2 + I_{Z',cm}$, el primer término es la masa total multiplicada por h^2 y el segundo es el momento de inercia respecto al eje Z´. Éste es el teorema de ejes paralelos, dice que el momento de inercia de las N partículas en torno a un eje es igual a la masa total multiplicada por el cuadrado de la distancia que separa los ejes Z y Z´ más el momento de inercia alrededor del eje paralelo Z´ que pasa por el cm. Para un cuerpo continuo, la masa m_i se sustituye por un elemento de masa dm colocada a una distancia r del eje, y la suma se convierte en integral $I = \lim_{\delta m_i \to 0} \sum r^2 \delta m_i = \int r^2 dm$.

La torca se define como el vector $\vec{\tau}$ que resulta del producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$, donde se aplica la fuerza, y el vector fuerza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Una fuerza $\vec{F}$ en el plano XY actúa sobre un punto P de un cuerpo rígido a una distancia *r* del origen, obligándolo a girar en torno al eje Z, figuras 12.6; el punto P gira un ángulo $d\varphi$ y se desplaza una cantidad $ds=rd\varphi$ en su trayectoria circular. El trabajo dW que efectúa la fuerza en desplazar el punto una cantidad $d\vec{s}$ es el producto escalar entre $\vec{F}$ y $d\vec{s}$: $dW=\tau d\varphi$ **(8)**. Durante el tiempo dt, en que la torca produce el trabajo dW, la energía cinética de rotación cambia a $dK = I\omega\alpha dt$ **(10)**. El teorema trabajo-energía cinética establece que $dW=dK$, usando (8) y (10) se obtiene $\tau d\varphi = \tau\omega dt = I\omega\alpha dt$. Por tanto, para rotación pura alrededor de un eje fijo se obtiene $\tau = I\alpha$, que representa la segunda ley de Newton para rotaciones.

El teorema trabajo-energía cinética puede escribirse como $\frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt}$; la rapidez con que se produce el trabajo es igual al cambio temporal en la energía cinética, se le llama potencia instantánea. También puede escribirse como $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} = \tau\omega$.

Para rotación pura alrededor de un eje con orientación fija más traslación pura del eje, la energía cinética es la suma de los correspondientes términos independientes asociados a la rotación y a la traslación. Suponer que la traslación del sistema se produce en el plano XY y que el sistema gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje perpendicular al plano XY y que pasa por el centro de masa. La posición del cm es $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$; la posición de la i-ésima partícula es $\vec{r}_i$ respecto al origen O y es $\vec{r}_i\,'$ respecto al centro de masa; estas posiciones están relacionadas como $\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i\,'$ (figura 12.7). La energía cinética de la partícula *i* es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$, y la energía cinética total es $K = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ **(13)**; I_{cm} es el momento de inercia respecto al eje perpendicular al plano XY y que pasa por el cm.

Consideremos el movimiento combinado de traslación y rotación de un cuerpo con simetría cilíndrica que rueda sobre una superficie plana, pero que en la línea instantánea de contacto no existe movimiento relativo. La fuerza de fricción estática entre el cuerpo y la superficie causa que el cuerpo ruede sin deslizar. El movimiento es la traslación de los puntos más la rotación de los puntos respecto al eje. Fijémonos en tres puntos de un disco: el más alto, el centro de masa y el más bajo (en contacto con la superficie), figura 12.8. En el diagrama (a) el movimiento es de traslación pura. En (b) el movimiento es de rotación pura; la velocidad tangencial del punto más alto y del más bajo es horizontal, $v=\omega R$. Al superponer los movimientos en (c), la velocidad de cada punto es la suma vectorial de las velocidades de traslación y de rotación. El punto más bajo del disco tiene velocidad horizontal con magnitud $v_{cm}-\omega R$, si es cero, entonces $v_{cm}=\omega R$ es la condición de rodar sin resbalar. Cuando no hay deslizamiento, puede pensarse que la rotación es producida respecto a un eje que coincide con la línea de contacto, es llamado eje instantáneo de giro.

Bibliografía

1. Lide, D. R., Ed. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 80th ed. CRC Press, Boca Raton, 1999. A-96.
2. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la resolución de problemas, ejemplos de mecánica elemental*. Universidad Autónoma Metropolitana y Plaza y Valdés, México, 2005. Capítulo 15.

Problemas

1. Cuatro partículas idénticas de masa 0.25 kg cada una, se colocan en los vértices de un rectángulo (20 cm × 40 cm) y se mantienen en esas posiciones mediante cuatro barras ligeras, que forman los lados del rectángulo. ¿Cuál es el momento de inercia de esta estructura rígida alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y que es paralelo a los lados cortos del rectángulo?

2. El sistema mostrado en la figura consiste de cuatro partículas idénticas entre sí de 5.00 kg de masa cada una. En la figura se dan en metros las coordenadas cartesianas de las posiciones de las partículas. Calcular el momento de inercia de este sistema con respecto al eje z.

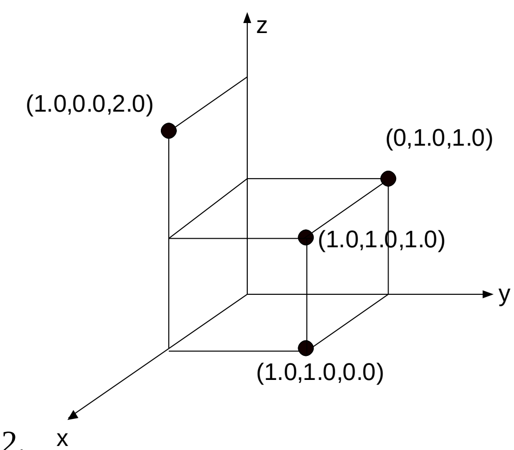
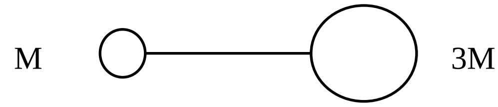


Figura 12.10. Problema 2.

3. El cuerpo rígido que se muestra en la figura12.11 gira alrededor de un eje que pasa por su centro de masa y es perpendicular al plano de la figura. Si M = 2.0 kg y la longitud de la barra es de 80 cm, ¿cuál es la energía cinética de este objeto cuando su velocidad angular alrededor de este eje es igual a 5.0 rad/s? Despreciar la masa de la barra y considerar a las masas como partículas.

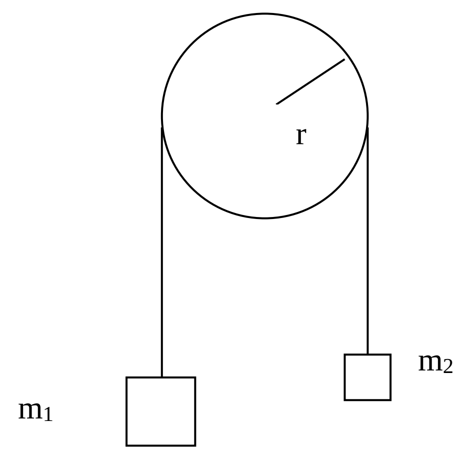
Figura 12.11. Problema 3.



4. Una varilla uniforme de masa *m* y longitud *L* gira con velocidad angular constante en un plano horizontal en torno de un eje vertical fijo sin fricción que pasa por un extremo. Una esfera sólida de masa *M* y radio *L*/3, se monta en el extremo libre de la varilla. a) Calcular el momento de inercia del cuerpo combinado. b) Calcular la energía cinética de la combinación.
(El momento de inercia de una varilla, de masa *m* y longitud *l*, respecto a un eje perpendicular a la longitud y que pasa por su centro es igual a $\frac{1}{12}ml^2$; el momento de inercia de una esfera sólida de masa *m* y radio *r*, alrededor de un diámetro, es $\frac{2}{5}mr^2$).

5. En una máquina de Atwood un bloque tiene una masa m_1 y el otro bloque tiene una masa m_2, con $m_1>m_2$. La polea no presenta fricción en el eje y tiene un radio r. La cuerda no resbala en la polea. Cuando la máquina es liberada a partir del reposo, se observa que el bloque más pesado cae una altura y_1 en un tiempo t_1. Calcular el momento de inercia de la polea respecto a su eje.

Figura 12.12. Problema 5.



6. Un individuo hace que ruede un aro $(I_{aro} = MR^2)$ por un camino horizontal con la velocidad de 7.2 km/h. ¿Hasta qué distancia puede subir el aro sin resbalar por una cuesta usando su energía cinética? La inclinación de la cuesta es igual a 10 m por cada 100 m de camino.

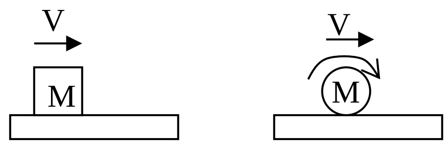
7. Una esfera sólida de 2.00 kg de masa y de radio R= 20 cm rueda sin resbalar hacia arriba por un plano inclinado a un ángulo de 15°. El centro de masa de la esfera tiene una velocidad de traslación de 2 m/s cuando inicia su movimiento en la parte más baja del plano inclinado. Determine la distancia que recorrerá la esfera sobre el plano inclinado antes de detenerse. (El momento de inercia de una esfera sólida de radio R y masa M con respecto a un eje que pasa por su centro de masa es $2MR^2/5$).

8. El momento de inercia de una varilla, de masa *m* y longitud *l*, respecto a un eje perpendicular a la longitud y que pasa por su centro de masa es igual a $ml^2/12$. La varilla se sujeta de uno de sus extremos a un pivote y, si se le suelta desde una posición horizontal partiendo del reposo, puede girar por la acción de la gravedad. Si se coloca una moneda en el

extremo libre de la varilla, comparar la aceleración lineal inicial de la moneda con la inicial del extremo de la varilla.

9. Un bloque de masa M y un cilindro de la misma masa M que rueda sin resbalar se trasladan con la misma velocidad V del centro de masa. ¿Cuál de los dos tiene más energía cinética?:

Figura 12.13. Problema 9.



10. Un aro arranca desde el reposo en la parte superior de la pista que aparece en la figura 12.14 y rueda sin resbalar hasta que llega al extremo derecho de la pista. La inercia rotacional (el momento de inercia) de un aro es $I = MR^2$. ¿Cuál es la velocidad de su centro de masa al llegar a dicho extremo? Aplique la ley de conservación de la energía para obtener su resultado en términos de la aceleración gravitacional g y la altura inicial h.

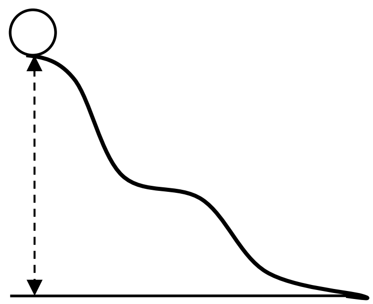


Figura 12.14. Problema 10.

11. Sobre un plano inclinado se encuentran varios cuerpos redondos (con simetría esférica o cilíndrica) con densidad de masa uniforme; algunos son macizos y otros son cascarones. Todos tienen igual masa e igual radio; están hechos de diferente material. Se les permite empezar a bajar simultáneamente. Si el movimiento es de rodamiento sin deslizamiento, usar la conservación de la energía mecánica para calcular el orden en que llegan a la parte inferior del plano.

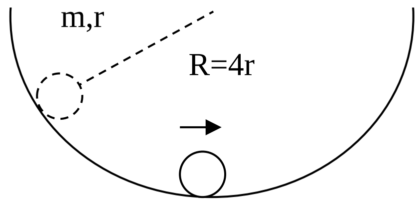
12. Dos cilindros hechos del mismo material ruedan sin resbalar por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Cada uno recorre la misma distancia. El radio del cilindro B es dos veces el radio del cilindro A. ¿En qué orden llegan al fondo del plano?

13. Dos masas m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$) están conectadas por medio de una cuerda que pasa sobre una polea de masa m_3 y de fricción despreciable en el eje. La polea es un cilindro uniforme de radio R, con su eje en posición horizontal. La cuerda no resbala sobre la polea y el sistema se libera a partir del reposo. Determinar las velocidades y las aceleraciones de las masas cuando se han desplazado separándose una distancia vertical H.

14. Un balín de masa m y radio r se deja rodar a partir del reposo sobre la superficie rugosa interior de un cilindro de radio $R = 4r$; el centro del balín está colocado a una altura R/2 desde la parte más baja de la superficie cilíndrica, como se muestra en la figura 12.15. a) ¿Cuál es la velocidad de traslación del balín cuando pasa por el punto más bajo? b) ¿Con qué velocidad

angular rota el balín alrededor de su eje cuando pasa por el punto más bajo? c) ¿Cuánto vale la fuerza normal (de contacto) entre el balín y la superficie en el punto más bajo?

Figura 12.15. Problema 14.



15. Un disco de masa M= 2 Kg y radio R=0.1 m se encuentra inicialmente en reposo. Un motor eléctrico conectado rígidamente al eje de simetría del disco se enciende y se observa que el disco adquiere una velocidad angular de 300 rad/seg al cabo de 5 segundos de encenderse el motor. a) ¿Qué aceleración angular le imparte el motor? b) ¿Cuánto vale la torca que ejerce el motor sobre el disco? c) ¿ Qué potencia desempeña el motor cuando el disco gira a 300 rad/seg.?
(El momento de inercia del disco alrededor del eje de rotación es $I = MR^2/2$)

16. Dos bloques, cada uno de masa M, están unidos por un cordón que pasa sobre una polea de radio R, sin fricción en el eje y de momento de inercia I, ver figura 12.16. El cordón no resbala sobre la polea y no hay fricción entre el bloque y la superficie de la mesa. Cuando este sistema se libera, se halla que la polea gira y que la aceleración de los bloques es constante. a) ¿Cuál es la aceleración angular de la polea? b) ¿Cuál es la aceleración de los bloques? c) ¿Cuáles son las tensiones en las secciones del cordón a cada lado de la polea?

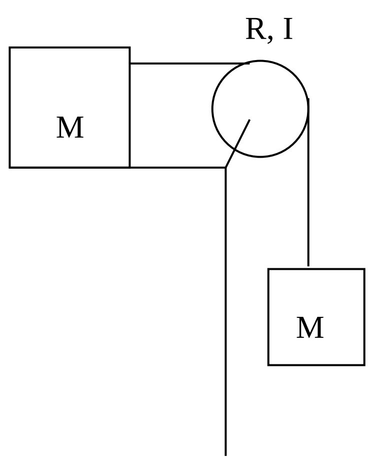
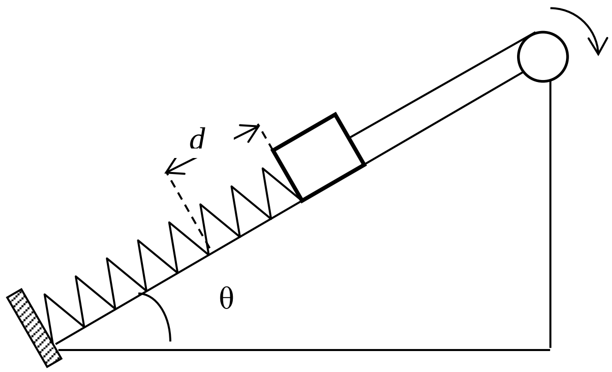


Figura 12.16. Problema 16.

17. La polea que se muestra en la figura 12.17 tiene radio R y momento de inercia I conocidos. Un lado de un bloque de masa m está conectado a un resorte de constante elástica k y el lado opuesto está unido a una cuerda enrollada alrededor de la polea. El eje de la polea no tiene fricción y no hay fricción entre el bloque y la superficie inclinada. La polea se enrolla en dirección de las manecillas del reloj de modo que alarga al resorte una distancia *d* a partir de su posición de equilibrio y después el sistema se suelta desde el reposo. Encontrar la velocidad angular de la polea cuando el resorte esté momentáneamente sin deformar (*d*=0) y

la rapidez del bloque cuando el resorte esté momentáneamente sin deformar (d=0). La cuerda no resbala en la polea.

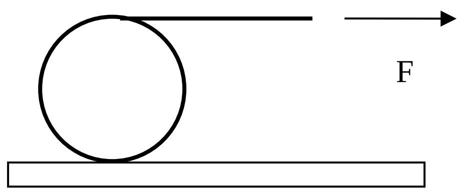
Figura 12.17. Problema 17.



18. Una pieza de maquinaria tiene la forma de una esfera sólida uniforme, con masa M=0.225 kg y radio R = 0.05 m, y gira alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro. En un punto de su ecuador roza contra un metal, lo cual produce una fuerza de fricción de 0.020 N en ese punto. La inercia rotacional (o momento de inercia) de una esfera sólida para un eje que pasa por su centro es I=0.4 MR^2. a) ¿Cuál será su aceleración angular? b) ¿Cuánto tiempo requerirá para parar si su rapidez rotacional inicial era de 22.5 rad/s?

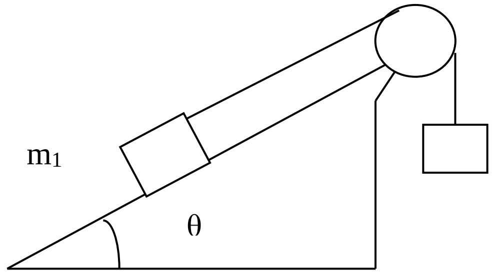
19. El alambre de un carrete de masa M y radio R se desenrolla con una fuerza constante F. Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no desliza, muestre que, a) la aceleración del centro de masa es 4F/3M, y b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* y su magnitud es igual a F/3. c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizar, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa después que ha rodado una distancia D? (El momento de inercia de un cilindro sólido, de masa m y radio r, alrededor de su eje de simetría es $\frac{1}{2}mr^2$).

Figura 12.18. Problema 19.



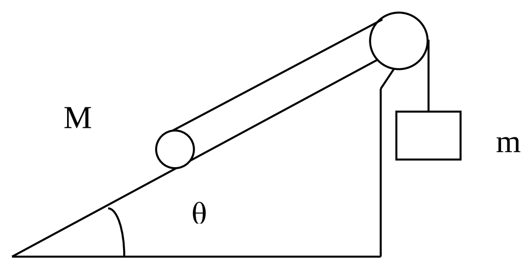
20. Un bloque de 3 kg se coloca sobre un plano inclinado de 30º respecto a la horizontal y mediante una cuerda ideal, paralela al plano y que pasa por una polea de 1 kg y radio 0.10 m, va unido a un bloque colgante de 6 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es de 0.2. Encontrar la aceleración del bloque colgante y la tensión en la cuerda a cada lado de la polea. La polea es un disco uniforme con fricción despreciable.

Figura 12.19. Problema 20.



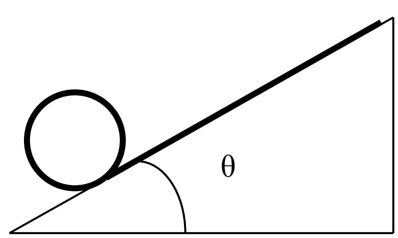
21. Un cilindro sólido de masa M y radio R tiene una cinta delgada enrollada a su alrededor. La cinta pasa sobre una polea ligera (sin masa) hasta un objeto de masa m<M, que cuelga verticalmente. El plano sobre el que se mueve el cilindro está inclinado un ángulo θ sobre la horizontal. La cinta se mantiene paralela al plano y separada de él una distancia 2R. Suponiendo que no hay deslizamiento, determinar a) la aceleración lineal del cilindro al rodar sobre el plano inclinado y b) la tensión en la cinta.
(El momento de inercia de un cilindro respecto a su eje de simetría es $\frac{1}{2}MR^2$)

Figura 12.20. Problema 21.



22. Una cinta flexible de longitud L está enrollada firmemente formando un cilindro. Luego se deja que se desenrolle mientras rueda por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, estando fijo el extremo superior de la cinta (ver figura). Demostrar que la cinta se desenrolla completamente en un tiempo $T = \sqrt{\dfrac{3L}{g sen\theta}}$.

Figura 12.21. Problema 22.



23. Una partícula de masa 5 kg se mueve en trayectoria circular de radio 0.8 m con una velocidad angular inicial de 2 rad/s, alcanzando una velocidad angular de 4 rad/s después de 2 revoluciones completas, debido a la aplicación de una torca. Calcular la aceleración angular y la magnitud de la torca aplicada.

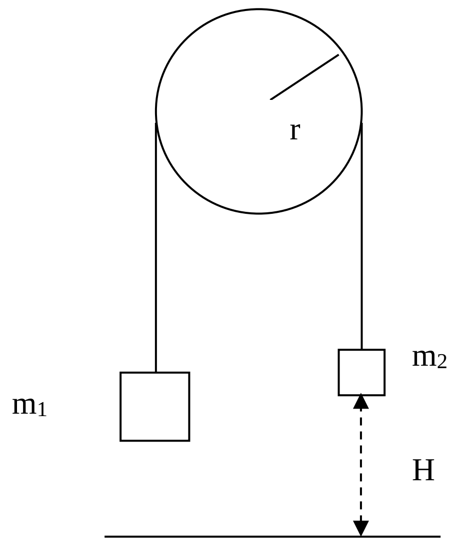
24. Una varilla muy delgada y uniforme puede dar vueltas libremente alrededor de uno de sus extremos sobre una superficie horizontal; la masa de la varilla es de 2.00 kg y su longitud es de 0.500 m. Si sobre el centro de masa de la varilla actúa una fuerza horizontal de 10.00 N que es siempre perpendicular a la varilla, y ésta se encuentra originalmente en reposo, encuentre cuanto tiempo tardará la varilla en alcanzar una rapidez angular de 100.00 rad/s. (Para una varilla delgada y uniforme de masa *M* y longitud *L*, el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos es $I = ML^2/3$).

25. El motor de un automóvil desarrolla una potencia de 100 kW cuando gira a 1820 rev/min. ¿Cuál es la torca desarrollada?

26. Un automóvil que viaja a 80.0 km/h tiene llantas de 77.0 cm de diámetro. a) ¿Cuál es la velocidad angular de las llantas con respecto a su eje? b) Si el automóvil se detiene uniformemente en 28.0 vueltas de las llantas (sin patinar), ¿cuál es la aceleración angular de las llantas? c) ¿Cuánto avanza el automóvil durante este periodo de frenado?

27.- Las masas de una máquina de Atwood son m_1, cuyo valor no se conoce, y m_2 = 8.0 kg. Inicialmente ambas masas se encuentran en reposo y m_2 está a una altura H = 0.2 m del suelo, como se muestra en la figura 12.22. La polea (en forma de disco) está montada en un eje horizontal con fricción despreciable, tiene masa de 1.0 kg y radio *r*. Se suelta el sistema y se observa que m_2 cae al suelo con aceleración constante en 3 s. Cuando los objetos están en movimiento, determinar: a) la aceleración del sistema, y b) la tensión de la cuerda sobre cada bloque. c) ¿Cuál es el valor de m_1?

Figura 12.22. Problema 27.



28. Una masa m de 6.0 kg se conecta, como se muestra en la figura 12.23, por una cuerda ideal a una masa M de 4.0 kg, que se puede deslizar sobre una superficie horizontal lisa. El cable pasa por una polea que gira alrededor de un eje sin fricción, tiene un radio R = 0.10 m y un momento de inercia I = 0.090 kg·m^2. El cable no se desliza sobre la polea. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de m? y ¿cuál es la tensión en la cuerda en ambos lados de la polea?

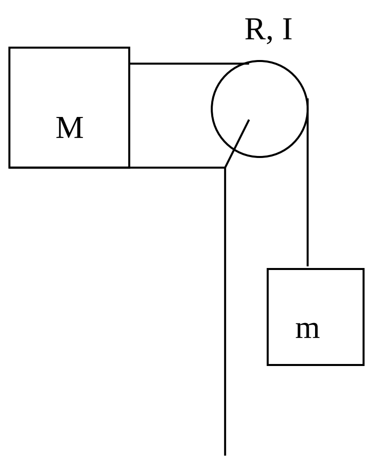


Figura 12.23. Problema 28.

29. Un cilindro de masa M y radio R descansa sobre una superficie rugosa horizontal. El eje del cilindro está acoplado a una horquilla que se ata a una cuerda en cuyo extremo opuesto se conecta a un bloque de masa M/2. La cuerda se hace pasar por un pasador sin fricción de manera que el sistema queda como se muestra en la figura 12.24, visto lateralmente. El sistema se deja mover. Determinar a) la aceleración del bloque y (b) la tensión en la cuerda sabiendo que el pasador no tiene fricción.

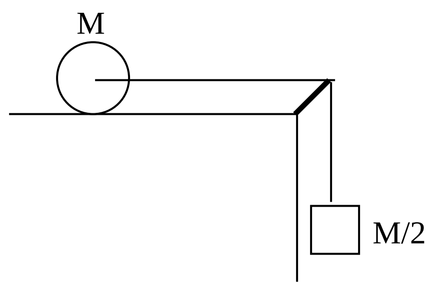


Figura 12.24. Problema 29.

30. Un disco circular de radio R= 0.1 m y masa M= 2 kg gira inicialmente con velocidad angular de 300 rpm. Una balata presiona al disco para frenarlo (ver figura 12.25) y se observa que el disco se detiene totalmente en un tiempo de 10 segundos debido a la fuerza de fricción entre la balata y el borde del disco. a) ¿Con qué aceleración angular se frena el disco? b) ¿Cuántas vueltas da el disco antes de detenerse? c) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción que frenó al disco?.

(El momento de inercia del disco alrededor del eje de rotación es $I = MR^2 / 2$).

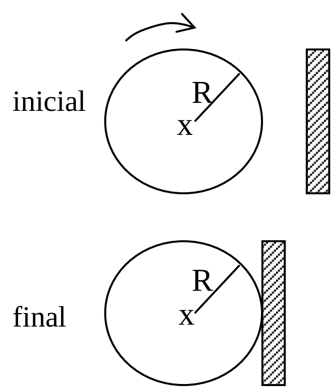


Figura 12.25. Problema 30.

13 ÍMPETU ANGULAR

En el caso de cuerpos con movimiento de traslación pura se estudiaron las condiciones en que se obtiene la ley de conservación del ímpetu lineal. Análogamente, en el caso de rotación pura se obtiene la ley de coservación del ímpetu angular. Aplicando estas dos leyes de conservación se estudia el equilibrio mecánico.

Introducción

Primero se calculará el ímpetu angular de una partícula, luego el de un sistema de muchas partículas, para después analizar el de cuerpos sólidos. Se hará la presentación de la ley de conservación del ímpetu angular. Finalmente, usando las leyes de conservación del ímpetu lineal y del ímpetu angular, se discutirá el tema de equilibrio mecánico.

13.1 Ímpetu angular

Una partícula. Consideremos una partícula de masa *m* con ímpetu lineal $\vec{p}$ y que en un instante se encuentra en una posición $\vec{r}$ respecto al origen de un marco de referencia inercial. Por sencillez, supongamos que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ están en el plano XY. Definimos el *ímpetu angular*, también llamado momento angular, momento cinético o momento del ímpetu, como el vector $\vec{l}$ que resulta del producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ (donde se encuentra la partícula) con el vector del ímpetu lineal $\vec{p}$:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}\,. \qquad (1)$$

De acuerdo con las propiedades del producto vectorial, el ímpetu angular es un vector en la dirección perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$, y su sentido está determinado por la regla de la mano derecha o por el sentido en que avanza un tornillo de rosca derecha. Como se ha supuesto que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ están en el plano XY, entonces el vector $\vec{l}$ es paralelo al eje Z, como lo ilustra la figura 13.1. La magnitud del ímpetu angular es

$$l = rp\,\mathrm{sen}\beta. \qquad (2)$$

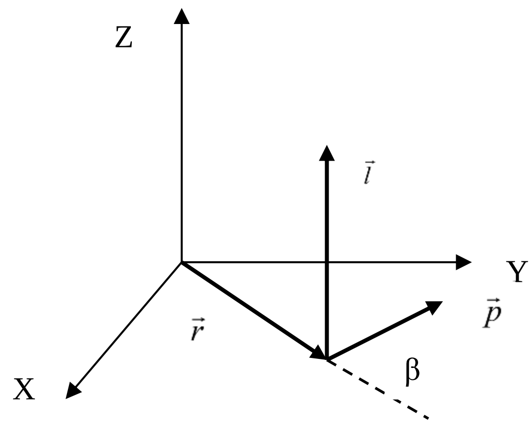


Figura 13.1. Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ están en el plano XY, entonces el vector $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ es paralelo al eje Z.

El vector $\vec{l}$ (al igual que el vector torca) depende del punto de referencia que se escoja para calcularlo, es decir, depende del origen del sistema de coordenadas. La magnitud del ímpetu angular es nula (l=0) cuando el ángulo β=0 o β=π; o sea, cuando los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son colineales (paralelos o antiparalelos, respectivamente). En cambio, la magnitud del ímpetu angular es máxima (l=rp) cuando β = π/2, en cuyo caso los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares. Las dimensiones del ímpetu angular son $[l]=[r][p]=ML^2T^{-1}$; y su unidad en el sistema SI no recibe nombre especial, simplemente es $kg\cdot m^2/s$. Para evitar alguna ambigüedad, a partir de ahora cuando se hable de ímpetu se tiene que especificar si se trata del lineal o del angular.

Reacomodemos la figura 13.1 para ser vista desde el eje Z; es decir, veamos directamente el plano XY como se ilustra en la figura 13.2. Las cantidades que aparecen en la magnitud del ímpetu angular pueden asociarse

como $l=r(p\,\mathrm{sen}\beta)$ o como $l=p(r\,\mathrm{sen}\beta)$

El factor en el primer paréntesis, $p\,\mathrm{sen}\beta$, representa la magnitud de la componente de $\vec{p}$ en la dirección perpendicular a la línea de $\vec{r}$; en cambio, el factor $r\,\mathrm{sen}\beta$ representa a la componente de $\vec{r}$ en la dirección perpendicular a la línea de $\vec{p}$. Estas interpretaciones geométricas se muestran en la figura 13.2.

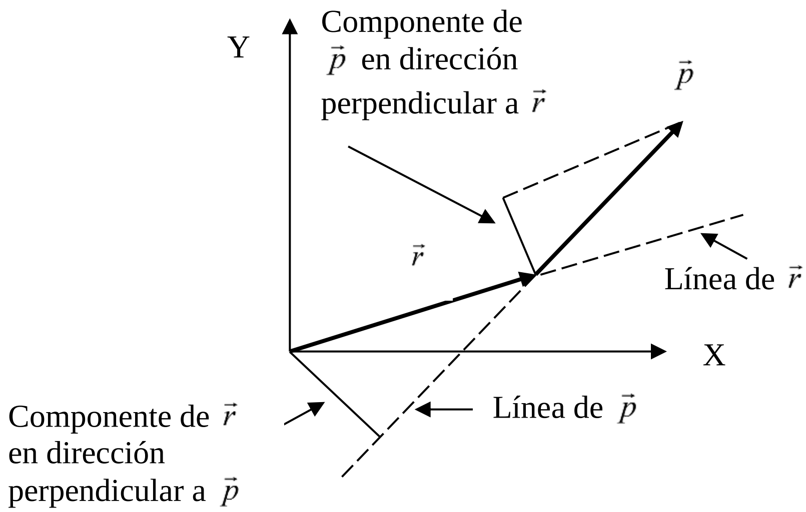


Figura 13.2. Interpretación geométrica de los factores $p$senβ y $r$senβ.

En general, tanto la posición $\vec{r}$ de la partícula como su ímpetu lineal $\vec{p}$ son funciones del tiempo. Por tanto, al tomar la derivada respecto al tiempo de la relación (1) se obtiene

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\vec{F}\ .$$

El primer término de la última igualdad es nulo pues representa el producto vectorial de un vector con él mismo ($m(\vec{v}\times\vec{v})$), y en el segundo término se identificó a la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Por tanto,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}\ .$$

El lado derecho de esta última ecuación es la torca neta, por lo que

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}\ . \qquad (3)$$

La ecuación (3) establece que la rapidez con que cambia el ímpetu angular de una partícula es igual a la torca resultante que actúa sobre ella y que el cambio está en la dirección del vector torca. En otras palabras, la ecuación (3) dice que la torca neta sobre una partícula hace que cambie el ímpetu angular de la partícula; inversamente, el ímpetu angular sólo puede ser cambiado por una torca. En el capítulo anterior se obtuvo que la torca proporciona la ecuación de movimiento para rotaciones (segunda ley de Newton) a través de su relación con la aceleración angular ($\tau = I\alpha$). Ahora la ecuación (3) establece la relación de la torca con el cambio temporal del ímpetu angular.

Si la torca neta es cero, entonces la ecuación (3) implica que el ímpetu angular $\vec{l}$ es una cantidad constante. Debido a que representa una relación vectorial, en términos de las componentes en los ejes X, Y y Z esto quiere decir que si

$$\tau_x=0 \Rightarrow l_x= \text{constante } 1,$$

$$\tau_y=0 \Rightarrow l_y= \text{constante } 2,$$

$$\tau_z=0 \Rightarrow l_z= \text{constante } 3.$$

Puede suceder que, en una situación particular, solamente una o dos componentes de la torca sean nulas en cuyo caso sólo los ímpetus angulares asociados a esas componentes serán constantes.

N partículas. Ahora consideremos un sistema de N partículas. El momento angular de cada partícula es medido respecto a un mismo punto de referencia (que puede ser el origen del sistema de coordenadas). El ímpetu angular total $\vec{L}$ de las N partículas es igual a la suma de los ímpetus angulares individuales

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_N = \sum \vec{l}_i \,. \qquad (4)$$

Al derivar esta expresión con respecto al tiempo, y usando la ecuación (3) para la torca que actúa sobre la i-ésima partícula, se obtiene

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{l}_N}{dt} = \sum \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum \vec{\tau}_i = \vec{\tau}$$

Es decir, la rapidez de cambio con respecto al tiempo del ímpetu angular total, de un sistema de partículas, es igual a la torca neta que actúa sobre el sistema.

La torca total es la contribución de las torcas externas más la contribución de las torcas internas: $\vec{\tau} = \vec{\tau}_{ext} + \vec{\tau}_{\text{int}}$, donde el primer término representa la suma de las torcas externas y el segundo representa la suma de las torcas internas. Si la tercera ley de Newton se cumple, entonces la torca interna total es cero porque la torca resultante de cada par de fuerzas acción-reacción internas es nula (pues $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, resultado que fue obtenido en el capítulo 9). Por tanto,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}\ . \qquad (5)$$

La torca neta externa, ahora representada simplemente como $\vec{\tau}$, que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la rapidez de cambio en el tiempo del ímpetu angular total del sistema. Lo que antes se dijo en relación de la ecuación (3) para una partícula, ahora puede decirse respecto a la ecuación (5) para N partículas. Si la torca neta es cero, entonces la ecuación (5) implica que el ímpetu angular $\vec{L}$ es una cantidad constante. Esta es la *ley de conservación del ímpetu angular*. Nótese la similitud entre esta ley y la ley de conservación del ímpetu lineal, expresada como $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$.

En el capítulo anterior vimos que la magnitud de la torca puede expresarse como $\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt}$, resultado que al combinarlo con la ecuación (5) se ve que el ímpetu angular y la velocidad angular están relacionados a través de

$$L = I\omega\,;$$

esta relación se verá más adelante en forma vectorial.

Hasta este momento ya conocemos tres leyes de conservación:

a) La energía mecánica se conserva cuando sobre el sistema actúan fuerzas conservativas;
b) el ímpetu lineal se conserva cuando la fuerza neta que actúa sobre el sistema es nula;
c) el ímpetu angular se conserva cuando la torca neta que actúa sobre el sistema es nula.

13.2 Ímpetu angular y sistema centro de masa

En el capítulo anterior fue demostrado que la energía cinética de un sistema de partículas es igual a la suma de la energía cinética del centro de masa más la energía cinética respecto al centro de masa. En forma análoga ahora se demostrará que el ímpetu angular satisface una relación del mismo tipo. Es decir, en general podemos separar el movimiento de un sistema de partículas en dos partes: el movimiento del cm y el movimiento en torno al cm.

