

Problemas resueltos de la aproximación de Chebyshev

Mauricio López Villaseñor
María Teresa García González
María del Rocío Ortiz Pedroza
Enrique Rodríguez de la Colina


Casa abierta al tiempo | **UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**

Colección
CBI
Libro de texto

Problemas resueltos de la aproximación de Chebyshev

Mauricio López Villaseñor
María Teresa García González
María del Rocío Ortiz Pedroza
Enrique Rodríguez de la Colina

Libro de texto



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Rector General

Dra. Norma Rondero López

Secretario General

Dra. Verónica Medina Bañuelos

Rector de la Unidad Iztapalapa

Dr. Javier Rodríguez Lagunas

Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Juan José Ambriz García

Coordinador de Extensión Universitaria

Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas

Jefe de la Sección de Producción Editorial

Problemas resueltos de la aproximación de Chebyshev

Primera edición: 2024

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340,

CDMX, México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3342-5



Índice general

1	Prefacio	7
2	Introducción Teórica	9
3	Problemas Resueltos	17



1. Prefacio

Este trabajo es el complemento del escrito “*Teoría de filtros del tipo Chebyshev: Función de transferencia*” y corresponde a la solución de los problemas planteados en dicha obra. Se desarrolla como un documento aparte considerando que está dirigido a los facilitadores encargados de enseñar las herramientas de análisis en el estudio de los sistemas lineales y en el diseño de filtros analógicos o digitales.

Sirve como material de apoyo a los facilitadores que imparten las unidades de enseñanza y aprendizaje (UEA) tales como procesamiento digital de señales (en el diseño de filtros digitales IIR), circuitos eléctricos III (en el planteamiento de diferentes teorías de aproximación en frecuencia) y en electrónica III (diseño de filtros activos) impartidas en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa.

El documento está dividido en dos secciones. En la primera se proporciona una introducción a la teoría de aproximación Chebyshev del tipo I y tipo II, enfatizando en los temas requeridos para dar solución a la lista de problemas propuesta. En esta introducción también se incluye el método para determinar la ubicación de los polos a partir de la aproximación Butterworth. Inicia al establecer la ecuación de la función en magnitud en potencia para la aproximación Chebyshev del tipo I y de la expresión que determina el orden del filtro. Continúa con las expresiones que permiten obtener la ubicación de los polos, así como el método alternativo para determinar dichos polos utilizando la aproximación Butterworth. Finaliza con la determinación de la función de transferencia a partir de los polos.

Con relación a la aproximación Chebyshev del tipo II, también se proporciona la ecuación de la función en magnitud en potencia y la que determina el orden del filtro. Luego, se proporcionan las expresiones que permiten obtener la ubicación de los polos y los ceros, finaliza con la determinación de la función de transferencia a partir de estos últimos.

Es importante aclarar que en algunas soluciones se proporcionan dos alternativas en la evaluación de los polos, en particular en aquellos problemas relacionados con el diseño de filtros basado en la aproximación Chebyshev del tipo I. Lo anterior, con la finalidad de enfatizar en las diferentes opciones en la obtención de la posición de los polos, en una utilizando las expresiones que establecen de manera directa la ubicación de éstos y por otro utilizando inicialmente la posición de los polos mediante la aproximación Butterworth y luego realizando los cambios pertinentes para la ubicación final de éstos.

Mauricio López Villaseñor
María Teresa García González
María del Rocío Ortiz Pedroza
Enrique Rodríguez de la Colina

2. Introducción Teórica

La aproximación Chebyshev es una de las teorías utilizadas en la caracterización de la función de transferencia en el diseño de filtros analógicos y digitales.

En ésta se observan dos tipos de aproximación, la del tipo I y la del tipo II. En la primera se identifica un rizo en la banda de paso, mientras que en la segunda el rizo se observa en la banda de rechazo.

Esta aproximación se basa en los polinomios de Chebyshev $V_N(x)$ que son un conjunto de funciones ortogonales. Estos se encuentran definidos por la expresión (2.1), con condiciones iniciales establecidas por las expresiones indicadas en (2.2).

$$V_N(x) = \cos [N \cos^{-1} x] = \begin{cases} \cos [N \cos^{-1} x] & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh [N \cosh^{-1} x] & \text{para } |x| > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{lll} N = 0 & V_0(x) = 1 & \text{para toda } x \\ N = 1 & V_1(x) = x & \text{para toda } x \end{array} \quad (2.2)$$

donde N es un número entero positivo y denota el orden del polinomio.

La expresión de la magnitud en potencia basado en la aproximación Chebyshev del tipo I es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{K_0^2}{1 + \varepsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \quad (2.3)$$

donde	K_0	Constante de normalización en amplitud para asegurar que el máximo valor de la función $ H(\omega) $ tenga valor unitario.
	ε	Parámetro de valor pequeño que proporciona la propiedad del rizo en la banda de paso.
	ω_p	Frecuencia de paso.
	$V_N(\omega/\omega_p)$	Polinomio de Chebyshev de orden N .

En la figura 2.1 se presenta un ejemplo del comportamiento de la magnitud en potencia.

El orden del filtro se determina a partir de (2.4),

$$\therefore N \geq \frac{\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)} \quad (2.4)$$

- donde λ Parámetro utilizado para fijar el límite inferior de la banda de rechazo.
 ε Parámetro utilizado para establecer el límite superior de la banda de paso.
 ω_r Frecuencia de rechazo.
 ω_p Frecuencia de paso.

