

# Teoría de filtros del tipo Chebyshev: Función de transferencia



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Mauricio López Villaseñor  
María del Rocío Ortiz Pedroza  
María Teresa García González  
Enrique Rodríguez de la Colina

---

# Teoría de filtros del tipo Chebyshev

*Función de transferencia*

Mauricio López Villaseñor  
María del Rocío Ortiz Pedroza  
María Teresa García González  
Enrique Rodríguez de la Colina

---

Notas de curso



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

*Rector General*

Dra. Norma Rondero López

*Secretario General*

Dra. Verónica Medina Bañuelos

*Rector de la Unidad Iztapalapa*

Dr. Javier Rodríguez Lagunas

*Secretario de Unidad*

Dr. Román Linares Romero

*Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería*

Dr. Juan José Ambriz García

*Coordinador de Extensión Universitaria*

Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas

*Jefe de la Sección de Producción Editorial*

---

Teoría de filtros del tipo Chebyshev

Primera edición: 2024

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX,

México

*ISBN Colección: 978-607-28-2107-1*

*ISBN Volumen: 978-607-28-3336-4*





## Índice general

<b>1</b>	<b>Prefacio</b> .....	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Aproximación de un sistema</b> .....	<b>9</b>
2.1	Introducción	9
2.2	Criterios de realizabilidad en sistemas	10
2.3	Aproximación en el dominio del tiempo	11
2.4	Aproximación en el dominio de la frecuencia	12
<b>3</b>	<b>Filtros</b> .....	<b>13</b>
<b>3.1</b>	<b>Filtros ideales</b>	<b>13</b>
3.1.1	Filtro pasa bajas ideal .....	15
3.1.2	Filtro pasa banda ideal .....	16
3.1.3	Filtros pasa altas y rechaza banda ideales .....	18
3.1.4	Filtro pasa todo ideal .....	21
<b>3.2</b>	<b>Retardo de fase y de grupo</b>	<b>22</b>
<b>3.3</b>	<b>Filtros reales</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>La aproximación Chebyshev</b> .....	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Aproximación del Tipo I</b> .....	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>Aproximación del Tipo II</b> .....	<b>95</b>
	<b>Problemas propuestos</b> .....	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Pares de transformadas</b> .....	<b>147</b>
A.1	Transformada inversa de la señal rectangular	147
A.2	Propiedad de desplazamiento en el tiempo	150
A.3	Transformada de $f(t - t_0)$	151

<b>A.4</b>	<b>Propiedades de Desplazamiento en frecuencia</b>	<b>152</b>
<b>A.5</b>	<b>Transformada de <math>f(t)e^{j\omega_0 t}</math></b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Aproximación Butterworth</b> .....	<b>157</b>
	<b>Bibliografía</b> .....	<b>161</b>
	<b>Index</b> .....	<b>165</b>



# 1. Prefacio

Este documento hace referencia a los sistemas lineales, con particular atención en las características de un filtro. Está dirigido a los alumnos cursando una licenciatura en ingeniería en electrónica, ingeniería biomédica o afines. Sirve como material de apoyo en las unidades de enseñanza y aprendizaje (UEA) que requieran de una herramienta de análisis en el estudio de la respuesta en frecuencia de un sistema lineal y en el diseño de filtros analógicos o digitales; UEA tales como procesamiento digital de señales (en el diseño de filtros digitales IIR), circuitos eléctricos III (en el planteamiento de diferentes teorías de aproximación en frecuencia) y en electrónica III (diseño de filtros activos) impartidas en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa. En este trabajo no se enfoca de manera especial a las aplicaciones en las áreas de procesamiento digital de señales, de la electrónica analógica o el de circuitos eléctricos, simplemente se desea presentar la teoría de aproximación en frecuencia para el diseño de los filtros pasa bajas basados en los polinomios de Chebyshev, puntualizando en su función de transferencia y en sus características en frecuencia. Sin embargo, con la finalidad de resaltar el uso de esta teoría de aproximación se incluye un par de ejemplos en el diseño de filtros analógicos y digitales. Por lo que se espera que el lector pueda usar esta teoría como fundamento en el diseño de dichos filtros.

En el capítulo 2 se presenta una introducción a los conceptos básicos de la aproximación en sistemas en el dominio del tiempo, así como en el de la frecuencia, estableciendo la esencia del problema. También, se presentan los criterios de realizabilidad en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

En el capítulo 3 se analizan las características de los filtros enfatizando en el comportamiento ideal en términos de su amplitud y/o fase. Inicialmente, se parte de un sistema ideal que debe eliminar la componente no deseada de la señal aplicada a la entrada del sistema y dejar pasar la señal deseada. Se presenta la clasificación de los filtros ideales en función del patrón de comportamiento en frecuencia, tales como el pasa bajas, pasa altas, pasa banda y rechaza banda; para cada tipo de filtro se presenta su respuesta al impulso verificando la no realizabilidad de estos filtros ideales. En este capítulo también se explican los conceptos de retardo de grupo y de fase, finalizando con una introducción a los filtros reales en la que se particulariza en las características de las frecuencias que delimitan las bandas de paso y de rechazo, así como de los valores de las potencias asociadas a cada frecuencia.

En el capítulo 4 se presentan los criterios de diseño que permiten caracterizar la función de transferencia de un filtro pasa bajas utilizando los polinomios Chebyshev, observándose dos tipos de aproximación, la del tipo I y la del tipo II. La primera identifica un rizo en la banda

de paso, mientras que en la segunda el rizo se observa en la banda de rechazo. Inicia con la definición de la expresión de los polinomios Chebyshev y se da una interpretación de éstos.

El capítulo 5 analiza el comportamiento en magnitud en potencia para la aproximación del tipo I identificándose cuatro propiedades fundamentales. Continúa con la obtención de la expresión que permite determinar el orden del filtro a partir de condiciones impuestas por el diseñador en el comportamiento en frecuencia. Se establecen las expresiones que determinan la posición de los polos en un diagrama de polos y ceros y se realiza una comparación de éstas con la ubicación de los polos obtenida a partir de la aproximación Butterworth para condiciones similares de diseño. Se fijan criterios para determinar la posición de los polos para la aproximación Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos obtenidos en la aproximación Butterworth, de manera que el lector debe tener un mínimo de antecedentes de la teoría de aproximación Butterworth. Esta sección finaliza con la descripción de la determinación de la función de transferencia a partir de la ubicación de polos localizados en el diagrama de polos y ceros, que al evaluarla en la frecuencia se comprobará que tiene el comportamiento deseado. Además, incluye tablas que facilitan la determinación de la función de transferencia. Se plantean diferentes ejemplos que le permite al lector familiarizarse con los métodos descritos.

En el capítulo 6 se presenta el desarrollo de la aproximación Chebyshev del tipo II. Para ello, se analiza el comportamiento en magnitud en potencia. Se obtiene la expresión que fija el orden del filtro y las expresiones que determinan la posición de los polos en un diagrama de polos y ceros. El capítulo finaliza con la descripción sobre cómo establecer la función de transferencia a partir de la ubicación de polos localizados en el diagrama de polos y ceros, que al evaluarla en la frecuencia se demostrará que tiene el comportamiento deseado. Se plantean ejemplos que permiten al lector familiarizarse con los métodos descritos.

En la última sección del documento se proporciona una lista de problemas propuestos para complementar los conceptos.

Se incluyen dos apéndices, en el primero se muestran a detalle las deducciones de las expresiones de las respuestas al impulso,  $h(t)$ , examinadas en el capítulo dos a partir de la respuesta ideal del filtro pasa bajas, pasa altas, pasa banda y rechaza banda. El segundo proporciona con detalle el análisis que se lleva a cabo para determinar la ecuación que describe la ubicación de los polos para el diseño de un filtro pasa bajas basado en la aproximación Butterworth.

Mauricio López Villaseñor  
María del Rocío Ortiz Pedroza  
María Teresa García González  
Enrique Rodríguez de la Colina





## 2. Aproximación de un sistema

### 2.1 Introducción

En el contexto de la ingeniería, un sistema se define como aquel elemento o dispositivo físico que produce una señal de salida como respuesta a una señal de entrada y es común llamar a la señal de entrada excitación y a la señal de salida respuesta. En los sistemas lineales se cumple el principio de superposición, es decir, la respuesta de un sistema lineal a un número de excitaciones que se aplican en forma simultánea es igual a la suma de las respuestas del sistema cuando cada una de las excitaciones se aplica en forma individual.

Gran parte del estudio que se realiza sobre los sistemas lineales en las diferentes disciplinas de la ingeniería ya sea eléctrica, mecánica, hidráulica, química, etc., se puede dividir en dos partes, el *análisis* y la *síntesis*. En el análisis se está interesado en encontrar las características o las propiedades de algún sistema ya existente. En ocasiones el sistema puede representarse de manera esquemática, mostrando las conexiones de los elementos idealizados. En este caso, el esquema define un *modelo* del sistema, y el análisis entonces proporciona las propiedades del modelo. Si el sistema (o modelo) está completamente especificado, sus propiedades son únicas. Así, en un problema de análisis, hay sólo una solución.

En la *síntesis*, por otro lado, el punto de partida es un conjunto deseado de propiedades. El objetivo es crear un modelo que tenga dichas propiedades y luego determinar un sistema físico que cumpla con ese modelo. En general, habrá más de un sistema que cumpla con las especificaciones deseadas. Así, en un problema de síntesis, la solución pocas veces es única. Debido a esta falta de unicidad usualmente se requiere de un último paso en el proceso de síntesis, específicamente, la evaluación de los diferentes sistemas con la finalidad de obtener cuál de ellos es el que mejor se aproxima a la solución deseada. Otra forma de obtener el sistema deseado es incluir propiedades adicionales a aquellas especificadas originalmente, de manera que se determine un único sistema. El proceso de síntesis es considerado más complicado que el de análisis[12].

El objetivo de este documento es examinar el proceso de síntesis para una clase particular de sistemas, específicamente, filtros para circuitos eléctricos. Tales filtros se encuentran en los sistemas de comunicación y en el campo del procesamiento de señales. Actualmente, es difícil encontrar un dispositivo electrónico moderadamente complejo que no contenga uno o más filtros. En este estudio de filtros, se está interesado en encontrar una herramienta matemática de diseño para satisfacer ciertas características particulares de dichos filtros. Para llevar a cabo dicho objetivo se requiere considerar varios tópicos. El primero es establecer

los criterios de realizabilidad en los sistemas y segundo el determinar el método que permita expresar o aproximar las propiedades de un filtro, de tal forma que la expresión obtenida pueda ser utilizada por el lector para llevar a cabo el proceso de síntesis. Este último tópico es llamado *aproximación*.

Con relación a la aproximación, la esencia del problema estriba en aproximar un sistema o señal, que está representada por una función dada  $f(t)$ , por otra función  $f_a(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  en un cierto intervalo, en particular para  $x_1 \leq x \leq x_2$ , los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  en la función de aproximación se fijan de acuerdo con el criterio de error seleccionado, por ejemplo, si se escoge el error como [7]:

$$\varepsilon = f(t) - f_a(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \quad (2.1)$$

es posible considerar los siguientes criterios de error:

1. Mínimos cuadrados. El valor de  $I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  se minimiza de manera que

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \int_{x_1}^{x_2} |\varepsilon|^2 \omega(x) dx \quad (2.2)$$

donde  $\omega(x)$  es una función de ponderación (o de peso) la cual obliga al error a permanecer en ciertos sub-intervalos.

2. Máximamente plano. Las primeras  $n - 1$  derivadas de  $\varepsilon$  se hacen cero para  $x = x_0$ .
3. Chebyshev. El valor de  $\mu$  se minimiza en el intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$  donde  $\mu = |\varepsilon|_{max}$ .
4. Interpolación. El valor de  $\varepsilon$  se hace cero en un conjunto de  $n$  puntos en el intervalo  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

Una vez elegido el criterio de error, se determina la forma particular de la función de aproximación. Esta forma depende de la descripción que se adopte, se puede emplear una descripción en el dominio del tiempo (llamada aproximación en el dominio del tiempo) o en el dominio de la frecuencia (llamada aproximación en el dominio de la frecuencia).

Suponga que  $f(x)$  representa una función magnitud en el dominio de la frecuencia, y que la función magnitud es racional en  $\omega^2$ , entonces

$$f_a(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \frac{\alpha_1 + \alpha_3 x + \alpha_5 x^2 + \dots}{\alpha_2 + \alpha_4 x + \alpha_6 x^2 + \dots} \quad (2.3)$$

con  $x = \omega^2$ . Mientras que, los valores  $\alpha_k$  deben estar restringidos para asegurar que  $f_a(x; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \geq 0$ . Por otro lado, en el dominio del tiempo,  $f(t)$  podría representar la respuesta al impulso de un sistema. La clave en cualquier problema de aproximación yace en seleccionar un criterio adecuado de error que se ajuste a las restricciones de realizabilidad.

En las siguientes secciones se presenta el criterio de realizabilidad en los sistemas y las bases fundamentales de la aproximación en el tiempo y en la frecuencia.

## 2.2 Criterios de realizabilidad en sistemas

Un sistema físicamente realizable no puede tener una respuesta que se adelante a la función de excitación aplicada a dicho sistema. Esto se conoce como condición de causalidad. Se dice que un sistema es causal si su salida es cero para  $t < 0$ . Así, la respuesta al impulso,  $h(t)$ , de un sistema físicamente realizable debe ser cero para  $t < 0$ . Este es un criterio necesario para la realización física en el dominio del tiempo. Del estudio que se llevará a cabo en el siguiente capítulo de los filtros ideales se observará que ninguno de ellos es causal, ya que el cambio abrupto de la respuesta en frecuencia da como resultado en la respuesta al impulso una función que se extiende de menos infinito a infinito. Concluyendo, aun cuando sería conveniente tener filtros ideales, éstos no son físicamente realizables.

También, es posible establecer un criterio de realizabilidad en el dominio de la frecuencia para un filtro con una forma particular en su respuesta en frecuencia  $H(\omega)$ , ya sea para la magnitud de la respuesta en frecuencia  $|H(\omega)|$  y/o para la fase de la respuesta en frecuencia

(denotada por la expresión  $\arg[H(\omega)]$ ), tal que la respuesta al impulso sea causal; éste es el llamado criterio de Paley-Wiener. Este criterio establece que una función de magnitud par  $|H(\omega)|$  puede ser realizable para una respuesta causal si y sólo si se satisface[14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |H(\omega)|}{\omega^2} d\omega < \infty \quad (2.4)$$

Sin embargo, la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia  $|H(\omega)|^2$  tiene que ser integrable para que sea válido el criterio de Paley-Wiener, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (2.5)$$

esto es, la energía debe ser finita.

A pesar de que el comportamiento ideal no puede realizarse físicamente, es posible proporcionar aproximaciones que se acerquen a las condiciones ideales para satisfacer la mayoría de las aplicaciones.

## 2.3 Aproximación en el dominio del tiempo

El problema principal en la aproximación en el dominio del tiempo consiste en aproximar una respuesta al impulso  $h(t)$  por una función aproximada  $\hat{h}(t)$  tal que el error cuadrático sea mínimo[7], vea la ecuación (2.6).

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_0^{\infty} [h(t) - \hat{h}(t)]^2 dt \quad (2.6)$$

Un procedimiento generalmente eficiente en la aproximación del dominio del tiempo se logra utilizando funciones ortogonales  $\varphi_k(t)$ . La función aproximada  $\hat{h}(t)$  toma la forma

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) \quad (2.7)$$

tal que el error

$$\bar{\varepsilon}^2 = \int_0^{\infty} \left[ h(t) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) \right]^2 dt \quad (2.8)$$

se minimice cuando

$$\alpha_k = \int_0^{\infty} h(t) \varphi_k(t) dt \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

Si el conjunto ortogonal está compuesto de una suma de exponenciales de la forma  $e^{s_k t}$ , donde  $s_k$  es un término complejo, entonces la respuesta al impulso aproximada es

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{s_k t} \quad (2.10)$$

cuya transformada de Laplace es

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{s - s_k} \quad (2.11)$$

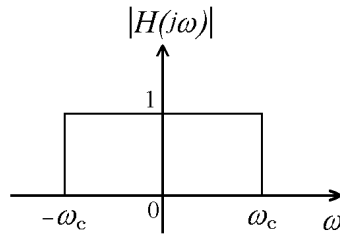
La realizabilidad se asegura si en el conjunto ortogonal  $\{\alpha_k e^{s_k t}\}$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , se cumple que la parte real de  $s_k$  sea menor o igual a cero,  $\text{Re}\{s_k\} \leq 0$ ; es decir, los polos deben ubicarse a la izquierda del eje imaginario del plano  $s$ .

## 2.4 Aproximación en el dominio de la frecuencia

En la aproximación en el dominio de la frecuencia el problema principal es encontrar una función racional  $H(s)$  que, al evaluarse en el eje  $j\omega$ , su magnitud  $|H(j\omega)|$  se aproxime a las características de un filtro ideal pasa bajas, vea la figura 2.1, de acuerdo con un criterio de error predeterminado[7].

Un filtro se entiende como un dispositivo de selección de frecuencias que se emplea para restringir el contenido espectral de una señal en una cierta banda de frecuencias.

En el próximo capítulo se estudian las propiedades de los filtros ideales en el dominio de la frecuencia en términos de su amplitud. Mientras que en los capítulos 4, 5 y 6 se lleva a cabo el estudio de un método de aproximación, específicamente la aproximación Chebyshev.



**Figura 2.1:** Característica de un filtro pasa bajas ideal

## 3. Filtros

### 3.1 Filtros ideales

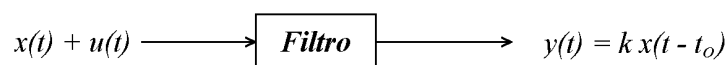
En esta sección se hace referencia a los sistemas lineales e invariantes en tiempo (LIT).

Antes de considerar cualquier característica de un filtro práctico conviene estudiar los filtros ideales en el dominio de la frecuencia. Cada uno de estos filtros ideales no son realizables, sin embargo, el concepto sirve como un modelo de referencia para el diseño de filtros prácticos.

Un filtro ideal se define como un sistema que permite el paso del contenido espectral de una señal de entrada manteniéndola sin cambio (espectro deseado) en una cierta banda de frecuencias y rechaza o atenúa totalmente la no deseada. Así, los filtros se usan para modificar el espectro en frecuencia de una señal eléctrica (señal que puede obtenerse inclusive a partir de organismos vivos) y, a su vez, son una parte esencial de la instrumentación médica y de los sistemas de comunicación y de control.

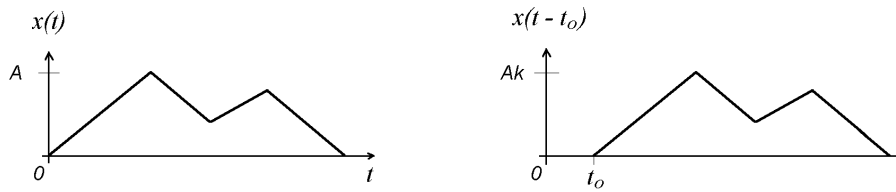
Inicialmente considere un filtro como el que se muestra en la figura 3.1, cuya entrada puede expresarse como  $x(t) + u(t)$ , donde  $x(t)$  representa la señal deseada y  $u(t)$  la no deseada, se asume que el espectro en frecuencia de la señal no deseada ocupa un intervalo de frecuencias diferente al de la señal deseada. El objetivo es filtrar la señal de entrada con el fin de eliminar la señal  $u(t)$  y conservar  $x(t)$  tan exacta como sea posible. Así, el proceso de filtrado con salida sin distorsión requiere de un cierto retardo y posiblemente un cambio en el nivel de la señal (diferencia de amplitud), de tal manera que la señal de salida sea una versión retardada de la señal deseada original; este concepto de retardo se expresa a través de la ecuación (3.1) y se muestra un ejemplo en la figura 3.2, donde sólo se muestra a la señal  $x(t)$  por simplicidad.

Además, tomando en cuenta que en sistemas de comunicación un pequeño retardo de tiempo entre la entrada y la salida no trae consecuencias de distorsión, la relación entre la salida  $y(t)$  y la entrada  $x(t) + u(t)$  se idealiza por (3.1), donde  $t_o$  es un retardo de tiempo y  $k$  representa el cambio de nivel en amplitud.



**Figura 3.1:** Diagrama a bloques de un filtro o sistema

$$y(t) = k x(t - t_o) \tag{3.1}$$



**Figura 3.2:** Señal de entrada y de salida para un filtro sin distorsión

La interpretación en el dominio de la frecuencia de la respuesta del sistema caracterizado por (3.1) se logra al obtener la transformada de Fourier, esta transformación se indica en (3.2). La primera concierne a una expresión en unidades de *rad/seg* y el segundo en unidades de Hertz, *Hz*, la cual, como se enfatizará más adelante, el término  $k e^{-j\omega t_0}$ , o  $k e^{-j2\pi f t_0}$ , corresponde a la característica de un filtro ideal con fase lineal.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= k X(\omega) e^{-j\omega t_0} = H(\omega) X(\omega) \\ Y(f) &= k X(f) e^{-j2\pi f t_0} = H(f) X(f) \end{aligned} \quad (3.2)$$

De las igualdades en (3.2) se deduce que para la respuesta en el estado estacionario, la respuesta en frecuencia está dada por (3.3), con  $H(\omega)$  la respuesta en frecuencia en unidades de *rad/seg*; mientras que  $H(f)$  en unidades de *Hz*.

$$\begin{aligned} H(\omega) &= k e^{-j\omega t_0} = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \\ H(f) &= k e^{-j2\pi f t_0} = |H(f)| e^{j\phi(f)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mientras que de las igualdades en (3.3) se determina que  $|H(\omega)|$  y  $\phi(\omega)$  están dados por (3.4) y  $|H(f)|$  y  $\phi(f)$  por (3.5). La primera expresión de los arreglos de ecuaciones (3.4) y (3.5), hace referencia a la respuesta en magnitud, mientras que la segunda hace referencia a la respuesta en fase.

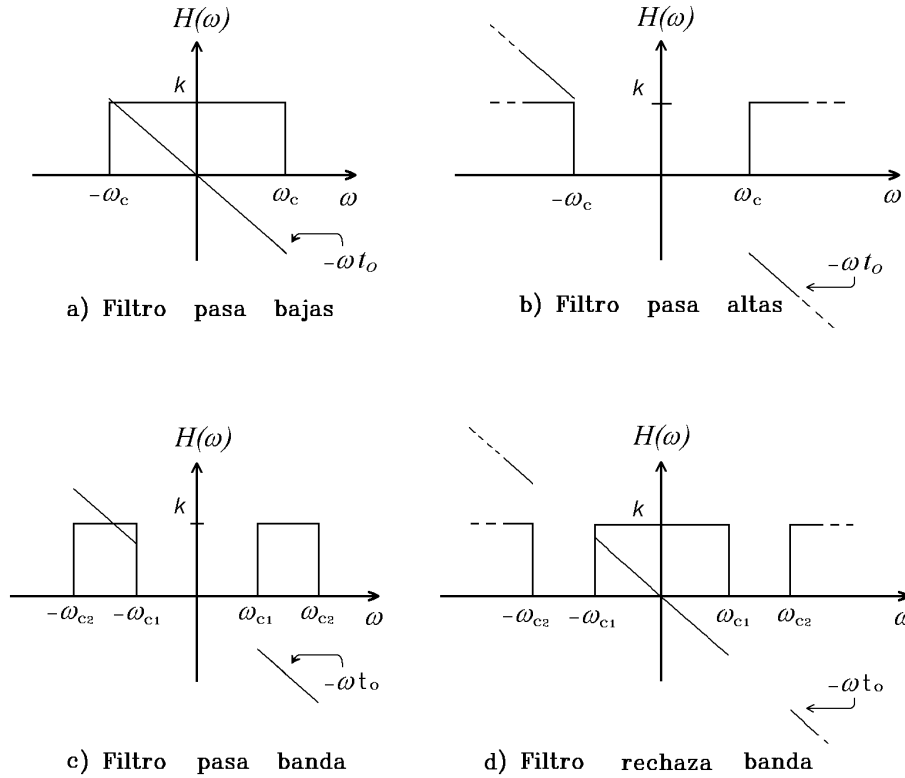
$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= k \\ \phi(\omega) &= \arg[H(\omega)] = -\omega t_0 \quad (t_0 \equiv \text{retardo}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} |H(f)| &= k \\ \phi(f) &= \arg[H(f)] = -2\pi f t_0 \quad (t_0 \equiv \text{retardo}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aprovechando las definiciones anteriores, se dice que la respuesta en magnitud de un filtro ideal es una constante en un cierto intervalo de frecuencias y es cero fuera de ellas; mientras que la respuesta en fase es una función lineal de la frecuencia. Sin embargo, estas condiciones deben aplicarse sólo sobre el intervalo o banda de frecuencias que representan el espectro de la señal deseada  $x(t)$ , la respuesta en fase fuera de este intervalo generalmente no es importante debido a que sólo nos interesa la señal obtenida a través del filtro donde su amplitud es diferente de cero. Por otro lado, se hace notar que si la respuesta en magnitud no se aproxima a cero en el intervalo de frecuencias que ocupa el espectro de la señal no deseada o que si el espectro de la señal no deseada contiene componentes espectrales en algún intervalo de frecuencias que coincide con las de la señal deseada, entonces la señal no deseada no será removida del todo. De cualquier manera, un filtro que no satisfaga las condiciones impuestas a (3.4) y (3.5), introduce distorsión en la señal, es decir, la magnitud no uniforme de la respuesta en frecuencia del filtro da como consecuencia una distorsión en amplitud y la no linealidad en fase causa distorsión en fase. El resultado de estas dos naturalezas de distorsión sobre la señal de salida es similar; no obstante, en aplicaciones de audio la distorsión en fase es menos severa que la distorsión en amplitud debido a que el oído humano es relativamente insensible a la distorsión en fase.

El intervalo de frecuencias en el que una señal se transmite a través del filtro se llama banda de paso y el intervalo de frecuencias en el que la señal se rechaza se llama banda de rechazo o banda de no paso.

Los filtros se clasifican de acuerdo con el tipo de función que desempeñan, como se observa en la figura 3.3. En esta figura se muestran los modelos que representan las respuestas en magnitud y fase para las diferentes clases de filtros ideales, cuyas características ideales: magnitud constante y linealidad en fase, son físicamente imposibles de lograr en filtros prácticos. Además, en estos últimos, cuando la aproximación en magnitud mejora, es decir, se acerca más al comportamiento ideal, la respuesta en fase frecuentemente llega a ser pobre y viceversa.



**Figura 3.3:** Espectros de los filtros ideales: (a) pasa bajas, (b) pasa altas, (c) pasa banda y (d) rechaza banda

En las siguientes secciones se describen cada uno de estos filtros.

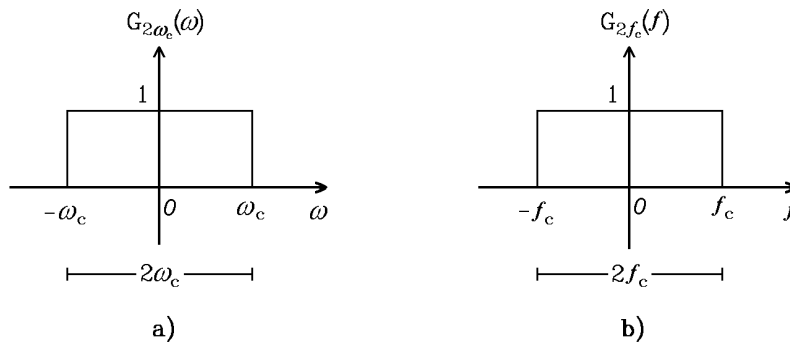
### 3.1.1 Filtro pasa bajas ideal

La función del filtro pasa bajas ideal es permitir el paso de las componentes espectrales para frecuencias bajas y atenuar para frecuencias altas, vea la figura 3.3(a). El ancho de banda,  $BW$ , de un filtro pasa bajas ideal está delimitado por la llamada frecuencia de corte,  $\omega_c$ , en unidades de  $rad/seg$ , y se define como  $BW = \omega_c$ . El intervalo de frecuencias de  $0 \leq \omega \leq BW$  es llamada banda de paso, y su respuesta en frecuencia está dada por (3.6), la primera corresponde a una expresión en unidades de  $rad/seg$  y la segunda en unidades de  $Hz$ , donde  $G_{2\omega_c}(\omega)$ , o  $G_{2f_c}(f)$ , representa a una función rectangular en frecuencia, como se muestra en la figura 3.4.

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= k G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \\
 H(f) &= k G_{2f_c}(f) e^{-j2\pi f t_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Con el fin de verificar que este filtro ideal no es físicamente realizable se determina su respuesta al impulso. Inicialmente se encuentra la transformada inversa de Fourier de (3.6). El par de transformadas de Fourier para  $k G_{2\omega_c}(\omega)$  (o para  $k G_{2f_c}(f)$ ) es (vea el Apéndice A):

$$\begin{aligned}
 k G_{2\omega_c}(\omega) &\iff \frac{k \omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t) = \frac{k \omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \\
 k G_{2f_c}(f) &\iff 2k f_c Sa(2\pi f_c t) = 2k f_c \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t}
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$



**Figura 3.4:** Representación espectral de: (a)  $G_{2\omega_c}(\omega)$  y (b)  $G_{2f_c}(f)$

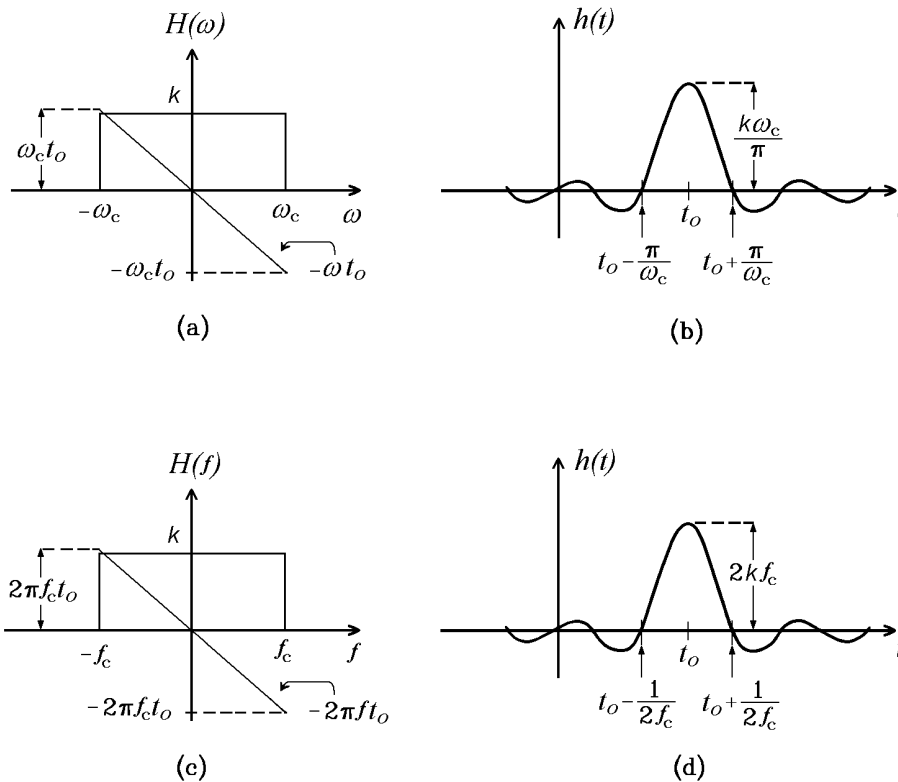
donde  $Sa \equiv$  función *sampling*.

Ahora, al incluir la fase lineal, vea la figura 3.3a, se tiene el par de transformadas de Fourier (vea la sección *Propiedad de desplazamiento en el tiempo* en el Apéndice A):

$$H(\omega) = k G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \iff h(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \quad (3.8)$$

$$H(f) = k G_{2f_c}(f) e^{-j2\pi f t_0} \iff h(t) = 2k f_c Sa[2\pi f_c(t - t_0)]$$

y su representación gráfica se muestra en la figura 3.5.



**Figura 3.5:** (a) y (c) Espectro del filtro ideal pasa bajas, (b) y (d) su respuesta al impulso

De la figura 3.5 se observa que el filtro no es causal, ya que su respuesta al impulso toma valores diferentes de cero, incluso para los intervalos de tiempo que van hacia el infinito en ambas direcciones, y por ende  $h(t)$  se extiende para valores de  $t < 0$ .

### 3.1.2 Filtro pasa banda ideal

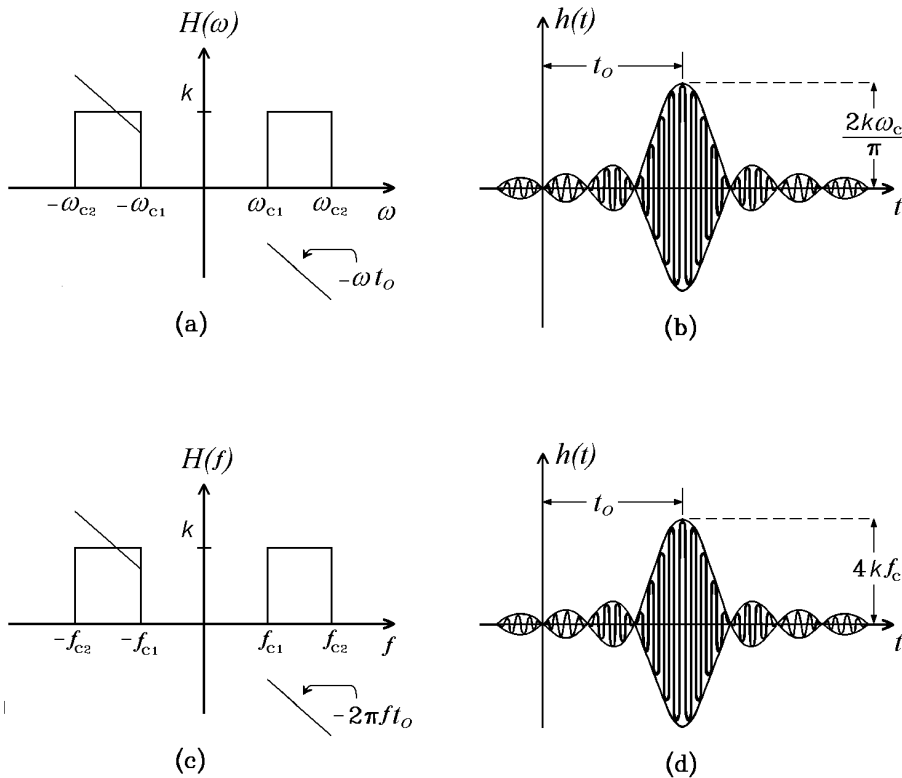
La función del filtro pasa banda ideal, es permitir el paso de los componentes espectrales para una banda de frecuencias y atenuar para frecuencias a ambos lados de esta banda. La banda



de paso de un filtro pasa banda está delimitada por las frecuencia  $\omega_{c2}$  y  $\omega_{c1}$  (o por  $f_{c2}$  y  $f_{c1}$  para una representación en unidades de Hz), llamadas frecuencias de corte, vea la figura 3.6 inciso (a) y (c). El ancho de banda de un filtro pasa banda ideal es  $BW = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  (o  $B = f_{c2} - f_{c1}$  para una representación en unidades de Hz), y su respuesta en frecuencia está dada por (3.9), como antes la primera expresión corresponde a las unidades de rad/seg y la segunda a unidades de Hz.

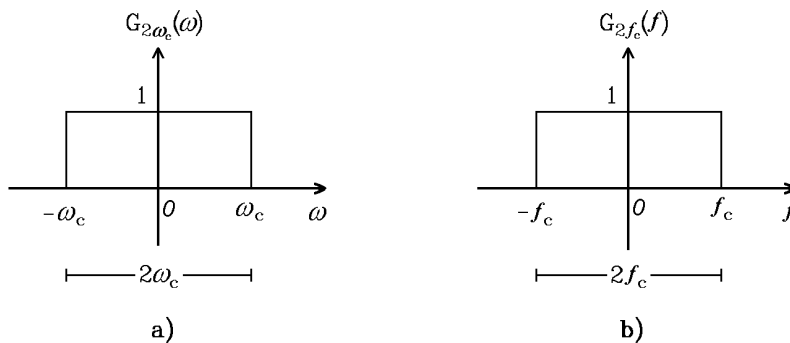
$$H(\omega) = k[G_{2\omega_c}(\omega + \omega_1) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega t_o} \tag{3.9}$$

$$H(f) = k[G_{2f_c}(f + f_1) + G_{2f_c}(f - f_1)] e^{-j2\pi f t_o}$$



**Figura 3.6:** (a) y (c) Espectro del filtro ideal pasa banda, (b) y (d) su respuesta al impulso

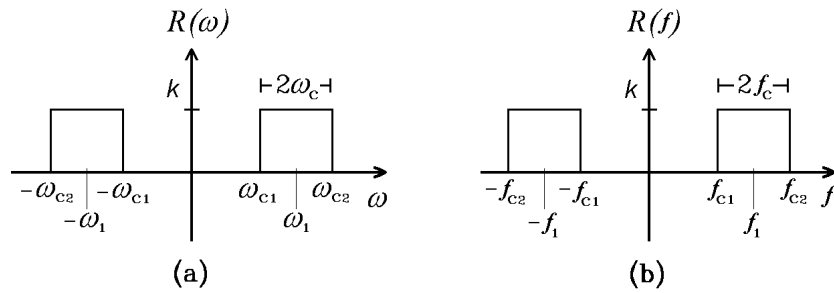
Los términos  $G_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1)$  (o  $G_{2f_c}(f \pm f_1)$ ) en (3.9) representan a la función rectangular en frecuencia  $G_{2\omega_c}(\omega)$  (o  $G_{2f_c}(f)$ ), como la mostrada en la figura 3.7, pero desplazada en  $+\omega_1$  y en  $-\omega_1$  (o en  $+f_1$  y en  $-f_1$ ), respectivamente, vea la figura 3.8.



**Figura 3.7:** Representación espectral de: (a)  $G_{2\omega_c}(\omega)$  y (b)  $G_{2f_c}(f)$

Además, se considera que  $BW = 2\omega_c = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  (o  $B = 2f_c = f_{c2} - f_{c1}$ ) y que:

$$\omega_1 > \frac{\omega_{c2} + \omega_{c1}}{2} \left( \text{o } f_1 > \frac{f_{c2} + f_{c1}}{2} \right).$$



**Figura 3.8:** Función desplazada (a)  $kG_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1)$  y (b)  $kG_{2f_c}(f \pm f_1)$

Una vez más se determina su respuesta al impulso,  $h(t)$ . Inicialmente se obtiene el par de transformadas de Fourier para  $kG_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1)$  (o para  $kG_{2f_c}(f \pm f_1)$ ), estos pares de transformadas se indican en (3.10) (vea la sección *Propiedad de desplazamiento en frecuencia* en el Apéndice A).

$$kG_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1) \iff \frac{k\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t) e^{\mp j\omega_1 t} \quad (3.10)$$

$$kG_{2f_c}(f \pm f_1) \iff 2kf_c Sa(2\pi f_c t) e^{\mp j2\pi f_1 t}$$

De esta forma (3.9) tiene su par de transformadas de Fourier:

$$H(\omega) = k[G_{2\omega_c}(\omega + \omega_1) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega t_0} \iff$$

$$h(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] [e^{-j\omega_1(t-t_0)} + e^{j\omega_1(t-t_0)}]$$

$$h(t) = \frac{2k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \cos[\omega_1(t - t_0)]$$

$$\therefore H(\omega) = k[G_{2\omega_c}(\omega + \omega_1) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega t_0} \iff$$

$$h(t) = \frac{2k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \cos[\omega_1(t - t_0)] \quad (3.11)$$

de manera similar, para una representación en unidades de Hz, se obtiene

$$H(f) = k[G_{2f_c}(f + f_1) + G_{2f_c}(f - f_1)] e^{-j2\pi f t_0} \iff$$

$$h(t) = 4kf_c Sa[2\pi f_c(t - t_0)] \cos[2\pi f_1(t - t_0)] \quad (3.12)$$

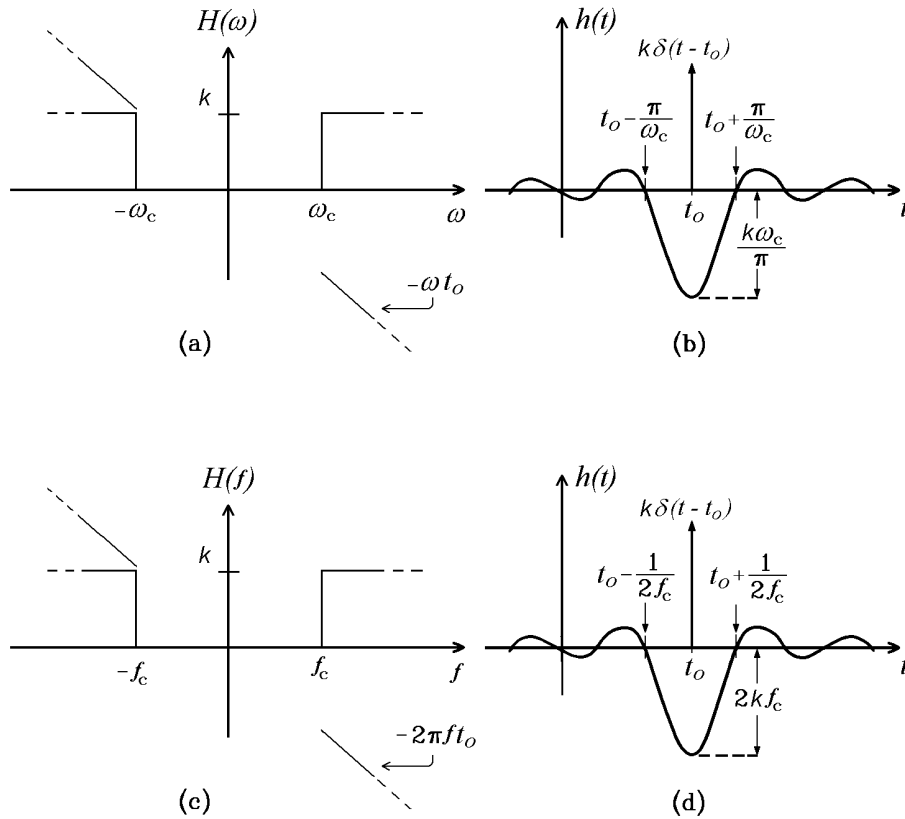
cuya representación gráfica se muestra en la figura 3.6 (con  $\omega_1 > \frac{\omega_{c2} + \omega_{c1}}{2}$ ).

Se hace notar que la respuesta al impulso,  $h(t)$ , vea la figura 3.6 inciso (b) y (d), para el filtro pasa bajas ideal es de la misma forma que el filtro pasa banda ideal, pero en éste, la señal está superpuesta a otra señal que es de alta frecuencia:  $\cos[\omega_1(t - t_0)]$ , y esto es llamado modulación en amplitud. Se observa además que el filtro no es causal.

### 3.1.3 Filtros pasa altas y rechaza banda ideales

Los filtros pasa altas y rechaza banda ideales son formas complementarias de los filtros pasa bajas y pasa banda, respectivamente. La función del filtro pasa altas ideal es permitir el paso de las componentes espectrales para frecuencias altas por arriba de una frecuencia previamente definida, llamada frecuencia de corte. Mientras que la función del filtro rechaza banda ideal es atenuar las componentes espectrales para una banda de frecuencias y permitir

el paso para frecuencias en ambos lados de esta banda. La banda de rechazo está delimitada por  $\omega_{c2}$  y  $\omega_{c1}$ , (o por  $f_{c2}$  y  $f_{c1}$  para una representación en unidades de  $Hz$ ), llamadas frecuencias de corte, vea la figura 3.9. La respuesta en frecuencia de un filtro pasa altas ideal está dada por (3.13), mientras que la respuesta en frecuencia de un filtro rechaza banda por (3.14), la primera expresión corresponde a las unidades de  $rad/seg$  y la segunda a unidades de  $Hz$ .



**Figura 3.9:** (a) y (c) Espectro del filtro ideal pasa altas, (b) y (d) su respuesta al impulso

$$H(\omega) = k [1 - G_{2\omega_c}(\omega)] e^{-j\omega t_0} \tag{3.13}$$

$$H(f) = k [1 - G_{2f_c}(f)] e^{-j2\pi f t_0}$$

$$H(\omega) = k [1 - G_{2\omega_c}(\omega + \omega_1) - G_{2\omega_c}(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega t_0} \tag{3.14}$$

$$H(f) = k [1 - G_{2f_c}(f + f_1) - G_{2f_c}(f - f_1)] e^{-j2\pi f t_0}$$

Como antes,  $G_{2\omega_c}(\omega)$  o  $G_{2f_c}(f)$  representan a una función rectangular en frecuencia, como la mostrada en la figura 3.7 y los términos  $G_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1)$  (o  $G_{2f_c}(f \pm f_1)$ ) representan a la función rectangular en frecuencia  $G_{2\omega_c}(\omega)$  (o  $G_{2f_c}(f)$ ) desplazada en  $+\omega_1$  y en  $-\omega_1$  (o en  $+f_1$  y en  $-f_1$ ), respectivamente.

Ahora se determina la respuesta al impulso,  $h(t)$ , de cada filtro. El par de transformadas de Fourier para  $k e^{-j\omega t_0}$  (o para  $k e^{-j2\pi f t_0}$ ) es:

$$\begin{aligned} k e^{-j\omega t_0} &\iff k \delta(t - t_0) \\ k e^{-j2\pi f t_0} &\iff k \delta(t - t_0) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Para determinar la transformada inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas, vea la expresión (3.13), se utiliza el par de transformadas (3.15) y (3.16), vea el análisis de la subsección “3.1.1. Filtro pasa bajas ideal”. De esta forma (3.13) tiene el par de transformadas

de Fourier dada por (3.17), para una representación en unidades de *rad/seg*, o por (3.18) para unidades de *Hz*.

$$k G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \iff \frac{k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \quad (3.16)$$

$$k G_{2f_c}(f) e^{-j2\pi f t_0} \iff 2k f_c Sa[2\pi f_c(t - t_0)]$$

$$H(\omega) = k[1 - G_{2\omega_c}(\omega)] e^{-j\omega t_0} \iff h(t) = k\delta(t - t_0) - \frac{k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \quad (3.17)$$

$$H(f) = k[1 - G_{2f_c}(f)] e^{-j2\pi f t_0} \iff h(t) = k\delta(t - t_0) - 2k f_c Sa[2\pi f_c(t - t_0)] \quad (3.18)$$

La representación gráfica del par de transformadas para el filtro pasa altas se muestra en la figura 3.9.

Procediendo en forma similar, para determinar la transformada inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia del filtro rechaza banda, vea la expresión (3.14), se utiliza el par de transformadas (3.15) y (3.19), o (3.20) para una representación en unidades de *Hz*, vea el análisis de la subsección “3.1.2. Filtro *pasa banda ideal*”. De esta forma (3.14) tiene el par de transformadas de Fourier dada por (3.21), para una representación en unidades de *rad/seg*, o por (3.22) para unidades de *Hz*.

$$k [G_{2\omega_c}(\omega + \omega_1) + G_{2\omega_c}(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega t_0} \iff \frac{2k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \cos[\omega_1(t - t_0)] \quad (3.19)$$

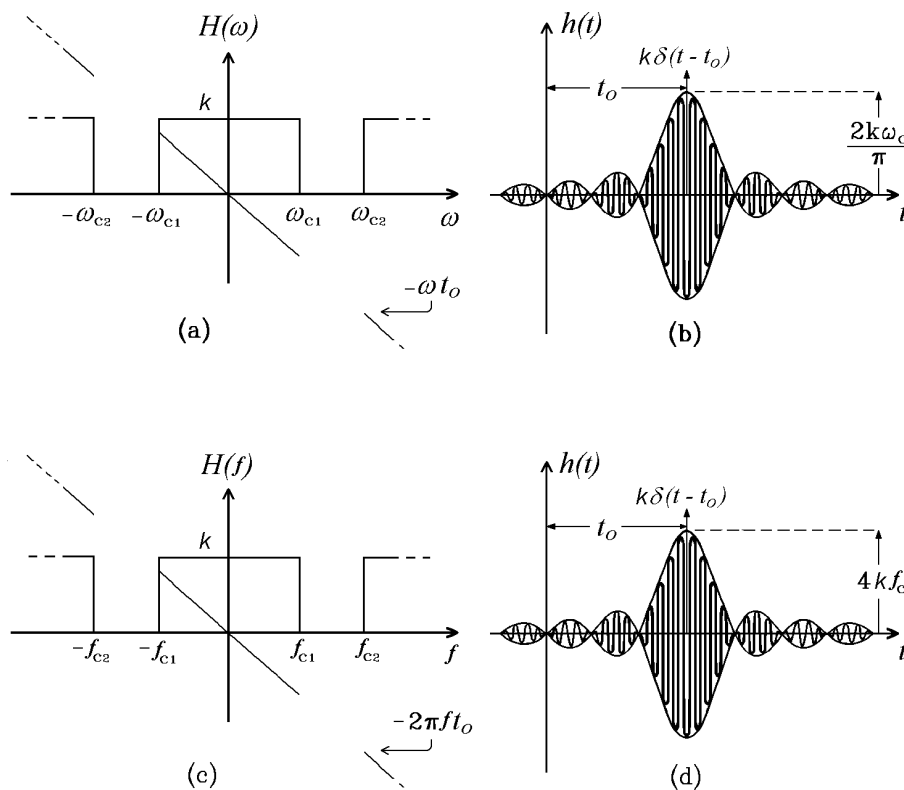
$$k [G_{2f_c}(f + f_1) + G_{2f_c}(f - f_1)] e^{-j2\pi f t_0} \iff 4k f_c Sa[2\pi f_c(t - t_0)] \cos[2\pi f_1(t - t_0)] \quad (3.20)$$

$$H(\omega) = k[1 - G_{2\omega_c}(\omega + \omega_1) - G_{2\omega_c}(\omega - \omega_1)] e^{-j\omega t_0} \iff h(t) = k\delta(t - t_0) - \frac{2k\omega_c}{\pi} Sa[\omega_c(t - t_0)] \cos[\omega_1(t - t_0)] \quad (3.21)$$

$$H(f) = k[1 - G_{2f_c}(f + f_1) - G_{2f_c}(f - f_1)] e^{-j2\pi f t_0} \iff h(t) = k\delta(t - t_0) - 4k f_c Sa[2\pi f_c(t - t_0)] \cos[2\pi f_1(t - t_0)] \quad (3.22)$$

La representación gráfica del par de transformadas para el filtro rechaza banda se muestra en la figura 3.10.

Ambos filtros (pasa altas y rechaza banda) tienen una componente que está representada en frecuencia por una ganancia constante  $k$ , implicando que se extiende a valores de  $\omega$  hacia el infinito. Por consiguiente, estos sistemas no son causales; otra restricción por la cual no son



**Figura 3.10:** (a) y (c) Espectro del filtro ideal rechaza banda, (b) y (d) su respuesta al impulso

físicamente realizables es debido a que en sistemas implementados físicamente las capacitancias e inductancias producidas, que pueden ser despreciables en las frecuencias de operación normal, generalmente reducen la ganancia en las altas frecuencias. La justificación de la no realizabilidad en el dominio del tiempo se puede verificar utilizando los mismos argumentos que los utilizados en los dos casos anteriores (filtro pasa bajas y pasa altas), esto es,  $h(t)$  se extiende para valores de  $t < 0$  y por lo tanto no es físicamente realizable.

### 3.1.4 Filtro pasa todo ideal

Otro tipo de filtro que puede ser mencionado es el filtro pasa todo. Este por un lado deja pasar todas las frecuencia con una ganancia constante y por el otro genera un desfaseamiento. De aquí, que estos filtros se diseñan como igualadores en fase, es decir permiten corregir la característica en fase de algún otro filtro con el fin de proporcionar un comportamiento en fase deseado.

Para lograr una ganancia constante para todas las frecuencias se requiere que los polos de la función de transferencia se encuentren a la izquierda del eje imaginario (esto asegura la estabilidad del sistema) y sus ceros a la derecha del eje imaginario del plano complejo. Por lo que, todas las redes pasa todo son necesariamente sistemas de fase no mínima<sup>1</sup> y por ello solo pueden producir una fase atrasada.

La idealidad en estos filtros supone que deben mantener su amplitud a un valor constante sobre todo el espectro de frecuencias. Sin embargo, en diseños reales las componentes capacitivas e inductivas, en los circuitos con diseño de filtros pasa todo, modifican el comportamiento en amplitud a frecuencias altas. Por lo que en las aplicaciones se debe asegurar que la amplitud sea plana sobre las frecuencias de interés.

<sup>1</sup>Se definen como de fase mínima aquellas funciones de transferencia que no tienen ceros en la parte derecha del plano complejo.

### 3.2 Retardo de fase y de grupo

Se inicia por recordar que una función de transferencia evaluada sobre el dominio de la frecuencia  $H(\omega)$  por lo general es compleja, por lo que ésta puede representarse mediante una respuesta en magnitud,  $|H(\omega)|$ , y una respuesta en fase,  $\phi(\omega)$ , de la forma mostrada en (3.23).

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j \arg[H(\omega)]} = |H(\omega)| e^{j \phi(\omega)} \quad (3.23)$$

donde la respuesta en fase es:

$$\phi(\omega) = \arg[H(\omega)] \quad (3.24)$$

Adicionalmente, existen dos definiciones adicionales importantes relacionadas con la respuesta en fase, que son[23]:

- a) El retardo de fase:  $\tau_p(\omega)$
- b) El retardo de grupo:  $\tau_g(\omega)$

Se comienza con la interpretación del retardo de fase. En el estudio de sistemas o filtros en el estado estacionario, para una cierta señal de excitación senoidal  $x(t)$ , por ejemplo como la mostrada en (3.25), la salida del sistema  $y(t)$  también es una señal senoidal en el estado estacionario, por ejemplo como la mostrada en (3.26), pero afectada en amplitud y en fase, como se muestra en la figura 3.11[17].

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y(t) = A|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi(\omega_0))$$

**Figura 3.11:** Relación salida–entrada en el estado estacionario

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) \quad (3.25)$$

$$y(t) = A |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi(\omega_0)) \quad (3.26)$$

Así, la señal  $y(t)$  dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= k \cos(\omega_0 t + \phi(\omega_0)) = k \cos \left[ \omega_0 \left( t + \frac{\phi(\omega_0)}{\omega_0} \right) \right] \\ &= k \cos [\omega_0 (t + t_p)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

con  $k = A |H(\omega_0)|$ .

La cantidad  $\tau_p = -t_p = -\phi(\omega_0)/\omega_0$  (el signo negativo se incluye por conveniencia) se denomina retardo de fase y describe el retraso de tiempo en la señal causado por un desplazamiento de fase de  $\phi(\omega_0)$ [2].

En general, el retardo de fase se define como:

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} \quad (3.28)$$

Así,  $y(t)$  puede ser expresado como:

$$y(t) = k \cos [\omega_0 (t - \tau_p)] \quad (3.29)$$

donde se observa que  $y(t)$  es una función retardada. Lo anterior se verifica al suponer inicialmente que se tiene la función

$$g(t) = k \cos(\omega_0 t) \quad (3.30)$$

Ahora se le aplica a  $g(t)$  un retardo de  $\tau_p$  unidades, esto es

$$y(t) = g(t - \tau_p) = k \cos [\omega_0 (t - \tau_p)] \quad (3.31)$$

La última expresión indica que el retardo de fase tiene unidades de tiempo y la expresión en (3.28) indica que esa unidad de tiempo cambia con respecto a la frecuencia.

Por otro lado, si se desea obtener la velocidad de cambio de la respuesta en fase, con respecto a la frecuencia, se puede determinar su derivada para una cierta frecuencia, por ejemplo para  $\omega_0$ , esto es (3.32), se incluye el signo menos por conveniencia.

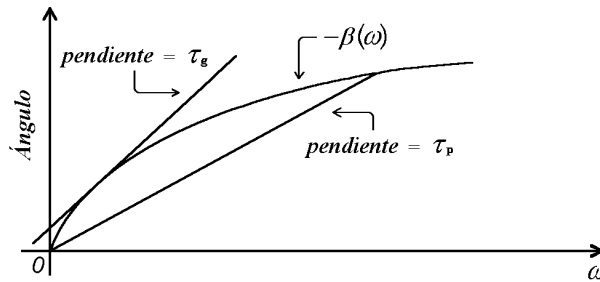
$$-\left. \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) se conoce como el retardo de grupo, para una frecuencia en particular. La expresión general del retardo de grupo se define como en (3.33).