Usaremos dos sistemas de coordenadas para calcular el ímpetu angular. El sistema S tiene su origen en un punto O arbitrario. El sistema de coordenadas S´ es paralelo al sistema

S, su origen está colocado en el centro de masa C del sistema de N partículas (ver figura 13.3).

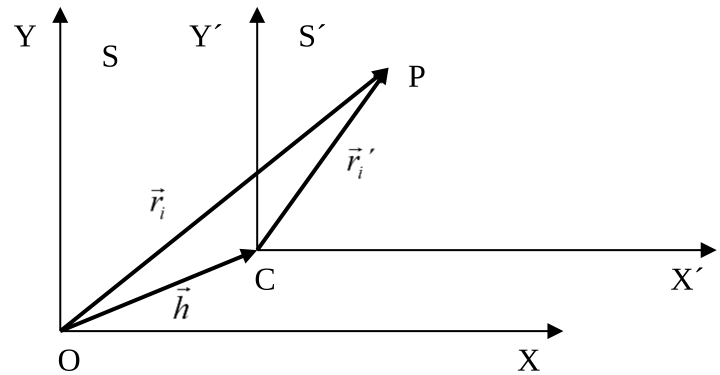


Figura 13.3. El origen C del sistema S´ coincide con el centro de masa del sistema.

La magnitud del vector $\vec{h}$ es la distancia que separa a los ejes paralelos Z y Z´. El punto P representa una partícula de masa m_i con posición $\vec{r}_i$ respecto al sistema S y posición $\vec{r}_i\,´$ respecto al sistema S´. Las coordenadas de estos tres vectores son:

$$\vec{h} = (x_{cm}, y_{cm}), \quad \vec{r}_i = (x_i, y_i) \quad \text{y} \quad \vec{r}_i\,´ = (x_i´, y_i´)$$

Los tres vectores están relacionados por $\vec{r}_i = \vec{h} + \vec{r}_i\,´$, tal como lo ilustra la figura 13.3; la relación entre las correspondientes velocidades es $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i\,´$. El momento angular de las partículas respecto a S es

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \left(\vec{h} + \vec{r}_i\,´\right) \times \left(m_i \vec{v}_{cm} + m_i \vec{v}_i\,´\right),$$

$$\vec{L} = \sum \left(m_i \vec{h} \times \vec{v}_{cm} + m_i \vec{r}_i\,´ \times \vec{v}_i\,´ + m_i \vec{h} \times \vec{v}_i\,´ + m_i \vec{r}_i\,´ \times \vec{v}_{cm}\right).$$

Separando las cuatro sumas y sacando de las dos últimas sumas el factor constante, se obtiene

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{h} \times \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i\,´ \times \vec{p}_i\,´ + \vec{h} \times \left(\sum m_i \vec{v}_i\,´\right) + \left(\sum m_i \vec{r}_i\,´\right) \times \vec{v}_{cm}\,.$$

Los dos últimos términos pueden escribirse como

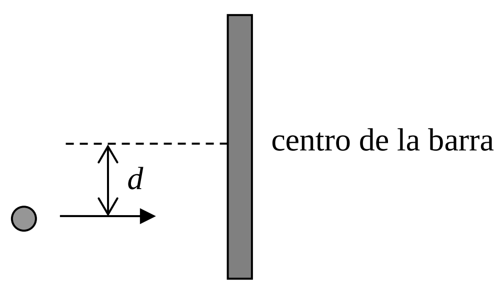
$$\vec{h} \times \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{r}_i\,´\right) + \left(\sum m_i \vec{r}_i\,´\right) \times \vec{v}_{cm} = \mathbf{0};$$

la suma entre paréntesis en cada término es proporcional a la posición del centro de masa medida respecto al sistema S´ cuyo origen es el centro de masa; es decir, cada uno de los dos términos es cero. El ímpetu angular resulta

$$\vec{L} = M\vec{h}\times\vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_i{}'\times p_i{}' = \vec{h}\times\vec{P} + \sum \vec{l}_i{}' . \qquad (6)$$

Donde se usó el resultado que $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$, obtenido en el capítulo 9. Esta relación (6) establece que el momento angular de las N partículas (o de cualquier cuerpo rígido) es igual al momento angular del centro de masa más la suma de los momentos angulares de las partículas del sistema calculados respecto al sistema de coordenadas cuyo origen está en el centro de masa.

Ejemplo 1. Una barra de longitud *L* y masa *M* se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción y sobre la cual puede moverse libremente. Una partícula de masa *m* se mueve con velocidad *v* en dirección perpendicular a la longitud de la barra y a una distancia *d* de la línea paralela que pasa por el centro de masa, choca elásticamente con la barra (ver figura). (a) ¿Qué cantidades se conservan en la colisión? (b) ¿Cuál debe ser la masa de la partícula para que permanezca en reposo inmediatamente después de chocar? [$I_{cm} = \frac{ML^2}{12}$].



Solución. La barra tendrá movimiento de traslación de su centro de masa y movimiento de rotación respecto a un eje que pase por su centro de masa, perpendicular a la longitud.

(a) Las cantidades que no cambian son el ímpetu lineal en el plano horizontal (no hay fuerzas externas horizontales), la energía cinética (por ser colisión elástica) y el ímpetu angular (no hay torcas externas, pues el peso y la fuerza normal pasan por el cm y, respecto este punto, no producen torcas).

(b) El movimiento del sistema es el del centro de masa más el movimiento respecto al centro de masa. Igualando las cantidades antes y después de la colisión, se tiene que para el ímpetu lineal

$$mv = MV. \qquad \text{(a)}$$

Para la energía cinética

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \qquad \text{(b)}$$

Para el ímpetu angular respecto al centro de masa

$$dmv = I\omega. \qquad \text{(c)}$$

Se usan (a) y (c) para sustituir *V* y ω en (b) (y el valor de *I*):

$$mv^2 = M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 + I\left(\frac{dmv}{I}\right)^2 = \frac{m^2v^2}{M} + \frac{d^2m^2v^2}{\frac{ML^2}{12}} = mv^2\frac{m}{M}\left(1+\frac{12d^2}{L^2}\right).$$

De donde se obtiene que

$$m = \frac{M}{1+\frac{12d^2}{L^2}} = \frac{ML^2}{L^2+12d^2}.$$

Con este resultado se pueden analizar algunos casos particulares:

i) Si *L* tiende a infinito, entonces *m* tiende a *M*.

ii) Si *d*=0, entonces *m*=*M*.

iii) Si $d = \frac{L}{2}$, entonces $m = \frac{M}{4}$.

Estos dos últimos casos representan los valores extremos de *m*.

←——— ←——— ←———

13.3 Ímpetu angular y velocidad angular

Para el movimiento de rotación respecto a un eje fijo hemos obtenido que la torca neta, expresada en forma escalar, en función de la aceleración angular y de la velocidad angular es $\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt}$ y que en función del ímpetu angular es $\tau = \frac{dL}{dt}$. En ausencia de torca externa se obtiene que el ímpetu angular resulta ser una constante:

$$L = I\omega.$$

Es importante conocer la relación vectorial que existe entre el ímpetu angular $\vec{L}$ y la velocidad angular $\vec{\omega}$ para un cuerpo que rota alrededor de un eje fijo, o de un eje que se traslada sin cambiar de dirección.

Una partícula. Primero consideremos una partícula de masa *m* que describe un movimiento circular en el plano X´Y´; la partícula gira respecto al eje Z´ con velocidad angular $\vec{\omega}$, su posición es $\vec{r}\,'$ y su ímpetu lineal es $\vec{p}$, como se ilustra en la figura 13.4.

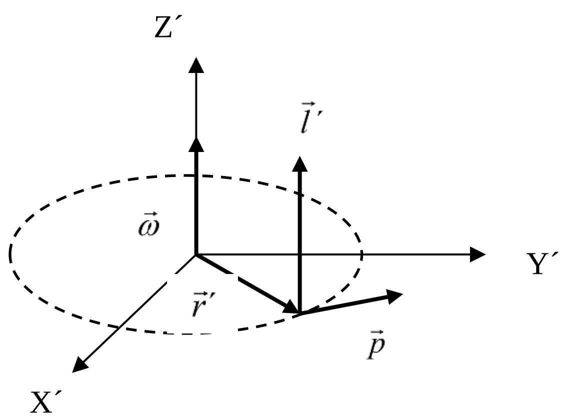


Figura 13.4. El vector $\vec{\omega}$ coincide con el eje Z´; la trayectoria circular se encuentra en el plano X´Y´.

El ímpetu angular de la partícula ($\vec{l}\,' = \vec{r}\,' \times \vec{p}$) es paralelo al eje de giro, los vectores $\vec{r}\,'$ y $\vec{p}$ son perpendiculares entre sí, pues $\vec{p}$ es tangente a la trayectoria circular, por lo que la magnitud del ímpetu angular es

$$l' = r' mv \operatorname{sen} 90^{o} = r' mv;$$

pero $v = \omega r'$. Por tanto,

$$l' = mr'(\omega r') = mr'^{2}\omega;$$

la cantidad mr'^{2} es el momento de inercia de la partícula respecto al eje de giro, $I_{Z'}$. Por tanto,

$$l' = I_{Z'}\omega,$$

que en forma vectorial se escribe como

$$\vec{l}\,' = I_{Z'}\vec{\omega}. \qquad (7)$$

En este caso se obtiene que los vectores $\vec{l}\,'$ y $\vec{\omega}$ son paralelos.

El sistema de coordenadas mostrado en la figura 13.4 tiene el origen coincidiendo con el centro de la trayectoria circular. Ahora se calculará el ímpetu angular respecto a un sistema de coordenadas que tenga el origen desplazado a lo largo del eje de giro. Usaremos el sistema XYZ con Z=Z´ y el plano XY paralelo al plano X´Y´ y paralelos los ejes X y X´, como en las

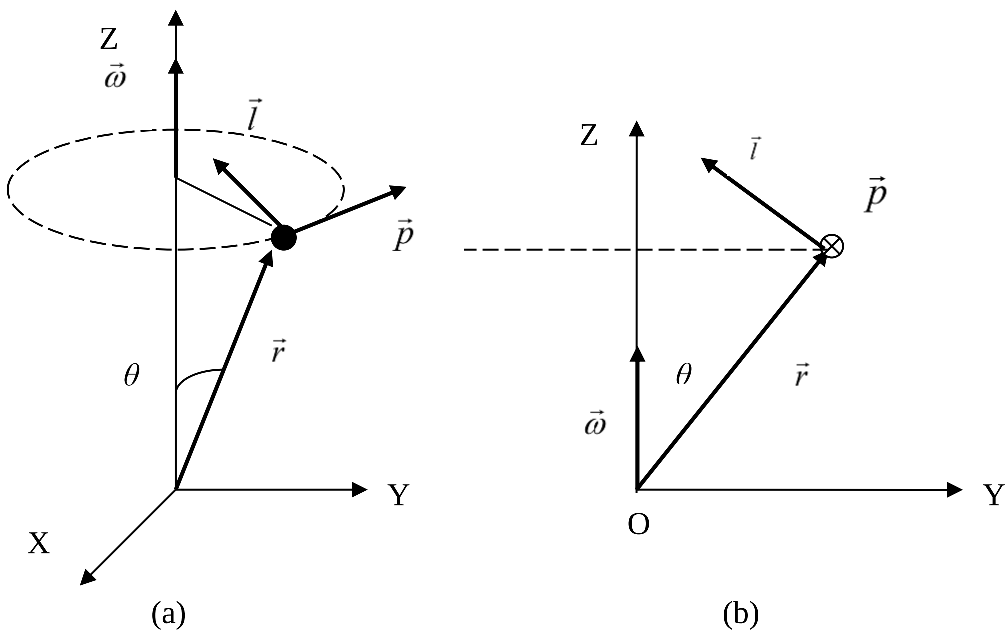


Figura 13.5. (a) La partícula gira con velocidad tangencial $\vec{v}$ en un círculo de radio $r´$ alrededor del eje Z. Se muestra el ímpetu angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ con respecto al origen O. La figura (b) muestra la partícula cuando cruza el plano YZ, se resalta que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares entre sí.

figuras 13.5. Con ayuda de los diagramas (a) y (b) de esta figura se ve que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares entre sí y que, por tanto, la magnitud del ímpetu angular es

$$l=rmv\text{sen}90^{\text{o}}=rmv,$$

pero el vector velocidad tangencial (ver ecuación (39) del capítulo 11) es $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

cuya magnitud es $v=\omega r\text{sen}\theta$, con lo cual la magnitud del ímpetu angular es

$$l=rmv=rm(\omega r\text{sen}\theta)=mr^2\omega\text{sen}\theta.$$

Ahora resulta que el ímpetu angular y la velocidad angular, $\vec{l}$ y $\vec{\omega}$, no son paralelos (ver figura 13.5), mientras que sí lo eran (vectores $\vec{l}´$ y $\vec{\omega}$) en el sistema de coordenadas de la figura 13.4. En cambio, la componente de $\vec{l}$ paralela al eje Z (el eje de rotación) es

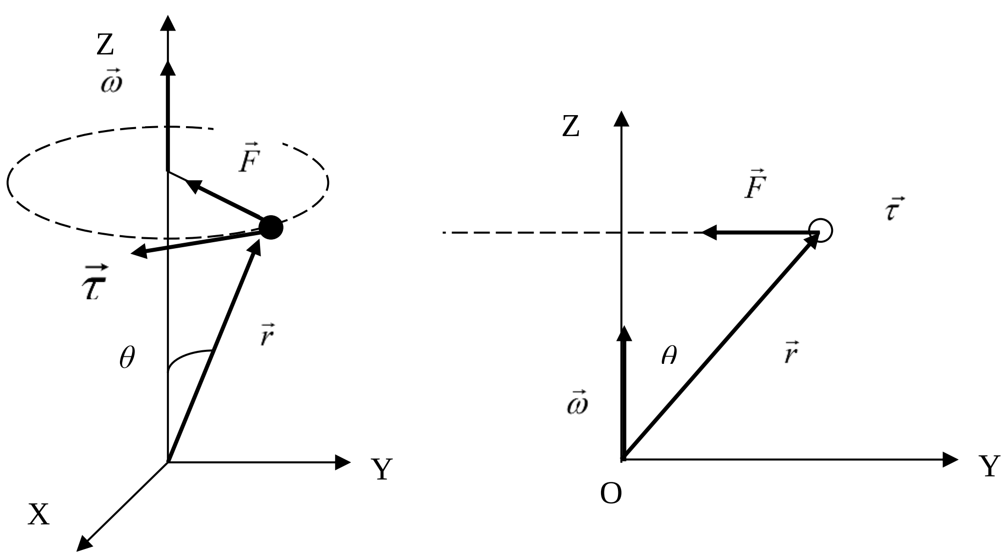
$$l_z=l\text{sen}\theta=m(r^2\text{sen}^2\theta)\omega=ma^2\omega,$$

donde se ha renombrado a la cantidad $r\text{sen}\theta$ como el radio a de la trayectoria circular (antes en la figura 13.4 le llamamos r´); el producto de la masa por el cuadrado de esta cantidad es el momento de inercia de la partícula respecto al eje Z (I_Z). La magnitud de la componente z del ímpetu angular resulta ser $l_z=ma^2\omega=I_z\omega$, en forma vectorial se escribe como

$$\vec{l}_Z = I_Z\vec{\omega}. \qquad (8)$$

Hasta aquí hemos calculado el ímpetu angular de un sistema físico (partícula en trayectoria circular) usando dos sistemas de referencia ilustrados en las figuras 13.4 y 13.5; se obtuvieron los resultados diferentes representados por las ecuaciones (7) y (8). La ecuación (7) fue obtenida respecto al origen de un sistema de coordenadas centrado en el centro de la trayectoria circular; en este caso el vector ímpetu angular coincide con una línea paralela al eje de rotación. En cambio, la ecuación (8) fue obtenida respecto a un sistema de coordenadas paralelo al anterior y centrado en un punto arbitrario sobre el eje de rotación; en esta nueva situación el vector ímpetu angular no está a lo largo de una línea paralela al eje de rotación y, por tanto, no es paralelo al vector velocidad angular. Estas ecuaciones (7) y (8) ponen de manifiesto que el momento angular depende del sistema de referencia elegido para calcularlo.

Para que la partícula se mueva en una trayectoria circular, debe haber una fuerza centrípeta $\vec{F}$ como se muestra en la figura 13.6, resultando una torca $\vec{\tau}$ respecto al origen de coordenadas. Esta torca es tangente al círculo y es antiparalela al vector $\vec{p}$ (ver figura 13.5).



(a) (b)

Figura 13.6. (a) La fuerza centrípeta $\vec{F}$ produce una torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. (b) La torca es perpendicular a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y dirigida hacia el lector.

Un par de partículas. Ahora consideremos dos partículas idénticas girando en una misma trayectoria circular, pero colocadas en los extremos opuestos de un diámetro, como ilustra la figura 13.7. En este caso particular que las masas son iguales, las componentes perpendiculares al eje Z de cada ímpetu angular se cancelan mutuamente mientras que las componentes paralelas al eje Z son iguales. Consecuentemente el ímpetu angular total $\vec{L}$ de las dos partículas es paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$; es decir, $\vec{L}$ está a lo largo del eje Z,

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = I_Z \vec{\omega} .$$

También sucede que las torcas individuales, que actúan sobre cada una de estas dos partículas idénticas, son paralelas entre sí y tienen sentidos opuestos de manera que la torca resultante es nula (véanse las figuras 13.6b y 13.7b). Es decir,

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{0} . \qquad (9)$$

Este resultado (9) obtenido para dos partículas idénticas colocadas simétricamente respecto del eje de rotación significa que el ímpetu angular es constante pues la torca neta es nula.

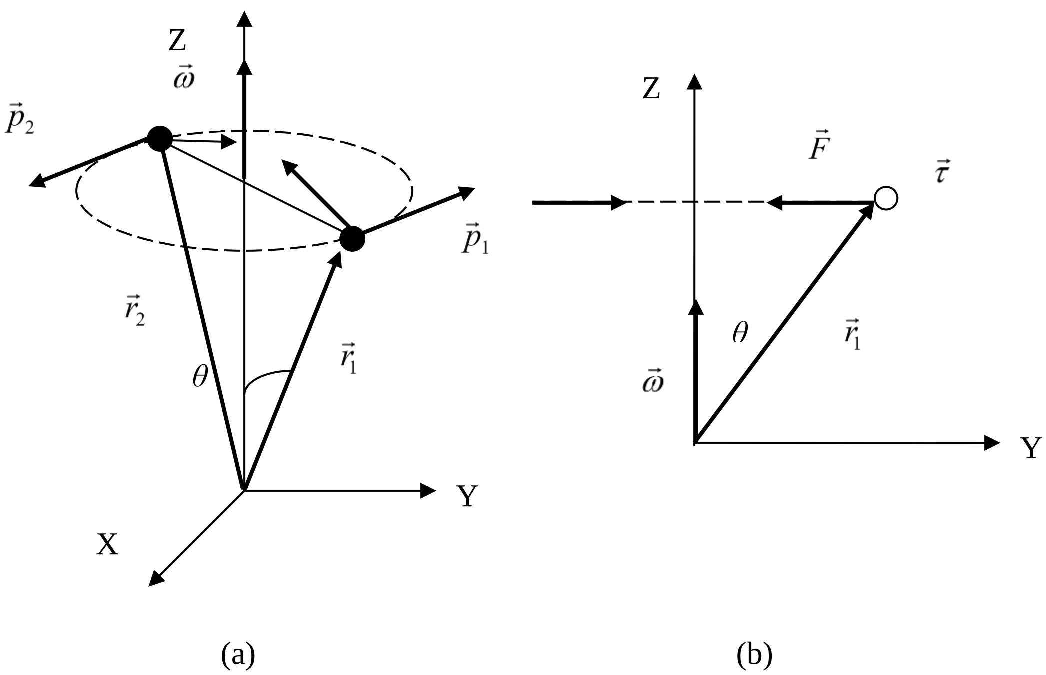


Figura 13.7. (a) A los diagramas mostrados en las figuras 13.5 y 13.6 se ha agregado una segunda partícula de masa igual a la masa de la primera partícula, pero colocada en el otro extremo del mismo diámetro. La figura (b) muestra las partículas cuando cruzan el plano YZ, las torcas producen una torca neta nula.

Muchos pares de partículas. Puede pensarse en colocar otras dos partículas idénticas a las anteriores en los extremos de otro diámetro de la misma trayectoria circular; análogamente, que para el caso de las dos partículas iniciales, se obtiene que el ímpetu angular $\vec{L}$ de las cuatro partículas es un vector paralelo al vector velocidad angular $\vec{\omega}$ y que la torca resultante sobre el sistema de las cuatro partículas es nula, $\vec{\tau} = \vec{0}$. De esta manera se puede pensar en agregar muchos pares de partículas idénticas para formar un aro; después agregar muchos aros coaxiales idénticos para formar un cascarón cilíndrico o agregar muchos aros coaxiales de radios distintos y colocarlos en orden decreciente del radio para formar un cascarón cónico. En forma análoga se puede formar un cilindro macizo o un cono macizo. Estos cuerpos así formados tienen simetría axil y si rotan respecto a un eje que coincida con el eje de simetría, la torca neta que sobre él actúa es nula y entonces el ímpetu angular del cuerpo es constante. En otras palabras, si el sistema de partículas o cuerpo rígido es simétrico en torno al eje de rotación (simetría axil, también llamada axial), entonces

$$\vec{L} = I\vec{\omega}\ ; \qquad (10)$$

donde este momento de inercia es respecto al eje de rotación (que coincide con el eje se simetría).

Es importante señalar que en el proceso de ir agregando pares de partículas idénticas al sistema de la figura 13.7 para formar aros y después agregar aros para formar cuerpos con simetría axil, sobre el cuerpo así formado no actúan fuerzas externas y, por tanto, tampoco torcas externas siempre y cuando el cuerpo esté flotando en el vacío. Pero para mantener un cuerpo rotando, en general, se necesita fijarlo al eje de rotación con soportes, los cuales producirán torcas externas debido a las fuerzas de fricción entre los soportes y el eje de rotación; en este caso el ímpetu angular, estrictamente, no será un vector constante.

Por el contrario, si el cuerpo no tiene simetría axil o si es simétrico pero el eje de simetría no coincide con el eje de rotación, entonces se obtiene que lo que es paralelo al vector velocidad angular es la componente del ímpetu angular en la dirección del eje de rotación (no el vector mismo), como el caso de la partícula de la figura 13.5; es decir,

$$\vec{L}_Z = I_Z\vec{\omega}. \qquad (11)$$

13.4 Conservación del ímpetu angular

Regresemos a la ecuación (5) que es la segunda ley de Newton para rotaciones:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \,. \qquad (5)$$

La torca neta externa $\vec{\tau}$ que actúa sobre un sistema de partículas o sobre un cuerpo rígido es igual a la rapidez de cambio en el tiempo del ímpetu angular total del sistema. Si la torca neta es cero, entonces la ecuación (5) implica que el ímpetu angular $\vec{L}$ es una cantidad constante. Esta es la ley de conservación del ímpetu angular. Es decir,

$$\vec{L} = \text{un vector constante.}$$

Este resultado establece que el ímpetu angular neto en algún tiempo t_1 es igual al ímpetu angular neto en otro tiempo t_2. O sea que

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2. \qquad (12)$$

Al ser vectoriales estas cantidades, son equivalentes a tres ecuaciones correspondientes a la conservación del momento angular en tres direcciones mutuamente perpendiculares. El momento angular del sistema podría conservarse en una, dos o en las tres direcciones, según sea la torca neta que actúa sobre el sistema.

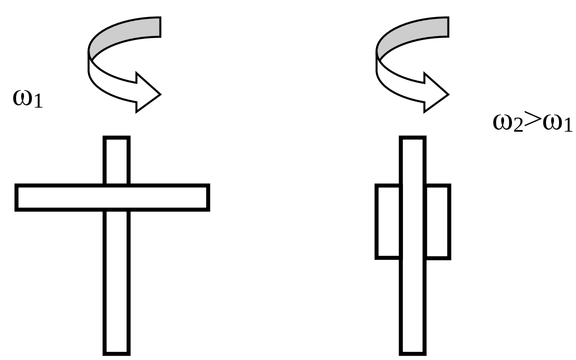
La ley de la conservación del ímpetu angular se ha aplicado en la construcción de instrumentos de navegación, como el giróscopo. También tiene aplicación más allá de la mecánica clásica, como en mecánica relativista y mecánica cuántica. No se han encontrado excepciones a esta ley.

Esta ley puede aplicarse a un cuerpo aislado que rota alrededor de un eje fijo o de un eje que se traslada manteniendo su dirección fija. Considérense casos en que de alguna manera el cuerpo redistribuye su masa con respecto a ese eje de rotación, haciendo que el momento de inercia cambie respecto de ese eje. Por ejemplo, algunos animales cuando saltan, estando en el aire reacomodan su cola y extremidades. La ecuación (12) dice que el momento angular no puede cambiar. Por otra parte, la ecuación (10) ($\vec{L} = I\vec{\omega}$) también debe cumplirse. Al combinar las expresiones (10) y (12) se obtiene que

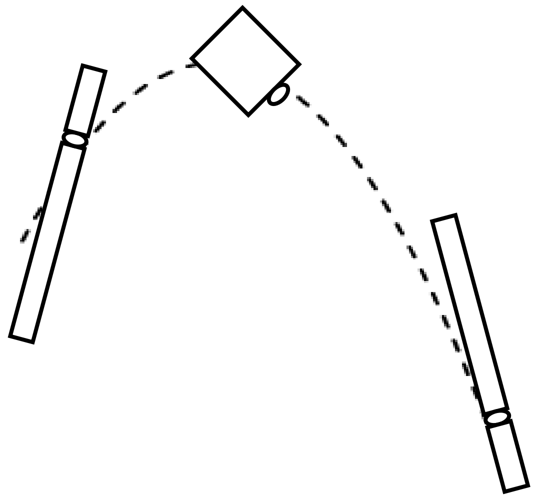
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \,. \qquad (13)$$

Estos subíndices se refieren a los valores que el momento de inercia y la velocidad angular tienen antes y después de la redistribución de la masa del cuerpo respecto a su eje de rotación. Debido a que la expresión (13) representa una constante, entonces si el momento de inercia aumenta o disminuye como consecuencia de la redistribución de la masa, la magnitud de la velocidad angular debe disminuir o aumentar. Esta relación (13) la usaremos para explicar los movimientos de una bailarina de ballet sobre hielo y de una clavadista.

Bailarina. La bailarina de pie inicialmente gira alrededor de un eje vertical con los brazos extendidos formando una cruz, su ímpetu angular se encuentra a lo largo del eje de rotación con magnitud $L_1=I_1\omega_1$. Cuando coloca sus brazos en los costados de su cuerpo su ímpetu angular es $L_2=I_2\omega_2$, su momento de inercia se reduce porque su masa queda más cerca del eje de rotación y, como consecuencia de la tendencia a la conservación del ímpetu, la magnitud de su velocidad angular aumenta. La bailarina puede reducir su velocidad de giro con solo extender los brazos. Desde luego que este movimiento no es eterno pues la bailarina está apoyada sobre la pista y debido a ello existe una torca externa que produce que su ímpetu angular se reduzca gradualmente.

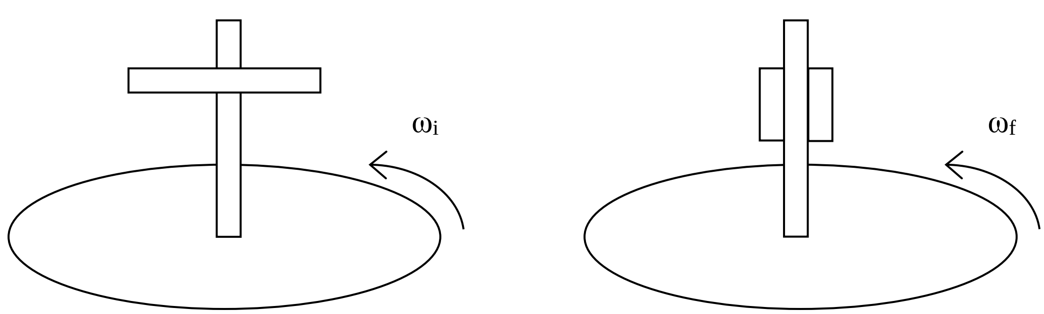


Clavadista. La clavadista salta del trampolín con las piernas juntas y extendidas, los brazos extendidos hacia arriba de su cabeza y el cuerpo en línea recta. Desde el momento en que se separa del trampolín, su centro de masa describe una trayectoria parabólica y sobre ella no hay fuerza externa alguna que produzca torca respecto al centro de masa. Tiene un momento angular inicial paralelo a un eje horizontal que pasa por su centro de masa y que es perpendicular al plano de la trayectoria parabólica. Al colocar sus piernas y brazos en la *posición plegada*, ella puede reducir su momento de inercia y de esta forma aumentar su velocidad angular, lo cual le permite dar vueltas en su recorrido. Al regresar a su posición extendida (*posición extendida final*) puede aumentar su momento de inercia y reducir la velocidad angular, de manera que puede entrar al agua en posición vertical.



Posición extendida inicial, posición plegada y posición extendida final de la clavadista.

Ejemplo 2. Una persona está parada sobre el centro de una plataforma circular que gira sin fricción con una rapidez angular de 1.2 rev/s, con sus brazos extendidos y sostiene un ladrillo en cada mano. El momento de inercia del sistema formado por la persona, los ladrillos y la plataforma alrededor del eje de rotación es 6.0 kg·m^2. Si al juntar los brazos y ladrillos al cuerpo la persona reduce el momento de inercia del sistema a 2.0 kg·m^2, a) ¿cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma y b) ¿cuál es el cociente entre la nueva energía cinética del sistema y la energía cinética original? c)¿De dónde proviene la energía cinética agregada?



Solución.

a). El ímpetu angular no cambia pues no hay torcas externas. Por tanto,

$L_i = L_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$

De donde se obtiene que la nueva velocidad angular es $\omega_f = \dfrac{I_i \omega_i}{I_f}$.

Numéricamente: $\omega_f = 3.6$ rev/s.

b). El cociente de las energías cinéticas de rotación final e inicial es

$$\frac{K_{rf}}{K_{ri}} = \frac{\frac{1}{2} I_f \omega_f^{\,2}}{\frac{1}{2} I_i \omega_i^{\,2}} = \frac{I_f \left(\frac{I_i \omega_i}{I_f} \right)^2}{I_i \omega_i^{\,2}} = \frac{\frac{I_i^{\,2} \omega_i^{\,2}}{I_f}}{I_i \omega_i^{\,2}} = \frac{I_i}{I_f}.$$

Numéricamente el cociente es 3.

c). La energía cinética agregada proviene de la energía interna de la persona, sus músculos realizaron trabajo al mover los ladrillos.

⟵ ⟵ ⟵

13.5 Equilibrio mecánico

Condiciones de equilibrio. Un cuerpo rígido está en *equilibrio mecánico* si, respecto a un sistema de referencia inercial, se cumplen dos condiciones:

1. La suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es cero.
2. La suma de todas las torcas externas que actúan sobre el cuerpo es cero.

Estas dos condiciones significan que se cumplen las leyes de conservación del ímpetu lineal y del ímpetu angular. Al expresar la segunda ley de Newton para movimiento de traslación y para movimiento de rotación, estas dos condiciones establecen que

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{P} = M \vec{a}_{cm},$$

y

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \vec{\alpha} ,$$

deben ser nulas; lo cual implica, respectivamente, que

$$\vec{a}_{cm} = \vec{0}.$$

y que

$$\vec{\alpha} = \vec{0}.$$

A su vez, la nulidad de estas cantidades implica que las condiciones del equilibrio mecánico se escriban como

1. $\vec{v}_{cm}$ =vector constante $\vec{c}_1$

y que

2. $\vec{\omega}$ =vector constante $\vec{c}_2$.

Estas velocidades (lineal y angular) son importantes en la estabilidad del movimiento de cuerpos diversos que se trasladan y que tienen relativamente pequeños movimientos de rotación, como sucede con los vehículos terrestres, las embarcaciones marítimas y las naves aéreas que, además de trasladarse, tienen que cambiar de dirección.

Caso particular. Cuando la velocidad lineal del centro de masa y la velocidad angular son nulas se tiene el *equilibrio estático*, es decir

$$\vec{v}_{cm} = \vec{0}$$

y

$$\vec{\omega} = \vec{0} .$$

Estas cantidades son importantes en el diseño y construcción de estructuras estáticas, como edificios y puentes.

Segunda condición. Sabemos que, en general, la torca depende de la posición del origen del sistema de coordenadas elegido; sin embargo, en el caso de equilibrio mecánico no es así. Demostremos que la segunda condición $\left(\vec{\tau} = \vec{0}\right)$ se satisface sin importar el punto de referencia respecto al cual la torca se mida. Es decir, la torca respecto a cualquier punto P es cero si la torca respecto a un punto particular O es cero. Para ello consideremos que sobre un cuerpo (no mostrado) actúan *n* fuerzas: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, , $\vec{F}_n$ aplicadas en las posiciones $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, , $\vec{r}_n$, respecto al origen O como se ilustra en la figura 13.8. La *i*-ésima fuerza $\vec{F}_i$ se aplica en la posición $\vec{r}_i$ medida desde el punto O. La posición del punto P es $\vec{r}_P$ y respecto a este punto la aplicación de la i-ésima fuerza $\vec{F}_i$ es en la posición $\vec{r}_i - \vec{r}_P$.

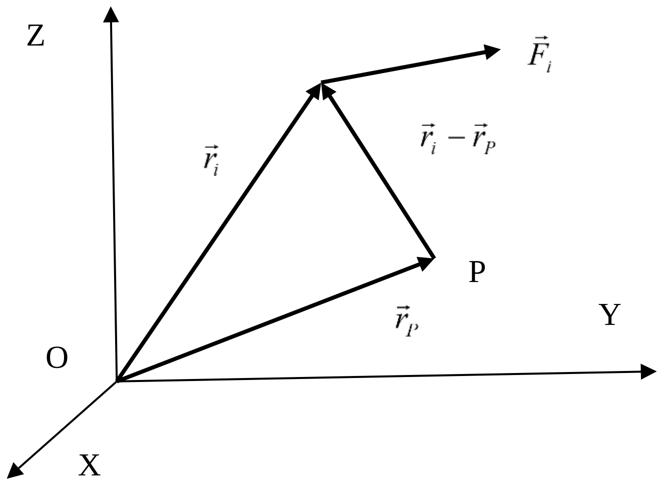


Figura 13.8. La fuerza $\vec{F}_i$ se aplica en la posición $\vec{r}_i$ respecto al origen O y en la posición $\vec{r}_i - \vec{r}_P$ respecto al punto P.

La torca resultante respecto al origen O es

$$\vec{\tau}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n.$$

En cambio, respecto al punto P la torca es

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_P &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_2 + \ldots + (\vec{r}_n - \vec{r}_P) \times \vec{F}_n \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n - \left[\vec{r}_P \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\right)\right]\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{\tau}_P = \vec{\tau}_O - \vec{r}_P \times \vec{F}.$$

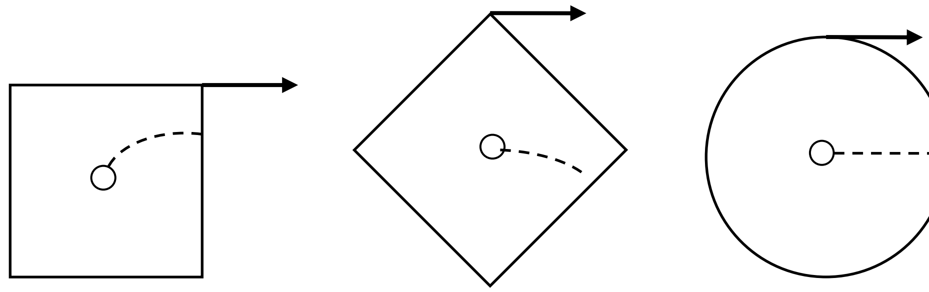
Si la primera condición de equilibrio mecánico se satisface ($\vec{F} = \vec{0}$), entonces se obtiene que

$$\vec{\tau}_P = \vec{\tau}_O . \qquad (14)$$

Es decir, la segunda condición para el equilibrio mecánico es independiente del origen del sistema de coordenadas elegido para calcular las torcas. En general, la ecuación (14) establece que para un cuerpo en equilibrio traslacional $(\vec{F} = \vec{0})$, si $\vec{\tau}_O = \vec{0}$ entonces $\vec{\tau}_P = \vec{0}$, donde P es un punto arbitrario.