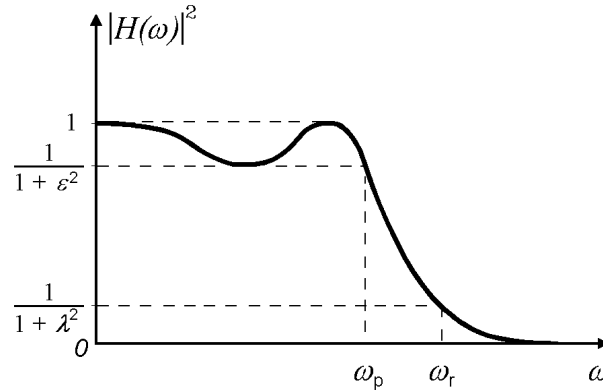


Figura 2.1: Magnitud en potencia del filtro del tipo I caracterizada por: ω_p , ω_r , λ y ε

La desigualdad “>” en la ecuación (2.4) es para asegurar el mínimo orden N necesario para satisfacer las condiciones de diseño del filtro.

Los parámetros ε , λ , ω_p y ω_r proporcionan dos puntos de coordenadas, utilizados para fijar las condiciones de diseño de los filtros. Estos parámetros también definen el ancho de la banda de transición.

La ubicación de los polos en el plano s se determina a partir de las siguientes expresiones

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad (2.5)$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \quad (2.6)$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k \quad (2.7)$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \quad (2.8)$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \quad (2.9)$$

donde ε es el parámetro utilizado para establecer el límite superior de la banda de paso.

Los polos de un filtro basado en la aproximación Chebyshev del tipo I también se pueden obtener a partir de los polos basado en la aproximación Butterworth. Para ello, primero se obtiene la posición de los polos para la aproximación Butterworth, establecida por

$$s'_k = \sigma'_k + j\Omega'_k \quad (2.10)$$

cuya ubicación se determina al seguir los siguientes pasos:

- a) Construir un círculo de radio uno en el plano s , esto es, normalizado en frecuencia ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$)
- b) Los polos están separados angularmente cada $\theta = 180^\circ/N$ ($\theta = \pi/N$ radianes) independientemente del orden del filtro (N par o impar)
- c) Si N es impar un polo ocurre en el eje real
- d) Si N es par se toma al eje real como referencia entre ángulos (de dos polos consecutivos), es decir, a partir del eje real un polo se localiza a $\theta/2$ ($\theta = 180^\circ/2N$ o $\theta = \pi/2N$ radianes) y el otro a $-\theta/2$.
- e) Finalmente, ningún polo se encuentra ubicado en el eje imaginario

También se puede obtener la posición de los polos para la aproximación Butterworth utilizando las expresiones (2.10), (2.11) y (2.12), normalizadas en frecuencia[12].

$$\sigma'_k = \cos\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi \quad (2.11)$$

$$\Omega'_k = \text{sen}\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi \quad (2.12)$$

Para fijar los polos para la aproximación Chebyshev del tipo I se multiplica la parte real de los polos determinados de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \sinh \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \cosh \beta'_k$, esto es

$$s_k = \sigma'_k(\omega_p \sinh \beta'_k) + j\Omega'_k(\omega_p \cosh \beta'_k) \quad (2.13)$$

También expresada como

$$s_k = \sigma''_k + j\Omega''_k \quad (2.14)$$

con

$$\sigma''_k = \sigma'_k(\omega_p \sinh \beta'_k) \quad (2.15)$$

$$\Omega''_k = \Omega'_k(\omega_p \cosh \beta'_k) \quad (2.16)$$

donde s'_k en (2.10) es la posición de los polos para la aproximación Butterworth y s_k en (2.14) es la posición de los polos para la aproximación Chebyshev del tipo I.

Al utilizar las igualdades trigonométricas (2.17) y (2.18), se puede verificar que σ''_k en (2.15) y σ_k en (2.6) son expresiones equivalentes y que Ω''_k en (2.16) y Ω_k en (2.7) son expresiones equivalentes.

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen} x \text{sen} y \quad (2.17)$$

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen} x \cos y + \cos x \text{sen} y \quad (2.18)$$

con

$$x = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$$

$$y = \pi/2$$

Primero se lleva a cabo el análisis para (2.11) y (2.12), como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
\sigma'_k &= \cos\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) = \cos\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \cos\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right] \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\Omega'_k &= \operatorname{sen}\left(\frac{2k+N-1}{2N}\pi\right) = \operatorname{sen}\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \operatorname{sen}\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right] \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left[\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Las expresiones (2.19) y (2.20) pueden representarse en función de α_k (vea la ecuación (2.8)), como se muestran en (2.21) y (2.22), respectivamente.

$$\sigma'_k = -\operatorname{sen} \alpha_k \tag{2.21}$$

$$\Omega'_k = \cos \alpha_k \tag{2.22}$$

Al sustituir (2.21) en (2.15) y (2.22) en (2.16) se obtienen las expresiones (2.23) y (2.24).

$$\sigma''_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k = \sigma_k \tag{2.23}$$

$$\Omega''_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k = \Omega_k \tag{2.24}$$

Que son las mismas a las planteadas en (2.6) y (2.7).

La función de transferencia para el filtro pasa bajas con la aproximación Chebyshev del tipo I se obtiene a partir de

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{K_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = K_0 \prod_{k=1}^N \left(\frac{1}{s - \sigma_k - j\Omega_k} \right) \\
H(s) &= \frac{K_0}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

El polo complejo s_k y su conjugado s_k^* se pueden agrupar en pares, de la forma

$$\begin{aligned}
(s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) \\
&= (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\
&= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde σ_k está dada por (2.23), Ω_k por (2.24), y $\sigma_k^2 + \Omega_k^2$ por (2.27), de esta forma (2.26) se expresa como en (2.28).