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (3.33)$$

“Se interpreta a  $\tau_g(\omega)$  como el retardo temporal que experimenta una componente de frecuencia  $\omega$  cuando pasa a través del sistema” [21].

El significado gráfico de estas definiciones se ilustran en la figura 3.12. Se puede ver que el retardo de fase para una frecuencia dada representa la pendiente de la línea secante desde la componente de c.d. (corriente directa) a la frecuencia particular y es una especie de retardo promedio. Mientras que el retardo de grupo a una cierta frecuencia previamente definida es la pendiente de la línea tangente en la frecuencia particular y representa un intervalo de retardo instantáneo o local [23].



**Figura 3.12:** Significado gráfico de  $\tau_p(\omega)$  y  $\tau_g(\omega)$

Estas definiciones son importantes ya que, en ciertas aplicaciones, el retardo de grupo de una señal (que pasa a través de un filtro) tiene un mayor significado que la respuesta en fase. Por ejemplo, debido a que la respuesta de fase generalmente no es lineal, la respuesta del retardo de grupo en los filtros se usa frecuentemente como una medida de cuánta dispersión sufre una señal cuando pasa por el filtro.

Una característica deseable del retardo de grupo de un filtro es aquella que se aproxime a una constante sobre la banda (o bandas) de frecuencias de paso; por ejemplo, para el caso de un filtro ideal con respuesta en amplitud constante y respuesta en fase lineal, se puede ver que:

$$\phi(\omega) = \arg[H(\omega)] = \arctan \left[ \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \right] = -\omega t_o \quad (3.34)$$

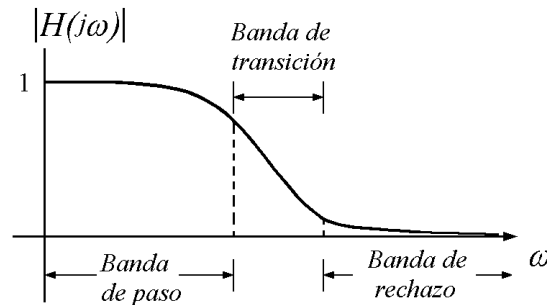
donde

$$\tau_p(\omega) = \tau_g(\omega) = t_o \quad (3.35)$$

Así, para el filtro ideal, el retardo de fase y el de grupo son idénticos y representan el retardo exacto de la señal. En este caso no ocurre distorsión. En los casos generales donde la respuesta en amplitud no es constante en la banda de paso y la respuesta en fase no es lineal, es más difícil definir con precisión el retardo exacto ya que una señal sufre alguna distorsión al pasar a través del filtro. No obstante, las definiciones (3.28) y (3.33) son utilizadas para describir la aproximación de la característica del retardo de un filtro práctico.

### 3.3 Filtros reales

Los filtros prácticos o reales son sistemas que en su comportamiento en frecuencia tienen una banda de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo, vea la figura 3.13. Estos están representados por medio de una respuesta en frecuencia que supone: la banda de paso con una máxima desviación en amplitud y la banda de rechazo con una mínima atenuación; esto es, en la banda de paso se permite un máximo cambio en la variación de la amplitud, por lo general este intervalo de variación es pequeño, y en la banda de rechazo la amplitud debe ser menor o igual a un cierto valor previamente determinado.



**Figura 3.13:** Respuesta en frecuencia de un filtro real

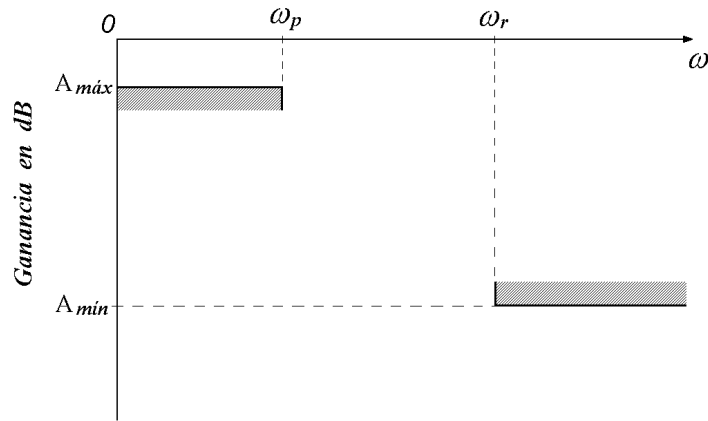
Como se indicó en el capítulo anterior, un filtro es un sistema diseñado para dejar pasar el contenido espectral de la señal de entrada en una banda de frecuencias específicas; esto es, la respuesta en frecuencia del filtro forma una ventana espectral a través de la cual solo la parte deseada del espectro de entrada se permite pasar. Basado en el tipo de respuesta en frecuencia, el filtro se clasifica en: pasa bajas (*LP*), pasa altas (*HP*), pasa banda (*PB*) o rechaza banda (*RB*) [1].

Es importante aclarar que el comportamiento de un filtro se describe, comúnmente, mediante la magnitud al cuadrado de la respuesta en frecuencia o, simplemente, la magnitud en potencia, o también mediante la magnitud logarítmica de  $H(\omega)$  o, simplemente, la ganancia en *dB* (o pérdida en *dB*) en la forma:  $|H(\omega)|^2$  o  $|H(\omega)|_{dB} = 10 \log |H(\omega)|^2$ , respectivamente. El análisis que a continuación se proporciona de los filtros se desarrolla utilizando la relación de la ganancia en *dB*,  $|H(\omega)|_{dB}$ .

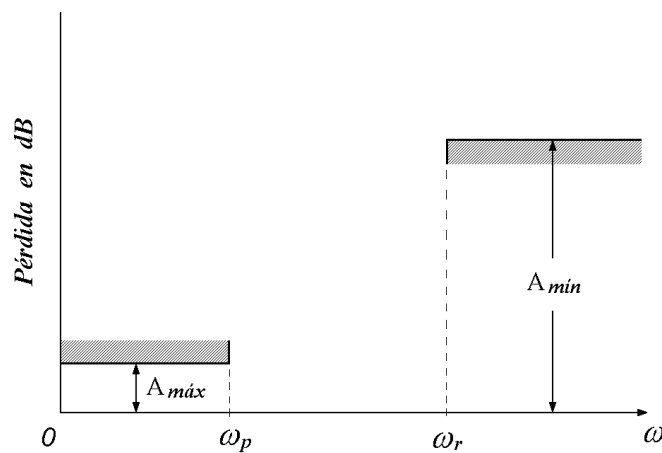
Las condiciones para un filtro pasa bajas se muestran en la figura 3.14, en éste la banda de paso se localiza en el intervalo desde la componente c.d. a la frecuencia de paso  $\omega_p$  con una atenuación máxima permitida de  $A_{m\acute{a}x}$  *dB* (o con ganancia mínima de  $A_{m\acute{a}x}$  *dB*), esto es, el comportamiento del filtro en la banda de paso debe permitir una ganancia mayor o igual al valor establecido por  $A_{m\acute{a}x}$  *dB*, donde  $\omega_p$  es la frecuencia de referencia que delimita dicha banda. Mientras que la banda en el intervalo de  $\omega_r$  al infinito es la banda de rechazo, ahora  $\omega_r$  es la frecuencia de referencia que delimita a esta otra banda y para las frecuencias por arriba de  $\omega_r$  se establece una restricción en potencia de al menos una atenuación mínima de  $A_{m\acute{i}n}$  *dB*. La banda localizada entre  $\omega_p$  y  $\omega_r$  es la banda de transición. Así los cuatro parámetros  $\omega_p$ ,  $\omega_r$ ,  $A_{m\acute{i}n}$  *dB* y  $A_{m\acute{a}x}$  *dB* describen las condiciones del filtro pasa bajas mostrado en 3.14. Otra manera de establecer las condiciones en frecuencia del diseño para el filtro pasa bajas es mediante una representación en potencia en función de su pérdida, como se muestra en la figura 3.15, en este caso, en la banda de paso se permite una máxima pérdida de  $A_{m\acute{a}x}$  *dB* o a lo más una atenuación menor o igual a dicho valor, y en la banda de rechazo una mínima pérdida permitida de  $A_{m\acute{i}n}$  *dB*.

La condición para un filtro pasa altas se muestra en la figura 3.16, en ésta la banda de paso se extiende en el intervalo desde  $\omega_p$  a infinito, mientras que la banda de rechazo en el intervalo desde la componente de c.d. a  $\omega_r$ . La banda de transición se localiza entre  $\omega_r$  y  $\omega_p$ . De igual manera como en los filtros pasa bajas  $A_{m\acute{a}x}$  *dB* es la atenuación máxima ó ganancia mínima permitida en la banda de paso y  $A_{m\acute{i}n}$  *dB* es la ganancia máxima ó atenuación mínima permitida en la banda de rechazo y así los parámetros  $\omega_p$ ,  $\omega_r$ ,  $A_{m\acute{a}x}$  *dB* y  $A_{m\acute{i}n}$  *dB* son las condiciones para caracterizar al filtro pasa altas. La representación en potencia en función de su pérdida se



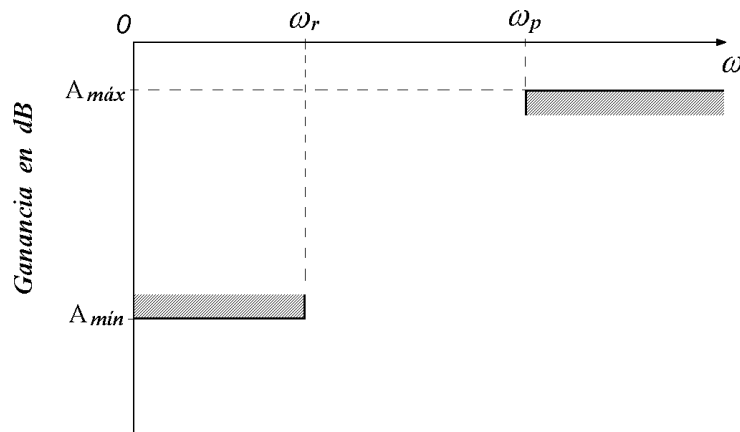


**Figura 3.14:** Representación en potencia del filtro pasa bajas en función de su ganancia



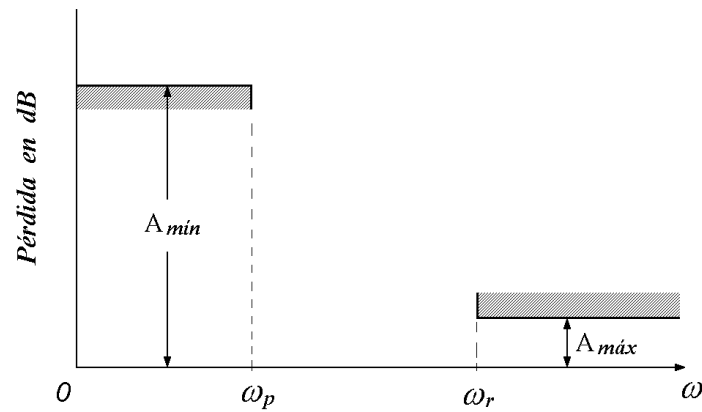
**Figura 3.15:** Representación en potencia del filtro pasa bajas en función de su pérdida

muestra en la figura 3.17, como antes, en la banda de paso se permite una máxima pérdida de  $A_{máx}$  dB y en la banda de rechazo una mínima pérdida de  $A_{mín}$  dB.



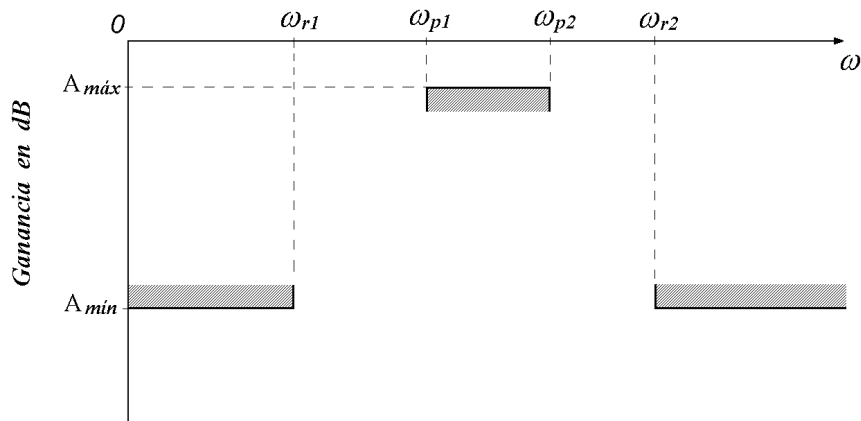
**Figura 3.16:** Representación en potencia del filtro pasa altas en función de su ganancia

En la figura 3.18 se muestran las condiciones para el filtro pasa banda, cuya banda de paso se localiza en el intervalo entre las frecuencias  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$  con una atenuación máxima o ganancia mínima permitida de  $A_{máx}$ , dB y las dos bandas en el intervalo desde la componente de c.d.

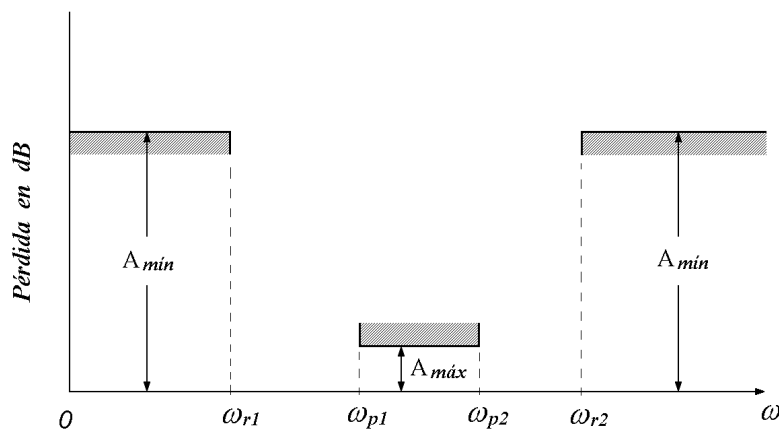


**Figura 3.17:** Representación en potencia del filtro pasa altas en función de su pérdida

a  $\omega_{r1}$  y de  $\omega_{r2}$  a infinito, referidas como las bandas de rechazo, con una ganancia máxima o atenuación mínima permitida de  $A_{min}$  dB. Las dos bandas entre  $\omega_{r1}$  y  $\omega_{p1}$  y entre  $\omega_{p2}$  y  $\omega_{r2}$  son las bandas de transición. La representación en potencia en función de su pérdida se muestra en la figura 3.19. En la banda de paso se permite una máxima pérdida de  $A_{max}$  dB y en las bandas de rechazo una mínima pérdida de  $A_{min}$  dB.



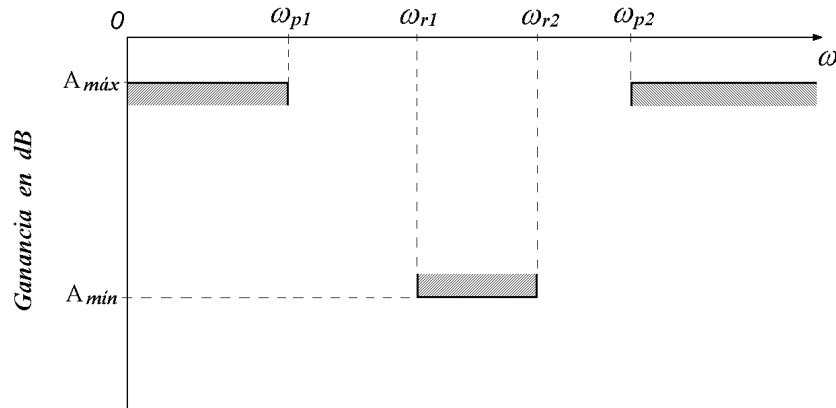
**Figura 3.18:** Representación en potencia del filtro pasa banda en función de su ganancia



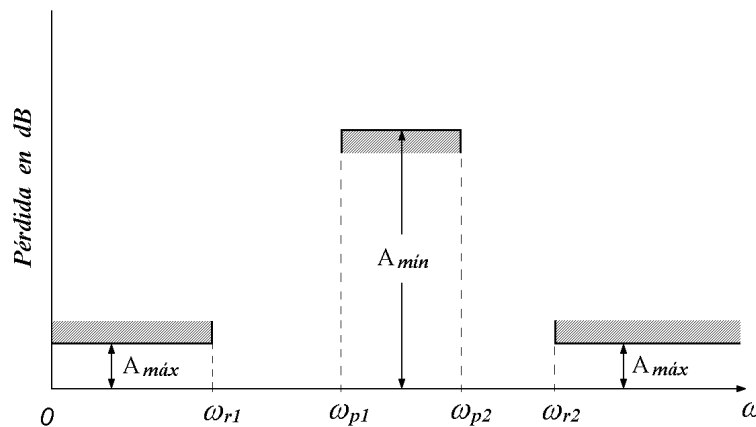
**Figura 3.19:** Representación en potencia del filtro pasa banda en función de su pérdida

Por último, en la figura 3.20 se muestran las condiciones para el filtro rechaza banda, cuya

banda de rechazo se ubica entre las frecuencias  $\omega_{r1}$  y  $\omega_{r2}$ , las dos bandas de paso se localizan en el intervalo entre la componente de c.d. y  $\omega_{p1}$  y entre  $\omega_{p2}$  e infinito. Las dos bandas de transición se extienden en el intervalo desde  $\omega_{p1}$  a  $\omega_{r1}$  y desde  $\omega_{r2}$  a  $\omega_{p2}$ . La representación en potencia en función de su pérdida se muestra en la figura 3.21. En la banda de rechazo se permite una pérdida mínima de  $A_{min}$  dB y en las bandas de paso una pérdida máxima de  $A_{máx}$  dB.



**Figura 3.20:** Representación en potencia del filtro rechaza banda en función de su ganancia



**Figura 3.21:** Representación en potencia del filtro rechaza banda en función de su pérdida

De esta forma, el área sombreada en las figuras 3.14, 3.16, 3.18 y 3.20 muestra la región de tolerancia de las respuestas en frecuencia para la aproximación deseada, las frecuencias  $\omega_p$  y  $\omega_r$  son frecuencias que delimitan la banda de paso y de rechazo, respectivamente y en el intervalo de frecuencias  $\omega_p < \omega < \omega_r$  ( $0 < \omega < \omega_p$ ) se refieren a la banda de transición.

Una función de transferencia se dice que es realizable si representa a un sistema estable y causal, esta estabilidad y causalidad a su vez va acompañada con la restricción de que la función de transferencia sea una función racional en  $s$  (plano de Laplace) con coeficientes reales, los polos ubicados a la izquierda del eje  $j\omega$  del plano  $s$  y que el grado del polinomio del numerador sea menor o igual al grado del polinomio del denominador. Por ejemplo, la función de transferencia evaluada sobre el dominio de la frecuencia de un filtro construido con parámetros lineales tiene la forma:

$$H(\omega) = \frac{P(\omega)}{D(\omega)} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_M(j\omega)^M}{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_N(j\omega)^N} \quad \text{con } N \geq M \quad (3.36)$$

La condición  $N \geq M$  implica que puede haber tantos ceros (a lo más  $N - 1$  ceros) como polos en la función de transferencia.

Un parámetro importante en el diseño de filtros es su orden  $N$ , cuyo valor representa el número de singularidades o número de polos de la función de transferencia. El principal problema de diseño en los filtros prácticos es el determinar los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$  ( $i = 0, 1, \dots, N$  y  $j = 0, 1, \dots, M$ ), de tal forma que (3.36) se aproxime a la característica ideal.

Con la finalidad de establecer un criterio de diseño para los filtros reales, en la siguiente sección se describe una teoría de aproximación, llamada teoría de aproximación Chebyshev en el dominio de la frecuencia, en particular para el diseño de filtros que aproximan al filtro pasa bajas.

## 4. La aproximación Chebyshev

En esta sección se analiza el diseño de filtros basado en la aproximación por medio de los polinomios de Chebyshev. Estos filtros se caracterizan por tener una banda de frecuencias en la que la magnitud pico del error de aproximación se minimiza en forma tal que este error se distribuye uniformemente sobre esta banda de frecuencias. De hecho, la magnitud del error es un rizo que se extiende sobre esta banda de frecuencias, por lo cual también se le llama una aproximación en amplitud de igual rizo (*equal ripple* o *equiripple*) o aproximación de igual rizo simplemente; de esta forma el error oscila entre un máximo y un mínimo de igual amplitud. Para esta aproximación existen dos representaciones para la magnitud en potencia que depende en cuál banda de frecuencias se minimiza el error (ya sea la banda de paso o de rechazo). Para el diseño del filtro llamado del tipo I (aproximación Chebyshev, que en lo sucesivo se denominará la aproximación Chebyshev del tipo I o, simplemente, aproximación del tipo I) el error de aproximación se distribuye en la banda de paso. Mientras que para el llamado del tipo II (aproximación Chebyshev inversa, que en lo sucesivo se denominará la aproximación Chebyshev del tipo II o, simplemente, aproximación del tipo II) el error de aproximación se distribuye en la banda de rechazo.

Los polinomios de Chebyshev  $V_N(x)$  son un conjunto de funciones ortogonales con ciertas propiedades. Estos se encuentran definidos por la ecuación (4.1), con condiciones iniciales establecidas por las expresiones indicadas en (4.2).

$$V_N(x) = \cos [N \cos^{-1} x] = \begin{cases} \cos [N \cos^{-1} x] & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh [N \cosh^{-1} x] & \text{para } |x| > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{lll} N = 0 & V_0(x) = 1 & \text{para toda } x \\ N = 1 & V_1(x) = x & \text{para toda } x \end{array} \quad (4.2)$$

donde  $N$  es un número entero positivo y denota el orden del polinomio de Chebyshev.

■ **Ejemplo 4.1** Demostrar que:  $\cos [N \cos^{-1} x] = \cosh [N \cosh^{-1} x]$  para  $|x| > 1$

*Solución:*

Sea

$$x = \cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \quad (4.3)$$

$$u = e^{j\omega} \quad (4.4)$$

Al sustituir (4.4) en (4.3)

$$x = \frac{u + u^{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = u + u^{-1}$$

$$2xu = u^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = u^2 - 2xu + 1$$

el cual tiene la solución (Se considera sólo el signo “+” con la finalidad de asegurar que  $u \neq 0$  cuando  $x$  tome valores grandes):

$$u = \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1} = x \left[ 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right]$$

Por otro lado, el logaritmo natural de un número complejo  $z = |z| e^{j\arg[z]}$  es [4]:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + j \arg[z]$$

donde el operador  $\arg[z]$ , que se lee «el argumento de  $z$ », implica el cálculo del ángulo correspondiente al valor complejo  $z$ .

En general, para  $z = r e^{j\theta} = |z| e^{j\arg[z]}$

$$\ln(r e^{j\theta}) = \ln(r) + j\theta$$

Para el caso particular de  $z = u = e^{j\omega}$  (esto es  $r = 1$  y  $\theta = \omega$ )

$$\ln(u) = \ln(e^{j\omega}) = \ln(1) + j\omega = j\omega \quad (4.5)$$

$$\text{con} \quad u = x \left[ 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right] \quad (4.6)$$

Al sustituir (4.6) en (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \ln \left[ x \left( 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right) \right] &= j\omega \\ \omega &= -j \ln \left[ x \left( 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

El valor de  $\omega$  se puede obtener al aplicar el coseno inverso en (4.3), de manera que

$$\begin{aligned} \omega &= \arccos(x) = \cos^{-1}(x) \\ \cos^{-1}(x) &= -j \ln \left[ x \left( 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observe que el coseno inverso de  $x$  es una función compleja cuando  $|x| > 1$ , debido a que

$$x \left( 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right)$$

es un número real.

Así, el coseno inverso de  $x$  para  $|x| > 1$  es

$$\cos^{-1} x = j\phi \quad (4.9)$$

$$\text{con} \quad \phi = -\ln \left[ x \left( 1 + \sqrt{1 - (1/x^2)} \right) \right]$$

Mientras que

$$x = \cos(j\phi) = \frac{e^{j(j\phi)} + e^{-j(j\phi)}}{2} = \frac{e^\phi + e^{-j\phi}}{2} = \cosh \phi$$

$$x = \cos(j\phi) = \cosh \phi \quad (4.10)$$

Por lo que

$$\phi = \cosh^{-1} x \quad (4.11)$$

Al sustituir (4.11) en (4.9) se tiene

$$\cos^{-1} x = j \cosh^{-1} x \quad (4.12)$$

Por otro lado, haciendo referencia a la enunciación del problema y de (4.12), se obtiene

$$\cos [N \cos^{-1} x] = \cos [N (j \cosh^{-1} x)] = \cos [j N \cosh^{-1} x]$$

Finalmente, de (4.10) se obtiene

$$\cos [N \cos^{-1} x] = \cosh [N \cosh^{-1} x]$$

lo cual queda demostrado. ■

Antes de continuar con el análisis de la aproximación Chebyshev se dará una interpretación general de la expresión (4.1). Para ello, se inicia recordando algunas de las características de la aproximación Butterworth.

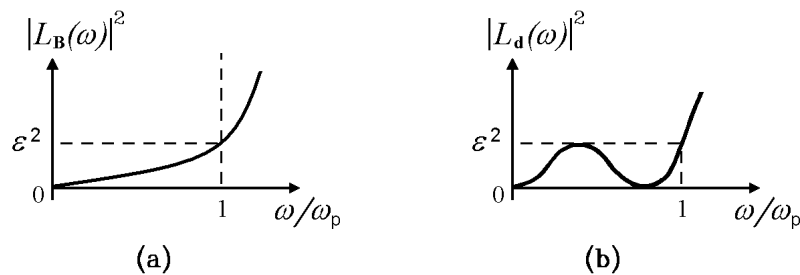
La expresión general para la magnitud en potencia de la aproximación Butterworth para un filtro pasa bajas es de la forma

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{K_0}{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}} = \frac{K_0}{1 + |L_B(\omega)|^2} \quad (4.13)$$

donde  $N$  es el orden del filtro,  $\omega_p$  la frecuencia de paso,  $K_0$  la constante de normalización en magnitud, de modo que para  $\omega = 0$  se asegura que  $|H_B(0)|^2 = 1$ ,  $\varepsilon$  es un parámetro de diseño que permite establecer de manera arbitraria la ganancia asociada a la banda de paso, y  $|L_B(\omega)|^2$  es la función de aproximación Butterworth definida como en (4.14).

$$|L_B(\omega)|^2 = \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N} \quad (4.14)$$

Al graficar la función de aproximación (4.14), vea la figura 4.1a, se observa que la función es monótonicamente creciente, además que para frecuencias bajas ( $\omega \ll \omega_p$ ) la aproximación es muy buena, debido a que el error entre el comportamiento de la aproximación y el comportamiento deseado establecido por la banda de paso, con características plana, es pequeño. Sin embargo, a medida que  $\omega$  se aproxima a la frecuencia de paso (o  $\omega/\omega_p$  se aproxima a la unidad) el error de aproximación crece [15].



**Figura 4.1:** Función de aproximación: (a) Butterworth y (b) deseada

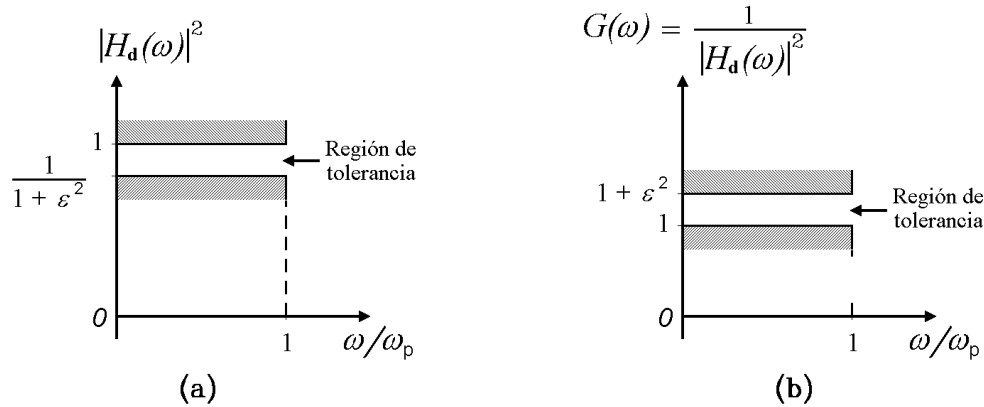
Ahora, se desea determinar una función de aproximación que distribuya el error de manera uniforme en una banda acotada, esto es, se desea encontrar una función de aproximación

que oscile entre la banda acotada de  $\omega = 0$  a  $\omega/\omega_p = 1$  y de  $\varepsilon^2$  a cero, como se muestra en la figura 4.1b. Mientras que para  $\omega/\omega_p > 1$  ( $\omega > \omega_p$ ) sea monótonicamente creciente. En resumen, se desea cambiar el comportamiento observado en la figura 4.1a a un comportamiento parecido al mostrado en 4.1b.

Utilizando la nueva función de aproximación deseada,  $|L_d(\omega)|^2$ , se establece la siguiente magnitud en potencia (por simplicidad se asume a  $K_0 = 1$ )

$$|H_d(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |L_d(\omega)|^2} \quad (4.15)$$

Enfoquémonos en la región de tolerancia de la banda de paso, como se muestra en la figura 4.2a, donde se distribuye el error de la aproximación en dicha banda.



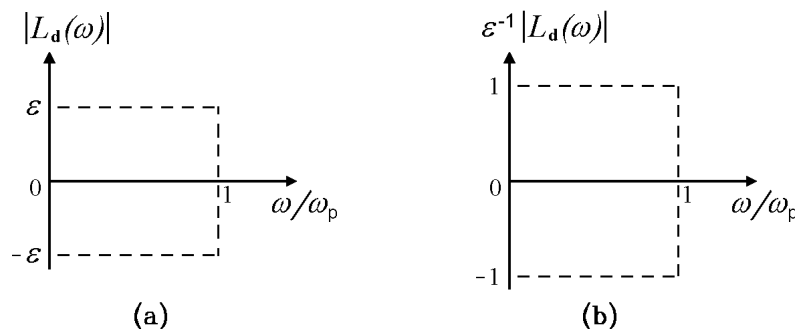
**Figura 4.2:** Gráfica de la magnitud en potencia: (a) no invertida y (b) invertida

Consideremos también la representación de  $1/|H_d(\omega)|^2$ , como se muestra en la figura 4.2b, donde

$$G(\omega) = \frac{1}{|H_d(\omega)|^2} = 1 + |L_d(\omega)|^2 \quad (4.16)$$

$$|L_d(\omega)|^2 = G(\omega) - 1 \quad (4.17)$$

Como se indicó previamente (vea la figura 4.1b), la región de  $|L_d(\omega)|^2$  está acotada en el intervalo de  $\omega = 0$  a  $\omega/\omega_p = 1$  y de  $\varepsilon^2$  a cero. Mientras que para  $|L_d(\omega)|$  se tiene una gráfica que no resulta en una región enteramente positiva debido a que la raíz de  $\varepsilon^2$  acepta dos soluciones:  $\varepsilon$  y  $-\varepsilon$ , como se muestra en la figura 4.3a.



**Figura 4.3:** Área de interés para  $|L_d(\omega)|$ : (a) no normalizado y (b) normalizado

Al normalizar la amplitud al multiplicar por  $\varepsilon^{-1}$  se tiene una región confinada en el intervalo de  $\omega = 0$  a  $\omega/\omega_p = 1$  y de 1 a  $-1$ , como la mostrada en la figura 4.3b, la cual delimita a las funciones con las que se puede representar a  $|L_d(\omega)|^2$ .

De la figura 4.3b se concluye que el dominio de  $|L_d(\omega)|$  tiene que ir de 1 a  $-1$  y necesariamente debe ser una función trigonométrica. De aquí que, se propone que la función de aproximación



sea una función cosenoidal, por lo que queda sustentada la forma de onda oscilatoria propuesta en la figura 4.1b. Note que la función trigonométrica senoidal no es una función factible para representar a la función de aproximación deseada, debido a que en un sistema físicamente realizable la respuesta en magnitud en frecuencia siempre es una función par, mientras que la función senoidal es impar.

De lo anterior, la función  $|L_d(\omega)|$  podría ser de la forma (4.18), con  $x$  acotada en el intervalo  $0 < x < 1$ , donde  $x$  de alguna forma debe estar en función de  $\omega$ . Además, no se viola ninguna limitación de este dominio si en el argumento de la función cosenoidal se le incluye un grado de libertad, en este caso el orden  $N$  del filtro, como se expresa en (4.19).

$$\varepsilon^{-1} |L_d(\omega)| = \cos(x)$$

$$|L_d(\omega)| = \varepsilon \cos(x) \quad (4.18)$$

$$|L_d(\omega)| = \varepsilon \cos(Nx) \quad (4.19)$$

Por otro lado, el dominio de  $x$  en (4.19) debe estar acotado, por lo que se puede utilizar la función inversa de la función cosenoidal mostrada en (4.20), de tal forma que  $\omega$  pueda ser libre para todos los reales o por lo menos en el intervalo de 0 a  $\omega_p$ ,

$$x = \cos^{-1}(\omega/\omega_p) \quad (4.20)$$

Al sustituir (4.20) en (4.19) se obtiene

$$|L_d(\omega)| = \varepsilon \cos[N \cos^{-1}(\omega/\omega_p)] = \varepsilon V_N(\omega/\omega_p) \quad (4.21)$$

$$|L_d(\omega)|^2 = \varepsilon^2 \cos^2[N \cos^{-1}(\omega/\omega_p)] = \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p) \quad (4.22)$$

donde  $V_N(\omega/\omega_p)$  son los polinomios de Chebyshev.

Por lo que la magnitud en potencia queda como

$$|H_d(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (4.23)$$

Finalizando así la interpretación de (4.1), que por conveniencia se reescribe a continuación (con  $\omega/\omega_p = x$ ).

$$V_N(x) = \cos[N \cos^{-1} x] = \begin{cases} \cos[N \cos^{-1} x] & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh[N \cosh^{-1} x] & \text{para } |x| > 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Aunque la expresión en (4.24), para  $|x| \leq 1$  y para  $|x| > 1$ , no parecen representar a un polinomio, es posible demostrar que dichos términos se pueden desarrollar en forma de polinomio. A continuación, se incluyen dos diferentes análisis para dicha verificación.

Se inicia con el primer análisis que permite verificar que las expresiones en (4.24) se pueden representar en forma de polinomio. Inicialmente se define a una variable  $z$  de tal forma que

$$x = \cos z \quad \implies \quad z = \cos^{-1} x \quad (4.25)$$

$$y \quad V_N(z) = \cos[Nz] \quad (4.26)$$

De la igualdad trigonométrica (4.27) se determinan las expresiones para  $V_{N+1}(z)$  y  $V_{N-1}(z)$ , las cuales se describen en (4.28) y (4.29).

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (4.27)$$

$$V_{N+1}(z) = \cos[(N+1)z] = \cos[Nz] \cos z - \sin[Nz] \sin z \quad (4.28)$$

$$V_{N-1}(z) = \cos[(N-1)z] = \cos[Nz]\cos z + \operatorname{sen}[Nz]\operatorname{sen} z \quad (4.29)$$

Al sumar las expresiones (4.28) y (4.29) se obtiene

$$V_{N+1}(z) + V_{N-1}(z) = 2 \cos[Nz]\cos z \quad (4.30)$$

Tomando en cuenta la igualdad en (4.25) y (4.26) la ecuación (4.30) se expresa como

$$V_{N+1}(z) + V_{N-1}(z) = 2x V_N(z) \quad (4.31)$$

$$V_{N+1}(z) = 2x V_N(z) - V_{N-1}(z) \quad (4.32)$$

Otra forma de representar la fórmula recursiva dada en (4.32) es

$$V_N(x) = 2x V_{N-1}(x) - V_{N-2}(x) \quad (4.33)$$

La expresión en (4.33) se verifica al sustituir  $z = \cos^{-1} x$  en (4.28) y en (4.29), como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} V_{N+1}(z) \Big|_{z=\cos^{-1} x} &= \cos[Nz]\cos z - \operatorname{sen}[Nz]\operatorname{sen} z \Big|_{z=\cos^{-1} x} \\ &= \cos[N \cos^{-1} x] \cos(\cos^{-1} x) - \operatorname{sen}[N \cos^{-1} x] \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) \end{aligned}$$

$$V_{N+1}(x) = x \cos[N \cos^{-1} x] - \operatorname{sen}[N \cos^{-1} x] \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} V_{N-1}(z) \Big|_{z=\cos^{-1} x} &= \cos[Nz]\cos z + \operatorname{sen}[Nz]\operatorname{sen} z \Big|_{z=\cos^{-1} x} \\ &= \cos[N \cos^{-1} x] \cos(\cos^{-1} x) + \operatorname{sen}[N \cos^{-1} x] \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) \end{aligned}$$

$$V_{N-1}(x) = x \cos[N \cos^{-1} x] + \operatorname{sen}[N \cos^{-1} x] \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) \quad (4.35)$$

Al sumar las expresiones (4.34) y (4.35) se obtiene

$$V_{N+1}(x) + V_{N-1}(x) = 2x \cos[N \cos^{-1} x] = 2x V_N(x) \quad (4.36)$$

Haciendo  $Q = N + 1$ , como cambio de variable, entonces la expresión (4.36) queda como

$$V_Q(x) + V_{Q-2}(x) = 2x V_{Q-1}(x) \quad (4.37)$$

Ahora haciendo  $N = Q$ , entonces (4.37) se transforma en

$$V_N(x) = 2x V_{N-1}(x) - V_{N-2}(x) \quad \text{para } N > 1 \quad (4.38)$$

Además, note que (4.26) para  $N = 0$

$$V_0(x) = \cos(0) = 1 \quad \text{para toda } x$$

Mientras que (4.26) para  $N = 1$

$$V_1(x) = \cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{para } |x| \leq 1$$

$$V_1(x) = \cosh(\cosh^{-1} x) = x \quad \text{para } |x| > 1$$

Por lo que

$$V_1(x) = x \quad \text{para toda } x$$

como se indica en (4.2).

Ahora, se procede con el segundo análisis que permite verificar que las expresiones en (4.24) se pueden representar en forma de polinomio. Inicialmente se define la función  $u(x) = \cos^{-1} x$ , de esta forma (4.24) se escribe como

$$V_N(x) = \cos [N \cos^{-1} x] = \cos [N u(x)] \quad (4.39)$$

Además, a partir de igualdades trigonométricas se determina que

$$\begin{aligned} \cos [N u(x)] &= \operatorname{Re} \left\{ e^{jN u(x)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left[ e^{j u(x)} \right]^N \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \cos [u(x)] + j \operatorname{sen} [u(x)] \right)^N \right\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por otra parte, se sabe que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^N &= \alpha^N + \frac{N \alpha^{N-1} \beta}{1!} + \frac{N(N-1) \alpha^{N-2} \beta^2}{2!} \\ &+ \frac{N(N-1)(N-2) \alpha^{N-3} \beta^3}{3!} + \dots \\ &+ \frac{N(N-1)(N-2) \dots (N-(r-1)) \alpha^{N-r} \beta^r}{r!} + \dots \end{aligned} \quad (4.41)$$

Además

$$\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!} = \frac{N(N-1)(N-2) \dots (N-(r-1))}{r!} \quad (4.42)$$

Al introducir la notación (4.42) en (4.41) se obtiene la ecuación (4.43).

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^N &= \binom{N}{0} \alpha^N + \binom{N}{1} \alpha^{N-1} \beta + \binom{N}{2} \alpha^{N-2} \beta^2 \\ &+ \binom{N}{3} \alpha^{N-3} \beta^3 + \dots + \binom{N}{r} \alpha^{N-r} \beta^r + \dots + \binom{N}{N} \beta^N \end{aligned} \quad (4.43)$$

Considerando el análisis obtenido en (4.43) y suponiendo a  $\alpha = \cos [u(x)]$  y a  $\beta = j \operatorname{sen} [u(x)]$ , la ecuación (4.40) se representa como

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \left( e^{j u(x)} \right)^N \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \cos [u(x)] + j \operatorname{sen} [u(x)] \right)^N \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \binom{N}{0} \cos^N [u(x)] \right. \\ &+ \binom{N}{1} \cos^{N-1} [u(x)] j \operatorname{sen} [u(x)] + \binom{N}{2} \cos^{N-2} [u(x)] j^2 \operatorname{sen}^2 [u(x)] \\ &+ \binom{N}{3} \cos^{N-3} [u(x)] j^3 \operatorname{sen}^3 [u(x)] + \dots \\ &\left. + \binom{N}{r} \cos^{N-r} [u(x)] j^r \operatorname{sen}^r [u(x)] + \dots + \binom{N}{N} j^N \operatorname{sen}^N [u(x)] \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ya que sólo es de interés la parte real,  $\operatorname{Re} \left\{ \left( e^{j u(x)} \right)^N \right\}$ , se puede prescindir de los términos imaginarios y (4.44) se expresa como

$$\begin{aligned}
\cos [N u(x)] &= \binom{N}{0} \cos^N [u(x)] - \binom{N}{2} \cos^{N-2} [u(x)] \operatorname{sen}^2 [u(x)] \\
&+ \binom{N}{4} \cos^{N-4} [u(x)] \operatorname{sen}^4 [u(x)] - \binom{N}{6} \cos^{N-6} [u(x)] \operatorname{sen}^6 [u(x)] + \dots \\
&\quad + (-1)^{k/2} \binom{N}{k} \cos^{N-k} [u(x)] \operatorname{sen}^k [u(x)] + \dots \quad \text{con } k \text{ par y } k \leq N \quad (4.45)
\end{aligned}$$

De la igualdad trigonométrica (4.46) la ecuación (4.45) se escribe como en (4.47).

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 [u(x)] &= 1 - \cos^2 [u(x)] \quad (4.46) \\
\cos [N u(x)] &= \binom{N}{0} \cos^N [u(x)] - \binom{N}{2} \cos^{N-2} [u(x)] (1 - \cos^2 [u(x)]) \\
&+ \binom{N}{4} \cos^{N-4} [u(x)] (1 - \cos^2 [u(x)])^2 \\
&- \binom{N}{6} \cos^{N-6} [u(x)] (1 - \cos^2 [u(x)])^3 + \dots \\
&\quad + (-1)^{k/2} \binom{N}{k} \cos^{N-k} [u(x)] (1 - \cos^2 [u(x)])^{k/2} + \dots \quad \text{con } k \text{ par y } k \leq N \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Después de inspeccionar (4.47), se puede concluir que, con  $N$  par,  $\cos [N u(x)]$  resulta en un polinomio par de términos  $\cos [u(x)]$ , mientras que resulta en un polinomio impar cuando  $N$  es impar.

Por otra parte, ya que

$$\cos [u(x)] = \cos [\cos^{-1} x] = x \quad (4.48)$$

entonces (4.47) se escribe como

$$\begin{aligned}
\cos [N \cos^{-1} x] &= \binom{N}{0} x^N - \binom{N}{2} x^{N-2} (1 - x^2) \\
&+ \binom{N}{4} x^{N-4} (1 - x^2)^2 - \binom{N}{6} x^{N-6} (1 - x^2)^3 + \dots \\
&\quad + (-1)^{k/2} \binom{N}{k} x^{N-k} (1 - x^2)^{k/2} + \dots \quad \text{con } k \text{ par y } k \leq N \quad (4.49)
\end{aligned}$$

Al evaluar (4.49) para diferentes valores de  $N$ , se tiene:

Para  $N = 0$

$$\cos [0 \cos^{-1} x] = \binom{0}{0} x^0 = 1 = V_0(x)$$

Para  $N = 1$

$$\cos [\cos^{-1} x] = \binom{1}{0} x^1 = x = V_1(x)$$

Para  $N = 2$

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \binom{2}{0} x^2 - \binom{2}{2} x^0 (1 - x^2) = x^2 - (1 - x^2) \\ &= 2x^2 - 1 = 2xV_1(x) - V_0(x) \end{aligned}$$

Para  $N = 3$

$$\begin{aligned} V_3(x) &= \binom{3}{0} x^3 - \binom{3}{2} x^1 (1 - x^2) = x^3 - \frac{3!}{2!1!} x(1 - x^2) \\ &= x^3 - 3x + 3x^3 = 4x^3 - 3x = 2x(2x^2) - 2x - x \\ &= 2x(2x^2 - 1) - x = 2xV_2(x) - V_1(x) \end{aligned}$$

Para  $N = 4$

$$\begin{aligned} V_4(x) &= \binom{4}{0} x^4 - \binom{4}{2} x^2 (1 - x^2) + \binom{4}{4} x^0 (1 - x^2)^2 \\ &= x^4 - \frac{4!}{2!2!} (x^2 - x^4) + (1 - 2x^2 + x^4) \\ &= x^4 - 6x^2 + 6x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 = 8x^4 - 6x^2 - (2x^2 - 1) \\ &= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 2xV_3(x) - V_2(x) \end{aligned}$$

Por inducción matemática los polinomios de Chebyshev para cualquier orden  $N$  están dados por la fórmula recursiva:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x) \quad \text{para toda } x \quad (4.50)$$

y así (4.24) es un polinomio, lo cual queda verificado.

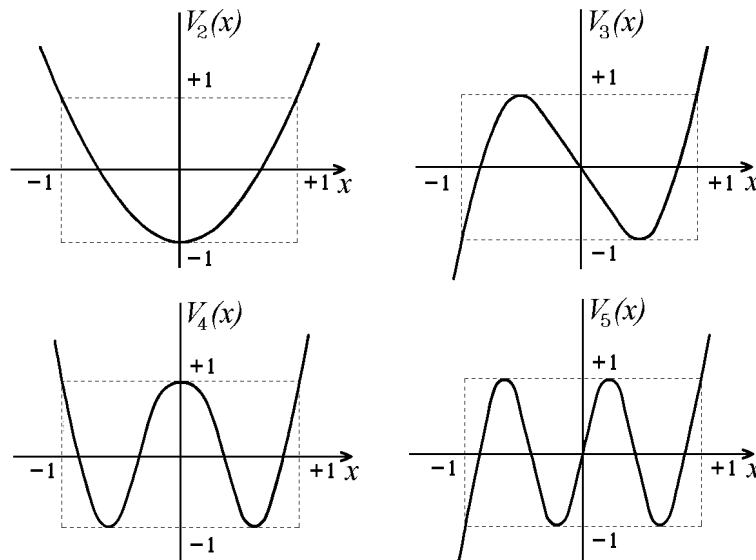
En la tabla 4.1 se proporcionan los 10 primeros polinomios de la ecuación recursiva (4.50) y en la figura 4.4 se ilustra el comportamiento gráfico para los polinomios con  $N = 2, 3, 4$  y 5.

**Tabla 4.1:** Polinomios de Chebyshev

$N$	$V_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos x] &  x  \leq 1 \\ \cosh[N \cosh^{-1} x] &  x  > 1 \end{cases}$
0	1
1	$x$
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$
10	$512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

De la tabla 4.1 se observa que para  $x$  grande ( $|x| \gg 1$ )  $V_N(x)$  puede aproximarse en términos prácticos por su componente principal, esto es, el primer término del polinomio es más significativo que sus demás términos cuando  $|x| \gg 1$  y se aproxima a

$$V_N(x) \approx 2^{N-1} x^N \quad \text{para } |x| \gg 1 \quad (4.51)$$



**Figura 4.4:** Comportamiento de los polinomios de Chebyshev

El resultado en (4.51) será de utilidad cuando se compare la eficiencia en el orden del filtro de esta aproximación con respecto a la aproximación Butterworth.

Al analizar el comportamiento gráfico de los polinomios de Chebyshev, mostrado en la figura 4.4, es posible deducir algunas propiedades importantes, tales como:

- Los cruces por cero de los polinomios de Chebyshev están localizados en el intervalo  $|x| \leq 1$ , es decir, tienen una característica de rizo para  $-1 \leq x \leq 1$ .
- Para todos los polinomios de grado  $N$  el polinomio  $|V_N(x)|$  posee la magnitud más pequeña en  $|x| \leq 1$  ya que en este intervalo nunca excede a la unidad:  $|V_N(x)| \leq 1$ .
- Fuera del intervalo  $|x| \leq 1$ ,  $|V_N(x)|$  se incrementa rápidamente al aumentar el valor de  $|x|$ .

Estas propiedades importantes serán utilizadas para desarrollar las representaciones de la magnitud en potencia para la aproximación del tipo I y del tipo II.

## 5. Aproximación del Tipo I

En este capítulo, se describe la metodología para la caracterización de la función de transferencia de los filtros pasa bajas, que contienen únicamente polos, utilizando los polinomios de Chebyshev. Esta representación es lo que se conoce como el diseño de filtros pasa bajas de aproximación Chebyshev del tipo I.

Se inicia con el análisis de cómo influyen los polinomios de Chebyshev en el comportamiento de la respuesta en frecuencia, primero examinando la banda de paso y posteriormente el comportamiento fuera de dicha banda. Luego, se establece el orden del filtro a partir de condiciones de diseño, así como el procedimiento para determinar la ubicación de los polos en un diagrama de polos y ceros, finalizando con la expresión de la función de transferencia que distingue al diseño de un filtro pasa bajas para un orden  $N$  dado.

La expresión que representa la magnitud en potencia del filtro pasa bajas para el diseño del tipo I está dada por la ecuación (5.1), en la figura 5.1 se muestran ejemplos para  $N = 3$  y 4.

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{K_0^2}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (5.1)$$

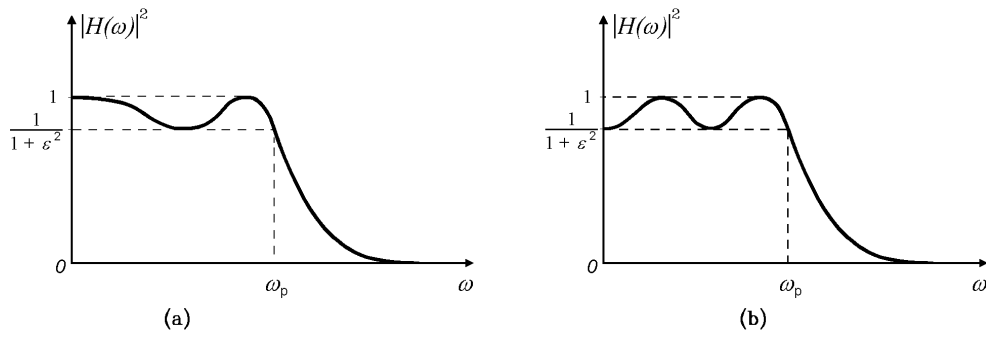
donde	$K_0$	Constante de normalización en amplitud para asegurar que el máximo valor de la función $ H_C(\omega) $ tenga valor unitario.
	$\varepsilon$	Parámetro de valor pequeño que proporciona la propiedad del rizo en la banda de paso.
	$\omega_p$	Frecuencia de paso.
	$V_N(\omega/\omega_p)$	Polinomio de Chebyshev de orden $N$ .

Tomando como base las expresiones de los polinomios de Chebyshev (tabla 4.1, con  $x = \omega/\omega_p$ ), el comportamiento gráfico (figura 5.2) y la ecuación de magnitud en potencia (5.1), un filtro Chebyshev pasa bajas de orden  $N$  tiene las siguientes propiedades básicas:

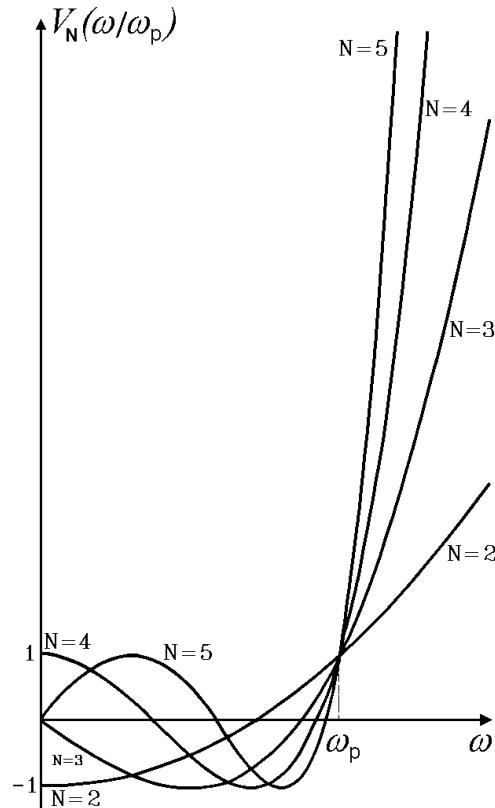
**Primera Propiedad.** La respuesta en frecuencia expresada como una función de la magnitud en potencia para la aproximación del tipo I satisface las condiciones:

$$|H_C(0)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{para } N \text{ par} \quad (5.2)$$

$$|H_C(0)|^2 = 1 \quad \text{para } N \text{ impar} \quad (5.3)$$



**Figura 5.1:** Respuestas de filtros del tipo I para (a)  $N = 3$  y (b)  $N = 4$



**Figura 5.2:** Gráfica de los polinomios de Chebyshev para  $N = 2, 3, 4$  y  $5$

$$|H_C(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \quad \text{para cualquier } N \quad (5.4)$$

La expresión (5.2) se verifica de la tabla 4.1 (con  $x = \omega/\omega_p$ ) y de las gráficas de los polinomios de Chebyshev de la figura 5.2, donde se observa que el valor  $V_N^2(\omega/\omega_p)$  para cualquier polinomio de Chebyshev de orden  $N$  par, evaluado en  $\omega = 0$ , es

$$V_N^2(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=0} = V_N^2(0) = 1 \quad \text{para } N \text{ par} \quad (5.5)$$

de manera que (5.1) para  $\omega = 0$  y  $N$  de orden par, considerando por simplicidad a  $K_0 = 1$ , sería entonces

$$|H_C(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

verificándose así (5.2).



De manera similar se verifica la ecuación (5.3), donde se observa que el valor de  $V_N^2(\omega/\omega_p)$  para cualquier polinomio de Chebyshev de orden  $N$  impar, evaluado en  $\omega = 0$ , es

$$V_N^2(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=0} = V_N^2(0) = 0 \quad \text{para } N \text{ impar} \quad (5.6)$$

de manera que (5.1) para  $\omega = 0$  y  $N$  de orden impar es

$$|H_C(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \Big|_{\omega=0} = 1$$

verificándose así (5.3).

Finalmente, se observa que el valor de  $V_N^2(\omega/\omega_p)$  para los polinomios de Chebyshev de cualquier orden  $N$ , evaluado en  $\omega = \omega_p$ , es

$$V_N^2(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=\omega_p} = V_N^2(1) = 1 \quad \text{para cualquier } N \quad (5.7)$$

de manera que (5.1) para  $\omega = \omega_p$  y  $N$  de cualquier orden es

$$|H_C(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \Big|_{\omega=\omega_p} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

verificándose así (5.4).

**Segunda Propiedad.** En el intervalo  $|\omega| \leq \omega_p$  la función (5.8) oscila entre el valor máximo  $K$  y el valor mínimo  $k/(1 + \varepsilon^2)$ , donde  $K$  es un valor constante utilizado para amplificar o atenuar la amplitud de la señal que se transmite a través del filtro pasa bajas y es diferente al valor de normalización  $K_0$  planteado en (5.1).

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (5.8)$$

Lo anterior se verifica al recordar que los polinomios de Chebyshev  $V_N(x)$  (con  $x = \omega/\omega_p$ ) presentan cruces por cero en el intervalo  $|\omega| \leq \omega_p$ , vea la figura 4.4 (con  $x = \omega/\omega_p$ ). Concluyendo que existe una frecuencia  $|\omega_2| < \omega_p$  (es decir,  $-\omega_2$  y  $\omega_2$ ) en la que el polinomio  $V_N(\omega/\omega_p) = 0$ , esto es

$$V_N^2(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=\omega_2} = V_N^2(\omega_2/\omega_p) = 0 \quad \text{con } |\omega_2| < \omega_p$$

de manera que (5.8) para  $\omega = \omega_2$  tiene el valor de  $K$ , como se muestra en (5.9).

$$|H_C(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_2} = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_2/\omega_p)} = K \quad \text{con } |\omega_2| < \omega_p \quad (5.9)$$

También, en ese mismo intervalo el valor al cuadrado de los polinomios de Chebyshev presentan amplitudes de valor unitario, vea la figura 4.4 (con  $x = \omega/\omega_p$ ). Concluyendo que existe una frecuencia  $|\omega_1| < \omega_p$  (es decir,  $-\omega_1$  y  $\omega_1$ ) en la que el polinomio  $V_N(\omega/\omega_p) = 1$ , esto es

$$V_N^2(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=\omega_1} = V_N^2(\omega_1/\omega_p) = 1 \quad \text{con } |\omega_1| < \omega_p$$

de manera que (5.8) para  $\omega = \omega_1$  tiene el valor de  $K/(1 + \varepsilon^2)$ , como se muestra en (5.10).

$$|H_C(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_1} = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_1/\omega_p)} = \frac{K}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{con } |\omega_1| < \omega_p \quad (5.10)$$

Por ejemplo, para  $N = 3$  el polinomio  $V_3(\omega/\omega_p)$  tiene tres cruces por cero en el intervalo de  $-1 \leq \omega/\omega_p \leq 1$  ( $|\omega/\omega_p| \leq 1$ ), y por ende la función  $|H_C(\omega)|^2$  tiene tres amplitudes con valor  $K$

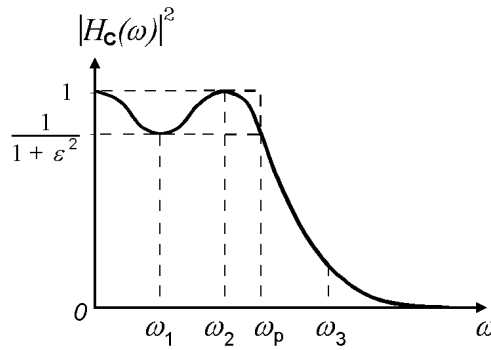


Figura 5.3: Rizo en banda de paso para  $N = 3$

en ese intervalo. En la figura 5.3 se muestra este hecho, donde sólo se grafica el intervalo para  $\omega$  positivas.