Equilibrios estable, inestable y neutro.

Estos tres tipos de equilibrio fueron analizados en el capítulo 8 cuando fue interpretada gráficamente la curva de una función potencial arbitraria en una dimensión. Ahora consideremos el equilibrio rotacional de cuerpos rígidos ante la fuerza de gravedad y una fuerza horizontal, como ilustra la figura 13.9. A cada cuerpo de la figura se aplica una fuerza horizontal para que gire y cuando haya tenido un desplazamiento angular pequeño, la fuerza deja de aplicarse para que el cuerpo se mueva solamente por el efecto de su peso.



(a) (b) (c)

Figura 13.9. Ejemplos de equilibrio (a) estable, (b) inestable y (c) neutro.

En el diagrama (a) se representa un cubo, sobre una superficie horizontal, al cual se le aplica una fuerza horizontal en una arista superior. Esta fuerza únicamente tiene permitido producir rotación respecto a un eje fijo a través de la arista de la esquina inferior derecha; el centro de masa (representado con el círculo) se mueve de tal manera que aumenta su altura respecto a la superficie horizontal, pues describe una trayectoria circular con radio igual a la mitad de la diagonal de una cara del cubo. Al aplicar la fuerza sólo para obtener un desplazamiento angular pequeño del cuerpo y después dejar de aplicarla, el cuerpo regresará a su posición inicial por el efecto de la fuerza gravitacional (el peso). La torca que produce el peso del cuerpo está dirigida hacia el lector; es decir, la torca positiva hace que el cuerpo gire hacia la izquierda. En este caso, en que el cuerpo regresa a su posición inicial, se dice que la posición inicial del cuerpo es de *equilibrio estable*.

El diagrama (b) muestra el cubo soportado en una arista sobre la superficie horizontal. La fuerza horizontal aplicada hará que el centro de masa disminuya su altura respecto a la superficie. Al aplicar la fuerza horizontal hasta obtener un desplazamiento angular pequeño y después dejar de aplicarla, el cuerpo se alejará de su posición inicial por el efecto de la fuerza gravitacional. Ahora la torca que produce el peso del cuerpo está dirigida hacia adentro de la página haciendo que el cuerpo siga girando, alejándose de la posición inicial. En este caso la posición inicial del cuerpo es de *equilibrio inestable*.

El diagrama (c) muestra que la fuerza horizontal se aplica a un cilindro en su parte superior. El centro de masa describirá una trayectoria recta en dirección horizontal. Al desplazar ligeramente el cilindro y dejar de aplicar la fuerza, el cilindro no se acelera en ninguna dirección y el cm se quedará en su posición vertical. En contraste con los dos casos anteriores, en este caso el peso no produce torca sobre el cilindro. Este es un ejemplo de *equilibrio neutro*.

Obsérvese que en estos tres tipos de equilibrio existen dos puntos importantes en una misma línea vertical: la posición del centro de masa del cuerpo y, más abajo, el punto de contacto entre el cuerpo y la superficie horizontal. Esta observsción se aclara con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. *Posición del cm y posición del soporte*. Un cuerpo está compuesto por un alambre rígido en forma de L, en un extremo del alambre y perpendicular a él está fija una barra (superior), otra barra puede ser deslizada por la otra rama de la L, como muestra la figura A. Se coloca el cuerpo sobre el soporte S de tal manera que el punto negro marcado en la barra superior esté en contacto con la punta del soporte. ¿Qué condiciones deben satisfacerse para que el cuerpo no caiga?

Solución. Para que el sistema barras-alambre permanezca en equilibrio estático, al desplazar la barra inferior sobre el alambre a distintas posiciones, la barra superior debe cambiar su inclinación. La figura B muestra las fuerzas que actúan sobre el cuerpo para una posición fija de la barra inferior respecto al alambre; la barra superior forma un ángulo α con la horizontal. El soporte S ejerce una fuerza de contacto cuyas componentes son la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de fricción $\vec{f}$. La fuerza de fricción evita que la barra superior resbale sobre el soporte. Supóngase que el centro de masa del cuerpo compuesto de masa m está en el punto P a una distancia r del punto de soporte y en dirección θ respecto a la vertical. El peso es $m\vec{g}$. El sistema de coordenadas tiene el eje X en la dirección horizontal, el eje Y en la vertical y el origen en el punto de contacto. $\vec{N}$ y Y también forman el ángulo α, al igual que $\vec{f}$ y el eje X. Las fuerzas y sus componentes son:

$$m\vec{g} = (0, -mg), \quad \vec{N} = (-N\text{sen}\alpha, N\cos\alpha), \quad \vec{f} = (f\cos\alpha, f\text{sen}\alpha).$$

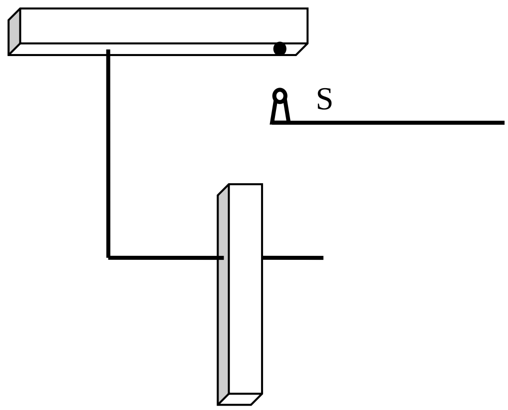


Figura A.

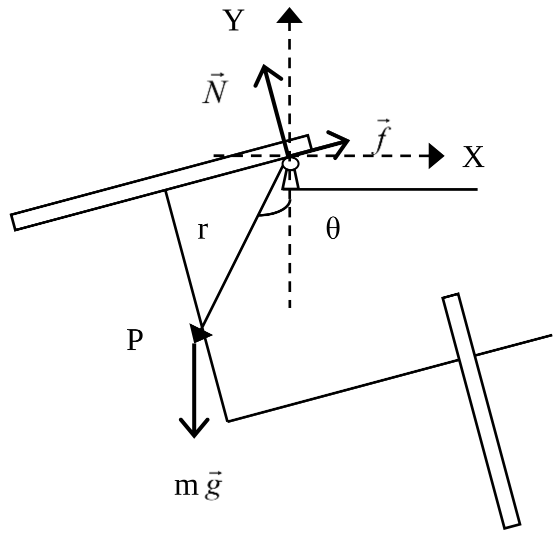


Figura B.

La primera condición de equilibrio mecánico exige que:

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{f}=(-N\text{sen}\alpha+f\cos\alpha,\ -mg+N\cos\alpha+f\text{sen}\alpha)=\vec{0}\ .$$

Que la abscisa sea nula conduce a que $f=N\tan\alpha$. Que la ordenada sea nula y usando el resultado de la nulidad de la abscisa, se obtiene que $N=mg\cos\alpha$; es decir, la fuerza normal es compensada por la componente del peso en la línea de ésta.

Segunda condición de equilibrio. La única torca respecto al punto de contacto es la producida por el peso y debe ser cero:

$$\tau=mgr\text{sen}\theta=0;$$

pero mgr no es cero, pues por la forma del objeto es claro que $r\neq 0$**,** entonces se debe cumplir necesariamente que $\theta=0$. O sea, el centro de masa P y el punto de apoyo S deben estar en la misma línea vertical para que el cuerpo esté en equilibrio estático. El centro de masa P cambia de posición cuando la barra inferior es desplazada en el alambre, pero al mismo tiempo la barra superior cambia su ángulo de inclinación con la horizontal para hacer que, en el equilibrio, los puntos S y P siempre estén en la misma línea vertical. Este ejemplo aparece en la referencia 1.

Esta relación entre el centro de masa y el punto de apoyo explica por qué cuando uno está sentado en una silla con la espalda en posición erguida y quiere levantarse, sin apoyarse con las manos, necesariamente tiene que inclinar el cuerpo hacia delante y mover los pies hacia atrás; al hacer esto, uno mueve el centro de masa hacia adelante para que la línea vertical donde se encuentra pase por la superficie limitada por el contorno entre los pies.

Ejemplo 4. *Escalera de tijera*. Sobre un escalón de una rama de una escalera de tijera (o escalera doble, compuesta de dos escaleras de mano unidas por una bisagra) está una persona parada a una distancia l_1 desde el contacto con el suelo; debido a su peso, la persona ejerce sobre el escalón una fuerza vertical $\vec{F}$. Suponer que la escalera de tijera consiste de dos tablas idénticas de longitud l mantenidas unidas por un alambre horizontal de largo d, situado a la mitad de la altura de la escalera. Si el suelo está libre de fricción y si se desprecian las masas de la escalera y del alambre, determinar las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre la escalera desde el suelo y la tensión del alambre.

Solución. La figura C muestra las tablas, el alambre, las fuerzas externas y sus puntos de aplicación.

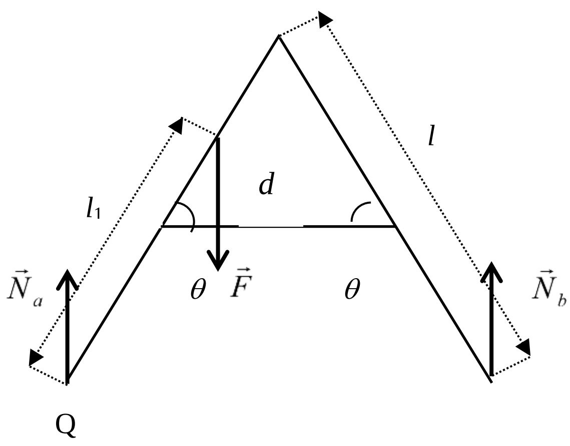


Figura C.

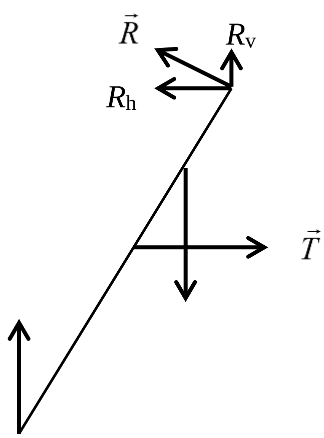


Figura D.

Suponer que cada tabla se representa por una línea recta para que las líneas de contacto de cada tabla con el suelo y con la bisagra puedan representarse cada una por un punto; θ es el ángulo menor formado por el alambre y cada tabla. Para distinguir las tablas, la que aparece a la izquierda se denotará con A y la otra con B. La fuerza $\vec{F}$ se aplica sobre la tabla A.

La tensión en el alambre no aparece en la figura C porque es una fuerza interna del sistema tablas-alambre; para calcularla se debe analizar una tabla por separado. Primero se considerarán las fuerzas externas y después las fuerzas sobre la tabla A. La primera condición de equilibrio estático conduce a

$$N_a+N_b=F \qquad \text{(a)}$$

La segunda condición de equilibrio, calculada respecto al punto Q de la figura C, es

$$2lN_b\cos\theta = l_1 F\cos\theta\,.$$

Por tanto

$$2lN_b=l_1F \qquad \text{(b)}$$

Al despejar N_b de la ecuación (b) y usarla en la ecuación (a), se obtiene

$$N_a = \frac{2l-l_1}{2l}F \qquad \text{(c)}$$

Las fuerzas normales $\vec{N}_a$ y $\vec{N}_b$ no tienen la misma magnitud pues la fuerza $\vec{F}$ sólo actúa sobre la tabla A. Solamente en el caso particular en que $\vec{F}$ actúe en l (la posición de la bisagra), las dos fuerzas normales serían idénticas.

Para calcular la tensión en el alambre necesitamos considerar las fuerzas internas. Se analizarán las que actúan sobre la tabla A (figura D). La tabla A siente la fuerza $\vec{R}$ por estar en contacto con la bisagra; R_v y R_h representan las componentes vertical y horizontal. El alambre está atado a una distancia $l/2$ a lo largo de la tabla. Las condiciones de equilibrio estático, con las torcas respecto al punto Q, conducen a

$$R_h = T \qquad \text{(d)}$$

$$N_a + R_v = F \qquad \text{(e)}$$

$$l_1F\cos\theta + \frac{1}{2}lTsen\theta = lR_v\cos\theta + lR_h sen\theta \qquad \text{(f)}$$

Usando las ecuaciones (c), (d) y (e) en (f) se obtiene la expresión siguiente para la tensión

$$T = \frac{l_1}{l}F\cot\theta\,.$$

Este ejemplo 4 se discute con más detalle en la referencia 2, donde además se toman en cuenta la masa de las tablas, las fuerzas de fricción entre las tablas y el suelo, y las posiciones de la persona y del alambre son arbitrarias.

Recapitulación

Consideremos una partícula de masa m con ímpetu lineal $\vec{p}$ y posición $\vec{r}$, en el plano XY. Definimos el ímpetu angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$; al derivar respecto al tiempo se obtiene $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$; el lado derecho es la torca, $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$ **(3)**. Para N partículas el ímpetu angular total es la suma de los ímpetus angulares $\vec{L} = \sum \vec{l_i}$. Al derivar respecto al tiempo, y usando (3), se obtiene $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$.

Separemos el movimiento de un sistema de partículas en el del centro de masa (cm) y en el movimiento en torno el cm. Usemos dos sistemas de coordenadas: S tiene su origen en un punto O arbitrario, S´ es paralelo a S y su origen está colocado en el cm (figura 13.3). El vector $\vec{h}$ separa los ejes paralelos Z y Z´; el punto P representa una partícula de masa m_i con posición $\vec{r}_i$ respecto a S y $\vec{r}_i{}'$ respecto a S´. Las coordenadas de los vectores son $\vec{h}=(x_{cm}, y_{cm})$, $\vec{r}_i=(x_i, y_i)$ y $\vec{r}_i{}'=(x_i', y_i')$; están relacionados por $\vec{r}_i = \vec{h} + \vec{r}_i{}'$, la relación entre las velocidades es $\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i{}'$. El ímpetu angular respecto a S es $\vec{L} = \vec{h} \times \vec{P} + \sum \vec{l_i'}$, es igual al ímpetu angular del cm más la suma de los ímpetus angulares calculados respecto S´.

Para rotación respecto a un eje fijo, la torca neta es $\tau = I\frac{d\omega}{dt}$ y en función del ímpetu angular es $\tau = \frac{dL}{dt}$. En ausencia de torca el ímpetu angular es constante $L = I\omega$. Para conocer la relación entre $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$, consideremos una partícula con movimiento circular en el plano X´Y´, gira respecto al eje Z´ con velocidad $\vec{\omega}$, su posición es $\vec{r}\,'$ y su ímpetu lineal es $\vec{p}$, figura 13.4. El ímpetu angular es paralelo a Z´; $\vec{r}\,'$ y $\vec{p}$ son perpendiculares, $\vec{l}\,' = I_{Z'}\vec{\omega}$ **(7)**. Ahora se calcula el ímpetu angular respecto a un sistema de coordenadas con el origen desplazado a lo largo del eje de giro. Usemos Z=Z´, el plano XY paralelo a X´Y´ y paralelos los ejes X y X´. En figura 13.5 se ve que $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares, la magnitud del ímpetu angular es $l=mr^2\omega\text{sen}\theta$. Resulta que $\vec{l}$ y $\vec{\omega}$ no son paralelos. Pero la componente de $\vec{l}$ paralela a Z es $l_z= ma^2\omega$, i.e. $\vec{l}_Z = I_Z\vec{\omega}$ **(8)**; el ímpetu angular no es paralelo a la velocidad angular. Hemos calculado el ímpetu angular de una partícula en trayectoria circular usando dos sistemas de referencia distintos, figuras 13.4 y 13.5; se obtuvieron los resultados (7) y (8). Para que la partícula se mueva en una trayectoria circular, debe haber una fuerza centrípeta $\vec{F}$ que actúe como en la figura 13.6, resultando una torca $\vec{\tau}$.

Un par de partículas. Consideremos dos partículas idénticas girando en una misma trayectoria circular, colocadas en los extremos opuestos de un diámetro. Las componentes perpendiculares al eje Z de cada ímpetu angular se cancelan mutuamente, pero las paralelas al eje son iguales. El ímpetu angular total es paralelo a la velocidad angular, $\vec{L} = I_Z\vec{\omega}$. La torca resultante es nula.

Muchos pares de partículas. Se puede pensar en agregar muchos pares de partículas idénticas para formar un aro; después agregar aros coaxiales idénticos para formar un cascarón cilíndrico o agregar aros coaxiales de radios distintos y colocarlos en orden decreciente del radio para formar un cascarón cónico. En forma análoga se puede formar un cilindro macizo o un cono macizo. Estos cuerpos tienen simetría axil y si rotan respecto a su eje de simetría, la torca neta es nula y el ímpetu angular es constante. Si el sistema de partículas o cuerpo rígido es simétrico en torno al eje de rotación $\vec{L} = I\vec{\omega}$, I es respecto al eje de rotación. Si el cuerpo no tiene simetría axil o si es simétrico pero el eje de simetría no coincide con el de rotación, se obtiene que lo que es paralelo al vector velocidad angular es la componente del ímpetu angular en la dirección del eje de rotación, $\vec{L}_Z = I_Z\vec{\omega}$.

Un cuerpo está en equilibrio mecánico si se cumple que 1) la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero y 2) la suma de todas las torcas que actúan sobre él es cero. Considerar el equilibrio rotacional de un cuerpo al que se aplica una fuerza horizontal para obligarlo a que gire y cuando haya tenido un desplazamiento angular pequeño, la fuerza deja de aplicarse para que el cuerpo se mueva solamente por el efecto de su peso. Cuando el peso hace que el cuerpo regrese a su posición inicial, el equilibrio es estable; cuando lo aleja, es inestable.

Bibliografía

1. Manzur Guzmán, A. *Experimentos de Demostración. Ejemplos de Mecánica Elemental* (segunda edición). Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2009. Capítulo 21.

2. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la Resolución de Problemas. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2005. Capítulo 17.

Problemas

1. Si una partícula se encuentra instantáneamente en una posición $\vec{r}$ (respecto a un origen fijo) y se mueve con ímpetu lineal $\vec{p}$, ¿Cuál es entonces el vector ímpetu angular?

2. ¿Cuál condición es necesaria para que valga la ley de conservación del ímpetu angular en un sistema dado?

3. Una clavadista de competencia sale del trampolín, se hace ovillo girando, y cae al agua con su cuerpo recto. Cuando ella pone sus brazos y sus piernas en la posición de ovillo, ¿qué sucede a su rapidez angular?

4. Cuando la clavadista del problema anterior, estira sus piernas y brazos para caer en el agua, con su cuerpo recto, ¿qué sucede a su energía cinética rotacional?

5. Una plataforma horizontal de 100 kg de masa gira alrededor de un eje vertical (sin fricción) que pasa por su centro y da 10 rpm. Un hombre de 60 kg se encuentra en el borde de la plataforma. ¿Con qué velocidad girará la plataforma si el hombre se traslada desde el borde hasta el centro de la misma? Considerar que la plataforma es un disco circular homogéneo de radio igual a 1.5 m $\left(I_{disco} = \dfrac{MR^2}{2} \right)$ y que el hombre es una masa puntual. Al trasladarse el hombre del borde al centro de la plataforma, ¿cuánto es el cambio en la energía cinética del sistema?

6. Una plataforma horizontal en forma de disco circular gira libremente en un plano horizontal, alrededor de un eje vertical sin fricción. La plataforma tiene una masa M = 100 kg y un radio R = 2.0 m. Un estudiante, cuya masa es m = 60 kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema era 2.0 rad/s cuando el estudiante estaba en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando el estudiante llega a un punto r = 0.50 m del centro? [$I_p = ½(MR^2)$]

7. Una mujer de 60 kg está parada en el borde de una plataforma circular y horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kgm^2 y un radio de 2.00 m. La plataforma giratoria está en reposo y puede girar libremente alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar por el borde de la plataforma en la dirección de las manecillas del reloj (cuando se observa el sistema desde arriba) a una rapidez constante de 1.50 m/s con relación a la Tierra. Suponer que la mujer es una masa puntual. a) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la plataforma giratoria? b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la plataforma giratoria?

8. Una persona está de pie sobre una plataforma sin fricción que gira con una velocidad angular de 2 rev/s; sus brazos están extendidos horizontalmente y en cada mano sostiene una pesa. En esa posición la inercia de rotación total de la persona junto con las pesas y la plataforma es de 10 $kg{\cdot}m^2$. Al bajar los brazos junto con las pesas la persona disminuye la inercia de rotación a 5 $kg{\cdot}m^2$. a) ¿Cuál es la velocidad angular final de la plataforma? b) ¿Cuál es el cociente entre las energías cinéticas final e inicial? Interpretar el resultado.

9. Un estudiante se sienta en un banco, que puede girar libremente, sosteniendo dos pesas cada una de 3.00 kg de masa. Cuando sus brazos están extendidos horizontalmente, las pesas están a 1.00 m del eje de rotación y él gira con una rapidez angular de 0.750 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es 3.00 $kg{\cdot}m^2$ y se supone que es constante. El estudiante mueve las pesas hacia adentro, horizontalmente, a una posición a 0.300 m del eje de rotación. a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante. b) Encuentre la energía cinética del sistema giratorio antes y después que él ponga las pesas más cerca de su cuerpo.

10. Dos partículas describen trayectorias circulares que son concéntricas entre sí y se encuentran en el mismo plano, tal como se muestra en la figura 13.10. La magnitud de la velocidad angular de ambas partículas es la misma e igual a ω. Una de las partículas tiene una

masa *m*, su órbita tiene un radio *r* y gira en el sentido de las manecillas del reloj visto a lo largo del eje *z*. La otra partícula tiene una masa 4*m* y se mueve en sentido opuesto al de la otra partícula sobre una órbita de radio *r*/2. Indique la figura que representa correctamente el momento angular del sistema.

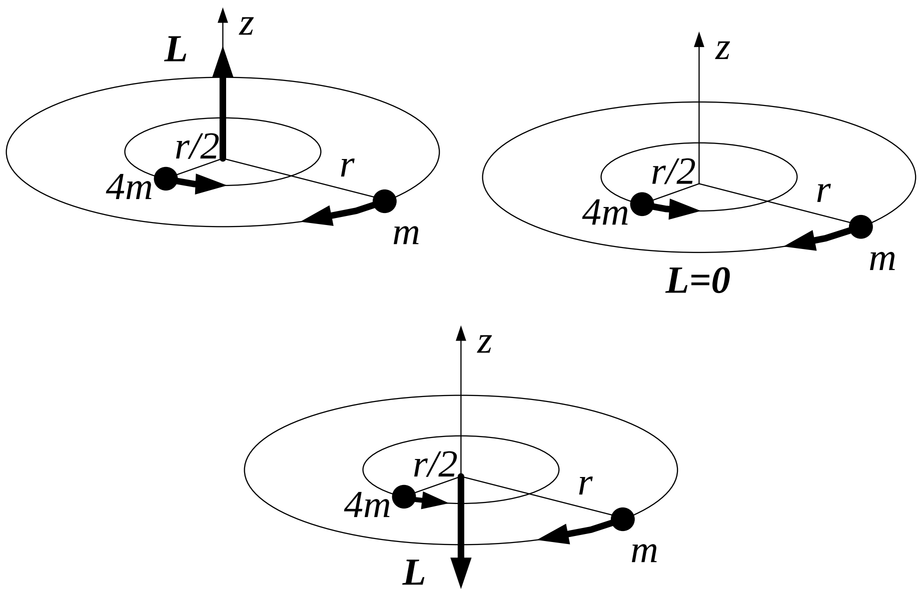
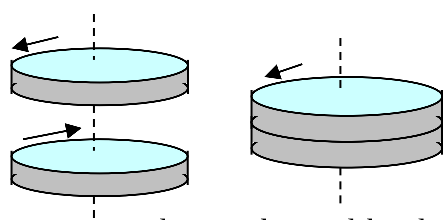


Figura 13.10. Problema 10.

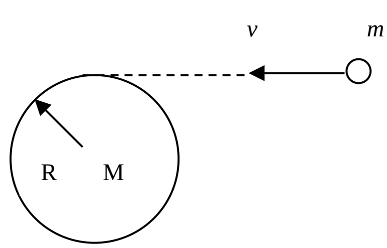
11. Dos discos idénticos rotan inicialmente en direcciones opuestas en torno de sus respectivos ejes de simetría como se indica en la figura 13.11. Se ponen en contacto de manera que sus ejes de rotación coinciden. Aunque al inicio resbalan entre sí, eventualmente, debido a la fricción cinética presente, empezarán a rotar juntos. ¿Cuánto vale el ímpetu angular antes y después del acoplamiento?

Figura 13.11. Problemas 11, 15 y 16.



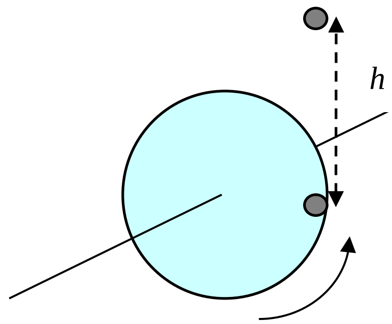
12. Una partícula de masa *m* y rapidez *v* choca y se queda pegada en el borde de una esfera sólida uniforme de masa *M* y radio *R*, como se muestra. La esfera está inicialmente en reposo y después de la colisión gira alrededor de un eje sin fricción, que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la figura. Calcular (a) la rapidez angular del sistema después de la colisión y (b) la fracción de energía cinética que se pierde durante la colisión.

Figura 13.12. Problema 12.



13. Un disco circular uniforme de espesor despreciable, masa M y radio R gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje horizontal (perpendicular al plano) que pasa por su centro. En el borde del disco se encuentra adherida una partícula de masa m que en algún momento sale despedida de tal manera que se eleva verticalmente, en línea recta, hasta llegar a una altura h sobre el punto donde se desprendió, tal como se muestra en la figura. Encontrar: a) la velocidad angular final del disco y b) la altura h en términos de M, m, R, y g (magnitud de la aceleración de la gravedad).

Figura 13.13. Problema 13.



14. Considere una esfera sólida de 2.0 kg y 10.0 cm de radio. Calcule el ímpetu angular de la esfera, respecto al eje de rotación, cuando está girando con una frecuencia angular de 2.00 rad/s en cada uno de los siguientes casos: a) cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa de la esfera, y b) cuando el eje de rotación es paralelo a un diámetro de la esfera y cuya distancia al centro de masa es de 5.00 cm.

15. Un disco con momento de inercia I_1 gira inicialmente con velocidad angular ω_1 alrededor de su eje de simetría en dirección vertical. Otro disco con momento de inercia $I_2>I_1$ que se encuentra inicialmente girando con velocidad angular $\omega_2>\omega_1$, pero en sentido opuesto a ω_1, cae directamente sobre el primero con el mismo eje de rotación. Debido al rozamiento, ambos discos adquieren finalmente la misma velocidad angular. a) ¿Con qué velocidad angular final giran ambos discos? b) ¿Cuánta energía se disipó? Ver figura 13.11.

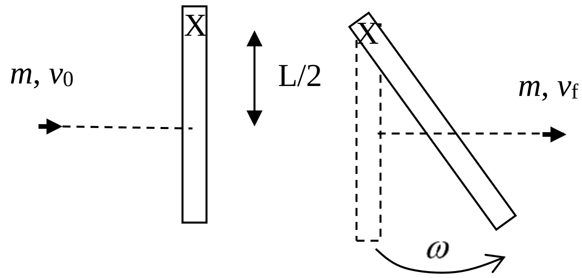
16. Un disco con momento de inercia I_1 = 2.00 kg m^2 gira alrededor de un eje vertical sin fricción con rapidez angular ω_i = 20.0 rad/s. Un segundo disco cuyo momento de inercia es I_2 = 1.00 kg m^2, que al principio está en reposo, cae sobre el primer disco con el mismo eje de rotación. Después de un corto tiempo, debido a la fricción entre ambos discos, los dos alcanzan la rapidez angular final ω_f. a) Calcular la rapidez angular final, ω_f. b) ¿Cuánto vale el cambio en la energía cinética del sistema? Ver figura 13.11.

17. Una barra rígida y ligera de 1.00 m de largo une dos partículas, con masas de 4.00 kg y 3.00 kg en sus extremos. La combinación gira en el plano horizontal XY alrededor de un eje vertical que pasa por el centro de la barra. Determine el ímpetu angular del sistema respecto al centro de la barra cuando la rapidez de cada una de las partículas es 5.00 m/s.

18. Una bala de masa m y velocidad v_0 se mueve inicialmente, como se muestra en la figura 13.14, hacia una tabla que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y anclada a un eje vertical que pasa por un extremo. La tabla está inicialmente en reposo y la bala la atraviesa

sin cambiar su dirección de movimiento. Si la tabla queda girando con una velocidad angular conocida ω, ¿con qué velocidad v_f sale la bala después de atravesar a la tabla?

Figura 13.14. Problema 18.

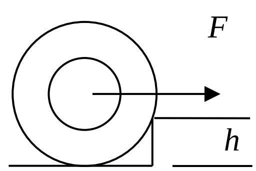


19. Una regla graduada de 1 metro y 100 gramos está en equilibrio horizontal sobre un soporte en la marca de 50 centímetros. Cuando una pesa se coloca en la marca de 8 centímetros, para que la regla esté en equilibrio horizontal el soporte se coloca debajo de la marca de 40 centímetros. Calcular la masa de la pesa.

20. Un andamio de 60 kg de masa y 5.0 m de longitud es soportado en una posición horizontal por un cable vertical en cada extremo. Un lavador de ventanas, de 80 kg de masa, está de pie en una posición a 1.5 m desde uno de los extremos. Calcular la tensión en cada cable.

21.¿Qué fuerza mínima F, aplicada horizontalmente en el eje de la rueda de radio R y masa m, es necesaria para elevar la rueda sobre un obstáculo de altura h?.

Figura 13.15. Problema 21.



22. Una barra no uniforme de peso P está suspendida en reposo, en una posición horizontal, por dos cuerdas ideales como se muestra; el ángulo que forma la cuerda izquierda con la vertical es φ; la otra cuerda forma el ángulo θ con la vertical. La longitud de la barra es L. Hallar la posición x del centro de masa desde el extremo izquierdo. Usar θ=35º, φ=55º y L=6.0 m.

Figura 13.16. Problema 22.

23. Una viga de masa M y longitud L es transportada (manteniéndola en posición horizontal) por tres hombres, uno en un extremo y los otros dos soportando la viga entre ellos sobre un travesaño situado de modo tal que la carga se reparte de igual forma entre los tres. Despreciar

la masa del travesaño. Calcular la fuerza que cada hombre aplica sobre la viga y la posición del travesaño.

24. Sobre un escalón de una rama de una escalera de tijera está una persona parada a una distancia l_1, desde el contacto con el suelo, ejerciendo con su peso una fuerza vertical $\vec{F}$. Suponer que la escalera de tijera consiste de dos tablas idénticas de longitud l mantenidas unidas por un alambre horizontal de largo d, situado a la mitad de la altura de la escalera y por una bisagra en la parte superior. El suelo está libre de fricción y se desprecia la masa del alambre; el peso de cada tabla es $\vec{P}$. Usando como guía el ejemplo 4, determinar las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre la escalera desde el suelo y la tensión del alambre.

14 OSCILACIONES

Hasta ahora se han estudiado dos clases de movimiento de los cuerpos: traslación y rotación. La tercera clase de movimiento podría llamarse de “vaivén”, aunque los físicos la llaman movimiento periódico, ondulatorio u oscilante. Un péndulo que se balancea es un excelente ejemplo del mismo.

Introducción

Consideremos un disco que está girando con una velocidad angular constante respecto a un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro, como se ilustra en la figura 14.1(a). Todos los puntos del disco describen trayectorias circulares cuando se les observa de frente al plano; se dice que cada punto tiene un *movimiento periódico* porque su posición se repite cada tiempo constante *T*, llamado *periodo* (o período); esto sucede porque la velocidad angular es constante.

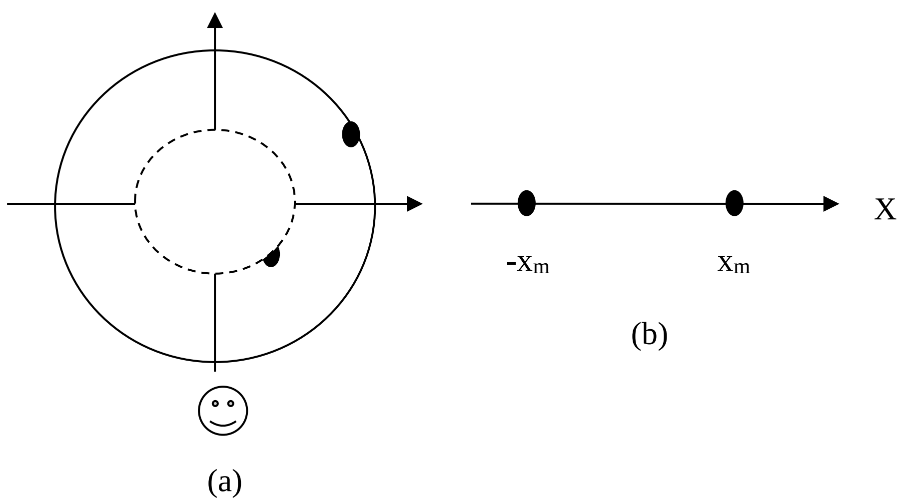


Figura 14.1. (a) Los puntos de un disco que gira con velocidad angular constante describen trayectorias circulares. (b) Cuando se observa de perfil (de canto) al plano del disco, cada punto parece moverse sobre una línea recta.

Ahora escogemos un punto del disco y lo observamos a lo largo de un diámetro del disco, por ejemplo a través del eje Y; veremos que se mueve a lo largo de una línea recta (eje X) y que el movimiento oscila entre los valores extremos $-x_m$ y x_m. En otras palabras, se ha hecho la proyección de un movimiento circular sobre un diámetro del círculo y el movimiento del punto se observa en esa línea. A este movimiento periódico de ida y vuelta sobre la misma trayectoria (vaivén) se le llama movimiento *oscilatorio*.

El movimiento *vibratorio*, como el de un trampolín, también es un movimiento periódico, de ida y vuelta sobre la misma trayectoria. Los sistemas oscilantes aparecen en distintas ramas de la física, como en mecánica (sistema resorte-masa, péndulos, pistones de motores de automóviles), en acústica (cuerdas, membranas (tambores), diafragmas de teléfonos), óptica, circuitos eléctricos.

A continuación se considerará un sistema mecánico donde solamente actúa una fuerza y que es conservativa. Este sistema consiste de un resorte ideal (sin masa y que satisface la relación empírica llamada ley de Hooke) de constante elástica k, con un extremo fijo y en el otro extremo tiene atado un bloque de masa m que se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción, como ilustra la figura 14.2.

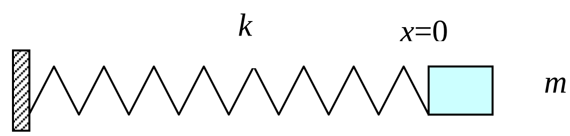


Figura 14.2. La posición de equilibrio (x=0) se escoge cuando el resorte está en su posición natural; desde este punto se mide el desplazamiento de la masa m.