$$\sigma_k^2 + \Omega_k^2 = \omega_p^2 \left[\operatorname{sen}^2 \alpha_k \operatorname{senh}^2 \beta'_k + \cos^2 \alpha_k \operatorname{cosh}^2 \beta'_k \right] \tag{2.27}$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 + 2\omega_p \operatorname{sen}\alpha_k \operatorname{senh}\beta'_k s + \omega_p^2 \left[\operatorname{sen}^2\alpha_k \operatorname{senh}^2\beta'_k + \cos^2\alpha_k \operatorname{cosh}^2\beta'_k \right] \quad (2.28)$$

De tal forma que la expresión (2.25) se puede expresar, para N par, como

$$H(s) = K_0 \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{s^2 + 2\omega_p \operatorname{sen}\alpha_k \operatorname{senh}\beta'_k s + \omega_p^2 \left[\operatorname{sen}^2\alpha_k \operatorname{senh}^2\beta'_k + \cos^2\alpha_k \operatorname{cosh}^2\beta'_k \right]} \quad (2.29)$$

y para N impar

$$H(s) = K_0 \prod_{k=1}^N \frac{1}{(s - s_k)} = K_0 \left(\frac{1}{s + \omega_p \operatorname{sen}\alpha_m \operatorname{senh}\beta'_m} \right)^* \left(\prod_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{s^2 + 2\omega_p \operatorname{sen}\alpha_k \operatorname{senh}\beta'_k s + \omega_p^2 \left[\operatorname{sen}^2\alpha_k \operatorname{senh}^2\beta'_k + \cos^2\alpha_k \operatorname{cosh}^2\beta'_k \right]} \right) \quad (2.30)$$

donde el término indicado con el subíndice m , estos es, el término que se obtiene cuando se evalúa la suma en $k = m$ (con $m = (N - 1)/2 + 1 = (N + 1)/2$), corresponde al polo con sólo componente real (Note que $\beta'_k = \beta'_m$).

El criterio para determinar el valor de la constante de normalización K_0 de la función (2.25) es el siguiente

a) Para N impar

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = |H(0)| = 1 \quad (2.31)$$

b) Para N par

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = |H(0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (2.32)$$

La expresión de la magnitud en potencia basado en la aproximación Chebyshev del tipo II es

$$|H_{CI}(\omega)|^2 = \frac{V_N^2(\omega_r/\omega)}{V_N^2(\omega_r/\omega) + \varepsilon^2 V_N^2(\omega_r/\omega_p)} \quad (2.33)$$

donde $\omega_r \equiv$ Frecuencia de rechazo

$\omega_p \equiv$ Frecuencia de paso

En la figura 2.2 se presenta un ejemplo del comportamiento de la magnitud en potencia.

El orden del filtro se determina a partir de (2.34),

$$\therefore N \geq \frac{\cosh^{-1}(\lambda/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)} \quad (2.34)$$

con λ , ε , ω_r y ω_p las definidas para la expresión (2.4).

La desigualdad “ $>$ ” en la ecuación (2.34) es para asegurar el mínimo orden N necesario para satisfacer las condiciones de diseño del filtro.

La ubicación de los ceros en el plano s se determina a partir de las siguiente expresión

$$Z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi} \quad (2.35)$$

Mientras que la ubicación de los polos en el plano s se determina a partir de las siguientes expresiones

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad (2.36)$$

$$\text{con} \quad \sigma_k = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \quad (2.37)$$

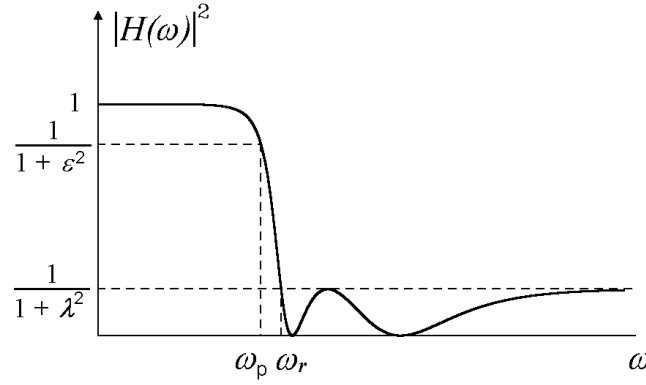


Figura 2.2: Magnitud en potencia del filtro del tipo II caracterizada por: ω_p , ω_r , λ y ε

$$\Omega_k = \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \quad (2.38)$$

$$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k \quad (2.39)$$

$$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k \quad (2.40)$$

$$\eta_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \quad (2.41)$$

$$v_k = \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[\varepsilon \cosh \left[N \cosh^{-1} (\omega_r / \omega_p) \right] \right] \quad (2.42)$$

La función de transferencia para el filtro pasa bajas de orden N par con la aproximación Chebyshev del tipo II se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{K_0 \prod_{k=1}^N (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = K_0 \left(\frac{\prod_{k=1}^N (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - \sigma_k - j\Omega_k)} \right) \\ H(s) &= \frac{K_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_N)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Mientras que para un orden N impar

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{K_0 \prod_{k=1}^{N-1} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = K_0 \left(\frac{\prod_{k=1}^{N-1} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - \sigma_k - j\Omega_k)} \right) \\ H(s) &= \frac{K_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{N-1})}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_N)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

El polo complejo s_k y su conjugado s_k^* se pueden agrupar en pares, de la forma

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) \\ &= (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\ &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Para finalizar esta sección se establece la definición del retardo de grupo, el cual está definido como

$$\tau_g(\omega) = - \frac{d \arg[H(\omega)]}{d \omega} = - \frac{d \arctan[H(\omega)]}{d \omega} \quad (2.46)$$

donde el argumento de $H(\omega)$ definido como $\arg[H(\omega)]$ o como $\arctan[H(\omega)]$ es el ángulo o fase correspondiente a la función de transferencia evaluada en ω .