Por consiguiente, para cualquier valor  $N$ , la función  $|H_C(\omega)|^2$  tendrá  $N$  crestas (considerando valores de  $\omega$  positivas y negativas,  $-\omega_p \leq \omega \leq \omega_p$ ), y así, el comportamiento del rizo en la banda de paso depende del orden del filtro. En la figura 5.4 se muestra el comportamiento gráfico de  $|H_C(\omega)|^2$  para diferentes valores de  $N$  en función de  $\omega$  para  $0 \leq \omega/\omega_p \leq 1$ , con  $A_{m\acute{a}x}$  representando la magnitud donde el error oscila entre un máximo y un mínimo en esta banda.

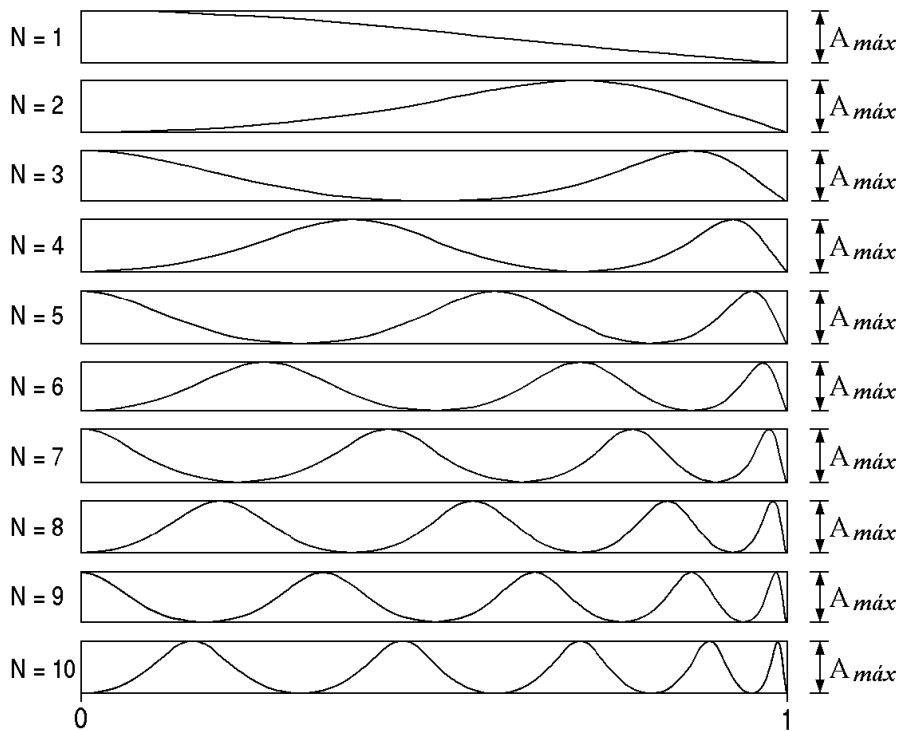


Figura 5.4: Comportamiento del rizo para  $N = 1, \dots, 10$

De la figura 5.4 se infiere que la respuesta en frecuencia para la aproximación del tipo I, está caracterizada por tener un rizo en la banda de paso.

**Tercera Propiedad.** Para  $|\omega/\omega_p| \gg 1$ ,  $V_N^2(\omega/\omega_p)$  tiende a infinito y por lo tanto (5.1) para  $\omega = |\omega_3|$ ,  $|H_C(\omega_3)|^2$  (con  $|\omega_3| \gg \omega_p$ ), tiende a cero, es decir que en la banda de rechazo tiene una respuesta monótonica, vea la figura 5.3. Lo anterior se verifica al recordar que para un valor de la frecuencia mucho mayor a  $\omega_p$  los polinomios de Chebyshev pueden aproximarse en términos prácticos por su componente principal, vea la ecuación (4.51), esto es

$$V_N(\omega/\omega_p) \approx 2^{N-1} (\omega/\omega_p)^N \quad \text{para } |\omega| \gg \omega_p$$

$$V_N^2(\omega/\omega_p) \approx 2^{2(N-1)} (\omega/\omega_p)^{2N} \quad \text{para } |\omega| \gg \omega_p \quad (5.11)$$

$$|H_C(\omega)|^2 \approx \frac{K}{\varepsilon^2 2^{2(N-2)} (\omega/\omega_p)^{2N}} \rightarrow 0 \quad \text{para } |\omega| \gg \omega_p \quad (5.12)$$

**Cuarta Propiedad.** Los filtros Chebyshev del tipo I contienen únicamente polos. Esto se observa directamente al aplicar los polinomios de Chebyshev (vea la tabla 4.1) a la función de magnitud en potencia (5.1).

En las propiedades descritas en los párrafos anteriores se ha usado la expresión de magnitud en potencia. Sin embargo, otra representación conveniente es mediante la ganancia en decibeles, *dB*.

Es importante comentar que las especificaciones de las condiciones de diseño de los filtros no solo se establecen mediante valores representando una magnitud en potencia, también, éstos están dados como una ganancia en *dB*, como se indicó en el capítulo 3. En este sentido, dado que en esta aproximación Chebyshev del tipo I el comportamiento espectral tiene un rizo en la banda de paso, comúnmente, en las características de diseño este ancho se especifica mediante una ganancia en *dB*.

El ancho del rizo o de oscilación, *RW*, se define como en (5.13) y en general oscila en el intervalo de *K* y un valor  $K/(1 + \varepsilon^2)$ , como lo establece la segunda propiedad.

$$RW = K - \frac{K}{1 + \varepsilon^2} \quad (5.13)$$

La relación en ganancia de la razón de rizo puede ser definida como  $RW_{dB}$ , la cual representa la diferencia entre la potencia máxima, vea (5.14), y la potencia mínima en la banda de paso, vea (5.15).

$$10 \log K \quad (5.14)$$

$$10 \log \left( \frac{K}{1 + \varepsilon^2} \right) \quad (5.15)$$

De esta forma  $RW_{dB}$  puede expresarse a partir de (5.14) y (5.15) como

$$\begin{aligned} RW_{dB} &= 10 \log K - 10 \log \left( \frac{K}{1 + \varepsilon^2} \right) \\ RW_{dB} &= 10 \log K - 10 \log K - 10 \log \left( \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) \\ RW_{dB} &= -10 \log \left( \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) \\ RW_{dB} &= +10 \log(1 + \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

■ **Ejemplo 5.1** Determine la función de la magnitud en potencia  $|H_C(\omega)|^2$  para un filtro Chebyshev del tipo I de segundo orden con un rizo de 1 *dB* en la banda de paso y una frecuencia de paso  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ .

*Solución:*

La expresión de la función de la magnitud en potencia  $|H_C(\omega)|^2$  para un filtro Chebyshev del tipo I es

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (5.17)$$

Debido a que en la enunciación del problema se establece un filtro de segundo orden, es posible usar la tabla 4.1 para  $N = 2$  (con  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ ):

$$\begin{aligned} V_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1 \\ V_2^2(\omega) &= (2\omega^2 - 1)^2 = 4\omega^4 - 4\omega^2 + 1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Al sustituir (5.18) en (5.17) se obtiene

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (4\omega^4 - 4\omega^2 + 1)}$$

El valor de  $\varepsilon^2$  se determina utilizando la expresión de la relación en ganancia de la razón de rizo (5.16) y del valor proporcionado en la enunciación del problema de  $RW_{dB} = 1 \text{ dB}$ , como sigue

$$\begin{aligned} 1 \text{ dB} &= RW_{dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2) \\ \varepsilon^2 &= 10^{(RW_{dB}/10)} - 1 \\ \varepsilon^2 &= 10^{0.1} - 1 = 0.25893 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{1}{1.0357\omega^4 - 1.0357\omega^2 + 1.2589}$$

■

Con relación al intervalo de frecuencias fuera de la banda de paso para el filtro del tipo I (esto es para  $|\omega| \geq \omega_p$ ), a medida que aumenta  $\omega$  se alcanza un punto de frecuencia definida como  $\omega_k$  en donde  $\varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p) \gg 1$  de tal forma que (5.1) se aproxima a

$$|H_C(\omega)|^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad \text{para } \omega > \omega_k > \omega_p \quad (5.19)$$

En este caso  $V_N^2(\omega/\omega_p)$  se puede aproximar a  $2^{N-1}(\omega/\omega_p)^N$  (como se hizo notar en la tercera propiedad mencionada en párrafos anteriores), esto es

$$\begin{aligned} V_N^2(\omega/\omega_p) &= \cosh^2(N \cosh^{-1}(\omega/\omega_p)) \\ &\approx 2^{2N-2}(\omega/\omega_p)^{2N} \quad \text{para } \omega > \omega_k > \omega_p \end{aligned} \quad (5.20)$$

La pérdida en decibeles para (5.19) está dado por

$$\begin{aligned} \text{Pérdida} &= -10 \log |H_C(\omega)|^2 \approx 10 \log [\varepsilon V_N(\omega/\omega_p)]^2 \\ &= 20 \log \varepsilon + 20 \log V_N(\omega/\omega_p) \quad \text{para } \omega > \omega_k > \omega_p \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sustituyendo (5.20) en (5.21) se tiene

$$\begin{aligned} \text{Pérdida} &= 20 \log \varepsilon + 20 \log \left| 2^{N-1} (\omega/\omega_p)^N \right| \\ &= 20 \log \varepsilon + 20 \log 2^{N-1} + 20 \log |\omega/\omega_p|^N \\ &= 20 \log \varepsilon + 20(N-1) \log 2 + 20N \log |\omega/\omega_p| \\ \text{Pérdida} &= 20 \log \varepsilon + 6(N-1) + 20N \log |\omega/\omega_p| \end{aligned} \quad (5.22)$$

Al interpretar (5.22) se determina que la respuesta de Chebyshev del tipo I decae a una razón de  $20 N \text{ dB/década}$  ( $6 N \text{ dB/octava}$ ) después de una caída inicial de  $20 \log \varepsilon + 6(N - 1)$  decibels. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones el valor de  $\varepsilon$  es un número menor o igual a la unidad (que corresponde a un diseño de un filtro con características de un ancho de rizo pequeño), de manera que el término  $20 \log \varepsilon$  es un valor negativo ( $\varepsilon < 1$ ) o cero (si  $\varepsilon = 1$ ). Para el caso particular de  $\varepsilon = 1$  (la consideración de este valor permite realizar comparaciones con la aproximación Butterworth[16]) el límite inferior del ancho del rizo se encuentra a  $\frac{1}{2}$  de la máxima ganancia en potencia ( $1/\sqrt{2}$  de su máxima magnitud) y la expresión de pérdida (5.22) es (donde  $20 \log \varepsilon = 0$ )

$$\text{Pérdida} = 6(N - 1) + 20 N \log |\omega/\omega_p| \quad (5.23)$$

Por otro lado, y con la finalidad de realizar comparaciones de la razón de caída de esta aproximación con la de Butterworth, se obtiene la razón de caída para esta última. Para ello, se parte de la representación en magnitud en potencia de la aproximación Butterworth, la cual está representada por (5.24) (cuando  $\varepsilon = 1$  se cumple que  $\omega_p = \omega_c$ ).

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}} = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad (5.24)$$

Cuando se considera una frecuencia  $|\omega| \gg \omega_c$  entonces (5.24) se aproxima a (5.25).

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \approx \frac{1}{(\omega/\omega_c)^{2N}} \quad \text{para } |\omega| \gg \omega_c \quad (5.25)$$

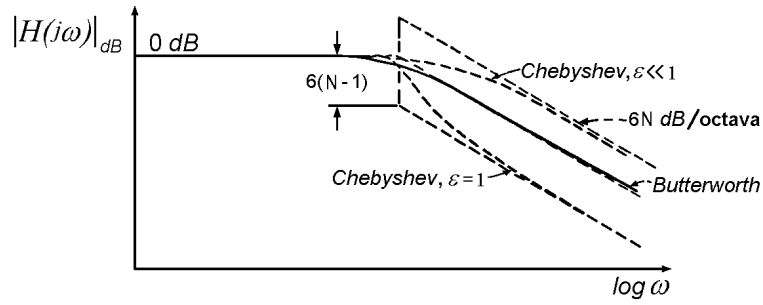
La relación de pérdida para (5.25) es

$$\begin{aligned} \text{Pérdida} &= -10 \log |H_B(\omega)|^2 \approx 10 \log |\omega/\omega_c|^{2N} \\ \text{Pérdida} &= 20 N \log |\omega/\omega_c| \quad \text{para } |\omega| \gg \omega_c \end{aligned} \quad (5.26)$$

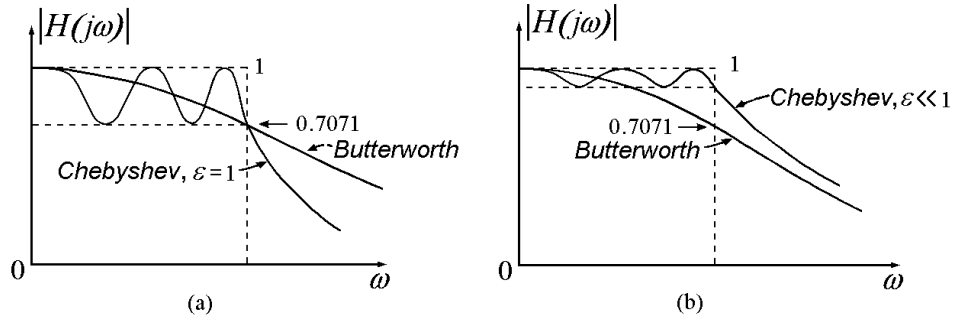
Al comparar (5.23) y (5.26) se observa que la asíntota para la respuesta a altas frecuencias se coloca por debajo de  $6(N - 1) \text{ dB}$  con respecto a la aproximación Butterworth, como se muestra en la figura 5.5. Así, los filtros Chebyshev del tipo I para este caso ( $\varepsilon = 1$ ) tienen, para cualquier orden  $N$ , una mayor atenuación en la banda de rechazo y este comportamiento corresponde a la mejor aproximación a la característica ideal con sólo polos en su función de transferencia. Por otra parte, el valor de  $\varepsilon$  pequeño, permite tener ventajas en ganancia (una ganancia más uniforme, ya que el rizo es pequeño) en la banda de paso, pero estas ventajas tienen un precio que tiene que ser pagado por el comportamiento en la banda de rechazo, es decir, el primer término en (5.22) puede llegar a ser grande ( $20 \log \varepsilon$  con una magnitud mayor a  $6(N - 1)$ , para  $\varepsilon \ll 1$ ), dando como resultado que la asíntota para la respuesta a altas frecuencias se coloque por arriba con respecto a la aproximación Butterworth, como se muestra en la figura 5.5; y en tal caso es necesario compensar esta disminución en pérdida al seleccionar un  $N$  suficientemente grande. La interpretación de estos dos casos (para  $\varepsilon = 1$  y  $\varepsilon \ll 1$ ) se muestra en la figura 5.6.

Ahora se introduce un nuevo parámetro  $\lambda$  que es utilizado para fijar el límite superior de la banda de rechazo,  $\omega_r$ , como se muestra en la figura 5.7. Mientras que el parámetro  $\varepsilon$  se ha empleado para establecer el límite inferior de la banda de paso,  $\omega_p$ .

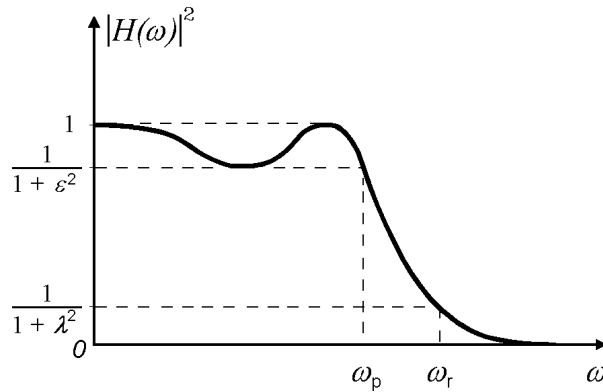
Los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  proporcionan dos puntos de coordenadas importantes, utilizados para fijar las condiciones de diseño de los filtros. Estos parámetros entonces definen el ancho de la banda de transición, por consiguiente, también la rapidez de cambio en frecuencia entre la banda de paso y la banda de rechazo. A su vez, esta rapidez de cambio está asociada al orden del filtro. Por lo que, a continuación se procede a determinar la expresión de dicho orden. Se espera que éste esté en función de los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$ . Una vez establecido dicho valor, se localizan los polos de  $|H_C(\omega)|^2$  para posteriormente determinar la función de transferencia  $H(s)$ .



**Figura 5.5:** Comparación del comportamiento entre un filtro Butterworth y uno Chebyshev



**Figura 5.6:** Comparación del comportamiento entre un filtro Butterworth y uno Chebyshev, para dos valores de  $\epsilon$ : (a)  $\epsilon = 1$  y (b)  $\epsilon \ll 1$



**Figura 5.7:** Gráfica de magnitud en potencia del filtro del tipo I caracterizada por:  $\omega_p$ ,  $\omega_r$ ,  $\lambda$  y  $\epsilon$

La expresión del orden del filtro se obtiene al evaluar (5.17) en  $\omega = \omega_r$  y de la figura 5.7 se infiere que

$$|H_C(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \Big|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\omega_r/\omega_p)} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \tag{5.27}$$

El polinomio  $V_N(\omega_r/\omega_p)$  se puede expresar como en (5.28) debido a que  $|\omega_r/\omega_p| > 1$ , vea (4.24).

$$\begin{aligned} V_N(\omega_r/\omega_p) &= V_N(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=\omega_r} = \cosh(N \cosh^{-1}(\omega/\omega_p)) \Big|_{\omega=\omega_r} \\ V_N(\omega_r/\omega_p) &= \cosh(N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)) \end{aligned} \tag{5.28}$$

Ahora, sustituyendo (5.28) en (5.27):

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cosh^2 [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)]} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad (5.29)$$

$$1 + \lambda^2 = 1 + \varepsilon^2 \cosh^2 [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)]$$

$$\lambda = \varepsilon \cosh [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)]$$

$$\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon) = N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)$$

$$\therefore N \geq \frac{\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)} \quad (5.30)$$

La desigualdad “>” en la ecuación (5.30) es para asegurar el mínimo orden  $N$  necesario para satisfacer las condiciones de diseño del filtro. Por ejemplo, si la relación en (5.30) proporciona un valor de 3.2 ( $N$  sólo toma valores enteros) se obliga al menos a  $N = 4$ , de otra forma no se cumple con las restricciones impuestas al filtro.

Ahora se procede a encontrar la ubicación de los polos a partir de la expresión  $|H_C(\omega)|^2$ . La respuesta en frecuencia, partiendo del plano de Laplace, se logra mediante la evaluación sobre el eje  $j\omega$ , es decir, mediante la sustitución  $s = j\omega$ , con lo que la magnitud en potencia queda expresada como

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5.31)$$

Se obtiene la ubicación de los polos para los filtros del tipo I al igualar a cero el denominador de la ecuación (5.32), como se observa en (5.33). Recuerde que esta aproximación contiene solo polos.

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (5.32)$$

$$1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p) = 0 \quad (5.33)$$

Haga el siguiente cambio de variable:  $x = \omega/\omega_p$ , y (5.33) se expresa como

$$1 + \varepsilon^2 V_N^2(x) = 0 \quad (5.34)$$

De la relación entre planos en (5.31), la ecuación (5.34) expresada en el dominio de la frecuencia se mapea al plano  $s$  al sustituir

$$s = j\omega \quad \implies \quad \omega = s/j \quad (5.35)$$

y de esta forma

$$x = s/j\omega_p \quad (5.36)$$

Regresando a la igualdad en (5.34) se tiene que

$$\varepsilon^2 V_N^2(x) = -1$$

$$V_N^2(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$V_N(x) = \pm \frac{j}{\varepsilon} \quad (5.37)$$

De la igualdad en (4.24), entonces (5.37) es

$$V_N(x) = \cos [N \cos^{-1} x] = \pm \frac{j}{\varepsilon}$$

$$N \cos^{-1} x = \cos^{-1} (\pm j/\varepsilon) \quad (5.38)$$

Para determinar el valor del arco coseno con argumento complejo se iguala la parte derecha de la expresión (5.38) a un número complejo, representado como:  $\alpha + j\beta$ , donde  $\alpha$  es la parte real y  $\beta$  la parte imaginaria, como se muestra en (5.39).

$$\cos^{-1} (\pm j/\varepsilon) = \alpha + j\beta \quad (5.39)$$

El objetivo de este análisis es determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que cumplan con la igualdad impuesta en (5.39), para luego aplicarlo a (5.38). Para ello, inicialmente se despeja el argumento complejo

$$\pm \frac{j}{\varepsilon} = \cos(\alpha + j\beta) \quad (5.40)$$

De la igualdad trigonométrica (5.41), (5.40) se expresa como en (5.42).

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + j\beta) &= \cos \alpha \cos j\beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} j\beta \\ &= \cos \alpha \cosh \beta - j \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \beta \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\pm \frac{j}{\varepsilon} = \cos \alpha \cosh \beta - j \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \beta \quad (5.42)$$

De la igualdad en (5.42) se infiere que la parte real debe ser cero

$$\cos \alpha \cosh \beta = 0 \quad (5.43)$$

Mientras que

$$\pm \frac{1}{\varepsilon} = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} j\beta \quad (5.44)$$

Considerando que tanto el  $\cosh(\bullet)$  como el  $\cosh^{-1}(\bullet)$  son funciones crecientes monotónicamente con relación a su argumento, entonces el  $\cosh \beta \neq 0$  para cualquier valor real de  $\beta$ ; de la igualdad en (5.43) entonces se obliga a que el  $\cos \alpha$  debe ser igual a cero, esto es

$$\cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \left( \frac{2k-1}{2} \right) \pi \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.45)$$

El análisis anterior permitió determinar el valor de  $\alpha$ , que ahora se sustituye en (5.44) con el fin de determinar la condición de  $\beta$ , esto es

$$\pm \frac{1}{\varepsilon} = -\operatorname{sen} \left[ \left( \frac{2k-1}{2} \right) \pi \right] \operatorname{senh} \beta \quad (5.46)$$

Se hace notar que la función

$$\operatorname{sen} \left[ \left( \frac{2k-1}{2} \right) \pi \right] = \begin{cases} 1 & \text{para } k \text{ impar} \\ -1 & \text{para } k \text{ par} \end{cases} \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.47)$$

Por lo que (5.46) presenta dos soluciones.

Para los valores de  $k$  par (5.46) se expresa como en (5.48) o como en (5.49).

$$\pm \frac{1}{\varepsilon} = \operatorname{senh} \beta \quad (5.48)$$



$$\beta = \sinh^{-1}(\pm 1/\varepsilon) = \pm \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.49)$$

Para los valores de  $k$  impares (5.46) se expresa como en (5.50) o como en (5.51).

$$\mp \frac{1}{\varepsilon} = \sinh \beta \quad (5.50)$$

$$\beta = \sinh^{-1}(\mp 1/\varepsilon) = \mp \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.51)$$

De (5.49) o de (5.51) se observa que  $\beta$  tiene dos soluciones, una de valor positivo y otra de valor negativo. Para el análisis que se describe a continuación se utiliza por conveniencia la expresión (5.49).

De las igualdades (5.38), (5.39), (5.45) y (5.49) se obtiene

$$\begin{aligned} N \cos^{-1} x &= \cos^{-1}(\pm j/\varepsilon) = \alpha + j\beta \\ \cos^{-1} x &= \alpha_k + j\beta_k \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde

$$\alpha_k = \frac{\alpha}{N} = \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \quad (5.53)$$

$$\beta_k = \frac{\beta}{N} = \pm \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.54)$$

Al despejar  $x$  de (5.52) aplicando el coseno para ambos lados de la igualdad se tiene

$$\begin{aligned} \cos[\cos^{-1} x] &= \cos(\alpha_k + j\beta_k) \\ x &= \cos(\alpha_k + j\beta_k) \end{aligned} \quad (5.55)$$

De las igualdades (5.36) y (5.41) la ecuación (5.55) se expresa como

$$x = \frac{s}{j\omega_p} = \cos \alpha_k \cosh \beta_k - j \sin \alpha_k \sinh \beta_k \quad (5.56)$$

La ubicación de los polos para el filtro del tipo I es

$$s_k = \omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta_k + j\omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.57)$$

Antes de sustituir (5.54) en (5.57) se realiza el siguiente cambio: Sea

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.58)$$

entonces (5.54) se expresa como

$$\beta_k = \pm \beta'_k$$

Mientras que

$$\sinh \beta_k = \sinh(\pm \beta'_k) = \pm \sinh \beta'_k \quad (5.59)$$

$$\cosh \beta_k = \cosh(\pm \beta'_k) = \cosh \beta'_k \quad (5.60)$$

De esta forma, (5.57) se escribe como

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad (5.61)$$

donde

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \quad (5.62)$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k \quad (5.63)$$

por conveniencia sólo se considera el signo negativo para  $\sigma_k$ .

Al sustituir  $\alpha_k$  y  $\beta'_k$  dados por (5.53) y (5.58), respectivamente, se obtiene

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \right] \operatorname{senh} \left[ \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \right] \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.64)$$

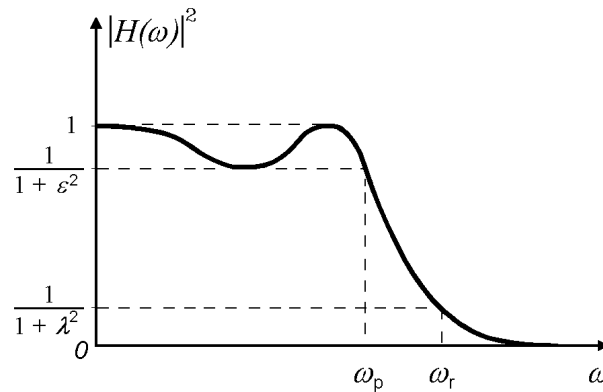
$$\Omega_k = \omega_p \cos \left[ \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \right] \operatorname{cosh} \left[ \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \right] \quad k = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.65)$$

■ **Ejemplo 5.2** Determine y grafique, en un diagrama de polos y ceros, los polos del filtro Chebyshev del tipo I que satisfaga las condiciones:

Un decibel de rizo en la banda de paso y una atenuación por debajo de los 20 dB para frecuencias por arriba de  $\omega = 2\omega_p$ . Suponga además una  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ .

*Solución:*

El comportamiento del filtro es de la forma mostrada en la figura 5.8.



**Figura 5.8:** Magnitud en potencia indicando los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  para el ejemplo 5.2

En la frecuencia  $\omega = \omega_p$

$$|H_C(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

La expresión anterior al representarla mediante una ganancia en dB se expresa como

$$10 \log |H_C(\omega_p)|^2 = 10 \log \left( \frac{1}{1+\varepsilon^2} \right)$$

En la enunciación del problema se establece que a la frecuencia  $\omega = \omega_p$  se tiene una pérdida de 1 dB, con respecto a la máxima ganancia, implicando que

$$-1 \text{ dB} = -10 \log(1+\varepsilon^2)$$

$$0.1 = \log(1+\varepsilon^2)$$

$$1+\varepsilon^2 = 10^{(0.1)}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.1)} - 1} = 0.50885$$

En la frecuencia  $\omega = \omega_r = 2\omega_p$

$$|H_C(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Procediendo de manera similar, al representar la expresión anterior mediante una ganancia en  $dB$  se tiene

$$10 \log |H_C(\omega_r)|^2 = 10 \log \left( \frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

En la enunciación del problema se indica que a la frecuencia  $\omega = \omega_r$  la ganancia ha caído 20  $dB$  con respecto a la máxima ganancia, por lo que

$$-20 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$2 = \log(1 + \lambda^2)$$

$$1 + \lambda^2 = 10^2$$

$$\lambda = \sqrt{100 - 1} = 9.94987$$

El orden del filtro está dado por

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)} \quad (5.66)$$

Sustituyendo valores

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{9.94987}{0.50885}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{2\omega_p}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}(19.55364)}{\cosh^{-1} 2} = \frac{3.66565}{1.31696} = 2.783$$

Ya que  $N$  debe ser entero hacemos a  $N = 3$ .

Para determinar la ubicación de los polos se aplica (5.61), (5.62), (5.63), (5.53) y (5.58), para  $N = 3$ ,  $\varepsilon = 0.50885$  y  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ , esto es

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \quad (5.67)$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k \quad (5.68)$$

$$\alpha_k = \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \quad (5.69)$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.70)$$

Sustituyendo valores

$$\beta'_k = \frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.50885) = 0.47599$$

$$\operatorname{senh} \beta'_k = \operatorname{senh}(0.47599) = 0.49417$$

$$\cosh \beta'_k = \cosh(0.47599) = 1.11544$$

**Tabla 5.1:** Ubicación de los polos del ejemplo 5.2

$k$	$\alpha_k$	$\cos \alpha_k$	$\text{sen} \alpha_k$	$\sigma_k =$ $-\omega_p \text{sen} \alpha_k \sinh \beta'_k$	$\Omega_k =$ $\omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$
1	$\pi/6$	0.86603	0.5	-0.2471	0.9660
2	$\pi/2$	0	1	-0.4942	0
3	$5\pi/6$	-0.86603	0.5	-0.2471	-0.9660
4	$7\pi/6$	-0.86603	-0.5	0.2471	-0.9660
5	$3\pi/2$	0	-1	0.4942	0
6	$11\pi/6$	0.86603	-0.5	0.2471	0.9660

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestra en la tabla 5.1 (con  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ ).

Así

$$s_1 = -0.2471 + j0.9660$$

$$s_2 = -0.4942$$

$$s_3 = -0.2471 - j0.9660$$

$$s_4 = 0.2471 - j0.9660$$

$$s_5 = 0.4942$$

$$s_6 = 0.2471 + j0.9660$$

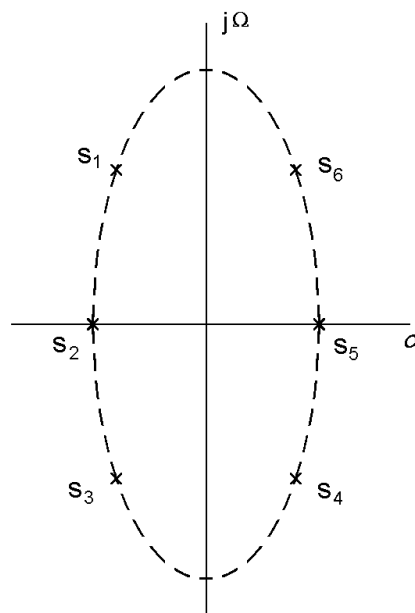
También se pueden agrupa de la siguiente forma

$$s_1 = -0.2471 + j0.9660 = s_3^*$$

$$s_2 = -0.4942$$

$$s_4 = 0.2471 - j0.9660 = s_6^*$$

$$s_5 = 0.4942$$

**Figura 5.9:** Distribución de los polos para el ejemplo 5.2

La gráfica con la distribución de polos se muestra en la figura 5.9.

■

Sería conveniente analizar si la distribución de los polos de la aproximación Chebyshev del tipo I cumple con algún patrón geométrico, como sucede para la distribución de los polos de la aproximación Butterworth. Para ello inicialmente se determina el valor cuadrático de las ecuaciones (5.67) y (5.68), esto es

$$\sigma_k^2 = \omega_p^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_k \operatorname{senh}^2 \beta'_k \quad (5.71)$$

$$\Omega_k^2 = \omega_p^2 \cos^2 \alpha_k \operatorname{cosh}^2 \beta'_k \quad (5.72)$$

Por conveniencia las ecuaciones (5.71) y (5.72) se expresan como

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_k = \frac{\sigma_k^2}{\omega_p^2 \operatorname{senh}^2 \beta'_k} \quad (5.73)$$

$$\cos^2 \alpha_k = \frac{\Omega_k^2}{\omega_p^2 \operatorname{cosh}^2 \beta'_k} \quad (5.74)$$

Por otra parte, al considerar la siguiente igualdad trigonométrica

$$\cos^2 \alpha_k + \operatorname{sen}^2 \alpha_k = 1 \quad (5.75)$$

entonces (5.75) en función de (5.73) y (5.74) está dado por

$$\frac{\sigma_k^2}{\omega_p^2 \operatorname{senh}^2 \beta'_k} + \frac{\Omega_k^2}{\omega_p^2 \operatorname{cosh}^2 \beta'_k} = 1 \quad (5.76)$$

La expresión (5.76) representa la ecuación de una elipse cuyos ejes de coordenadas son  $\sigma$  y  $\Omega$  del plano  $s$ . El semieje mayor de la elipse se encuentra en el eje  $j\Omega$  cuyo valor está dado por (5.77), mientras que el semieje menor de la elipse se encuentra en el eje  $\sigma$  cuyo valor está dado por (5.78) y los focos de la elipse están localizados en  $\Omega = \pm \omega_p$ . Así, los polos del filtro del tipo I se encuentran ubicados en el plano  $s$  formando una elipse cuyo contorno se muestra en la figura 5.10.

$$\Omega = \pm \omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k \quad (5.77)$$

$$\sigma = \pm \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k \quad (5.78)$$

Una vez analizado que la ubicación de los polos para los filtros del tipo I se localizan en el contorno de una elipse, ahora sería interesante poder relacionar geoméricamente la ubicación de los polos de los filtros Butterworth con la ubicación de los polos de los filtros Chebyshev del tipo I. El análisis que se desarrolla a continuación tiene ese objetivo.

Del estudio de la aproximación Butterworth la ubicación de los polos para cualquier orden  $N$  se obtiene al evaluar la ecuación (5.79), vea el *Apéndice B*.

$$s_k = \omega_c e^{j\left[\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi\right]} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (5.79)$$

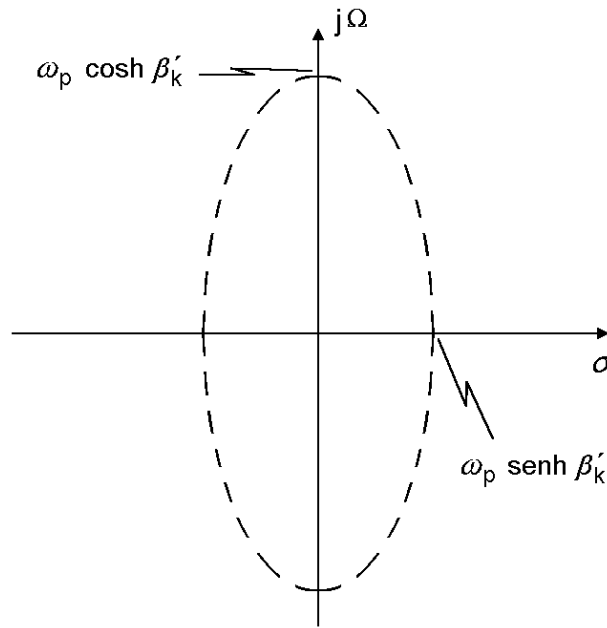
Otra forma de expresar la ecuación (5.79) es

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

donde

$$\sigma_k = \omega_c \cos \left[ \left( \frac{2k+N-1}{2N} \right) \pi \right] = -\omega_c \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \right] \quad (5.80)$$

$$\Omega_k = \omega_c \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{2k+N-1}{2N} \right) \pi \right] = +\omega_c \cos \left[ \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \right] \quad (5.81)$$



**Figura 5.10:** Contorno de ubicación de los polos Chebyshev del tipo I

Las igualdades en (5.80) y (5.81) se fundamentan por el hecho de que el  $\text{sen}(x + \pi/2) = \cos(x)$  y  $\cos(x + \pi/2) = -\text{sen}(x)$ . Observe que las ecuaciones (5.80) y (5.81) también pueden expresarse en función de (5.69) como

$$\sigma_k = -\omega_c \text{sen} \alpha_k \quad (5.82)$$

$$\Omega_k = \omega_c \cos \alpha_k \quad (5.83)$$

Las expresiones (5.82) y (5.83) también se pueden obtener de

$$s_k = \omega_c e^{j[(\frac{2k+N-1}{2N})\pi]} = \omega_c e^{j[\frac{2k-1}{2N} + \frac{N}{2N}]\pi} = \omega_c e^{j[(\frac{2k-1}{2N})\pi]} e^{j\pi/2}$$

$$s_k = j \omega_c e^{j\alpha_k} = j [\omega_c \cos \alpha_k + j \omega_c \text{sen} \alpha_k]$$

$$s_k = \sigma_k + j \Omega_k = -\omega_c \text{sen} \alpha_k + j \omega_c \cos \alpha_k \quad (5.84)$$

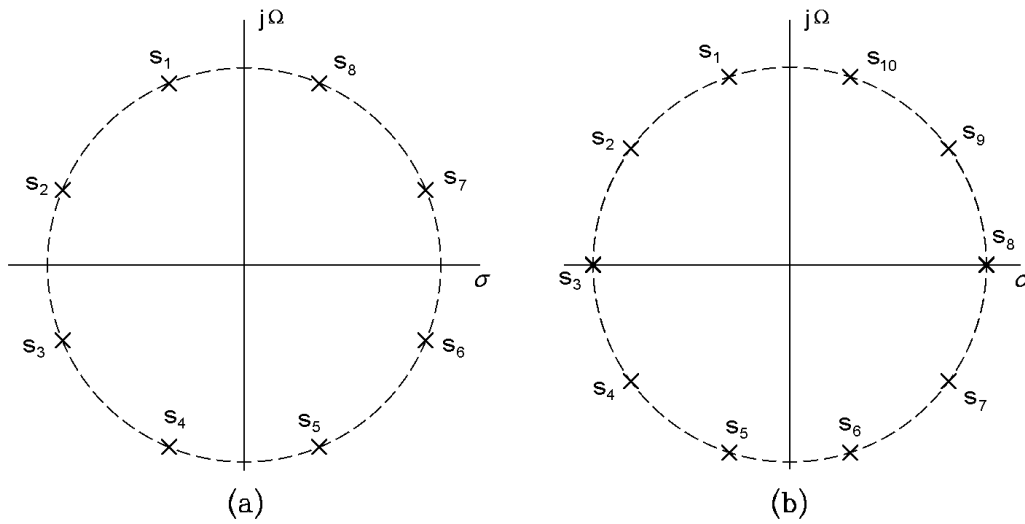
De (5.79) o de (5.84) se verifica que la ubicación de los polos para la aproximación Butterworth se localiza invariablemente en el contorno de un círculo de radio  $\omega_c$  (frecuencia de corte) con separación angular entre polo y polo de  $180^\circ/N$  ( $N$  es el orden del filtro). Ejemplos para  $N = 4$  y  $5$  se muestran en la figura 5.11.

Regresando al análisis de la aproximación Chebyshev del tipo I, considere la frecuencia  $\omega_a$  definida como en (5.85), que corresponde al segmento mayor de la elipse, esto es, a la frecuencia donde la elipse cruza el eje imaginario del plano  $s$ , vea la figura 5.10.

$$\omega_a = \omega_p \cosh \beta'_k \quad (5.85)$$

En esta frecuencia de  $\omega_a$  los polinomios de Chebyshev del tipo I están dados por

$$\begin{aligned} V_N^2(\omega_a/\omega_p) &= V_N^2(\omega/\omega_p) \Big|_{\omega=\omega_a} = \cosh^2 [N \cosh^{-1}(\omega/\omega_p)] \Big|_{\omega=\omega_a} \\ &= \cosh^2 [N \cosh^{-1}(\omega_a/\omega_p)] = \cosh^2 [N \cosh^{-1}(\cosh \beta'_k)] \\ V_N^2(\omega_a/\omega_p) &= \cosh^2 (N \beta'_k) \end{aligned} \quad (5.86)$$



**Figura 5.11:** Ubicación de polos para Butterworth: (a)  $N = 4$  y (b)  $N = 5$

Por otra parte, de (5.70) se determina que

$$\begin{aligned} \sinh^2(N\beta'_k) &= \sinh^2[N(1/N)\sinh^{-1}(1/\varepsilon)] = [\sinh(\sinh^{-1}(1/\varepsilon))]^2 \\ \sinh^2(N\beta'_k) &= 1/\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (5.87)$$

De la igualdad trigonométrica (5.88) se obtiene (5.89).

$$\cosh^2(N\beta'_k) - \sinh^2(N\beta'_k) = 1 \quad (5.88)$$

$$\cosh^2(N\beta'_k) = 1 + \sinh^2(N\beta'_k) \quad (5.89)$$

De (5.87) la ecuación (5.89) se expresa como

$$\cosh^2(N\beta'_k) = 1 + 1/\varepsilon^2 \quad (5.90)$$

De esta forma, de las ecuaciones (5.86) y (5.90), se determina que los polinomios de Chebyshev evaluados en  $\omega = \omega_a$  están dados por

$$V_N^2(\omega_a/\omega_p) = 1 + 1/\varepsilon^2 \quad (5.91)$$

Al aplicar (5.91) y luego (5.85) en la expresión de magnitud en potencia, vea la ecuación (5.32), se obtiene

$$\begin{aligned} |H_C(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_a} &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \Big|_{\omega=\omega_a} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_a/\omega_p)} \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (1 + 1/\varepsilon^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left( \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right)} \end{aligned}$$

$$\left| H_C(\omega_p \cosh \beta'_k) \right|^2 = \frac{1}{2 + \varepsilon^2} \quad (5.92)$$

Para  $\varepsilon \ll 1$  la relación  $2 + \varepsilon^2 \approx 2$  y (5.92) se aproxima a

$$\left| H_C(\omega_p \cosh \beta'_k) \right|^2 \approx \frac{1}{2} \quad \text{para } \varepsilon \ll 1 \quad (5.93)$$

la cual representa la ganancia de media potencia (se asume que la máxima ganancia es unitaria), y  $\omega_p \cosh \beta'_k$ , vea (5.85), es la frecuencia donde la ganancia decae a la mitad de la máxima potencia, este último concepto también es un parámetro fundamental en la aproximación Butterworth. De (5.93) se infiere que es posible asociar los resultados obtenidos de la aproximación Butterworth con la aproximación Chebyshev del tipo I relacionando el parámetro de frecuencia  $\omega = \omega_c$  (frecuencia de media potencia para la aproximación Butterworth) con la frecuencia  $\omega = \omega_p \cosh \beta'_k$  (que se aproxima a la frecuencia de media potencia en el caso de Chebyshev del tipo I).

Con la finalidad de llevar a cabo esta vinculación se muestra en la tabla 5.2 un resumen de las expresiones que permiten determinar la ubicación de los polos tanto para la aproximación Chebyshev del tipo I como de Butterworth.

**Tabla 5.2:** Expresiones de ubicación de polos: Chebyshev del tipo I y Butterworth

Chebyshev del tipo I	Butterworth
$\sigma_k = -\omega_p \sinh \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k$	$\sigma_k = -\omega_c \operatorname{sen} \alpha_k$
$\Omega_k = \omega_p \cosh \beta'_k \cos \alpha_k$	$\Omega_k = \omega_c \cos \alpha_k$

Ahora las ecuaciones de  $\sigma_k$  y de  $\Omega_k$  para la aproximación Chebyshev, vea la tabla 5.2, se expresan en función de la frecuencia  $\omega_a = \omega_p \cosh \beta'_k$ , como se muestra a continuación.

Note que

$$\frac{\omega_a}{\omega_p} = \frac{\omega_a}{\omega_p \cosh \beta'_k}$$

entonces

$$\sigma_k = -\omega_p \sinh \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k = -\omega_a \tanh \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k \quad (5.94)$$

$$\Omega_k = \omega_p \cosh \beta'_k \cos \alpha_k = \omega_a \cos \alpha_k \quad (5.95)$$

con

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.96)$$

$$\alpha_k = \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \quad (5.97)$$

Las ponderaciones senos y cosenos en las ecuaciones (5.94) y (5.95) son muy parecidas a las expresiones de la aproximación Butterworth, (5.98) y (5.99), vea la tabla 5.2.

$$\sigma_k = -\omega_c \operatorname{sen} \alpha_k \quad (5.98)$$

$$\Omega_k = \omega_c \cos \alpha_k \quad (5.99)$$

Antes de llevar a cabo el proceso de comparación, por conveniencia, se normaliza en frecuencia las expresiones para la aproximación Chebyshev, vea (5.94) y (5.95), esto es  $\omega_a = 1 \text{ rad/seg}$ , y por otro las expresiones para la aproximación Butterworth, vea (5.98) y (5.99), esto es  $\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$ , como se muestra en la tabla 5.3.

Al comparar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev del tipo I con la de los polos de Butterworth, haciendo referencia a la tabla 5.3, se observa que los términos imaginarios,  $\Omega_k$ , son iguales, mientras que la parte real,  $\sigma_k$ , de la ubicación de los polos de Chebyshev del tipo I es igual a la parte de la ubicación de los polos de Butterworth, pero ponderada por el factor  $\tanh \beta'_k$ .



**Tabla 5.3:** Expresiones de la tabla 5.2 normalizadas en frecuencia

Chebyshev del tipo I	Butterworth
$\sigma_k = -\tanh \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k$	$\sigma_k = -\operatorname{sen} \alpha_k$
$\Omega_k = \cos \alpha_k$	$\Omega_k = \cos \alpha_k$

Lo anterior sugiere que para determinar la ubicación de los polos de un filtro pasa bajas usando la aproximación Chebyshev del tipo I de orden  $N$  normalizado en frecuencia, deben primero obtenerse los polos para la aproximación Butterworth. Luego, se fijan los polos para la aproximación Chebyshev al multiplicar por el valor  $\tanh \beta'_k$  únicamente los términos de la parte real de cada polo obtenido en la aproximación Butterworth. Para ejemplificar, suponga el diseño de un filtro basado en la aproximación Chebyshev del tipo I con  $N = 3$ ,  $\varepsilon = 0.50885$  y  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ . De aquí que  $\beta'_k = 0.47599$ ,  $\cosh \beta'_k = 1.11544$  y  $\tanh \beta'_k = 0.44303$ . Los polos para la aproximación Butterworth para  $N = 3$  (con  $\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$ ) tienen una separación angular entre polos de  $60^\circ$ , con la siguiente ubicación de los polos (vea el Apéndice B)

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j120^\circ} = -0.5 + j0.86603 = s_3^* \\ s_2 &= e^{j180^\circ} = -1 \\ s_4 &= e^{-j60^\circ} = 0.5 - j0.86603 = s_6^* \\ s_5 &= e^{j0^\circ} = 1 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para Chebyshev del tipo I, normalizado en frecuencia ( $\omega_a = 1 \text{ rad/seg}$ ), se obtienen al multiplicar únicamente la parte real de los polos para Butterworth por el término  $\tanh \beta'_k$ , esto es

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.5(0.44303) + j0.86603 = -0.22151 + j0.86603 = s_3^* \\ s_2 &= -0.44303 \\ s_4 &= 0.5(0.44303) - j0.86603 = 0.22151 - j0.86603 = s_6^* \\ s_5 &= 0.44303 \end{aligned}$$

Finalmente, la ubicación de los polos de Chebyshev del tipo I no normalizado se obtienen al multiplicar cada polo por el término  $\omega_p \cosh \beta'_k$  (en nuestro caso con  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$ ), como se muestra a continuación.

$$s_k = (\sigma_k + j\Omega_k) \omega_p \cosh \beta'_k \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} s_1 &= (-0.22151 + j0.86603)(1.11544) = -0.2471 + j0.9660 = s_3^* \\ s_2 &= (-0.44303)(1.11544) = -0.4942 \\ s_4 &= (0.22151 - j0.86603)(1.11544) = 0.2471 - j0.9660 = s_6^* \\ s_5 &= (0.44303)(1.11544) = 0.4942 \end{aligned}$$

Con la finalidad de formalizar el método para obtener los polos de la aproximación Chebyshev del tipo I a partir de la aproximación Butterworth se realizan algunos cambios en el procedimiento anterior.

En el análisis previo, basándose en la ubicación de los polos de la aproximación Butterworth, se le aplicó a la parte real una ponderación con valor  $\tanh \beta'_k$ . Luego, a cada nueva posición de estos polos se les ponderó (tanto a la parte real como a la parte imaginaria) con el valor  $\omega_p \cosh \beta'_k$ . Lo anterior da como resultado las expresiones (5.67) y (5.68), como se verifica a continuación.

Se retoma la expresión (5.100)

$$s_k = (\sigma_k + j\Omega_k) \omega_p \cosh \beta'_k \quad (5.101)$$

con  $\sigma_k$  y  $\Omega_k$  dados por los términos de la primera columna de la tabla 5.3. Al sustituir estos valores en (5.101) se obtiene

$$\begin{aligned} s_k &= \left( -\tanh \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k + j \cos \alpha_k \right) \omega_p \cosh \beta'_k \\ s_k &= -\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k + j \omega_p \cosh \beta'_k \cos \alpha_k \end{aligned} \quad (5.102)$$

lo cual queda verificado.

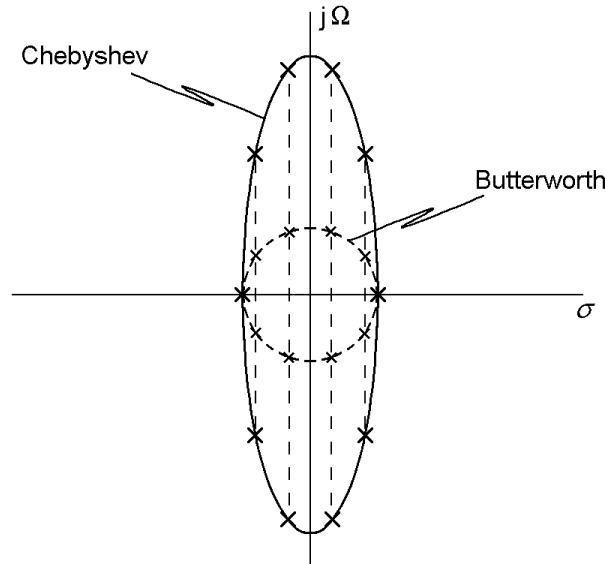
Lo anterior indica que para determinar la parte real de la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev se debe ponderar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor  $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ , esto es, se utiliza la expresión (5.103) en la que puede notarse que los polos se encuentran distribuidos en un círculo de radio  $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ .

$$s'_k = \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k e^{j \left[ \left( \frac{2k+N-1}{2N} \right) \pi \right]} \quad (5.103)$$

Entonces, la parte real de (5.103) es

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ s'_k \} &= \operatorname{Re} \{ \sigma'_k + j \Omega'_k \} = \sigma'_k = \operatorname{Re} \left\{ \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k e^{j \left[ \left( \frac{2k+N-1}{2N} \right) \pi \right]} \right\} \\ &= \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k \cos \left[ \left( \frac{2k+N-1}{2N} \right) \pi \right] = -\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \right] \\ \sigma'_k &= -\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k \operatorname{sen} \alpha_k \end{aligned} \quad (5.104)$$

La expresión (5.104) es la misma que (5.67) por lo que se concluye que la parte real de los polos de un filtro Chebyshev del tipo I de orden  $N$  tiene un patrón similar de ubicación que la parte real de los polos de un filtro Butterworth, ubicación que se determina al dibujar líneas en un sentido vertical pasando por la posición de los polos de la aproximación Butterworth, como se muestra en la figura 5.12, donde se ha tomado como ejemplo un filtro de orden 5.



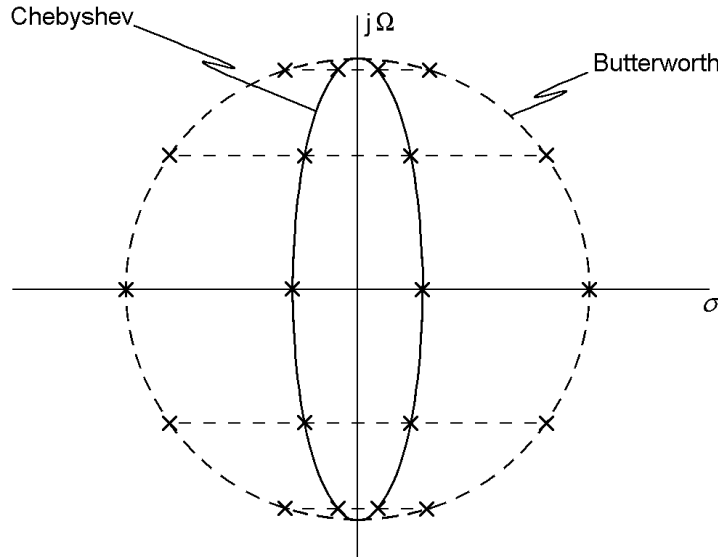
**Figura 5.12:** Ubicación de los polos de Chebyshev del tipo I considerando la ubicación de los polos de Butterworth, con referencia al eje horizontal

Mientras que para determinar la parte imaginaria de la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I debe ponderarse la parte imaginaria de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor  $\omega_p \cosh \beta'_k$ , esto es, se utiliza la expresión (5.105) cuya ubicación de polos se encuentran distribuidos en un círculo de radio  $\omega_p \cosh \beta'_k$ .

$$s''_k = \omega_p \cosh \beta'_k e^{j \left[ \left( \frac{2k+N-1}{2N} \right) \pi \right]} \quad (5.105)$$

Entonces, la parte imaginaria de (5.105) es

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{s_k''\} &= \operatorname{Im}\{\sigma_k'' + j\Omega_k''\} = \Omega_k'' = \operatorname{Im}\{\omega_p \cosh \beta_k' e^{j[(\frac{2k+N-1}{2N})\pi]}\} \\ &= \omega_p \cosh \beta_k' \operatorname{sen}\left[\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi\right] = \omega_p \cosh \beta_k' \cos\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi\right] \\ \Omega_k'' &= \omega_p \cosh \beta_k' \cos \alpha_k \end{aligned} \quad (5.106)$$



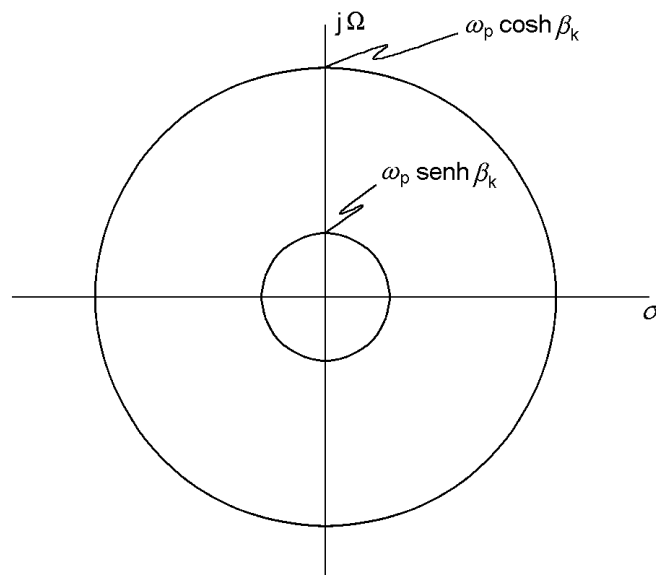
**Figura 5.13:** Ubicación de los polos de Chebyshev del tipo I considerando ubicación de los polos de Butterworth, con referencia al eje vertical

La expresión (5.106) es la misma que (5.68) por lo que se concluye que la parte imaginaria de los polos de un filtro Chebyshev del tipo I de orden  $N$  tiene un patrón similar de ubicación que la parte imaginaria de los de un filtro Butterworth, posición que se determina al dibujar líneas en un sentido horizontal pasando por la ubicación de los polos de la aproximación Butterworth, como se muestra en la figura 5.13. De manera que, la ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev del tipo I está determinada por, vea (5.104) y (5.106)

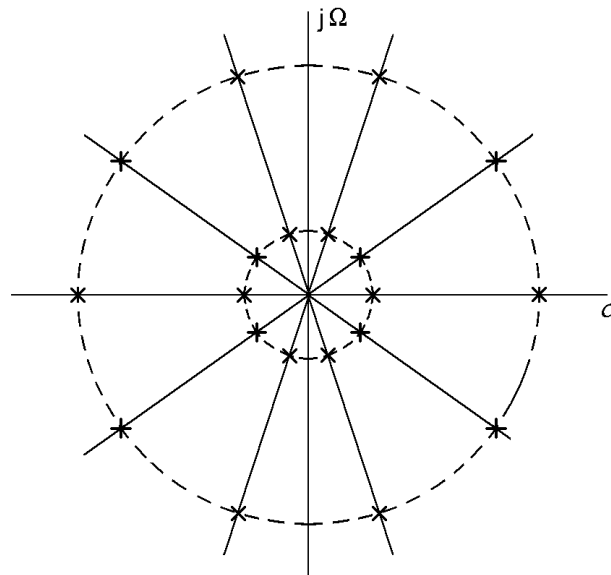
$$s_k = \operatorname{Re}\{s_k'\} + j \operatorname{Im}\{s_k''\} = \sigma_k' + j\Omega_k''$$

En resumen, el método geométrico para obtener los polos del filtro Chebyshev del tipo I a partir del conocimiento de los semiejes y el grado del filtro  $N$  es el siguiente:

- Construir dos círculos, uno de radio menor con valor de  $\omega_p \operatorname{senh} \beta_k'$  y el otro de radio mayor con valor de  $\omega_p \cosh \beta_k'$ , como se muestra en la figura 5.14.
- Determine la posición de los polos en el círculo mayor y en el círculo menor de acuerdo con los criterios utilizados para ubicar los polos de los filtros Butterworth.
- Dibuje líneas radiales desde el origen hasta las posiciones de los polos ubicados en el inciso (b), como se muestra en la figura 5.15.
- Dibuje líneas punteadas en un sentido vertical, en las intersecciones entre el círculo menor y las líneas radiales del inciso (c), como se muestra en la figura 5.16.
- Dibuje líneas punteadas en un sentido horizontal, en las intersecciones entre el círculo mayor y las líneas radiales del inciso (c), como se muestra en la figura 5.17.
- Determine los polos de Chebyshev del tipo I al localizar las intersecciones de las líneas punteadas tanto verticales como horizontales generados en los inciso (d) y (e), como se muestra en la figura 5.18. Finalmente, en la figura 5.19 se introduce el contorno de la elipse para la figura 5.18.