En la posición de equilibrio (x=0) el bloque no siente fuerza alguna, pues el resorte no está deformado. Al desplazar la masa una cantidad x desde la posición de equilibrio, el resorte ejerce una fuerza F=-kx dirigida hacia la posición de equilibrio. Esta cantidad x representa el desplazamiento de la masa m desde la posición de equilibrio. Al estar oscilando la masa m, los valores extremos del desplazamiento equidistan del punto de equilibrio. En ausencia de otras fuerzas, al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene que

$$-kx=ma,$$

pero la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto del tiempo, es decir

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}\,. \qquad (1)$$

Esta ecuación que representa la ecuación de movimiento de una masa unida a un resorte ideal involucra, claramente, las características del sistema a través de las constantes m y k.

14.1 Oscilador armónico simple

Cualquier movimiento que se repita a sí mismo a intervalos de tiempo iguales se denomina *movimiento periódico* o *movimiento armónico* y la partícula que lo realiza se llama *oscilador armónico. Si* los valores extremos del desplazamiento están igualmente espaciados respecto a la posición de equilibrio, el oscilador se llama *oscilador armónico simple* (OAS). El sistema resorte-masa de la figura 14.2 tiene estas características, pero para que la ecuación (1) no dependa de este sistema particular la escribimos en una forma general como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\,. \qquad (2)$$

La cantidad ω es una constante que depende de las características del sistema bajo estudio. Esta ecuación tiene la característica muy importante que la aceleración de la partícula es proporcional a su posición, con signo negativo. La solución de la ecuación (2) debe ser una función dependiente del tiempo, $x(t)$, con la propiedad de adquirir el mismo valor en cada tiempo múltiplo de T, pues representa a un movimiento periódico. Las funciones seno y coseno tienen esta propiedad de repetirse, por lo que, en general, ellas o una combinación de ellas son solución de la ecuación (2).

El movimiento periódico representado por la ecuación (2) también es llamado movimiento armónico simple porque está descrito por funciones armónicas y es simple porque sus desplazamientos extremos equidistan de la posición de equilibrio. El desplazamiento x es longitudinal si se trata del sistema resorte-masa, pero x también puede representar un desplazamiento angular si se trata, por ejemplo, del movimiento de un péndulo; el movimiento pendular también es descrito por la expresión (2) (pero la variable tiene otro sentido físico). Esta ecuación (2) es llamada ecuación de movimiento del oscilador armónico simple. La importancia de esta ecuación radica en que las vibraciones mecánicas con desplazamientos pequeños se reducen a ella.

14.2 Funciones seno y coseno

Como ya adelantamos que la solución de la ecuación (2) estará en términos de funciones armónicas, recordemos algunas de sus propiedades y después regresaremos con el estudio del oscilador armónico simple. La figura 14.3 muestra la curva de la función seno, mientras que la función coseno se muestra en la figura 14.4; ambas curvas se repiten a partir del ángulo 2π. Estas funciones difieren entre sí en 90º en el argumento y ambas varían entre -1 y +1. Se puede pasar de una a la otra a través de las identidades trigonométricas siguientes:

$$sen\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = sen\theta \cos\frac{\pi}{2} \pm \cos\theta sen\frac{\pi}{2} = \pm\cos\theta\ ,$$

pues cosπ/2=0 y senπ/2=1

$$\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta \cos\frac{\pi}{2} \mp sen\theta sen\frac{\pi}{2} = \mp sen\theta\ ;$$

algunas características de estas dos funciones pueden observarse en sus curvas mostradas en las figuras 14.3 y 14.4.

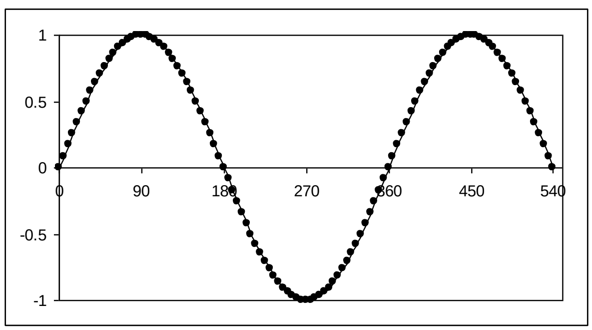


Figura 14.3. Curva de la función seno.

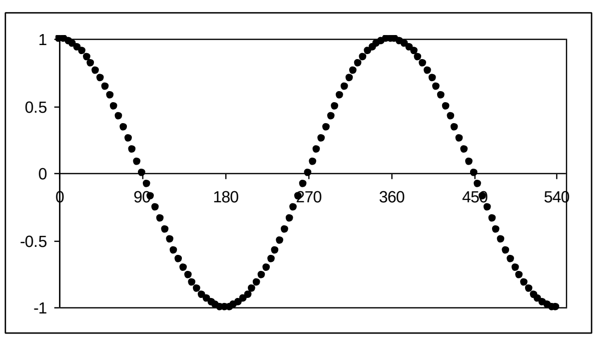


Figura 14.4. Curva de la función coseno.

Solución de la ecuación (2). Una función general que sea una solución para el desplazamiento *x*, representado por la ecuación (2), como una función del tiempo es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\ . \qquad (3)$$

Las cantidades A, ω y φ son constantes. La *amplitud A* es la magnitud del desplazamiento máximo de la partícula en cualquier dirección (el desplazamiento lineal o angular es la distancia lineal o angular desde la posición de equilibrio); de esta manera el desplazamiento x varía entre sus valores extremos $-A$ y $+A$. La cantidad $\omega t+\varphi$ es el argumento de la función, varía en el tiempo y se llama *fase* del movimiento. La constante φ se denomina *constante de fase* (o *ángulo de fase* o *fase inicial*). Los valores de A y de φ se determinan usando las condiciones iniciales, es decir, usando los valores de el desplazamiento y la velocidad de la partícula en el tiempo t=0.

El significado de la constante ω se obtiene exigiendo que el desplazamiento $x(t)$ debe repetir su valor después de transcurrir un periodo T, o sea que $x(t)$ debe ser igual a $x(t+T)$ para todo valor de t. Esta exigencia se visualiza en las figuras 14.3 y 14.4, ya que en ellas se observa que un punto cualquiera de la curva se repite al agregar 360º (2π) al valor del ángulo correspondiente a ese punto, esto es $sen\,\theta = sen(\theta + 2\pi)$ y $\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$. En otras palabras, los valores de la curva representada por la función (3) se deben repetir cada T segundos, mientras que los valores de las funciones seno y coseno se repiten cada 2π radianes. Dicho lo anterior puede asegurarse que si al argumento de la función dada en (3) se le agrega 2π, su valor no se altera; es decir,

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + 2\pi + \varphi) = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right].$$

El desplazamiento se repite después de un tiempo igual a $2\pi/\omega$. Es el tiempo requerido para completar un viaje redondo, o sea, una oscilación completa o ciclo. Por tanto $2\pi/\omega$ es el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ . \qquad (4)$$

Este es el tiempo que dura una oscilación completa (o ciclo), su unidad de medida es el segundo. Relacionada con el periodo está la *frecuencia f* que significa el número de oscilaciones o ciclos que se completan en cada unidad de tiempo, se mide en s^{-1} o hertz (Hz), se define como el inverso del periodo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\ . \qquad (5)$$

La cantidad ω es llamada *frecuencia angular* del movimiento. Usando esta última expresión se obtiene que la *frecuencia angular* se escribe como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} . \qquad (6)$$

La unidad de la frecuencia angular en el sistema SI es el radián por segundo (rad/s).

La velocidad de la partícula oscilante se determina calculando la derivada del desplazamiento respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \varphi) . \qquad (7)$$

La cantidad ωA en esta expresión (7) representa la magnitud de la amplitud de la velocidad; significa que la velocidad de la partícula oscilante varía entre los límites $-\omega A$ y $+\omega A$.

A su vez, la aceleración se calcula derivando la velocidad (7) respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) . \qquad (8)$$

La cantidad $\omega^2 A$ es la magnitud de la amplitud de la aceleración y representa los valores límite que la aceleración puede tener: $-\omega^2 A$ y $+\omega^2 A$.

14.3 Sistema resorte-masa

Regresemos al caso particular del resorte ideal con una masa atada, representado en la figura 14.2. Al insertar en la ecuación (1) la expresión (3) para la posición y la expresión (8) para la aceleración se obtiene

$$-kA\cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) .$$

Por tanto, se identifica a la frecuencia angular de este sistema como

$$\omega^2 = \frac{k}{m} . \qquad (9)$$

La frecuencia angular de este OAS sólo depende de las características del sistema (k y m). Con la fórmula (6) se obtiene que el periodo T y la frecuencia f, respectivamente, son

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} , \qquad (10)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} . \qquad (11)$$

La fuerza que produce un resorte ideal sobre una partícula es una fuerza conservativa y, por tanto, tiene asociada una función (energía) potencial [$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$], la cual como una función de x es una parábola, que se ilustra en la figura 14.5(a). La fuerza también es una función de x y se ilustra en la figura 14.5(b).

En ambas figuras se resalta el aspecto distintivo de este oscilador armónico simple: los valores del desplazamiento están igualmente espaciados respecto a la posición de equilibrio. Esta característica está contenida en la solución general (3) del oscilador armónico pues en los desplazamientos extremos la partícula debe tener velocidad nula (estos desplazamientos corresponden a los puntos de retorno). De acuerdo con la ecuación (7) la velocidad es nula cuando la fase del movimiento (o argumento) tiene el valor 0 (t=0 y φ=0) o múltiplo de π, lo cual implica que el desplazamiento (3), calculado en este mismo valor del argumento $\omega t+\varphi$, tenga el valor límite A o $-A$.

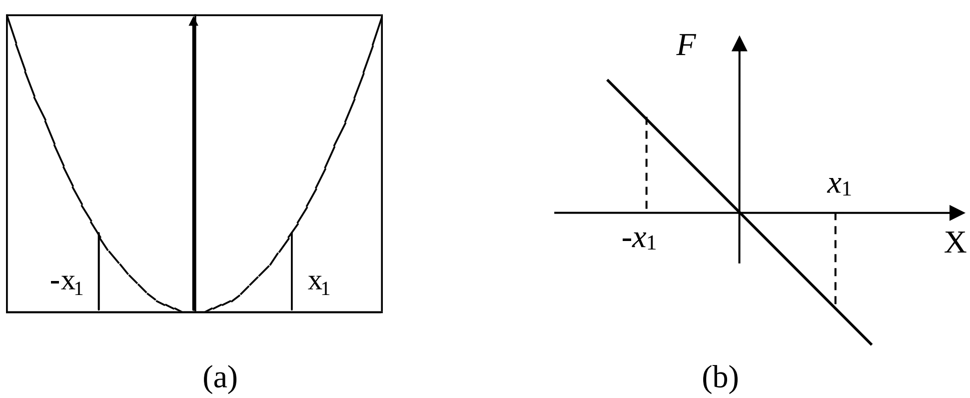


Figura 14.5. (a) La energía potencial de un resorte ideal es una parábola.
(b) La fuerza producida por un resorte ideal es lineal.

A este oscilador armónico con los límites del desplazamiento equidistantes del punto de equilibrio, se llama *oscilador armónico simple* y a su movimiento se le llama movimiento armónico simple (MAS). Consecuentemente, a la ecuación (2) se le llama ecuación de movimiento del oscilador armónico simple y su solución es la ecuación (3).

14.4 Energía del oscilador armónico simple

Debido a que la fuerza de un resorte ideal es conservativa, entonces para el sistema resorte-masa la energía mecánica se conserva. La energía mecánica es la suma de la energía potencial (U) del resorte más la energía cinética (K) de la partícula oscilante:

$$E=U+K.$$

Usando la ecuación (3) para el desplazamiento, la energía potencial es

$$U(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,. \qquad (12)$$

Como la velocidad está dada en la ecuación (7), la energía cinética es

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2 sen^2(\omega t+\varphi)\,;$$

pero $m\omega^2=k$ según la fórmula (9), por lo que

$$K=\frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t+\varphi)\,. \qquad (13)$$

Al sumar las ecuaciones (12) y (13) resulta que la energía mecánica es

$$E=U+K=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\,. \qquad (14)$$

Como era de esperarse, la energía mecánica total de una partícula en movimiento armónico simple es constante, resulta ser proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento (A^2) y a una de las características del sistema (k).

La ecuación (14) puede reescribirse como

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2\,;$$

de donde se obtiene que la velocidad de la partícula es

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2-x^2\right)}\,. \qquad (15)$$

En esta expresión para la velocidad se observa que su valor máximo ocurre en x=0, que es cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio, y que su valor es nulo en $x=\pm A$, que corresponde a los puntos de retorno (posiciones en que la partícula empieza a regresar).

Ejemplo 1. Un oscilador está formado por un bloque de medio kg de masa conectado a un resorte ideal. Cuando es puesto en oscilación con una amplitud de 35.0 cm, el oscilador repite su movimiento cada medio segundo. Encontrar a) el periodo, b) la frecuencia, c) la frecuencia angular, d) la constante del resorte, e) la magnitud de la velocidad máxima, f) la magnitud de la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre el bloque y g) la energía mecánica del sistema.

Solución. Si el tiempo se mide desde que el sistema se suelta (t=0) estando el bloque en una posición igual a la amplitud (x_0=A y v_0=0), entonces el ángulo de fase (φ) es nulo y la ecuación (3) se reduce a

$$x(t) = A\cos\omega t \ .$$

a) Como el periodo es el tiempo en que el movimiento se repite, entonces T=0.5 s.

b) Como la frecuencia es igual al inverso del periodo, entonces $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5} = 2.0$ Hz.

c) La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 4\pi = 12.57$ rad/s.

d) La constante del resorte es $k = m\omega^2 = (0.5)(12.57)^2 = 78.96$ N/m.

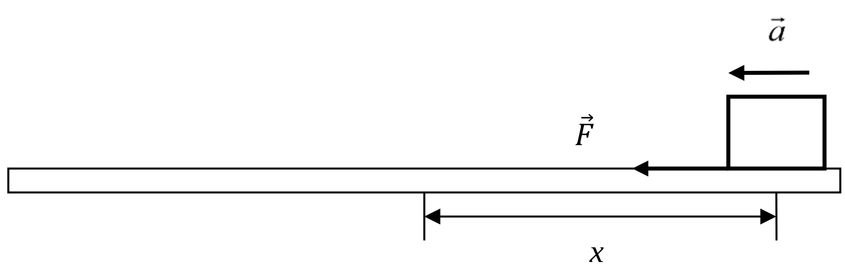
e) La magnitud de la velocidad máxima es $v_{\max} = \omega A = (12.57)(0.35) = 4.40$ m/s.

f) Usando la segunda ley de Newton, la fuerza máxima es

$F_{\max} = ma_{\max} = m(\omega^2 A) = (m\omega^2)A = 78.96(0.35) = 27.64$ N.

g) La energía mecánica del sistema es $E = \frac{1}{2}kA^2 = (0.5)(78.96)(0.35)^2 = 4.84$ J.

Ejemplo 2. Un bloque está situado encima de una superficie horizontal oscilatoria, la cual se mueve hacia adelante y hacia atrás con movimiento armónico simple de frecuencia 2.0 Hz. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie es de 0.50. Si el valor de la amplitud puede ser variado, ¿cuál es el máximo valor que puede tener la amplitud si el bloque no debe resbalar sobre la superficie?



Solución. El bloque también tiene un MAS si no resbala; si la posición es $x(t) = A\cos\omega t$, entonces la aceleración es $a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t$, de donde se obtiene que la magnitud de la aceleración es $a = A\omega^2 = A(2\pi f)^2$. El diagrama muestra al bloque en el extremo derecho respecto a la posición de equilibrio, cuando inicia su movimiento hacia la izquierda. El bloque siente dos fuerzas verticales: el peso $m\vec{g}$ y la normal $\vec{N} = m\vec{g}$; la única fuerza horizontal, la de fricción, es la que lo mantiene unido a la superficie. En general, la magnitud de la fuerza de fricción estática es $F \leq \mu N$, su valor más grande es $F = \mu N = \mu mg$; de tal manera que esta fuerza proporciona la máxima aceleración permitida para evitar que el bloque resbale, es decir

$$\mu mg = ma_{\max} = m(2\pi f)^2 A_{\max}.$$

De donde se obtiene que el máximo valor permitido para la amplitud es

$$A_{\max} = \frac{\mu g}{4\pi^2 f^2}$$

El resultado numérico es $A_{\max} = 0.03$ m.

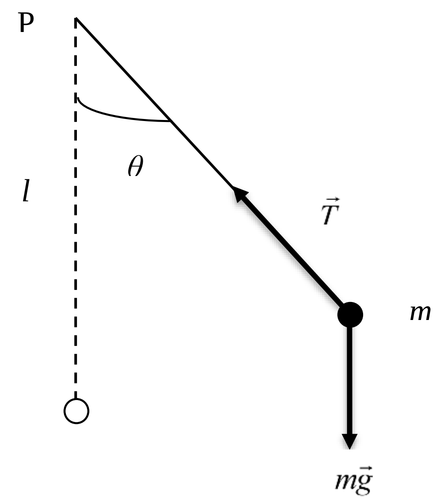
←——— ←——— ←———

14.5 Péndulos

Ahora se verán ejemplos de osciladores armónicos en los que los desplazamientos son angulares, a diferencia del sistema resorte-masa donde los desplazamientos son lineales. El interés aquí es conocer la frecuencia angular característica del sistema y, consecuentemente, el periodo de la oscilación.

Péndulo simple. Consideremos una partícula de masa *m* suspendida del extremo de una cuerda ideal (inextensible y sin masa) de longitud *l*, el otro extremo de la cuerda está fijo en un punto P (donde se encuentra el pivote). En la posición de equilibrio, el punto P, la cuerda y la partícula están en una línea vertical. Si la masa y la cuerda se desplazan desde la posición de equilibrio (un desplazamiento angular θ) y se sueltan, el sistema oscilará respecto al punto P y describirá un movimiento periódico. La situación se muestra en la figura 14.6.

Figura 14.6. El péndulo simple consiste de una masa puntual unida al extremo libre de una cuerda, el otro extremo de la cuerda está fijo en P.



La cuerda forma un ángulo θ con la vertical y sobre la masa m actúan dos fuerzas: la tensión $\vec{T}$ de la cuerda y el peso $m\vec{g}$. De estas fuerzas, sólo el peso produce una torca respecto al punto de oscilación P, pues la línea de $\vec{T}$ pasa por este punto. El peso produce una torca restauradora alrededor del punto de giro del péndulo, se llama restauradora porque siempre actúa en sentido opuesto al desplazamiento angular para regresar el péndulo a su posición vertical, apunta hacia adentro de la página (ver figura 14.6). La torca es

$$\tau_P = -lmgsen\,\theta \,. \qquad (16)$$

El signo menos se debe a que la torca que produce el peso hace que el ángulo disminuya. A su vez, la torca es igual al momento de inercia de la partícula respecto al eje que pasa por el punto P ($I_P=ml^2$) multiplicada por la aceleración angular (α); de tal manera que

$$\tau_P = -lmgsen\,\theta = I_P\alpha \,. \qquad (17)$$

Para simplificar esta expresión (17), se hace la suposición que el ángulo θ es pequeño porque en ese caso se puede hacer la aproximación $sen\theta\approx\theta$, si el ángulo se expresa en radianes. [Esta suposición se basa en que la función seno como una serie se escribe como $sen\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \ldots$ donde el símbolo factorial (!) indica que n!=n(n-1)(n-2)…(2)(1)].

Con esta aproximación la ecuación (17) se escribe como

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-lmg\theta}{ml^2} = -\frac{g}{l}\theta \,.$$

Esta expresión indica que la aceleración angular α del péndulo simple es proporcional al desplazamiento angular θ, pero de signo contrario. Esta ecuación es característica del oscilador armónico simple. Puede decirse que el movimiento del péndulo simple que oscila con *ángulos pequeños* es aproximadamente armónico simple. La relación anterior puede escribirse como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta . \qquad (18)$$

Esta ecuación corresponde a la de un *oscilador armónico simple angular* (compárese con la ecuación (2)) y se observa que la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} . \qquad (19)$$

Se obtiene que la frecuencia angular del péndulo simple sólo depende de un parámetro del sistema (*l*), pues en un OAS esta cantidad ω sólo depende de características propias del sistema. Usando la relación (6) se obtiene que el periodo de oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} . \qquad (20)$$

Se observa que el periodo del péndulo simple será mayor cuanto mayor sea la longitud.

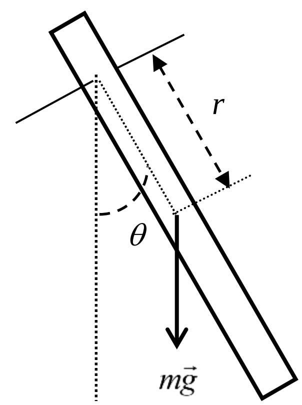
La aproximación *senx≈x* es muy usada en oscilaciones pequeñas; para tener presente su significado es conveniente recurrir a valores numéricos. Por ejemplo, en la tabla siguiente se dan algunos valores de ángulos expresados en grados y en radianes, el valor de la función seno y en la última columna se da la diferencia Δ entre el ángulo y el valor del seno. La cantidad Δ puede tomarse como una medida de la aproximación. Se observa que Δ se acerca al valor de un millonésimo cuando el ángulo es de 1º, es alrededor de un diezmilésimo para 5º y se acerca a un milésimo para los 10º. Cuanto más pequeño es el ángulo, esta aproximación es mejor. Es importante tener en cuenta la aproximación principalmente al hacer aplicaciones.

x (º)	x (radianes)	senx	Δ=x-senx
1	0.017 453 293	0.017 452 406	0.000 000 886
5	0.087 266 463	0.087 155 743	0.000 110 720
10	0.174 532 925	0.173 648 178	0.000 884 748

Péndulo físico. Este péndulo está formado por un cuerpo de cualquier geometría (por ejemplo un aro, un disco, una varilla, una guitarra) que oscila respecto a un eje horizontal. Por simplicidad se supondrá que se trata de una barra uniforme de masa m y longitud L que oscila respecto a un eje que pasa por un punto situado a una distancia r a lo largo de su longitud desde su centro de masa, como se ilustra en la figura 14.7.

El ángulo θ describe la posición del péndulo a partir de su posición de equilibrio. Sobre la barra actúan dos fuerzas externas: el peso $m\vec{g}$ en el centro de masa y la fuerza de contacto que ejerce el eje. Si el eje de oscilación pasara exactamente por el centro de masa, las dos fuerzas externas también pasarían por este punto y respecto a él no existiría la torca necesaria para producir la oscilación, es decir, el periodo de oscilación sería infinito (al ser desplazada un ángulo θ y soltada, la barra no se movería). Por tanto, el periodo de oscilación del péndulo físico debe depender de la posición del eje (pivote). Además de calcular el periodo nos interesa conocer dónde debe estar el eje de oscilación para que el periodo sea mínimo.

Figura 14.7. El péndulo físico puede ser una regla uniforme de longitud L y masa m, que gira respecto a un eje horizontal perpendicular a su longitud, colocado a una distancia r desde el cm.



Respecto al eje de oscilación, sólo el peso produce torca. En la figura 14.7 puede verse que esta torca apunta hacia adentro de la página, tiene magnitud $mgrsen\theta$; es decir, hace que la barra se mueva hacia la posición de equilibrio (en la dirección en que θ decrece). La ecuación de movimiento rotacional respecto al eje es

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgrsen\theta$$

donde I es el momento de inercia del péndulo respecto al eje de giro y el signo menos se debe a que la torca que produce el peso hace que el ángulo disminuya. Cuando el ángulo es pequeño se puede hacer la aproximación $sen\theta \approx \theta$, siempre y cuando θ esté expresado en radianes. Al reemplazar $sen\theta$ por θ la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgr}{I}\theta = 0\,. \qquad (21)$$

Esta ecuación corresponde a la de un *oscilador armónico simple angular*, con frecuencia angular característica de la oscilación dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}} \qquad (22)$$

y con periodo T ($T = \dfrac{2\pi}{\omega}$) dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}\,. \qquad (23)$$

Usando el teorema de ejes paralelos, el momento de inercia respecto al eje de giro puede expresarse en términos del momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de masa (I_{cm}) más el producto de la masa y el cuadrado de la distancia perpendicular (r) entre el centro de masa y el pivote. Es decir $I = I_{cm} + mr^2$, con lo cual el periodo puede expresarse como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + mr^2}{mgr}}\,. \qquad (24)$$

En esta fórmula (24) es claro que el eje de oscilación no puede pasar por el centro de masa (por r=0); si así fuera, el cuerpo no se comportaría como péndulo físico pues su periodo estaría indefinido.

Periodo mínimo. Para averiguar si el periodo T como función de r posee un valor mínimo, se debe calcular su derivada respecto a r e igualarla a cero. Debido a que el mínimo de T aparecerá en el mismo valor de r que el mínimo de T^2, y por simplicidad en el cálculo, se usará la derivada de T^2. El resultado de derivar es

$$\frac{d(T^2)}{dr} = \frac{d}{dr}\left(4\pi^2\left[\frac{I_{cm} + mr^2}{mgr}\right]\right) = \frac{4\pi^2}{mgr^2}(mr^2 - I_{cm})\,.$$

Llamemos r^* el valor de r en que la primera derivada se anula; el resultado que se obtiene es

$$r^* = \sqrt{\frac{I_{cm}}{m}}\,. \qquad (25)$$

El eje de oscilación para el cual el periodo es un mínimo está localizado a una distancia $r*$ medida desde el centro de masa. Las fórmulas (24) y (25) son generales, es decir, son válidas para cualquier forma que tenga el cuerpo que oscila.

Se ha supuesto que este péndulo es una barra, pero hasta este momento no se ha usado esta información. El resultado representado por la fórmula (25), que da la posición del eje de oscilación para obtener el periodo mínimo, es general; incluye otros objetos con forma diferente a la de la barra. La información específica de la geometría del péndulo físico aparece en el valor de I_{cm}; por ejemplo, para una varilla delgada (con el eje de oscilación perpendicular a la longitud) es $I_{cm} = \frac{mL^2}{12}$, para un disco delgado de radio R (con el eje coincidiendo con el eje de simetría) es $I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$, para un cilindro sólido (con el eje de oscilación perpendicular a la longitud) es $I_{cm} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12}$, etcétera.

Escogiendo en forma adecuada la geometría del objeto que actuará como péndulo (es decir, escogiendo I_{cm}) y el valor de r, se puede tener un péndulo con el periodo que se quiera (igual o mayor que el mínimo) según indica la fórmula (24).

Casos particulares

1. Péndulo simple. La fórmula (24) predice correctamente el periodo de un péndulo simple pues en este caso $I_{cm}=0$, ya que se trata de una masa puntual amarrada a un hilo ideal de longitud $r = l$, se reproduce el resultado (20).

2. Varilla delgada. Para el caso particular de una varilla de masa m y longitud L $\left(I_{cm} = \frac{mL^2}{12} \right)$ la fórmula (24) para el periodo se convierte en

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + r^2}{gr}} \ .$$

Para el caso de una varilla de un metro de longitud, esta fórmula puede escribirse como

$$\frac{g}{4\pi^2}T^2 = \frac{\frac{1}{12}+r^2}{r}. \qquad (26)$$

La curva de esta expresión como una función de r, que es la separación entre el pivote y el centro de masa, aparece en la figura 14.8. Las características principales de la curva son el comportamiento asintótico a infinito al acercarse r al valor cero y el mínimo que tiene en r^* igual a $\sqrt{\frac{1}{12}}$ ≈0.29 (ver fórmula (25)). El valor de la ordenada correspondiente al punto mínimo de la curva es $\left(\frac{g}{4\pi^2}T^2\right)_{\min}$ =0.5777 de donde se obtiene que el periodo mínimo de este péndulo físico es T_{min}≈1.53 segundos.

Este péndulo físico particular puede ser usado para determinar el valor de la aceleración de la gravedad en algún lugar de la superficie terrestre. Para ello sólo es necesario medir el periodo, la separación entre el centro de masa y el pivote, y usar la relación dada en (26). Este tratamiento del péndulo físico fue tomado de la referencia 1.

Por otra parte, a partir de las relaciones (23) o (24), las cuales son válidas para péndulos con cualquier geometría, se pueden determinar los momentos de inercia si se miden experimentalmente el periodo T y la distancia r.

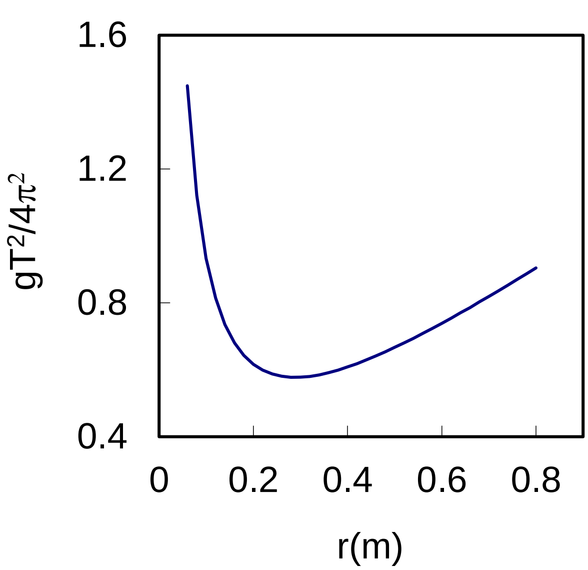
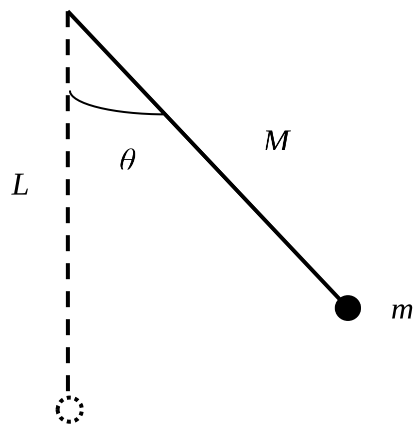


Figura 14.8. El periodo de oscilación de un péndulo físico tiene un valor mínimo cuando el eje de oscilación está a una distancia específica del centro de masa. La curva en esta figura corresponde al caso particular en que el péndulo físico está formado por una varilla delgada.

Ejemplo 3. Una varilla recta de radio despreciable, longitud L y masa M tiene unida en un extremo a una partícula puntual de masa m. Este sistema se hace oscilar en un plano vertical alrededor del extremo libre de la varilla. Determinar el periodo de oscilación del sistema para oscilaciones con ángulos pequeños.



Solución. Para aplicar la relación (23) es necesario conocer el momento de inercia I y la distancia r. Para este péndulo (compuesto por dos cuerpos) I es igual a la suma de los momentos de inercia de la varilla y de la partícula; r es la distancia entre el centro de masa y el eje de giro.

Para la varilla que gira respecto a un extremo, usando el teorema de ejes paralelos, el momento de inercia es $I_{\text{var}} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$. Para la partícula $I_{par} = mL^2$.

Por tanto, el momento de inercia del péndulo respecto al eje de oscilación es

$$I = I_{\text{var}} + I_{par} = \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2 .$$

La posición del centro de masa del péndulo, r, medido desde el pivote se calcula a partir de $(M + m)r = M\frac{L}{2} + mL$, de donde resulta que

$$r = \frac{\frac{M}{2} + m}{M + m}L$$

Ahora que ya se conocen el momento de inercia y la distancia entre el centro de masa y el pivote, para conocer el periodo de la oscilación, basta con sustituirlos en la relación (23)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}\ . \qquad (23)$$

Recuérdese que la cantidad *m* que aparece en esta ecuación (23) es la masa total del sistema (*M*+*m* en este ejemplo).

$\longleftarrow \qquad \longleftarrow \qquad \longleftarrow$

14.6 Oscilador armónico amortiguado

Hemos visto que las oscilaciones del movimiento armónico simple tienen amplitud constante. Sin embargo, la experiencia nos dice que la amplitud de un sistema oscilante, como un resorte-masa o un péndulo, disminuye gradualmente hasta que el sistema se detiene. Es decir, el movimiento oscilatorio real es amortiguado.

Para que se produzca este amortiguamiento, adicional a la fuerza elástica $F_1 = -kx$, debe existir una fuerza que se oponga al vector de la velocidad. Una fuerza con esta característica fue usada en el Capítulo 6 y se debe a las propiedades del medio donde el movimiento se produce. Supongamos que esta fuerza es proporcional a la magnitud de la velocidad *v* y que se escribe como $F_2 = -bv$, donde *b* es una cantidad constante positiva y el signo negativo se debe a que esta fuerza se opone a *v*. La suma de estas dos fuerzas sobre la partícula oscilante de masa *m* produce la aceleración de la partícula; es decir,

$$-kx - bv = ma\ . \qquad (27)$$

Reescribimos esta ecuación como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0\ . \qquad (28)$$

Ahora renombraremos a la frecuencia angular sin amortiguamiento como $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$ para recordar que es la frecuencia angular del oscilador armónico simple; con lo cual la ecuación que se tiene que resolver es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0\ . \qquad (29)$$

En lugar de intentar resolver formalmente esta ecuación, se escribirá su solución como

$$x = A\exp(-\frac{b}{2m}t)sen(\omega t + \beta)\,, \qquad (30)$$

donde A y β son constantes que se determinan usando las condiciones iniciales, exp es la función exponencial que (con el signo negativo en el argumento) describe a una cantidad que disminuye en el tiempo, el factor $sen(\omega t + \beta)$ describe la parte oscilante y la nueva frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\,. \qquad (31)$$

Se puede verificar por sustitución directa que la ecuación (30) es una solución de la ecuación diferencial (29). La ecuación (31) muestra que la frecuencia angular de las oscilaciones disminuye por el efecto del amortiguamiento; también muestra que esta solución es válida para cuando $\frac{b}{2m} < \omega_0$, lo cual significa amortiguamiento pequeño. Si el amortiguamiento es muy grande, siendo $\frac{b}{2m}$ mayor que ω_0, la frecuencia angular ω se vuelve imaginaria y en este caso no hay oscilaciones; esto significa que al ser desplazada la partícula y soltada, gradualmente se acerca a la posición de equilibrio sin oscilar.

La amplitud de las oscilaciones no es constante y está representada por $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$; debido al exponente negativo, la amplitud disminuye al aumentar el tiempo. En el movimiento amortiguado, la posición x como función del tiempo t se comporta como ilustra la figura 14.9, donde se han incluido la función exponencial decreciente (doble punto y raya), la función seno sin amortiguar (curva de rayas) y la función seno amortiguada (curva continua); para graficar estas funciones se usaron A=1 y β=0.

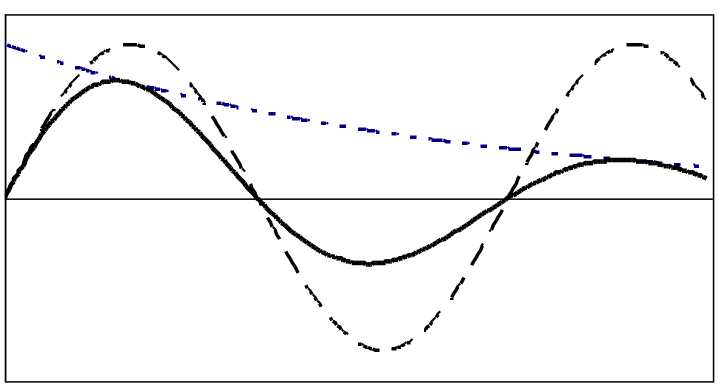


Figura 14.9. Oscilaciones amortiguadas.

14.7 Oscilador armónico forzado y resonancia

Ahora consideraremos un oscilador armónico amortiguado al cual aplicamos una fuerza periódica externa; por ejemplo, cuando empujamos un columpio cada vez que llega a donde estamos parados.