Usando tablas[7], la expresión de la derivada del $\arctan[H(\omega)]$ es

$$\frac{d \arctan[H(\omega)]}{d \omega} = \frac{1}{1 + H^2(\omega)} \frac{d [H(\omega)]}{d \omega} \quad (2.47)$$

3. Problemas Resueltos

Problema 3.1 Determine la correspondiente función de transferencia a partir de la magnitud en potencia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{16}{6 + 5\omega^2 + \omega^4}$$

Solución:

La relación que existe entre el dominio de la frecuencia y el plano de Laplace es $s = j\omega$

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s)H(-s) = H(j\omega)H(-j\omega) \Big|_{\omega=s/j} = \frac{16}{6 + 5\omega^2 + \omega^4} \Big|_{\omega=s/j}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{16}{s^4 - 5s^2 + 6}$$

Sea $x = s^2$

$$\frac{16}{s^4 - 5s^2 + 6} \Big|_{s^2=x} = \frac{16}{x^2 - 5x + 6} = \frac{16}{(x-3)(x-2)}$$

Representando la ecuación anterior en función de s

$$\frac{16}{(x-3)(x-2)} \Big|_{x=s^2} = \frac{16}{(s^2-3)(s^2-2)} = \frac{16}{(s+\sqrt{3})(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{16}{(s+\sqrt{3})(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}$$

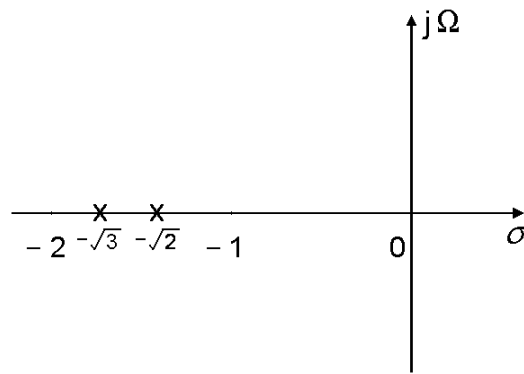


Figura 3.1: Distribución de polos de $H(s)H(-s)$ del problema 3.1

La gráfica con la distribución de polos para la expresión $H(s)H(-s)$ se muestra en la figura 3.1. Se selecciona los polos ubicados en la parte izquierda del plano s para asegurar que $H(s)$ represente a un sistema estable. Por lo que la solución es

$$H(s) = \frac{4}{(s + \sqrt{3})(s + \sqrt{2})}$$

Problema 3.2 Determine la correspondiente función de transferencia a partir de la magnitud en potencia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{16 (9 - \omega^2)^2}{6 + 5 \omega^2 + \omega^4}$$

Solución:

La relación que existe entre el dominio de la frecuencia y el plano de Laplace es $s = j\omega$

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s)H(-s) = H(j\omega)H(-j\omega) \Big|_{\omega=s/j} = \frac{16 (9 - \omega^2)^2}{6 + 5 \omega^2 + \omega^4} \Big|_{\omega=s/j}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{16 (9 + s^2)^2}{s^4 - 5 s^2 + 6}$$

Sea $x = s^2$

$$\frac{16 (9 + s^2)^2}{s^4 - 5 s^2 + 6} \Big|_{s^2=x} = \frac{16 (9 + x)^2}{x^2 - 5 x + 6} = \frac{16 (x + 9)^2}{(x - 3)(x - 2)}$$

Representando la ecuación anterior en función de s

$$\frac{16 (x + 9)^2}{(x - 3)(x - 2)} \Big|_{x=s^2} = \frac{16 (s^2 + 9)^2}{(s^2 - 3)(s^2 - 2)} = \frac{16 [(s + j3)(s - j3)]^2}{(s + \sqrt{3})(s - \sqrt{3})(s + \sqrt{2})(s - \sqrt{2})}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{16 [(s + j3)(s - j3)]^2}{(s + \sqrt{3})(s - \sqrt{3})(s + \sqrt{2})(s - \sqrt{2})}$$

Se selecciona los polos ubicados en la parte izquierda del plano s para asegurar que $H(s)$ represente a un sistema estable. Por lo que la solución es

$$H(s) = \frac{4 (s + j3)(s - j3)}{(s + \sqrt{3})(s + \sqrt{2})}$$

Problema 3.3 Determine la correspondiente función de transferencia a partir de la magnitud en potencia:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{4}{1 - \omega^2 + \omega^4}$$

Solución:

La relación que existe entre el dominio de la frecuencia y el plano de Laplace es $s = j\omega$

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(s)H(-s) = H(j\omega)H(-j\omega) \Big|_{\omega=s/j} = \frac{4}{1 - \omega^2 + \omega^4} \Big|_{\omega=s/j}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{4}{s^4 + s^2 + 1}$$

Sea $x = s^2$

$$\frac{4}{s^4 + s^2 + 1} \Big|_{s^2=x} = \frac{4}{x^2 + x + 1} = \frac{4}{(x + 0.5 + j\sqrt{3}/2)(x + 0.5 - j\sqrt{3}/2)}$$

Note que

$$\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \left| \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right| e^{j\arg(1/2 + j\sqrt{3}/2)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} e^{j\tan^{-1}(\sqrt{3})} = e^{j60^\circ}$$

$$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-j60^\circ}$$

$$\frac{4}{(x + 0.5 + j\sqrt{3}/2)(x + 0.5 - j\sqrt{3}/2)} = \frac{4}{(x + e^{j60^\circ})(x + e^{-j60^\circ})}$$

Representando la ecuación anterior en función de s

$$\frac{4}{(x + e^{j60^\circ})(x + e^{-j60^\circ})} \Big|_{x=s^2} = \frac{4}{(s^2 + e^{j60^\circ})(s^2 + e^{-j60^\circ})}$$