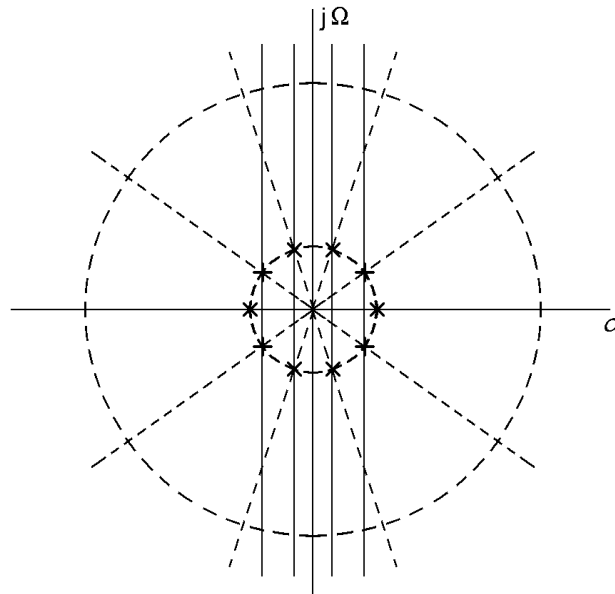
**Figura 5.14:** Construcción de dos círculos: radio menor y radio mayor



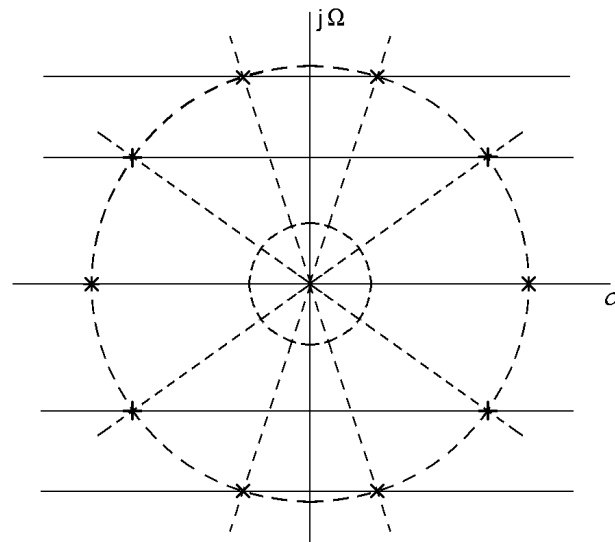
**Figura 5.15:** Ubicación de polos Butterworth y sus líneas radiales

Una vez determinada la ubicación de los polos para los filtros basada en la aproximación Chebyshev del tipo I, definidos como  $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ , se determina la función de transferencia,  $H(s)$ . Para ello se hace notar que en el proceso de localización de dichos polos se observó que para un filtro de orden  $N$  se obtiene un total de  $2N$  polos, esto se debe a que, en la expresión en magnitud en potencia, vea la ecuación (5.107),  $N$  de los polos se asigna a  $H(s)$  y los otros  $N$  polos a  $H(-s)$ . Con la finalidad de determinar cuáles de los  $N$  polos se asocian a  $H(s)$  y cuáles a  $H(-s)$  se toma en cuenta lo siguiente: La función de transferencia  $H(s)$  que representa a un sistema físicamente realizable debe ser un sistema estable, esto se logra exclusivamente al considerar los polos ubicados a la izquierda del eje imaginario, la cual puede expresarse como en (5.108).

$$\left| H(j\omega) \right|^2 \Big|_{\omega=s/j} = H(s) H(-s) \quad (5.107)$$



**Figura 5.16:** Líneas en un sentido vertical cruzando las intersecciones de las líneas radiales y el círculo menor



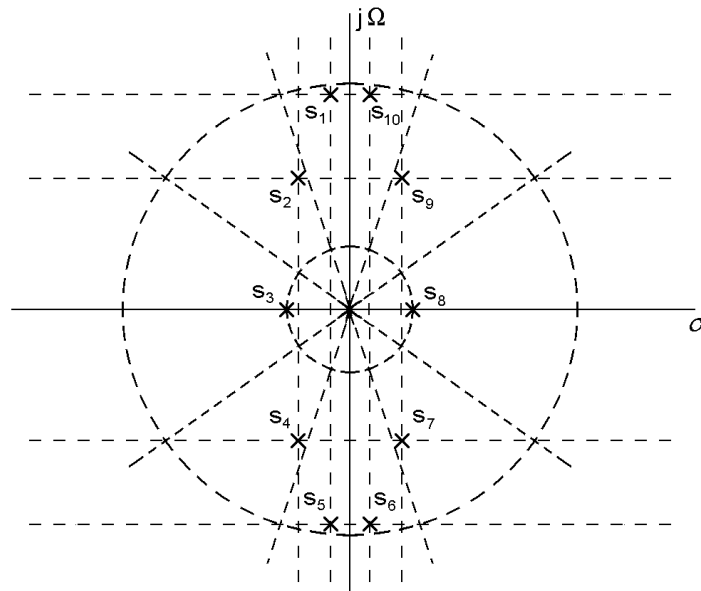
**Figura 5.17:** Líneas en un sentido horizontal cruzando las intersecciones de las líneas radiales y el círculo mayor

$$H(s) = \frac{K_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = K_0 \prod_{k=1}^N \left( \frac{1}{s - \sigma_k - j\Omega_k} \right)$$

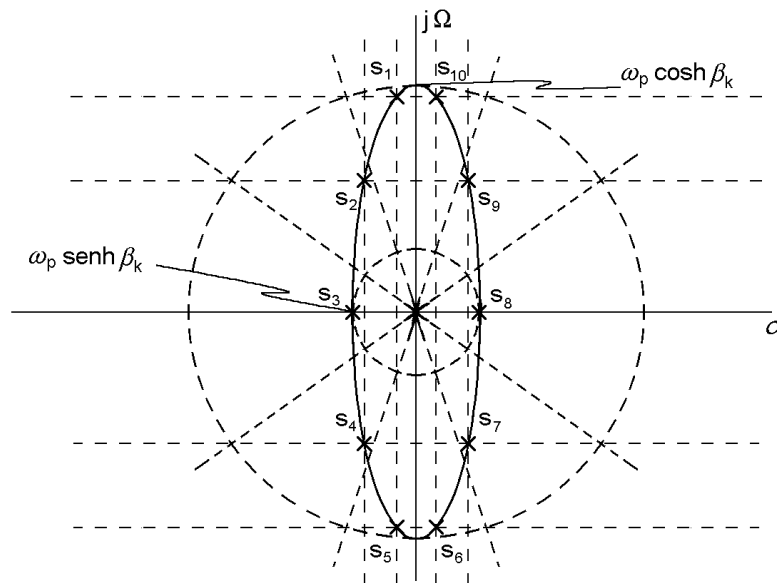
$$H(s) = \frac{K_0}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)} \quad (5.108)$$

donde  $K_0$  es una constante para normalizar en magnitud. Este valor de  $K_0$  se determina al obtener la respuesta en frecuencia,  $H(\omega)$ , al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$ . La constante  $K_0$  toma el valor que hace que la máxima amplitud de  $|H(\omega)|$  sea la unidad. En otras palabras, una función normalizada en amplitud es aquella cuya máxima amplitud en la frecuencia es la unidad.

Es fundamental enfatizar que en la ecuación (5.108) no se permite a  $s_k$  (con  $k = 1, 2, \dots, N$ )



**Figura 5.18:** Ubicación de polos Chebyshev del tipo I a partir de intersección de las líneas verticales y horizontales de las figuras 5.16 y 5.17



**Figura 5.19:** La elipse como patrón de ubicación de los polos de Chebyshev

tener polos localizados a la derecha del eje imaginario ni en el mismo eje imaginario, ya que representaría a un sistema inestable o marginalmente estable, respectivamente.

Otro aspecto importante por mencionar, con relación a un sistema físicamente realizable, es cuando  $s_k$  representa un polo complejo, entonces forzosamente aparece también su complejo conjugado  $s_k^*$ , en tal caso el producto  $(s - s_k)(s - s_k^*)$  estará dado por

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) \\ &= (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \quad (5.110)$$

donde  $\sigma_k$  está dada por (5.111),  $\Omega_k$  por (5.112) y  $\sigma_k^2 + \Omega_k^2$  por (5.113), de esta forma (5.110) se expresa como en (5.114).

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta_k' \quad (5.111)$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k \quad (5.112)$$

$$\sigma_k^2 + \Omega_k^2 = \omega_p^2 \left[ \sin^2 \alpha_k \sinh^2 \beta'_k + \cos^2 \alpha_k \cosh^2 \beta'_k \right] \quad (5.113)$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 + 2\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k s + \omega_p^2 \left[ \sin^2 \alpha_k \sinh^2 \beta'_k + \cos^2 \alpha_k \cosh^2 \beta'_k \right] \quad (5.114)$$

Generalizando (5.114) en (5.108) con  $N$  par, la función de transferencia está dada por

$$H(s) = K_0 \prod_{k=1}^N \frac{1}{(s - s_k)}$$

$$H(s) = K_0 \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{s^2 + 2\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k s + \omega_p^2 \left[ \sin^2 \alpha_k \sinh^2 \beta'_k + \cos^2 \alpha_k \cosh^2 \beta'_k \right]} \quad (5.115)$$

y para  $N$  impar

$$H(s) = K_0 \prod_{k=1}^N \frac{1}{(s - s_k)} = K_0 \left( \frac{1}{s + \omega_p \sin \alpha_m \sinh \beta'_m} \right)^* \left( \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{s^2 + 2\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k s + \omega_p^2 \left[ \sin^2 \alpha_k \sinh^2 \beta'_k + \cos^2 \alpha_k \cosh^2 \beta'_k \right]} \right) \quad (5.116)$$

donde el término indicado con el subíndice  $m$ , estos es, el término que se obtiene cuando se evalúa la suma en  $k = m$  (con  $m = (N + 1)/2$ ), corresponde al polo con sólo componente real sobre el plano  $s$  (Note que  $\beta'_k = \beta'_m$ ).

Las formas factorizadas del polinomio denominador de la función (5.108) para un rizo de 0.5 dB, 1 dB y 2 dB, considerando una frecuencia de  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$  y con un orden hasta de  $N = 7$  se muestran en las tabla 5.4, 5.5 y 5.6, respectivamente. En cada caso se utilizó la expresión del polinomio denominador establecida en (5.115) y en (5.116), para  $N$  par e impar, respectivamente.

**Tabla 5.4:** Polinomio denominador de la función Chebyshev del tipo I con rizo: 0.5 dB

$N$	Función de Chebyshev del tipo I (forma factorizada) con rizo de: 1/2 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 2.8628$
2	$s^2 + 1.4256 s + 1.5162$
3	$(s^2 + 0.6265 s + 1.14245)(s + 0.6265)$
4	$(s^2 + 0.3507 s + 1.0635)(s^2 + 0.8467 s + 0.3564)$
5	$(s^2 + 0.2239 s + 1.0358)(s^2 + 0.58625 s + 0.4768)(s + 0.3623)$
6	$(s^2 + 0.1553 s + 1.023)(s^2 + 0.4243 s + 0.59)(s^2 + 0.5796 s + 0.157)$
7	$(s^2 + 0.114 s + 1.016)(s^2 + 0.3194 s + 0.6769)(s^2 + 0.4616 s + 0.2539)(s + 0.2562)$

El criterio para determinar el valor de la constante de normalización  $K_0$  de la función (5.108) es el siguiente

- a) Para  $N$  impar

**Tabla 5.5:** Polinomio denominador de la función Chebyshev del tipo I con rizo: 1 dB

$N$	Función de Chebyshev del tipo I (forma factorizada) con rizo de: 1 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 1.9652$
2	$s^2 + 1.0977s + 1.1025$
3	$(s^2 + 0.4942s + 0.9942)(s + 0.4942)$
4	$(s^2 + 0.2791s + 0.9865)(s^2 + 0.6737s + 0.2794)$
5	$(s^2 + 0.1789s + 0.9883)(s^2 + 0.4684s + 0.4293)(s + 0.2895)$
6	$(s^2 + 0.1244s + 0.9907)(s^2 + 0.3398s + 0.5577)(s^2 + 0.4641s + 0.1247)$
7	$(s^2 + 0.0914s + 0.9927)(s^2 + 0.25615s + 0.6535)(s^2 + 0.37s + 0.2305)(s + 0.2054)$

**Tabla 5.6:** Polinomio denominador de la función Chebyshev del tipo I con rizo: 2 dB

$N$	Función de Chebyshev del tipo I (forma factorizada) con rizo de: 2 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 1.3076$
2	$s^2 + 0.8038s + 0.8231$
3	$(s^2 + 0.3689s + 0.8861)(s + 0.3689)$
4	$(s^2 + 0.2098s + 0.9287)(s^2 + 0.5064s + 0.2216)$
5	$(s^2 + 0.1349s + 0.9522)(s^2 + 0.3532s + 0.39315)(s + 0.2183)$
6	$(s^2 + 0.09395s + 0.96595)(s^2 + 0.2567s + 0.5329)(s^2 + 0.3506s + 0.0999)$
7	$(s^2 + 0.069s + 0.9746)(s^2 + 0.1937s + 0.6354)(s^2 + 0.28s + 0.2124)(s + 0.1553)$

$$|H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = |H_C(0)| = 1 \quad (5.117)$$

b) Para  $N$  par

$$|H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = |H_C(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} \quad (5.118)$$

■ **Ejemplo 5.3** Determine la constante de normalización  $K_0$  de la función (5.108) para un rizo de 0.5 dB, una frecuencia  $\omega_p = 1$  rad/seg, para:

- a)  $N = 2$
- b)  $N = 3$
- c)  $N = 4$

*Solución:*

Para dar solución al problema se utilizarán los polinomios proporcionados en la tabla 5.4.

**Inciso (a)** Para  $N = 2$  (vea la tabla 5.4 para  $N = 2$ ) la función de transferencia es

$$H_C(s) = \frac{K_0}{s^2 + 1.4256s + 1.5162}$$

Se obtiene la respuesta en frecuencia al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$

$$H_C(\omega) = H_C(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{K_0}{-\omega^2 + j1.4256\omega + 1.5162}$$



Ahora, se evalúa la magnitud en  $\omega = 0$

$$|H_C(0)| = |H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{1.5162}$$

Para  $N$  par, vea (5.118),

$$|H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{1.5162} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Como se estableció en la enunciación del problema, el filtro tiene un rizo de 0.5 dB, entonces

$$-0.5 \text{ dB} = 10 \log \left| \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right|$$

$$0.05 = \log |1 + \varepsilon^2|$$

$$1 + \varepsilon^2 = 10^{(0.05)}$$

$$\varepsilon^2 = 10^{(0.05)} - 1$$

Mientras que

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2} = \sqrt{1 + 10^{(0.05)} - 1} = (10^{(0.05)})^{1/2} = 10^{(0.025)}$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 10^{-(0.025)} = 0.94406$$

Entonces, el valor de la constante de normalización en amplitud para la función de transferencia de orden dos es

$$K_0 = \frac{1.5162}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = (1.5162)(0.94406)$$

$$K_0 = 1.43138$$

**Inciso (b)** Para  $N = 3$  (vea la tabla 5.4 para  $N = 3$ ) la función de transferencia es

$$H_C(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 0.6265s + 1.14245)(s + 0.6265)}$$

Se obtiene la respuesta en frecuencia al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$  y luego se evalúa la magnitud en  $\omega = 0$

$$H_C(\omega) = H_C(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{K_0}{(1.14245 - \omega^2 + j0.6265\omega)(0.6265 + j\omega)}$$

$$|H_C(0)| = |H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(1.14245)(0.6265)} = \frac{K_0}{0.71574}$$

Para  $N$  impar, vea (5.117),

$$|H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = 1$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{0.71574} = 1$$

Entonces, el valor de la constante de normalización en amplitud para la función de transferencia de orden tres es

$$K_0 = 0.71574$$

**Inciso (c)** Para  $N = 4$  (vea la tabla 5.4 para  $N = 4$ ) la función de transferencia es

$$H_C(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 0.3507s + 1.0635)(s^2 + 0.8467s + 0.3564)}$$

Se obtiene la respuesta en frecuencia al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$  y luego se evalúa la magnitud en  $\omega = 0$

$$H_C(\omega) = H_C(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{K_0}{(1.0635 - \omega^2 + j0.3507\omega)(0.3564 - \omega^2 + j0.8467\omega)}$$

$$|H_C(0)| = |H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(1.0635)(0.3564)} = \frac{K_0}{0.37903}$$

Para  $N$  par, vea (5.118),

$$|H_C(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{0.37903} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Del inciso (a) se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 0.94406$$

Entonces, el valor de la constante de normalización en amplitud para la función de transferencia de orden cuatro es

$$K_0 = \frac{0.37903}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = (0.37903)(0.94406)$$

$$K_0 = 0.35783$$

■

La constante de normalización en magnitud  $K_0$  para la función (5.108) con las condiciones que generaron los polinomios proporcionados en las tablas 5.4, 5.5 y 5.6 se muestra en la tabla 5.7. Note que para  $N$  impar este valor de  $K_0$  se determina al evaluar  $|H(\omega)|$  en  $\omega = 0$ , esto es

$$|H(0)| = \frac{K_0}{\text{Polinomio dado por la tabla: 5.4, 5.5 o 5.6}} \Big|_{\omega=0} = 1 \quad (5.119)$$

Mientras que para  $N$  par el valor de  $K_0$  se determina como sigue

$$|H(0)| = \frac{K_0}{\text{Polinomio dado por la tabla: 5.4, 5.5 o 5.6}} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (5.120)$$

**Tabla 5.7:** Factor de normalización de la función Chebyshev del tipo I, rizo: 0.5 dB, 1 dB, 2 dB

Constante $K_0$ del numerador			
$N$	Para un rizo de: 1/2 dB	Para un rizo de: 1 dB	Para un rizo de: 2 dB
1	2.8628	1.9652	1.3076
2	1.4313	0.9826	0.6538
3	0.7157	0.4913	0.3269
4	0.3578	0.24565	0.16345
5	0.1789	0.1228	0.0817
6	0.0895	0.0614	0.0409
7	0.0447	0.0307	0.0204

■ **Ejemplo 5.4** Determine la función de transferencia de un filtro Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con 1/2 dB de ancho del rizo en la banda de paso en el intervalo de 0 a 1 rad/seg, y con una ganancia de no más de -19 dB a la frecuencia de 1.8 rad/seg.

*Solución:*

De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo I solicitados en el ejemplo y apoyándose en la representación gráfica de la figura 5.20, se determina que

$$-0.5 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

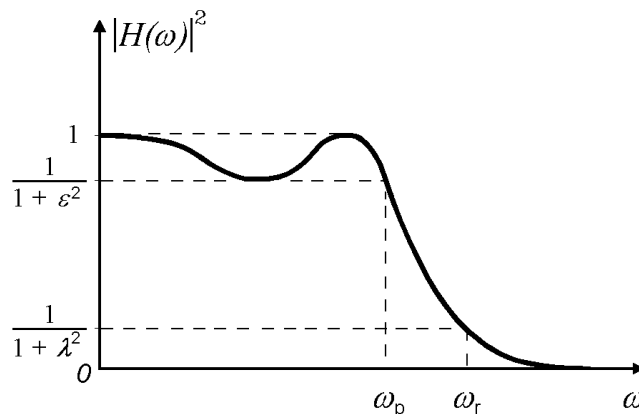
$$0.05 \text{ dB} = \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon^2 = 10^{0.05} - 1$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.05} - 1} = 0.34931$$

y 
$$-19 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^{1.9} - 1} = 8.85623$$



**Figura 5.20:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo I, indicando los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  para el ejemplo 5.4

El orden del filtro (vea la ecuación (5.66)), con  $\lambda = 8.85623$ ,  $\varepsilon = 0.34931$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.8$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{8.85623}{0.34931}\right)}{\cosh^{-1}(1.8)} = \frac{\cosh^{-1}(25.35350)}{1.19291} = 3.291$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 4$ . La función de transferencia se determina utilizando la información de la tabla 5.4 (ésta establece los polinomios) y tabla 5.7 (ésta establece el valor de la constante de normalización en amplitud de la función de transferencia) para  $N = 4$ , dando como resultado

$$H(s) = \frac{0.3578}{(s^2 + 0.3507s + 1.0635)(s^2 + 0.8467s + 0.3564)}$$

El ejemplo 5.4 permite visualizar el uso y la aplicación de las tablas 5.4 (5.5 o 5.6 en su caso), y 5.7 cuando se presenta un problema con las condiciones de amplitud y frecuencia normalizados. Esto es, las tablas 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 enlistan el polinomio denominador de la función de transferencia de un filtro pasa bajas basado en la aproximación Chebyshev del tipo I de orden  $N$  construyéndose para un rizo particular ( $1/2$  dB en la tabla 5.4,  $1$  dB en la tabla 5.5 y  $2$  dB para la tabla 5.6) y para frecuencias de paso de  $\omega_p = 1$  rad/seg. Así como el valor de la constante de normalización para cada caso.

Para cambiar la frecuencia de paso a una  $\omega_p \neq 1$  rad/seg, es decir desnormalizar en frecuencia, la transformación requerida es

$$s/\omega_p \quad \Rightarrow \quad s \quad (5.121)$$

Por otro lado, observe que la restricción en la característica del ancho del rizo en la banda de paso para el comportamiento en magnitud no puede cambiarse aplicando simplemente un escalamiento, similar al de la aproximación Butterworth, sino que se debe construir una nueva tabla para cada valor del rizo en la banda de paso; en otras palabras, es necesario evaluar los polinomios con el nuevo ancho del rizo.

■ **Ejemplo 5.5** Determine: (a) El mínimo orden del filtro Chebyshev del tipo I requerido para cumplir con las siguientes especificaciones

- Rizo en la banda de paso de  $2$  dB,
- Razón de transición de  $\omega_p/\omega_r = 0.67$ ,
- Pérdida en la banda de rechazo de  $40$  dB.

(b) La función de transferencia, y (c) Grafique el comportamiento en frecuencia de la magnitud, la ganancia en dB y la fase, así como de la función de retardo de grupo.

Asuma a  $\omega_p = 100$  rad/seg.

*Solución:*

**Inciso (a)** De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo I solicitados en el ejemplo y apoyándose en la representación gráfica de la figura 5.21, se determina que

$$-2 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

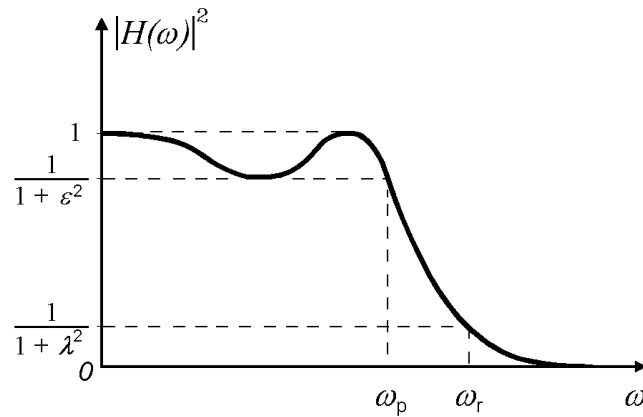
$$0.2 = \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon^2 = 10^{0.2} - 1$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.2} - 1} = 0.76478$$

$$\text{y} \quad -40 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^4 - 1} = 99.9950$$



**Figura 5.21:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo I, indicando los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  para el ejemplo 5.5

El orden del filtro (vea la ecuación (5.66)), con  $\lambda = 99.9950$ ,  $\varepsilon = 0.76478$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.49254$  ( $\omega_p/\omega_r = 0.67$ ), es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{99.995}{0.76478}\right)}{\cosh^{-1}(1.49254)} = \frac{\cosh^{-1}(130.750)}{0.95572} = 5.824$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 6$ .

**Inciso (b)** La función de transferencia se determina utilizando la información de la tabla 5.6 (ésta establece los polinomios) y tabla 5.7 (ésta establece el valor de la constante de normalización en amplitud de la función de transferencia) para  $N = 6$ , dando como resultado (función de transferencia normalizada en frecuencia)

$$H(s) = \frac{0.0409}{(s^2 + 0.09395s + 0.96595)(s^2 + 0.2567s + 0.5329)(s^2 + 0.3506s + 0.0999)}$$

Con el fin de desnormalizar en frecuencia se aplica (5.121), entonces

$$H(s) = H(s') \Big|_{s' = s/\omega_p}$$

$$H(s) = \frac{0.0409}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.09395\left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.96595\right)\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.2567\left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.5329\right)\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.3506\left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.0999\right)}$$

$$H(s) = \frac{0.0409 \omega_p^6}{(s^2 + 0.09395 \omega_p s + 0.96595 \omega_p^2)(s^2 + 0.2567 \omega_p s + 0.5329 \omega_p^2)(s^2 + 0.3506 \omega_p s + 0.0999 \omega_p^2)}$$

La función de transferencia para  $\omega_p = 100 \text{ rad/seg}$  es

$$H(s) = \frac{4.09 \times 10^{10}}{(s^2 + 9.395s + 9659.5)(s^2 + 25.67s + 5329)(s^2 + 35.06s + 999)}$$

**Inciso (c)** Inicialmente se obtiene la respuesta en frecuencia al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$ .

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s = j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{4.09 \times 10^{10}}{(9659.5 - \omega^2 + j9.395\omega)(5329 - \omega^2 + j25.67\omega)(999 - \omega^2 + j35.06\omega)}$$

La función magnitud en frecuencia está dada por

$$|H(\omega)| = \frac{4.09 \times 10^{10}}{\sqrt{(9659.5 - \omega^2)^2 + (9.395\omega)^2} \sqrt{(5329 - \omega^2)^2 + (25.67\omega)^2} \sqrt{(999 - \omega^2)^2 + (35.06\omega)^2}}$$

En la figura 5.22a se muestra el comportamiento de la función magnitud en frecuencia. La evaluación de la ganancia en *dB* es

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log (4.09 \times 10^{10}) \\ &\quad - 10 \log [(9659.5 - \omega^2)^2 + (9.395\omega)^2] - 10 \log [(5329 - \omega^2)^2 + (25.67\omega)^2] \\ &\quad - 10 \log [(999 - \omega^2)^2 + (35.06\omega)^2] \end{aligned}$$

En la figura 5.22b se muestra el comportamiento de la ganancia en *dB*.

Para establecer la fase de la respuesta en frecuencia se requiere determinar el  $\arg[H(\omega)]$ , donde el operador  $\arg[H(\omega)]$  implica el cálculo del ángulo correspondiente al valor complejo  $H(\omega)$ , esto es

$$\arg[H(\omega)] = -\arctan\left[\frac{9.395\omega}{9659.5 - \omega^2}\right] - \arctan\left[\frac{25.67\omega}{5329 - \omega^2}\right] - \arctan\left[\frac{35.06\omega}{999 - \omega^2}\right]$$

Se hace notar que el ángulo o argumento de un número complejo  $\alpha + j\beta$  con  $\alpha$  y  $\beta$  positivos ( $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ ) es

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leq \pi/2 \quad (\acute{o} : \leq 90^\circ)$$

Mientras que para un  $\alpha$  negativo y un  $\beta$  positivo ( $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ ) es

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan\left(\frac{\beta}{-|\alpha|}\right) = -\arctan\left(\frac{\beta}{|\alpha|}\right) \pm \pi \quad (\acute{o} : \pm 180^\circ)$$

Por ejemplo, la evaluación del argumento del número complejo  $(9659.5 - \omega^2 + j9.395\omega)^{-1}$  para valores de  $\omega^2 \geq 9659.5$  es

$$\begin{aligned} \arg[(9659.5 - \omega^2 + j9.395\omega)^{-1}] &= -\arctan\left[\frac{9.395\omega}{9659.5 - \omega^2}\right] \\ &= +\arctan\left[\frac{9.395\omega}{\omega^2 - 9659.5}\right] \pm \pi \end{aligned}$$

Por lo que, para la determinación de la fase de la respuesta en frecuencia, considere el cambio del ángulo de fase para aquellas frecuencias,  $\omega$ , en donde la parte real del número complejo toma valores negativos.

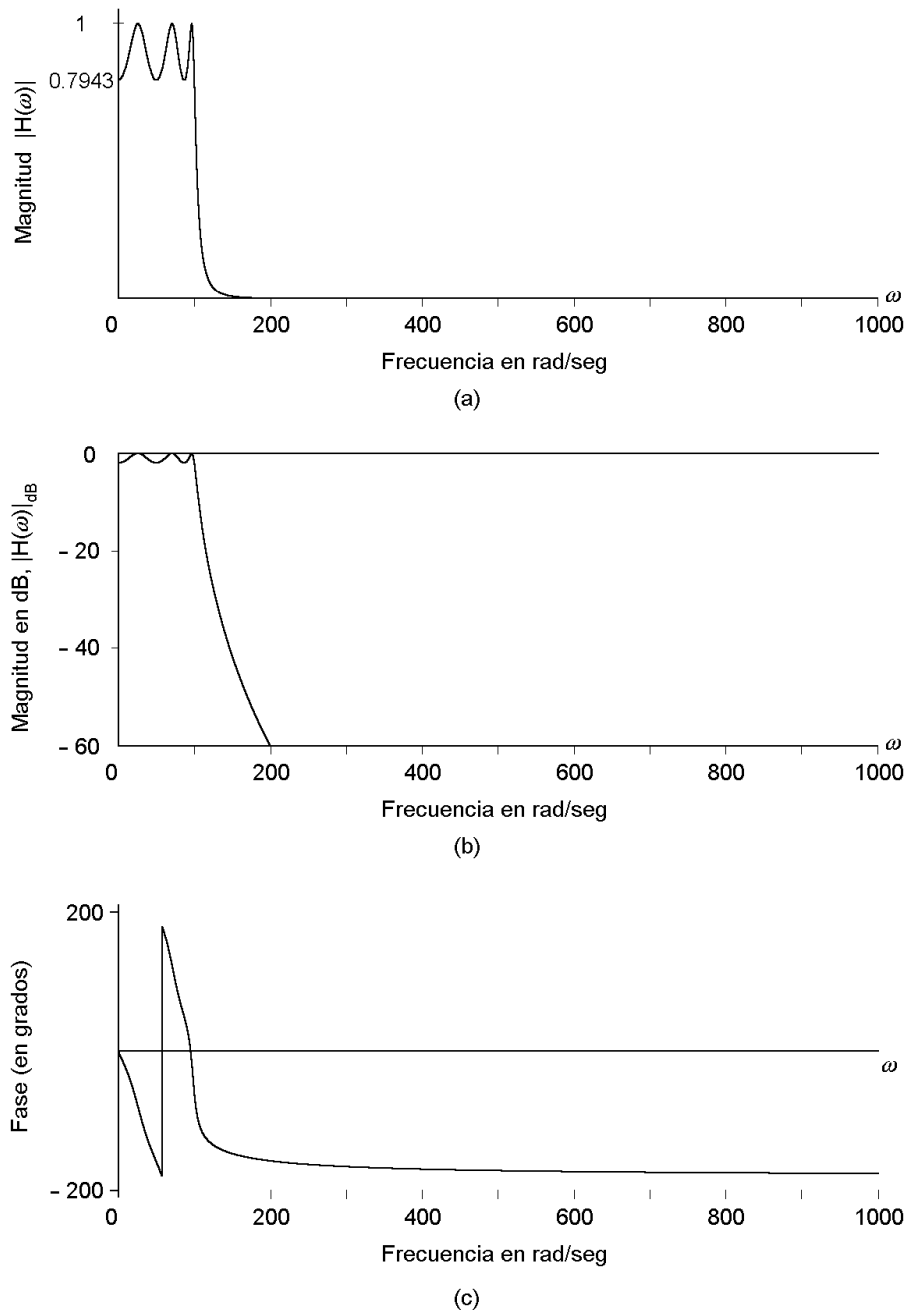
En la figura 5.22c se muestra el comportamiento de la función de fase.

De la ecuación (3.33) el retardo de grupo es

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d \arg[H(\omega)]}{d\omega}$$

Usando tablas[8], la expresión de la derivada del  $\arctan[H(\omega)]$  es

$$\frac{d \arctan[H(\omega)]}{d\omega} = \frac{1}{1 + H^2(\omega)} \frac{d[H(\omega)]}{d\omega}$$



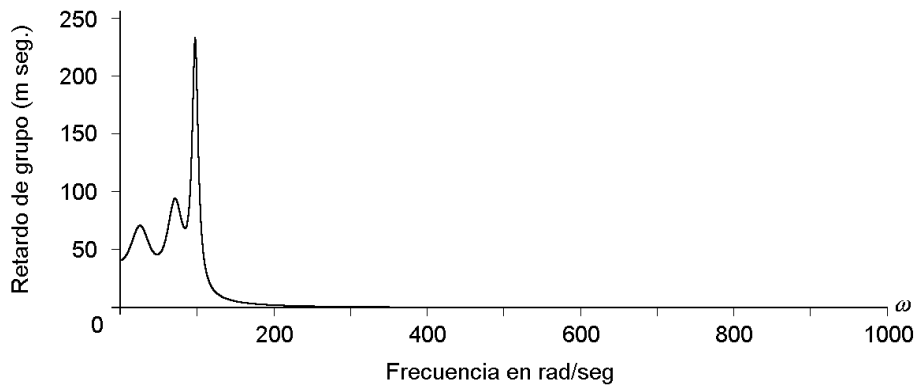
**Figura 5.22:** Resultados gráficos del ejemplo 5.5: (a) Magnitud de  $H(\omega)$ , (b) Ganancia en dB de  $H(\omega)$  y (c) Fase

de aquí que:

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) &= -\frac{d \arg [H(j\omega)]}{d\omega} = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{9.395 \omega}{9659.5 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(9659.5 - \omega^2)(9.395) - (9.395 \omega)(-2\omega)}{(9659.5 - \omega^2)^2} \right] \\ &+ \frac{1}{1 + \left(\frac{25.67 \omega}{5329 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(5329 - \omega^2)(25.67) - (25.67 \omega)(-2\omega)}{(5329 - \omega^2)^2} \right] \\ &+ \frac{1}{1 + \left(\frac{35.06 \omega}{999 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(999 - \omega^2)(35.06) - (35.06 \omega)(-2\omega)}{(999 - \omega^2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{(9.395)(9659.5 - \omega^2) + 2(9.395)\omega^2}{(9659.5 - \omega^2)^2 + (9.395\omega)^2} + \frac{(25.67)(5329 - \omega^2) + 2(25.67)\omega^2}{(5329 - \omega^2)^2 + (25.67\omega)^2} + \frac{(35.06)(999 - \omega^2) + 2(35.06)\omega^2}{(999 - \omega^2)^2 + (35.06\omega)^2}$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{9.395(9659.5 + \omega^2)}{(9659.5 - \omega^2)^2 + (9.395\omega)^2} + \frac{25.67(5329 + \omega^2)}{(5329 - \omega^2)^2 + (25.67\omega)^2} + \frac{35.06(999 + \omega^2)}{(999 - \omega^2)^2 + (35.06\omega)^2}$$



**Figura 5.23:** Resultado gráfico del retardo de grupo para el filtro del ejemplo 5.5

En la figura 5.23 se muestra el comportamiento de la función de retardo de grupo. ■

■ **Ejemplo 5.6** Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo I con las siguientes especificaciones

- Rizo en la banda de paso (o rizo de pico a pico):  $\leq 2$  dB,
- Límite de la banda de paso:  $1$  rad/seg,
- Atenuación en la banda de rechazo:  $\geq 40$  dB
- Límite de la banda de rechazo:  $1.37$  rad/seg.

Determine: (a) El mínimo orden del filtro, (b) La función de transferencia, y (c) Las gráficas del comportamiento en frecuencia de la magnitud, la ganancia en dB y la fase, así como de la función de retardo de grupo.

*Solución:*

**Inciso (a)** De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo I solicitados en el ejemplo y apoyándose en la representación gráfica de la figura 5.24, se determina que

$$-2 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

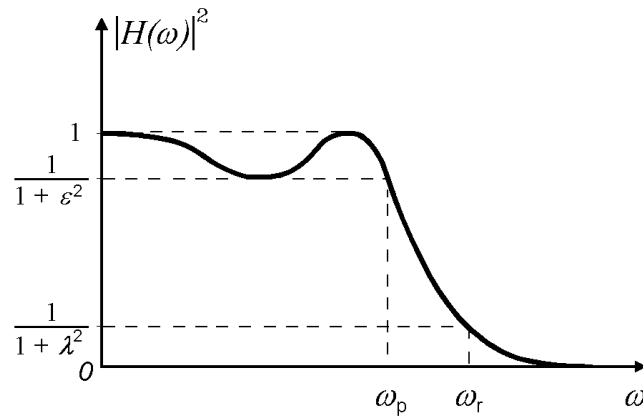
$$10^{0.2} = 1 + \varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.2} - 1} = 0.76478$$

$$\text{y} \quad -40 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^4 - 1} = 99.9950$$





**Figura 5.24:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo I, indicando los parámetros  $\epsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  para el ejemplo 5.6

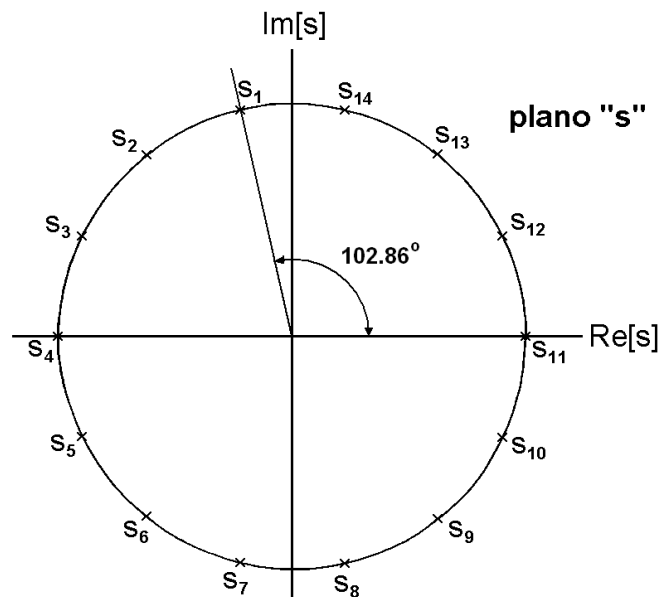
El orden del filtro (vea la ecuación (5.66)), con  $\lambda = 99.9950$ ,  $\epsilon = 0.76478$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.37$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\epsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{99.995}{0.76478}\right)}{\cosh^{-1}(1.37)} = \frac{\cosh^{-1}(130.750)}{0.83570} = 6.661$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 7$ .

**Inciso (b)** Para determinar la función de transferencia primero se determina la ubicación de los polos. Para ello, inicialmente se determina la ubicación de los polos para la aproximación Butterworth y después los polos para la aproximación Chebyshev del tipo I.

Basados en la aproximación Butterworth, vea el *Apéndice B*, los polos para  $N = 7$  tienen una separación angular entre polos de  $180^\circ/7$  ( $25.714^\circ$  o  $\pi/7$  radianes), con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ( $\omega_c = 1$  rad/seg). La distribución de polos se muestra en la figura 5.25.



**Figura 5.25:** Ubicación de polos Butterworth para  $N = 7$

De la figura 5.25 se determina que la ubicación de los polos es

$$\begin{aligned}
 s_1 &= e^{j102.86^\circ} = e^{j4\pi/7} = -0.22252 + j0.97493 = s_7^* \\
 s_2 &= e^{j128.57^\circ} = e^{j5\pi/7} = -0.62349 + j0.78183 = s_6^* \\
 s_3 &= e^{j154.29^\circ} = e^{j6\pi/7} = -0.90097 + j0.43388 = s_5^* \\
 s_4 &= e^{j180^\circ} = e^{j\pi} = -1 \\
 s_8 &= e^{j282.85^\circ} = e^{j11\pi/7} = 0.22252 - j0.97493 = s_{14}^* \\
 s_9 &= e^{j308.57^\circ} = e^{j12\pi/7} = 0.62349 - j0.78183 = s_{13}^* \\
 s_{10} &= e^{j334.28^\circ} = e^{j13\pi/7} = 0.90097 - j0.43388 = s_{12}^* \\
 s_{11} &= e^{j360^\circ} = e^{j2\pi} = 1
 \end{aligned}$$

Para determinar los polos basados en la aproximación Chebyshev del tipo I, la parte real de los polos Butterworth,  $\sigma'_k$ , se multiplica por el radio menor de la elipse, con valor  $\omega_p \sinh \beta'_k$ , y la parte imaginaria de los polos Butterworth,  $\Omega'_k$ , se multiplica por el radio mayor de la elipse, con valor  $\omega_p \cosh \beta'_k$ , esto es

$$s_k = \sigma'_k \omega_p \sinh \beta'_k + j \Omega'_k \omega_p \cosh \beta'_k \quad (5.122)$$

donde  $\beta'_k$  está dada por

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.123)$$

Al sustituir los valores de  $N = 7$  y  $\varepsilon = 0.76478$  en (5.123) y luego este último en (5.122), con  $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$  se obtiene

$$\beta'_k = \frac{1}{7} \sinh^{-1}(1/0.76478) = 0.15472$$

$$\omega_p \sinh \beta'_k = \sinh(0.15472) = 0.15534$$

$$\omega_p \cosh \beta'_k = \cosh(0.15472) = 1.01199$$

$$s_k = (0.1553) \sigma'_k + j(1.012) \Omega'_k$$

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -(0.22252)(0.15534) + j(0.97493)(1.01199) = -0.03457 + j0.98662 = s_7^* \\
 s_2 &= -(0.62349)(0.15534) + j(0.78183)(1.01199) = -0.09685 + j0.79120 = s_6^* \\
 s_3 &= -(0.90097)(0.15534) + j(0.43388)(1.01199) = -0.13996 + j0.43908 = s_5^* \\
 s_4 &= -(1)(0.15534) = -0.15534 \\
 s_8 &= (0.22252)(0.15534) - j(0.97493)(1.01199) = 0.03457 - j0.98662 = s_{14}^* \\
 s_9 &= (0.62349)(0.15534) - j(0.78183)(1.01199) = 0.09685 - j0.79120 = s_{13}^* \\
 s_{10} &= (0.90097)(0.15534) - j(0.43388)(1.01199) = 0.13996 - j0.43908 = s_{12}^* \\
 s_{11} &= (1)(0.15534) = 0.15534
 \end{aligned}$$

La distribución de los polos en el plano  $s$  se muestra en la figura 5.26.

Por otro lado, un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

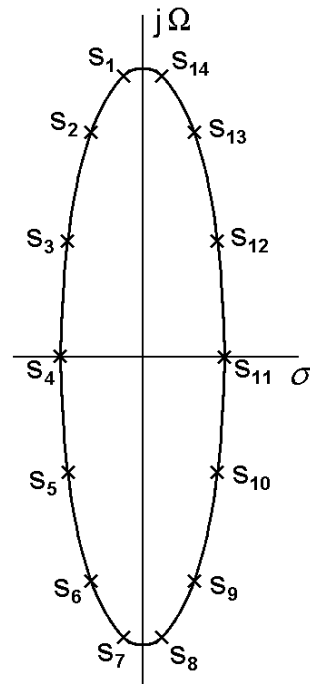
$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo  $s_1$  y su conjugado  $s_7$ , con  $\sigma_1 = -0.03457$  y  $\Omega_1 = 0.98662$ , se tiene

$$(s - s_1)(s - s_7) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(0.03457)s + (0.03457)^2 + (0.98662)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_7) = s^2 + 0.0691s + 0.9746$$



**Figura 5.26:** Ubicación de polos Chebyshev para  $N = 7$

Para el polo  $s_2$  y su conjugado  $s_6$ , con  $\sigma_2 = -0.09685$  y  $\Omega_2 = 0.79120$ , se tiene

$$(s - s_2)(s - s_6) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(0.09685)s + (0.09685)^2 + (0.7912)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_6) = s^2 + 0.1937s + 0.6354$$

Para el polo  $s_3$  y su conjugado  $s_5$ , con  $\sigma_3 = -0.13996$  y  $\Omega_3 = 0.43908$ , se tiene

$$(s - s_3)(s - s_5) = (s - s_3)(s - s_3^*) = s^2 + 2(0.13996)s + (0.13996)^2 + (0.43908)^2$$

$$(s - s_3)(s - s_5) = s^2 + 0.2799s + 0.2124$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 0.0691s + 0.9746)(s^2 + 0.1937s + 0.6354)(s^2 + 0.2799s + 0.2124)(s + 0.1553)}$$

Ahora se determina la constante de normalización  $K_0$ . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(0.9746 - \omega^2 + j0.0691\omega)(0.6354 - \omega^2 + j0.1937\omega)(0.2124 - \omega^2 + j0.2799\omega)(0.1553 + j\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en  $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(0.9746)(0.6354)(0.2124)(0.1553)} = \frac{K_0}{0.02043}$$

Por otro lado, para  $N$  impar, vea (5.117)

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = 1$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{0.02043} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_0 = 0.02043$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{0.02043}{(s^2 + 0.0691s + 0.9746)(s^2 + 0.1937s + 0.6354)(s^2 + 0.2799s + 0.2124)(s + 0.1553)}$$

**Inciso (c)** Para construir las gráficas solicitadas se substituye a  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia  $H(s)$  obtenida en el inciso anterior, esto es

$$H(\omega) = \frac{0.02043}{(0.9746 - \omega^2 + j0.0691\omega)(0.6354 - \omega^2 + j0.1937\omega)(0.2124 - \omega^2 + j0.2799\omega)(0.1553 + j\omega)}$$

La función magnitud en frecuencia está dada por

$$|H(j\omega)| = \frac{0.02043}{\sqrt{(0.9746 - \omega^2)^2 + (0.0691\omega)^2} \sqrt{(0.6354 - \omega^2)^2 + (0.1937\omega)^2} \sqrt{(0.2124 - \omega^2)^2 + (0.2799\omega)^2} \sqrt{(0.1553)^2 + \omega^2}}$$

En la figura 5.27a se muestra el comportamiento de la función magnitud en frecuencia.

La representación de la ganancia en  $dB$  es

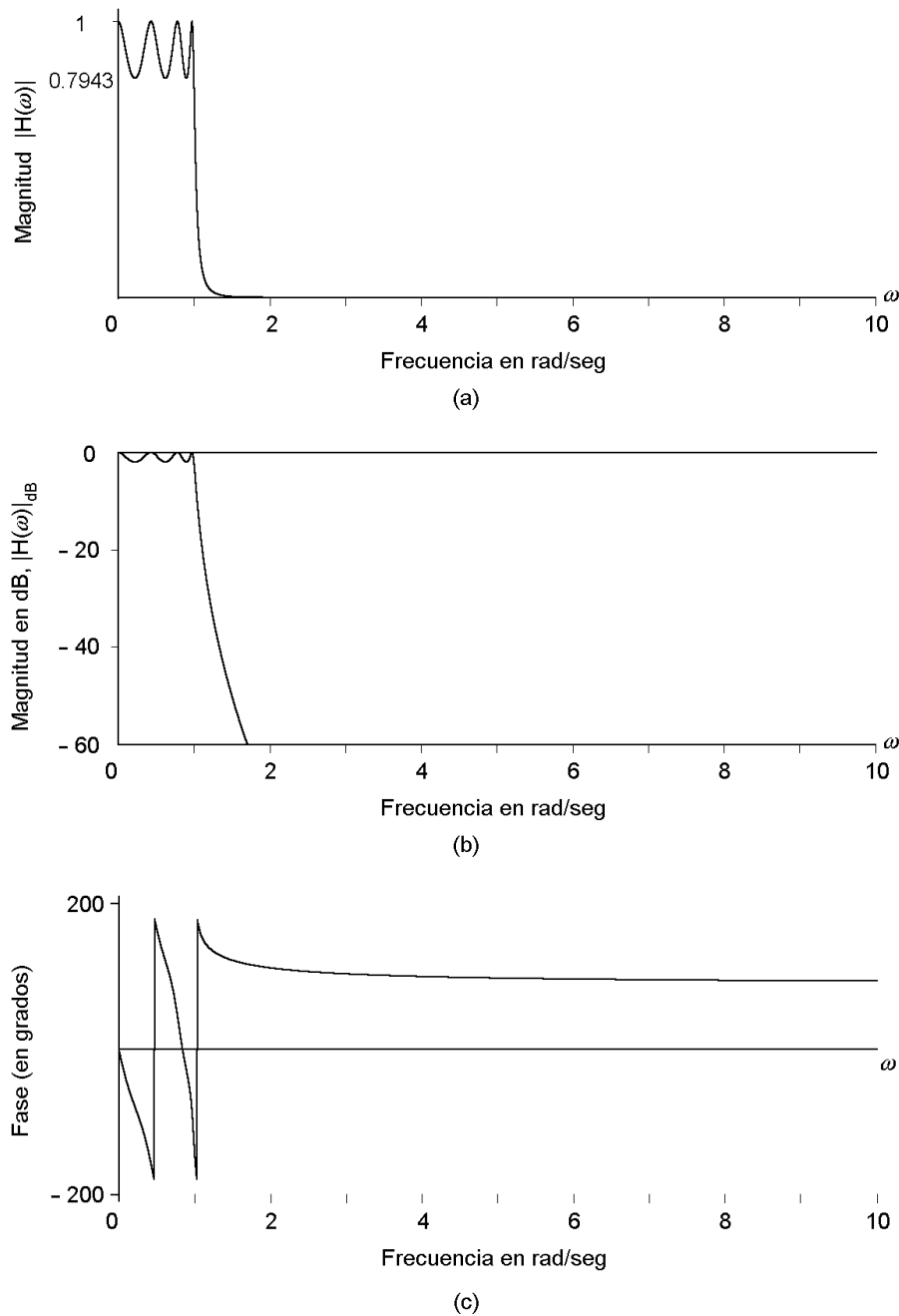
$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log(0.02043) - 10 \log \left[ (0.9746 - \omega^2)^2 + (0.0691\omega)^2 \right] \\ &\quad - 10 \log \left[ (0.6354 - \omega^2)^2 + (0.1937\omega)^2 \right] \\ &\quad - 10 \log \left[ (0.2124 - \omega^2)^2 + (0.2799\omega)^2 \right] - 10 \log \left[ (0.1553)^2 + \omega^2 \right] \end{aligned}$$

En la figura 5.27b se muestra el comportamiento de la ganancia en  $dB$ .

Para establecer la fase de la respuesta en frecuencia se requiere determinar el  $\arg[H(\omega)]$ , esto es

$$\begin{aligned} \arg[H(j\omega)] &= - \arctan \left[ \frac{0.0691\omega}{0.9746 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{0.1937\omega}{0.6354 - \omega^2} \right] \\ &\quad - \arctan \left[ \frac{0.2799\omega}{0.2124 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{\omega}{0.1553} \right] \end{aligned}$$

En la figura 5.27c se muestra el comportamiento de la función de fase.



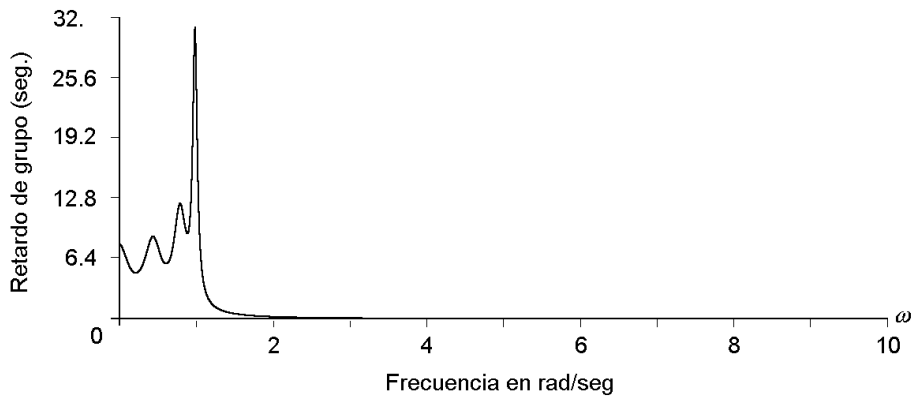
**Figura 5.27:** Resultados gráficos del ejemplo 5.6: (a) Magnitud de  $H(\omega)$ , (b) Ganancia en dB de  $H(\omega)$  y (c) Fase

El retardo de grupo está dado por

$$\begin{aligned}
 \tau_g(\omega) &= -\frac{d \arg[H(\omega)]}{d\omega} \\
 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{0.0691\omega}{0.9746 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(0.9746 - \omega^2)(0.0691) - (0.0691\omega)(-2\omega)}{(0.9746 - \omega^2)^2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{0.1937\omega}{0.6354 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(0.6354 - \omega^2)(0.1937) - (0.1937\omega)(-2\omega)}{(0.6354 - \omega^2)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{1 + \left(\frac{0.2799\omega}{0.2124 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(0.2124 - \omega^2)(0.2799) - (0.2799\omega)(-2\omega)}{(0.2124 - \omega^2)^2} \right] \\
& + \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{0.1553}\right)^2} \left[ \frac{1}{0.1553} \right] \\
\tau_g(\omega) &= \frac{(0.0691)(0.9746 - \omega^2) + 2(0.0691)\omega^2}{(0.9746 - \omega^2)^2 + (0.0691\omega)^2} + \frac{(0.1937)(0.6354 - \omega^2) + 2(0.1937)\omega^2}{(0.6354 - \omega^2)^2 + (0.1937\omega)^2} \\
& + \frac{(0.2799)(0.2124 - \omega^2) + 2(0.2799)\omega^2}{(0.2124 - \omega^2)^2 + (0.2799\omega)^2} + \frac{0.1553}{\omega^2 + (0.1553)^2} \\
\tau_g(\omega) &= \frac{0.0691(0.9746 + \omega^2)}{(0.9746 - \omega^2)^2 + (0.0691\omega)^2} + \frac{0.1937(0.6354 + \omega^2)}{(0.6354 - \omega^2)^2 + (0.1937\omega)^2} \\
& + \frac{0.2799(0.2124 + \omega^2)}{(0.2124 - \omega^2)^2 + (0.2799\omega)^2} + \frac{0.1553}{\omega^2 + (0.1553)^2}
\end{aligned}$$

En la figura 5.28 se muestra el comportamiento de la función de retardo de grupo. ■



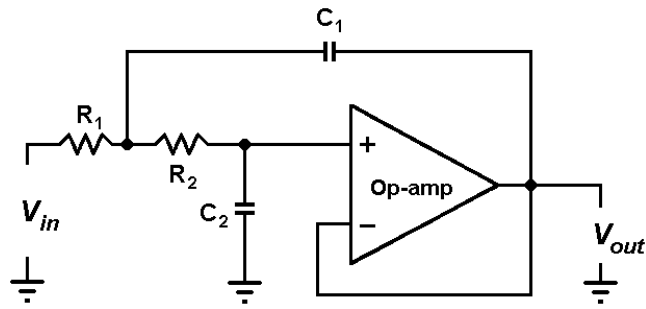
**Figura 5.28:** Gráfica del retardo de grupo para el filtro del ejemplo 5.6

■ **Ejemplo 5.7** Implemente un filtro pasa bajas analógico Chebyshev del tipo I. Utilice el diagrama del circuito mostrado en la figura 5.29 para la implementación del diseño, con las siguientes características

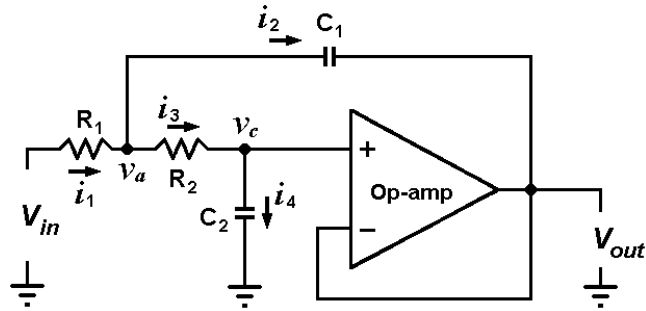
- Rizo en la banda de paso (o rizo de pico a pico):  $\leq 1.75 \text{ dB}$ ,
- Límite de la banda de paso:  $6200 \text{ rad/seg}$ ,
- Atenuación en la banda de rechazo:  $\geq 15 \text{ dB}$
- Límite de la banda de rechazo:  $16000 \text{ rad/seg}$ .