Supóngase una partícula sometida a una fuerza elástica (-*kx*), una fuerza de amortiguamiento (-*bv*) y una fuerza oscilante aplicada de la forma $F = F_0 \cos\omega_f t$ donde F_0 es la amplitud de la fuerza y ω_f es su frecuencia angular. La ecuación de movimiento de la partícula de masa *m* es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t. \qquad (32)$$

Esta ecuación difiere de la ecuación (29) en el segundo miembro. Sin resolver la ecuación puede decirse que en este caso la partícula no oscilará con la frecuencia angular sin amortiguar ω_0 ni con la frecuencia angular amortiguada $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. La partícula oscilará con la frecuencia angular ω_f de la fuerza *F*. Supóngase que una posible solución de la ecuación (32) tiene la forma

$$x = Asen(\omega_f t - \beta), \qquad (33)$$

donde, por conveniencia, se ha supuesto un ángulo de fase inicial negativo. Al sustituir la solución (33) en la ecuación (32), desarrollar las funciones $sen(\omega_f t - \beta)$ y $\cos(\omega_f t - \beta)$, y al igualar los coeficientes de $sen\omega_f t$ y $\cos\omega_f t$ se puede demostrar que la amplitud es

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega_f{}^2}} \qquad (34)$$

y el ángulo fase es

$$\tan\beta = \frac{\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2}{\frac{b}{m}\omega_f}. \qquad (35)$$

Obsérvese que tanto la amplitud como el ángulo fase dependen de la frecuencia angular ω_f de la fuerza aplicada. La solución (33) señala que las oscilaciones forzadas no están amortiguadas, pues tienen amplitud constante, y que su frecuencia angular es la de la fuerza aplicada. Esto significa que la fuerza aplicada supera a la fuerza de amortiguamiento, y proporciona la energía necesaria para mantener las oscilaciones (es como si al sistema se le diera "cuerda" a través de la fuerza aplicada).

La amplitud dada por la fórmula (34) es una cantidad constante si todos los parámetros que ahí aparecen son constantes. Supongamos que el valor de la frecuencia angular de la fuerza aplicada puede ser variado; es decir, nos preguntamos para qué valor de ω_f la amplitud es máxima, pues se observa en su fórmula que lo es cuando el denominador tiene un valor mínimo. Para conocer el valor de ω_f para el cual la amplitud es máxima se calcula la derivada de *A* respecto a ω_f y se iguala a cero, llamemos ω_r a ese valor; el resultado es

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}. \qquad (36)$$

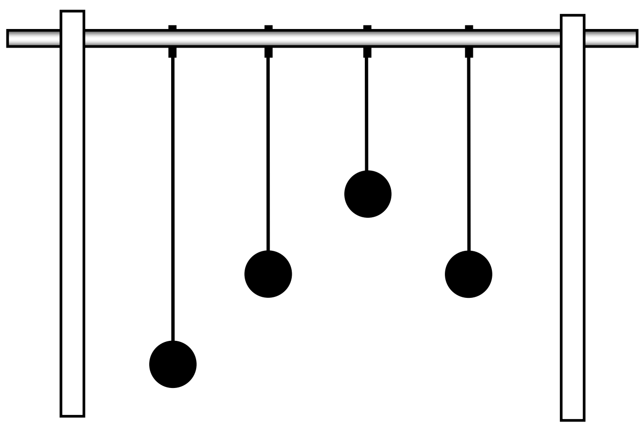
Cuando la frecuencia ω_f de la fuerza aplicada tiene este valor, entonces el valor de la amplitud es máximo y se dice que hay *resonancia* en la amplitud. Cuanto menor es el amortiguamiento más grande es el valor de ω_r y, por tanto, la resonancia es más pronunciada.

El fenómeno de resonancia se encuentra en muchas ramas de la física. Se observa cuando un sistema es sometido a una acción externa que varía periódicamente con el tiempo. Por ejemplo, un padre que empuja a su hijo en un columpio encuentra que con cada empujón sucesivo el columpio sube a mayor altura. La resonancia ocurre cuando un agente externo (el padre) empuja al sistema (columpio-niño) con una fuerza periódica teniendo la misma frecuencia que la frecuencia natural del sistema mismo. La frecuencia natural es la misma con la cual el sistema oscila si es desplazado de su posición natural de equilibrio y luego soltado para realizar el movimiento de vaivén. Si la fuerza externa está sincronizada con la frecuencia natural, puede pensarse que el columpio está siendo acelerado en su dirección natural de movimiento. Cuando la dirección natural de movimiento cambia en los puntos de retorno de la trayectoria, también lo hace la fuerza. Esta fuerza causa que tanto el desplazamiento como la velocidad máxima se incrementen continuamente y eventualmente llegan a ser muy grande. Esta magnitud extrema del desplazamiento y de la velocidad es el aspecto más notable de la resonancia en un sistema mecánico. Para continuar con este ejemplo del columpio, a continuación examinaremos el acoplamiento de péndulos simples.

⟶ ⟶ ⟶

Ejemplo 4. De una vara cilíndrica en posición horizontal cuelgan varios péndulos, de los cuales sólo dos tienen igual longitud. Si uno de los dos péndulos de igual longitud se pone a oscilar en un plano vertical perpendicular al plano definido por los hilos de los otros péndulos, ¿qué sucederá a los otros péndulos?

Solución. La figura muestra varios péndulos con longitudes distintas acoplados a través de una vara horizontal soportada, por ejemplo, sobre los respaldos de dos sillas, o sobre una armazón apropiada. Con el propósito de impulsar a todos los péndulos con la misma fuerza, se cuelga de la vara otro péndulo (llamado péndulo impulsor) con longitud igual a uno de los ya amarrados y que va a actuar como la fuerza oscilatoria externa.



Se pone a oscilar el péndulo impulsor en un plano perpendicular al definido por los hilos. Inmediatamente se observa que el movimiento empieza a trasmitirse al otro de igual longitud; al cabo de poco tiempo este segundo péndulo, inicialmente en reposo, oscila con una amplitud relativamente grande pero menor que la dada al impulsor; después este segundo péndulo empieza a trasmitir (regresar) su movimiento al impulsor y así sucesivamente los movimientos se alternan. El segundo péndulo no alcanza la máxima amplitud del primero porque a su vez el segundo, desde que empieza a oscilar, actúa como fuerza externa sobre el primero. La máxima amplitud de los otros péndulos es muy pequeña comparada con la amplitud de los péndulos iguales.

Al estar oscilando el péndulo impulsor, debido al acoplamiento a través de la vara, los demás péndulos están sujetos a una fuerza oscilatoria externa proporcionada por el impulsor. Las fuerzas que actúan sobre cada uno de los péndulos son:

a) la fuerza restauradora que para ángulos pequeños es $-\frac{mg}{l_i}x$ donde l_i es la longitud del péndulo *i*-ésimo, x es el desplazamiento a lo largo del arco $x = l_i\theta$, m la masa de la plomada y g es la aceleración de la gravedad;

b) la fuerza de amortiguamiento del medio que la suponemos proporcional a la velocidad, -*bv*, siendo b una constante positiva;

c) la fuerza oscilatoria externa que suponemos es de la forma $F = F_0 \cos\omega_f t$, donde F_0 es su amplitud, ω_f su frecuencia angular y t el tiempo.

Por tanto, la ecuación de movimiento es (compárese con la ecuación (32))

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l_i}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t. \qquad (37)$$

La solución es una función oscilatoria con frecuencia angular ω_f y con amplitud

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f{}^2 - \omega_i{}^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_f{}^2}} \qquad (38)$$

donde

$$\omega_i^2 = \frac{g}{l_i}$$

es la frecuencia angular natural de oscilación del péndulo con longitud l_i. La amplitud es máxima cuando el denominador en la ecuación (38) es mínimo; este máximo ocurre cuando $\omega_f = \omega_r$. La amplitud A es máxima cuando la frecuencia de la fuerza del péndulo impulsor es igual a la frecuencia de resonancia dada por la expresión (36):

$$\omega_r{}^2 = \omega_i{}^2 - \frac{b^2}{2m^2}.$$

Cuando la frecuencia angular de la fuerza aplicada es igual a ω_r se produce un máximo muy pronunciado en la amplitud de la oscilación y se dice que se produce el fenómeno llamado resonancia. A ω_r se le llama frecuencia de resonancia. En el caso de un amortiguamiento débil, es decir, cuando la constante de amortiguamiento b es muy pequeña, entonces la frecuencia de resonancia ω_r tiene un valor muy cercano a la frecuencia natural no amortiguada ω_i. Esto explica el por qué, en este caso de los péndulos acoplados, son distintas las amplitudes de oscilación de los péndulos forzados. Al poner a oscilar el péndulo impulsor, los otros péndulos también empiezan a oscilar debido a su acoplamiento a través de la vara; sin embargo, de todos los péndulos forzados a oscilar, el que oscila con mayor amplitud es el que tiene la misma longitud que el impulsor y, por tanto, la misma frecuencia natural de oscilación. Este ejemplo fue tomado de la referencia 2.

$\longleftarrow \quad \longleftarrow \quad \longleftarrow$

Recapitulación

El cuerpo que realiza movimiento periódico unidimensional se llama oscilador armónico; si los valores extremos del desplazamiento equidistan de la posición de equilibrio, se llama oscilador armónico simple. La ecuación de movimiento es $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$; la solución debe adquirir el mismo valor en cada tiempo múltiplo del período T.

Una solución para x es $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$ **(3)**. A, ω y φ son constantes; la amplitud A es la magnitud del desplazamiento máximo; $\omega t+\varphi$ es la *fase*; φ es la constante de fase. Se exige que $x(t)$ repita su valor después de transcurrir un tiempo T, los valores de las funciones seno y coseno se repiten cada 2π radianes. El desplazamiento se repite después de un tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Relacionada con T está la frecuencia f; ω se llama frecuencia angular. La velocidad es $v(t) = -\omega Asen(\omega t + \varphi)$, **(7)** y la aceleración es $a(t) = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi)$.

La ecuación de movimiento de un resorte y una masa atada, figura 14.2, es $-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$. Al insertar la posición y la aceleración se obtiene $-kAcos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 Acos(\omega t + \varphi)$. Se ve que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ **(9)**, ω sólo depende de las características del sistema. El periodo y la frecuencia son $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{f}$. La fuerza del resorte ideal tiene asociada una función potencial $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, figura 14.5.

La energía mecánica es la suma de la energía potencial (U) más la energía cinética (K): $E=U+K$. Usando (3), la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi)$; usando (7) y (9), la energía cinética es $K = \frac{1}{2}kA^2sen^2(\omega t + \varphi)$. Al sumarlas resulta $E = \frac{1}{2}kA^2$, **(14)**. La energía mecánica total de una partícula en movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud y a una de las características del sistema. La ecuación (14) se reescribe como $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2$, de donde la velocidad es $v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$, su valor máximo ocurre en x=0 y su valor es nulo en $x = \pm A$, en los puntos de retorno.

Péndulo simple. Consta de una partícula de masa m suspendida del extremo de una cuerda ideal de longitud l, el otro extremo está fijo en un punto P. En la posición de equilibrio: P, la cuerda y la partícula están en una línea vertical. Si la masa y la cuerda se desplazan desde la posición de equilibrio y se sueltan, el sistema oscilará respecto a P y tendrá un movimiento periódico, figura 14.6. La cuerda forma un ángulo θ con la vertical, sobre m actúan la tensión de la cuerda y el peso. El peso produce la torca, $\tau_p = -lmgsen\theta$. La torca también es igual al momento de inercia respecto al eje ($I_P = ml^2$) multiplicada por la aceleración angular (α); usando $sen\theta \approx \theta$, se llega a $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$. Puede decirse que el movimiento del péndulo simple que oscila con ángulos pequeños es aproximadamente armónico simple.
Péndulo físico. Una barra de masa m y longitud L oscila respecto a un eje que pasa por un punto situado a una distancia r a lo largo de su longitud desde su cm, figura 14.7. El ángulo θ describe la posición a partir de la posición de equilibrio. Respecto al eje de oscilación el peso produce una torca que apunta hacia adentro de la página y tiene magnitud $mgrsen\theta$; hace que la barra se mueva hacia la posición de equilibrio. La ecuación de movimiento rotacional, con I el momento de inercia respecto al eje y usando $sen\theta \approx \theta$, se escribe como $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgr}{I}\theta = 0$. Es la ecuación de un oscilador armónico simple angular con frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}}$. Usando el teorema de ejes paralelos, el periodo es $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + mr^2}{mgr}}$.

La amplitud disminuye debido a una fuerza que se opone a la velocidad. Suponer que esa fuerza es $F_2 = -bv$, con b una constante. Sea la frecuencia angular sin amortiguar $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, la ecuación que hay que resolver es $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$. La solución es $x = Aexp\left(-\frac{b}{2m}t\right)sen(\omega t + \beta)$; donde *exp* es la función exponencial, $sen(\omega t + \beta)$ es la parte oscilante; la frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ disminuye por el efecto amortiguador.

Suponer un cuerpo sometido a tres fuerzas: una elástica, una de amortiguamiento y una oscilante de la forma $F = F_0 cos\omega_f t$, F_0 la amplitud de la fuerza y ω_f su frecuencia. La ecuación a resolver es $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 cos\omega_f t$. El cuerpo oscilará con la frecuencia ω_f, la solución es $x = Asen(\omega_f t - \beta)$; A y β dependen de ω_f. El valor de ω_f para el cual la amplitud es máxima se calcula derivando A respecto a ω_f y se iguala a cero, llamemos ω_r a ese valor. Cuando ω_f tiene ese valor se dice que hay resonancia en la amplitud.

Bibliografía

1. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la Resolución de Problemas. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2005. Capítulo 18.

2. Manzur Guzmán, A. *Experimentos de Demostración. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Segunda edición. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2009. Capítulo 25.

Problemas

1. Un trozo de metal conectado a un resorte se mueve con movimiento armónico simple de amplitud A. Si la amplitud se reduce a la mitad, ¿cómo se modifica la energía total?, ¿cambia la frecuencia?.

2. Un cuerpo de masa conocida oscila armónicamente ligado a un resorte. La magnitud de la aceleración es máxima, ¿cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio o cuando se encuentra en la máxima amplitud?

3. Un cuerpo de masa m se cuelga de un resorte vertical y se pone a oscilar. El periodo de la oscilación se mide y se registra como T. El cuerpo de masa m se retira y se sustituye por un cuerpo de masa 2m. Cuando este cuerpo se pone a oscilar, calcular el periodo del movimiento.

4. Dos osciladores están descritos por $x_1(t) = x_m \cos(\omega t+\pi/2)$ y $x_2(t) = x_m \cos(\omega t)$. ¿Qué puede decirse del movimiento de ambos respecto a la constante de fase?

5. El desplazamiento de una partícula oscilante está dado por la expresión $x=4.0 \cos(3.0 \pi t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determinar a) la frecuencia y el periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase y d) el desplazamiento de la partícula en t = 0.25 s

6. Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple a lo largo del eje X. Su posición varía con el tiempo (dado en segundos) de acuerdo a la ecuación: $x(t) = 6.00 \text{ m} \cos((3\pi/\text{s})\, t + \pi)$. a) Determine la amplitud, la frecuencia y el periodo del movimiento. b) Calcule la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier tiempo t. c) Determine la posición, velocidad y aceleración del cuerpo en t = 1.0 s. d) Encuentre el desplazamiento del cuerpo entre t = 0 s y t = 1.0 s.

7. Un cuerpo oscila con un movimiento armónico simple de acuerdo a la ecuación x= 4 m sen [(85 rad/s)t + 2 rad]. Determinar a los 3 segundos a) el desplazamiento, b) la velocidad y c) la aceleración. Determinar d) la velocidad máxima y e) la aceleración máxima.

8. Una partícula de 10 kg oscila con un movimiento armónico simple de 2 mm de amplitud y 8 km/s^2 de aceleración máxima. Encontrar a) su periodo, b) su velocidad máxima y c) su energía mecánica total.

9. Una masa de 0.5 kg, unida a un resorte de 8.0 N/m de constante de fuerza, oscila en un movimiento armónico simple con una amplitud de 10 cm. Calcular a) el periodo del movimiento, b) el valor máximo de la velocidad y de la aceleración, c) el valor máximo de la energía cinética y de la energía potencial.

10. Una masa de 0.50 kg unida a un resorte de constante de fuerza de 8.0 N/m vibra en un movimiento armónico simple con una amplitud de 10 cm. Calcular a) el valor de la velocidad y la aceleración cuando la masa está a 6.0 cm desde su posición de equilibrio, b) el tiempo que tarda en moverse de x = 8 cm a x = 0 cm.

11. Una masa, atada a un resorte sobre una mesa horizontal sin fricción, oscila con un movimiento armónico simple de amplitud A. a) ¿En qué posición del bloque son sus energías cinética y potencial iguales? b) Cuando x = A/2, ¿qué fracción de la energía total es energía cinética y qué fracción es energía potencial?.

12. Un pistón se mueve verticalmente con movimiento armónico simple; encima del pistón se coloca un bloque. a) Si el periodo del MAS es de 1.0 s, ¿en qué valor de la amplitud se separarán el bloque y el pistón? b) Si la amplitud del pistón es de 5.0 cm, ¿cuál es el valor máximo de la frecuencia para la cual el bloque y el pistón no se separarán?

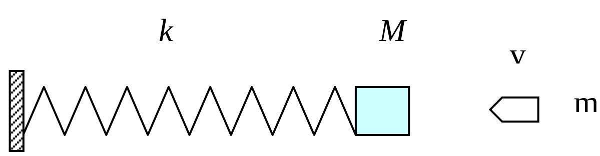
13. Un oscilador consta de un bloque unido a un resorte ligero de constante k = 500 N/m. El bloque puede deslizarse sin fricción sobre una mesa horizontal, el otro extremo del resorte está unido a una pared. En un cierto tiempo t_1, la posición del bloque (medida desde el punto de equilibrio), su velocidad y su aceleración son x_1= 0.1 m, v_1 = -10 m/s y a_1 = -100 m/s^2. Calcular a) la frecuencia, b) la masa del bloque y c) la amplitud de la oscilación.

14. Un sistema oscilante, formado por un bloque y un resorte, tiene una energía mecánica de 1.0 J, una amplitud de 10.0 cm y una velocidad máxima de 1.20 m/s. Encontrar a) la constante del resorte, b) la masa del bloque y c) la frecuencia de oscilación.

15. Un bloque de 200 g de masa está unido a un resorte horizontal y ejecuta un movimiento armónico simple con periodo de 0.25 s. Si la energía total del sistema es 2.0 J, entonces calcular a) la constante del resorte, b) la amplitud del movimiento.

16. Un bloque de masa *M*, en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está unido a un soporte rígido por medio de un resorte de constante de fuerza *k*. Una bala de masa m y velocidad v golpea al bloque como se muestra. La bala queda dentro del bloque. Determinar la amplitud del movimiento armónico simple resultante en términos de m, *M*, v y *k*.

Figura 14.10. Problema 16.



17. Un sistema bloque-resorte puede oscilar horizontalmente con un extremo del resorte fijo mientras que el bloque se puede deslizar sobre una mesa horizontal sin fricción. La constante

del resorte es de 100.0 N/m y la masa del bloque es de 1.0 kg. Si inicialmente el resorte se comprime 1.0 cm y se le imprime una velocidad de 0.2 m/s dirigida hacia el punto de equilibrio, calcular a) la frecuencia de oscilación del sistema, b) la rapidez máxima del bloque y la posición donde esto ocurre, c) la energía cinética del bloque y la energía potencial del resorte cuando se alcanza la rapidez máxima.

18. Dos resortes de constantes k_1 y k_2 están unidos a dos lados opuestos de un bloque de masa m que puede deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción, los otros extremos de los resortes están unidos a soportes fijos, como se muestra. Calcular la frecuencia de oscilación.

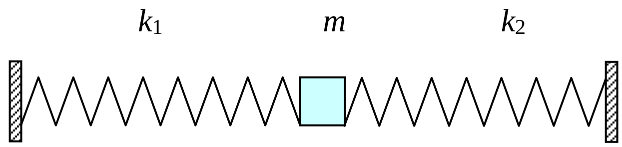


Figura 14.11. Problema 18.

19. Un cuerpo de masa desconocida se une a un resorte de masa despreciable, el cual obedece la ley de Hooke con una constante de fuerza k=140 N/m. Se observa que el cuerpo oscila horizontalmente con una frecuencia f = 70 Hz y que las oscilaciones tienen una amplitud de 0.010 m. Calcular a) el periodo de oscilación y la frecuencia angular; b) la masa del cuerpo; c) la aceleración máxima de dicha masa y la fuerza correspondiente ejercida por el resorte.

20. ¿Qué le ocurre al periodo de un péndulo simple si se cuadruplica su longitud?

21. Un péndulo simple con longitud de 2.23 m y masa de 6.74 kg recibe una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que describe un movimiento armónico simple y determine a) su periodo, b) su energía total y c) su máximo desplazamiento angular.

22. Un péndulo simple consiste en un cuerpo de masa m= 0.10 kg suspendido por una cuerda ligera de longitud L= 1.50 m. Si al tiempo t=0 el péndulo se encuentra en reposo y desviado de la vertical por el ángulo θ_0 = 0.1 rad, encontrar a) la frecuencia angular natural del péndulo; b) la ecuación para el ángulo de desviación como función del tiempo, $\theta(t)$; c) el valor constante de la energía mecánica total del sistema.

23. Un péndulo físico consta de un disco sólido uniforme de masa m y radio R soportado en un plano vertical por un pivote situado a una distancia d del centro del disco. El disco se desplaza un pequeño ángulo y luego se suelta. Hallar el período del movimiento armónico simple resultante.

24. Un cilindro sólido de masa M y radio R se acopla a un resorte de constante elástica k y se coloca sobre una superficie rugosa, de manera que el cilindro siempre rueda sin resbalar. Se da un desplazamiento angular pequeño al cilindro de manera que empieza a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Obtener la frecuencia característica de oscilación.

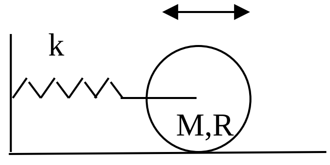


Figura 14.12. Problema 24.

15 ONDAS

> El sonido es un ejemplo de onda mecánica. Cada vez que se hace sonar un instrumento musical, tanto el instrumento que causa el sonido, como el aire que lo rodea y los tímpanos de quien lo escucha, todo vibra en vaivén (movimiento ondulatorio).

Introducción

Las ondas son señales o perturbaciones que se producen en forma natural o artificial. En forma natural como las ondas sísmicas debidas a los terremotos, las ondas sonoras causadas por las caídas de agua, los animales y los seres humanos. En forma artificial como las ondas eléctricas producidas en el laboratorio, las ondas sonoras producidas por instrumentos musicales. Al ser transmitidas, las ondas transportan información; por ejemplo, las ondas sísmicas y los sonidos.

La onda es una perturbación que se propaga de un punto a otro de un medio haciéndolo oscilar a su paso, aunque sin provocar en el medio ningún desplazamiento permanente; la perturbación puede propagarse en forma de vibraciones de la materia gaseosa, líquida o sólida (este es el caso de las ondas mecánicas) o sin necesidad alguna de soporte material (esto sucede con las ondas electromagnéticas).

15.1 Tipos de ondas

El medio ambiente que nos rodea está lleno de ondas, siendo los dos tipos principales: el de ondas elásticas o mecánicas, y el de ondas electromagnéticas. Las elásticas son gobernadas por las leyes de la mecánica y sólo pueden existir dentro de un medio material; por ejemplo, ondas sonoras y sísmicas que pueden ser transmitidas en medios sólidos, líquidos o gaseosos. Las ondas electromagnéticas no requieren necesariamente de un medio material para existir, también pueden viajar en el vacío; por ejemplo, luz visible y ultravioleta, ondas de radio y televisión, rayos X. En este capítulo se estudiarán sólo ondas mecánicas, pero los conceptos se aplican también a las electromagnéticas.

15.2 Ondas transversales y ondas longitudinales

Las ondas mecánicas se clasifican en ondas *transversales* y en ondas *longitudinales* según sea el movimiento de las partículas del medio respecto a la dirección de propagación de la onda. Son transversales como las que se producen en una cuerda tensa amarrada por un extremo; si en el extremo libre se aplica una sola vez un movimiento de arriba y abajo, se forma un pulso que viaja a lo largo de la cuerda (ver figura 15.1).

Al aplicar continuamente varios movimientos rítmicos de arriba a abajo con características de movimiento armónico simple, se produce una onda continua que viaja a lo largo de la cuerda con una velocidad *v*. Debido a que el movimiento aplicado tiene la forma de una función senoidal en el tiempo, la forma de la onda que se observa en la cuerda (al tomarle una fotografía) es de una función seno (ver figura 15.2). Al pasar la onda por cada punto de la cuerda, el punto se mueve de arriba a abajo, en la dirección perpendicular a la dirección de la cuerda; el movimiento del punto es transversal a la dirección de propagación de la onda y es por ello que se llama onda transversal.

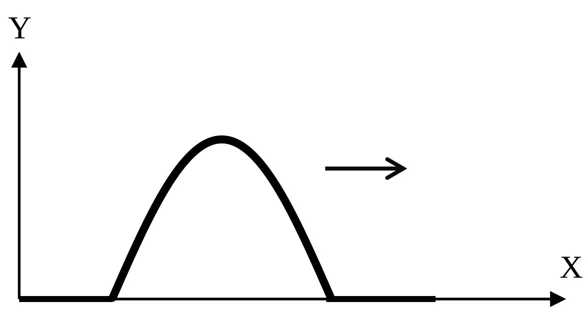


Figura 15.1. Un pulso producido en una cuerda tensa.

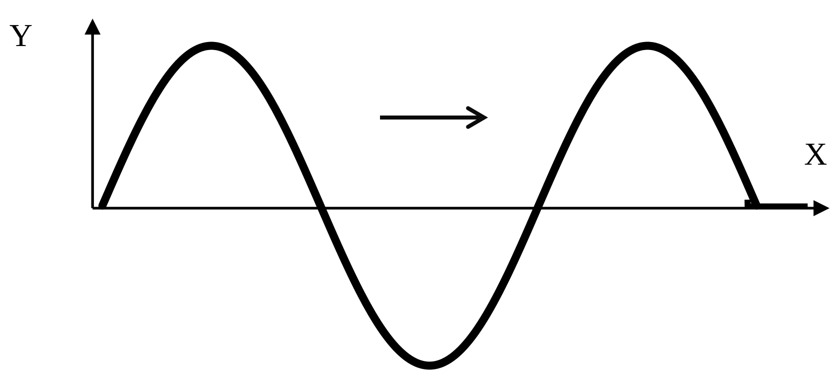


Figura 15.2. Forma de una onda senoidal que viaja en una cuerda tensa.

En contraste con las transversales, en las ondas longitudinales las partículas del medio se mueven en la dirección en que la señal se propaga. Esto sucede cuando en un tubo lleno de aire (o una jeringa) se empuja un pistón (o el émbolo) hacia adentro del tubo y luego se saca, es posible enviar un pulso a lo largo del tubo. Al empujar el pistón, las partículas del aire que están frente a él se mueven en la misma dirección, lo cual hace que localmente la presión del aire cambie. La mayor presión del aire empuja entonces a los elementos de aire cada vez más lejos a lo largo del tubo. Al sacar el pistón se reduce la presión de aire que hay junto a él haciendo que los elementos de aire regresen. De esta manera, el movimiento del aire y el cambio en la presión de aire viajan a lo largo del tubo como un pulso. Si el pistón es empujado y sacado con movimiento armónico simple, se produce una onda senoidal que viaja a lo largo del tubo. Como las partículas de aire tienen movimiento paralelo a la dirección en que la onda viaja a lo largo del tubo, se dice que su movimiento es longitudinal y que la onda es longitudinal.

Se dice que ambas ondas elásticas, transversales o longitudinales, son *viajeras* porque viajan de un punto a otro en el medio (cuerda o aire). Es importante enfatizar que las ondas viajan por el medio, pero las partículas del medio no se propagan con la onda. Las partículas del medio oscilan en dirección perpendicular o paralela a donde se propagan las ondas. Ahora nos dedicaremos a estudiar ondas transversales y para visualizarlas usaremos ejemplos de ondas en cuerdas tensas.

15.3 Parámetros que caracterizan a una onda

En la descripción completa de una onda en una cuerda se necesita una función que dé la forma de la onda y que también dé el movimiento de cada punto o elemento de la cuerda. Es decir, se necesita una función de la forma $y = h(x,t)$, donde *y* es el desplazamiento transversal de cualquier elemento de la cuerda en función del tiempo *t*, y *x* es la posición del elemento a lo largo de la cuerda. En general, la función *h* puede ser una función seno, una función coseno o una combinación de ellas. Usaremos la función seno.

Imaginemos una onda senoidal que viaja en la dirección positiva del eje X. Al pasar la onda por sucesivos elementos o puntos de la cuerda, los puntos oscilan en dirección paralela al eje Y. En el tiempo *t*, el desplazamiento *y* del punto ubicado en la posición *x* está dado por

$$y(x,t) = Asen(kx - \omega t)\,. \qquad (1)$$

La onda senoidal es el ejemplo más sencillo de una onda periódica continua, y puede usarse para construir ondas más complejas. Debido a que esta función depende de *x* y de *t*, se puede utilizar para conocer los desplazamientos perpendiculares en función del tiempo *t* de cualquier punto de la cuerda en una posición fija. También se puede utilizar para conocer la forma de la onda en función de la posición *x* en cualquier tiempo fijo y conocer cómo cambia la forma de la onda a lo largo de la cuerda.

Dicho de otra manera, la función de onda $y(x,t)$ representa la coordenada *y* (la posición transversal) de cualquier elemento situado en la posición *x* en cualquier tiempo *t*. Además, si *t* es fijo (como, por ejemplo, en el caso de tomar una fotografía de la onda), digamos t^*, entonces la función de onda $y(x,t^*)$, a veces llamada forma de onda, define una curva que representa la forma geométrica real de la onda en ese tiempo t^*.

En la expresión (1), el parámetro *A* es la *amplitud* de la onda, representa la magnitud del máximo desplazamiento de los elementos de la cuerda desde sus posiciones de equilibrio a medida que la onda pasa por ellos. La cantidad entre paréntesis, $kx - \omega t$, es el argumento de la función seno y se le llama *fase*. Al pasar la onda por un elemento de cuerda que se encuentra en una posición particular *x*, la fase cambia en forma lineal con el tiempo *t*. Esto significa que el seno también cambia, el cual oscila entre los valores +1 y -1. La función seno y la fase dependiente del tiempo de una onda corresponden a la oscilación de un elemento de cuerda, y la amplitud, *A*, determina los desplazamientos extremos del elemento.

Longitud de onda y número de onda. Analicemos la ecuación (1) como una función sólo de la posición *x*, o sea, manteniendo el tiempo fijo en t^*. La función seno es una función periódica que se repite a sí misma cuando su argumento se incrementa en 2π radianes, de manera que la expresión (1) debe tener el mismo valor en *x* y en $x+2\pi$; es decir,

$$y(x,t^*) = Asen(kx - \omega t^*) = Asen(kx - \omega t^* + 2\pi) = Asen[k(x + \frac{2\pi}{k}) - \omega t^*]\,.$$

Esta expresión indica que la cantidad k tiene un significado especial pues al reemplazar x por $x+\frac{2\pi}{k}$ se obtiene el mismo valor para $y(x,\ t^*)$, como ilustra la figura 15.3. Por tanto, definimos

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}\,, \qquad (2a)$$

como la cantidad que hace que la onda se repita a sí misma cada longitud λ paralela a la dirección de avance de la onda. El punto en que el desplazamiento del elemento desde su posición normal es más alto, se llama cresta de la onda. La distancia de una cresta a la siguiente cresta se llama *longitud de onda*, λ. Más generalmente, la longitud de onda es la mínima distancia entre dos puntos homólogos cualesquiera de una onda (puntos con idénticas características, por ejemplo las crestas). Esta cantidad es una especie de "periodo espacial". La cantidad

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2b)$$

representa el número de longitudes de onda en la distancia 2π y se denomina *número de onda o número angular de onda*. Su unidad en el sistema SI es rad entre metro o m^{-1}.

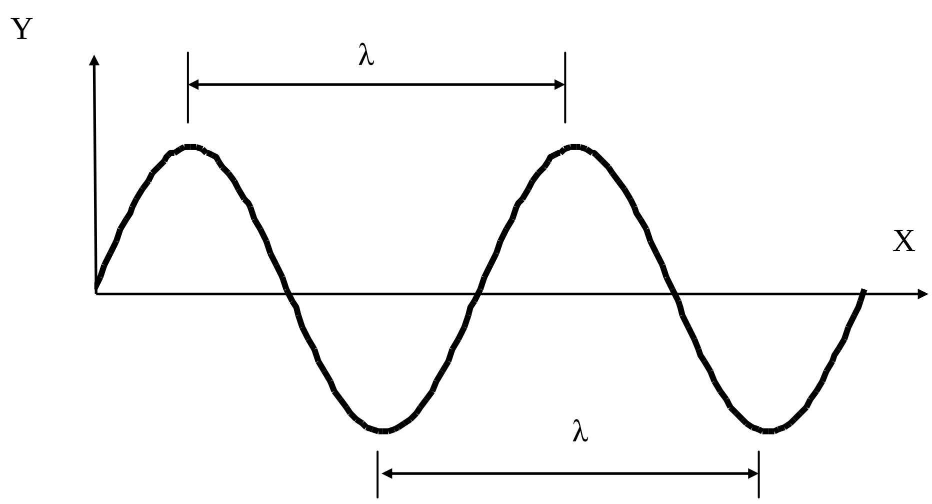


Figura 15.3. Desplazamiento en función de la posición. La longitud de onda es la distancia paralela al eje X entre dos puntos homólogos de la onda.

Periodo, frecuencia angular y frecuencia. De manera totalmente análoga, analicemos la expresión (1) como una función sólo del tiempo, manteniendo la posición fija en x^*. El seno es una función periódica que se repite a sí misma cuando su argumento se incrementa en 2π radianes, de manera que la ecuación (1) debe tener el mismo valor; es decir,

$$y(x^*,t) = Asen(kx^* - \omega t) = Asen(kx^* - \omega t + 2\pi) = Asen[kx^* - \omega(t - \frac{2\pi}{\omega})] .$$

Esta expresión indica que la cantidad ω también tiene un significado especial pues al reemplazar t por $t - \frac{2\pi}{\omega}$ se obtiene el mismo valor para $y(x^*, t)$, como se ilustra en la figura 15.4. Por tanto, definimos

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \text{(3a)}$$

como el tiempo que debe transcurrir para que la onda se repita a sí misma; este tiempo T se llama *periodo* (o *período*). Es el tiempo que cualquier elemento o punto de cuerda tarda en moverse una oscilación completa. Si se cuenta el tiempo entre las llegadas de dos crestas adyacentes en un punto dado en el espacio, se está midiendo el periodo T de las ondas. En general, el periodo es el intervalo de tiempo necesario para que dos puntos homólogos consecutivos (por ejemplo las crestas) de la onda pasen por un punto. El periodo de la onda es igual que el periodo de la oscilación armónica simple de un elemento del medio. A la cantidad

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(3b)}$$

se le llama *frecuencia angular* de la onda, su unidad es el radián por segundo (rad/s).

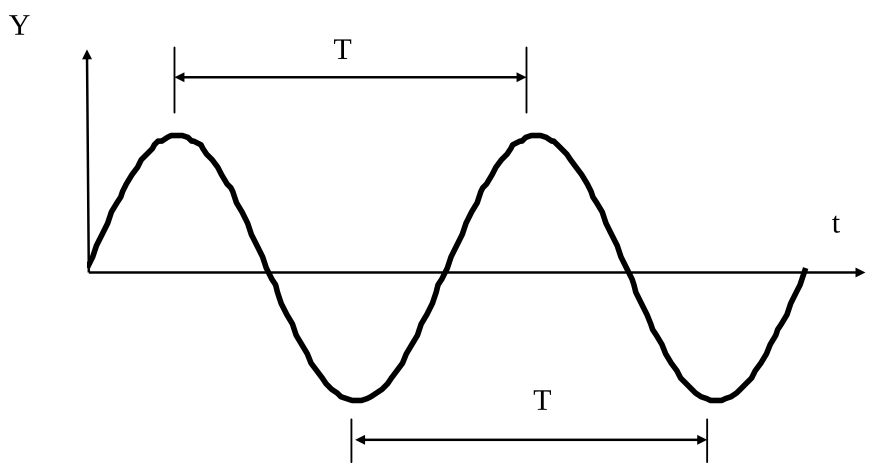


Figura 15.4. Desplazamiento en función del tiempo. El periodo T de la oscilación de la cuerda es el tiempo en que la onda pasa dos veces consecutivas por un mismo punto cualquiera de la cuerda.