Note que

$$s^2 + e^{j60^\circ} = 0 \quad \implies \quad s^2 = -e^{j60^\circ}$$

$$s = \pm \left(-e^{j60^\circ}\right)^{1/2} \quad \implies \quad s = \pm (-1)^{1/2} e^{j30^\circ} = \pm j e^{j30^\circ}$$

$$s^2 + e^{j60^\circ} = (s - j e^{j30^\circ})(s + j e^{j30^\circ}) = (s - e^{j120^\circ})(s - e^{-j60^\circ})$$

donde

$$j = e^{j90^\circ} \quad \text{y} \quad -j = e^{-j90^\circ}$$

por lo que

$$-je^{j30^\circ} = -e^{j(30^\circ+90^\circ)} = -e^{j120^\circ}$$

$$je^{j30^\circ} = -(-j)e^{j30^\circ} = -e^{j(30^\circ-90^\circ)} = -e^{-j60^\circ}$$

De manera similar

$$s^2 + e^{-j60^\circ} = 0 \quad \implies \quad s^2 = -e^{-j60^\circ}$$

$$s = \pm \left(-e^{-j60^\circ}\right)^{1/2} \quad \implies \quad s = \pm (-1)^{1/2} e^{-j30^\circ} = \pm j e^{-j30^\circ}$$

$$s^2 + e^{-j60^\circ} = (s - j e^{-j30^\circ})(s + j e^{-j30^\circ}) = (s - e^{j60^\circ})(s - e^{-j120^\circ})$$

$$\frac{4}{(s^2 + e^{j60^\circ})(s^2 + e^{-j60^\circ})} = \frac{4}{(s - e^{j120^\circ})(s - e^{-j60^\circ})(s - e^{j60^\circ})(s - e^{-j120^\circ})}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{4}{(s - e^{j120^\circ})(s - e^{-j60^\circ})(s - e^{j60^\circ})(s - e^{-j120^\circ})}$$

La gráfica con la distribución de polos para la expresión $H(s)H(-s)$ se muestra en la figura 3.2.

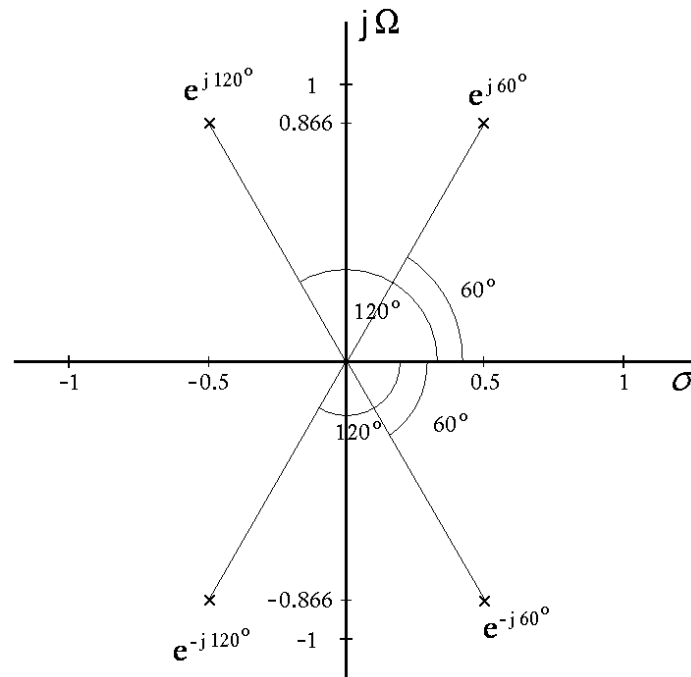


Figura 3.2: Distribución de polos de $H(s)H(-s)$ del problema 3.3

Se selecciona los polos ubicados en la parte izquierda del plano s para asegurar que $H(s)$ represente a un sistema estable. Por lo que la solución es

$$H(s) = \frac{2}{(s - e^{j120^\circ})(s - e^{-j120^\circ})}$$

$$H(s) = \frac{2}{(s + 0.5 - j0.866)(s + 0.5 + j0.866)}$$

Problema 3.4 Para la siguiente distribución de polos, grafique su ubicación en un diagrama de polos y ceros. Éstos corresponden a un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 6$, con un rizo en la banda de paso de 0.5 dB y una frecuencia de paso $\omega_p = 10 \text{ rad/seg}$.

$$s_1 = -0.7765 + j10.0845$$

$$s_2 = -2.1215 + j7.3824$$

$$s_3 = -2.8980 + j2.70215$$

$$s_4 = -2.8980 - j2.70215$$

$$s_5 = -2.1215 - j7.3824$$

$$s_6 = -0.7765 - j10.0845$$

Solución:

La gráfica con la distribución de polos se muestra en la figura 3.3.

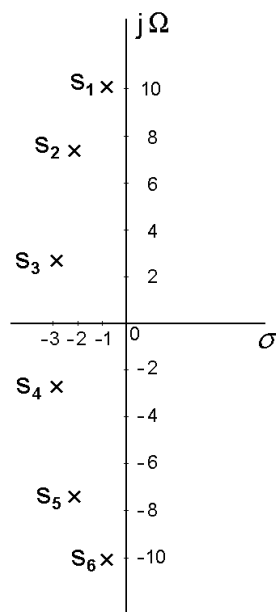


Figura 3.3: Distribución de polos del filtro Chebyshev del problema 3.4

Problema 3.5 Un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 5$, con un rizo en la banda de paso de 1 dB y una frecuencia de paso $\omega_p = 20\text{ rad/seg}$, tiene la siguiente distribución de polos. En un diagrama de polos y ceros grafique su ubicación.

$$s_1 = -1.789 + j19.802$$

$$s_2 = -4.684 + j12.2385$$

$$s_3 = -5.790$$

$$s_4 = -4.684 - j12.2385$$

$$s_5 = -1.789 - j19.802$$

Solución:

La gráfica con la distribución de polos se muestra en la figura 3.4.