Determine: **(a)** La función de transferencia del circuito de la figura 5.29, **(b)** La función de transferencia del filtro de aproximación Chebyshev del tipo I y **(c)** Los valores de los elementos pasivos que componen el circuito, para que éste tenga el comportamiento del diseño solicitado. Considere en el diseño capacitores de valor máximo de  $0.01 \mu\text{F}$ .

*Solución:*



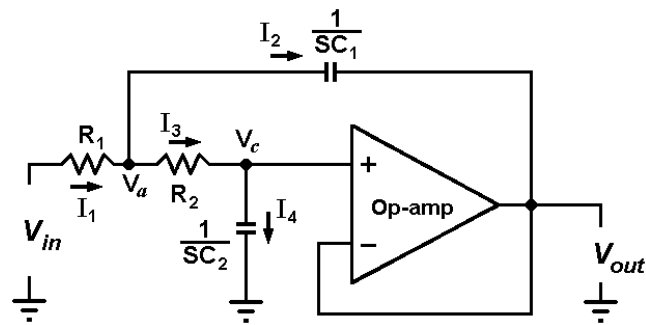
**Figura 5.29:** Circuito de un filtro pasa bajas de segundo orden



**Figura 5.30:** Circuito mostrando los flujos de corriente

**Inciso (a)** La función de transferencia del circuito de la figura 5.29 se determina al utilizar las leyes de Kirchhoff, por lo que inicialmente se establecen en el circuito los voltajes y las corrientes, como se muestra en la figura 5.30.

Debido a que el circuito de la figura 5.30 tienen elementos capacitivos, conviene representar al circuito utilizando una notación en el plano complejo  $s$ , como se muestra en la figura 5.31.



**Figura 5.31:** Circuito representado en el planos complejo  $s$

De la figura 5.31 se determina que

$$I_1 = \frac{V_{in} - V_a}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{V_a - V_{out}}{1/sC_1} = (V_a - V_{out}) sC_1$$

$$I_3 = \frac{V_a - V_c}{R_2}$$

$$I_4 = V_c sC_2$$

Considerando que la entrada hacia el operacional tiene una impedancia muy grande, enton-

ces

$$\begin{aligned}
 I_3 &= I_4 \\
 \frac{V_a - V_c}{R_2} &= V_c s C_2 \\
 V_a - V_c &= V_c s R_2 C_2 \\
 V_a &= V_c (1 + s R_2 C_2)
 \end{aligned} \tag{5.124}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_2 + I_3 \\
 \frac{V_{in} - V_a}{R_1} &= (V_a - V_{out}) s C_1 + \frac{V_a - V_c}{R_2} \\
 V_{in} - V_a &= (V_a - V_{out}) s R_1 C_1 + \frac{(V_a - V_c) R_1}{R_2} \\
 V_{in} + V_{out} s R_1 C_1 &= V_a \left( 1 + s R_1 C_1 + \frac{R_1}{R_2} \right) - \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_c \\
 V_{in} + V_{out} s R_1 C_1 &= V_a \left( \frac{R_1 + R_2 + s R_2 R_1 C_1}{R_2} \right) - \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_c
 \end{aligned}$$

de (5.124), entonces

$$\begin{aligned}
 V_{in} + V_{out} s R_1 C_1 &= V_c (1 + s R_2 C_2) \left( \frac{R_1 + R_2 + s R_2 R_1 C_1}{R_2} \right) - \left( \frac{R_1}{R_2} \right) V_c \\
 &= V_c \left( 1 + s R_2 C_2 + s R_1 C_1 + s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s R_1 C_2 + \frac{R_1}{R_1} - \frac{R_1}{R_1} \right)
 \end{aligned}$$

Además  $V_{out} = V_c$ , entonces

$$V_{in} = V_{out} (s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s C_2 (R_1 + R_2) + s R_1 C_1 - s R_1 C_1 + 1)$$

La función de transferencia del filtro pasa bajas de segundo orden mostrado en el circuito de la figura 5.29 es

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + C_2 (R_1 + R_2) s + 1} \tag{5.125}$$

**Inciso (b)** La función de transferencia del filtro de aproximación Chebyshev del tipo I, con las condiciones establecidas en la enunciación del problema, se determina inicialmente al obtener el mínimo orden del filtro, la ubicación de los polos y finalmente a partir de estos últimos la función de transferencia solicitada.

De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo I solicitados en el ejemplo y apoyándose en la representación gráfica de la figura 5.32, se determina que

$$-1.75 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

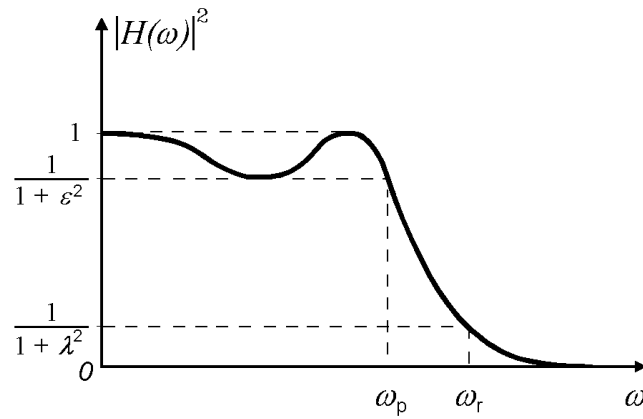
$$10^{0.175} = 1 + \varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.175} - 1} = 0.7044$$

$$\text{y} \quad -15 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^{1.5} - 1} = 5.5338$$





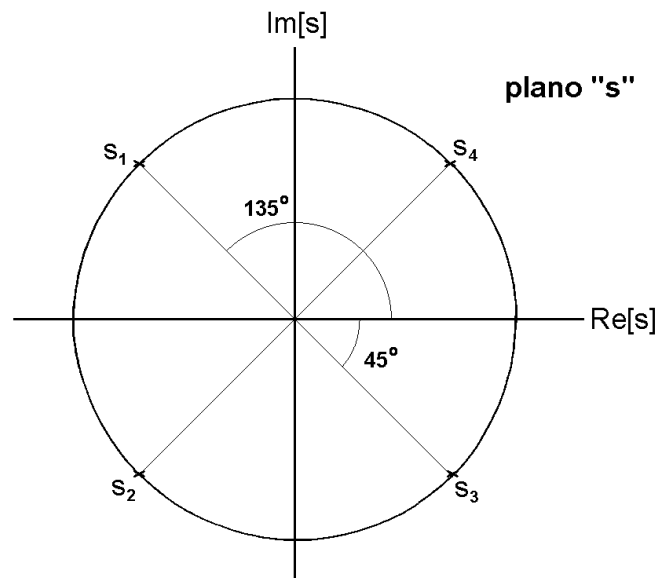
**Figura 5.32:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo I, indicando los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  para el ejemplo 5.7

El orden del filtro (vea la ecuación (5.66)), con  $\lambda = 5.5338$ ,  $\varepsilon = 0.7044$  y  $\omega_r/\omega_p = 2.5806$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{5.5338}{0.7044}\right)}{\cosh^{-1}(2.5806)} = \frac{\cosh^{-1}(7.8560)}{1.6013} = 1.717$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 2$ . Ahora se determina la ubicación de los polos, inicialmente para la aproximación Butterworth y después para la aproximación Chebyshev del tipo I.

Basados en la aproximación Butterworth, vea el *Apéndice B*, los polos para  $N = 2$  tienen una separación angular entre polos de  $180^\circ/2$  ( $90^\circ$  o  $\pi/2$  radianes), con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ( $\omega_c = 1$  rad/seg). La distribución de polos se muestra en la figura 5.33.



**Figura 5.33:** Distribución de polos Butterworth para  $N = 2$

De la figura 5.33 se determina que la ubicación de los polos es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j135^\circ} = e^{j3\pi/4} = -0.70711 + j0.70711 = s_2^* \\ s_3 &= e^{j315^\circ} = e^{j7\pi/4} = 0.70711 - j0.70711 = s_4^* \end{aligned}$$

Para determinar los polos basados en la aproximación Chebyshev del tipo I, la parte real de los polos Butterworth,  $\sigma'_k$ , se multiplica por  $\omega_p \sinh \beta'_k$ , y la parte imaginaria de los polos

Butterworth,  $\Omega'_k$ , se multiplica por  $\omega_p \cosh \beta'_k$ , esto es

$$s_k = \sigma'_k \omega_p \sinh \beta'_k + j \Omega'_k \omega_p \cosh \beta'_k \quad (5.126)$$

donde  $\beta'_k$  está dada por

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \quad (5.127)$$

Al sustituir los valores, con  $N = 2$  y  $\varepsilon = 0.7044$ , en (5.127) y luego este último en (5.126), se obtiene

$$\beta'_k = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(1/0.7044) = 0.5747$$

$$\omega_p \sinh \beta'_k = \omega_p \sinh(0.5747) = 0.6068 \omega_p$$

$$\omega_p \cosh \beta'_k = \omega_p \cosh(0.5747) = 1.1697 \omega_p$$

$$s_k = (0.6068) \omega_p \sigma'_k + j (1.1697) \omega_p \Omega'_k$$

con  $\sigma'_1 = \sigma'_2 = -0.7071$ ,  $\Omega'_1 = 0.7071$  y  $\Omega'_2 = -0.7071$ , se obtiene

$$s_1 = -(0.6068)(0.7071) \omega_p + j (1.1697)(0.7071) \omega_p$$

$$s_2 = -(0.6068)(0.7071) \omega_p - j (1.1697)(0.7071) \omega_p$$

esto es

$$s_1 = -0.4291 \omega_p + j 0.8271 \omega_p$$

$$s_2 = -0.4291 \omega_p - j 0.8271 \omega_p$$

Por otro lado, un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j \Omega_k)(s - \sigma_k + j \Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo  $s_1$  y su conjugado  $s_2$ , con  $\sigma_1 = -0.4291 \omega_p$  y  $\Omega_1 = 0.8271 \omega_p$ , se tiene

$$(s - s_1)(s - s_2) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(0.4291 \omega_p) s + (0.4291 \omega_p)^2 + (0.8271 \omega_p)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 + 0.8582 \omega_p s + 0.8682 \omega_p^2$$

La función de transferencia del filtro de aproximación Chebyshev del tipo I está dada por

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8582 \omega_p s + 0.8682 \omega_p^2} \quad (5.128)$$

Sustituyendo el valor de  $\omega_p = 6200 \text{ rad/seg}$  en (5.128), la función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5320.84 s + 33373608} \quad (5.129)$$

**Inciso (c)** Se procede a determinar los valores de los elementos pasivos que componen el circuito de la figura 5.29, de manera que satisfaga el comportamiento establecido por las condiciones del filtro Chebyshev del tipo I.

Esto es, se determina el valor de cada elemento pasivo ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  y  $R_2$ ) del circuito de la figura 5.29, de manera que los coeficientes del polinomio denominador en (5.125) sea igual a los coeficientes del polinomio denominador en (5.128) o en (5.129), estos últimos corresponden a la

función de transferencia del filtro Chebyshev del tipo I que satisface las condiciones del diseño solicitado.

Inicialmente exprese el polinomio denominador en (5.125) de manera que el coeficiente del componente principal se encuentre ponderado por la unidad, como se muestra a continuación

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2}\right)s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad (5.130)$$

donde  $K_1$  es la constante que asegure la igualdad en  $H(s)$  después de llevar a cabo los cambios en (5.125).

Considerando que los valores de las resistencias son más fáciles de ajustar que los valores de los capacitores en un circuito, por conveniencia hacemos  $R = R_1 = R_2$ , de manera que (5.130) queda expresada como

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left(\frac{2}{C_1 R}\right)s + \frac{1}{C_1 R C_2 R}} \quad (5.131)$$

Hagamos los siguientes cambios de variable

$$C'_1 = R C_1 \quad (5.132)$$

$$C'_2 = R C_2 \quad (5.133)$$

entonces (5.131) queda representada por

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left(\frac{2}{C'_1}\right)s + \frac{1}{C'_1 C'_2}} \quad (5.134)$$

Con la finalidad de que (5.134) se asemeje a (5.128), en (5.134) se involucra a la frecuencia de paso,  $\omega_p$ , como se muestra a continuación

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left(\frac{2}{\omega_p C'_1}\right)\omega_p s + \frac{\omega_p^2}{\omega_p C'_1 \omega_p C'_2}} \quad (5.135)$$

Ahora hagamos los siguientes cambios de variable

$$C''_1 = \omega_p C'_1 \quad (5.136)$$

$$C''_2 = \omega_p C'_2 \quad (5.137)$$

entonces (5.135) queda representada por

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2\left(\frac{1}{C''_1}\right)\omega_p s + \left(\frac{1}{C''_1 C''_2}\right)\omega_p^2} \quad (5.138)$$

La función de transferencia (5.138) también puede ser expresado como

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2\xi\omega_n\omega_p s + \omega_n^2\omega_p^2} \quad (5.139)$$

con

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C''_1 C''_2} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \left(\frac{1}{C''_1 C''_2}\right)^{1/2} \quad (5.140)$$

$$\xi \omega_n = \left( \frac{1}{C_1''} \right) = \left( \frac{C_2''}{C_1'' C_2''} \right) = \left( \frac{C_2''}{\sqrt{C_1'' C_2''}} \right) \left( \frac{1}{C_1'' C_2''} \right)^{1/2} = \left( \frac{C_2''}{C_1''} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{C_1'' C_2''} \right)^{1/2}$$

$$\xi = \left( \frac{C_2''}{C_1''} \right)^{1/2} \quad (5.141)$$

Al sustituir (5.140) y (5.141) en (5.139) se obtiene

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2 \left( \frac{C_2''}{C_1''} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{C_1'' C_2''} \right)^{1/2} \omega_p s + \left( \frac{1}{C_1'' C_2''} \right) \omega_p^2} \quad (5.142)$$

Por otra parte (5.128) puede expresarse como

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2 (0.4291) \omega_p s + 0.8682 \omega_p^2} \quad (5.143)$$

Al comparar (5.143) y (5.138) se determina que

$$\frac{1}{C_1''} = 0.4291$$

$$\frac{1}{C_1'' C_2''} = 0.8682$$

por lo que

$$C_1'' = 2.3305 \quad (5.144)$$

$$C_2'' = \frac{1}{0.8682 C_1''} = \frac{0.4291}{0.8682} = 0.4942 \quad (5.145)$$

De (5.144) y (5.145) se infiere que en este tipo de filtros el capacitor  $C_1$  ( $C_1'' = \omega_p R C_1$ ) es mayor a  $C_2$  ( $C_2'' = \omega_p R C_2$ ), esto es

$$C_1 > C_2 \quad (5.146)$$

De la relación (5.146) y de la enunciación del problema indicando que debe considerarse en el diseño capacitores con valor máximo de  $0.01 \mu F$ , se propone el valor del capacitor  $C_1 = 0.01 \mu F$ .

Utilizando la relación (5.147), vea (5.136), con  $\omega_p = 6200 \text{ rad/seg}$  indicada en la enunciación del problema y  $C_1'' = 2.3305$ , se determina el valor de  $C_1'$ .

$$C_1' = \frac{C_1''}{\omega_p} \quad (5.147)$$

$$C_1' = \frac{2.3305}{6200} = 375.887 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.148), vea (5.137), con  $\omega_p = 6200 \text{ rad/seg}$  y  $C_2'' = 0.4942$ , se determina el valor de  $C_2'$ .

$$C_2' = \frac{C_2''}{\omega_p} \quad (5.148)$$

$$C_2' = \frac{0.4942}{6200} = 79.710 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.149), vea (5.132), con  $C_1' = 375.887 \times 10^{-6}$  y  $C_1 = 0.01 \mu F$ , se determina el valor de  $R$ .

$$R = \frac{C_1'}{C_1} \quad (5.149)$$

$$R = \frac{375.887 \times 10^{-6}}{10^{-8}} = 37589 \Omega$$

Utilizando la relación (5.150), vea (5.133), con  $C_2' = 79.71 \times 10^{-6}$  y  $R = 37589 \Omega$ , se determina el valor de  $C_2$ .

$$C_2 = \frac{C_2'}{R} \quad (5.150)$$

$$C_2 = \frac{79.71 \times 10^{-6}}{37589} = 2120.6 \text{ pF}$$

Mientras que (vea (5.136), (5.137), (5.132) y (5.133)), con  $\omega_p = 6200 \text{ rad/seg}$ ,  $R = 37589 \Omega$ ,  $C_1 = 0.01 \mu F$  y  $C_2 = 2120 \text{ pF}$ ,

$$C_1'' = \omega_p R C_1 = (6200)(37589)(0.01 \times 10^{-6}) = 2.3305$$

$$C_2'' = \omega_p R C_2 = (6200)(37589)(2120.6 \times 10^{-12}) = 0.4942$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_1'' C_2''} = \frac{1}{(2.3305)(0.4942)} = 0.8682 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 0.9318$$

$$\xi = \left( \frac{C_2''}{C_1''} \right)^{1/2} = \left( \frac{0.4942}{2.3305} \right)^{1/2} = 0.4605$$

$$2\xi\omega_n = 2(0.4605)(0.9318) = 0.8582$$

donde  $\omega_n^2$  y  $2\xi\omega_n$  son los coeficientes del polinomio denominador en (5.128).

Sin embargo, el valor del capacitor  $C_2$  obtenido en la solución del problema difiere a los encontrados en el mercado. Los valores comerciales más próximos a  $2120.6 \text{ pF}$  son los capacitores cerámicos de  $2000 \text{ pF}$  y  $2200 \text{ pF}$ . Con la finalidad de verificar cuál de estos dos valores de  $C_2$  es el adecuado en la implementación del diseño, se determina para cada uno de ellos el valor de los términos  $C_2''$ ,  $\omega_n^2$  y  $\omega_n^2 \omega_p^2$  (vea (5.139)), y a partir de este último valor se compara con su equivalente término en (5.143), como se muestra a continuación.

Con la selección de  $C_2 = 2000 \text{ pF}$ , los valores de  $C_2''$ ,  $\omega_n^2$  y  $\omega_n^2 \omega_p^2$  son

$$C_2'' = \omega_p R C_2 = (6200)(37589)(2000 \times 10^{-12}) = 0.4661$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_1'' C_2''} = \frac{1}{(2.3305)(0.4661)} = 0.9206$$

$$\omega_n^2 \omega_p^2 = (0.9206) \omega_p^2 = (0.8682)(1.0604) \omega_p^2 = (0.8682)(1.0298 \omega_p)^2 \quad (5.151)$$

Mientras que, con la selección de  $C_2 = 2200 \text{ pF}$ , los valores de  $C_2''$ ,  $\omega_n^2$  y  $\omega_n^2 \omega_p^2$  son

$$C_2'' = \omega_p R C_2 = (6200)(37589)(2200 \times 10^{-12}) = 0.5127$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_1'' C_2''} = \frac{1}{(2.3305)(0.5127)} = 0.8370$$

$$\omega_n^2 \omega_p^2 = (0.837) \omega_p^2 = (0.8682)(0.9641) \omega_p^2 = (0.8682) (0.9819 \omega_p)^2 \quad (5.152)$$

Al comparar cada valor de  $\omega_n^2 \omega_p^2$ , obtenido en (5.151) y (5.152), con el término  $0.8682 \omega_p^2$  en (5.143), se infiere que al utilizar el capacitor de valor  $C_2 = 2000 \text{ pF}$  el filtro es menos selectivo con respecto a las condiciones de diseño solicitado, debido a que la frecuencia de paso para el filtro sería 1.0298 veces mayor a la indicada. En contra parte, al utilizar el capacitor de valor  $C_2 = 2200 \text{ pF}$  el filtro es más selectivo, debido a que la frecuencia de paso para el filtro sería 0.9819 veces menor a la solicitada.

Por lo que, en el diseño se considera a  $C_2 = 2200 \text{ pF}$ . El circuito implementado se muestra en la figura 5.34.

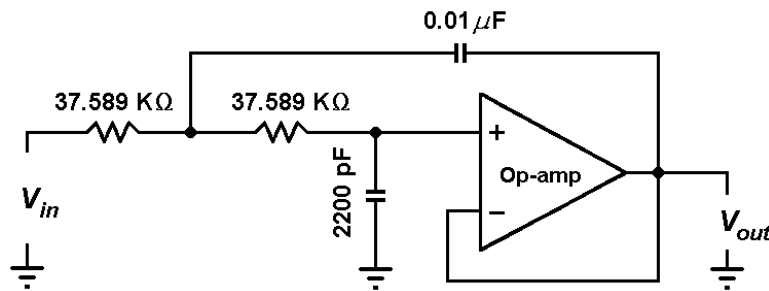


Figura 5.34: Circuito de un filtro pasa bajas de segundo orden

■ **Ejemplo 5.8** Diseñe un filtro pasa bajas analógico Chebyshev del tipo I. Utilice el diagrama del circuito mostrado en la figura 5.35 para la implementación del diseño, con las siguientes características

- Orden del filtro  $N = 2$ ,
- Rizo en la banda de paso (o rizo de pico a pico):  $\leq 1 \text{ dB}$ ,
- Límite de la banda de paso:  $5500 \text{ rad/seg}$

Determine: (a) La función de transferencia del filtro de aproximación Chebyshev del tipo I y (b) Los valores de los elementos pasivos que componen el circuito, para que éste tenga el comportamiento del diseño solicitado.

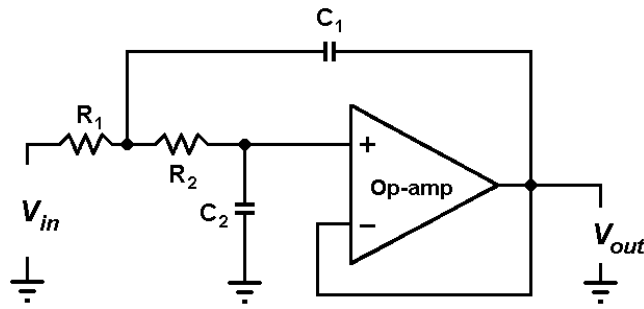
Considere en el diseño capacitores de valor máximo de  $0.01 \mu\text{F}$ .

*Solución:*

**Inciso (a)** La función de transferencia se determina al utilizar los polinomios proporcionados en la tabla 5.5 para  $N = 2$ , dando como resultado

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2(0.54885) \omega_p s + 1.1025 \omega_p^2} \quad (5.153)$$

**Inciso (b)** Se procede a determinar los elementos pasivos que componen el circuito de la figura 5.35.



**Figura 5.35:** Circuito de un filtro pasa bajas de segundo orden

La función de transferencia del circuito de segundo orden de la figura 5.35 es

$$H(s) = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + C_2 (R_1 + R_2) s + 1} \quad (5.154)$$

o también como

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left( \frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2} \right) s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad (5.155)$$

donde  $K_1$  es la constante que asegurar la igualdad en  $H(s)$  después de llevar a cabo los cambios en (5.154).

El objetivo es determinar el valor de cada elemento pasivo ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  y  $R_2$ ) del circuito de la figura 5.35 de manera que el polinomio denominador en (5.155) sea igual al polinomio denominador en (5.153), este último corresponde a la función de transferencia del filtro Chebyshev del tipo I que satisface las condiciones del diseño solicitado.

Considerando que los valores de las resistencias son mas fácil de ajustar que los valores de los capacitores en un circuito, por conveniencia hacemos  $R = R_1 = R_2$ , de manera que (5.155) queda expresada como

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left( \frac{2}{C_1 R} \right) s + \frac{1}{C_1 R C_2 R}} \quad (5.156)$$

Hagamos los siguientes cambios de variable

$$C'_1 = R C_1 \quad (5.157)$$

$$C'_2 = R C_2 \quad (5.158)$$

$$C''_1 = \omega_p C'_1 \quad (5.159)$$

$$C''_2 = \omega_p C'_2 \quad (5.160)$$

entonces (5.156) queda representada por

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2 \left( \frac{1}{C''_1} \right) \omega_p s + \left( \frac{1}{C''_1 C''_2} \right) \omega_p^2} \quad (5.161)$$

Al comparar (5.153) y (5.161) se determina que

$$\frac{1}{C''_1} = 0.54885 \quad \Rightarrow \quad C''_1 = 1.8220$$

$$\frac{1}{C_1'' C_2''} = 1.1025 \quad \Rightarrow \quad C_2'' = \frac{1}{1.1025 C_1''} = \frac{0.54885}{1.1025} = 0.4978$$

Debido a que en estos filtros se cumple (5.162) y de la enunciación del problema indicando que debe considerar en el diseño capacitores de valor máximo de  $0.01 \mu F$ , se propone el valor del capacitor  $C_1 = 0.01 \mu F$ .

$$C_1 > C_2 \quad (5.162)$$

Utilizando la relación (5.147), con  $C_1'' = 1.822$  y  $\omega_p = 5500 \text{ rad/seg}$  indicada en la enunciación del problema, se determina el valor de  $C_1'$ .

$$C_1' = \frac{1.8220}{5500} = 331.273 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.148), con  $C_2'' = 0.4978$  y  $\omega_p = 5500 \text{ rad/seg}$ , se determina el valor de  $C_2'$ .

$$C_2' = \frac{0.4978}{5500} = 90.509 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.149), con  $C_1' = 331.273 \times 10^{-6}$  y  $C_1 = 0.01 \mu F$ , se determina el valor de  $R$ .

$$R = \frac{331.273 \times 10^{-6}}{10^{-8}} = 33127.3 \Omega$$

Utilizando la relación (5.150), con  $C_2' = 90.509 \times 10^{-6}$  y  $R = 33127.3 \Omega$ , se determina el valor de  $C_2$ .

$$C_2 = \frac{90.509 \times 10^{-6}}{33127.3} = 2732.16 \text{ pF}$$

Por otra parte, la función de transferencia (5.161) puede ser expresado como

$$H(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2\xi\omega_n\omega_p s + \omega_n^2\omega_p^2} \quad (5.163)$$

donde  $\xi$  y  $\omega_n^2$  se determinan como sigue, con  $\omega_p = 5500 \text{ rad/seg}$ ,  $R = 33127.3 \Omega$ ,  $C_1 = 0.01 \mu F$  y  $C_2 = 2732.16 \text{ pF}$  (vea (5.157), (5.158), (5.159) y (5.160))

$$C_1'' = \omega_p R C_1 = (5500)(33127.3)(0.01 \times 10^{-6}) = 1.822$$

$$C_2'' = \omega_p R C_2 = (5500)(33127.3)(2732.16 \times 10^{-12}) = 0.4878$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_1'' C_2''} = \frac{1}{(1.822)(0.4978)} = 1.1025 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = 1.05$$

$$\xi = \left( \frac{C_2''}{C_1''} \right)^{1/2} = \left( \frac{0.4978}{1.8220} \right)^{1/2} = 0.5227$$

$$2\xi\omega_n = 2(0.5227)(1.05) = 1.0977$$

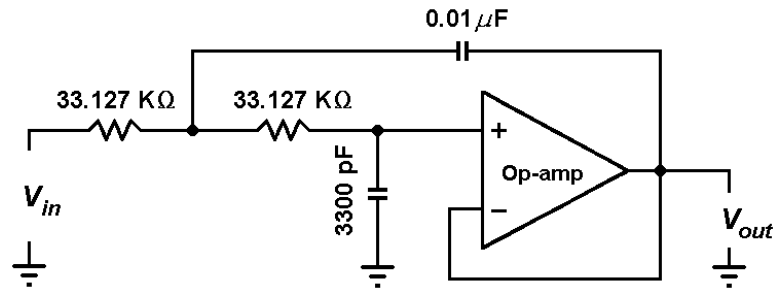
donde  $\omega_n^2$  y  $2\xi\omega_n$  son los coeficientes del polinomio denominador en (5.153).

Sin embargo, el valor del capacitor  $C_2$  obtenido en la solución del problema difiere a los encontrados en el mercado. El valor comercial más próximos a  $2732.16 \text{ pF}$  es el capacitor cerámico de  $3300 \text{ pF}$ .

El circuito implementado se muestra en la figura 5.36.

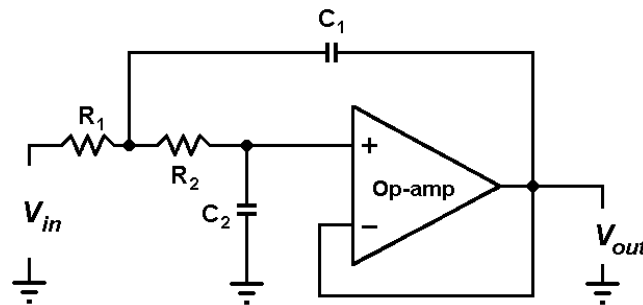
■





**Figura 5.36:** Circuito de un filtro pasa bajas de segundo orden

■ **Ejemplo 5.9** Diseñe un filtro pasa bajas analógico Chebyshev del tipo I. Utilice como base el diagrama del circuito mostrado en la figura 5.37 para la implementación del diseño, con las siguientes características



**Figura 5.37:** Circuito de un filtro pasa bajas de segundo orden

- Orden del filtro  $N = 4$ ,
- Rizo en la banda de paso (o rizo de pico a pico):  $\leq 0.5 \text{ dB}$ ,
- Límite de la banda de paso:  $1500 \text{ Hz}$

Determine: **(a)** La función de transferencia del filtro de aproximación Chebyshev del tipo I y **(b)** Los valores de los elementos pasivos que componen el circuito, para que éste tenga el comportamiento del diseño solicitado.

Considere en el diseño capacitores de valor máximo de  $0.01 \mu\text{F}$ .

*Solución:*

**Inciso (a)** La función de transferencia se determina al utilizar los polinomios proporcionados en la tabla 5.4 para  $N = 2$ , dando como resultado

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.3507s + 1.0635)(s^2 + 0.8467s + 0.3564)} \quad (5.164)$$

**Inciso (b)** Antes de determinar los elementos pasivos del circuito de cuarto orden solicitado, se considera lo siguiente.

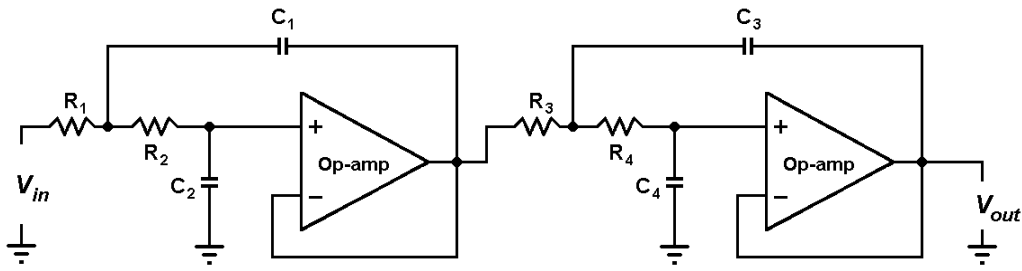
El circuito de cuarto orden se puede implementar al utilizar como base el circuito mostrado en la figura 5.37, al concatenar dos de estos circuitos de segundo orden, como se muestra en la figura 5.38.

La función de transferencia de la primera etapa del circuito de segundo orden de la figura 5.38 es, vea la figura 5.39,

$$H_1(s) = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2 s^2 + C_2 (R_1 + R_2) s + 1} \quad (5.165)$$

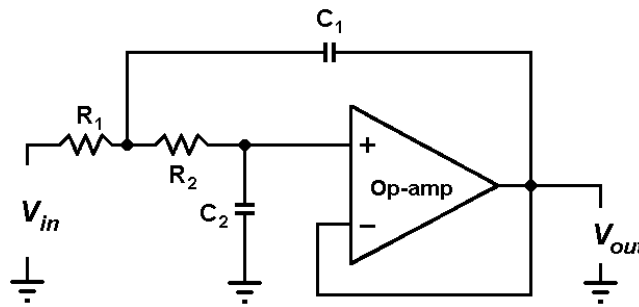
o también como

$$H_1(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2}\right) s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \quad (5.166)$$



**Figura 5.38:** Circuito de un filtro pasa bajas de cuarto orden

donde  $K_1$  es la constante que asegurar la igualdad en  $H_1(s)$  después de llevar a cabo los cambios en (5.165).



**Figura 5.39:** Primera etapa de circuito del filtro pasa bajas del ejemplo 5.9

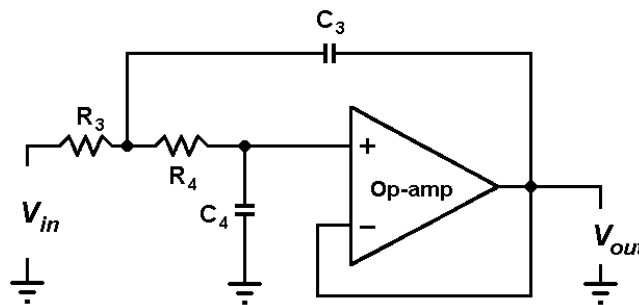
Mientras que la función de transferencia de la segunda etapa del circuito de segundo orden de la figura 5.38 es, vea la figura 5.40,

$$H_2(s) = \frac{1}{C_3 C_4 R_3 R_4 s^4 + C_4 (R_3 + R_4) s + 1} \quad (5.167)$$

o también como

$$H_2(s) = \frac{K_2}{s^2 + \left(\frac{R_3 + R_4}{C_3 R_3 R_4}\right) s + \frac{1}{C_3 C_4 R_3 R_4}} \quad (5.168)$$

donde  $K_2$  es la constante que asegurar la igualdad en  $H_2(s)$  después de llevar a cabo los cambios en (5.167).



**Figura 5.40:** Segunda etapa de circuito del filtro pasa bajas del ejemplo 5.9

La función de transferencia del circuito de la figura 5.38 es, vea (5.166) y (5.168),

$$H(s) = H_1(s) H_2(s)$$

$$= \left( \frac{K_1}{s^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2}\right) s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \right) \left( \frac{K_2}{s^2 + \left(\frac{R_3 + R_4}{C_3 R_3 R_4}\right) s + \frac{1}{C_3 C_4 R_3 R_4}} \right) \quad (5.169)$$

Por otro lado, la función de transferencia de orden cuatro dada por (5.164) se puede expresar como la concatenación de dos funciones de transferencias de segundo orden cada uno, como se muestra a continuación.

$$H(s) = H_1(s) H_2(s) = \left( \frac{1}{s^2 + 0.3507s + 1.0635} \right) \left( \frac{1}{s^2 + 0.8467s + 0.3564} \right) \quad (5.170)$$

con

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2(0.17535)s + 1.0635} \quad (5.171)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2(0.42335)s + 0.3564} \quad (5.172)$$

El objetivo es determinar el valor de cada elemento pasivo ( $C_1, C_2, C_3, C_4, R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$ ) del circuito de la figura 4.38 de manera que el polinomio denominador en (5.169) sea igual al polinomio denominador en (5.170).

El análisis se realiza por etapas, iniciando con la función de transferencia de la primera etapa del circuito de la figura 5.38, vea la figura 5.39.

Considerando que los valores de las resistencias son más fácil de ajustar que los valores de los capacitores en un circuito, por conveniencia hacemos  $R = R_1 = R_2$ , de manera que (5.166) queda expresada como

$$H_1(s) = \frac{K_1}{s^2 + \left( \frac{2}{C_1 R} \right) s + \frac{1}{C_1 R C_2 R}} \quad (5.173)$$

Hagamos los siguientes cambios de variable

$$C'_1 = R C_1 \quad , \quad C'_2 = R C_2 \quad (5.174)$$

$$C''_1 = \omega_p C'_1 \quad y \quad C''_2 = \omega_p C'_2 \quad (5.175)$$

entonces (5.173) queda representada por

$$H_1(s) = \frac{K_1}{s^2 + 2 \left( \frac{1}{C''_1} \right) \omega_p s + \left( \frac{1}{C''_1 C''_2} \right) \omega_p^2} \quad (5.176)$$

Al comparar (5.171) y (5.176) se determina que

$$\frac{1}{C''_1} = 0.17535 \quad \Rightarrow \quad C''_1 = 5.7029$$

$$\frac{1}{C''_1 C''_2} = 1.0635 \quad \Rightarrow \quad C''_2 = \frac{1}{1.0635 C''_1} = \frac{0.17535}{1.0635} = 0.1649$$

Debido a que en estos filtros  $C_1 > C_2$ , y de la enunciación del problema indicando que debe considerar en el diseño capacitores de valor máximo de  $0.01 \mu F$ , entonces se propone el valor del capacitor  $C_1 = 0.01 \mu F$ .

Utilizando la relación (5.177), con  $C''_1 = 5.7029$  y  $\omega_p = 2\pi(1500) \text{ rad/seg}$  indicada en la enunciación del problema, se determina el valor de  $C'_1$ .

$$C'_1 = \frac{C''_1}{\omega_p} \quad (5.177)$$

$$C_1' = \frac{5.7029}{2\pi(1500)} = 605.10 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.178), con  $C_1' = 605.10 \times 10^{-6}$  y  $C_1 = 0.01 \mu F$ , se determina el valor de  $R$ .

$$R = \frac{C_1'}{C_1} \quad (5.178)$$

$$R = \frac{605.10 \times 10^{-6}}{10^{-8}} = 60510 \Omega$$

Utilizando la relación (5.179), con  $C_2'' = 0.1649$  y  $\omega_p = 2\pi(1500) \text{ rad/seg}$ , se determina el valor de  $C_2'$ .

$$C_2' = \frac{C_2''}{\omega_p} \quad (5.179)$$

$$C_2' = \frac{0.1649}{2\pi(1500)} = 17.4964 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.180), con  $C_2' = 17.4964 \times 10^{-6}$  y  $R = 60510 \Omega$ , se determina el valor de  $C_2$ .

$$C_2 = \frac{C_2'}{R} \quad (5.180)$$

$$C_2 = \frac{17.4964 \times 10^{-6}}{60510} = 289.15 \text{ pF}$$

El valor comercial más próximos a  $289.15 \text{ pF}$  es el capacitor cerámico de  $330 \text{ pF}$ . Por lo que, en el diseño se considera a  $C_2 = 330 \text{ pF}$ .

Se continúa con el análisis de la función de transferencia de la segunda etapa del circuito de la figura 5.38, vea la figura 5.40.

Considerando que los valores de las resistencias son mas fácil de ajustar que los valores de los capacitores en un circuito, por conveniencia hacemos  $R = R_3 = R_4$ , de manera que (5.168) queda expresada como

$$H_2(s) = \frac{K_2}{s^2 + \left(\frac{2}{C_3 R}\right)s + \frac{1}{C_3 R C_4 R}} \quad (5.181)$$

Hagamos los siguientes cambios de variable

$$C_3' = R C_3 \quad , \quad C_4' = R C_4 \quad (5.182)$$

$$C_3'' = \omega_p C_3' \quad \text{y} \quad C_4'' = \omega_p C_4' \quad (5.183)$$

entonces (5.181) queda representada por

$$H_2(s) = \frac{K_2}{s^2 + 2\left(\frac{1}{C_3''}\right)\omega_p s + \left(\frac{1}{C_3'' C_4''}\right)\omega_p^2} \quad (5.184)$$

Al comparar (5.172) y (5.184) se determina que

$$\frac{1}{C_3} = 0.42335 \quad \Rightarrow \quad C_3'' = 2.3621$$

$$\frac{1}{C_3'' C_4''} = 0.3564 \quad \Rightarrow \quad C_4'' = \frac{1}{0.3564 C_3''} = \frac{0.42335}{0.3564} = 1.18785$$

Debido a que en estos filtros  $C_3 > C_4$ , y de la enunciación del problema indicando que debe considerar en el diseño capacitores de valor máximo de  $0.01 \mu F$ , entonces se propone el valor del capacitor  $C_3 = 0.01 \mu F$ .

Utilizando la relación (5.185), con  $C_3'' = 2.3621$  y  $\omega_p = 2\pi(1500) \text{ rad/seg}$  indicada en la enunciación del problema, se determina el valor de  $C_3'$ .

$$C_3' = \frac{C_3''}{\omega_p} \quad (5.185)$$

$$C_3' = \frac{2.3621}{2\pi(1500)} = 250.63 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.186), con  $C_3' = 250.63 \times 10^{-6}$  y  $C_3 = 0.01 \mu F$ , se determina el valor de  $R$ .

$$R = \frac{C_3'}{C_3} \quad (5.186)$$

$$R = \frac{250.63 \times 10^{-6}}{10^{-8}} = 25063 \Omega$$

Utilizando la relación (5.187), con  $C_4'' = 1.18785$  y  $\omega_p = 2\pi(1500) \text{ rad/seg}$ , se determina el valor de  $C_4'$ .

$$C_4' = \frac{C_4''}{\omega_p} \quad (5.187)$$

$$C_4' = \frac{1.18785}{2\pi(1500)} = 126.0348 \times 10^{-6}$$

Utilizando la relación (5.188), con  $C_4' = 126.0348 \times 10^{-6}$  y  $R = 25063 \Omega$ , se determina el valor de  $C_4$ .

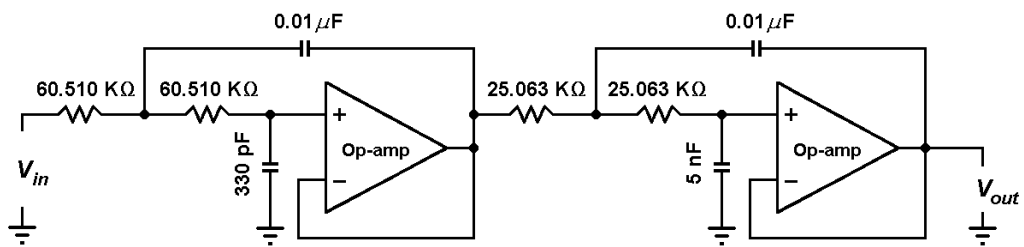
$$C_4 = \frac{C_4'}{R} \quad (5.188)$$

$$C_4 = \frac{126.0348 \times 10^{-6}}{25063} = 5.0287 \text{ nF}$$

El valor comercial más próximos a  $5.0287 \text{ nF}$  es el capacitor cerámico de  $5 \text{ nF}$ . Por lo que, en el diseño se considera a  $C_4 = 5 \text{ nF}$ .

El circuito implementado se muestra en la figura 5.41.

■



**Figura 5.41:** Circuito del filtro pasa bajas de cuarto orden

## 6. Aproximación del Tipo II

En el capítulo anterior se indicó que los filtros Chebyshev del tipo I contienen únicamente polos, y se dejó ver que cualquier otra función que aproxime a un filtro de orden  $N$  conteniendo únicamente polos, no tendrá un mejor o igual comportamiento en sus bandas (banda de paso y de rechazo) como la que tienen los filtros Chebyshev del tipo I. Es decir, si una aproximación de un filtro diferente al del tipo I de orden  $N$  conteniendo sólo polos en su función de transferencia y teniendo una característica en la banda de paso mejor que la del filtro del tipo I de enésimo orden, entonces se garantiza que la característica en la banda de rechazo es menos eficiente a la del filtro del tipo I.

Además, los filtros con función de transferencia con todos sus ceros en el infinito (tales como los filtros Butterworth y filtros Chebyshev del tipo I) tienen la limitante de que la atenuación se logra en el infinito (la atenuación se consigue para valores de  $\omega$  muy grandes), es decir, no se puede obtener dicha atenuación para alguna frecuencia finita. Sin embargo, en algunos casos es deseable obtener una atenuación muy grande para frecuencias muy cercanas a la frecuencia de rechazo. Lo anterior es factible de realizar al permitir que la función de transferencia contenga uno o más pares de ceros ubicados en el eje imaginario del plano  $s$  (ceros localizados en el eje  $j\omega$ ). De manera que, si los ceros están ubicados apropiadamente, es posible tener una característica de atenuación severa en la banda de rechazo al evaluar la respuesta en frecuencia en la proximidad de cada cero, aumentando la atenuación rápidamente.

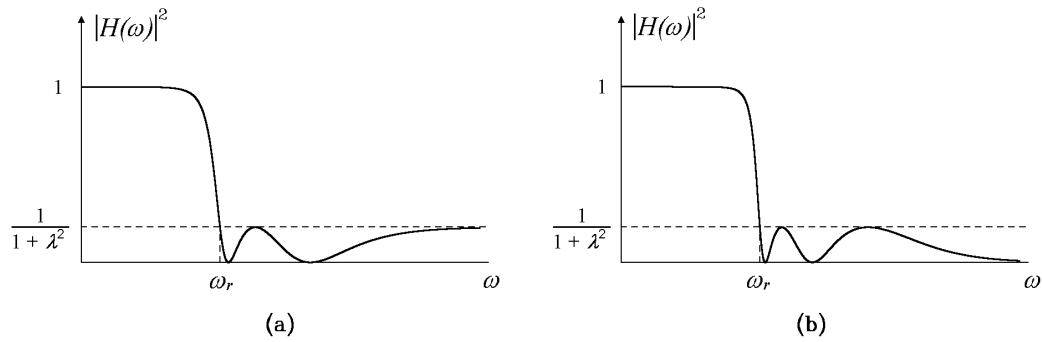
En particular, una aproximación cuya función de transferencia no tiene ceros localizados en el infinito es la aproximación de filtros Chebyshev inversa o filtro Chebyshev del tipo II, cuya representación de la magnitud en potencia está dada por (6.1). En la figura 6.1 se presentan ejemplos del comportamiento de la magnitud en potencia para filtros Chebyshev del tipo II con  $N = 4$  y 5.

$$|H_{CI}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{V_N^2(\omega_r/\omega_p)}{V_N^2(\omega_r/\omega)}} \quad (6.1)$$

donde  $\omega_r \equiv$  Frecuencia de rechazo  
 $\omega_p \equiv$  Frecuencia de paso

Con el fin de determinar cómo las propiedades de los polinomios de Chebyshev caracterizan a los filtros del tipo II es necesario realizar en (6.1) los siguientes cambios de variables: Hacemos

$$x = \omega/\omega_r \quad \Rightarrow \quad 1/x = \omega_r/\omega \quad (6.2)$$



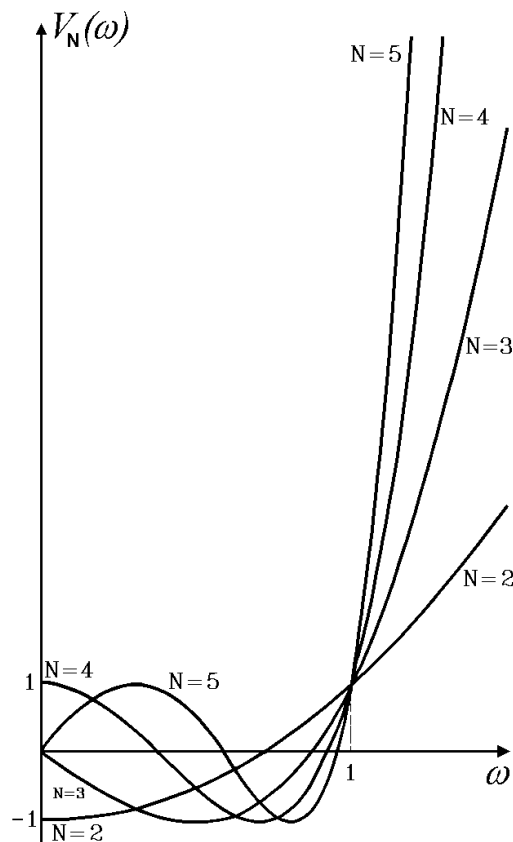
**Figura 6.1:** Magnitud en potencia de filtros del tipo II para (a)  $N = 4$  y (b)  $N = 5$

$$y \quad V_N^2(\omega_r/\omega_p) = k \quad (6.3)$$

donde  $k$  es una constante.

Al introducir (6.2) y (6.3) en (6.1) se obtiene

$$|H_{CI}(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{k}{V_N^2(1/x)}} \quad (6.4)$$



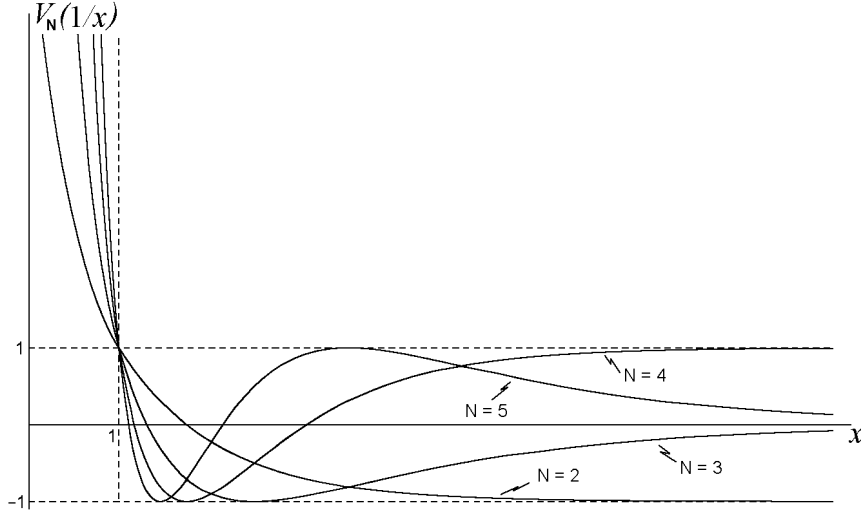
**Figura 6.2:** Gráfica de los polinomios de Chebyshev para  $N = 2, 3, 4$  y  $5$

El comportamiento gráfico de  $V_N^2(1/x)$  con respecto a  $x$  se puede obtener al examinar la gráfica del comportamiento de los polinomios de Chebyshev de  $V_N^2(\omega)$ , mostrada en la figura 6.2. Este comportamiento de  $V_N^2(1/x)$  se da en las gráficas de la figura 6.3, para algunos valores de  $N$ .



En el intervalo de frecuencias  $|\omega| \leq 1$  los polinomios Chebyshev  $V_N^2(\omega) \leq 1$ , como se advierte en la figura 6.2; de manera análoga para  $|x| \geq 1$  (o para  $|\omega| \geq \omega_r$ , con  $1/x = \omega_r/\omega$ , vea (6.2)) se tiene que  $|1/x| \leq 1$  y los polinomios Chebyshev  $V_N^2(1/x) \leq 1$ , como se visualiza en la figura 6.3.

Mientras que para el intervalo de frecuencias  $|\omega| > 1$  los polinomios Chebyshev  $V_N^2(\omega) > 1$ , como se observa en la figura 6.2; de forma similar para  $|x| < 1$  (o para  $|\omega| < \omega_r$ , con  $1/x = \omega_r/\omega$ ) se tiene que  $|1/x| > 1$  y los polinomios Chebyshev  $V_N^2(1/x) > 1$ , como se verifica en la figura 6.3.



**Figura 6.3:** Polinomios de Chebyshev  $V_N(1/x)$

De lo anterior se infiere que para cualquier polinomio de Chebyshev con  $N$  par y  $\omega \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$  y  $1/x \rightarrow 0$ )

$$V_N^2(1/x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = V_N^2(\omega_r/\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = 1 \quad \text{para } N \text{ par} \quad (6.5)$$

Mientras que para  $N$  impar y  $\omega \rightarrow \infty$

$$V_N^2(1/x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = V_N^2(\omega_r/\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{para } N \text{ impar} \quad (6.6)$$

Al aplicar la condición (6.5) en (6.1) se obtiene, donde  $k$  está dada por (6.3),

$$|H_{CI}(\omega \rightarrow \infty)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{k}{V_N^2(1/x)}} \Big|_{V_N^2(1/x)=1} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 k}$$

$$|H_{CI}(\omega \rightarrow \infty)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_r/\omega_p)} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad \text{para } N \text{ par} \quad (6.7)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que determina la característica del rizo en la banda de rechazo.

De manera similar (6.6) en (6.1) da como resultado

$$|H_{CI}(\omega \rightarrow \infty)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{k}{V_N^2(1/x)}} \Big|_{V_N^2(1/x)=0}$$

$$|H_{CI}(\omega \rightarrow \infty)|^2 = \frac{V_N^2(1/x)}{V_N^2(1/x) + \varepsilon^2 k} \Big|_{V_N^2(1/x)=0} = 0 \quad \text{para } N \text{ impar} \quad (6.8)$$

Otro comportamiento importante de (6.4) se observa de la figura 6.3 para valores de  $|x| < 1$  ( $|\omega| < \omega_r$ ) donde los polinomios  $V_N^2(1/x)$  tienden a infinito y, por lo tanto

$$|H_{CI}(\omega)|^2 \rightarrow 1 \quad (\text{tiende a la unidad}) \quad \text{para } |\omega| < \omega_r \quad (6.9)$$

Como ya se indicó, para  $|x| \geq 1$  ( $|\omega| \geq \omega_r$ ) los polinomios  $V_N(1/x)$  poseen las magnitudes más pequeñas, ya que en este intervalo  $V_N^2(1/x)$  nunca excede a la unidad, dando como resultado que  $|H_{CI}(\omega)|^2$  tenga un rizo en este intervalo.

Los cruces por cero de los polinomios  $V_N(1/x)$  (es decir, cuando  $V_N(1/x) = 0$ ) dan como resultado valores de  $|H_{CI}(\omega)|^2$  iguales a cero, vea (6.8), y para las frecuencias en los cuales  $V_N^2(1/x)$  vale la unidad, la función  $|H_{CI}(\omega)|^2$  tomará el valor de  $1/(1 + \lambda^2)$ , vea (6.7).

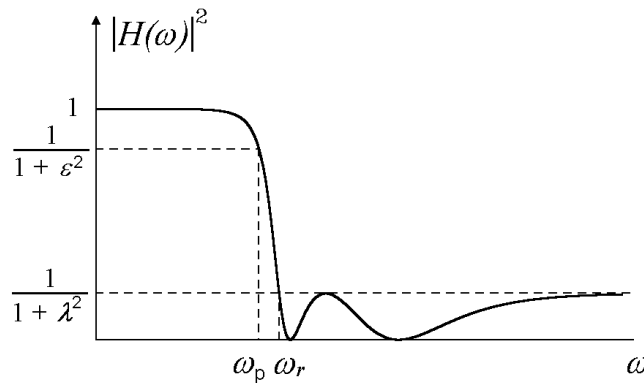
En resumen, los filtros Chebyshev del tipo II exhiben un comportamiento monótonico en la banda de paso y un comportamiento de rizo en la banda de rechazo  $\omega_r$ . Por lo que, el intervalo de interés del comportamiento del rizo es para frecuencias por arriba de la frecuencia de rechazo ( $|\omega| \geq \omega_r$ ). Otra deducción importante es que en general para  $N$  par se tendrá  $N/2$  crestas y  $N/2$  valles considerando valores positivos de la frecuencia y para valores negativos ( $\omega < -\omega_r$ ) se tiene una situación similar. Mientras que para  $N$  impar se tendrán  $(N - 1)/2$  crestas y  $(N + 1)/2$  valles, considerando una vez más valores positivos de la frecuencia. Al aumentar el orden del filtro  $N$ , también aumenta la frecuencia del rizo.