Al inverso del periodo se le llama *frecuencia*: $f = \frac{1}{T}$. Esta frecuencia f representa el número de oscilaciones en la unidad de tiempo; es el número de oscilaciones de cada punto o elemento de cuerda que se produce a medida que la onda pasa por ahí. En general, la frecuencia de una onda periódica es el número de crestas (o valles, o cualquier otro punto de la onda) que pasa por un punto dado en un intervalo de tiempo unitario. Su unidad es s^{-1} o hertz (Hz). La frecuencia, el período y la frecuencia angular están relacionados a través de

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (4)$$

Constante de fase. Cuando se quiere desplazar la onda por una cantidad constante, al argumento (o fase) de la función seno de la ecuación (1) se agrega una cantidad constante φ llamada *constante de fase,* como se aprendió en el capítulo de Oscilaciones, quedando la ecuación (1) como

$$y(x,t) = Asen(kx - \omega t + \varphi). \qquad (5)$$

El valor de φ se puede escoger de manera que la función proporcione algún otro valor del desplazamiento y de la pendiente a la curva en x=0 y en t=0. Al agregar φ la forma de la onda senoidal no cambia, solamente es desplazada a lo largo del eje X.

Velocidad de una onda viajera. Se ha dicho que la onda representada por la ecuación (1) viaja en la dirección positiva del eje X. Veamos dónde aparece esa información. A medida que la onda se mueve, cada punto de la onda en movimiento, por ejemplo el punto máximo o cresta, retiene su desplazamiento y (se ve que la forma de la onda completa se desplaza). En cambio, los puntos sobre la cuerda no retienen su desplazamiento (oscilan en la dirección perpendicular a la cuerda). Si el punto máximo retiene su desplazamiento a medida que la onda se mueve, la fase de la ecuación (1) que da ese desplazamiento debe permanecer constante, es decir,

$$kx - \omega t = \text{una constante} \qquad (6)$$

Obsérvese que el argumento es constante, pero las cantidades x y t están cambiando y varían de tal forma que el argumento permanece con el mismo valor. A medida que el tiempo t

aumenta, la posición x también aumenta. Para calcular la velocidad de onda v, se calcula la derivada del argumento respecto al tiempo, obteniéndose

$$k\frac{dx}{dt}-\omega=0\,.$$

O sea que la velocidad es

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}\,. \qquad (7)$$

Al insertar las expresiones $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ y $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$, la velocidad de onda también se escribe como

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\lambda}{T}=\lambda f\,. \qquad (8)$$

La expresión $v=\dfrac{\lambda}{T}$ dice que la velocidad de onda es una longitud de onda entre un período; la onda se mueve una distancia igual a una longitud de onda en un tiempo igual a un período de oscilación.

La ecuación (1) describe una onda que se propaga en la dirección positiva del eje X. Para obtener la ecuación de una onda que se mueve en la dirección opuesta, basta con sustituir x por $-x$ en el argumento de la ecuación (1), lo cual equivale a la condición

$$kx+\omega t=\text{una constante}, \qquad (9)$$

que requiere que x debe decrecer con el tiempo. Por tanto, la ecuación de la onda que viaja en la dirección negativa del eje X es

$$y(x,t)=Asen(kx+\omega t)\,. \qquad (10)$$

Al repetir el análisis hecho para encontrar la velocidad de la onda que viaja en la dirección positiva, se obtiene que la onda que viaja en la dirección negativa del eje X tiene la velocidad

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{\omega}{k}\,. \qquad (11)$$

El signo menos indica que esta velocidad es correcta.

Usando las relaciones entre los diferentes parámetros, la ecuación de la onda que viaja en la dirección positiva del eje X puede ser escrita en varias formas equivalentes:

$$y(x,t)=Asen(kx-\omega t) \qquad (1a)$$

$$y(x,t)=Asen[k(x-vt)] \qquad (1b)$$

$$y(x,t) = Asen\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \qquad (1c)$$

En la forma expresada en la fórmula (1c) está de manifiesto la interpretación que hemos dado a *T* como un período temporal y a λ como un período espacial. Esta forma de la función de onda muestra la naturaleza periódica del desplazamiento *y*. En cualquier tiempo dado *t*, *y* tiene el mismo valor en las posiciones *x*, $x+\lambda$, $x+2\lambda$, y así sucesivamente. Además, en cualquier posición *x* dada, el valor del desplazamiento *y* es el mismo en los tiempos *t*, $t+T$, $t+2T$, y así sucesivamente. Es claro que si nos fijamos en un punto de la onda que corresponda a $x = \lambda$ y simultáneamente $t = T$, entonces se obtiene que el desplazamiento de ese punto es igual a cero, $y(\lambda, T) = 0$.

La ecuación de la onda que viaja en la dirección negativa del eje X se obtiene al sustituir el signo menos (-) en el argumento de estas expresiones por el signo más (+). La ecuación de estas ondas puede generalizarse para una onda de forma arbitraria escribiendo una función como

$$y(x,t) = h(kx \pm \omega t)\ . \qquad (12)$$

Donde *h* representa cualquier función, con la función seno como un caso particular.

$\longrightarrow \quad \longrightarrow \quad \longrightarrow$

Ejemplo 1. Una onda senoidal que se desplaza en la dirección X positiva tiene una amplitud de 15.0 cm, una longitud de onda de 40.0 cm y una frecuencia de 8.00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en t=0 y x=0 es también de 15.0 cm. a) Encontrar el número de onda *k*, el periodo *T*, la frecuencia angular *ω* y la rapidez *v* de la onda. b) Determinar la constante de fase φ y escribir una expresión general para esta función de onda.

Solución. a) Al aplicar las ecuaciones (2b), (4) y (8) se obtiene que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi rad}{40.0cm} = 0.157 rad/cm\ .$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00s^{-1}} = 0.125s\ .$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00s^{-1}) = 50.3 rad/s\ .$$

$$v = \lambda f = (40.0cm)(8.00s^{-1}) = 320 cm/s\ .$$

b) Al sustituir en la ecuación (5) los valores dados de las cantidades $y(0,0)$=15.0 cm, A=15.0 cm, x=0 y t=0, resulta

$$15.0 = (15.0)sen\varphi \Rightarrow sen\varphi = 1.$$

Se puede tomar el valor φ=π/2 rad (o 90º). Por tanto, la función de onda es de la forma

$$y(x,t) = Asen(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) = A\cos(kx - \omega t).$$

Al sustituir los valores de *A*, *k* y *ω*, se obtiene

$$y(x,t) = (15.0cm)\cos((0.157rad/cm)x - (50.3rad/s)t),$$

con *x* en cm y *t* en s.

⟵ ⟵ ⟵

Velocidad transversal y aceleración transversal. La velocidad transversal *u* de un elemento o punto de la cuerda es la velocidad asociada con la oscilación transversal, está en la dirección del eje Y. El desplazamiento del elemento está representado por la ecuación (1), de tal manera que la rapidez con la que este elemento se mueve se obtiene calculando la derivada parcial del desplazamiento respecto al tiempo, manteniendo fija su ubicación *x*. Resulta que

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[Asen(kx - \omega t)\right] = -\omega A\cos(kx - \omega t). \qquad (13)$$

No confundir las velocidades, *v* es la rapidez de la onda cuando se propaga a lo largo de la cuerda, y *u* es la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez *v* es constante, mientras que *u* varía cosenoidalmente.

La aceleración transversal a_y es la rapidez con que el elemento cambia su velocidad transversal. La aceleración del elemento ubicado en la posición fija *x*, con velocidad transversal *u*, es

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 Asen(kx - \omega t). \qquad (14)$$

Al comparar este resultado (14) con la ecuación (1), es claro que la aceleración transversal de un elemento de la cuerda en oscilación es proporcional a su desplazamiento transversal, pero con signo opuesto:

$$a_y = -\omega^2 y. \qquad (15)$$

Este resultado era de esperarse pues el elemento se está moviendo transversalmente con movimiento armónico simple. La rapidez transversal y la aceleración transversal de un mismo elemento de la cuerda no alcanzan simultáneamente sus valores máximos. La rapidez transversal alcanza su valor máximo (ωA) cuando y=0 (que corresponde a cuando el coseno tiene el valor -1 en $kx-\omega t=\pi$), mientras que la magnitud de la aceleración transversal alcanza su valor máximo $(\omega^2 A)$ cuando $y=-A$, cuando la función seno tiene el valor +1 en $kx-\omega t=\pi/2$.

Ejemplo 2. La ecuación de una onda transversal que viaja por una cuerda es

$$y(x,t)=(2.0mm)sen[(20m^{-1})x-(600s^{-1})t].$$

Encontrar a) la amplitud, la frecuencia, la velocidad (incluyendo signo) y la longitud de onda de la onda. b) Encontrar la máxima rapidez transversal de una partícula de la cuerda.

Solución. a) Amplitud. Se puede usar la forma de la onda expresada en cualquiera de las ecuaciones (1a), (1b) o (1c), en todas ellas se observa que el valor de la amplitud es A=2.0 mm.

Frecuencia. El coeficiente de t es la frecuencia angular (ω=600 s^{-1}) y usando la ecuación (4) se obtiene que la frecuencia es $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{600s^{-1}}{2\pi}=95.5s^{-1}=95.5Hz.$

Velocidad. El coeficiente de x es el número de onda (k=20 m^{-1}) y usando la ecuación (2a) se obtiene que la longitud de onda es $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{20m^{-1}}=0.31m.$ Ahora, combinando este resultado con el de la frecuencia se obtiene que la velocidad, ecuación (8), es

$$v=\lambda f=(0.31m)(95.5s^{-1})=29.6m/s.$$

Longitud de onda. Este valor ya fue calculado usando la ecuación (2a):

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{20m^{-1}}=0.31m.$$

b) Máxima rapidez transversal. La velocidad transversal se obtiene al aplicar la ecuación (13):

$$u=\frac{\partial}{\partial t}y(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}(2.0mm)sen[(20m^{-1})x-(600s^{-1})t]=-(600s^{-1})(2.0mm)\cos[(20m^{-1})x-(600s^{-1})t].$$

El valor máximo de la rapidez transversal es $|u_{\max}|=(600)(2.0)mm/s=1.200m/s.$

15.4 Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio

Se ha dicho que la ecuación (12) representa una onda de forma arbitraria siendo la función seno una en particular. Ahora se quiere obtener la ecuación que debe satisfacer esa función *h*, cuyo argumento puede expresarse en cualquiera de las formas dadas en las ecuaciones (1a) a (1c). Al argumento de la función *h* le llamaremos *z*, de manera tal que *h* es una función de *z* ($h(z)$) y que *z*, a su vez, es una función de dos variables: *x* y *t* ($z = kx \pm \omega t$). Ahora podemos escribir la ecuación (12) como

$$y(x,t) = h(z), \qquad (16)$$

con

$$z = kx \pm \omega t. \qquad (17)$$

Para calcular la derivada de *y* respecto a la variable *x* y la derivada de *y* respecto a la variable *t*, se debe usar la regla de la derivación en cadena. Es decir debemos usar derivadas parciales:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial x},$$

análogamente

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Al calcular las derivadas parciales de *z* respecto a *x* ($\frac{\partial z}{\partial x} = k$) y respecto a *t* ($\frac{\partial z}{\partial t} = \pm\omega$), se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dh}{dz}(k) = k\frac{dh}{dz},$$

análogamente

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dh}{dz}(\pm\omega) = \pm\omega\frac{dh}{dz}.$$

Calculando ahora las derivadas segundas, se obtiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{d}{dz}\left(k\frac{dh}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = k^2\frac{d^2h}{dz^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{d}{dz}\left(\pm\omega\frac{dh}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = (\pm\omega)^2\frac{d^2h}{dz^2}.$$

Combinando estos dos últimos resultados para eliminar la segunda derivada de *h* respecto a *z*, se obtiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

pero usando la relación representada en (7) o en (11), finalmente se llega a que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (18)$$

En esta ecuación (18) la cantidad *v* es la velocidad con que la onda se propaga a lo largo del eje X. Esta es la *ecuación de onda* que satisface la ecuación (12)

$$y(x,t) = h(kx \pm \omega t) \qquad (12)$$

sin importar la forma que tenga la función *h*, pero sí es importante que tenga ese argumento.

Podemos verificar que la onda particular dada en la ecuación (1) satisface la ecuación de onda dada en la ecuación (18). Las derivadas parciales de $y(x,t) = Asen(kx - \omega t)$ con respecto a *x* y respecto a *t*, identificando a $h(z) = Asenz$ y a $z = kx - \omega t$, son

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t).$$

Las segundas derivadas parciales, respectivamente, son

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = -k^2 Asen(kx - \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = -\omega^2 Asen(kx - \omega t).$$

De aquí se observa que la ecuación (18) se satisface, pues *k* y *ω* están relacionadas por la ecuación (7) u (11).

⟶ ⟶ ⟶

Ejemplo 3. Usar la ecuación de onda para hallar la velocidad de una onda dada en términos de la función general $h(x,t)$:

$$y(x,t) = (4.00mm)h[(30m^{-1})x - (6.0s^{-1})t].$$

Solución. Si llamamos *z* al argumento de la función *h*, la función queda como *y*=(4.00 mm)*h*(*z*). La primera derivada respecto a la posición y la primera derivada respecto al tiempo, respectivamente, son

$$\frac{\partial y}{\partial x}=(4.00mm)\frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=(4.00mm)(30m^{-1})\frac{dh}{dz},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=(4.00mm)\frac{dh}{dz}\frac{\partial z}{\partial t}=(4.00mm)(-6.0s^{-1})\frac{dh}{dz}.$$

Usando el mismo procedimiento para calcular la segunda derivada respecto a *x* y respecto a *t*, se obtiene, respectivamente, que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(4.00mm)(30m^{-1})\frac{dh}{dz}\right]=\frac{d}{dz}\left[(4.00mm)(30m^{-1})\frac{dh}{dz}\right]\frac{\partial z}{\partial x}=(4.00mm)(30m^{-1})^2\,\frac{d^2h}{dz^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[(4.00mm)(-6.0s^{-1})\frac{dh}{dz}\right]=\frac{d}{dz}\left[(4.00mm)(-6.0s^{-1})\frac{dh}{dz}\right]\frac{\partial z}{\partial t}=(4.00mm)(-6.0s^{-1})^2\,\frac{d^2h}{dz^2}.$$

Con estos dos últimos resultados puede escribirse la segunda derivada de *h* respecto a *z* como

$$\frac{d^2h}{dz^2}=\frac{1}{(4.00mm)(30m^{-1})^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{(4.00mm)(-6.0s^{-1})^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

De aquí se obtiene que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\left(\frac{1}{5}m/s\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Esta expresión tiene la forma de la ecuación (18); por tanto, la velocidad de la onda es *v*=0.2 m/s.

15.5 Velocidad de la onda en una cuerda tensa

La velocidad de una onda está determinada por las propiedades del medio en que se propaga. Al viajar una onda a través de un medio material como agua, aire, acero o una cuerda tensa, hace que las partículas del medio oscilen a medida que pasa. Para que esto suceda, el medio debe poseer masa y elasticidad, estas propiedades del medio determinan la velocidad de la onda. A continuación se calculará la velocidad en una onda en una cuerda sometida a una tensión T.

En condiciones de equilibrio la cuerda permanece en línea recta. Desplacemos la cuerda perpendicularmente a su longitud y fijémonos en un elemento de cuerda de longitud *dl* (cuya proyección a lo largo del eje X es *dx*), que se ha desplazado una distancia *y* de su posición de equilibrio, como ilustra la figura 15.5. En cada extremo actúa la tensión T, en dirección tangente; debido a la curvatura del elemento, las dos fuerzas no están en la misma línea recta. La componente paralela al eje Y de cada fuerza es $T_y = -Tsen\beta$ y $T'_y = Tsen\beta'$. De modo que sobre el elemento de cuerda la componente de la fuerza resultante es

$$F_y = T(sen\beta' - sen\beta). \qquad (19)$$

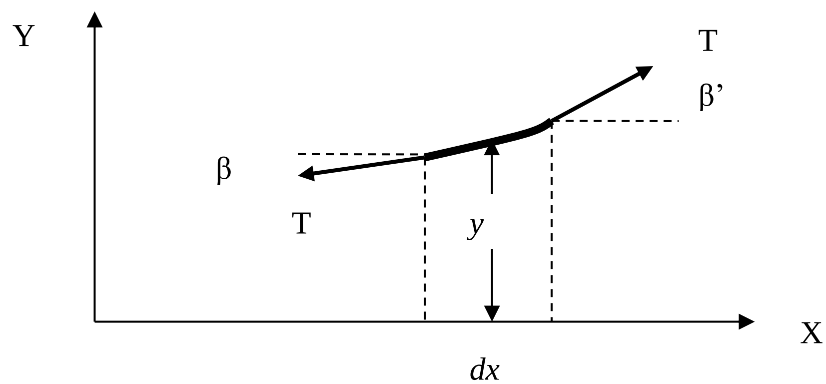


Figura 15.5. El elemento de cuerda está a una altura *y*, la tensión en el extremo derecho forma un ángulo β´ con una línea paralela el eje X, pero la tensión en el extremo izquierdo forma un ángulo β menor que β´.

Si la curvatura de la cuerda es pequeña, los ángulos β y β´ son pequeños y sus senos pueden ser reemplazados por sus tangentes. De este modo la componente F_y de la fuerza resultante se transforma en $F_y = T(\tan\beta' - \tan\beta)$. La diferencia de estas tangentes puede aproximarse a la diferencial de la función tangente, pero la diferencial de una función es igual a la derivada de la función respecto a la variable independiente multiplicada por la diferencial de la variable independiente, de manera que la fuerza es

$$F_y = T(\tan\beta' - \tan\beta) = Td(\tan\beta) = T\frac{\partial}{\partial x}(\tan\beta)dx.$$

En la última igualdad se usó la derivada parcial porque tanβ depende de x y de t. Debido a que tanβ, que es la pendiente de la recta formada por el elemento de cuerda, es igual a $\frac{\partial y}{\partial x}$, se tiene

$$F_y = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx.$$

Esta fuerza debe ser igual a la masa de la porción de cuerda de longitud *dl* multiplicada por su aceleración $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Llamemos μ a la *densidad lineal* de la cuerda (masa por unidad de longitud), de manera que la masa del elemento *dx* es μ*dx*. Al aplicar la segunda ley de Newton, resulta que $(\mu dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$. Finalmente se obtiene que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \qquad (20)$$

Es importante enfatizar que esta ecuación de onda resultó directamente de aplicar la segunda ley de Newton. Al comparar las ecuaciones (18) y (20), se encuentra que una onda transversal en una cuerda se propaga con una velocidad

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \qquad (21)$$

Esta ecuación señala que la velocidad de una onda a lo largo de una cuerda tensa depende solamente de la tensión y de la densidad lineal de la cuerda. Esta velocidad es válida siempre que se cumpla que la amplitud sea pequeña.

Obsérvese que al calcular la ecuación (20) solamente se tomó en consideración el movimiento transversal del elemento de cuerda. La fuerza resultante paralela al eje X es

$$F_x = T(\cos\beta' - \cos\beta). \qquad (22)$$

Pero cuando el ángulo es muy pequeño, el coseno es aproximadamente igual a uno. Por tanto, hasta aproximaciones de primer orden, $\cos\beta \approx \cos\beta'$ y F_x=0; de manera que la fuerza neta paralela al eje X es nula.

Ejemplo 4. La densidad lineal de una cuerda es de 1.6×10^{-4} kg/m. Una onda transversal sobre la cuerda la describe la ecuación $y(x,t) = (0.21m)sen[(2.0m^{-1})x + (30s^{-1})t]$.

¿Cuáles son la velocidad de la onda y la tensión de la cuerda?

Solución. El coeficiente de t es la frecuencia angular (ω=30 s^{-1}), por tanto $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{30s^{-1}}{2\pi}$.

El coeficiente de x es el número de onda (k=2.0 m^{-1}). La velocidad de la onda es

$$v = \lambda f = \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{30s^{-1}}{2.0m^{-1}} = 15.0m/s.$$

La ecuación (21) proporciona la relación entre la velocidad, la tensión y la densidad lineal. Por tanto, la tensión de la cuerda es

$$T = \mu v^2 = (1.6\times 10^{-4}kg/m)(15.0m/s)^2 = 0.036N.$$

←——— ←——— ←———

15.6 Energía de una onda viajera en una cuerda

Las ondas transportan energía cuando se propagan por el medio. Esto debe ser así porque para que se forme la onda en una cuerda, es necesario proporcionar energía a la cuerda. Al propagarse la onda, ella transporta energía en forma de energía cinética y de energía potencial elástica.

Consideremos una onda senoidal que viaja en una cuerda. La fuente de la energía es algún agente externo situado en un extremo de la cuerda, que realiza trabajo al producir oscilaciones. Podemos considerar que la cuerda es un sistema no aislado. Cuando el agente externo realiza trabajo sobre el extremo de la cuerda, moviéndola hacia arriba y hacia abajo, se suministra energía al sistema de la cuerda y se propaga a toda su longitud. Fijemos la atención en un elemento de la cuerda de longitud dx y masa dm, como ilustra la figura 15.6. Cada uno de estos elementos se mueve verticalmente (transversalmente a la cuerda) con movimiento armónico simple. Por tanto, cada elemento puede considerarse como un oscilador armónico simple, con la oscilación en la dirección Y. Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A. La energía cinética dK del elemento es

$$dK = \frac{dm}{2}u^2,$$

donde u es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la densidad lineal de la cuerda, entonces la masa dm del elemento dx es igual a μdx. Por tanto, la energía cinética del elemento de cuerda es

$$dK = \frac{\mu dx}{2} u^2.$$

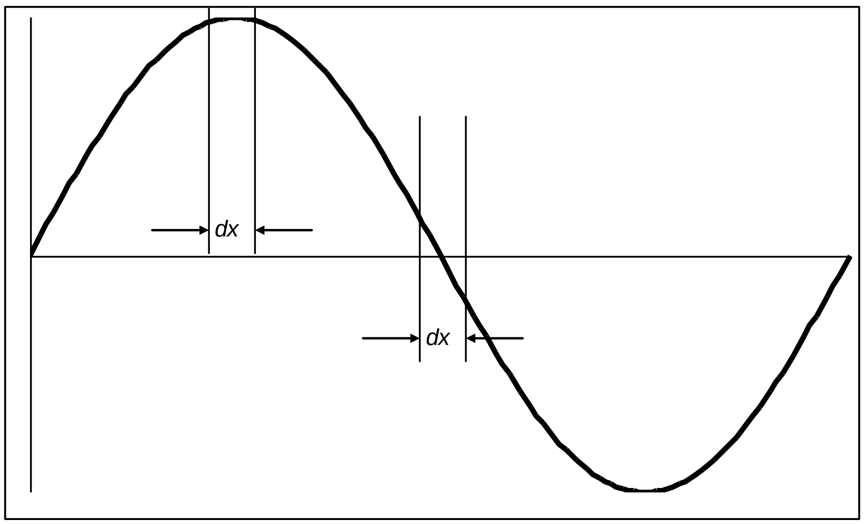


Figura 15.6. El elemento de cuerda a la izquierda está en el desplazamiento máximo, mientras que el otro elemento está en el desplazamiento nulo. La energía cinética de cada elemento depende de la velocidad transversal en esa posición. La energía potencial depende de la deformación que sufre el elemento en esa posición.

Al sustituir en esta ecuación la expresión para la rapidez transversal dada en (13) se obtiene

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)dx.$$

Al integrar esta expresión sobre todos los elementos de la cuerda contenidos en una longitud de onda de la onda, que dará la energía cinética total K_λ en una longitud de onda, resulta

$$K_\lambda = \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t)dx$$

$$= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k}sen2kx\right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}\lambda\right] = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda.$$

En el último paso de la integral se usó $k\lambda = 2\pi$.

Además de energía cinética, cada elemento de la cuerda tiene energía potencial asociada, debido a su desplazamiento desde la posición de equilibrio y las fuerzas que ejercen los elementos vecinos. Para enviar una onda senoidal a lo largo de una cuerda que inicialmente está recta, la onda necesariamente debe estirar la cuerda. Cuando un elemento de cuerda de longitud *dx* oscila en forma transversal, su longitud debe aumentar y disminuir de manera periódica si el elemento de cuerda se ajusta a la forma de onda senoidal. Hay energía potencial elástica asociada con estos cambios de longitud, al igual que en el caso de un resorte.

Cuando el elemento de cuerda está en su posición y=A (ver figura 15.6), su longitud no está alterada, por lo que su energía potencial es cero; en esta posición la velocidad transversal del elemento es nula, por lo que su energía cinética también es nula. Sin embargo, cuando el elemento pasa por su posición y=0, está estirado a su máxima deformación y su energía potencial elástica es máxima; en esta posición la velocidad transversal es máxima y, por tanto, también su energía cinética es máxima.

El elemento de cuerda oscilante tiene su máxima energía cinética y su máxima energía potencial elástica en y=0. En la figura 15.6, las regiones de la cuerda a máximo desplazamiento no tienen energía y las regiones a cero desplazamiento tienen máxima energía. A medida que la onda viaja a lo largo de la cuerda, fuerzas debidas a la tensión en la cuerda realizan trabajo de continuo para transferir energía de las regiones con energía a las regiones que carecen de energía.

El agente externo que produce la onda descrita por la ecuación (1) hace oscilar continuamente un extremo de la cuerda. Al hacerlo así, de manera continua, proporciona energía para el movimiento y estiramiento de la cuerda, en la misma forma en que las secciones de la cuerda oscilan perpendiculares al eje X y tienen energía tanto cinética como potencial elástica. Se dice que la onda transporta la energía a lo largo de la cuerda.

Un análisis similar al que se ha hecho para la energía cinética, para la energía potencial elástica total U_λ en una longitud de onda produce exactamente el mismo resultado (referencia 1, capítulo 16):

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda.$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda. \qquad (23)$$

Cuando la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto dado en la cuerda durante un intervalo de un periodo de la oscilación. Por tanto, la *potencia* o rapidez de transferencia de energía asociada con la onda es

$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v. \qquad (24)$$

Para escribir esta expresión se usó la ecuación (8). Los factores μ y v en esta ecuación dependen del material y la tensión de la cuerda. Los factores ω y A dependen del proceso que genere la onda. La dependencia de la potencia de una onda en el cuadrado de su amplitud y en el cuadrado de su frecuencia angular es un resultado general, verdadero para ondas de todo tipo.

Recapitulación

Hay dos tipos principales de ondas: elásticas o electromagnéticas. Las elásticas se clasifican en transversales o longitudinales según el movimiento de las partículas del medio. Son transversales como en una cuerda tensa; aplicando varios pulsos con características de movimiento armónico simple, se produce una onda que viaja a lo largo de la cuerda (figura 15.2). En las longitudinales, las partículas del medio se mueven en la dirección en que la señal se propaga; sucede cuando en un tubo lleno de aire se empuja un pistón hacia adentro del tubo y luego se saca. Las ondas viajan por el medio, pero las partículas del medio no.

Para describir una onda en una cuerda se necesita una función que dé la forma de la onda y el movimiento de cada punto de la cuerda. Sea $y = h(x,t)$, donde y es el desplazamiento transversal de un punto de la cuerda en función del tiempo *t*, *x* es la posición del punto en la cuerda; $y(x,t) = Asen(kx - \omega t)$ **(1)**. Si *t* es fijo, la función define una curva que representa la forma de la onda. Analicemos la ecuación (1) como una función de *x*, tiempo fijo en t^*; debe tener el mismo valor en *x* y en x+2π, $y(x,t^*) = Asen\left[k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) - \omega t^*\right]$. Esto indica que *k* tiene un significado especial pues al reemplazar *x* por $x + \frac{2\pi}{k}$ se logra el mismo valor, figura 15.3. Definimos $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ la longitud que hace que la onda se repita a sí misma cada valor λ paralela a la dirección de avance; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ se denomina número de onda. Analicemos (1) como una función sólo del tiempo, posición fija en x^*. Cuando el argumento

se incrementa en 2π, el seno debe tener el mismo valor: $y(x^*, t) = Asen[kx^* - \omega\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)]$. Esto indica que ω tiene un significado especial pues al reemplazar t por $t - \frac{2\pi}{\omega}$ se obtiene el mismo valor para $y(x^*, t)$, figura 15.4. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el tiempo que debe transcurrir para que la onda se repita, T es el periodo; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular.
La onda (1) viaja en la dirección positiva del eje X, cada punto de la onda en movimiento retiene su desplazamiento; en cambio, los puntos sobre la cuerda no retienen su desplazamiento. Si el punto máximo retiene su desplazamiento, la fase de la ecuación (1) que da ese desplazamiento debe ser constante: $kx - \omega t =$constante. Se calcula la derivada del argumento respecto al tiempo: $k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$. La velocidad es $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$. La velocidad transversal u de un punto de la cuerda está asociada con la oscilación transversal. El desplazamiento está dado por (1), la rapidez con la que se mueve se obtiene derivando respecto al tiempo $u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A cos(kx - \omega t)$. La aceleración transversal es la rapidez con que cambia la velocidad transversal $a_y = -\omega^2 Asen(kx - \omega t) = -\omega^2 y$.

Consideremos la función $y(x, t) = h(kx \pm \omega t)$ **(12**) que representa una onda arbitraria; se quiere obtener la ecuación que satisface la función h. Al argumento de h le llamaremos z con z una función de x y t. Escribimos (12) como $y(x, t) = h(z)$, con $z = kx \pm \omega t$. Al calcular la derivada de y respecto a x o t se llega a que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ **(18)**. Esta es la ecuación de onda que satisface (12) sin importar la forma de h, pero sí es importante que tenga ese argumento.

La velocidad depende de las propiedades del medio: masa y elasticidad. Desplacemos la cuerda perpendicularmente a su longitud y fijémonos en un elemento de cuerda de longitud dl, que se ha desplazado una distancia y de su posición de equilibrio, figura 15.5. En cada extremo actúa la tensión; las dos fuerzas no están en la misma línea recta. La componente paralela a Y de cada fuerza es $T_y = -Tsen\beta$ y $T'_y = Tsen\beta'$. Sobre el elemento de cuerda la componente resultante es $F_y = T(sen\beta' - sen\beta)$. Si β y β' son pequeños, se hacen aproximaciones apropiadas, con μ la densidad lineal de la cuerda y aplicando segunda ley de Newton se obtiene $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ **(20)**. Se encuentra $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

Al propagarse la onda, transporta energía cinética y energía potencial elástica. Cuando el agente externo realiza trabajo sobre el extremo libre de la cuerda, suministra energía a la cuerda. Fijemos la atención en un elemento de la cuerda de longitud dx y masa dm, figura 15.6; la energía cinética es $dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 cos^2(kx - \omega t)dx$. Al integrar sobre todos los elementos contenidos en una longitud de onda, resulta $K_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$. Cuando un elemento de longitud dx oscila en forma transversal, su longitud aumenta y disminuye de manera periódica. Hay energía potencial elástica asociada con estos cambios de longitud. Fuerzas de tensión realizan trabajo para transferir energía a las regiones que carecen de energía. Un análisis similar para la energía potencial elástica U_λ produce el mismo resultado. La energía total en una longitud de onda es $E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda$. Esta energía pasa por un punto dado durante un periodo. La potencia es $P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$.

Bibliografía

1. Serway, R. A. y Jewett, Jr., J. W. *Física para Ciencias e Ingeniería*, volumen I, sexta edición. Thomson, México, 2008.

Problemas

1. Una onda que viaja a lo largo de una cuerda está descrita por

$$y(x,t) = 0.00327\,m\,sen(72.1\frac{rad}{m}x - 2.72\frac{rad}{s}t) .$$

Calcular a) la amplitud, b) la longitud de onda, el periodo y la frecuencia, c) la velocidad y d) el desplazamiento *y* en *x*=22.5 cm y *t*=18.9 s.

2. Una onda senoidal en una cuerda tiene frecuencia de 5.00 Hz, amplitud de 12.0 cm y velocidad de onda de 20.0 m/s. Determinar la frecuencia angular ω y el número de onda *k* para esta onda, y escribir una expresión para la función de onda.

3. Una onda tiene una frecuencia angular de 110 rad/s y una longitud de onda de 1.80 m. Calcular a) el número de onda y b) la velocidad de la onda.

4. Una onda está descrita por $y(x,t) = (2.00cm)sen(kx - \omega t)$, donde *k*=2.11 rad/m, *ω*=3.62 rad/s, *x* es en metros y *t* en segundos. Determinar la amplitud, longitud de onda, frecuencia y rapidez de la onda.

5. Una onda senoidal está descrita por $y(x,t) = (0.25m)sen(0.30x - 40t)$, donde *x* y *y* se miden en metros y *t* en segundos. Determinar la amplitud, la frecuencia angular, el número de onda, la longitud de onda, la rapidez de la onda y la dirección de movimiento.

6. Una onda senoidal viaja por una cuerda. El tiempo para que un punto particular se mueva de desplazamiento máximo a cero es de 0.170 s. ¿Cuáles son a) el periodo y b) la frecuencia? c) La longitud de onda es de 1.40 m; ¿cuál es la velocidad de la onda?

7. Si $y(x,t) = (6.0mm)sen(kx + (600rad/s)t + \varphi)$ describe una onda que viaja por una cuerda, ¿cuánto tiempo tarda cualquier punto determinado para moverse entre desplazamientos *y*=-2.0 mm y *y*=+2.0 mm?

8. Una onda senoidal de 500 Hz de frecuencia tiene una velocidad de 350 m/s. a) ¿A qué distancia entre sí están dos puntos que difieren en fase por π/3 rad? b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos en cierto punto en tiempos de 1.00 ms entre sí?

9. Una onda senoidal transversal se mueve por una cuerda en la dirección positiva de un eje X, con una velocidad de 80 m/s. En t=0, la partícula de cuerda en x=0 tiene un desplazamiento transversal de 4.0 cm desde su posición de equilibrio y no se mueve. La máxima rapidez transversal de la partícula de cuerda en x=0 es 16 m/s. a) ¿Cuál es la frecuencia de la onda? b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda? Si la ecuación de onda es de la forma $y(x,t) = Asen(kx \pm \omega t + \varphi)$, ¿cuáles son A, k, ω, φ y el signo correcto de ω?

10. Escribir la expresión para *y* como función de *x* y *t* para una onda senoidal que viaja a lo largo de una cuerda en la dirección *x negativa* con las siguientes características: *A*=8.00 cm, λ=80.0 cm, f=3.00 Hz y *y*(0,*t*)=0 en *t*=0. Ahora escribir la expresión para *y* como función de *x* y *t* para la misma onda pero suponiendo que *y*(*x*,0)=0 en el punto *x*=10.0 cm.

11. Determinar la rapidez y dirección de propagación de cada una de las siguientes ondas senoidales, suponiendo que x y *y* se miden en metros y *t* en segundos. (a) $y = 0.60\cos(3.0x - 15t + 2)$, (b) $y = 0.40\cos(3.0x + 15t - 2)$, (c) $y = 1.2sen(2.0x + 15t)$, (d) $y = 0.20sen(-x/2 + 12t + \pi)$.

12. Una onda tiene una velocidad de 240 m/s y una longitud de onda de 3.2 m. ¿Cuáles son a) la frecuencia y el periodo de la onda?

13. Una onda transversal senoidal que viaja en la dirección negativa de un eje X tiene una amplitud de 1.00 cm, una frecuencia de 550 Hz y una velocidad de 330 m/s. Si la ecuación de onda es de la forma $y(x,t) = Asen(kx \pm \omega t)$, ¿cuáles son A, ω, k y el signo correcto de ω?