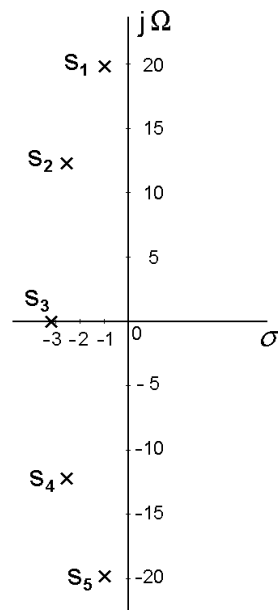


Figura 3.4: Distribución de polos del filtro Chebyshev del problema 3.5

Problema 3.6 A partir de una distribución de polos obtenidos de las características de un filtro pasa bajas Butterworth, encuentre la ubicación de los polos para un filtro Chebyshev del tipo I con las siguientes características: Orden $N = 4$, $\varepsilon = 0.4$ y $\omega_p = 25 \text{ rad/seg}$. Suponga que la posición de los polos para el filtro Butterworth es:

$$s_1 = e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j0.923879$$

$$s_2 = e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j0.382683$$

$$s_3 = e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j0.382683$$

$$s_4 = e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j0.923879$$

Solución:

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

Se multiplica la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k$, con $\omega_p = 25 \text{ rad/seg}$.

$$\beta'_k = \frac{1}{4} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.4) = 0.4118$$

$$\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k = 25 \operatorname{senh}(0.4118) = 10.58845$$

$$\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k = 25 \operatorname{cosh}(0.4118) = 27.14987$$

$$s_1 = -0.382683 (10.58845) + j0.923879 (27.14987)$$

$$s_2 = -0.923879 (10.58845) + j0.382683 (27.14987)$$

$$s_3 = -0.923879 (10.58845) - j0.382683 (27.14987)$$

$$s_4 = -0.382683 (10.58845) - j0.923879 (27.14987)$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$s_1 = -4.0520 + j25.0832$$

$$s_2 = -9.7824 + j10.3898$$

$$s_3 = -9.7824 - j10.3898$$

$$s_4 = -4.0520 - j25.0832$$

Problema 3.7 Para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I con $N = 6$, $\varepsilon = 0.8$ y $\omega_p = 40 \text{ rad/seg}$, determine:

- La distribución de los polos para la aproximación Butterworth.
- El valor de β'_k .
- Los valores numéricos de $\sinh\beta'_k$ y $\cosh\beta'_k$.
- La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev.

Solución:

a) Para $N = 6$ la separación angular entre polos para la aproximación Butterworth es de $180^\circ/6 = 30^\circ$. Como el orden es par, para ubicar el primer polo se toma al eje real como referencia entre ángulos de dos polos consecutivos, es decir, a partir del eje real un polo se localiza a 15° y el otro a -15° , con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{array}{lll} s_1 = e^{j15^\circ} & s_5 = e^{j135^\circ} & s_9 = e^{j255^\circ} = e^{-j105^\circ} \\ s_2 = e^{j45^\circ} & s_6 = e^{j165^\circ} & s_{10} = e^{j285^\circ} \\ s_3 = e^{j75^\circ} & s_7 = e^{j195^\circ} = e^{-j165^\circ} & s_{11} = e^{j315^\circ} \\ s_4 = e^{j105^\circ} & s_8 = e^{j225^\circ} = e^{-j135^\circ} & s_{12} = e^{j345^\circ} \end{array}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{array}{l} s_1 = e^{j105^\circ} = -0.25882 + j0.96593 \\ s_2 = e^{j135^\circ} = -0.70711 + j0.70711 \\ s_3 = e^{j165^\circ} = -0.96593 + j0.25882 \\ s_4 = e^{-j165^\circ} = -0.96593 - j0.25882 \\ s_5 = e^{-j135^\circ} = -0.70711 - j0.70711 \\ s_6 = e^{-j105^\circ} = -0.25882 - j0.96593 \end{array}$$

b) Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen}\alpha_k \sinh\beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos\alpha_k \cosh\beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

El valor de β'_k es

$$\beta'_k = \frac{1}{6} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.8) = 0.1746$$

c) Los valores numéricos de $\sinh\beta'_k$ y $\cosh\beta'_k$ son

$$\omega_p \sinh\beta'_k = 40 \sinh(0.1746) = 7.01954$$

$$\omega_p \cosh\beta'_k = 40 \cosh(0.1746) = 40.6113$$

d) La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \sinh \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \cosh \beta'_k$, con $\omega_p = 40 \text{ rad/seg}$.

$$s_1 = -0.25882 (7.01954) + j0.96593 (40.6113)$$

$$s_2 = -0.70711 (7.01954) + j0.70711 (40.6113)$$

$$s_3 = -0.96593 (7.01954) + j0.25882 (40.6113)$$

$$s_4 = -0.96593 (7.01954) - j0.25882 (40.6113)$$

$$s_5 = -0.70711 (7.01954) - j0.70711 (40.6113)$$

$$s_6 = -0.25882 (7.01954) - j0.96593 (40.6113)$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$s_1 = -1.8168 + j39.2277$$

$$s_2 = -4.9636 + j28.7167$$

$$s_3 = -6.7804 + j10.5110$$

$$s_4 = -6.7804 - j10.5110$$

$$s_5 = -4.9636 - j28.7167$$

$$s_6 = -1.8168 - j39.2277$$

Problema 3.8 Encuentre el valor en decibeles del ancho del rizo en la banda de paso de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I para:

- $\varepsilon = 0.2$
- $\varepsilon = 0.4$
- $\varepsilon = 0.8$

Solución:

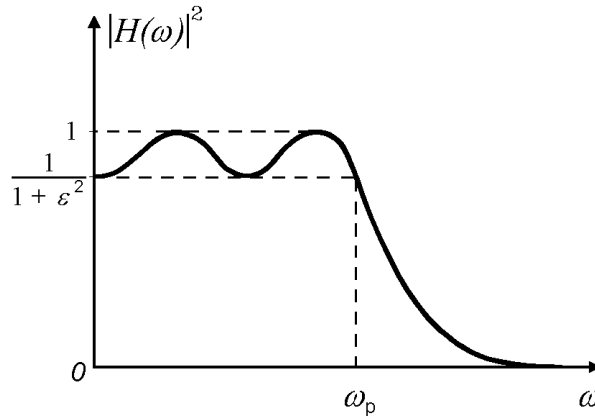


Figura 3.5: Magnitud en potencia indicando el parámetro ε para el problema 3.8

De la figura 3.5 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

La expresión de la ganancia en dB para $\omega = \omega_p$ es

$$10 \log |H(\omega_p)|^2 = 20 \log |H(\omega_p)| = 10 \log \left| \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right|$$

$$10 \log |H(\omega_p)|^2 = -10 \log |1 + \varepsilon^2|$$

El signo negativo en la última expresión indica que se trata de un valor de pérdida de la ganancia y corresponde al ancho del rizo en la banda de paso.

a) Se obtiene el ancho del rizo para $\varepsilon = 0.2$

$$RW_{dB} = 10 \log \left(1 + (0.2)^2 \right) = 0.17 \text{ dB}$$

Ancho del rizo en decibeles para $\varepsilon = 0.2$ es

$$RW_{dB} = 0.17 \text{ dB}$$

b) Se obtiene el ancho del rizo para $\varepsilon = 0.4$

$$RW_{dB} = 10 \log \left(1 + (0.4)^2 \right) = 0.645 \text{ dB}$$

Ancho del rizo en decibeles para $\varepsilon = 0.4$ es

$$RW_{dB} = 0.645 \text{ dB}$$

c) Se obtiene el ancho del rizo para $\varepsilon = 0.8$

$$RW_{dB} = 10 \log \left(1 + (0.8)^2 \right) = 2.15 dB$$

Ancho del rizo en decibeles para $\varepsilon = 0.8$ es

$$RW_{dB} = 2.15 dB$$

Problema 3.9 Determine y grafique en un diagrama de polos y ceros los polos de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 4$, con un rizo en la banda de paso de 0.75 dB y una frecuencia de paso $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$.

Solución:

Se proporcionan dos métodos de solución. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Para $N = 4$ la separación angular entre polos para la aproximación Butterworth es de $180^\circ/4 = 45^\circ$. Como el orden es par, para ubicar el primer polo se toma al eje real como referencia entre ángulos de dos polos consecutivos, es decir, a partir del eje real un polo se localiza a 22.5° y el otro a -22.5° , con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j22.5^\circ} & s_5 &= e^{j202.5^\circ} = e^{-j157.5^\circ} \\ s_2 &= e^{j67.5^\circ} & s_6 &= e^{j247.5^\circ} = e^{-j112.5^\circ} \\ s_3 &= e^{j112.5^\circ} & s_7 &= e^{j292.5^\circ} \\ s_4 &= e^{j157.5^\circ} & s_8 &= e^{j337.5^\circ} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j0.923879 \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j0.382683 \\ s_3 &= e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j0.382683 \\ s_4 &= e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j0.923879 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

$$0.75 \text{ dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.075)} - 1} = 0.434168$$

Al sustituir valores se tiene

$$\beta'_k = \frac{1}{4} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.434168) = 0.392894$$

$$\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k = 30 \operatorname{senh}(0.392894) = 12.0924$$

$$\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k = 30 \operatorname{cosh}(0.392894) = 32.3454$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \sinh \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \cosh \beta'_k$, con $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$.

$$s_1 = -0.382683 (12.0924) + j0.923879 (32.3454)$$

$$s_2 = -0.923879 (12.0924) + j0.382683 (32.3454)$$

$$s_3 = -0.923879 (12.0924) - j0.382683 (32.3454)$$

$$s_4 = -0.382683 (12.0924) - j0.923879 (32.3454)$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$s_1 = -4.6276 + j29.8832$$

$$s_2 = -11.1719 + j12.3780$$

$$s_3 = -11.1719 - j12.3780$$

$$s_4 = -4.6276 - j29.8832$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 4$, $\varepsilon = 0.434168$ y $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$,

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon)$$

donde

$$\beta'_k = 0.392894$$

$$\sinh \beta'_k = 0.40308$$

$$\cosh \beta'_k = 1.07818$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.1 y 3.2. La tabla 3.1 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.2 especifica la ubicación de éstos.

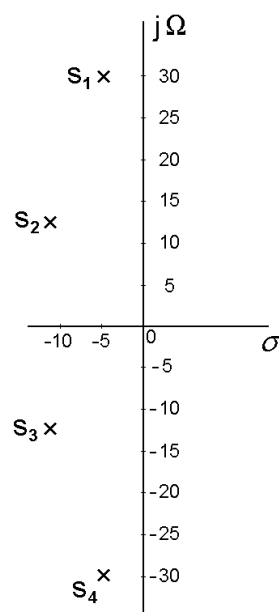
La gráfica con la distribución de polos se muestra en la figura 3.6.