Para el filtro del tipo II el rizo en general oscila entre  $k/(1 + \lambda^2)$  y cero, por lo cual el ancho del rizo (con  $k = 1$ ) es

$$RW = \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad (6.10)$$

De la ecuación (5.16) y (6.10) se infiere que el ancho del rizo está determinado por la selección de  $\varepsilon$  para el filtro del tipo I y de  $\lambda$  para el filtro del tipo II, respectivamente, y estos parámetros son utilizados para caracterizar al filtro.

De la misma forma como en la aproximación del tipo I, se procede a determinar la expresión que fija el orden del filtro, luego se obtiene la ubicación de los polos de  $|H(\omega)|^2$  y finalmente la función de transferencia  $H(s)$ . Para ello, considere introducir un nuevo parámetro:  $1/(1 + \varepsilon^2)$  al comportamiento espectral de la magnitud en potencia, como se muestra en la figura 6.4.



**Figura 6.4:** Magnitud en potencia de los filtros Chebyshev del tipo II caracterizada por:  $\omega_p$ ,  $\omega_r$ ,  $\lambda$  y  $\varepsilon$

Al evaluar (6.1) en  $\omega = \omega_r$  se tiene (vea la figura 6.4)

$$|H_{CI}(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \frac{V_N^2(\omega_r/\omega_p)}{V_N^2(\omega_r/\omega_r)}} = \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad (6.11)$$

De la igualdad en (6.12) se determina (6.13).

$$V_N(x) = \cos [N \cos^{-1} x] = \begin{cases} \cos [N \cos^{-1} x] & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh [N \cosh^{-1} x] & \text{para } |x| > 1 \end{cases} \quad (6.12)$$

$$V_N^2(\omega_r/\omega_r) = V_N^2(1) = \cos^2 [N \cos^{-1}(1)] \quad (6.13)$$

Debido a que  $\cos^{-1}(1) = 0$  y  $\cos(0) = 1$ , entonces (6.13) es

$$V_N^2(\omega_r/\omega_r) = 1 \quad (6.14)$$

De las igualdades en (6.14) y en (6.11) se determina que

$$1 + \lambda^2 = 1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_r/\omega_p) \quad (6.15)$$

Y de la igualdad en (6.12) entonces (6.15) se expresa como

$$\lambda^2 = \varepsilon^2 \cosh^2 [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)] \quad (6.16)$$

$$\lambda/\varepsilon = \cosh [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)]$$

$$\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon) = N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)$$

$$\therefore N \geq \frac{\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)} \quad (6.17)$$

la cual es la misma expresión obtenida para determinar el orden del filtro del tipo I. Así, para un filtro con ciertas especificaciones en los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\omega_p$  y  $\omega_r$  se determina su orden, la desigualdad “>” en (6.17) una vez más es para asegurar el mínimo orden  $N$  necesario para satisfacer las condiciones del filtro.

Se procede a determinar la ubicación de los polos del filtro Chebyshev del tipo II. Inicialmente se expresa la ecuación (6.1) en la forma

$$|H_{CI}(\omega)|^2 = \frac{V_N^2(\omega_r/\omega)}{V_N^2(\omega_r/\omega) + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_r/\omega_p)} \quad (6.18)$$

La expresión (6.18) muestra que los filtros del tipo II están constituidos por ceros y por polos, de aquí la necesidad de analizar la ubicación de los ceros y por el otro la ubicación de los polos. En principio se determina la ubicación de los ceros. Para ello, se iguala el polinomio numerador de (6.18) a cero, es decir

$$V_N^2(\omega_r/\omega) = 0 \quad (\text{o } V_N(\omega_r/\omega) = 0) \quad (6.19)$$

Con el cambio de variable:  $y = \omega_r/\omega$  (6.19) se expresa como

$$V_N^2(y) = 0 \quad (\text{o } V_N(y) = 0) \quad (6.20)$$

Note que la condición en (6.20) se logra solo para valores de  $|y| \leq 1$  (es decir, para  $\omega \geq \omega_r$  en (6.19)), esto debido a que la característica de rizo ocurre en la banda de rechazo para los filtros del tipo II (a diferencia de los filtros del tipo I que el rizo ocurre en la banda de paso).

De (6.12) la ecuación (6.20) se escribe como

$$V_N^2(y) = \cos^2 [N \cos^{-1}(y)] = 0 \quad \text{para } |y| \leq 1 \quad (6.21)$$

$$V_N(y) = \cos [N \cos^{-1}(y)] = 0$$

$$N \cos^{-1}(y) = \cos^{-1}(0) \quad (6.22)$$

Por otro lado,  $\cos x = 0$  para  $x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ , por lo que (Note que  $x = \cos^{-1}(0)$ )

$$\cos^{-1}(0) = \left( \frac{2k-1}{2} \right) \pi \quad \text{para toda } k \quad (6.23)$$

entonces (6.22) es

$$\begin{aligned} N \cos^{-1}(y) &= \left( \frac{2k-1}{2} \right) \pi \\ \cos^{-1}(y) &= \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ y &= \cos \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \end{aligned} \quad (6.24)$$

Finalmente, debido a la igualdad  $y = \omega_r/\omega$  y a que  $\omega = s/j$  la ecuación (6.24) es (donde  $z_k$  es la notación utilizada para representar a los ceros)

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r}{\omega} &= \cos \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \frac{j\omega_r}{s_k} &= \cos \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ s_k &= \frac{j\omega_r}{\cos \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi} = z_k \end{aligned} \quad (6.25)$$

De (6.25) se concluye que los filtros Chebyshev del tipo II tienen ceros ubicados en el eje imaginario (Nota: si  $N$  es impar, entonces para  $k = (N+1)/2$  el cero yace en el infinito).

Ahora, se encuentra la ubicación de los polos de los filtros del tipo II, al igualar a cero el polinomio denominador de la ecuación (6.18), esto es

$$V_N^2(\omega_r/\omega) + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_r/\omega_p) = 0 \quad (6.26)$$

Con los siguientes cambios de variables:  $y = \omega_r/\omega$  y  $z = \omega_r/\omega_p$ , (6.26) se expresa como

$$V_N^2(y) + \varepsilon^2 V_N^2(z) = 0 \quad (6.27)$$

La igualdad en (6.27) lleva a

$$\begin{aligned} V_N^2(y) &= -\varepsilon^2 V_N^2(z) \\ V_N(y) &= \pm j\varepsilon V_N(z) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Sin embargo, como el comportamiento espectral de los filtros Chebyshev del tipo II presenta el rizo en la banda de frecuencias por arriba de  $\omega_r$ , entonces la expresión de lado izquierdo de (6.28) es un polinomio Chebyshev evaluado para  $|y| \leq 1$  (observe la relación inversamente proporcional entre la variable  $\omega_r$  y  $\omega$ ), mientras que el polinomio Chebyshev de lado derecho de (6.28) está evaluado para una  $z$  cuyo valor es mayor a la unidad ( $z = \omega_r/\omega_p$ , con  $\omega_r > \omega_p$ ). De lo anterior y de la igualdad en (6.12), entonces (6.28) se expresa como

$$\begin{aligned} \cos [N \cos^{-1}(y)] &= \pm j\varepsilon \cosh [N \cosh^{-1}(z)] \\ N \cos^{-1}(y) &= \cos^{-1} [\pm j\varepsilon \cosh [N \cosh^{-1}(z)]] \end{aligned} \quad (6.29)$$

La igualdad en (6.29) es similar a (5.38) en el sentido de que se tiene un coseno inverso con argumento complejo, por lo que se infiere que es posible dar una solución a (6.29) basada en el análisis desarrollado para la ubicación de los polos de los filtros Chebyshev del tipo I. Inicialmente permita realizar el siguiente cambio de notación, hagamos

$$\mu = \varepsilon \cosh [N \cosh^{-1}(z)] \quad (6.30)$$

Por consiguiente (6.29) se escribe como

$$N \cos^{-1}(y) = \cos^{-1} (\pm j\mu) \quad (6.31)$$

La expresión (6.31) se puede igualar a una función compleja como en (5.39), dando como resultado

$$\cos^{-1}(\pm j\mu) = \eta + jv \quad (6.32)$$

Despejando el término complejo (esto tiene como finalidad determinar el valor de  $\eta$  y  $v$ ), se tiene

$$\pm j\mu = \cos(\eta + jv) \quad (6.33)$$

y de (6.34), entonces (6.33) es (6.35).

$$\cos(\eta + jv) = \cos\eta \cosh v - j \operatorname{sen}\eta \operatorname{senh} v \quad (6.34)$$

$$\pm j\mu = \cos\eta \cosh v - j \operatorname{sen}\eta \operatorname{senh} v \quad (6.35)$$

Se infiere que la parte real debe ser cero y la parte imaginaria diferente de cero, esto es

$$0 = \cos\eta \cosh v \quad (6.36)$$

$$\pm \mu = - \operatorname{sen}\eta \operatorname{senh} v \quad (6.37)$$

Las expresiones (6.36) y (6.37) son similares a (5.43) y (5.44), respectivamente, y tendrán soluciones similares, es decir, (6.36) tiene la solución (vea la ecuación (5.45))

$$\cos\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \left(\frac{2k-1}{2}\right)\pi \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.38)$$

Note que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = (-1)^{k-1} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.39)$$

Por lo que, (6.37) tiene la solución (vea (6.38) y (6.39)),

$$\pm \mu = - \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) \right] \operatorname{senh} v$$

$$\pm \mu = - (-1)^{k-1} \operatorname{senh} v$$

$$\pm \mu = (-1)^k \operatorname{senh} v$$

$$v = \pm \operatorname{senh}^{-1} \mu \quad \text{para } k \text{ par} \quad (6.40)$$

$$v = \mp \operatorname{senh}^{-1} \mu \quad \text{para } k \text{ impar} \quad (6.41)$$

Al sustituir (6.30) en (6.40) y tomando en cuenta que  $z = \omega_r/\omega_p$ , entonces

$$v = \pm \operatorname{senh}^{-1} \left[ \varepsilon \cosh \left[ N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right] \quad (6.42)$$

De la igualdad en (6.31), (6.32), (6.38), (6.30) y (6.42) se tiene

$$N \cos^{-1}(y) = \eta + jv \quad (6.43)$$

$$\cos^{-1}(y) = \eta_k + jv_k \quad (6.44)$$

con

$$\eta_k = \frac{\eta}{N} = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi \quad (6.45)$$

$$v_k = \frac{v}{N} = \pm \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(\mu) \quad (6.46)$$

$$\text{o} \quad v_k = \pm \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1} [\varepsilon \cosh [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)]] \quad (6.47)$$

La expresión (6.44) es similar a (5.52), por lo que se tiene una solución de la forma (5.56), esto es

$$y = \cos(\eta_k + j v_k)$$

$$y = \cos \eta_k \cosh v_k - j \operatorname{sen} \eta_k \operatorname{senh} v_k \quad (6.48)$$

entonces (6.48), con  $y = \omega_r/\omega$  y  $\omega = s/j$ , se transforma en

$$\frac{j\omega_r}{s_k} = y = \cos \eta_k \cosh v_k - j \operatorname{sen} \eta_k \operatorname{senh} v_k \quad (6.49)$$

$$s_k = \frac{j\omega_r}{\cos \eta_k \cosh v_k - j \operatorname{sen} \eta_k \operatorname{senh} v_k} \quad (6.50)$$

$$s_k = \frac{j\omega_r [\cos \eta_k \cosh v_k + j \operatorname{sen} \eta_k \operatorname{senh} v_k]}{\cos^2 \eta_k \cosh^2 v_k + \operatorname{sen}^2 \eta_k \operatorname{senh}^2 v_k} \quad (6.51)$$

Hagamos

$$\gamma_k = \operatorname{sen} \eta_k \operatorname{senh} v_k \quad (6.52)$$

$$\rho_k = \cos \eta_k \cosh v_k \quad (6.53)$$

Sustituyendo (6.52) y (6.53) en (6.51)

$$s_k = \frac{j\omega_r [\rho_k + j\gamma_k]}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} + j \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$s_k = -\omega_r \left[ \frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} - j \frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \right] \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (6.54)$$

$$\text{o} \quad s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad (6.55)$$

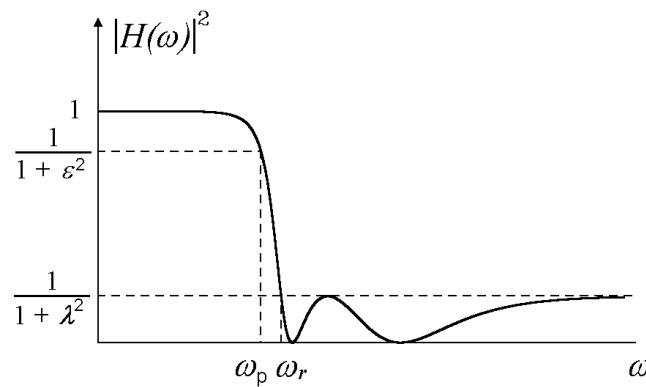
$$\text{con} \quad \sigma_k = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \quad (6.56)$$

$$\Omega_k = \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \quad (6.57)$$

Así los filtros basados en la aproximación Chebyshev del tipo II están constituidos de ceros en el eje imaginario y de polos a la izquierda del eje imaginario del plano  $s$ .

■ **Ejemplo 6.1** Determine: (a) El mínimo orden del filtro Chebyshev del tipo II requerido para cumplir con las siguientes especificaciones

- Máxima pérdida en la banda de paso de 2 dB,
- Frecuencia de paso  $\omega_p = 100 \text{ rad/seg}$ ,
- Mínima pérdida en la banda de rechazo de 40 dB,
- Frecuencia de rechazo  $\omega_r = 1/0.67$ .



**Figura 6.5:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo II, para el ejemplo 6.1

(b) La función de transferencia, y (c) Grafique el comportamiento en frecuencia de la magnitud, la ganancia en  $dB$  y la fase, así como de la función de retardo de grupo.

*Solución:*

**Inciso (a)** De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo II solicitados en el ejemplo y apoyándose en la representación gráfica de la figura 6.5, se determina que

$$-2 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$0.2 = \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon^2 = 10^{0.2} - 1$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.2} - 1} = 0.76478$$

$$\text{y} \quad -40 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^4 - 1} = 99.9950$$

El orden del filtro (vea la ecuación (6.17)), con  $\lambda = 99.9950$ ,  $\varepsilon = 0.76478$  y  $\omega_r/\omega_p = 1/0.67$  ( $\omega_p/\omega_r = 0.67$ ), es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{99.995}{0.76478}\right)}{\cosh^{-1}(1.4925)} = \frac{\cosh^{-1}(130.75)}{0.9557} = 5.824$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 6$ .

**Inciso (b)** Para determinar la función de transferencia primero se determina la ubicación de los polos y de los ceros. Se inicia con la ubicación de los polos. Para ello, se hace uso de las expresiones (6.55), (6.56), (6.57), (6.52), (6.53), (6.45) y (6.47), las cuales se reescriben a continuación.

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\text{con} \quad \sigma_k = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\Omega_k = \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$$

$$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$$

$$\eta_k = \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$v_k = \pm \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[ \varepsilon \cosh \left[ N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de  $v_k$ , con  $N = 6$ ,  $\varepsilon = 0.76478$  y  $\omega_r/\omega_p = 1/0.67$ , esto es

$$v_k = \pm \frac{1}{6} \text{senh}^{-1} \left[ (0.76478) \cosh \left[ 6 \cosh^{-1}(1/0.67) \right] \right]$$

$$v_k = \pm 0.911029$$

$$\text{senh } v_k = \text{senh}(0.911029) = 1.04238$$

$$\text{cosh } v_k = \text{cosh}(0.911029) = 1.44450$$

Algunos pasos en el cálculo de los polos se muestran en la tabla 6.1 y 6.2.

**Tabla 6.1:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.1, primera parte

$k$	$\eta_k$	$\text{cos } \eta_k$	$\text{sen } \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$	$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$
1	$\pi/12$	0.96593	0.25882	0.26979	1.39529
2	$3\pi/12$	0.70711	0.70711	0.73708	1.02142
3	$5\pi/12$	0.25882	0.96593	1.00687	0.37387
4	$7\pi/12$	-0.25882	0.96593	1.00687	-0.37387
5	$9\pi/12$	-0.70711	0.70711	0.73708	-1.02142
6	$11\pi/12$	-0.96593	0.25882	0.26979	-1.39529
7	$13\pi/12$	-0.96593	-0.25882	-0.26979	-1.39529
8	$15\pi/12$	-0.70711	-0.70711	-0.73708	-1.02142
9	$17\pi/12$	-0.25882	-0.96593	-1.00687	-0.37387
10	$19\pi/12$	0.25882	-0.96593	-1.00687	0.37387
11	$21\pi/12$	0.70711	-0.70711	-0.73708	1.02142
12	$23\pi/12$	0.96593	-0.25882	-0.26979	1.39529

De la tabla 6.2 se obtiene la ubicación de los polos, considerando aquellos que se encuentran a la izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$s_1 = -19.9373 + j 103.1149$$

$$s_2 = -69.3388 + j 96.0866$$

$$s_3 = -130.2731 + j 48.3731$$

$$s_4 = -130.2731 - j 48.3731$$

$$s_5 = -69.3388 - j 96.0866$$

$$s_6 = -19.9373 - j 103.1149$$

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la expresión (6.25), la cual se especifica a continuación.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$



**Tabla 6.2:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.1, segunda parte

$k$	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	2.01962	0.13358	0.69087	-19.9373	103.1149
2	1.58659	0.46457	0.64378	-69.3388	96.0866
3	1.15357	0.87283	0.32410	-130.2731	48.3731
4	1.15357	0.87283	-0.32410	-130.2731	-48.3731
5	1.58659	0.46457	-0.64378	-69.3388	-96.0866
6	2.01962	0.13358	-0.69087	-19.9373	-103.1149
7	2.01962	-0.13358	-0.69087	19.9373	-103.1149
8	1.58659	-0.46457	-0.64378	69.3388	-96.0866
9	1.15357	-0.87283	-0.32410	130.2731	-48.3731
10	1.15357	-0.87283	0.32410	130.2731	48.3731
11	1.58659	-0.46457	0.64378	69.3388	96.0866
12	2.01962	-0.13358	0.69087	19.9373	103.1149

Algunos pasos en el cálculo de los ceros se muestran en la tabla 6.3.

**Tabla 6.3:** Cálculo de los ceros del ejemplo 6.1

$k$	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/12$	0.96593	154.5182
2	$3\pi/12$	0.70711	211.0757
3	$5\pi/12$	0.25882	576.6700
4	$7\pi/12$	-0.25882	-576.6700
5	$9\pi/12$	-0.70711	-211.0757
6	$11\pi/12$	-0.96593	-154.5182
7	$13\pi/12$	-0.96593	-154.5182
8	$15\pi/12$	-0.70711	-211.0757
9	$17\pi/12$	-0.25882	-576.6700
10	$19\pi/12$	0.25882	576.6700
11	$21\pi/12$	0.70711	211.0757
12	$23\pi/12$	0.96593	154.5182

De la tabla 6.3 se obtiene la ubicación de los ceros, los cuales se enumeran a continuación (con  $\omega_r = 149.25373 \text{ rad/seg}$ ).

$$\begin{aligned} z_1 &= +j 154.5182 \\ z_2 &= +j 211.0757 \\ z_3 &= +j 576.6700 \\ z_4 &= -j 576.6700 \\ z_5 &= -j 211.0757 \\ z_6 &= -j 154.5182 \end{aligned}$$

De la distribución de los polos se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\ (s - s_k)(s - s_k^*) &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \end{aligned}$$

Para el polo  $s_1$  y su conjugado  $s_6$ , con  $\sigma_1 = -19.9373$  y  $\Omega_1 = 103.1149$ , se tiene

$$(s - s_1)(s - s_6) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(19.9373)s + (19.9373)^2 + (103.1149)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_6) = s^2 + 39.875s + 11030.18$$

Para el polo  $s_2$  y su conjugado  $s_5$ , con  $\sigma_2 = -69.3388$  y  $\Omega_2 = 96.0866$ , se tiene

$$(s - s_2)(s - s_5) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(69.3388)s + (69.3388)^2 + (96.0866)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_5) = s^2 + 138.678s + 14040.50$$

Para el polo  $s_3$  y su conjugado  $s_4$ , con  $\sigma_3 = -130.2731$  y  $\Omega_3 = 48.3731$ , se tiene

$$(s - s_3)(s - s_4) = (s - s_3)(s - s_3^*) = s^2 + 2(130.2731)s + (130.2731)^2 + (48.3731)^2$$

$$(s - s_3)(s - s_4) = s^2 + 260.546s + 19311.04$$

De la distribución de los ceros se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\Omega_k)(s + j\Omega_k) = s^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \Omega_k^2$$

Para el cero  $z_1$  y su conjugado  $z_6$ , con  $\Omega_1 = 154.5182$ , se tiene

$$(s - z_1)(s - z_6) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (154.5182)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_6) = s^2 + 23875.87$$

Para el cero  $z_2$  y su conjugado  $z_5$ , con  $\Omega_2 = 211.0757$ , se tiene

$$(s - z_2)(s - z_5) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (211.0757)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_5) = s^2 + 44552.95$$

Para el cero  $z_3$  y su conjugado  $z_4$ , con  $\Omega_3 = 576.6700$ , se tiene

$$(s - z_3)(s - z_4) = (s - z_3)(s - z_3^*) = s^2 + (576.67)^2$$

$$(s - z_3)(s - z_4) = s^2 + 332548.29$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 23875.87)(s^2 + 44552.95)(s^2 + 332548.29)}{(s^2 + 39.875s + 11030.18)(s^2 + 138.678s + 14040.5)(s^2 + 260.546s + 19311.04)}$$

Se determina la constante de normalización  $K_0$  al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0 (23875.87 - \omega^2)(44552.95 - \omega^2)(332548.29 - \omega^2)}{(11030.18 - \omega^2 + j39.875\omega)(14040.5 - \omega^2 + j138.678\omega)(19311.04 - \omega^2 + j260.546\omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para  $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0 (23875.87) (44552.95) (332548.29)}{(11030.18) (14040.5) (19311.04)} = K_0 (118.2822) = 1$$

$$K_0 = 0.008454$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{0.008454 (s^2 + 23875.87) (s^2 + 44552.95) (s^2 + 332548.29)}{(s^2 + 39.875s + 11030.18) (s^2 + 138.678s + 14040.5) (s^2 + 260.546s + 19311.04)}$$

**Inciso (c)** Para construir las gráficas solicitadas se substituye a  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia  $H(s)$  obtenida en el inciso anterior, esto es

$$H(\omega) = \frac{0.008454 (23875.87 - \omega^2) (44552.95 - \omega^2) (332548.29 - \omega^2)}{(11030.18 - \omega^2 + j39.875\omega) (14040.5 - \omega^2 + j138.678\omega) (19311.04 - \omega^2 + j260.546\omega)}$$

La función magnitud en frecuencia esta dada por

$$|H(\omega)| = \frac{0.008454 |23875.87 - \omega^2| |44552.95 - \omega^2| |332548.29 - \omega^2|}{\sqrt{(11030.18 - \omega^2)^2 + (39.875\omega)^2} \sqrt{(14040.5 - \omega^2)^2 + (138.678\omega)^2} \sqrt{(19311.04 - \omega^2)^2 + (260.546\omega)^2}}$$

En la figura 6.6a se muestra el comportamiento de la función magnitud en frecuencia. La evaluación de la ganancia en  $dB$  es

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log(0.008454) + 20 \log |23875.87 - \omega^2| \\ &\quad + 20 \log |44552.95 - \omega^2| + 20 \log |332548.29 - \omega^2| \\ &\quad - 10 \log [(11030.18 - \omega^2)^2 + (39.875\omega)^2] - 10 \log [(14040.5 - \omega^2)^2 + (138.678\omega)^2] \\ &\quad - 10 \log [(19311.04 - \omega^2)^2 + (260.546\omega)^2] \end{aligned}$$

En la figura 6.6b se muestra el comportamiento de la ganancia en  $dB$ .

Para evaluar la fase, se requiere determinar el  $\arg[H(\omega)]$ , esto es

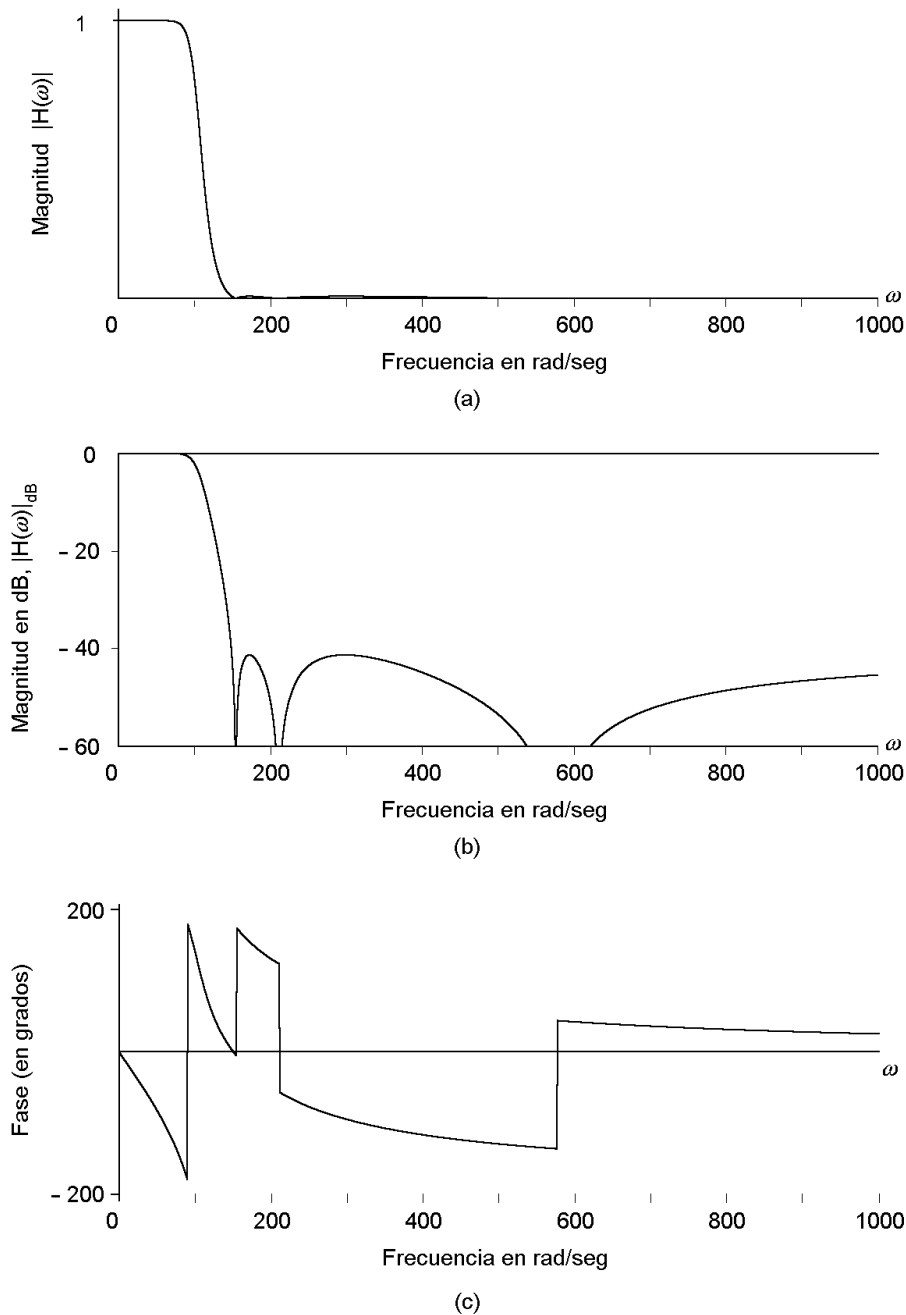
$$\begin{aligned} \arg[H(\omega)] &= \arg[23875.87 - \omega^2] + \arg[44552.95 - \omega^2] + \arg[332548.29 - \omega^2] \\ &\quad - \arctan \left[ \frac{39.875\omega}{11030.18 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{138.678\omega}{14040.5 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{260.546\omega}{19311.04 - \omega^2} \right] \end{aligned}$$

En la evaluación del  $\arg[H(\omega)]$  anterior, en particular enfatizando en los polos, se hace notar que para el argumento de un número complejo  $\alpha + j\beta$  con  $\alpha$  y  $\beta$  positivos ( $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ ) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \leq \pi \quad (\acute{o}: \leq 90^\circ)$$

Mientras que para un  $\alpha$  negativo y un  $\beta$  positivo ( $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ ) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left( \frac{\beta}{-|\alpha|} \right) = -\arctan \left( \frac{\beta}{|\alpha|} \right) \pm \pi \quad (\acute{o}: \pm 180^\circ)$$



**Figura 6.6:** Resultados gráficos del ejemplo 6.1: (a) Magnitud de  $H(\omega)$ , (b) Ganancia en dB de  $H(\omega)$  y (c) Fase

Por ejemplo, el cuarto término del  $\arg[H(\omega)]$  para  $\omega^2 \geq 11030.18$  es

$$\begin{aligned} \arg\left[(11030.18 - \omega^2 + j39.875\omega)^{-1}\right] &= -\arctan\left[\frac{39.875\omega}{11030.18 - \omega^2}\right] \\ &= +\arctan\left[\frac{39.875\omega}{\omega^2 - 11030.18}\right] \pm \pi \end{aligned}$$

En la evaluación del  $\arg[H(\omega)]$ , en particular enfatizando en los ceros, se hace notar que para el argumento de un número real  $\alpha$  positivos ( $\alpha > 0$ ) se tiene

$$\arg[\alpha] = 0^\circ$$

Mientras que para un  $\alpha$  negativo ( $\alpha < 0$ ) se tiene

$$\arg[\alpha] = \arg[-|\alpha|] = \pm \pi \quad (\text{ó: } \pm 180^\circ)$$

Por ejemplo, el primer término del  $\arg[H(\omega)]$  para  $\omega^2 > 23875.87$  es

$$\arg[23875.87 - \omega^2] = \arg[-(\omega^2 - 23875.87)] = \pm \pi$$

De manera que cada término del  $\arg[H(\omega)]$  debe evaluarse de acuerdo con las observaciones anterior.

En la figura 6.6c se muestra el comportamiento de la función fase.

El retardo de grupo está dado por:

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) &= -\frac{d \arg[H(j\omega)]}{d\omega} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{39.875\omega}{11030.18 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(11030.18 - \omega^2)(39.875) - (39.875\omega)(-2\omega)}{(11030.18 - \omega^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{138.678\omega}{14040.5 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(14040.5 - \omega^2)(138.678) - (138.678\omega)(-2\omega)}{(14040.5 - \omega^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{260.546\omega}{19311.04 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(19311.04 - \omega^2)(260.546) - (260.546\omega)(-2\omega)}{(19311.04 - \omega^2)^2} \right] \\ \tau_g(\omega) &= \frac{(39.875)(11030.18 - \omega^2) + 2(39.875)\omega^2}{(11030.18 - \omega^2)^2 + (39.875\omega)^2} \\ &\quad + \frac{(138.678)(14040.5 - \omega^2) + 2(138.678)\omega^2}{(14040.5 - \omega^2)^2 + (138.678\omega)^2} \\ &\quad + \frac{(260.546)(19311.04 - \omega^2) + 2(260.546)\omega^2}{(19311.04 - \omega^2)^2 + (260.546\omega)^2} \end{aligned}$$

En la figura 6.7a se muestra el comportamiento de la función de retardo de grupo.

Finalmente, en la figura 6.7b se muestra una vista ampliada de la magnitud del rizo en la banda de rechazo. ■

Después de comparar las figuras de los ejemplos 5.5 y 6.1 se puede concluir que la característica del retardo de grupo del filtro Chebyshev del tipo II son generalmente mucho mejores que los filtros del tipo I, para las frecuencias en la banda de paso. Esto es debido a que los ceros de la función de transferencia del tipo II están en el eje  $j\omega$  en el plano  $s$ , por lo contrario, los ceros del diseño del tipo I están en el infinito.

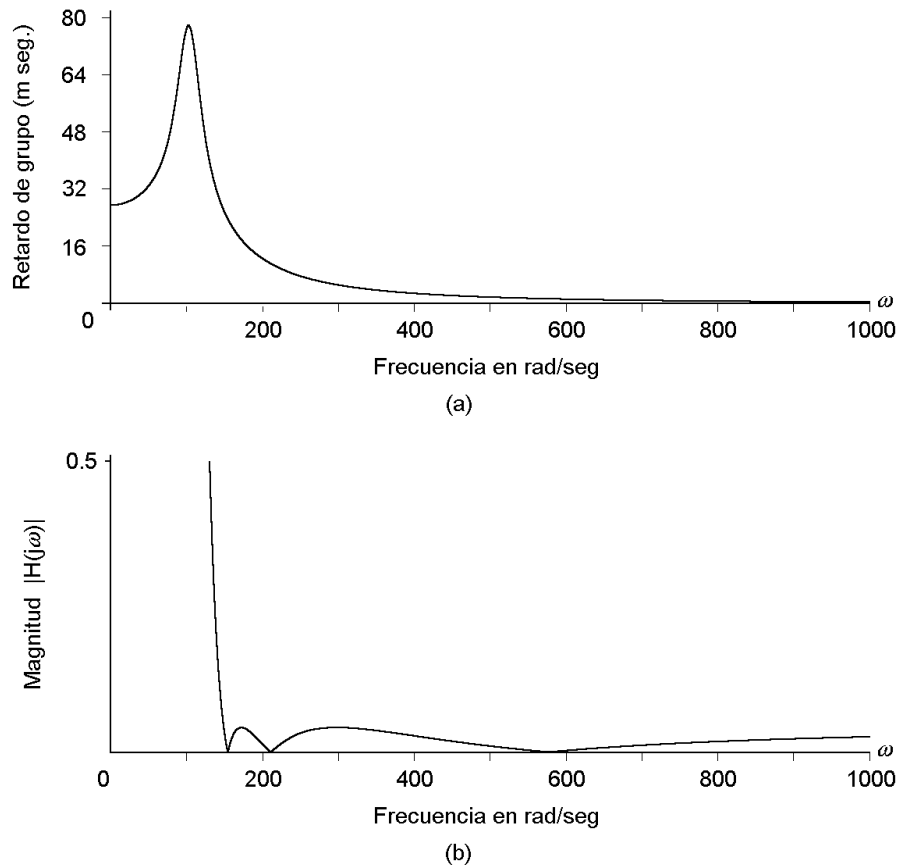
■ **Ejemplo 6.2** Diseñe un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo II con las siguientes especificaciones

- Máxima pérdida en la banda de paso  $\leq 2$  dB,
- Límite de la banda de paso: 1 rad/seg,
- Atenuación en la banda de rechazo:  $\geq 40$  dB
- Límite de la banda de rechazo: 1.37 rad/seg.

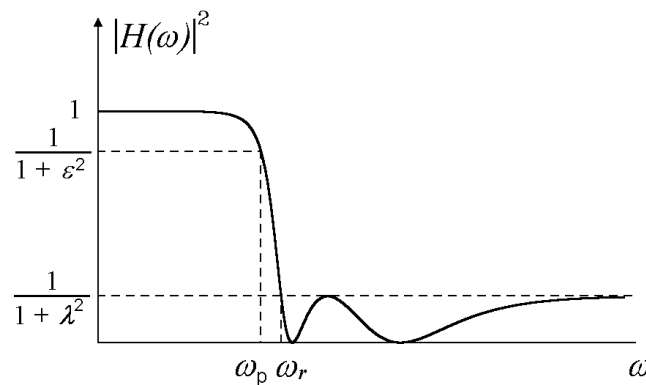
Determine: (a) El mínimo orden del filtro, (b) La función de transferencia, y (c) Las gráficas del comportamiento en frecuencia de la magnitud, la ganancia en dB y la fase, así como de la función de retardo de grupo.

*Solución:*

**Inciso (a)**



**Figura 6.7:** Resultados gráficos del ejemplo 6.1: (a) Retardo de grupo y (b) Vista ampliada de la magnitud



**Figura 6.8:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo II, para el ejemplo 6.2

De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo II solicitados en el ejemplo y apoyándose en la representación gráfica de la figura 6.8, se determina que

$$-2 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$10^{0.2} = 1 + \varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.2} - 1} = 0.76478$$

y 
$$-40 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^4 - 1} = 99.9950$$

El orden del filtro (vea la ecuación (6.17)), con  $\lambda = 99.995$ ,  $\varepsilon = 0.76478$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.37$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{99.995}{0.76478}\right)}{\cosh^{-1}(1.37)} = \frac{\cosh^{-1}(130.75)}{0.8357} = 6.661$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 7$ .

**Inciso (b)** Para determinar la función de transferencia primero se determina la ubicación de los polos y de los ceros. Se inicia con la ubicación de los polos. Para ello, se hace uso de las expresiones (6.55), (6.56), (6.57), (6.52), (6.53), (6.45) y (6.47), las cuales se reescriben a continuación.

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\text{con} \quad \sigma_k = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\Omega_k = \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\gamma_k = \text{sen} \eta_k \text{senh} v_k$$

$$\rho_k = \text{cos} \eta_k \text{cosh} v_k$$

$$\eta_k = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$$

$$v_k = \pm \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} [\varepsilon \cosh [N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)]]$$

Se determina el valor de  $v_k$ , con  $N = 7$ ,  $\varepsilon = 0.76478$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.37$ , esto es

$$v_k = \pm \frac{1}{7} \text{senh}^{-1} [(0.76478) \cosh [7 \cosh^{-1}(1.37)]]$$

$$v_k = \pm 0.797394$$

$$\text{senh} v_k = \text{senh}(0.797394) = 0.884624$$

$$\text{cosh} v_k = \text{cosh}(0.797394) = 1.335125$$

Algunos pasos en el cálculo de los polos se muestran en la tabla 6.4 y 6.5.

De la tabla 6.5 se obtiene la ubicación de los polos, considerando aquellos que se encuentran a la izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$s_1 = -0.1556 + j 1.0290$$

$$s_2 = -0.5421 + j 1.0260$$

$$s_3 = -1.1247 + j 0.8175$$

$$s_4 = -1.5487$$

$$s_5 = -1.1247 - j 0.8175$$

$$s_6 = -0.5421 - j 1.0260$$

$$s_7 = -0.1556 - j 1.0290$$

**Tabla 6.4:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.2, primera parte

$k$	$\eta_k$	$\cos\eta_k$	$\sen\eta_k$	$\gamma_k = \sen\eta_k \senh\nu_k$	$\rho_k = \cos\eta_k \cosh\nu_k$
1	$\pi/14$	0.97493	0.22252	0.19685	1.30166
2	$3\pi/14$	0.78183	0.62349	0.55155	1.04384
3	$5\pi/14$	0.43388	0.90097	0.79702	0.57929
4	$7\pi/14$	0	1	0.88462	0
5	$9\pi/14$	-0.43388	0.90097	0.79702	-0.57929
6	$11\pi/14$	-0.78183	0.62349	0.55155	-1.04384
7	$13\pi/14$	-0.97493	0.22252	0.19685	-1.30166
8	$15\pi/14$	-0.97493	-0.22252	-0.19685	-1.30166
9	$17\pi/14$	-0.78183	-0.62349	-0.55155	-1.04384
10	$19\pi/14$	-0.43388	-0.90097	-0.79702	-0.57929
11	$21\pi/14$	0	-1	-0.88462	0
12	$23\pi/14$	0.43388	-0.90097	-0.79702	0.57929
13	$25\pi/14$	0.78183	-0.62349	-0.55155	1.04384
14	$27\pi/14$	0.97493	-0.22252	-0.19685	1.30166

**Tabla 6.5:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.2, segunda parte

$k$	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	1.73307	0.11358	0.75107	-0.1556	1.0290
2	1.39381	0.39571	0.74891	-0.5421	1.0260
3	0.97082	0.82098	0.59670	-1.1247	0.8175
4	0.78255	1.13043	0	-1.5487	0
5	0.97082	0.82098	-0.59670	-1.1247	-0.8175
6	1.39381	0.39571	-0.74891	-0.5421	-1.0260
7	1.73307	0.11358	-0.75107	-0.1556	-1.0290
8	1.73307	-0.11358	-0.75107	0.1556	-1.0290
9	1.39381	-0.39571	-0.74891	0.5421	-1.0260
10	0.97082	-0.82098	-0.59670	1.1247	-0.8175
11	0.78255	-1.13043	0	1.5487	0
12	0.97082	-0.82098	0.59670	1.1247	0.8175
13	1.39381	-0.39571	0.74891	0.5421	1.0260
14	1.73307	-0.11358	0.75107	0.1556	1.0290

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la expresión (6.25), la cual se especifica a continuación.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

Algunos pasos en el cálculo de los ceros se muestran en la tabla 6.6.

De la tabla 6.6 se obtiene la ubicación de los ceros, los cuales se enumeran a continuación (con  $\omega_r = 1 \text{ rad/seg}$ ).

$$\begin{aligned} z_1 &= +j1.4052 \\ z_2 &= +j1.7523 \\ z_3 &= +j3.1576 \\ z_4 &= \text{Cero en el infinito} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_5 &= -j3.1576 \\ z_6 &= -j1.7523 \\ z_7 &= -j1.4052 \end{aligned}$$

**Tabla 6.6:** Cálculo de los ceros del ejemplo 6.2

$k$	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/14$	0.97493	1.4052
2	$3\pi/14$	0.78183	1.7523
3	$5\pi/14$	0.43388	3.1575
4	$7\pi/14$	0	En el infinito
5	$9\pi/14$	-0.43388	-3.1575
6	$11\pi/14$	-0.78183	-1.7523
7	$13\pi/14$	-0.97493	-1.4052
8	$15\pi/14$	-0.97493	-1.4052
9	$17\pi/14$	-0.78183	-1.7523
10	$19\pi/14$	-0.43388	-3.1575
11	$21\pi/14$	0	En el infinito
12	$23\pi/14$	0.43388	3.1575
13	$25\pi/14$	0.78183	1.7523
14	$27\pi/14$	0.97493	1.4052

De la distribución de los polos se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo  $s_1$  y su conjugado  $s_7$ , con  $\sigma_1 = -0.1556$  y  $\Omega_1 = 1.0290$ , se tiene

$$(s - s_1)(s - s_7) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(0.1556)s + (0.1556)^2 + (1.029)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_7) = s^2 + 0.3112s + 1.0830$$

Para el polo  $s_2$  y su conjugado  $s_6$ , con  $\sigma_2 = -0.5421$  y  $\Omega_2 = 1.0260$ , se tiene

$$(s - s_2)(s - s_6) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(0.5421)s + (0.5421)^2 + (1.026)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_6) = s^2 + 1.0842s + 1.3465$$

Para el polo  $s_3$  y su conjugado  $s_5$ , con  $\sigma_3 = -1.1247$  y  $\Omega_3 = 0.8175$ , se tiene

$$(s - s_3)(s - s_5) = (s - s_3)(s - s_3^*) = s^2 + 2(1.1247)s + (1.1247)^2 + (0.8175)^2$$

$$(s - s_3)(s - s_5) = s^2 + 2.2494s + 1.9333$$

De la distribución de los ceros se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\Omega_k)(s + j\Omega_k) = s^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \Omega_k^2$$

Para el cero  $z_1$  y su conjugado  $z_7$ , con  $\Omega_1 = 1.4052$ , se tiene

$$(s - z_1)(s - z_7) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (1.4052)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_7) = s^2 + 1.9746$$

Para el cero  $z_2$  y su conjugado  $z_6$ , con  $\Omega_2 = 1.7523$ , se tiene

$$(s - z_2)(s - z_6) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (1.7523)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_6) = s^2 + 3.0705$$

Para el cero  $z_3$  y su conjugado  $z_5$ , con  $\Omega_3 = 3.1575$ , se tiene

$$(s - z_3)(s - z_5) = (s - z_3)(s - z_3^*) = s^2 + (3.1575)^2$$

$$(s - z_3)(s - z_5) = s^2 + 9.9698$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 1.9746)(s^2 + 3.0705)(s^2 + 9.9698)}{(s^2 + 0.3112s + 1.083)(s^2 + 1.0842s + 1.3465)(s^2 + 2.2494s + 1.9333)(s + 1.5487)}$$

Se determina la constante de normalización  $K_0$  al evaluar la función de transferencia en  $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0 (1.9746 - \omega^2)(3.0705 - \omega^2)(9.9698 - \omega^2)}{(1.083 - \omega^2 + j0.3112\omega)(1.3465 - \omega^2 + j1.0842\omega)(1.9333 - \omega^2 + j2.2494\omega)(1.5487 + j\omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para  $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0 (1.9746)(3.0705)(9.9698)}{(1.083)(1.3465)(1.9333)(1.5487)} = K_0 (13.8444) = 1$$

$$K_0 = 0.07223$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{0.07223 (s^2 + 1.9746)(s^2 + 3.0705)(s^2 + 9.9698)}{(s^2 + 0.3112s + 1.083)(s^2 + 1.0842s + 1.3465)(s^2 + 2.2494s + 1.9333)(s + 1.5487)}$$

**Inciso (c)** Para construir las gráficas solicitadas se substituye a  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia  $H(s)$  obtenida en el inciso anterior, esto es

$$H(\omega) = \frac{0.07223 (1.9746 - \omega^2)(3.0705 - \omega^2)(9.9698 - \omega^2)}{(1.083 - \omega^2 + j0.3112\omega)(1.3465 - \omega^2 + j1.0842\omega)(1.9333 - \omega^2 + j2.2494\omega)(1.5487 + j\omega)}$$

La función magnitud en frecuencia está dada por

$$|H(\omega)| = \frac{0.07223 |1.9746 - \omega^2| |3.0705 - \omega^2| |9.9698 - \omega^2|}{\sqrt{(1.083 - \omega^2)^2 + (0.3112\omega)^2} \sqrt{(1.3465 - \omega^2)^2 + (1.0842\omega)^2} \sqrt{(1.9333 - \omega^2)^2 + (2.2494\omega)^2} \sqrt{(1.5487)^2 + (\omega)^2}}$$

En la figura 6.9a se muestra el comportamiento de la función magnitud en frecuencia. La evaluación de la ganancia en  $dB$  es

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log(0.07223) + 20 \log |1.9746 - \omega^2| \\ &\quad + 20 \log |3.0705 - \omega^2| + 20 \log |9.9698 - \omega^2| \\ &\quad - 10 \log [(1.083 - \omega^2)^2 + (0.3112\omega)^2] - 10 \log [(1.3465 - \omega^2)^2 + (1.0842\omega)^2] \\ &\quad - 10 \log [(1.9333 - \omega^2)^2 + (2.2494\omega)^2] - 10 \log [(1.5487)^2 + (\omega)^2] \end{aligned}$$

En la figura 6.9b se muestra el comportamiento de la ganancia en  $dB$ .

Para evaluar la fase, se requiere determinar el  $\arg[H(\omega)]$ , esto es

$$\begin{aligned} \arg[H(\omega)] &= \arg[1.9746 - \omega^2] + \arg[3.0705 - \omega^2] + \arg[9.9698 - \omega^2] \\ &\quad - \arctan \left[ \frac{0.3112\omega}{1.083 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{1.0842\omega}{1.3465 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{2.2494\omega}{1.9333 - \omega^2} \right] - \arctan \left[ \frac{\omega}{1.5487} \right] \end{aligned}$$

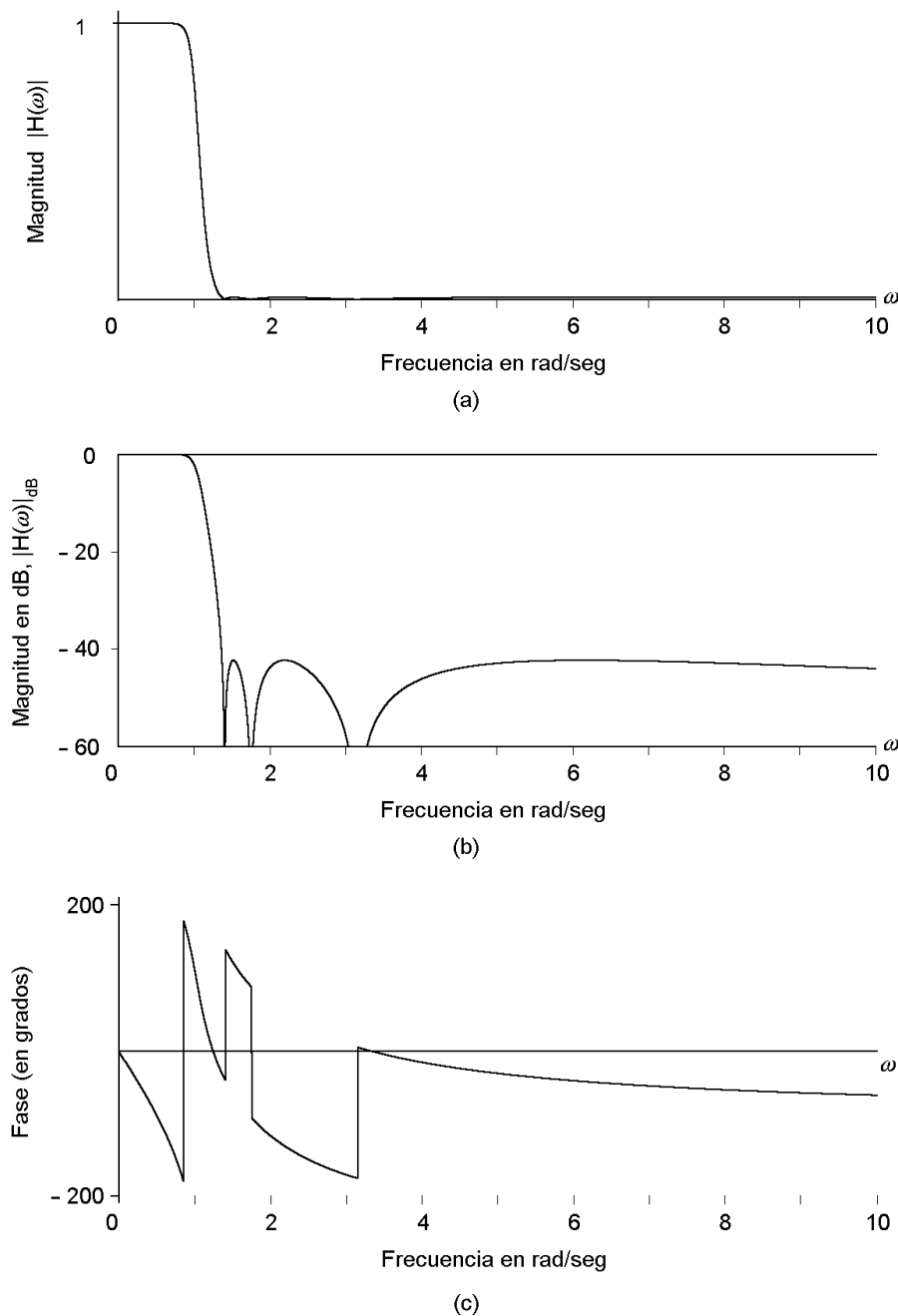
En la figura 6.9c se muestra el comportamiento de la función fase.

El retardo de grupo está dado por:

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) &= -\frac{d \arg[H(j\omega)]}{d\omega} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{0.3112\omega}{1.083 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(1.083 - \omega^2)(0.3112) - (0.3112\omega)(-2\omega)}{(1.083 - \omega^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{1.0842\omega}{1.3465 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(1.3465 - \omega^2)(1.0842) - (1.0842\omega)(-2\omega)}{(1.3465 - \omega^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{2.2494\omega}{1.9333 - \omega^2}\right)^2} \left[ \frac{(1.9333 - \omega^2)(2.2494) - (2.2494\omega)(-2\omega)}{(1.9333 - \omega^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{1.5487}\right)^2} \left[ \frac{1}{1.5487} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) &= \frac{(0.3112)(1.083 - \omega^2) + 2(0.3112)\omega^2}{(1.083 - \omega^2)^2 + (0.3112\omega)^2} \\ &\quad + \frac{(1.0842)(1.3465 - \omega^2) + 2(1.0842)\omega^2}{(1.3465 - \omega^2)^2 + (1.0842\omega)^2} \\ &\quad + \frac{(2.2494)(1.9333 - \omega^2) + 2(2.2494)\omega^2}{(1.9333 - \omega^2)^2 + (2.2494\omega)^2} + \frac{1.5487}{\omega^2 + (1.5487)^2} \end{aligned}$$

En la figura 6.10 se muestra el comportamiento de la función de retardo de grupo. ■



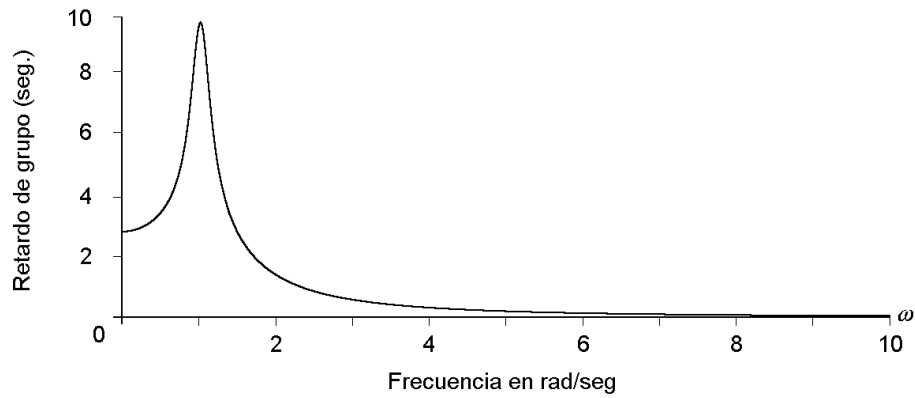
**Figura 6.9:** Resultados gráficos del ejemplo 6.2: (a) Magnitud de  $H(\omega)$ , (b) Ganancia en  $dB$  de  $H(\omega)$  y (c) Fase

■ **Ejemplo 6.3** Determine el orden del filtro y grafique en un diagrama de polos y ceros la ubicación de los polos y de los ceros de la función de transferencia,  $H(s)$ , para un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo II con las siguientes especificaciones:

- Máxima pérdida en la banda de paso de  $\leq 1$   $dB$ ,
- Límite de la banda de paso:  $1$   $rad/seg$ ,
- Atenuación en la banda de rechazo:  $\geq 80$   $dB$
- Límite de la banda de rechazo:  $1.18$   $rad/seg$ .

*Solución:*

De acuerdo con los datos del filtro Chebyshev del tipo II solicitados en el ejemplo y apoyán-



**Figura 6.10:** Gráfica del retardo de grupo para el filtro del ejemplo 6.2

dose en la representación gráfica de la figura 6.11, se determina que

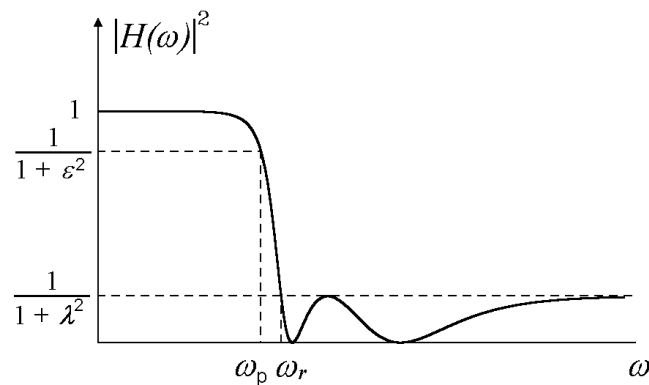
$$-1 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$0.1 = \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1} - 1} = 0.50885$$

y 
$$-80 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^8 - 1} = 9999.99995$$



**Figura 6.11:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo II, para el ejemplo 6.3

El orden del filtro (vea la ecuación (6.17)), con  $\lambda = 9999.99995$ ,  $\varepsilon = 0.50885$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.18$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{9999.99995}{0.50885}\right)}{\cosh^{-1}(1.18)} = \frac{\cosh^{-1}(19652.1567)}{0.59135} = 17.89$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 18$ . Se inicia con la obtención de los polos. Para ello, se hace uso de las expresiones (6.55), (6.56),

(6.57), (6.52), (6.53), (6.45) y (6.47), las cuales se reescriben a continuación.

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \text{con} \quad \sigma_k &= -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \\ \Omega_k &= \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \\ \gamma_k &= \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k \\ \rho_k &= \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k \\ \eta_k &= \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi \end{aligned}$$

$$v_k = \pm \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[ \varepsilon \cosh \left[ N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de  $v_k$ , con  $N = 18$ ,  $\varepsilon = 0.50885$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.18$ , esto es

$$v_k = \pm \frac{1}{18} \text{senh}^{-1} \left[ (0.50885) \cosh \left[ 18 \cosh^{-1}(1.18) \right] \right]$$

$$v_k = \pm 0.553813$$

$$\text{senh } v_k = \text{senh}(0.553813) = 0.582560$$

$$\text{cosh } v_k = \text{cosh}(0.553813) = 1.157314$$

Algunos pasos en el cálculo de los polos se muestran en las tablas 6.7, 6.8, 6.9 y 6.10.