14. Una onda transversal en una cuerda está descrita por la función de onda

$$y(x,t) = (0.120m)sen[(\pi x/8) + (4\pi t)].$$

a) Determinar la rapidez transversal y la aceleración en t=0.20 s para el punto en la cuerda situado en x=1.60 m. b) ¿Cuál es la longitud de onda, periodo y rapidez de esta onda?

15. La función de onda para una onda viajera en una cuerda tensa es (en unidades SI)

$$y(x,t) = (0.350m)sen(10\pi t + 3\pi x + \pi/4).$$

a) ¿Cuáles son la rapidez y dirección de recorrido de la onda? b) ¿Cuál es la posición vertical de un elemento de la cuerda en t=0, x=0.100 m? c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia? d) ¿Cuál es la magnitud máxima de la velocidad transversal?

16. En el problema 1 se obtuvo que en t=18.9 s el desplazamiento transversal *y* del elemento de la cuerda en x=0.225 m debido a la onda es de 1.92 mm. a) ¿Cuál es la velocidad transversal del mismo elemento de la cuerda, en ese tiempo? b) ¿Cuál es la aceleración transversal del mismo elemento en ese tiempo?

17. En el tiempo t=0 y en la posición x=0 en una cuerda, una onda senoidal viajera con frecuencia angular de 440 rad/s tiene desplazamiento y=+4.5 mm y velocidad transversal u=-0.75 m/s. Si la onda tiene forma general $y(x,t) = Asen(kx - \omega t + \varphi)$, ¿cuál es la constante de fase φ?

18. Una onda transversal senoidal de amplitud A y longitud de onda λ viaja en una cuerda estirada. a) Encontrar la razón entre la máxima velocidad de partícula (la rapidez con la que una sola partícula de la cuerda se mueve en forma transversal a la onda) y la velocidad de la onda. b) ¿Esta razón depende del material de que está hecha la cuerda?

19. Usar la ecuación de onda para hallar la velocidad de una onda dada por
$y(x,t) = (2.00mm)sen[(20m^{-1})x - (4.0s^{-1})t]^{0.5}$.

20. Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.100 kg y longitud de 2.00 m. La cuerda en posición horizontal pasa sobre una polea y sostiene verticalmente un cuerpo de 2.00 kg. Calcular la rapidez de una onda que viaje a lo largo de esta cuerda.

21. Un excursionista de 80.0 kg está siendo rescatado por un helicóptero a través de un cable de masa 8.0 kg y longitud 15.0 m. Una silla de 70.0 kg está unida al extremo del cable. El excursionista se amarra a la silla y el helicóptero entonces acelera hacia arriba. Aterrado por colgar del cable en la altura, el excursionista trata de hacer señas al piloto enviándole pulsos transversales por el cable. Un pulso tarda 0.25 s para recorrer el largo del cable. ¿Cuál es la aceleración del helicóptero?

22.¿Cuál es la velocidad de una onda transversal en una cuerda de 2.00 m de longitud y 60.0 g de masa bajo una tensión de 500 N?

23. Una cuerda estirada tiene una masa por unidad de longitud de 5.00 g/cm y una tensión de 10.0 N. Una onda senoidal sobre esta cuerda tiene una amplitud de 0.12 mm y una frecuencia de 100 Hz y está viajando en la dirección negativa de un eje X. Si la ecuación de onda es de la forma $y(x,t) = Asen(kx \pm \omega t),$ ¿cuáles son A, ω, k y el signo correcto de ω?

24. Una cuerda de piano que tiene una masa por unidad de longitud igual a 5.00×10^{-3} kg/m está bajo una tensión de 1350 N. Encontrar la rapidez de una onda que se desplace en esta cuerda.

25. Una cuerda uniforme de masa m y longitud L cuelga de un techo. a) Demostrar que la velocidad de una onda transversal sobre la cuerda es una función de *y*, la distancia desde el extremo más bajo, y la da $v = \sqrt{gy}$. b) Demostrar que el tiempo que tarda una onda transversal para recorrer la longitud de la cuerda la da $t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$.

GLOSARIO

Aceleración. Es la derivada respecto al tiempo del vector velocidad.

Amplitud. Es el desplazamiento angular o lineal del objeto que realiza movimiento oscilatorio.

Análisis dimensional. Estudio de las combinaciones de cantidades físicas con la dimensionalidad correcta.

Centro de masa. Para un sistema de partículas, se calcula como la suma de los productos de la masa de cada partícula por su vector de posición y dividiendo la suma entre la masa total. Para un cuerpo sólido, la suma se sustituye por una integral. El centro de masa es un punto en el espacio donde no necesariamente se encuentra materia.

Cifras significativas. Al escribir el valor de una cantidad medida o calculada, se debe usar el número correcto de cifras de las que estamos seguros que tienen significado.

Cinemática (traslacional, rotacional). Es la descripción del movimiento (traslacional, rotacional) de un cuerpo sin importar la causa que lo produce.

Colisión. Evento en el que dos o más cuerpos ejercen fuerzas relativamente grandes entre sí durante un tiempo relativamente corto.

Componentes vectoriales. Las componentes de un vector son sus proyecciones perpendiculares sobre los ejes del sistema de coordenadas cartesianas, cuyo origen coincide con el inicio del vector.

Conservación de la energía mecánica. La energía mecánica (suma de energías cinética y potencial) es constante cuando las fuerzas en el sistema son conservativas.

Conservación del ímpetu angular. El ímpetu angular es constante cuando la torca neta que actúa sobre el sistema es nula.

Conservación del ímpetu lineal. El ímpetu lineal es constante cuando sobre el sistema no actúa fuerza externa.

Derivación. Derivación de una función, operación con la cual se halla la derivada de una función.

Desplazamiento. Vector que resulta de la diferencia entre dos posiciones.

Dinámica. Estudio de la causa del movimiento de los cuerpos.

Elasticidad. Propiedad que tienen los cuerpos deformados por una fuerza externa de recobrar su forma primitiva cuando cesa de obrar esa fuerza.

Energía cinética. Es una propiedad del movimiento instantáneo de un cuerpo; se representa como un medio del producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de su velocidad.

Energía potencial. Es la energía almacenada en el sistema a causa de la posición relativa de las partes del sistema; es una función de la posición.

Escalar. Cantidad que para estar correctamente especificada únicamente requiere de un número real y una unidad.

Frecuencia. Representa el número de oscilaciones en la unidad de tiempo de un sistema oscilante.

Fuerza. Relación entre el movimiento de una partícula y su medio ambiente.

Fuerza conservativa. Si una partícula realiza un viaje de ida y de regreso y resulta que la energía cinética es la misma al inicio y al final del viaje, y que el trabajo hecho por la fuerza que la mueve es cero, entonces la fuerza es conservativa. También se enuncia que una fuerza es conservativa si el trabajo hecho por ella sobre una partícula que se mueve entre dos puntos depende únicamente de esos puntos, pero no de la trayectoria seguida.

Fuerza de arrastre. Fuerza que experimenta un cuerpo (fuerza de resistencia del medio) y que depende de la magnitud de su velocidad.

Fuerza de contacto. Fuerza que mantiene en contacto a dos sólidos.

Fuerza de fricción. Componente tangencial a la superficie de contacto de la fuerza de contacto entre dos sólidos en contacto.

Fuerza elástica. Las fuerzas elásticas son producidas por la deformación de los cuerpos.

Fuerza fenomenológica. Esta fuerza puede ser explicada en términos de las fuerzas fundamentales, es muy útil en aplicaciones.

Fuerza fundamental. Fuerza originada por las propiedades de los cuerpos. Existen cuatro fuerzas fundamentales.

Fuerza impulsiva. Fuerza dependiente del tiempo y que aparece durante una colisión.

Fuerza normal. Componente perpendicular a la superficie de contacto de la fuerza de contacto entre dos sólidos en contacto.

Ímpetu angular. Vector que resulta del producto vectorial del vector de posición (donde se encuentra la partícula o el centro de masa del cuerpo) con el vector del ímpetu lineal.

Ímpetu lineal. Vector definido por el producto de la masa del cuerpo y de su velocidad de traslación.

Impulso. Integral de la fuerza impulsiva en el tiempo que dura la colisión.

Inercia rotacional. Ver momento de inercia.

Integración. Procedimiento en dirección opuesta a la derivación.

Lapso. Tiempo transcurrido entre dos eventos.

Ley de la fuerza. Fórmula que expresa las propiedades del cuerpo y del medio ambiente que lo rodea.

Ley de movimiento. Determinación de la aceleración que experimenta un cuerpo dado bajo la acción de una fuerza dada.

Momento angular. Ver ímpetu angular.

Momento de inercia. Distribución de la masa del sistema con respecto al eje alrededor del cual el sistema esté girando.

Momento lineal. Ver ímpetu lineal.

Movimiento circular. Movimiento de una partícula o un cuerpo cuya trayectoria es una circunferencia.

Movimiento de proyectiles en el vacío. Ver tiro parabólico.

Movimiento del centro de masa. En el movimiento de traslación, este punto del sistema se comporta como una partícula conteniendo toda la masa del sistema. En el movimiento de rotación, muchas propiedades del sistema se describen como una propiedad del centro de masa más esa misma propiedad respecto al centro de masa.

Movimiento relativo. Descripción del movimiento de un cuerpo cuando es visto desde dos sistemas de referencia que se mueven entre sí con velocidad constante.

Onda elástica. Perturbación que se propaga de un punto a otro de un medio haciéndolo oscilar a su paso, aunque sin provocar en el medio ningún desplazamiento permanente.

Onda mecánica. Ver onda elástica.

Péndulo compuesto. Ver péndulo físico.

Péndulo físico. Consiste de un cuerpo sólido de masa y forma arbitrarias que se cuelga de un soporte rígido. Al desplazar el cuerpo un ángulo pequeño desde su posición vertical y soltarlo, el cuerpo realiza movimiento oscilatorio.

Péndulo simple. Consiste de una masa muy pequeña amarrada de un extremo de una cuerda ideal (de masa despreciable), el otro extremo se cuelga de un soporte rígido. Al desplazar la cuerda un ángulo pequeño desde su posición vertical, manteniéndola tensa, y soltarla, realiza movimiento oscilatorio.

Periodo. Tiempo que debe transcurrir para que una onda se repita a sí misma.

Posición. Respecto a un sistema de coordenadas, es el vector que indica el lugar (como función del tiempo) en donde se encuentra una partícula o un cuerpo.

Producto cruz. Ver producto vectorial.

Producto escalar. Escalar que resulta de la operación producto entre dos vectores.

Producto punto. Ver producto escalar.

Producto vectorial. Vector que resulta de la operación producto entre dos vectores.

Rapidez. Es la magnitud (tamaño) del vector velocidad.

Sistema inercial. Sistema de referencia que no está acelerado.

Teorema impulso-ímpetu lineal. El impulso es igual al cambio producido por una fuerza impulsiva en el ímpetu lineal de un cuerpo.

Teorema trabajo-energía cinética. Relación que expresa que el trabajo producido por la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.

Tiro parabólico. Movimiento de un objeto que es lanzado al aire en la cercanía de la superficie terrestre, suponiendo que el aire no opone resistencia

Torca. Resultado del producto vectorial entre el vector de la posición donde se aplica la fuerza y el vector fuerza.

Trabajo. Resultado del producto escalar entre el vector fuerza aplicada a un cuerpo y el vector desplazamiento que adquiere.

Unidad. Nombre del patrón o estándar fijado de antemano en el proceso de medición.

Vector. Herramienta matemática que posee magnitud, dirección y sentido.

Velocidad. Es la derivada respecto al tiempo del vector posición.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Libros citados

1. Del Río Haza, F. *El Arte de Investigar*. UAM-I, México, 1990.
2. Halliday, D., R. Resnick y J. Walker. *Fundamentos de Física*, Vol 1, octava edición. Patria, México, 2010.
3. Lide, D. R., Ed. *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 80th ed. CRC Press, Boca Raton, 1999.
4. Manzur Guzmán, A. *Experimentos de Demostración*. *Ejemplos de Mecánica Elemental* (segunda edición). Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2009.
5. Manzur Guzmán, A. *Pasos para la Resolución de Problemas. Ejemplos de Mecánica Elemental*. Plaza y Valdés y Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2005.
6. Resnick, R., D. Halliday y K. S. Krane. *Física*, quinta edición en inglés (cuarta edición en español). CECSA, México, 2002.
7. Serway, R. A. y J. W. Jewett, Jr. *Física para Ciencias e Ingeniería*, volumen I, sexta edición. Thomson, México, 2008.

Libros complementarios (recomendados)

1. Alonso, M. y E. J. Finn. *Física*. Volumen I: Mecánica, volumen II: Campos y ondas. Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1999.
2. Fishbane, P. M., S. Gasiorowics y S. T. Thornton. *Física para Ciencias e Ingeniería*, volumen I. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1994.
3. Giancoli, D. C. *Física General*, volumen 1. Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1988.
4. Ingard, U. y W. L. Kraushaar. *Introducción al Estudio de la Mecánica*, *Materia y Ondas*. Reverté, Barcelona, 1972.
5. Tipler, P. A. *Física*, tercera edición. Reverté, Barcelona, 1995.
6. Sears, F. W.; Zemansky, M. W.; Young, H. D.; Freedman, R. A. *Física universitaria*. Pearson Educación, México, 2009.

Artículos citados

1. Gribbin, J. E. Not so free fall. *The Physics Teacher*, **10**, (3), 153 (1972).

2. Maroto, J. A., J. Dueñas-Molina y J. de Dios. Experimental evaluation of the drag coefficient for smooth spheres by free fall experiments in old mines. *European Journal of Physics*, **26**, 323 (2005).

3. Muñoz Gamboa, C. De yotta a yocto. *Contactos*, 75, 5 (enero-marzo 2010).

4. Priest, J. y J. Snider, Undergraduate computer-interfacing projects, *The Physics Teacher*, (mayo 1987), 303.

5. Riveros, H. Los Placeres del Pensamiento. *Boletín* de la Sociedad Mexicana de Física, (abril-junio 2005).

6. Soules, J. A. Full-scale demonstration of acceleration. *American Journal of Physics*, **40** (8), 1173 (1972).

APÉNDICE

Respuestas a los problemas

Capítulo 1

1.a) L = 1.2×10^{3} m

b) t = 3.4×10^{-6} s

c) v = 3.6×10^{3} m/s

d) F = 1.500×10^{5} kgm/s^2

2.a) $V_{Fe}=\frac{m_{Fe}}{\rho_{Fe}}=1.18\times10^{-29}\text{m}^3$.

b) $d_{Fe}=\left(\frac{6V_{Fe}}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. $d_{Fe}=0.282$ nm.

3.a) $P=2\pi r$. P=4.00×10^{4}km.

b) $A=4\pi r^2$. A=5.10×10^{8}km^2.

c) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. V=1.08×10^{12}km^3

4. $R\propto v^a g^b$. $R=C\frac{v^2}{g}$.

Capítulo 2

1.a) En t=5 s, a_5=0.

b) $a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-3\ \text{m/s}^2$.

c) $d=\left(30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(20\ s)+\frac{1}{2}\left(30\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(10\ s)=$ 750 m

2.a) v_{AB}=0; $v_{BC}=\frac{x_C-x_B}{t_C-t_B}=3\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$; $v_{CD}=\frac{x_D-x_C}{t_D-t_C}=1\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

b) $v_{.5}$=0.

$$v_{BC}=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(3t-1)=3\ \text{cm/s}.$$

$$v_{CD}=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t+5)=1\ \text{cm/s}.$$

3. a)$v_{1-4}=\frac{x_4-x_1}{t_4-t_1}=1$ m/s.

$v_{1-3}=\frac{x_3-x_1}{t_3-t_1}=0$ m/s.

b) $v_1=-2$ m/s, $v_3=2$ m/s.

c) a=2 m/s^2.

4. a) $v_m=\frac{\Delta x}{\Delta t}=50$ m/s.

b) $v=\frac{dx}{dt}$. $v_3=80\,\frac{m}{s}$.

c) $a=\frac{dv}{dt}=2B=20$ m/s^2.

5. a) $x_1=-2$m.

b) $v=\frac{dx}{dt}=0\ \Rightarrow\ t_r=\frac{1}{6}$ s; $x_r=-4.08$ m.

c) $v_5=29$ m/s , a=6 m/s^2.

d) $x_{01}=2$ m; $x_{12}=8$ m.

6. $v_m=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=v_0$. Las velocidades instantánea y media son iguales.

7. 2m/s^2.

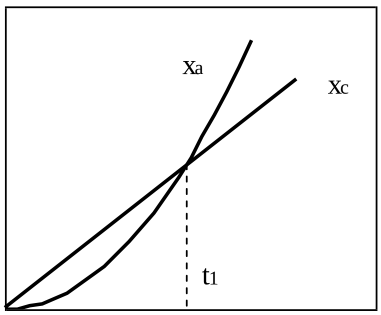
8. $x_c=4x_a$

9. a) $x_{c1} = \dfrac{2v_{c0}^{\ 2}}{a}$; $x_{a1}=x_{c1}$=156.3 m.

b) $t_1 = \dfrac{x_{c1}}{v_{c0}}$; t_1=12.5 s.

c) $v_{a1}=2v_{c0}$=25 m/s.

d)



10. a) $D = \dfrac{dv_1}{v_1+v_2}$.

b) $t_D = \dfrac{d}{v_1+v_2}$.

11. a) $t_1 = \dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^{\ 2}+2z_0 g}}{g}$. t_1 = 5.5 s.

b) $v_1 = \mp\sqrt{v_0^{\ 2}+2z_0 g}$. v_1 = -41.4 m/s.

c) $z_m = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$. $z_m = 87.3$ m. .

d) $t_m = \frac{v_0}{g}$. $t_m = 1.2\ s$.

12. a) $z_0 = \frac{v^2}{2g}$. $z_0 = 29.4$ m.

b) $t_c = \frac{v}{g}$. $t_c = 2.45\ s$.

13. $v_0 = \sqrt{2hg} = 29.7\ \mathrm{m/s}\ \approx 30\ \mathrm{m/s}$.

$t_m = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3.03$ s ≈ 3 s.

14. $t_1 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2\mathrm{x}40}{g}} = 3.06 \pm 1.1$.

a) $t_1^{\ -} = 3.06 - 1.1 = 1.96 \approx 2.0$ s, en subida,

c) $t_1^{\ +} = 3.06 + 1.1 = 4.16 \approx 4.2$ s, en bajada.

b) $z_m = \frac{v_0^2}{2g}$ = 45.9 m.

15. a) $v_0 = \sqrt{2gz_m} = 15.3$ m/s.

b) $t_r = \dfrac{2}{g}\sqrt{2gz_m} = 2\sqrt{\dfrac{2z_m}{g}} = 3.1$ s.

16. $v_1 = -\sqrt{2gz_1} = -8.85\ \mathrm{m/s}$

$v_2 = \sqrt{2gz_2} = 6.26$ m/s.

$a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 1{,}259.61\ \mathrm{m/s^2}$

17. a) v_0 = 29.8 m/s

b) $v_1 = v_0 - gt_1 = 10.2\ \mathrm{m/s}$

c) $z_m = \frac{v_0^2}{2g} = 45.3$ m

18. a) $z_m = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 396.5$ m

b) $v_1 = v_0 - gt_1 = -88.2\ \mathrm{m/s}$

19. a) $v_m = 0 = v_0 - gt_m \Rightarrow t_m = \dfrac{v_0}{g} = 3.1$ s.

b) $0 = z_0 + v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \ \Rightarrow\ z_0 = 190$ m

c) $z_m = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 235.9$ m

20. $v_1 = v_0 - gt_1 = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

$v_2 = -v_0 - gt_2 = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

21. $v_2 = v_0 - gt_2^- = 5.53$ m/s.

Capítulo 3

1. a) $\vec{d} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = -11.3\hat{\imath} - 11.3\hat{\jmath}$.

b) $d^2 = (11.3)^2 + (11.3)^2 \Rightarrow$

$d = 16$ cm.

2. $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 108.25\hat{\imath} + 137.5\hat{\jmath}$.

r=175.0 m.

3. a) $\vec{r} = 3.25\hat{\imath} - 3.55\hat{\jmath}$.

b) $r = 4.81$ m.

$tan\theta = \frac{-3.55}{3.25} — 1.09 \Rightarrow$

$\theta = -47.53°$

4. $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 12.39\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$.

$r = \sqrt{(12.39)^2 + (6.00)^2} = 13.77$ km.

5. $r_x = 100cos30° = 86.6$ m.

$r_y = -100sen30° = -50.0$ m.

6. a) $\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

b) $\vec{a} - \vec{b} = 5\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

c) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (5 + c_x)\hat{\imath} + (-4 + c_y)\hat{\jmath} + (-3 + c_z)\hat{k}$ ∴ c_x=-5, c_y=4, c_z=3.

7. $\vec{a} = \frac{1}{2}\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 0\hat{k}$ y $\vec{b} = \frac{5}{2}\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$.

$a = 3.04$, $b = 2.87$.

8. a) $\vec{r}_1 = 5\hat{\imath} + \hat{\jmath}$; $r_1 = 5.1$; $\tan\theta_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow \theta_1 = 11.31°$

b) $\vec{r}_2 = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$; $r_2 = 3.16$; $\theta_2 = 71.57°$

9. $\vec{C} = -9\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 0\hat{k}$.

10. a) $\vec{a}\bullet\vec{b} = -4 - 3 + 4 = -3$

b) $\vec{a}\bullet\vec{b} = (5.1)(4.24)cos\theta = -3 \Rightarrow$

$\theta = 97.97°$

11. a) $\vec{c} = -13\hat{\imath} - 17\hat{\jmath} + \hat{k}$, $c^2 = 459 \Rightarrow c = 21.42$

b) $c = absen\theta$; $0.99 = sen\theta \Rightarrow \theta = 82.03°$, pero $sen\theta = sen(\pi - \theta)$, por lo que $sen82.03° = sen97.97°$; $\theta = 97.97°$

12. $\vec{b} = 2.24\hat{\imath} - 4.48\hat{\jmath}$ y $\vec{c} = -2.24\hat{\imath} + 4.48\hat{\jmath}$.

Capítulo 4

1.a) $\vec{a}_3 = (6 - 8(3))\hat{\imath}$; $\vec{a}_3 = -18\hat{\imath}\, m/s^2$.

b) $\vec{a}_1 = (6 - 8t_1)\hat{\imath} \Rightarrow t_1$=0.75 s.

c) La velocidad nunca es cero.

2. $tan30° = \frac{v_0 t_1}{100} \Rightarrow t_1 = \frac{100tan30°}{v_0} = 6.93\, s$.

3. $y_1 = y_0 - \frac{g{x_1}^2}{2v_0^2}$ ⇨ $v_0 = \sqrt{\frac{gx_1^2}{2(y_0-y_1)}} = 3.96\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

4. Sólo entraría rebotando.

5. a) $t_1 = \frac{v_{0y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}$. $t_1 = 12.47$ s.

b) $x_1 = v_{0x}\left(\frac{v_{0y}}{g} + \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}}\right) = 124.67$ m.

c) $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} = 25.10$ m.

d) $\vec{v} = v_{0x}\hat{\imath} + \left(v_{0y} - gt\right)\hat{\jmath}$.

e) $v_3^2 = v_{0x}^2 + (v_{0y} - 2g)^2 = 192.16$

$v_3 = 13.86$ m/s.

6. $y_a = x_1 tan\theta_0 = 0.049$ m.

7. a) $y_0 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 78.4$ m.

b) $x_1 = v_0 t_1 = 120$ m.

c) $\vec{v}_1 = 30\hat{\imath} - 39.2\hat{\jmath},\ v_1 = 49.36\,\frac{m}{s}$,

$\theta = -52.57°$

8. $v_{0x} = 20\,\frac{m}{s}$;

$v_{0y} = \frac{y_1 + \frac{1}{2}gt_1^2}{t_1} = 36.30$ m/s.

$x_2 = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} = 74\ m$.

9. a) $t_1 = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 0.5$ s.

b) $v_0 = x_1\sqrt{\frac{g}{2y_0}} = 3\,\frac{m}{s}$.

10. a) $y_1 = x_1 tan\theta_0 - \frac{gx_1^2}{2v_0^2 cos^2\theta_0} = 5.05\ m$.

b) $t_1 = \frac{x_1}{v_0 cos\theta_0} = 0.38\ s$.

c) $tan\theta_1 = tan\theta_0 - \frac{gx_1}{v_0^2 cos^2\theta_0} \Rightarrow \theta_1 = 23.4°$.

11. $v_m = \frac{Lg}{2v_0 sen\theta_0} - v_0 cos\theta_0 = 3.44\ \frac{m}{s}$.

12. $v_0 = \sqrt{\frac{gx_1}{sen\theta_0 cos\theta_0}} = 48.61\ \frac{m}{s}$.

13. a) $t_1 = \frac{x_1}{v_0 cos\theta_0} = 1.83\ s$.

b) $y_1 = v_0 sen\theta_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 13.0$ m.

14. θ_1=59.71º y θ_2=30.29º.

15. a) $v_{PS'} = v_{PS} - v_{S'S}$ ⇨ $v_{PS'} = 1.11$ m/s.

b) $d' = v_{PS'}t = 33.30$ m.

16. $t = \frac{L}{v_{CS}} = \frac{L}{\frac{5L}{60}} = 12$ s.

17. a) $v_{HS} = v_{HP} + v_{PS} = 15$ m/s.

b) v_{HS}=v_{PS}=5 m/s.

18. T = t_i + t_r = 25.00 min.

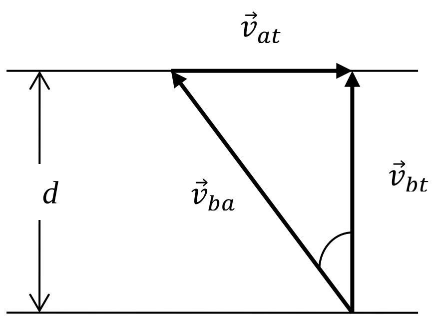
T´ = 2d/v_{bs} = 2d/v_{ba} = 22.22 min.

19. $v_{La} = \frac{D}{T} + \sqrt{\frac{D^2}{T^2} + {v_{at}}^2}$. $v_{La} = V_L = 1.44$ m/s.

20. a) $tan\Theta = \frac{v_{ct}}{v_{gt}} = 1.74$. θ~60º.

b) $v_{gc} = \sqrt{v_{ct}^2 + v_{gt}^2} = 16.03 \text{ m}/s$.

21.



a) γ es el ángulo entre $\vec{v}_{ba}$ y $\vec{v}_{bt}$. γ=15.96º~16º.

b) $t_1 = \frac{d}{v_{bt}} = 52$ s.

22. $\theta = \text{sen}^{-1}\frac{65\cos 20°}{215} = 16.5°$.

$v_{at} = v_{av}cos\theta + v_{vt}sen20°$ = 228 km/h.

Capítulo 5

1. Menor.

2. a) $F_c = \frac{m_2}{m_1+m_2}F$.

b) $F_c' = \frac{m_1F}{m_1+m_2}$.

c) $F_c' > F_c$.

3. a) $a = \frac{Fcos\Theta}{m_1+m_2}$. a=5.6 m/s^2.

b) $T = \frac{m_2Fcos\Theta}{m_1+m_2}$. T=16.9 N.

4. a) $a = \frac{T_3}{m_1+m_2+m_3}$. a=1.1 m/s^2.

b) $T_1 = \frac{m_1T_3}{m_1+m_2+m_3}$ y $T_2 = \frac{(m_1+m_2)T_3}{m_1+m_2+m_3}$.

T_1= 1.1 N, T_2=3.3 N.

5. $m = \frac{2Ma}{a+g}$.

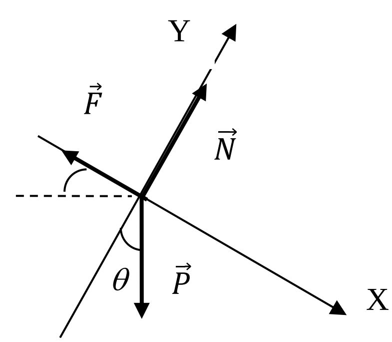
6. a) $a = \frac{m_1sen\theta - m_2}{m_1+m_2}g = -2.45$ m/s^2.

b) $T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1 + sen\theta)g$.

$T = \frac{m}{2}(1 + sen\theta)g$. T=7.35 N.

7. La aceleración puede ser nula o positiva hacia arriba del plano si m_2-$m_1sen\theta \geq 0$; para θ=30º se obtiene $m_1sen30° \leq m_2$; es decir, $m_1 \leq 2m_2$ que es un caso particular del planteado en el enunciado. El valor de la tensión es el mismo al obtenido en el problema 6. El caso m_1=m_2 es exactamente el problema 6.

8. a)



b) $F = mgsen\theta$. F=490 N.

9. a) $a = gsen\theta$.

b) La tensión es nula.

10. $N/g = m\,(1+a/g) = 52.55$ kg.

Capítulo 6

1. f_e es de 5 N hacia la izquierda.

2. $d_1 = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} = 12.76$ m.

3. $\mu_c = \frac{Fcos\theta}{mg+Fsen\theta}$. μ_c=0.70.

4. a) a=g$sen\theta$- μ_c g$cos\theta$. a=2.98 m/s^2 ≈ 3.0 m/s^2.

b) La tensión es nula.

5. a) $F_{min}=mg\,(sen\theta-\mu_e cos\theta)$. F_{min}=11.8 N.

b) $a = g(sen\theta-\mu_c cos\theta)$. a=3.2 m/s^2.

c) $F = mg(sen\,\theta + \mu_c\,cos\,\theta)$. F=33.0 N.

6. a) $a = gsen\theta - \frac{(\mu_1 m_1+\mu_2 m_2)gcos\theta}{m_1+m_2}$.

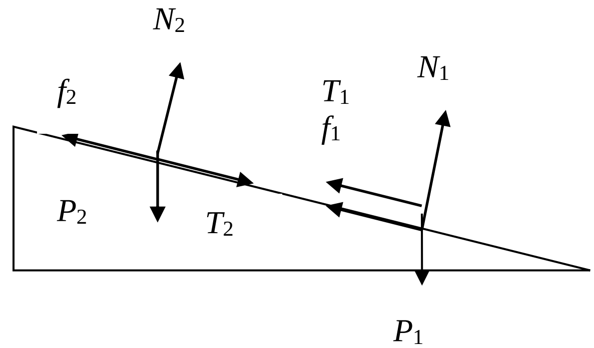
a=3.77 m/s^2≈3.8 m/s^2

b) $T = \frac{(\mu_1-\mu_2)(m_1 m_2)\,gcos\theta}{m_1+m_2}$.

T=2.26 N~2.3 N

c) Como $\mu_1 > \mu_2$, al intercambiar estos coeficientes la tensión cambiaría de signo, lo cual significa que el cuerpo 2 no puede empujar al 1.

7. Los incisos a) y b) del problema 6 siguen siendo iguales. Resolveremos el inciso c) desde el principio. La figura muestra las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo.



T_1 y T_2 no pueden tener la misma magnitud, o sea que no puede tratarse de una cuerda tensa.

8.a) $m_2 = m_1(sen\theta - \mu cos\theta)$; m_2=0.72 kg.

b) $T = m_2 g$; T=7.06 N. $T = m_1 g(sen\theta - \mu cos\theta)$.

9. a) $a = \frac{F-(m_1+m_2)\mu g}{m_1+m_2}$; a=1.4 m/s^2.

b) $F_c = \frac{m_2 F}{m_1+m_2}$; F_c=7.2 N.

10. $\mu = \frac{3}{4}tan\theta$, μ=0.43.

11. $\mu = tan\theta - \frac{1}{3cos\theta}$; μ=0.29.

12. $a = \frac{m_2-\mu_c m_1}{m_1+m_2}g$. $T = \frac{m_1 m_2(1+\mu_c)}{m_1+m_2}g$.

13. $a = \mu_e g$. $F = (m_1+m_2)\mu_e g$.

a=2.45 m/s^2, F=36.75 N.

14. a) $x_1 = \frac{v_0^2}{4gsen\theta}$.

b) El bloque no se deslizará de nuevo.

15. a) $a = -(sen\theta + \mu_c cos\theta)g$.

b) $x_1 = \frac{v_0^2}{2(sen\theta+\mu_c cos\theta)g}$.

c) El bloque se queda en x_1.

16. a) $a = \frac{m_1 sen\theta - \mu_{c2} m_2}{m_1+m_2} g$. a=1.37 m/s^2.

b) $T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(sen\theta + \mu_{c2})g$. T=10.58 N.

17. a) $\mu_e = tan\theta \quad \rightarrow \quad \mu_e = 0.47$

b) $\mu_c = tan\theta \quad \rightarrow \quad \mu_c = 0.38$

18. $x_1 = \frac{v_0^2}{2(sen\theta+\mu_c cos\theta)g}$. x_1=7.6 m.

19. a) $F_a = (sen\theta - \mu_e cos\theta)mg$;

F_a=11.20 N.

b) $F_b = (sen\theta + \mu_c cos\theta)mg$;

F_b=40.27 N.

20. a) $m_2 = m_1(sen\theta + \mu cos\theta)$;

m_2=2.28 kg.

b) $T = m_2 g$; T=22.34 N.

$$T = m_1 g(sen\theta + \mu cos\theta).$$

21. $F = mgsen\theta + f$. $N = mgcos\theta$,

$f = \mu_c mgcos\theta$.

N= 848.7 N, f=84.87 N y F=574.9 N.

22. a) $a = (sen\theta - \mu_c cos\theta)g$; a=4.05 m/s^2.

b) $F = mgsen\theta - f_e = 16.0$ N.

c) $F = mg(sen\theta + \mu_c cos\theta) = 28.74$ N.

Capítulo 7

1. $d_1 = \frac{v_0^2}{2\mu_c g}$; d_1 = 12.76 m

$W_{f_c} = \vec{f_c} \bullet \vec{d} = -\frac{1}{2}mv_0^2$. $W_{f_c} = -250$ J.

2. a) $W_F = \vec{F} \bullet \vec{d} = Fdcos\theta \quad \Rightarrow$

$W_F = 2000$ J.

b) $W_{f_c} = \vec{f_c} \bullet \vec{d} = -\mu_c mgd$. $W_{f_c} = -980$ J.

c) $W_N = \vec{N} \bullet \vec{d} = Ndcos90° = 0$ J.

d) $W_g = 0$ J.

e) $W = \Delta K$. $\Delta K = 1020$ J.

f) v_f=10.1 m/s.

3. a) $W_T = \int \vec{T} \bullet d\vec{s} = -\frac{3}{4}MgD$.

b) $W_g = \int M\vec{g} \bullet d\vec{s} = MgD$.

c) $W = W_T + W_g = \frac{1}{4}MgD$.

d) $K_f = \frac{1}{2}Mv_f^2 = \frac{1}{4}MgD \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{gD}{2}}$.

4. a) $W_g = \int_0^{y_1}(m\vec{g}) \bullet d\vec{y} = mgy_1$,

W_g=0.25 J.

b) $W_r = \int_0^{y_1}(k\vec{y}) \bullet d\vec{y} = -\frac{1}{2}ky_1^2$;

$W_r = -1.25$ J.

c) $v_i = \sqrt{\frac{k}{m}y_1^2 - 2gy_1}$ =2.84 m/s.

5. a) F=$mgsen\theta$. F=346.5 N.

b) $W_F = \vec{F} \bullet \vec{d} = Fd$. W_F=1,385.9 J

c) $W_g = -mgdsen\theta = -1385.9\, J$

d) $W_N = \vec{N}\bullet\vec{d} = 0.$

6. a) $W_F = mgl(sen\theta + \mu_c cos\theta) \Rightarrow$

$W_F = 1006.0$ J.

b) $W_g = m\vec{g}\bullet\vec{l} = -mglsen\theta \Rightarrow$

$W_g = -828.3$ J.

c) $W_N = Nlcos90° = 0.$

7. a) $W_g = -mgh \Rightarrow W_g = -8820.0$ J.

b) T=mg, T=588.0 N.

c) $W_T = Th = mgh \Rightarrow W_T = 8820.0$ J.

$P_T = \vec{T}\bullet\vec{v} = mgv \Rightarrow P_T = 1176.0$ W.

8. a) $F = mg(\frac{h}{s} - \frac{\mu_c}{s}\sqrt{s^2 - h^2}\,)$.

b) $W_F = \vec{F}\bullet\vec{s} = -mg\left(h - \mu_c\sqrt{s^2 - h^2}\right)$.

c) $W_g = m\vec{g}\bullet\vec{s} = mgh$..

F=202.6 N, W_F=-405.13 J,

W_g= 490.00 J.

9. a) $W_F = Fd \Rightarrow W_F = 1741.13$ J.

b) $W_g = -mgdsen\theta \Rightarrow$

$W_g = -1265.23$ J.

c) W_N= $Ndcos90°$=0.

d) $W_f = -\mu_c mgdcos\theta \Rightarrow$

$W_f = -475.91$ J.

e) $P_F = \vec{F}\bullet\vec{v} = Fv \Rightarrow P_F = 522.34$ W.

10. $L = \frac{kl^2}{2\mu_c mg}$.

11. a) $W_T = Mgd \Rightarrow W_T = 22050.0$ J.

b) $W_g = -Mgd \Rightarrow W_g = -22050.0$ J.

c) $P_T = \vec{T}\bullet\vec{v} = Tv \Rightarrow P_T = 2205$ W.

12. $P = \frac{mgd}{t} = mgv.$ P=571.7 W.

13. $d = \frac{v_i^2}{2g(sen\theta+\mu_c cos\theta)}$. d=2.56 m.

14. a) $W_F = mgl(sen\theta + \mu_c cos\theta) \Rightarrow$

$W_F = 1509.7$ J.

b) $W_g = m\vec{g}\bullet\vec{l} = -mglsen\theta \Rightarrow$

$W_g = -634.1$ J.

c) $W_N = Nlcos90° = 0.$

d) $W_f = -\mu_c mglcos\theta \Rightarrow$

$W_f = -875.6$ J.

15. a) $a = \frac{v_0^2}{2d} \Rightarrow a = 1,036,800$ m/s^2.

b) $F = ma \Rightarrow F = 51,840$ N.

c) $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow K_i$=12,960 J.

d) $P = \frac{Fv_0}{2} \Rightarrow P = 18,662,400$ W.

16. $P = Fvcos\theta$. P = 18.8 W.

17. a) $W_F = Fdcos\theta \Rightarrow W_F = 692.8$ J.

b) $P = \frac{Fdcos\theta}{t} \Rightarrow P = 69.28$ W.

c) Su trabajo es nulo.

18. a) $W_N = \vec{N}\bullet\vec{l} = Nlcos90° = 0.$

b) $W_{fc} = \vec{f_c}\bullet\vec{l} = -\mu_c mglcos\theta.$

$W_{fc} = -169.7$ J.

c) $W_F = \vec{F}\bullet\vec{l} = (sen\theta + \mu_c cos\theta)mgl.$

$W_F = 1{,}149.7$ J.

d) $W_g = \vec{P}\bullet\vec{l} = -mglsen\theta.$

$W_g = -980.0$ J.

e) $W = W_N + W_f + W_F + W_g = 0$

19. $P_N = \frac{W_N}{t} = 0$, $P_f = \frac{W_f}{t} = -2.8\,W$,

$P_F = \frac{W_F}{t} = 19.2\,W$, $P_g = \frac{W_g}{t} = -16.3\,W$.

20. a) $W_F = \vec{F}\bullet\vec{d} = Fd \quad \Rightarrow \quad W_F = 1{,}800$ J.

b) $W_F = mgd \quad \Rightarrow \quad W_F = 6{,}938.4$ J.

Capítulo 8

1. a) $U = \frac{1}{2}kx^2, = 5$ J.

b) $v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{2}$ m/s.

c) $d = \frac{v^2}{2\mu_c g}$, $d = 1.0$ m.

2. a) $v_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{m} - 2\mu_c gl} = 0.82$ m/s

b) $L = \frac{kl^2}{2\mu_c gm}$. L=0.23 m.

3. $V_A = \sqrt{V_B^2 - 2gh} \quad ⇨ \quad V_A = 22.54$ m/s.

4. $v_0 = \sqrt{2gl}$.

5. a) $v_Q = \sqrt{2gh} \quad ⇨ \quad v_Q = 11.71$ m/s.

b) $W_f = -\frac{1}{2}mv_Q^2 \quad ⇨ \quad W_f = -1{,}714.05$ J.

c) $\mu_c = -\frac{W_f}{mgd} \quad ⇨ \quad \mu_c = 0.50$.

6. $v_B = \sqrt{2gl} \quad ⇨ \quad v_B = 3.96$ m/s.

$v_A = \sqrt{2g(2d - l)} \quad ⇨ \quad v_A = 1.98$ m/s.

7. a) $v_2 = \sqrt{2gdsen\theta} \quad ⇨ \quad v_2 = 6.26$ m/s.

b) $l = \frac{mgsen\theta}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mgsen\theta}{k}\right)^2 + \frac{2mgdsen\theta}{k}}$. l=0.99 m.

8. $v_B = \sqrt{2gl(1 - cos\theta)} \quad \therefore \quad v_B = 4.43\,\frac{m}{s}$.

9. $h = \frac{\frac{w}{2g}v_0^2}{f + w} \quad ⇨ \quad h = 19.4$ m.

$v_B^2 = \frac{(w-f)}{\frac{w}{g}}2h \quad ⇨ \quad v_B = 19.0$ m/s.

10. a) $h = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 + W_f}{mg}$, W_f =-880.0 J. h = 125.77 m.

b) $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + W_f \quad ⇨$

$mgh = 1{,}232.5$ J.

11. $mgh' - mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + fh \quad ⇨ \quad h' - h = \frac{fh}{mg}$, 738 m.

12. $\Delta E = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad ⇨ \quad \Delta E = -11.7$ J.

13. a) $k = \frac{mg}{x_0}$, k=784 N/m.

b) $U_r = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{x_0}\right)(x_0 - x_1)^2 \;\Rightarrow\; U_r = 62.7$ J.

c) $h = \frac{(x_0+x_1)^2}{2x_0} \quad \therefore \quad h = 0.80$ m.

14. a) $W_g = mgd \quad \therefore \quad W_g = 0.25$ J.

b) $W_r = -\int_0^d kxdx = -\frac{1}{2}kd^2 \quad \Rightarrow \quad W_r = -1.25$ J.

c) $v_c = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 2gd}$= 2.84 m/s.

d) $h = \frac{v_c^2}{2g} \quad \therefore \quad h = 0.41$ m.

15. a) $L = \frac{Fl^2}{2x_0 mgsen\theta} \quad \therefore \quad L = 0.85$ m.

b) $v_2 = \sqrt{\frac{Fl^2}{x_0 m} - 2glsen\theta}$; $v_2 = 2.80$ m/s.

Capítulo 9

1. $x_{cm} = \frac{\sum \sigma A_i x_i}{\sum \sigma A_i} = 1.5\, m,$

$$y_{cm} = \frac{\sum \sigma A_i\, y_i}{\sum \sigma A_i} = 1.36\, m.$$

2. $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_H \vec{r}_1 + m_H \vec{r}_2) = (6.7x10^{-12} m, 0).$

3. $x_{cm} = 11.67\, cm,$

$y_{cm} = 13.33\, cm.$

4. $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_1^5 m_i \vec{r}_i = \frac{1}{5} d(0, -1).$

5. $\frac{P}{p} = 26.68$. 27 balas.

6. $v_{mT} = v_0 + \frac{4}{5}V_{Mm}$; v_{mT}=3960 km/h.

V_{MT}=3835 km/h.

7. $d_{\max} = Vt = \frac{mv}{M}t$; $d_{\max}$=120 m.

8. $V = \frac{mv_0}{M} = 4.00\text{x}10^{-3}\; m/s.$

9. $V_x = -\frac{mv_0}{M}cos\theta$; V_x=-3.46×10^{-3} m/s.

10. después del segundo disparo.

11. v_3 = 2/(cos45º) = 2.83 m/s.

12. $\theta = 33.69°$. $v_3 = \frac{v_1}{sen\theta} = 54.1$ m/s.

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = 13.5 \text{ kJ},$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} = 30.4 \text{ kJ},$$

$$K_3 = \frac{1}{2}mv_3^{\,2} = 43.9 \text{ kJ}.$$

Capítulo 10

1. $\vec{J} = m(v_f - v_i)\hat{\jmath}$. J=9.6 Ns.

2. $F_{media} = \frac{m(\sqrt{2gh_f} + \sqrt{2gh_i})}{\Delta t}$.

$F_{media} = 67.8$ N.

La aceleración apunta hacia arriba.

3. a). $\vec{J} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(v_f cos\theta + v_i, v_f sen\theta)$

$J = \sqrt{J_x^{\,2} + J_y^{\,2}} = 18.54$ Ns;

$\tan\alpha = \dfrac{J_y}{J_x} = 0.51;\ \alpha = 27.24^{\,o}$.

b). $\vec{F} = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$; F=1854.1 N.

4. a) $J = -mv_i$, magnitud $J = mv_i$ =0.9 kgm/s.

b) $\vec{F}_{media} = -\frac{m\vec{v}_i}{\Delta t}$. $F_{media} = 4.5$ N

5. a) $V = -\dfrac{m_1 v_1}{m_2 + m_3} = -2$ m/s.

b) $F_{media} = \dfrac{\Delta P'}{\Delta t}$, $F_{media} = -\dfrac{10}{0.1} = -100$ N.

c) $v_{cm} = 0$.

6. a) $\vec{J} = 2mvsen\theta\hat{j}$; $J = 2.12$ kgm/s.

b) $\overrightarrow{F'}_{media} = -\frac{2mvsen\theta\hat{j}}{\Delta t} = 204.2$ kN.

7. $v_f = \dfrac{v}{3}$.

8. $v'_1 = 0$, $v'_2 = v_1$.

9. $v' = -\dfrac{1}{2}v$ y $V = \dfrac{1}{2}v$.

10. a) $v'_1 = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v'_2}{m_1}$.

$v'_1 = 2.5$ m/s.

b) $K_i = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} + \dfrac{1}{2}m_2 v_2^{\,2} = 22$ J.

$K_f = \dfrac{1}{2}m_1 v'^{\,2}_1 + \dfrac{1}{2}m_2 v'^{\,2}_2 = 19.75$ J.

No es elástica.

11. $x^2_{\max} = \dfrac{m_1 m_2 v_1^{\,2}}{k(m_1 + m_2)}$. $x_{\max} = 0.012$ m.

12. a) $\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$; $5\ m/s\hat{\imath}$.

b) $V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

13. $v_{1f} = -22$ m/s y $v_{2i} = -19$ m/s.

14. a) $v'_2 = \dfrac{m_1 v_1 - m_1 v'_1}{m_2}$. $v'_2 = 1.81$ m/s.

b) $v_{cm} = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$. $v_{cm} = 4.96$ m/s.

15. $K'_1 = \dfrac{1}{2}m_1 v'^{\,2}_1 = \dfrac{m_1}{2}\dfrac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{m_1^{\,2}}$.

$K'_1 = 512$ J.

16. a) $d = \dfrac{v}{10}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$,

b) $d = \dfrac{v}{5}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

17. a) $v = \dfrac{v_1 + 3v_2}{4}$. v=2.5 m/s.

b)$K_f - K_i = -\frac{3m}{8}(v_1 - v_2)^2 = -3.75x10^4$ J.

18. $v_b = \dfrac{m_b + M}{m_b}\sqrt{2\mu_c gd}$,

$v_b = 3{,}503.5$ m/s.

19. $h = \dfrac{m^2 v^2}{2g(m+m_1)^2 \cos^2\theta}$; h=0.29 m.

20. $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 120$ º.

21. θ=26.57º.

22. a) $v'_2 = \frac{(0.20)(1.0)sen53°}{(0.30)sen29.7°} = 1.07\ \frac{m}{s}$.

b) $f = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{K'_1 + K'_2 - K_i}{K_i} = -0.33$

23. $v'_2 = v_1 cos\theta = 5.0\ \frac{m}{s}$,

$v'_1 = \dfrac{v'_2 sen\theta}{sen30°} = 8.7\ \dfrac{m}{s}$.

24. $K = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = 210$ J.

Capítulo 11

1. a) $\alpha_m = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = 3$ rad/s^2.

b) α_1 = 0 rad/s^2.

c) $a_{t1} = \alpha_1 r$ = 0 m/s^2.

d) $a_{r1} = \omega_1^2 r$ = 0.10 m/s^2.

2. a) $\omega_m = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t} = \dfrac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = -5$ rad/s.

b) $\alpha_m = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} =$ -6 rad/s^2.

c) $\alpha_1 = \alpha_2$= -6 rad/s^2.

d) $a_{t2} = \alpha_2 r$ = -0.6 m/s^2.

e) $a_{r2} = \omega_2^2 r$ = 6.4 m/s^2.

3. a) ω_6 = 3.6 rad/s.

b) $v_6 = r\omega_6$= 3.6 m/s.

c) $a_{t6} = r\alpha_6 = 0.60$ m/s^2.

d) $a_{r6} = \dfrac{{v_6}^2}{r} = 12.96$ m/s^2.

4. a) -2 rad/s^2.

b) t_1=5 s.

c) a_t= -2 m/s^2.

5. $\alpha_m = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} \Rightarrow \alpha_m = \dfrac{0-1}{2} = -0.5$ rev/s^2.

6. $\alpha = \frac{v_2 - v_1}{R\Delta t} = 5.60$ rad/s^2.

7. a) $\omega_0 = \dfrac{v_0}{R} = \dfrac{100\times 1000}{(0.4)(3600)} = 69.44$ rad/s.

b) $\alpha = -12.79$ rad/s^2.

c) $d = 2\pi R(vueltas) = 75.40$ m.

8. a) $\theta_1 = \dfrac{1}{2}\alpha {t_1}^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2\theta_1}{\alpha}} = 3.88$ s.

b) $\omega_1 = \alpha t_1 = 7.77$ rad/s.

9. Opción correcta: (c).

Opción correcta: (b).

10. a) $\alpha = \frac{2\theta_1}{t_1^2} = \frac{\pi}{20}$ rad/s^2.

b) $\omega_1 = \alpha t_1 = 2\pi$ rad/s.

c) $a_t = \alpha r$, $a_t = \frac{\pi}{20}$ m/s^2;

$a_c = a_r = \omega^2 r$, $4\pi^2$ m/s^2.

11. a) $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t$.

b) $a_t = \alpha R$ y $a_r = R\omega^2 = R\alpha^2 t^2$.

c) $v = R\omega = R\alpha t$.

12. $\mu = \frac{R\omega^2}{g} = \frac{R(2\pi f)^2}{g} = \frac{R4\pi^2}{gT^2}$. μ=0.03.

13. a) $v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}}$, v=19.8m/s.

b) T=Mg= 9.8 N.

14. $\Delta\theta = \frac{1}{2}\omega_0 t = 30000$ rev o vueltas.

s=2πrn=πdn=π (15000) =47,124 m.

15. a) $v = \sqrt{Rg} = 3.13$ m/s.

b) $\omega = \frac{v}{R} = 3.13$ rad/s.

16. $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{D^2 g}{2Rh}$. a_c=176.4 m/s^2.

17. $\mu_e = \frac{v^2}{Rg}$. $\mu_e = 0.02$.

18. $cos\theta = \frac{gT^2}{4r\pi^2}$. θ=70.42°.

19. a) U_B=mgy=mgRcosθ

b) $mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$

c) $a_c = a_r = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$.

$a_t = R\alpha = gsen\theta$.

d) $2 = 3\cos\theta \Rightarrow \theta = ang\cos\frac{2}{3}$.

20. $y = R\frac{2}{3} = 0.8$ m.

21. a) En la parte más baja.

b) $v^2 = \frac{R}{m}(T_R - mg)$. v=8.91m/s.

22. $\tan\beta = \frac{v^2}{Rg}$ **. β=7.18º.**

23. $N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{v_i^{\,2}}{4\pi\mu gr}$. N=10.2. ∴ N= 11.

Capítulo 12

1. $I_Y = 4ma^2$. I_Y=0.04 kg·m^2.

2.

$I_Z = m_1(2a^2) + m_2(2a^2) + m_3 a^2 + m_4 a^2 = 30.0$ kgm^2.

3. $K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{3}{8}Ml^2\omega^2$. K=12.0 J.

4. a) $I = I_v + I_e = \left(\frac{m}{3} + \frac{47M}{45}\right)L^2$

b) $K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3} + \frac{47M}{45}\right) L^2\omega^2$

5. $I_O = r^2 \left[(m_1 - m_2)\frac{gt_1^2}{2y_1} - (m_1 + m_2)\right]$.

6. $l = \frac{1}{0.1}\frac{v^2}{g}$; $l \approx 4.1$ m.

7. $l = \frac{7}{10}\frac{v^2}{gsen\theta}$; $l \approx 1.10$ m.

8. $\frac{1}{3} mla_v = \frac{l}{2} mg \Rightarrow a_v = \frac{3}{2} g$.

Para la moneda $a_2 = g$.

La aceleración lineal inicial del extremo de la varilla es mayor que la inicial de la moneda.

9.

$K_c = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2} MV^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} K_b$

.

El cilindro tiene más energía cinética.

10. $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v\sqrt{gh}$.

11. Defínase $k = \frac{I_{cm}}{mR^2}$. La velocidad de traslación con que llegan al final del plano inclinado es $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}}$. El cuerpo que tiene el menor valor de *k* es el primero en llegar.

12. **A**l mismo tiempo.

13. $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + {m_3}/{2}} g$. $v = aT = \sqrt{2Ha}$.

14. a) $v = \sqrt{\frac{20gr}{7}}$.

b) $\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{20g}{7r}}$.

c) $N - mg = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow N = \frac{27}{7} mg$.

15. a) $\alpha = \frac{\omega_1}{t_1}$, 60 rad/s^2.

b) $\tau = I\alpha = \frac{1}{2} Mr^2\frac{\omega_1}{t_1}$, 0.6 Nm.

c) $P = \tau\omega = \frac{1}{2} Mr^2\frac{\omega_1^2}{t_1}$, 180.0 W.

16. a) $\alpha = \frac{RMg}{I + 2MR^2}$

b) $a = \frac{R^2 Mg}{I + 2MR^2}$

c) $T_1 = \frac{MR^2}{I + 2MR^2} Mg$, $T_2 = \frac{I + MR^2}{I + 2MR^2} Mg$.

17. $\omega = \left[\frac{2mgdsen\theta + kd^2}{mR^2 + I}\right]^{\frac{1}{2}}$

$v = \left[\frac{2mgdsen\theta + kd^2}{m + \frac{I}{R^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

18. a) $\tau = I\alpha = RF \Rightarrow \alpha = \frac{RF}{I}$.

α =4.44 rad/s^2.

b) $t_1 = \dfrac{\omega_0}{\alpha}$. t_1=5.06 s.

19. a) $a = \dfrac{4}{3}\dfrac{F}{M}$.

b) $f = \dfrac{F}{3}$. La fuerza de fricción apunta en el mismo sentido que *F*.

c) $v = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{FD}{M}}$.

20. $a = \dfrac{2m_2 - 2m_1 sen\theta - 2\mu m_1 \cos\theta}{2m_1 + 2m_2 + m_3} g$.

$T_1 = m_1 g\left[\dfrac{2m_2 + (2m_2 + m_3)(sen\theta + \mu\cos\theta)}{2m_1 + 2m_2 + m_3}\right]$

.

$T_3 = m_2 g\left[\dfrac{2m_1(1 + sen\theta + \mu\cos\theta) + m_3}{2m_1 + 2m_2 + m_3}\right]$.

a=4.11 m/s^2, T_1=32.11 N, T_3=34.16 N.

21. a) $a' = \dfrac{2Msen\theta - 4m}{3M + 8m} g$.

b) $T = \dfrac{3 + 4sen\theta}{3M + 8m} mMg$

22. $T = \sqrt{\dfrac{3L}{gsen\theta}}$.

23. $\alpha = \dfrac{\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2}{2\theta}$. α= 0.48 rad/s^2.

$\tau = mr^2\left(\dfrac{\omega_f{}^2 - \omega_0{}^2}{2\theta}\right)$. τ = 1.53 Nm.

24. $t_1 = \dfrac{\omega_1}{\alpha} = \dfrac{2ml\omega_1}{3F}$. t_1= 6.67 s.

25. $\tau = \dfrac{P}{\omega}$. τ=524.7 Nm.

26. a) $\omega_1 = \dfrac{v_1}{r}$; ω_1= 57.7 rad/s.

b) $\alpha = \dfrac{\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2}{2(\theta_2 - \theta_1)}$. α = -9.47 rad/s^2.

c) $s = r(\theta_2 - \theta_1)$, *s*= 67.7 m.

27.- a) $a = \dfrac{2H}{t_1{}^2}$, *a*=4.44 m/s^2.

b) $T_2 = m_2 g - m_2 a = m_2\left(g - \dfrac{2H}{t_1{}^2}\right)$;

$T_1 = T_2 - \dfrac{Ia}{r^2} = m_2 g - \dfrac{2m_2 H}{t_1{}^2} - m_p\dfrac{H}{t_1{}^2}$;

T_2=42.88 N, T_1 =40.66 N.

c) $m_1 = \dfrac{T_1}{g + a} = \dfrac{T_1}{g + \dfrac{2H}{t_1{}^2}}$; m_1=2.86 kg.

28. a) $a = \dfrac{mR^2}{I + mR^2 + MR^2} g$; *a*= 3.09 m/s^2.

b) $T_1 = \dfrac{MR^2}{I + mR^2 + MR^2} mg$, T_1= 12.38 N.

$T_2 = \dfrac{I + MR^2}{I + mR^2 + MR^2} mg$. T_2= 40.23 N.

29. a) $a = \frac{1}{4}$g.

b) $T = \frac{3}{8}Mg$.

30. a) $\alpha = \frac{\omega_0}{t_2}$; α= 3.14 rad/s^2.

b) $\theta_2 - \theta_0 = \frac{\omega_0{}^2}{2\alpha} = \frac{\omega_0 t_2}{2}$;

157.1 rad=25 vueltas.

c) $f = \frac{I\alpha}{R} = \frac{MR\omega_0}{2t_2}$; 0.31 N.

Capítulo 13

1. $\vec{L} = \vec{r}x\vec{p}$.

2. Suma nula de torcas externas.

3. Aumenta.

4. Disminuye.

5. a) $\omega_f = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\omega_i$, $\omega_f = 22$ rpm

b) $\Delta K = \frac{1}{2} mR^2 \left(1 + \frac{2m}{M}\right)\omega_i^2$.

$\Delta K = 148.5\omega_i{}^2 = 148.5\left(\frac{20\pi}{60}\right)^2 = 162.85$ J.

6. ω_f = [(½(MR^2) + mR^2)/(½(MR^2) + mr^2)]ω_i.

ω_f = 4.1 rad/s.

7. a) $\omega = -\frac{mRv_0}{I}$; ω=-0.36 rad/s.

b) $W = \Delta K = \frac{1}{2} m v_0{}^2$; W= 67.50 J.

8. a) $I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f}$. ω_f =4 rev/s.

b) $\frac{K_{rf}}{K_{ri}} = \frac{\frac{1}{2} I_f \omega_f{}^2}{\frac{1}{2} I_i \omega_i{}^2} = \frac{I_i}{I_f}$. El valor de la energía cinética final es el doble de la energía cinética inicial, aumenta debido a la energía producida por el trabajo realizado por los músculos de la persona.

9. a) ω_f = [($2mr_i^2 + I_{e+b}$)/ ($2mr_f^2 + I_{e+b}$)]ω_i;

ω_f = 1.91 rad/s.

b). $K_i = \frac{1}{2}(2I_i + I_{e+b})\omega_i{}^2$,

$K_f = \frac{1}{2}(2I_f + I_{e+b})\omega_f{}^2$.

K_i=2.53 J, K_f=6.46 J.

10. $L_m = -mr^2\omega$ y

$L_{4m} = 4m\left(\frac{r}{2}\right)^2 \omega = mr^2\omega$.

El ímpetu angular total es nulo.

11. $L_a = L_1 + L_2 = I(\omega_1 - \omega_2)$.

$L_d = (I_1 + I_2)\omega_f = 2I\omega_f$.

12. a) $\omega = \frac{Rmv}{I_e + mR^2}$.

b) $\frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{-M}{M + \frac{5m}{2}}$.

13. a) $\omega_f = \omega$.

b) $h = \dfrac{R^2\omega^2}{2g}$.

14. a) $L_1 = I_{cm}\omega$. L_1= 0.016 kgm^2/s.

b) $L_2 = I_{cm}\omega + m\dfrac{r^2}{4}\omega$. L_2= 0.026 kgm^2/s.

15. a) $\omega_f = \dfrac{I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$.

b) $K_f - K_i = -\dfrac{1}{2}\dfrac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 + \omega_2)^2$.

16. a) $\omega_f = \dfrac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$. 13.33 rad/s.

b) $\Delta K = K_f - K_i = -\dfrac{1}{2}\dfrac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\omega_1{}^2$.

ΔK=-133.33 J.

17l=17.50kgm^2/s.

$l = m_1\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 \dfrac{2v}{L} + m_2\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 \dfrac{2v}{L} = (m_1 + m_2)\dfrac{Lv}{2}$

.

18. $v_f = \dfrac{mLv_0 - 2I\omega}{mL}$.

19. $m = \dfrac{dM}{x}$, m=31.25 g.

20. $T_d = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{L}{2}Mg + lmg\right)$. T_d=529.2 N.

$T_i = \dfrac{1}{2}Mg + \left(1 - \dfrac{l}{L}\right)mg$. T_i=842.8 N.

21. $F = \dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}mg$.

22. $x = Lsen\varphi cos\theta / sen(\varphi + \theta)$. x=4.0 m.

23. $F = \dfrac{Mg}{3}$, $x = \dfrac{3L}{4}$.

24. $N_b = P + \dfrac{l_1}{2l}F$

$N_a = P + \dfrac{2l - l_1}{2l}F$

$T = \left(P + \dfrac{l_1}{l}F\right)\cot\theta$.

Capítulo 14

1. La energía total es cuatro veces menor; la frecuencia permanece constante.

2. La segunda opción.

3. $\sqrt{2}\,T$

4. Constante de fase igual a $\pi/2$.

5. a) $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{3}{2} = 1.5$ s^{-1}. $T = \dfrac{2}{3} = 0.66$ s.

b) A=4.0 m.

c) $\varphi = \pi$.

d) $x = 4.0cos\frac{7\pi}{4} = 2.83$ m.

6. a) A= 6.0 m. $f = 1.5$ Hz. $T = \frac{1}{f} = \frac{2}{3}$ s.

b) $v = -A\omega sen(\omega t + \varphi)$ y

$a = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi)$.

$v = -18\pi sen(3\pi t + \pi)$ m/s y

$a = -18\pi(3\pi)cos(3\pi t + \pi)$ m/s^2.

c) $x_1 = 6cos(4\pi) = 6.0$ m,

$v_1 = -18\pi sen(4\pi) = 0$ m/s,

$a_1 = -54\pi^2 cos4\pi = -54\pi^2$ m/s^2.

d) $\Delta x = x_1 - x_0 = 12.0$ m.

7. a) $x_3 = 4sen257rad = -2.3$ m.

b) $v_3 = 4(85)cos257rad = 2.8\text{x}10^2$ m/s.

c) $a_3 = -4(85)^2 sen257rad = 1.7\text{x}10^4$ m/s^2.

d) $v_{max} = 4(85) = 340$ m/s.

e) $a_{max} = A\omega^2 = 4(85)^2 = 28900$ m/s^2.

8. a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 3.1\times10^{-3}\,s$.

b) $v_{\max} = A\omega$, $v_{\max} = 4.0$ m/s.

c) $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$;

E=80.0 J.

9. a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; T=1.57 s.

b) $v_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$, $a_{\max} = A\omega^2 = A\frac{k}{m}$;

0.40 m/s y 1.6 m/s^2.

c) $K = \frac{1}{2}m(v_{\max})^2 = \frac{1}{2}mA^2\frac{k}{m}$,

$U_{\max} = \frac{1}{2}k(x_{\max})^2 = \frac{1}{2}kA^2$;

valores iguales a 0.04 J.

10. a) $v^* = -A\omega sen\omega t^* = -\frac{4}{5}A\omega$;

-0.32 m/s.

$a^* = -A\omega^2 cos\omega t^* = -\frac{3}{5}A\omega^2$; -0.96 m/s^2.

b) Δt=t_0-t_8=0.23 s.

11. a) $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

b) Las fracciones de energía cinética y potencial son 0.75 y 0.25.

12. a) $A = \frac{gT^2}{4\pi^2}$, el valor es 0.25 m.

b) $f = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 A}}$; el valor es 2.23 Hz.

13. a) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-a}{x}}$; 5.03 Hz.

b) $m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2}$; 0.50 kg.

c) $x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2$; 0.33 m.

14. a) $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$; k=200.0 N/m.

b) $m = \frac{kA^2}{(v_{\max})^2} = \frac{2E}{(v_{\max})^2}$; 1.39 kg.

c) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{v_{\max}}{A}$; 1.91 Hz.

15. a) $k=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m$; k=126.3 N/m.

b) $A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{E}{2m}}\left(\frac{T}{\pi}\right)$. A=0.18 m.

16. $A=\frac{v_{\max}}{\omega}=\frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$.

17. a) $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$; f=1.59 Hz.

b) $v_{\max}=A\omega$, $v_{\max}=\sqrt{\frac{2(U_i+K_i)}{m}}$; 0.22 m/s. $x_1=Acos\omega t_1=Acos\frac{3\pi}{2}=0$.

c) $K=E=\frac{1}{2}m(v_{\max})^2$, . La energía potencial del resorte cuando se alcanza la rapidez máxima es cero.

18. $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$.

19. a) $T=\frac{1}{f}$; T=0.0143 s.

$\omega=2\pi f$; $\omega=439.82$ rad/s.

b) $m=\frac{k}{\omega^2}=\frac{k}{4\pi^2 f^2}$; 0.72 g.

c) $a_{\max}=\omega^2 A$; 1934.4 m/s^2.

$F=kA$, 1.4 N.

20. **S**e duplica.

21. a) $T=2\pi\sqrt{(L/g.)}$. T = 3.0 s.

b) $E_{total}=K=½m(v_{máx})^2$; E_{total} = 14.30 (J)

c) $\theta_{máx}=x_{máx}/L$. $\theta_{máx}$ = 0.44 rad.

22. a) $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$; $\omega=\sqrt{\frac{9.8}{1.50}}=2.56$ rad/s.

b) $\theta=\theta_0\cos\omega t$.

c) $E=K_{\max}=\frac{1}{2}m(v_{\max})^2=\frac{1}{2}mL^2\theta_0{}^2\omega^2$.

E= 0.07 J.

23. $T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{R^2}{2}+d^2}{gd}}$.

24. $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$.

Capítulo 15

1. a) A=0.00327 m.

b) $\lambda=\frac{2\pi}{k}=0.0871$ m; $T=\frac{2\pi}{\omega}=2.31$ s;

$f=\frac{1}{T}=0.433$ Hz.

c) $v=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}$; el valor es v=0.0377 m/s.

d).y=0.00192m.

$y=0.00327sen(72.1\times0.225-2.72\times18.9)$

2. $\omega=2\pi f$; ω=31.4 rad/s. $k=\frac{\omega}{v}=1.57$ rad/m. $y(x,t)=(0.120)sen(1.57x-31.4t)$.

3. a) $k=\frac{2\pi}{\lambda}=3.49$ m^{-1}.

b) $v=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}$. $v=\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda}}=31.51$ m/s.

4. A=0.02 m. $\lambda=\frac{2\pi}{k}=2.98$ m.

$f=\frac{\omega}{2\pi}=0.58$ Hz. $v=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}$=1.72 m/s.

5. A=0.25 m; ω=40 rad/s; k=0.30 rad/m; $\lambda=\frac{2\pi}{k}=20.94$ m. $v=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{k}$=133.33 m/s.

Movimiento en dirección positiva del eje X.

6. a) $T=4t_1$=0.680 s.

b) $f=1/T$, f=1.47 s^{-1}.

c) $v=\frac{\lambda}{T}=2.06$ m/s.

7. $t_2-t_1=\frac{y_2-y_1}{6.0\times 600}$;

valor: 1.1x10^{-3} s=1.1 ms.

8. a) $\Delta x=x_2-x_1=\frac{v}{6f}$, valor: 11.7 cm.

b) $\Delta fase=\omega(t_1-t_2)$, valor: π rad.

9. a) $f=\frac{\omega}{2\pi}=64$ Hz.

b) $\lambda=\frac{v}{f}=1.26$ m.

A=4.0 cm. $k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f}{v}=5$ m^{-1}.

ω=400 s^{-1}.

$\varphi=\frac{\pi}{2}$. Signo correcto de ω: negativo (-).

10. $y(x,t)=(8.00\text{ cm})sen\left(\left(7.85\ \frac{\text{rad}}{\text{m}}\right)x+(18.85\ \frac{\text{rad}}{\text{s}})t\right)$. $y(x,t)=(8.00\text{ cm})sen\left(\left(7.85\ \frac{\text{rad}}{\text{m}}\right)x+\left(18.85\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)t+2.36\text{ rad}\right)$.

11. a) $3.0v-15=0\Rightarrow v=5.0$ m/s hacia +X,

b) $3.0v+15=0\Rightarrow v=-5.0$ m/s hacia -X,

c) $2.0v+15=0\Rightarrow v=-7.5$ m/s hacia -X,

d) $-0.5v+12=0\Rightarrow v=24$ m/s hacia +X.

12. a) f=75 Hz.

b) $T=\frac{1}{f}=13$ ms.

13. A=1.00 cm. $\omega=2\pi f$ =3456 rad/s.

$k=-\frac{\omega}{v}$=10.5 m^{-1}.

14. a) $u(1.6,0.2)=(0.120\text{ m})(4\pi)$x $co\,s(0.2\pi+0.8\pi)=-0.48\pi$ m/s,

$a(1.6,0.2)=-(0.120\text{ m})(4\pi)^2 se\,n\,\pi=0$

b) $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$ m;

$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4\pi}=0.5$ s; $v=\frac{\omega}{k}=32$ m/s.

15. a) $10\pi+3\pi v=0\Rightarrow v=-\frac{10}{3}$ m/s dirección –X.

b) $y(0.1,0)=(0.350\text{ m})sen\left(0.3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=(0.350)sen(0.55\pi)=0.35$ m.

c) $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2}{3}$ m; $f=\frac{\omega}{2\pi}=5$ Hz.

d) $u_{max}=(0.350\text{ m})(10\pi\text{ s}^{-1})=3.50\pi$ m/s.

16. a) $u(x,t)=-(3.27\text{ mm})\left(2.72\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$ x $co\,s(-35.1855\text{ rad})=7.20$ mm/s.

b) $a=-A\omega^2 sen(kx-\omega t)=-14.2$ mm/s^2.

17. $\tan\varphi=\frac{4.5}{1.7}$, $\varphi=1.2096$ rad.

18. a) $\frac{u_{\max}}{v}=\frac{A\omega}{\frac{\omega}{k}}=Ak=\frac{2\pi A}{\lambda}$.

b) No depende del material de la cuerda.

19. $v=\frac{4}{20}=0.20$ m/s.

20. $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, v=19.8 m/s.

21. a=3.00 m/s^2.

22. $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. v=129 m/s.

23. A=0.12 mm. $\omega=2\pi f\rightarrow\omega=628.3$ rad/s. $k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f}{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}\rightarrow k=140.5$ m^{-1}. El signo correcto es + (más).

24. $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}\rightarrow v=519.62$ m/s.

25. a) $v=\sqrt{\frac{\mu g y}{\mu}}=\sqrt{gy}$.

b) $t=\int_0^L\frac{dy}{\sqrt{gy}}=2\sqrt{\frac{L}{g}}$.

ÍNDICE ALFABÉTICO