**Tabla 6.7:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.3, primera parte

$k$	$\eta_k$	$\cos \eta_k$	$\text{sen } \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen} \eta_k \text{ senh } v_k$	$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$
1	$\pi/36$	0.99619	0.08716	0.05078	1.15290
2	$3\pi/36$	0.96593	0.25882	0.15078	1.11788
3	$5\pi/36$	0.90631	0.42262	0.24620	1.04888
4	$7\pi/36$	0.81915	0.57358	0.33414	0.94801
5	$9\pi/36$	0.70711	0.70711	0.41193	0.81835
6	$11\pi/36$	0.57358	0.81915	0.47720	0.66381
7	$13\pi/36$	0.42262	0.90631	0.52798	0.48910
8	$15\pi/36$	0.25882	0.96593	0.56271	0.29953
9	$17\pi/36$	0.08716	0.99619	0.58034	0.10087
10	$19\pi/36$	-0.08716	0.99619	0.58034	-0.10087
11	$21\pi/36$	-0.25882	0.96593	0.56271	-0.29953
12	$23\pi/36$	-0.42262	0.90631	0.52798	-0.48910
13	$25\pi/36$	-0.57358	0.81915	0.47720	-0.66381
14	$27\pi/36$	-0.70711	0.70711	0.41193	-0.81835
15	$29\pi/36$	-0.81915	0.57358	0.33414	-0.94801
16	$31\pi/36$	-0.90631	0.42262	0.24620	-1.04888
17	$33\pi/36$	-0.96593	0.25882	0.15078	-1.11788
18	$35\pi/36$	-0.99619	0.08716	0.05078	-1.15290
19	$37\pi/36$	-0.99619	-0.08716	-0.05078	-1.15290
20	$39\pi/36$	-0.96593	-0.25882	-0.15078	-1.11788

**Tabla 6.8:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.3, segunda parte

$k$	$\eta_k$	$\cos\eta_k$	$\operatorname{sen}\eta_k$	$\gamma_k = \operatorname{sen}\eta_k \operatorname{senh}v_k$	$\rho_k = \cos\eta_k \operatorname{cosh}v_k$
21	$41\pi/36$	-0.90631	-0.42262	-0.24620	-1.04888
22	$43\pi/36$	-0.81915	-0.57358	-0.33414	-0.94801
23	$45\pi/36$	-0.70711	-0.70711	-0.41193	-0.81835
24	$47\pi/36$	-0.57358	-0.81915	-0.47720	-0.66381
25	$49\pi/36$	-0.42262	-0.90631	-0.52798	-0.48910
26	$51\pi/36$	-0.25882	-0.96593	-0.56271	-0.29953
27	$53\pi/36$	-0.08716	-0.99619	-0.58034	-0.10087
28	$55\pi/36$	0.08716	-0.99619	-0.58034	0.10087
29	$57\pi/36$	0.25882	-0.96593	-0.56271	0.29953
30	$59\pi/36$	0.42262	-0.90631	-0.52798	0.48910
31	$61\pi/36$	0.57358	-0.81915	-0.47720	0.66381
32	$63\pi/36$	0.70711	-0.70711	-0.41193	0.81835
33	$65\pi/36$	0.81915	-0.57358	-0.33414	0.94801
34	$67\pi/36$	0.90631	-0.42262	-0.24620	1.04888
35	$69\pi/36$	0.96593	-0.25882	-0.15078	1.11788
36	$71\pi/36$	0.99619	-0.08716	-0.05078	1.15290

**Tabla 6.9:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.3, tercera parte

$k$	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	1.33176	0.03813	0.86570	-0.0450	1.0215
2	1.27239	0.11850	0.87857	-0.1398	1.0367
3	1.16076	0.21210	0.90361	-0.2503	1.0663
4	1.01037	0.33071	0.93828	-0.3902	1.1072
5	0.83938	0.49076	0.97495	-0.5791	1.1504
6	0.66836	0.71399	0.99319	-0.8425	1.1720
7	0.51798	1.01931	0.94424	-1.2028	1.1142
8	0.40636	1.38476	0.73711	-1.6340	0.8698
9	0.34697	1.67259	0.29072	-1.9737	0.3431
10	0.34697	1.67259	-0.29072	-1.9737	-0.3431
11	0.40636	1.38476	-0.73711	-1.6340	-0.8698
12	0.51798	1.01931	-0.94424	-1.2028	-1.1142
13	0.66836	0.71399	-0.99319	-0.8425	-1.1720
14	0.83938	0.49076	-0.97495	-0.5791	-1.1504
15	1.01037	0.33071	-0.93828	-0.3902	-1.1072
16	1.16076	0.21210	-0.90361	-0.2503	-1.0663
17	1.27239	0.11850	-0.87857	-0.1398	-1.0367
18	1.33176	0.03813	-0.86570	-0.0450	-1.0215
19	1.33176	-0.03813	-0.86570	0.0450	-1.0215
20	1.27239	-0.11850	-0.87857	0.1398	-1.0367
21	1.16076	-0.21210	-0.90361	0.2503	-1.0663
22	1.01037	-0.33071	-0.93828	0.3902	-1.1072
23	0.83938	-0.49076	-0.97495	0.5791	-1.1504
24	0.66836	-0.71399	-0.99319	0.8425	-1.1720

**Tabla 6.10:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.3, cuarta parte

$k$	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
25	0.51798	-1.01931	-0.94424	1.2028	-1.1142
26	0.40636	-1.38476	-0.73711	1.6340	-0.8698
27	0.34697	-1.67259	-0.29072	1.9737	-0.3431
28	0.34697	-1.67259	0.29072	1.9737	0.3431
29	0.40636	-1.38476	0.73711	1.6340	0.8698
30	0.51798	-1.01931	0.94424	1.2028	1.1142
31	0.66836	-0.71399	0.99319	0.8425	1.1720
32	0.83938	-0.49076	0.97495	0.5791	1.1504
33	1.01037	-0.33071	0.93828	0.3902	1.1072
34	1.16076	-0.21210	0.90361	0.2503	1.0663
35	1.27239	-0.11850	0.87857	0.1398	1.0367
36	1.33176	-0.03813	0.86570	0.0450	1.0215

De las tablas 6.9 y 6.10 se obtiene la ubicación de los polos de la función de transferencia, los cuales se enumeran a continuación.

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -0.0450 + j 1.0215 & s_{18} &= -0.0450 - j 1.0215 \\
 s_2 &= -0.1398 + j 1.0367 & s_{17} &= -0.1398 - j 1.0367 \\
 s_3 &= -0.2503 + j 1.0663 & s_{16} &= -0.2503 - j 1.0663 \\
 s_4 &= -0.3902 + j 1.1072 & s_{15} &= -0.3902 - j 1.1072 \\
 s_5 &= -0.5791 + j 1.1504 & s_{14} &= -0.5791 - j 1.1504 \\
 s_6 &= -0.8425 + j 1.1720 & s_{13} &= -0.8425 - j 1.1720 \\
 s_7 &= -1.2028 + j 1.1142 & s_{12} &= -1.2028 - j 1.1142 \\
 s_8 &= -1.6340 + j 0.8698 & s_{11} &= -1.6340 - j 0.8698 \\
 s_9 &= -1.9737 + j 0.3431 & s_{10} &= -1.9737 - j 0.3431
 \end{aligned}$$

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la expresión (6.25), la cual se especifica a continuación.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

Algunos pasos en el cálculo de los ceros se muestra en la tabla 6.11.

De la tabla 6.11 se obtiene la ubicación de los ceros de la función de transferencia, los cuales se enumeran a continuación.

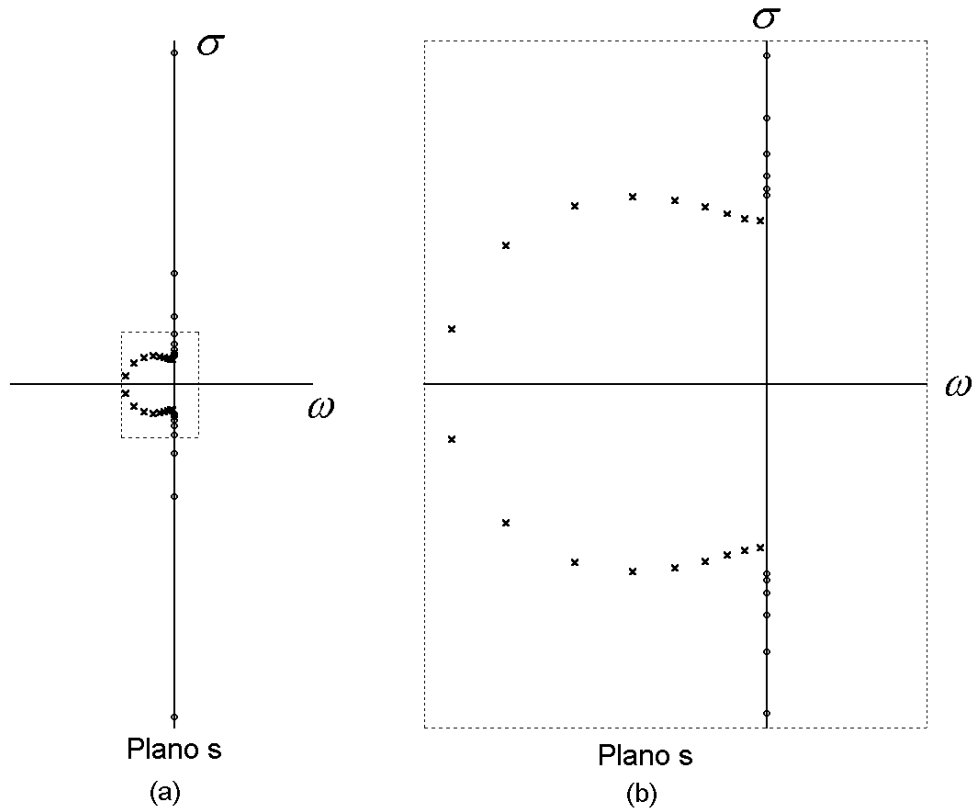
$$\begin{aligned}
 z_1 &= j 1.1845 & z_{18} &= -j 1.1845 \\
 z_2 &= j 1.2216 & z_{17} &= -j 1.2216 \\
 z_3 &= j 1.3020 & z_{16} &= -j 1.3020 \\
 z_4 &= j 1.4405 & z_{15} &= -j 1.4405 \\
 z_5 &= j 1.6688 & z_{14} &= -j 1.6688 \\
 z_6 &= j 2.0573 & z_{13} &= -j 2.0573 \\
 z_7 &= j 2.7921 & z_{12} &= -j 2.7921 \\
 z_8 &= j 4.5592 & z_{11} &= -j 4.5592 \\
 z_9 &= j 13.5383 & z_{10} &= -j 13.5383
 \end{aligned}$$

En la figura 6.12 se muestra la ubicación de los polos y de los ceros en un diagrama de polos y ceros.



**Tabla 6.11:** Cálculo de los ceros del ejemplo 6.3

$k$	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/36$	0.99619	1.1845
2	$3\pi/36$	0.96593	1.2216
3	$5\pi/36$	0.90631	1.3020
4	$7\pi/36$	0.81915	1.4405
5	$9\pi/36$	0.70711	1.6688
6	$11\pi/36$	0.57358	2.0573
7	$13\pi/36$	0.42262	2.7921
8	$15\pi/36$	0.25882	4.5592
9	$17\pi/36$	0.08716	13.5383
10	$19\pi/36$	-0.08716	-13.5383
11	$21\pi/36$	-0.25882	-4.5592
12	$23\pi/36$	-0.42262	-2.7921
13	$25\pi/36$	-0.57358	-2.0573
14	$27\pi/36$	-0.70711	-1.6688
15	$29\pi/36$	-0.81915	-1.4405
16	$31\pi/36$	-0.90631	-1.3020
17	$33\pi/36$	-0.96593	-1.2216
18	$35\pi/36$	-0.99619	-1.1845
19	$37\pi/36$	-0.99619	-1.1845
20	$39\pi/36$	-0.96593	-1.2216
21	$41\pi/36$	-0.90631	-1.3020
22	$43\pi/36$	-0.81915	-1.4405
23	$45\pi/36$	-0.70711	-1.6688
24	$47\pi/36$	-0.57358	-2.0573
25	$49\pi/36$	-0.42262	-2.7921
26	$51\pi/36$	-0.25882	-4.5592
27	$53\pi/36$	-0.08716	-13.5383
28	$55\pi/36$	0.08716	13.5383
29	$57\pi/36$	0.25882	4.5592
30	$59\pi/36$	0.42262	2.7921
31	$61\pi/36$	0.57358	2.0573
32	$63\pi/36$	0.70711	1.6688
33	$65\pi/36$	0.81915	1.4405
34	$67\pi/36$	0.90631	1.3020
35	$69\pi/36$	0.96593	1.2216
36	$71\pi/36$	0.99619	1.1845



**Figura 6.12:** Resultados gráficos del ejemplo 6.3: (a) Distribución de los polos y los ceros. (b) Amplificación del recuadro

■ **Ejemplo 6.4** Implemente un filtro pasa bajas digital basado en la aproximación Chebyshev del tipo II, utilizado en un sistema que digitaliza las señales analógicas presentes en su entrada a una frecuencia de muestreo  $f_m = 8$  kHz. Las características del filtro digital son

- Máxima pérdida en la banda de paso de  $\leq 1.5$  dB,
- Límite de la banda de paso del filtro digital: 800 Hz,
- Atenuación en la banda de rechazo:  $\geq 30$  dB
- Límite de la banda de rechazo del filtro digital: 1.4 kHz.

Utilice la transformación bilineal para obtener el filtro digital a partir de la función de transferencia de un filtro analógico con la aproximación Chebyshev del tipo II.

Determine:

- a) La frecuencia de paso,  $\Omega_p$ , y de rechazo,  $\Omega_r$ , del filtro analógico de acuerdo con las especificaciones dadas al filtro digital (utilizando la transformación bilineal),
- b) El orden del filtro analógico,
- c) La ubicación de los polos y los ceros del filtro analógico,
- d) La función de transferencia del filtro analógico pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II,
- e) La función de transferencia del filtro digital pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II (aplicando la transformación bilineal) y
- f) La arquitectura del filtro digital utilizando la forma directa II, implementada mediante una estructura en cascada con funciones de transferencia a los más de segundo orden.

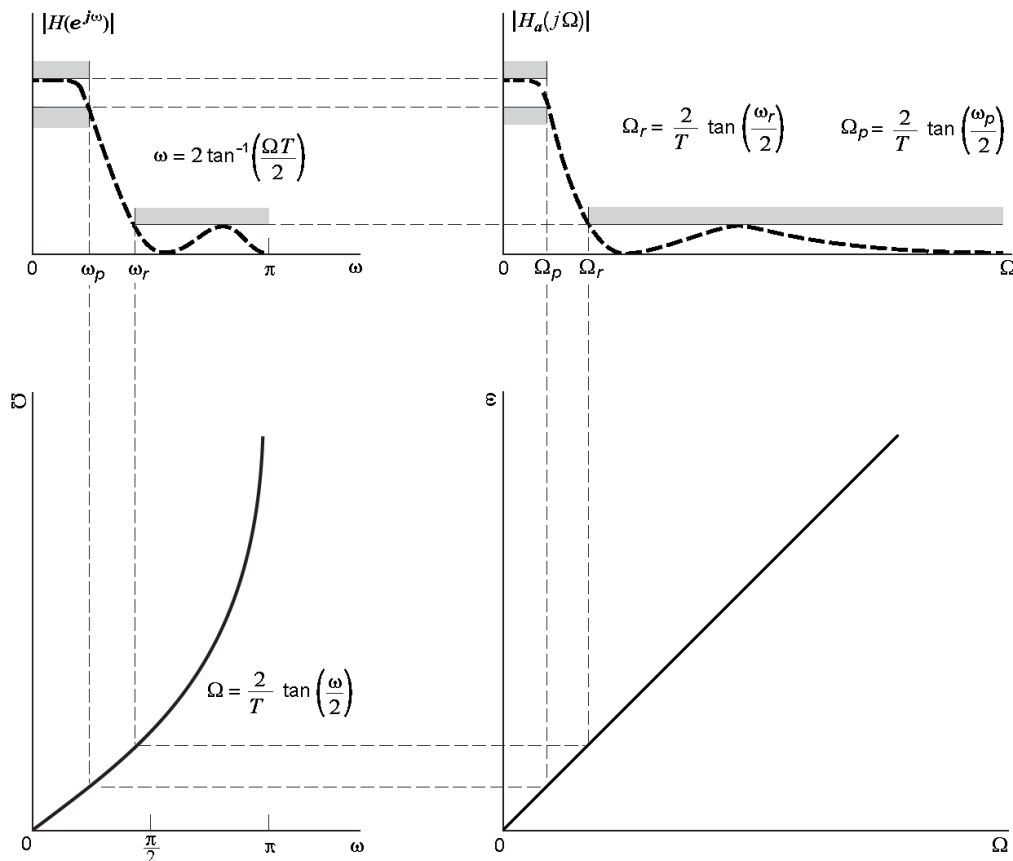
*Solución:*

**Inciso (a)** Considerando el trabajo exhaustivo que se ha desarrollado para las teorías de aproximación en frecuencia en el diseño de los filtros analógicos y lo sencillo que es convertir las especificaciones de frecuencia de un filtro analógico a las correspondiente especificaciones de

frecuencia de un filtro digital, la función de transferencia del filtro digital solicitado se obtiene a partir de la función de transferencia del filtro analógico al aplicarle una transformación, en nuestro caso la transformación bilineal.

La frecuencia de paso ( $\Omega_p$ ) y de rechazo ( $\Omega_r$ ) solicitada en la enunciación del problema son parámetros de las características en frecuencia de un filtro analógico, la determinación de sus valores permitirá, junto con otros parámetros, obtener la función de transferencia de dicho filtro. Es importante enfatizar que estas frecuencias,  $\Omega_p$  y  $\Omega_r$ , deben tener una correspondencia con sus equivalentes en el filtro digital.

Para obtener las frecuencias  $\Omega_p$  y  $\Omega_r$  se utiliza la expresión (6.58) correspondiente a la transformación bilineal, cuya relación se muestra en la figura 6.13.



**Figura 6.13:** Proceso de mapeo utilizando la transformación bilineal

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (6.58)$$

La figura 6.13 muestra que para una característica en frecuencia de un filtro digital, se puede construir gráficamente la característica en frecuencia de un filtro analógico y viceversa. En la parte superior derecha de la figura se presenta la respuesta en frecuencia del filtro analógico. En la parte superior izquierda la respuesta en frecuencia del filtro digital normalizada en frecuencia ( $\omega_m = 2\pi f_m$ , donde  $f_m = 1/T$  Hz, con  $T = 1$  seg.) con escala de 0 a  $\pi$  rad/seg ( $\omega_m/2 = \pi$ ). Mientras que en la parte inferior izquierda se ilustra el efecto de la transformación bilineal.

Antes de obtener los valores numéricos de las frecuencia  $\Omega_p$  y  $\Omega_r$ , conviene escalar el valor de la frecuencia de paso y de rechazo del filtro digital, indicadas en la enunciación del problema, de manera que estos se ajusten a la escala indicada en la imagen de la parte superior izquierda de la figura 6.13, es decir, se considera la frecuencia normalizada ( $\omega_m/2 = \pi$ ). Esto es, la frecuencia  $\omega_m/2 = 2\pi(4000)$  tendrá el valor escalado a  $\omega_m/2 = \pi$ ,  $\omega'_p = 2\pi(800)$  el valor escalado a  $\omega_p = 0.2\pi$  y  $\omega'_r = 2\pi(1400)$  el valor escalado  $\omega_r = 0.35\pi$ .

Las frecuencias solicitadas son

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) = \frac{0.64984}{T} \quad (6.59)$$

$$\Omega_r = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{0.35\pi}{2}\right) = \frac{1.22560}{T} \quad (6.60)$$

Si se considera a  $1/T = 8000$  entonces

$$\Omega_p = (0.64984)(8000) = 5198.72 \quad (6.61)$$

$$\Omega_r = (1.22560)(8000) = 9804.80 \quad (6.62)$$

**Inciso (b)** De acuerdo con los datos del filtro pasa bajas utilizando la aproximación Chebyshev del tipo II y apoyándose en la representación gráfica de la figura 6.14, se determina que

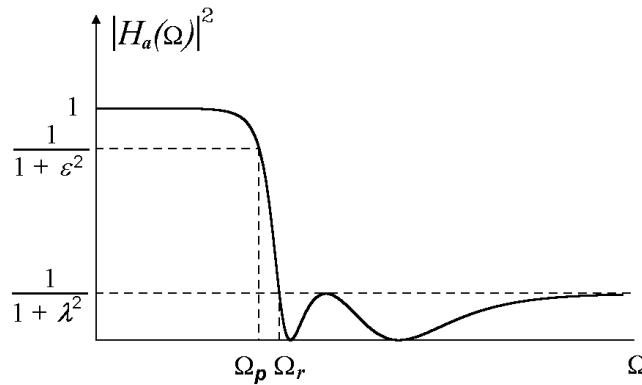
$$-1.5 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^{15})$$

$$10^{0.15} = 1 + \varepsilon^2$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.15} - 1} = 0.6423$$

y 
$$-30 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^3 - 1} = 31.6070$$



**Figura 6.14:** Magnitud en potencia del filtro Chebyshev del tipo II, para el ejemplo 6.4

El orden del filtro (vea la ecuación (6.17)), con  $\lambda = 31.6070$ ,  $\varepsilon = 0.6423$  y  $\Omega_r/\Omega_p = 1.8860$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{31.6070}{0.6423}\right)}{\cosh^{-1}(1.8860)} = \frac{\cosh^{-1}(49.209)}{1.2485} = 3.676$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 4$ .

**Inciso (c)** Se inicia con la obtención de los polos. Para ello, se hace uso de las expresiones (6.55), (6.56), (6.57), (6.52), (6.53), (6.45) y (6.47), las cuales se reescriben a continuación (Por conveniencia se cambió  $\Omega_k$  por  $\vartheta_k$  en (6.55)).

$$s_k = \sigma_k + j\vartheta_k$$

con

$$\sigma_k = -\frac{\Omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\vartheta_k = \frac{\Omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\gamma_k = \text{sen} \eta_k \text{senh} v_k$$

$$\rho_k = \text{cos} \eta_k \text{cosh} v_k$$

$$\eta_k = \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$v_k = \pm \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[ \varepsilon \text{cosh} \left[ N \text{cosh}^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de  $v_k$ , con  $N = 4$ ,  $\varepsilon = 0.6423$  y  $\omega_r/\omega_p = 1.8860$ , esto es

$$v_k = \pm \frac{1}{4} \text{senh}^{-1} \left[ (0.6423) \text{cosh} \left[ 4 \text{cosh}^{-1}(1.8860) \right] \right]$$

$$v_k = \pm 1.13785$$

$$\text{senh} v_k = \text{senh}(1.13785) = 1.39977$$

$$\text{cosh} v_k = \text{cosh}(1.13785) = 1.72028$$

Algunos pasos en el cálculo de los polos se muestra en la tabla 6.12 y 6.13.

**Tabla 6.12:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.4, primera parte

$k$	$\eta_k$	$\text{cos} \eta_k$	$\text{sen} \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen} \eta_k \text{senh} v_k$	$\rho_k = \text{cos} \eta_k \text{cosh} v_k$
1	$\pi/8$	0.92388	0.38268	0.53566	1.58933
2	$3\pi/8$	0.38268	0.92388	1.29322	0.65832
3	$5\pi/8$	-0.38268	0.92388	1.29322	-0.65832
4	$7\pi/8$	-0.92388	0.38268	0.53566	-1.58933
5	$7\pi/8$	-0.92388	-0.38268	-0.53566	-1.58933
6	$5\pi/8$	-0.38268	-0.92388	-1.29322	-0.65832
7	$3\pi/8$	0.38268	-0.92388	-1.29322	0.65832
8	$\pi/8$	0.92388	-0.38268	-0.53566	1.58933

**Tabla 6.13:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.4, segunda parte

$k$	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left( \frac{\Omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \right)$	$\frac{\Omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	2.81290	0.19043	0.56501	-1867.1281	5539.8100
2	2.10580	0.61412	0.31262	-6021.3238	3065.1766
3	2.10580	0.61412	-0.31262	-6021.3238	-3065.1766
4	2.81290	0.19043	-0.56501	-1867.1281	-5539.8100
5	2.81290	-0.19043	-0.56501	1867.1281	-5539.8100
6	2.10580	-0.61412	-0.31262	6021.3238	-3065.1766
7	2.10580	-0.61412	0.31262	6021.3238	3065.1766
8	2.81290	-0.19043	0.56501	1867.1281	5539.8100

De la tabla 6.13 se obtiene la ubicación de los polos, considerando aquellos que se encuentran a la izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a

continuación.

$$s_1 = -1867.1281 + j5539.8100$$

$$s_2 = -6021.3238 + j3065.1766$$

$$s_3 = -6021.3238 - j3065.1766$$

$$s_4 = -1867.1281 - j5539.8100$$

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la expresión (6.25), la cual se especifica a continuación.

$$z_k = \frac{j\Omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)}$$

Algunos pasos en el cálculo de los ceros se muestran en la tabla 6.14.

**Tabla 6.14:** Cálculo de los ceros del ejemplo 6.4

$k$	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\Omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/8$	0.92388	10612.6337
2	$3\pi/8$	0.38268	25621.4069
3	$5\pi/8$	-0.38268	-25621.4069
4	$7\pi/8$	-0.92388	-10612.6337
5	$7\pi/8$	-0.92388	-10612.6337
6	$5\pi/8$	-0.38268	-25621.4069
7	$3\pi/8$	0.38268	25621.4069
8	$\pi/8$	0.92388	10612.6337

De la tabla 6.14 se obtiene la ubicación de los ceros, los cuales se enumeran a continuación.

$$z_1 = +j10612.6337$$

$$z_2 = +j25621.4069$$

$$z_3 = -j25621.4069$$

$$z_4 = -j10612.6337$$

**Inciso (d)** La función de transferencia del filtro analógico pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II se determina a partir de los polos y los ceros obtenidos en el inciso (c).

Utilizando la información de la tabla 6.13 indicando la ubicación de los polos, se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\vartheta_k)(s - \sigma_k + j\vartheta_k) = (s - \sigma_k)^2 + \vartheta_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \vartheta_k^2$$

Para el polo  $s_1$  y su conjugado  $s_4$ , con  $\sigma_1 = -1867.1281$  y  $\vartheta_1 = 5539.8100$ , se tiene

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(1867.1281)s + (1867.1281)^2 + (5539.81)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 3734.2562s + 34175662.18$$

Para el polo  $s_2$  y su conjugado  $s_3$ , con  $\sigma_2 = -6021.3238$  y  $\vartheta_2 = 3065.1766$ , se tiene

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(6021.3238)s + (6021.3238)^2 + (3065.1766)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 12042.6476s + 45651647.89$$

Utilizando la información de la tabla 6.14 indicando la ubicación de los ceros, se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\vartheta_k)(s + j\vartheta_k) = s^2 + \vartheta_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \vartheta_k^2$$

Para el cero  $z_1$  y su conjugado  $z_4$ , con  $\vartheta_1 = 10612.6337$ , se tiene

$$(s - z_1)(s - z_4) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (10612.6337)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_4) = s^2 + 112627994.1$$

Para el cero  $z_2$  y su conjugado  $z_3$ , con  $\vartheta_2 = 25621.4069$ , se tiene

$$(s - z_2)(s - z_3) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (25621.4069)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_3) = s^2 + 656456491.5$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 112627994.1)(s^2 + 656456491.5)}{(s^2 + 3734.2562s + 34175662.18)(s^2 + 12042.6476s + 45651647.89)}$$

Se determina la constante de normalización  $K_0$  al evaluar la función de transferencia en  $s = j\Omega$

$$H(\Omega) = H(s) \Big|_{s=j\Omega}$$

$$H(\Omega) = \frac{K_0 (112627994.1 - \Omega^2)(656456491.5 - \Omega^2)}{(34175662.18 - \Omega^2 + j3734.2562\Omega)(45651647.89 - \Omega^2 + j12042.6476\Omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para  $\Omega = 0$

$$|H(\Omega)| \Big|_{\Omega=0} = \frac{K_0 (112627994.1)(656456491.5)}{(34175662.18)(45651647.89)} = K_0 (47.38915) = 1$$

$$K_0 = 0.0211$$

La función de transferencia solicitada para el filtro analógico es

$$H(s) = \frac{0.0211 (s^2 + 112627994.1)(s^2 + 656456491.5)}{(s^2 + 3734.2562s + 34175662.18)(s^2 + 12042.6476s + 45651647.89)}$$

o como

$$H(s) = \left( \frac{0.0211 (s^2 + 112627994.1)}{s^2 + 3734.2562s + 34175662.18} \right) \left( \frac{s^2 + 656456491.5}{s^2 + 12042.6476s + 45651647.89} \right) \quad (6.63)$$

Otra forma de expresar la función de transferencia del filtro analógico es en función de  $T$ . Esto es, se multiplica cada coeficiente en (6.63) por (6.64), como se muestra a continuación.

$$\frac{T}{T} = \frac{1}{8000T} \quad \text{o} \quad \left( \frac{T}{T} \right)^2 = \frac{1}{(8000)^2 T^2} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned}
H(s) &= \left( \frac{0.0211 \left( s^2 + 112627994.1 \left( \frac{T}{T} \right)^2 \right)}{s^2 + 3734.2562 \left( \frac{T}{T} \right) s + 34175662.18 \left( \frac{T}{T} \right)^2} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{s^2 + 656456491.5 \left( \frac{T}{T} \right)^2}{s^2 + 12042.6476 \left( \frac{T}{T} \right) s + 45651647.89 \left( \frac{T}{T} \right)^2} \right) \\
H(s) &= \left( \frac{0.0211 \left( s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1.75981}{4} \right) \right)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) \left( \frac{0.46678}{2} \right) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{0.53399}{4} \right)} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{10.25713}{4} \right)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) \left( \frac{1.50533}{2} \right) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{0.71331}{4} \right)} \right) \\
H(s) &= \left( \frac{0.0211 \left( s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.4399) \right)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) (0.2334) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1335)} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (2.5643)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) (0.7527) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1783)} \right) \quad (6.65)
\end{aligned}$$

**Inciso (e)** La función de transferencia del filtro digital pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II se obtiene al aplicar la transformación bilineal a (6.65).

La transformación bilineal es una transformación algebraica entre el plano  $s$  y  $z$  que transforma el eje  $j\Omega$  del plano  $s$  al círculo unitario del plano  $z$ . Esta se realiza al sustituir (6.66) en la función de transferencia del diseño del filtro analógico, obteniendo así la función de transferencia del diseño del filtro digital.

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (6.66)$$

Esto es, al sustituir (6.66) en (6.65) se obtiene

$$\begin{aligned}
H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} &= \left[ \left( \frac{0.0211 \left( s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.4399) \right)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) (0.2334) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1335)} \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left( \frac{s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (2.5643)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) (0.7527) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1783)} \right) \right]_{s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
H(z) &= \left( \frac{0.0211 \left( \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.4399) \right)}{\left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + (0.2334) \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1335)} \right) \left( \left( \frac{T}{2} \right)^2 \right) \\
&\quad \times \left( \frac{\left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (2.5643)}{\left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + (0.7527) \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1783)} \right) \left( \left( \frac{T}{2} \right)^2 \right) \\
H(z) &= \left( \frac{0.0211 \left( \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + 0.4399 \right)}{\left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + (0.2334) \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + 0.1335} \right) \left( \frac{(1+z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{\left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + 2.5643}{\left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + (0.7527) \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + 0.1783} \right) \left( \frac{(1+z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} \right) \\
H(z) &= \left( \frac{0.0211 \left( (1-z^{-1})^2 + (0.4399) (1+z^{-1})^2 \right)}{(1-z^{-1})^2 + (0.2334) (1-z^{-1})(1+z^{-1}) + (0.1335) (1+z^{-1})^2} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{(1-z^{-1})^2 + (2.5643) (1+z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + (0.7527) (1-z^{-1})(1+z^{-1}) + (0.1783) (1+z^{-1})^2} \right)
\end{aligned}$$

La función de transferencia solicitada para el filtro digital es

$$\begin{aligned}
H(z) &= 0.0211 \left( \frac{(1.4399 - 1.1202 z^{-1} + 1.4399 z^{-2})}{(1.3669 - 1.7330 z^{-1} + 0.9001 z^{-2})} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{(3.5643 + 3.1286 z^{-1} + 3.5643 z^{-2})}{(1.9310 - 1.6434 z^{-1} + 0.4256 z^{-2})} \right)
\end{aligned}$$

$$H(z) = 0.041 \left( \frac{1 - 0.7780 z^{-1} + 1 z^{-2}}{1 - 1.2678 z^{-1} + 0.6585 z^{-2}} \right) \left( \frac{1 + 0.8778 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.8511 z^{-1} + 0.2204 z^{-2}} \right) \quad (6.67)$$

Del análisis anterior se infiere que los coeficientes del polinomio numerador y denominador de la función de transferencia del filtro digital se pueden obtener suponiendo a  $T = 1 \text{ rad/seg}$ .

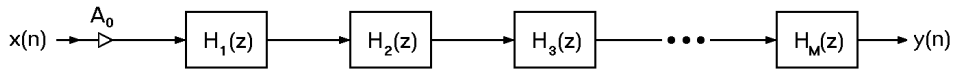
**Inciso (f)** La arquitectura del filtro digital pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II se obtiene de la expresión (6.67). Ésta se implementa utilizando la forma directa II, mediante una estructura en cascada con funciones de transferencia a los más de segundo orden.

La expresión (5.67) se puede representar como una concatenación de funciones de transferencia a lo más de segundo orden, vea la figura 6.15, como se muestra a continuación.

$$H(z) = A_0 H_1(z) H_2(z)$$

donde

$$A_0 = 0.041 \quad , \quad H_1(z) = \frac{1 - 0.7780 z^{-1} + 1 z^{-2}}{1 - 1.2678 z^{-1} + 0.6585 z^{-2}}$$

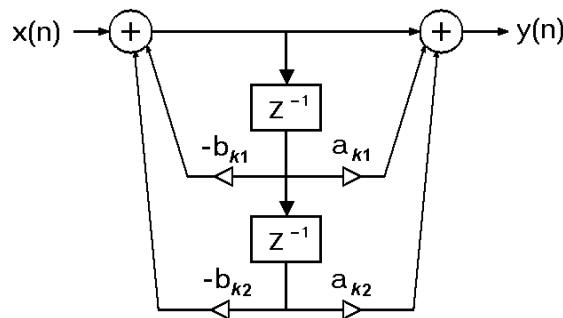


**Figura 6.15:** Representación de la arquitectura del filtro en cascada

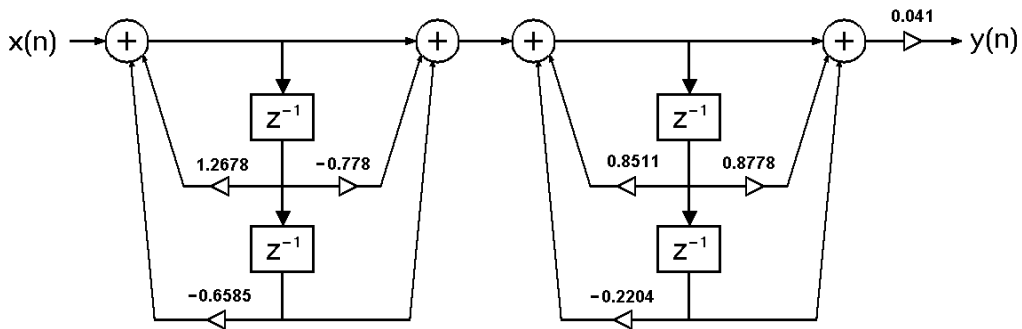
$$H_2(z) = \frac{1 + 0.8778z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.8511z^{-1} + 0.2204z^{-2}}$$

Cada función de transferencia de la forma (6.68) tiene una estructura como la mostrada en la figura 6.16.

$$H_k(z) = \frac{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}}{1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}} \tag{6.68}$$



**Figura 6.16:** Arquitectura de un filtro digital de segundo orden dado por (6.68).



**Figura 6.17:** Arquitectura del filtro digital pasa bajas del ejemplo 6.4

Utilizando como referencia a (6.68) y a la figura 6.16, el filtro digital pasa bajas expresado como en (6.67) tiene la arquitectura mostrada en la figura 6.17.

■ **Ejemplo 6.5** Implemente un filtro pasa bajas digital basado en la aproximación Chebyshev del tipo II, utilizado en un sistema que digitaliza las señales analógicas presentes en su entrada a una frecuencia de muestreo  $f_m = 8$  kHz. Las características del filtro digital son

- Máxima pérdida en la banda de paso de  $\leq 2$  dB,
- Límite de la banda de paso del filtro digital: 800 Hz,
- Atenuación en la banda de rechazo:  $\geq 35$  dB
- Límite de la banda de rechazo del filtro digital: 2 kHz.

Utilice la transformación bilineal para obtener el filtro digital a partir del función de transferencia de un filtro analógico con la aproximación Chebyshev del tipo II.

Determine:

- La frecuencia de paso,  $\Omega_p$ , y de rechazo,  $\Omega_r$ , del filtro analógico de acuerdo con las especificaciones dadas al filtro digital (utilizando la transformación bilineal),
- El orden del filtro analógico,
- La ubicación de los polos y los ceros del filtro analógico,
- La función de transferencia del filtro analógico pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II,
- La función de transferencia del filtro digital pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II (aplicando la transformación bilineal) y
- La arquitectura del filtro digital utilizando la forma directa I, implementada mediante una estructura en paralelo con funciones de transferencia a los más de segundo orden.

*Solución:*

**Inciso (a)** Considerando el trabajo exhaustivo que se ha desarrollado para las teorías de aproximación en frecuencia en el diseño de los filtros analógicos y lo sencillo que es convertir las especificaciones de frecuencia de un filtro analógico a las correspondiente especificaciones de frecuencia de un filtro digital, la función de transferencia del filtro digital solicitado se obtiene a partir de la función de transferencia del filtro analógico al aplicarle una transformación, en nuestro caso la transformación bilineal.

La frecuencia de paso ( $\Omega_p$ ) y de rechazo ( $\Omega_r$ ) solicitada en la enunciación del problema son parámetros de las características en frecuencia de un filtro analógico, la determinación de sus valores permitirá, junto con otros parámetros, obtener la función de transferencia de dicho filtro. Es importante enfatizar que estas frecuencias,  $\Omega_p$  y  $\Omega_r$ , deben tener una correspondencia con sus equivalentes en el filtro digital.

Para obtener las frecuencias  $\Omega_p$  y  $\Omega_r$  se utiliza la expresión (6.58) correspondiente a la transformación bilineal, cuya relación se muestra en la figura 6.13.

Antes de obtener los valores numéricos de las frecuencia  $\Omega_p$  y  $\Omega_r$ , conviene escalar el valor de la frecuencia de paso y de rechazo del filtro digital, indicadas en la enunciación del problema, de manera que estos se ajusten a la escala indicada en la imagen de la parte superior izquierda de la figura 6.13, es decir, se considera la frecuencia normalizada ( $\omega_m/2 = \pi$ ). Esto es, la frecuencia  $\omega_m/2 = 2\pi(4000)$  tendrá el valor escalado a  $\omega_m/2 = \pi$ ,  $\omega'_p = 2\pi(800)$  escalado a  $\omega_p = 0.2\pi$  y  $\omega'_r = 2\pi(2000)$  escalado a  $\omega_r = 0.5\pi$ . Las frecuencias solicitadas son

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) = \frac{0.64984}{T}$$

$$\Omega_r = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{0.5\pi}{2}\right) = \frac{2}{T}$$

Si se considera a  $1/T = 8000$  entonces

$$\Omega_p = (0.64984)(8000) = 5198.72$$

$$\Omega_r = (2)(8000) = 16000$$

**Inciso (b)** De acuerdo con los datos del filtro pasa bajas utilizando la aproximación Chebyshev del tipo II y apoyándose en la representación gráfica de la figura 6.14, se determina que

$$-2 \text{ dB} = -10 \log(1 + \varepsilon^{15})$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.2} - 1} = 0.7648$$

$$y \quad -35 \text{ dB} = -10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^{3.5} - 1} = 56.2252$$

El orden del filtro (vea la ecuación (6.17)), con  $\lambda = 56.2252$ ,  $\varepsilon = 0.7648$  y  $\Omega_r/\Omega_p = 3.0777$ , es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{56.2252}{0.7648}\right)}{\cosh^{-1}(3.0777)} = \frac{\cosh^{-1}(73.516)}{1.7898} = 2.788$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea  $N = 3$ .

**Inciso (c)** Se inicia con la obtención de los polos. Para ello, se hace uso de las expresiones (6.55), (6.56), (6.57), (6.52), (6.53), (6.45) y (6.47), las cuales se reescriben a continuación (Por conveniencia se cambió  $\Omega_k$  por  $\vartheta_k$  en (6.55)).

$$s_k = \sigma_k + j\vartheta_k$$

con

$$\sigma_k = -\frac{\Omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\vartheta_k = \frac{\Omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\gamma_k = \text{sen} \eta_k \text{senh} v_k$$

$$\rho_k = \text{cos} \eta_k \text{cosh} v_k$$

$$\eta_k = \left( \frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$v_k = \pm \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[ \varepsilon \text{cosh} \left[ N \text{cosh}^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de  $v_k$ , con  $N = 3$ ,  $\varepsilon = 0.7648$  y  $\omega_r/\omega_p = 3.0777$ , esto es

$$v_k = \pm \frac{1}{3} \text{senh}^{-1} \left[ (0.7648) \text{cosh} \left[ 3 \text{cosh}^{-1}(3.0777) \right] \right]$$

$$v_k = \pm 1.70047$$

$$\text{senh} v_k = \text{senh}(1.70047) = 2.64696$$

$$\text{cosh} v_k = \text{cosh}(1.70047) = 2.82956$$

Algunos pasos en el cálculo de los polos se muestra en la tabla 6.15 y 6.16.

**Tabla 6.15:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.5, primera parte

$k$	$\eta_k$	$\text{cos} \eta_k$	$\text{sen} \eta_k$	$\gamma_k =$ $\text{sen} \eta_k \text{senh} v_k$	$\rho_k =$ $\text{cos} \eta_k \text{cosh} v_k$
1	$\pi/6$	0.86603	0.5	1.32348	2.45048
2	$3\pi/6$	0	1	2.64696	0
3	$5\pi/6$	-0.86603	0.5	1.32348	-2.45048
4	$7\pi/6$	-0.86603	-0.5	-1.32348	-2.45048
5	$9\pi/6$	0	-1	-2.64696	0
6	$11\pi/6$	0.86603	-0.5	-1.32348	2.45048

De la tabla 6.16 se obtiene la ubicación de los polos, considerando aquellos que se encuentran a la izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$s_1 = -2730.08 + j5054.88$$

$$s_2 = -6044.80$$

$$s_3 = -2730.08 - j5054.88$$

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la expresión (6.25), la cual se especifica a continuación.

$$z_k = \frac{j\Omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

**Tabla 6.16:** Cálculo de los polos del ejemplo 6.5, segunda parte

$k$	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\Omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\Omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	7.75645	0.17063	0.31593	-2730.08	5054.88
2	7.00640	0.37780	0	-6044.80	0
3	7.75645	0.17063	-0.31593	-2730.08	-5054.88
4	7.75645	-0.17063	-0.31593	2730.08	-5054.88
5	7.00640	-0.37780	0	6044.80	0
6	7.75645	-0.17063	0.31593	2730.08	5054.88

Algunos pasos en el cálculo de los ceros se muestran en la tabla 6.17.

**Tabla 6.17:** Cálculo de los ceros del ejemplo 6.5

$k$	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\Omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/6$	0.86603	18475.1106
2	$3\pi/6$	0	En el infinito
3	$5\pi/6$	-0.86603	-18475.1106
4	$7\pi/6$	-0.86603	-18475.1106
5	$9\pi/6$	0	En el infinito
6	$11\pi/6$	0.86603	18475.1106

De la tabla 6.17 se obtiene la ubicación de los ceros, los cuales se enumeran a continuación.

$$z_1 = +j 18475.1106$$

$$z_2 = \text{Cero en el infinito}$$

$$z_3 = -j 18475.1106$$

**Inciso (d)** La función de transferencia del filtro analógico pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II se determina a partir de los polos y los ceros obtenidos en el inciso (c).

Utilizando la información de la tabla 6.16 indicando la ubicación de los polos, se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\vartheta_k)(s - \sigma_k + j\vartheta_k) = (s - \sigma_k)^2 + \vartheta_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \vartheta_k^2$$

Para el polo  $s_1$  y su conjugado  $s_3$ , con  $\sigma_1 = -2730.08$  y  $\vartheta_1 = 5054.88$ , se tiene

$$(s - s_1)(s - s_3) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(2730.08)s + (2730.08)^2 + (5054.88)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_3) = s^2 + 5460.16s + 33005148.62$$

Utilizando la información de la tabla 6.17 indicando la ubicación de los ceros, se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\vartheta_k)(s + j\vartheta_k) = s^2 + \vartheta_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \vartheta_k^2$$

Para el cero  $z_1$  y su conjugado  $z_3$ , con  $\vartheta_1 = 18475.1106$ , se tiene

$$(s - z_1)(s - z_3) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (18475.1106)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_3) = s^2 + 341329711.7$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 341329711.7)}{(s^2 + 5460.16s + 33005148.62)(s + 6044.8)}$$

Se determina la constante de normalización  $K_0$  al evaluar la función de transferencia en  $s = j\Omega$

$$H(\Omega) = H(s) \Big|_{s=j\Omega}$$

$$H(\Omega) = \frac{K_0 (341329711.7 - \Omega^2)}{(33005148.62 - \Omega^2 + j5460.16\Omega)(6044.8 + j\Omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para  $\Omega = 0$

$$|H(\Omega)| \Big|_{\Omega=0} = \frac{K_0 (341329711.7)}{(33005148.62)(6044.8)} = K_0 (1.710844 \times 10^{-3}) = 1$$

$$K_0 = 584.5068$$

La función de transferencia solicitada para el filtro analógico es

$$H(s) = \frac{584.5068 (s^2 + 341329711.7)}{(s^2 + 5460.16s + 33005148.62)(s + 6044.8)} \quad (6.69)$$

Otra forma de expresar la función de transferencia del filtro analógico es en función de  $T$ . Esto es, se multiplica cada coeficiente en (6.69) por (6.70), como se muestra a continuación.

$$\frac{T}{T} = \frac{1}{8000T} \quad \text{o} \quad \frac{T^2}{T^2} = \frac{1}{(8000)^2 T^2} \quad (6.70)$$

$$H(s) = \left( \frac{584.5068 \left( s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{5.3333}{4} \right) \right)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) \left( \frac{0.6825}{2} \right) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{0.5157}{4} \right)} \right) \left( \frac{1}{s + \left( \frac{2}{T} \right) \left( \frac{0.7556}{2} \right)} \right)$$

$$H(s) = \left( \frac{584.5068 \left( s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (1.3333) \right)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) (0.3413) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1289)} \right) \left( \frac{1}{s + \left( \frac{2}{T} \right) (0.3778)} \right) \quad (6.71)$$

**Inciso (e)** La función de transferencia del filtro digital pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II se obtiene al aplicar la transformación bilineal a (6.71).

La transformación bilineal es una transformación algebraica entre el plano  $s$  y  $z$  que transforma el eje  $j\Omega$  del plano  $s$  al círculo unitario del plano  $z$ . Esta se realiza al sustituir (6.72)

en la función de transferencia del diseño del filtro analógico, obteniendo así la función de transferencia del diseño del filtro digital.

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (6.72)$$

Esto es, al sustituir (6.72) en (6.71) se obtiene

$$\begin{aligned} H(z) &= H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} \\ &= \left[ \left( \frac{s^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (1.3333)}{s^2 + \left( \left( \frac{2}{T} \right) (0.3413) \right) s + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1289)} \right) \left( \frac{584.5068}{s + \left( \frac{2}{T} \right) (0.3778)} \right) \right]_{s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)} \\ &= \left( \frac{\left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (1.3333)}{\left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + 0.3413 \left( \frac{2}{T} \right)^2 \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + \left( \frac{2}{T} \right)^2 (0.1289)} \right) \left( \frac{\left( \frac{T}{2} \right)^2}{\left( \frac{T}{2} \right)^2} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{584.5068}{\left( \frac{2}{T} \right) \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + \left( \frac{2}{T} \right) (0.3778)} \right) \left( \frac{T}{2} \right) \\ H(z) &= \left( \frac{\left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + 1.3333}{\left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2 + 0.3413 \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 0.1289} \right) \left( \frac{584.5068 \left( \frac{T}{2} \right)}{\left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 0.3778} \right) \\ &= \left( \frac{(1 - z^{-1})^2 + 1.3333(1 + z^{-1})^2}{(1 - z^{-1})^2 + 0.3413(1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) + 0.1289(1 + z^{-1})^2} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{584.5068 \left( \frac{T}{2} \right) (1 + z^{-1})}{1 - z^{-1} + 0.3778(1 + z^{-1})} \right) \end{aligned}$$

dado que:  $\frac{T}{2} = \frac{1}{16000}$ , entonces

$$H(z) = \left( \frac{2.3333 + 0.6666 z^{-1} + 2.3333 z^{-2}}{1.4702 - 1.7422 z^{-1} + 0.7876 z^{-2}} \right) \left( \frac{0.03653 (1 + z^{-1})}{1.3778 - 0.6222 z^{-1}} \right)$$

La función de transferencia solicitada para el filtro digital es

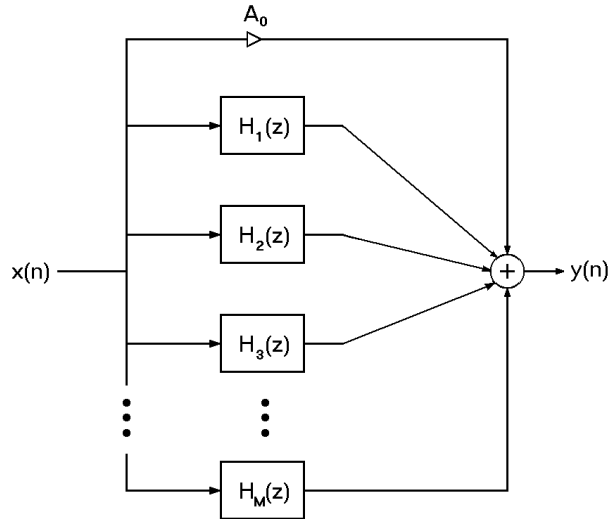
$$H(z) = 0.0421 \left( \frac{1 + 0.2857 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.1850 z^{-1} + 0.5357 z^{-2}} \right) \left( \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.4516 z^{-1}} \right) \quad (6.73)$$

**Inciso (f)** La arquitectura del filtro digital pasa bajas basada en la aproximación Chebyshev del tipo II se obtiene de la expresión (6.73). Ésta se implementa utilizando la forma directa I, mediante una estructura en paralelo con funciones de transferencia a los más de segundo orden.

La estructura en paralelo se obtiene al descomponer la función de transferencia en una suma de funciones más sencilla (sistemas de primero y segundo orden) y una constante, como se muestra en la figura 6.18, cuya expresión está dada por (6.74) o por (6.75).

$$H(z) = A_0 + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_M(z) \quad (6.74)$$

$$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^M H_k(z) \quad (6.75)$$



**Figura 6.18:** Representación de la arquitectura del filtro en paralelo

La expresión (6.73) se adecua de manera que se pueda aplicar el método de expansión por fracciones parciales y así determinar la estructura en paralelo solicitada, como se muestra a continuación.

$$H(z) = 0.0421 \left( \frac{z^2 + 0.2857z + 1}{z^2 - 1.1850z + 0.5357} \right) \left( \frac{z + 1}{z - 0.4516} \right)$$

$$H(z) = \left( \frac{0.0421 (z^2 + 0.2857z + 1)(z + 1)}{(z - 0.5925 + j0.4297)(z - 0.5925 - j0.4297)(z - 0.4516)} \right)$$

Aplicando expansión por fracciones parciales se tiene

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \left( \frac{0.0421 (z^2 + 0.2857z + 1)(z + 1)}{z(z - 0.5925 - j0.4297)(z - 0.5925 + j0.4297)(z - 0.4516)} \right) \\ &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 0.5925 - j0.4297} + \frac{B^*}{z - 0.5925 + j0.4297} + \frac{C}{z - 0.4516} \end{aligned}$$

donde

$$A = \left( \frac{H(z)}{z} \right) z \Big|_{z=0} = \left( \frac{0.0421 (z^2 + 0.2857z + 1)(z + 1)}{(z^2 - 1.1850z + 0.5357)(z - 0.4516)} \right) \Big|_{z=0} = -0.1740$$

$$\begin{aligned} B &= \left( \frac{H(z)}{z} \right) (z - 0.5925 - j0.4297) \Big|_{z=0.5925+j0.4297} \\ &= \left( \frac{0.0421 (z^2 + 0.2857z + 1)(z + 1)}{z(z - 0.5925 + j0.4297)(z - 0.4516)} \right) \Big|_{z=0.5925+j0.4297} \end{aligned}$$



$$B = \left( \frac{0.0421 \left( (0.5925 + j0.4297)^2 + 0.28569 (0.5925 + j0.4297) + 1 \right)}{(0.5925 + j0.4297)(0.5925 + j0.4297 - 0.5925 + j0.4297)} \right) x \left( \frac{0.5925 + j0.4297 + 1}{0.5925 + j0.4297 - 0.4516} \right)$$

$$\begin{aligned} B &= \left( \frac{0.0421 (0.1664 + j0.5092 + 1.1693 + j0.1228)}{(0.5925 + j0.4297)(j0.8594)} \right) \left( \frac{1.5925 + j0.4297}{0.1409 + j0.4297} \right) \\ &= \left( \frac{0.0421 (1.3357 + j0.6320)}{-0.3693 + j0.5092} \right) \left( \frac{1.5925 + j0.4297}{0.1409 + j0.4297} \right) \\ &= \frac{0.0421 (1.8555 + j1.5804)}{-0.2708 - j0.0869} = 0.5204 (-0.6398 - j0.2667) \end{aligned}$$

$$B = -0.3330 - j0.1388$$

$$B^* = -0.3330 + j0.1388$$

$$C = \left( \frac{H(z)}{z} \right) (z - 0.4516) \Big|_{z=0.4516} = \left( \frac{0.0421 (z^2 + 0.2857z + 1)(z + 1)}{z(z^2 - 1.1850z + 0.5357)} \right) \Big|_{z=0.4516}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{0.0421 ((0.4516)^2 + 0.2857(0.4516) + 1)(0.4516 + 1)}{(0.4516)((0.4516)^2 - 1.1850(0.4516) + 0.5357)} \\ &= \frac{0.0421 (1.3330)(1.4516)}{(0.4516)(0.2045)} = 0.8821 \end{aligned}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-0.1740}{z} + \frac{-0.3330 - j0.1388}{z - 0.5925 - j0.4297} + \frac{-0.3330 + j0.1388}{z - 0.5925 + j0.4297} + \frac{0.8821}{z - 0.4516}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= -0.1740 - z \left[ \frac{0.3330 + j0.1388}{z - 0.5925 - j0.4297} + \frac{0.3330 - j0.1388}{z - 0.5925 + j0.4297} \right] \\ &\quad + 0.8821 \left( \frac{z}{z - 0.4516} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= -0.1740 - z \left[ \frac{(z - 0.5925 + j0.4297)(0.3330 + j0.1388)}{(z - 0.5925 - j0.4297)(z - 0.5925 + j0.4297)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z - 0.5925 - j0.4297)(0.3330 - j0.1388)}{z^2 - 1.1850z + 0.5357} \right] + 0.8821 \left( \frac{z}{z - 0.4516} \right) \end{aligned}$$

$$H(z) = -0.1740 + z \left( \frac{-0.666z + 0.5139}{z^2 - 1.1850z + 0.5357} \right) + 0.8821 \left( \frac{z}{z - 0.4516} \right)$$

$$H(z) = -0.1740 + \left( \frac{-0.666 + 0.5138z^{-1}}{1 - 1.1850z^{-1} + 0.5357z^{-2}} \right) + 0.8821 \left( \frac{1}{1 - 0.4516z^{-1}} \right) \quad (6.76)$$

La expresión (5.76) se puede representar como una suma de funciones más sencilla de la forma (6.77).

$$H(z) = A_0 + H_1(z) + H_2(z) \quad (6.77)$$

donde

$$A_0 = -0.1740$$

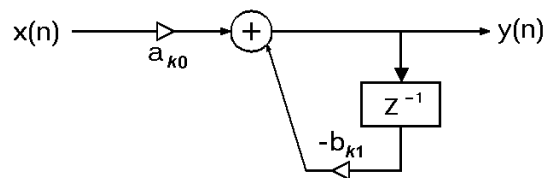
$$H_1(z) = \frac{-0.666 + 0.5138z^{-1}}{1 - 1.1850z^{-1} + 0.5357z^{-2}}$$

$$H_2(z) = 0.8821 \left( \frac{1}{1 - 0.4516z^{-1}} \right)$$

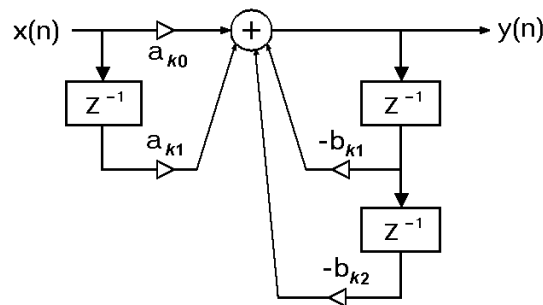
Cada función de transferencia de primer orden de la forma (6.78), o de segundo orden de la forma (6.79), tiene una estructura como la mostrada en la figura 6.19, o como la mostrada en la figura 6.20, respectivamente.

$$H_k(z) = \frac{a_{k0}}{1 + b_{k1}z^{-1}} \quad (6.78)$$

$$H_k(z) = \frac{a_{k0} + a_{k1}z^{-1}}{1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}} \quad (6.79)$$



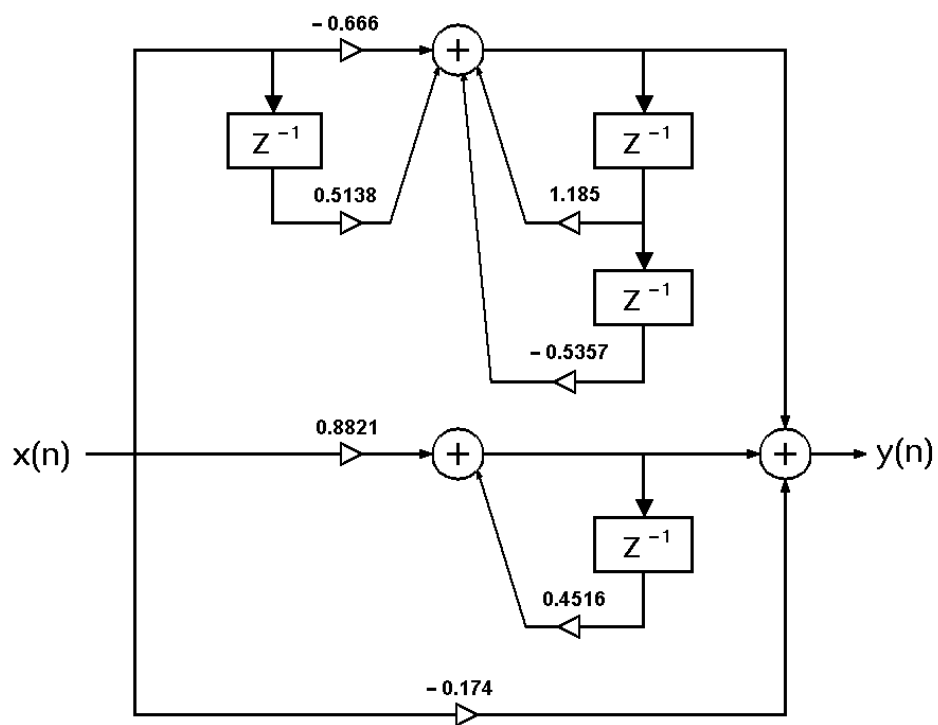
**Figura 6.19:** Arquitectura del filtro en paralelo de 1er orden



**Figura 6.20:** Arquitectura del filtro en paralelo de 2do orden

Utilizando como referencia a (6.78) y a (6.79) y a las figuras 6.19 y 6.20, el filtro digital pasa bajas expresado como en (6.76) tiene la arquitectura mostrada en la figura 6.21.

■



**Figura 6.21:** Arquitectura del filtro digital pasa bajas del ejemplo 6.5





## Problemas propuestos

1. Determine la correspondiente función de transferencia a partir de la magnitud en potencia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{16}{6 + 5\omega^2 + \omega^4}$$

2. Determine la correspondiente función de transferencia a partir de la magnitud en potencia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{16(9 - \omega^2)^2}{6 + 5\omega^2 + \omega^4}$$

3. Determine la correspondiente función de transferencia a partir de la magnitud en potencia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{4}{1 - \omega^2 + \omega^4}$$

4. Para la siguiente distribución de polos, grafique su ubicación en un diagrama de polos y ceros. Éstos corresponden a un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden  $N = 6$ , con un rizo en la banda de paso de  $0.5 \text{ dB}$  y una frecuencia de paso  $\omega_p = 10 \text{ rad/seg}$ .

$$s_1 = -0.7765 + j 10.0845$$

$$s_2 = -2.1215 + j 7.3824$$

$$s_3 = -2.8980 + j 2.70215$$

$$s_4 = -2.8980 - j 2.70215$$

$$s_5 = -2.1215 - j 7.3824$$

$$s_6 = -0.7765 - j 10.0845$$

5. Un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden  $N = 5$ , con un rizo en la banda de paso de  $1 \text{ dB}$  y una frecuencia de paso  $\omega_p = 20 \text{ rad/seg}$ , tiene la siguiente distribución de polos. En un diagrama de polos y ceros grafique su ubicación.

$$s_1 = -1.789 + j 19.802$$

$$s_2 = -4.684 + j 12.2385$$

$$s_3 = -5.790$$

$$s_4 = -4.684 - j 12.2385$$

$$s_5 = -1.789 - j 19.802$$

6. A partir de una distribución de polos obtenidos de las características de un filtro pasa bajas Butterworth, encuentre la ubicación de los polos para un filtro Chebyshev del tipo I con las siguientes características: Orden  $N = 4$ ,  $\varepsilon = 0.4$  y  $\omega_p = 25 \text{ rad/seg}$ . Suponga que la posición de los polos para el filtro Butterworth son:

$$s_1 = e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j 0.923879$$

$$s_2 = e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j 0.382683$$

$$s_3 = e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j 0.382683$$

$$s_4 = e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j 0.923879$$

7. Para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I con  $N = 6$ ,  $\varepsilon = 0.8$  y  $\omega_p = 40 \text{ rad/seg}$ , determine:

- La distribución de los polos para la aproximación Butterworth
- El valor de  $\beta'_k$
- Los valores numéricos de  $\sinh \beta'_k$  y  $\cosh \beta'_k$
- La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev

8. Encuentre el valor en decibeles del ancho del rizo en la banda de paso de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I para:

- $\varepsilon = 0.2$
- $\varepsilon = 0.4$
- $\varepsilon = 0.8$

9. Determine y grafique en un diagrama de polos y ceros los polos de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden  $N = 4$ , con un rizo en la banda de paso de  $0.75 \text{ dB}$  y una frecuencia de paso  $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$ .

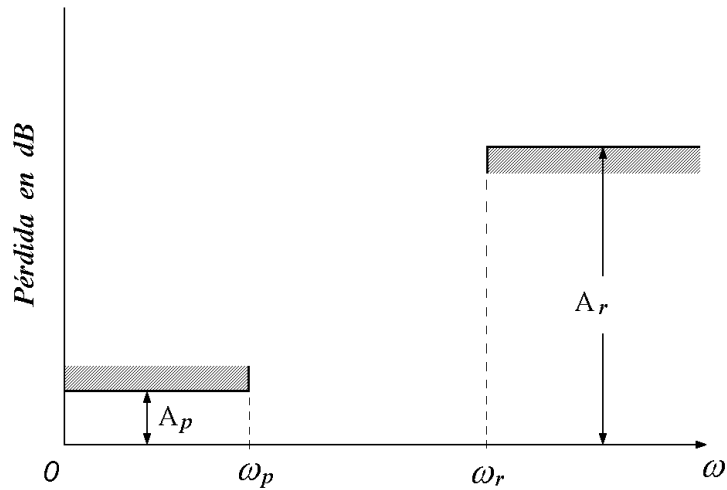
10. Para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I, determine y grafique en un diagrama de polos y ceros la distribución de polos para un filtro de orden  $N = 5$ , con un rizo en la banda de paso de  $1.5 \text{ dB}$  y una frecuencia de paso  $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$ .

11. Obtenga la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden  $N = 6$ . Para ello, suponga que la distribución de polos es la indicada en el problema 4.

12. Utilice la distribución de polos del problema 5 para determinar la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden  $N = 5$ .

13. Determine la función de transferencia  $H(s)$  para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con  $2 \text{ dB}$  del ancho del rizo en la banda de paso en el intervalo de  $0$  a  $15 \text{ rad/seg}$  y de orden  $N = 4$ . Utilice las tablas disponibles de este manuscrito para dar solución al problema.

14. Usando las tablas disponibles de este manuscrito. Determine la función de transferencia para un filtro Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud de orden cinco con frecuencia  $\omega_p = 200 \text{ rad/seg}$ , para un rizo en la banda de paso de:
- 0.5 dB
  - 1 dB
  - 2 dB
15. Determine la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I con las siguientes especificaciones:
- Máxima atenuación en la banda de paso de 1.5 dB
  - Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$
  - Máxima ganancia en la banda de rechazo de 50 dB
  - Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 160 \text{ rad/seg}$
16. Obtenga la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I con las siguientes especificaciones:
- Mínima ganancia en la banda de paso de 0.7 dB
  - Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$
  - Mínima pérdida en la banda de rechazo de 60 dB
  - Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 60 \text{ rad/seg}$
17. Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo I con las siguientes especificaciones
- Rizo en la banda de paso de 0.6 dB
  - Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 4 \text{ rad/seg}$
  - Mínima atenuación en la banda de rechazo de 45 dB
  - Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 25 \text{ rad/seg}$
- Determine:
- El mínimo orden del filtro
  - La función de transferencia normalizada en amplitud
  - Las expresiones para la magnitud, la ganancia en dB, la fase y el retardo de grupo
18. Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo I con las siguientes especificaciones
- Rizo en la banda de paso de 2.5 dB
  - Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$
  - Máxima ganancia en la banda de rechazo de 80 dB
  - Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 350 \text{ rad/seg}$
- Determine:
- El mínimo orden del filtro
  - La función de transferencia normalizada en amplitud
  - Las expresiones para la magnitud, la ganancia en dB, la fase y el retardo de grupo
19. Para el diseño de un filtro pasa bajas con aproximación Chebyshev del tipo I, determine la ubicación de los polos y la función de transferencia normalizada en frecuencia de tal forma que éste satisfaga las siguientes restricciones
- Ancho del rizo en la banda de paso de 0.2 dB
  - Atenuación en la banda de rechazo  $\geq 30 \text{ dB}$
  - Frecuencia de paso de  $f_p = 1 \text{ kHz}$
  - Frecuencia de rechazo de  $f_r = 2.5 \text{ kHz}$
20. Encuentre la función de aproximación Chebyshev del tipo I necesaria para satisfacer las siguientes restricciones de un filtro pasa bajas, vea la figura P20, donde
- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| $A_p = 0.25 \text{ dB}$            | $A_r = 40 \text{ dB}$              |
| $\omega_p = 1200 \text{ rad/seg.}$ | $\omega_r = 4000 \text{ rad/seg.}$ |



**Figura P20:** Representación en potencia del filtro Chebyshev en función de su pérdida, para el problema 20.

21. Un filtro Chebyshev del tipo I de quinto orden tiene una pérdida de  $72 \text{ dB}$  a  $4000 \text{ kHz}$ . Determine la frecuencia en la cual un filtro tipo Butterworth de quinto orden presenta la misma pérdida, dado que ambas aproximaciones satisfacen las mismas restricciones en la banda de paso.
22. Se desea un filtro pasa bajas que satisfaga las siguientes restricciones:  
 a) Atenuación en la banda de paso con  $3 \text{ dB}$  desde  $0$  a  $5 \text{ kHz}$   
 b) Atenuación  $\geq 30 \text{ dB}$  para  $f \geq 10 \text{ kHz}$ .  
 Determine el mínimo orden para un filtro Butterworth y un filtro Chebyshev del tipo I que cumpla con las especificaciones.
23. Para la siguiente distribución de polos y de ceros, grafique su ubicación en un diagrama de polos y ceros. Éstos corresponden a un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II de orden  $N = 8$ , con una máxima pérdida en la banda de paso de  $1.5 \text{ dB}$ , una mínima ganancia en la banda de rechazo de  $80 \text{ dB}$ , una frecuencia de paso  $\omega_p = 45 \text{ rad/seg}$  y una frecuencia de rechazo  $\omega_r = 95 \text{ rad/seg}$ .

Polos:

$$s_1 = -8.070719 + j 46.763044$$

$$s_2 = -24.647665 + j 42.514348$$

$$s_3 = -41.096135 + j 31.647973$$

$$s_4 = -52.729879 + j 12.088458$$

$$s_8 = -8.070719 - j 46.763044$$

$$s_7 = -24.647665 - j 42.514348$$

$$s_6 = -41.096135 - j 31.647973$$

$$s_5 = -52.729879 - j 12.088458$$

Ceros:

$$z_1 = j 96.861160$$

$$z_2 = j 114.255528$$

$$z_3 = j 170.995482$$

$$z_4 = j 486.953935$$

$$z_8 = -j 96.861160$$

$$z_7 = -j 114.255528$$

$$z_6 = -j 170.995482$$

$$z_5 = j 486.953935$$



24. Un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II de orden  $N = 9$ , con una mínima ganancia en la banda de paso de  $0.75 \text{ dB}$ , una mínima pérdida en la banda de rechazo de  $85 \text{ dB}$ , una frecuencia de paso  $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$  y una frecuencia de rechazo  $\omega_r = 60 \text{ rad/seg}$ , tiene la siguiente distribución de polos y de ceros. En un diagrama de polos y ceros grafique su ubicación.

Polos:

$$\begin{aligned} s_1 &= -4.783710 + j 32.262589 & s_9 &= -4.783710 - j 32.262589 \\ s_2 &= -14.731108 + j 30.342346 & s_8 &= -14.731108 - j 30.342346 \\ s_3 &= -25.257875 + j 25.203650 & s_7 &= -25.257875 - j 25.203650 \\ s_4 &= -34.608783 + j 14.979775 & s_6 &= -34.608783 - j 14.979775 \\ s_5 &= -38.614317 \end{aligned}$$

Ceros:

$$\begin{aligned} z_1 &= j 60.925597 & z_9 &= -j 60.925597 \\ z_2 &= j 69.282032 & z_8 &= -j 69.282032 \\ z_3 &= j 93.343430 & z_7 &= -j 93.343430 \\ z_4 &= j 175.428264 & z_6 &= -j 175.428264 \\ z_5 &= \text{Cero en el infinito} \end{aligned}$$

25. Determine la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II con las siguientes especificaciones:

Máxima atenuación en la banda de paso de  $1 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 10 \text{ rad/seg}$   
 Máxima ganancia en la banda de rechazo de  $50 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 25 \text{ rad/seg}$

26. Obtenga la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II con las siguientes especificaciones:

Mínima ganancia en la banda de paso de  $2 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 150 \text{ rad/seg}$   
 Mínima pérdida en la banda de rechazo de  $60 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 700 \text{ rad/seg}$

27. Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo II con las siguientes especificaciones

Máxima atenuación en la banda de paso de  $0.6 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 4 \text{ rad/seg}$   
 Mínima atenuación en la banda de rechazo de  $45 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 15 \text{ rad/seg}$

Determine:

- El mínimo orden del filtro
  - La función de transferencia normalizada en amplitud
  - Las expresiones para la magnitud, la ganancia en  $\text{dB}$ , la fase y el retardo de grupo
28. Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo II con las siguientes especificaciones

Mínima ganancia en la banda de paso de  $2.5 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de paso:  $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$   
 Máxima ganancia en la banda de rechazo de  $80 \text{ dB}$   
 Límite de la banda de rechazo:  $\omega_r = 250 \text{ rad/seg}$

Determine:

- El mínimo orden del filtro
- La función de transferencia normalizada en amplitud
- Las expresiones para la magnitud, la ganancia en  $\text{dB}$ , la fase y el retardo de grupo



## A. Pares de transformadas

En este apéndice se muestra a detalle el análisis de las deducciones de las expresiones de las respuestas al impulso,  $h(t)$ , obtenidas a partir de la respuesta en frecuencia ideal del filtro pasa bajas, pasa altas, pasa banda y rechaza banda. Para ello, se utiliza la definición de la transformada inversa de Fourier.

La definición de la transformada de Fourier,  $\mathcal{F}$ , y su transformada inversa de Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$ , es:

Representada en unidades de *rad/seg*

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \tag{A.1}$$

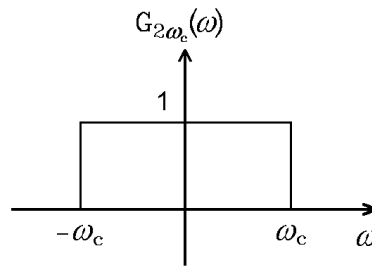
Representada en unidades de *Hz*

$$\begin{aligned} F(f) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi f t} df \end{aligned} \tag{A.2}$$

### A.1 Transformada inversa de la señal rectangular

La señal rectangular en función de la frecuencia  $G_{2\omega_c}(\omega)$  representa al filtro pasa bajas ideal en unidades de *rad/seg*, la cual está establecida como:

$$G_{2\omega_c}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{para otros valores de } \omega \end{cases} \tag{A.3}$$



La respuesta al impulso del filtro ideal pasa bajas se obtiene al determinar la transformada inversa de Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$ , de la señal  $G_{2\omega_c}(\omega)$ , como se muestra a continuación

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G_{2\omega_c}(\omega)]$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{2\omega_c}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right) \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{j\omega_c t}}{jt} - \frac{e^{-j\omega_c t}}{jt} \right]$$

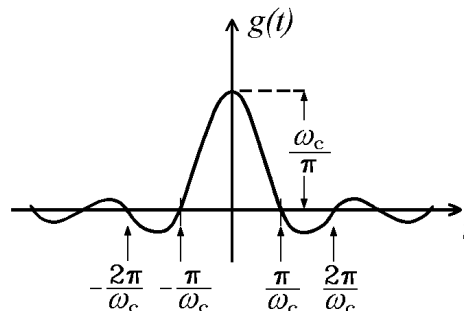
$$= \frac{1}{\pi t} \left[ \frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} \right] = \frac{\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right)$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G_{2\omega_c}(\omega)] = \frac{\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \quad (\text{A.4})$$

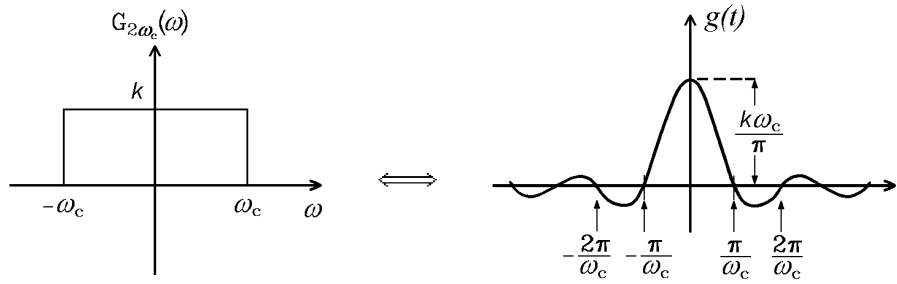
Mientras que para

$$f(t) = k g(t) = \mathcal{F}^{-1}[k G_{2\omega_c}(\omega)] = \frac{k \omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) = \frac{k \omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \quad (\text{A.5})$$

La gráfica de la función  $g(t)$  (cruce por cero:  $\omega_c t = \pi m$ , es decir para  $t = \pi m / \omega_c$ , con  $m$  un número entero) es

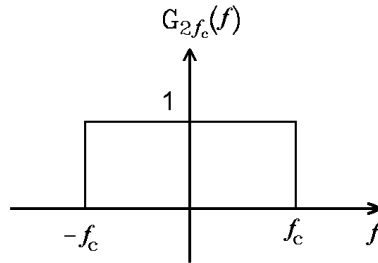


Mientras que la gráfica del par de transformadas es:



Un proceso similar se puede llevar a cabo a partir de la señal rectangular en función de la frecuencia  $G_{2f_c}(f)$  en unidades de  $Hz$ , la cual está establecida como:

$$G_{2f_c}(f) = \begin{cases} 1 & \text{para } -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{para otros valores de } f \end{cases} \quad (\text{A.6})$$



La respuesta al impulso del filtro ideal pasa bajas se obtiene al determinar la transformada inversa de Fourier,  $\mathcal{F}^{-1}$ , de la señal  $G_{2f_c}(f)$ , como se muestra a continuación

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G_{2f_c}(f)]$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{2f_c}(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-f_c}^{f_c} e^{j2\pi f t} df$$

$$g(t) = \left. \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t} \right|_{-f_c}^{f_c} = \frac{1}{\pi t} \left[ \frac{e^{j2\pi f_c t}}{2j} - \frac{e^{-j2\pi f_c t}}{2j} \right]$$

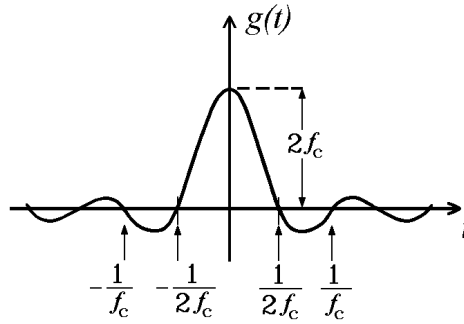
$$= \frac{1}{\pi t} \left[ \frac{e^{j2\pi f_c t} - e^{-j2\pi f_c t}}{2j} \right] = 2f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right)$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G_{2f_c}(f)] = 2f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) = 2f_c \text{Sa}(2\pi f_c t) \quad (\text{A.7})$$

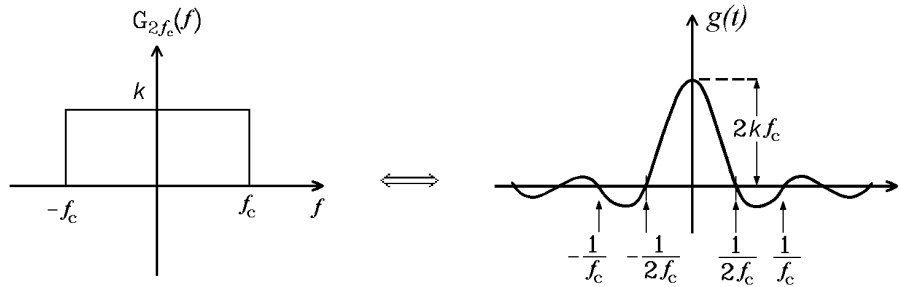
Mientras que para

$$f(t) = k g(t) = \mathcal{F}^{-1}[k G_{2f_c}(f)] = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) = 2k f_c \text{Sa}(2\pi f_c t) \quad (\text{A.8})$$

La gráfica de la función  $g(t)$  (cruce por cero:  $2\pi f_c t = \pi m$ , es decir para  $t = m/2f_c$ , con  $m$  un entero) es



Mientras que la gráfica del par de transformadas es:



## A.2 Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Esta propiedad establece que el desplazamiento en tiempo por una cantidad  $t_0$ , equivale a multiplicar por  $e^{-j\omega t_0}$  (o  $e^{-j2\pi f t_0}$ ) el espectro.

Se debe notar que multiplicar por  $e^{-j\omega t_0}$  (o  $e^{-j2\pi f t_0}$ ) no afecta al espectro de magnitud  $|F(\omega)|$  (o  $|F(f)|$ ) pero sí al de fase  $\phi(\omega)$  (o  $\phi(f)$ ). Es decir, el número y la magnitud de las armónicas de  $f(t)$  no cambian pero su fase se desvía en  $-\omega t_0$  (o  $-2\pi f t_0$ ).

Esto es, para un par de transformadas conocidas

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \quad \text{ó} \quad f(t) \Leftrightarrow F(f) \quad (\text{A.9})$$

entonces

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad \text{ó} \quad f(t - t_0) \Leftrightarrow F(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (\text{A.10})$$

A continuación se proporciona la demostración de la propiedad de desplazamiento en el tiempo, primero especificada en unidades de *rad/seg* y luego en unidades de *Hz*.

- **Para  $\omega$ .** Sea el par de transformadas

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

donde

$$x(t) = f(t - t_0)$$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier (vea (A.1)):

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Sea  $x = t - t_0$  ( $dx = dt$  y  $t = x + t_0$ )

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx$$

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx}_{F(\omega)} = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

y se verifica que

$$f(t - t_0) \iff F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (\text{A.11})$$

Por lo que queda demostrado.  $\square$

- **Para  $f$ .** Sea el par de transformadas

$$x(t) \iff X(f)$$

donde

$$x(t) = f(t - t_0)$$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier (vea (A.2)):

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

Sea  $x = t - t_0$  ( $dx = dt$  y  $t = x + t_0$ )

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi f(x+t_0)} dx$$

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi f x} dx}_{F(f)} = F(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

y se verifica que

$$f(t - t_0) \iff F(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (\text{A.12})$$

Por lo que queda demostrado.  $\square$

### A.3 Transformada de $f(t - t_0)$

Utilizando la propiedad de desplazamiento en el tiempo determine la transformada de Fourier de la señal  $f(t - t_0)$  al suponer que  $f(t)$  está dada por:

$$f(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right)$$

Para ello, se comienza con un par conocido de transformadas, en nuestro caso (vea (A.3) y (A.5)):

$$f(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) \iff F(\omega) = kG_{2\omega_c}(\omega) = \begin{cases} k & \text{para } \omega \leq |\omega_c| \\ 0 & \text{para otras } \omega \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Ahora, sea  $r(t) = f(t - t_0)$ , entonces de (A.9) y de (A.10):

$$r(t) = f(t - t_0) \iff R(\omega) = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

donde

$$r(t) = f(t - t_0) = \frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}[\omega_c(t - t_0)]}{\omega_c(t - t_0)} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$R(\omega) = F(\omega) e^{-j\omega t_0} = kG_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} = \begin{cases} k e^{-j\omega t_0} & \text{para } -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{para otros valores de } \omega \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

De (A.14) y (A.15) se obtiene el par de transformadas

$$\frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)} \right) \iff kG_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (\text{A.16})$$

Procediendo de manera similar, ahora se determina la transformada de Fourier de la señal  $f(t-t_0)$  al suponer que  $f(t)$  está dada por:

$$f(t) = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right)$$

Para ello, se comienza con un par conocido de transformadas, en nuestro caso (vea (A.6) y (A.8)):

$$f(t) = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) \iff F(\omega) = kG_{2f_c}(f) = \begin{cases} k & \text{para } f \leq |f_c| \\ 0 & \text{para otras } f \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Ahora, sea  $r(t) = f(t-t_0)$ , entonces de (A.9) y de (A.10):

$$r(t) = f(t-t_0) \iff R(f) = F(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

donde

$$r(t) = f(t-t_0) = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}[2\pi f_c(t-t_0)]}{2\pi f_c(t-t_0)} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$R(f) = F(f) e^{-j2\pi f t_0} = kG_{2f_c}(f) e^{-j2\pi f t_0} = \begin{cases} k e^{-j2\pi f t_0} & \text{para } -f_c \leq f \leq f_c \\ 0 & \text{para otros valores de } f \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

De (A.18) y (A.19) se obtiene el par de transformadas

$$2k f_c \left( \frac{\text{sen}[2\pi f_c(t-t_0)]}{2\pi f_c(t-t_0)} \right) \iff kG_{2\omega_c}(\omega) e^{-j2\pi f t_0} \quad (\text{A.20})$$

#### A.4 Propiedades de Desplazamiento en frecuencia

Para un par de transformadas conocidas

$$f(t) \iff F(\omega) \quad \text{ó} \quad f(t) \iff F(f) \quad (\text{A.21})$$

entonces

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \iff F(\omega - \omega_0) \quad \text{ó} \quad f(t) e^{j2\pi f_0 t} \iff F(f - f_0) \quad (\text{A.22})$$

- $F(\omega - \omega_0)$  (o  $F(f - f_0)$ ) representa el desplazamiento del espectro  $F(\omega)$  (o  $F(f)$ ) a la posición  $\omega_0$  (o  $f_0$ )
- En consecuencia, la propiedad significa que multiplicar en tiempo por  $e^{j\omega_0 t}$  (o  $e^{j2\pi f_0 t}$ ) equivale a la traslación, en la cantidad  $\omega_0$  (o  $f_0$ ), de todo el espectro
- Esta propiedad también se conoce como *teorema de traslación de frecuencia*



A continuación se proporciona la demostración de la propiedad de desplazamiento en frecuencia, primero especificada en unidades de *rad/seg* y luego en unidades de *Hz*.

- **Para  $\omega$ .** Sea el par de transformadas

$$x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega)$$

donde

$$x(t) = f(t) e^{j\omega_0 t}$$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier (vea (A.1)):

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt}_{F(\omega-\omega_0)}$$

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

y se verifica que

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega - \omega_0)$$

Por lo que queda demostrado.  $\square$

- **Para  $f$ .** Sea el par de transformadas

$$x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(f)$$

donde

$$x(t) = f(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

Aplicando la definición de la transformada de Fourier (vea (A.2)):

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[f(t) e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j2\pi f_0 t}] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt}_{F(f-f_0)}$$

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j2\pi f_0 t}] = F(f - f_0)$$

y se verifica que

$$f(t) e^{j2\pi f_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad F(f - f_0)$$

Por lo que queda demostrado.  $\square$

## A.5 Transformada de $f(t) e^{j\omega_0 t}$

Utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia determine la transformada de Fourier de la señal  $f(t) e^{j\omega_0 t}$  al suponer que  $f(t)$  está dada por:

$$f(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right)$$

Para ello, se comienza con un par conocido de transformadas, en nuestro caso (vea (A.3) y (A.5)):

$$f(t) = \frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) \quad \Longleftrightarrow \quad F(\omega) = kG_{2\omega_c}(\omega) = \begin{cases} k & \text{para } \omega \leq |\omega_c| \\ 0 & \text{para otras } \omega \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Ahora, sea  $r(t) = f(t) e^{j\omega_0 t}$ , entonces de (A.21) y de (A.22):

$$r(t) = f(t) e^{j\omega_0 t} \iff R(\omega) = F(\omega - \omega_0)$$

donde

$$r(t) = f(t) e^{j\omega_0 t} = \frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) e^{j\omega_0 t} \quad (\text{A.24})$$

$$R(\omega) = F(\omega - \omega_0) = k G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0) = \begin{cases} k & \text{para } (\omega_0 - \omega_c) \leq \omega \leq (\omega_0 + \omega_c) \\ 0 & \text{para otros valores de } \omega \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

De (A.24) y (A.25) se obtiene el par de transformadas

$$\frac{k\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) e^{j\omega_0 t} \iff k G_{2\omega_c}(\omega - \omega_0) \quad (\text{A.26})$$

Procediendo de manera similar, ahora se determina la transformada de Fourier de la señal  $f(t) e^{j2\pi f_0 t}$  al suponer que  $f(t)$  está dada por:

$$f(t) = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right)$$

Para ello, se comienza con un par conocido de transformadas, en nuestro caso (vea (A.6) y (A.8)):

$$f(t) = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) \iff F(f) = k G_{2f_c}(f) = \begin{cases} k & \text{para } f \leq |f_c| \\ 0 & \text{para otras } f \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Ahora, sea  $r(t) = f(t) e^{j2\pi f_0 t}$ , entonces de (A.9) y de (A.10):

$$r(t) = f(t) e^{j2\pi f_0 t} \iff R(f) = F(f - f_0)$$

donde

$$r(t) = f(t) e^{j2\pi f_0 t} = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) e^{j2\pi f_0 t} \quad (\text{A.28})$$

$$R(f) = F(f - f_0) = k G_{2f_c}(f - f_0) = \begin{cases} k & \text{para } (f_0 - f_c) \leq f \leq (f_0 + f_c) \\ 0 & \text{para otros valores de } f \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

De (A.28) y (A.29) se obtiene el par de transformadas

$$2k f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) e^{j2\pi f_0 t} \iff k G_{2f_c}(f - f_0) \quad (\text{A.30})$$

Para finalizar esta sección, se analiza la transformada inversa de Fourier de la función en frecuencia  $R(\omega)$  (o  $R(f)$ ), como la mostrada a continuación, la primera expresión corresponde a las unidades de *rad/seg* y la segunda a unidades de *Hz*:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= k G_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1) e^{-j\omega t_0} \\ R(f) &= k G_{2f_c}(f \pm f_1) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Inicialmente sea:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= k G_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1) \\ F(f) &= k G_{2f_c}(f \pm f_1) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Mientras que:

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= G_{2\omega_c}(\omega) \\ Q(f) &= G_{2f_c}(f) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

con el par de transformadas

$$\begin{aligned} Q(\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) &\iff q(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\omega_c t} \right) \\ Q(f) = G_{2f_c}(f) &\iff q(t) = 2f_c \left( \frac{\text{sen}(2\pi f_c t)}{2\pi f_c t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Por lo que

$$\begin{aligned} R(\omega) &= F(\omega) e^{-j\omega t_0} = k Q(\omega \pm \omega_1) e^{-j\omega t_0} \\ R(f) &= F(f) e^{-j2\pi f t_0} = k Q(f \pm f_1) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

De la propiedad de desplazamiento en tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} r(t) = f(t - t_0) &\iff R(\omega) = F(\omega) e^{-j\omega t_0} \\ r(t) = f(t - t_0) &\iff R(f) = F(f) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Mientras que de la propiedad de desplazamiento en frecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} f(t) = k q(t) e^{\mp j\omega_1 t} &\iff F(\omega) = k Q(\omega \pm \omega_1) \\ f(t) = k q(t) e^{\mp j2\pi f_1 t} &\iff F(f) = k Q(f \pm f_1) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Al sustituir (A.37) en (A.36) se obtiene

$$\begin{aligned} r(t) = k q(t - t_0) e^{\mp j\omega_1(t - t_0)} &\iff R(\omega) = k Q(\omega \pm \omega_1) e^{-j\omega t_0} \\ r(t) = k q(t - t_0) e^{\mp j2\pi f_1(t - t_0)} &\iff R(f) = k Q(f \pm f_1) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Finalmente, al sustituir (A.34) y (A.33) en (A.38) se obtiene

$$\begin{aligned} r(t) = \frac{k \omega_c}{\pi} \left( \frac{\text{sen}[\omega_c(t - t_0)]}{\omega_c(t - t_0)} \right) e^{\mp j\omega_1(t - t_0)} &\iff R(\omega) = k G_{2\omega_c}(\omega \pm \omega_1) e^{-j\omega t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} r(t) = 2k f_c \left( \frac{\text{sen}[2\pi f_c(t - t_0)]}{2\pi f_c(t - t_0)} \right) e^{\mp j2\pi f_1(t - t_0)} &\iff R(f) = k G_{2f_c}(f \pm f_1) e^{-j2\pi f t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$



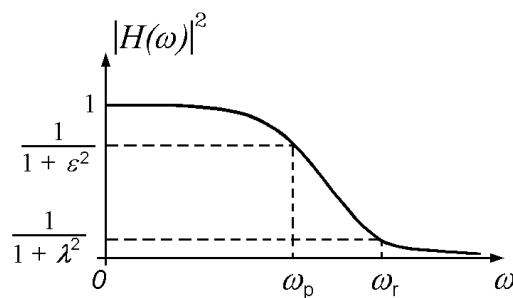
## B. Aproximación Butterworth

En este apéndice se proporciona con detalle el análisis que se lleva a cabo para determinar, a partir de la expresión en magnitud en potencia, la ecuación que describe la ubicación de los polos para el diseño de los filtros pasa bajas basado en la aproximación Butterworth. Enfatizando, al final del análisis, la conveniencia de utilizar una serie de pasos sencillos para obtener la ubicación de los polos sin necesidad de aplicar ecuaciones matemáticas para tal fin.

La expresión de la función en magnitud en potencia para la aproximación Butterworth está definida de manera general por

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}} \quad (\text{B.1})$$

Cuya gráfica en magnitud en potencia se muestra en la figura B.1.



**Figura B.1:** Espectro de un filtro utilizando la aproximación Butterworth

En particular cuando  $\varepsilon = 1$ , en este caso  $\omega_p = \omega_c$ , (B.1) se expresa como

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \quad (\text{B.2})$$

La respuesta en frecuencia, partiendo del plano de Laplace, se logra mediante la evaluación sobre el eje  $j\omega$ , es decir, mediante la sustitución  $s = j\omega$ , con lo que la magnitud en potencia queda expresada como

$$|H(\omega)|^2 = H(j\omega) H(-j\omega) = H(s) H(-s) \Big|_{s=j\omega} \quad (\text{B.3})$$

Por lo que

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}} \Big|_{\omega=s/j} \quad (\text{B.4})$$

El igualar a cero el denominador de (B.4) permite localizar los polos de  $H(s)H(-s)$ . Así, para obtener la función de transferencia  $H(s)$  y la ubicación de los polos es necesario hacer

$$1 + (\omega/\omega_c)^{2N} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$1 + (\omega^2/\omega_c^2)^N = 0 \quad (\text{B.6})$$

Al evaluar en  $s = j\omega$ , entonces  $s^2 = -\omega^2$  o  $\omega^2 = -s^2$  y (B.6) llega a

$$1 + (-s^2/\omega_c^2)^N = 0$$

$$1 + (-1)^N (s/\omega_c)^{2N} = 0$$

$$(-1)^N (s/\omega_c)^{2N} = -1 \quad (\text{B.7})$$

La ecuación (B.7) tiene dos soluciones, la primera cuando el orden  $N$  es par y la segunda cuando es impar. Para la condición de  $N$  par la expresión (B.7) es

$$(s/\omega_c)^{2N} = -1 = e^{j(2k-1)\pi} \quad \text{para } k \text{ entero positivo}$$

entonces

$$(s/\omega_c)^{2N} = e^{j(2k-1)\pi}$$

$$s/\omega_c = e^{j(\frac{2k-1}{2N})\pi}$$

$$s_k = \omega_c e^{j(\frac{2k-1}{2N})\pi} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 2N \text{ (con } N \text{ par)} \quad (\text{B.8})$$

Para la condición de  $N$  impar la expresión (B.7) es

$$(s/\omega_c)^{2N} = 1 = e^{j(2k)\pi} \quad \text{para } k \text{ entero positivo}$$

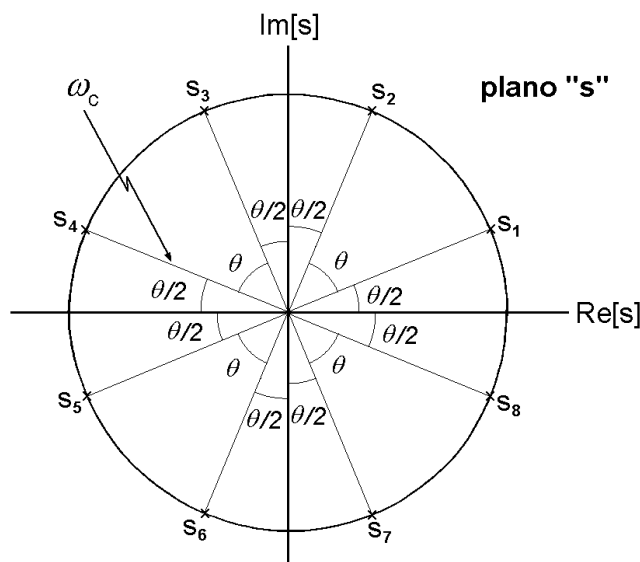
$$s/\omega_c = e^{j(k/N)\pi}$$

$$s_k = \omega_c e^{j(k/N)\pi} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, 2N \text{ (con } N \text{ impar)} \quad (\text{B.9})$$

Por ejemplo, para  $N = 4$  y utilizando la expresión (B.8), los polos se encuentran ubicados en un círculo de radio  $\omega_c$  con una separación angular entre polo y polo de  $\theta = 45^\circ$ , como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} s_1 &= \omega_c e^{j\pi/8} = \omega_c e^{j22.5^\circ} \\ s_2 &= \omega_c e^{j3\pi/8} = \omega_c e^{j67.5^\circ} \\ s_3 &= \omega_c e^{j5\pi/8} = \omega_c e^{j112.5^\circ} \\ s_4 &= \omega_c e^{j7\pi/8} = \omega_c e^{j157.5^\circ} \\ s_5 &= \omega_c e^{j9\pi/8} = \omega_c e^{j202.5^\circ} = \omega_c e^{-j157.5^\circ} \\ s_6 &= \omega_c e^{j11\pi/8} = \omega_c e^{j247.5^\circ} = \omega_c e^{-j112.5^\circ} \\ s_7 &= \omega_c e^{j13\pi/8} = \omega_c e^{j292.5^\circ} = \omega_c e^{-j67.5^\circ} \\ s_8 &= \omega_c e^{j15\pi/8} = \omega_c e^{j337.5^\circ} = \omega_c e^{-j22.5^\circ} \end{aligned}$$

La gráfica de la distribución de los polos para  $N = 4$  se muestra en la figura B.2.



**Figura B.2:** Distribución de los polos para  $N = 4$

Mientras que para  $N = 5$  los polos se encuentran ubicados en un círculo de radio  $\omega_c$  con una separación angular entre polo y polo de  $\theta = 36^\circ$ , como se muestra a continuación. Para ello, se utilizó la expresión (B.9).

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \omega_c e^{j\pi/5} = \omega_c e^{j36^\circ} \\
 s_2 &= \omega_c e^{j2\pi/5} = \omega_c e^{j72^\circ} \\
 s_3 &= \omega_c e^{j3\pi/5} = \omega_c e^{j108^\circ} \\
 s_4 &= \omega_c e^{j4\pi/5} = \omega_c e^{j144^\circ} \\
 s_5 &= \omega_c e^{j\pi} = \omega_c e^{j180^\circ} = -\omega_c \\
 s_6 &= \omega_c e^{j6\pi/5} = \omega_c e^{j216^\circ} = \omega_c e^{-j144^\circ} \\
 s_7 &= \omega_c e^{j7\pi/5} = \omega_c e^{j252^\circ} = \omega_c e^{-j108^\circ} \\
 s_8 &= \omega_c e^{j8\pi/5} = \omega_c e^{j288^\circ} = \omega_c e^{-j72^\circ} \\
 s_9 &= \omega_c e^{j9\pi/5} = \omega_c e^{j324^\circ} = \omega_c e^{-j36^\circ} \\
 s_{10} &= \omega_c e^{j2\pi} = \omega_c e^{j360^\circ} = \omega_c
 \end{aligned}$$

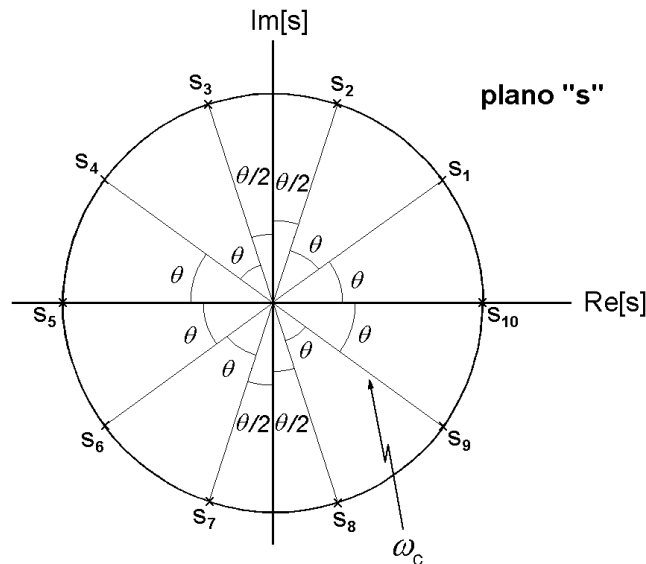
La gráfica de la distribución de los polos para  $N = 5$  se muestra en la figura B.3.

Al generalizar los resultados anteriores se concluye que la ubicación de los polos para cualquier orden  $N$  se distribuyen en un círculo de radio  $\omega_c$  con separación angular entre polo y polo de  $\theta = 180^\circ/N$ . También, se observa que al menos el primer polo, definido como  $s_1$ , para cualquier orden  $N$ , se ubica en el primer cuadrante, vea la figura B.2 y B.3. Además, para determinar la posición de los polos se requiere utilizar dos ecuaciones, una cuando el orden  $N$  es par y otra para  $N$  impar.

Con ciertas modificaciones a (B.8) y a (B.9) la posición del primer polo, definido como  $s_1$ , se puede ubicar en el segundo cuadrante y estos cambios a su vez generarán una única expresión en la determinación de la posición de los polos, sin importar si  $N$  es par o impar. Lo anterior se justifica por el hecho de que se está interesado en los polos a la izquierda del eje imaginario del plano  $s$ , por razones de estabilidad. Así, para iniciar el rotulado de los polos a la izquierda del eje imaginario del plano  $s$ , cuando se tiene un orden  $N$  par, es necesario rotar todos los polos un ángulo  $(\pi/N)(N/2)$  radianes (o  $\pi/2$  para iniciar el rotulado en el segundo cuadrante) de esta forma la ecuación (B.8) se expresa como

$$s_k = \omega_c e^{j\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi} e^{j\pi/2} = \omega_c e^{j\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi} \quad (\text{B.10})$$

Mientras que para un orden  $N$  impar es necesario rotar todos los polos un ángulo

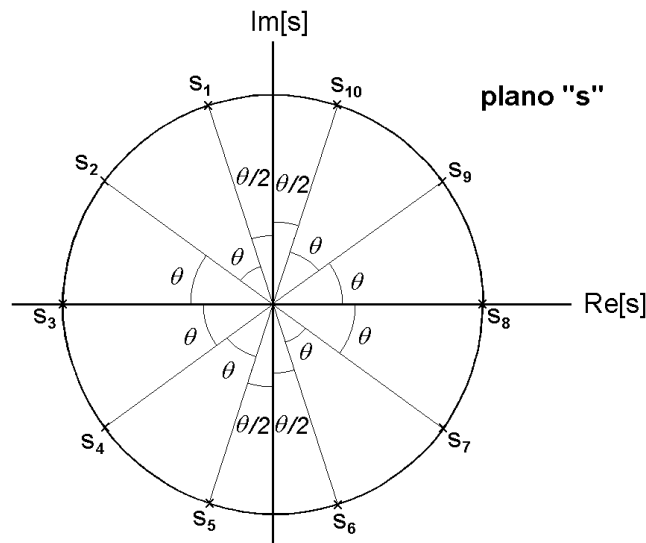


**Figura B.3:** Distribución de los polos para  $N = 5$

$((N - 1)/2N)\pi$  radianes para iniciar el rotulado en el segundo cuadrante, de esta forma la ecuación (B.9) se expresa como

$$s_k = \omega_c e^{j(k/N)\pi} e^{j(\frac{N-1}{2N})\pi} = \omega_c e^{j(\frac{2k+N-1}{2N})\pi} \quad (\text{B.11})$$

Como ejemplo, en la figura B.4 se muestra esta rotación de  $72^\circ$  ( $2\pi/5$  radianes) de los polos con respecto a la posición de los polos de la figura B.3, en donde el polo  $s_1$  ubicado a  $36^\circ$  ahora se ubica a  $180^\circ$  ( $36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$ ).



**Figura B.4:** Rotación angular de los polos de la figura B.3

A partir de la ecuación (B.10) o (B.11) se determina que los polos se localizan en un círculo de radio  $\omega_c$  en el plano  $s$ , teniendo simetría con respecto a ambos ejes (eje real y eje imaginario). Esto proporciona una de las características fundamentales de la función de transferencia basada en la aproximación Butterworth.

El análisis anterior permite desarrollar reglas o pasos a seguir para ubicar la posición de los polos sin necesidad de aplicar ecuaciones matemáticas, éstas son

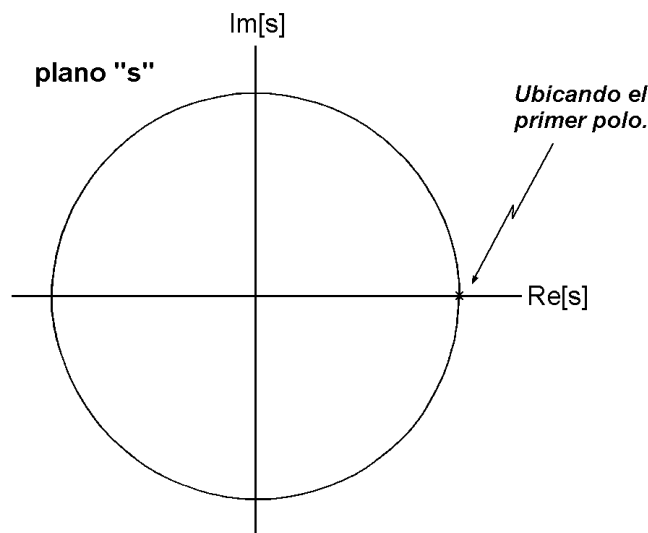
- Construir un círculo de radio  $\omega_c$  en el plano  $s$
- Los polos están separados angularmente cada  $\theta = 180^\circ/N$  ( $\theta = \pi/N$  radianes) independientemente del orden del filtro ( $N$  par o impar)



- c) Si  $N$  es impar un polo ocurre en el eje real
- d) Si  $N$  es par se toma al eje real como referencia entre ángulos (de dos polos consecutivos), es decir, a partir del eje real un polo se localiza a  $\theta/2$  ( $\theta = 180^\circ/2N$  o  $\theta = \pi/2N$  radianes) y el otro a  $-\theta/2$ .
- e) Finalmente, ningún polo se encuentra ubicado en el eje imaginario

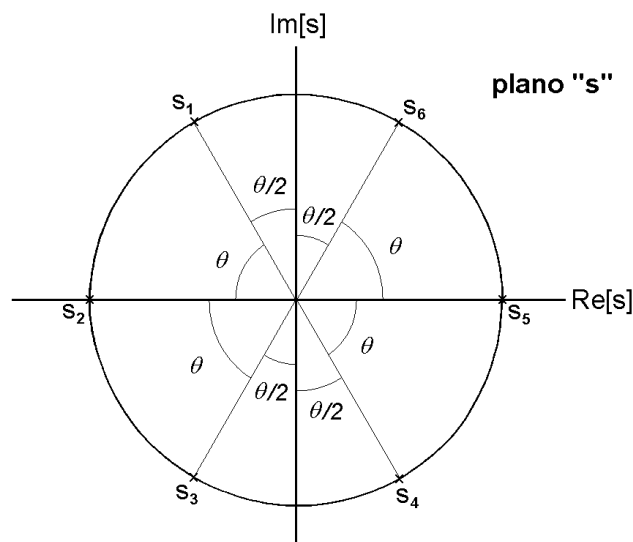
Como ejemplo se determina la ubicación de los polos de un filtro Butterworth de orden 3, suponga a  $\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$ .

Primero se construye un círculo de radio unitario en el plano  $s$ . Como el orden del filtro es impar ( $N = 3$ ) un polo está localizado en el eje real, como se muestra en la figura B.5.



**Figura B.5:** Ubicando el primer polo en el círculo de radio unitario

La separación angular entre polos es  $\theta = 180^\circ/3 = 60^\circ$ . Por lo que, a partir del primer polo colocado en el círculo, en nuestro caso en el eje real (vea la figura B.5), se ubican los restantes polos. Considerando en particular la separación angular es de  $\theta = 60^\circ$  la distribución de los polos son como se muestra en la figura B.6.



**Figura B.6:** Distribución de los polos para  $N = 3$

Verificando así la ventaja de utilizar los pasos mencionados para la ubicación de los polos con respecto al uso de una ecuación matemática. Se enfatiza, sin embargo, que dichos pasos se obtuvieron después de realizar un análisis de las correspondientes ecuaciones matemáticas.





## Bibliografía

- [1] Antoniou, Andreas. *Digital Filters: Analysis and Design*. McGraw-Hill, 1979.
- [2] Ashok, Ambardar. *Procesamiento de señales analógicas y digitales*. Editorial Thomson, México, 2002.
- [3] Budak, Aram. *Passive and active network analysis and synthesis*. Houghton Mifflin Company, 1974.
- [4] Churchill, Ruel and Brown, James. *Ebook: Complex Variables and Applications*. McGraw Hill, 2014.
- [5] Daryanani, Gobind. *Principles of active network synthesis and design*. Wiley New York, 1976.
- [6] David J. DeFatta, Joseph G. Lucas, William S. Hodgkiss. *Digital Signal Processing: A System Design Approach*. John Wiley and Sons, 1988.
- [7] Franklin F. Kuo. *Network Analysis and Synthesis*. Second Edition. Wiley International Edition, 1966.
- [8] Granville, Smith and Longley *Cálculo diferencial e integral*. Limusa. 1980.
- [9] Hamming, RW. *Digital filters*. Prentice Hall, 1989.
- [10] Harry Y - Lam, F. *Analog and digital filters: design and realization*. Englewood Cliffs, New Jersey. 1979
- [11] Haykin, Simon y Van Veen, Barry. *Señales y sistemas*. Limusa-Wiley, 2001.
- [12] Huelsman, Lawrence P. and Allen, Phillip E. *Introduction to the theory and design of active filters*. McGraw-Hill, 1980.
- [13] Khan, Muhammad Nasir and Hasnain, Syed K and Jamil, Mohsin and Imran, Ali. *Electronic Signals and Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, 2022.
- [14] Lathi, B.P. *Introducción a la teoría y sistemas de comunicación*. Limusa, 1978.

- [15] Llamedo Soria Mariano. *Aproximación de Chebyshev: Introducción y obtención de los polinomios*. Video de YouTube: <https://youtu.be/1YirQkTkq-w>. Consultado en julio de 2022.
- [16] López Villaseñor M, García González M. T., Peña Castillo M. A. y Ortiz Pedroza M. R. *Teoría de filtros analógicos del tipo Butterworth*. 02.0202.II.01.002.95. UAM-Iztapalapa, 1995.
- [17] Nilsson, James W. *Circuitos eléctricos (4. a edición)*. AddisonWesley, 1995.
- [18] Oppenheim, Alan V and Buck, John R. and Schafer, Ronald W. *Discrete-time signal processing. Vol. 2*. Prentice Hall, 2001.
- [19] Oppenheim, Alan V. and Schafer, Ronald W. *Digital signal processing*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1975.
- [20] Paktitis, S.A. *Active filters: theory and design*. CRC Press, 2007.
- [21] Proakis John, G. and Manolakis Dimitris, G. *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*. Fourth Edition. Pearson, Pentice Hall, 2007.
- [22] Rabiner, Lawrence R. and Gold, Bernard. *Theory and application of digital signal processing*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [23] Stanley, William D. *Digital Signal Processing*. Reston Pub., 1975.
- [24] Stark, Henry and Tuteur, Franz B. *Modern electrical communications: theory and systems*. Prentice-Hall, 1979.
- [25] Tan, Li and Jiang, Jean. *Digital signal processing: fundamentals and applications*. Academic press, 2018.
- [26] Thompson, Marc. *Intuitive analog circuit design*. Elsevier, 2006.



## Índice alfabético

### A

- Aproximación Chebyshev
  - del Tipo I, 39–64
  - del Tipo II, 95–102
- Aproximación Chebyshev del Tipo I
  - ubicación de los polos, 47–50
  - ganancia de la razón de rizo, 43
  - magnitud en potencia, 39
  - orden del filtro, 46–47
- Aproximación en el dominio
  - de la frecuencia, 12
  - del tiempo, 11
- Aproximación Chebyshev del Tipo II
  - magnitud en potencia, 95
  - orden del filtro, 98–99
  - ubicación de los ceros, 99–100
  - ubicación de los polos, 100–102

### C

- Criterios de error, 10
- Criterios de realizabilidad, 10–11

### F

- Filtro ideal
  - rechaza banda, 20
  - pasa altas, 19
  - pasa bajas, 15–16
  - pasa banda, 16–18
  - pasa todo, 21
- Filtros
  - ideales, 13–21
  - reales, 24–28

### I

- Introducción, 9–12

### P

- Polinomios de Chebyshev, 29
- Problemas propuestos, 141–145

### R

- Retardo de
  - fase, 22–23
  - grupo, 23