Tabla 3.1: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.75 dB , $N = 4$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\text{sen} \alpha_k$	$\sigma'_k = \text{sen} \alpha_k \text{senh} \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \text{cosh} \beta'_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	0.154252	0.996108
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	0.372397	0.412601
3	$5\pi/8$	-0.382683	0.923879	0.372397	-0.412601
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	0.154252	-0.996108
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-0.154252	-0.996108
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-0.372397	-0.412601
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-0.372397	0.412601
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-0.154252	0.966108

Tabla 3.2: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.75 dB , $N = 4$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \text{sen} \alpha_k \text{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \text{cosh} \beta'_k$
1	-4.6276	29.8832
2	-11.1719	12.3780
3	-11.1719	-12.3780
4	-4.6276	-29.8832
5	4.6276	-29.8832
6	11.1719	-12.3780
7	11.1719	12.3780
8	4.6276	29.8832

**Figura 3.6:** Distribución de polos del filtro Chebyshev del problema 3.9

Problema 3.10 Para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I, determine y grafique en un diagrama de polos y ceros la distribución de polos para un filtro de orden $N = 5$, con un rizo en la banda de paso de 1.5 dB y una frecuencia de paso $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$.

Solución:

Se proporcionan dos métodos de solución. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Para $N = 5$ la separación angular entre polos para la aproximación Butterworth es de $180^\circ/5 = 36^\circ$. Como el orden es impar, un polo se ubica en el eje real, con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j0^\circ} & s_6 &= e^{j180^\circ} \\ s_2 &= e^{j36^\circ} & s_7 &= e^{j216^\circ} = e^{-j144^\circ} \\ s_3 &= e^{j72^\circ} & s_8 &= e^{j252^\circ} = e^{-j108^\circ} \\ s_4 &= e^{j108^\circ} & s_9 &= e^{j288^\circ} \\ s_5 &= e^{j144^\circ} & s_{10} &= e^{j324^\circ} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j108^\circ} = -0.309017 + j0.951057 \\ s_2 &= e^{j144^\circ} = -0.809017 + j0.587785 \\ s_3 &= e^{j180^\circ} = -1 \\ s_4 &= e^{-j144^\circ} = -0.809017 - j0.587785 \\ s_5 &= e^{-j108^\circ} = -0.309017 - j0.951057 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen}\alpha_k \operatorname{senh}\beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos\alpha_k \operatorname{cosh}\beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

$$1.5 \text{ dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.15)} - 1} = 0.64229$$

Al sustituir valores se tiene

$$\beta'_k = \frac{1}{5} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.64229) = 0.245187$$

$$\omega_p \operatorname{senh}\beta'_k = 50 \operatorname{senh}(0.245187) = 12.38255$$

$$\omega_p \operatorname{cosh}\beta'_k = 50 \operatorname{cosh}(0.245187) = 51.51046$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \sinh \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \cosh \beta'_k$, con $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.309017 (12.38255) + j0.95106 (51.51046) \\ s_2 &= -0.809017 (12.38255) + j0.58779 (51.51046) \\ s_3 &= -12.38255 \\ s_4 &= -0.809017 (12.38255) - j0.58779 (51.51046) \\ s_5 &= -0.309017 (12.38255) - j0.95106 (51.51046) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$\begin{aligned} s_1 &= -3.826418 + j48.989538 \\ s_2 &= -10.017693 + j30.277333 \\ s_3 &= -12.38255 \\ s_4 &= -10.017693 - j30.277333 \\ s_5 &= -3.826418 - j48.989538 \end{aligned}$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 5$, $\varepsilon = 0.64229$ y $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$,

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

Tabla 3.3: Cálculo de los polos para: Rizo de 1.5 dB, $N = 5$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\sin \alpha_k$	$\sigma'_k = \sin \alpha_k \sinh \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$
1	$\pi/10$	0.951057	0.309017	0.076528	0.979788
2	$3\pi/10$	0.587785	0.809017	0.200353	0.605542
3	$5\pi/10$	0	1	0.24765	0
4	$7\pi/10$	-0.587785	0.809017	0.200353	-0.605542
5	$9\pi/10$	-0.951057	0.309017	0.076528	-0.979788
6	$11\pi/10$	-0.951057	-0.309017	-0.076528	-0.979788
7	$13\pi/10$	-0.587785	-0.809017	-0.200353	-0.605542
8	$15\pi/10$	0	-1	-0.24765	0
9	$17\pi/10$	0.587785	-0.809017	-0.200353	0.605542
10	$19\pi/10$	0.951057	-0.309017	-0.076528	0.979788

donde

$$\beta'_k = 0.245187$$

$$\sinh \beta'_k = 0.24765$$

$$\cosh \beta'_k = 1.03021$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.3 y 3.4. La tabla 3.3 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.4 especifica la ubicación de éstos.

Tabla 3.4: Cálculo de los polos para: Rizo de 1.5 dB, $N = 5$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$
1	-3.82640	48.98940
2	-10.01765	30.27710
3	-12.38250	0
4	-10.01765	-30.27710
5	-3.82640	-48.98940
6	3.82640	-48.98940
7	10.01765	-30.27710
8	12.38250	0
9	10.01765	30.27710
10	3.82640	48.98940

La gráfica con la distribución de polos se muestra en la figura 3.7.

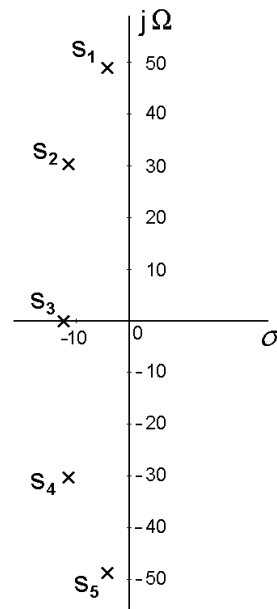


Figura 3.7: Distribución de polos del filtro Chebyshev del problema 3.10

Problema 3.11 Obtenga la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 6$. Para ello, suponga que la distribución de polos es la indicada en el problema 4.

Solución:

A continuación se reescribe la distribución de los polos del problema 4.

$$s_1 = -0.7765 + j10.0845$$

$$s_2 = -2.1215 + j7.3824$$

$$s_3 = -2.8980 + j2.70215$$

$$s_4 = -2.8980 - j2.70215$$

$$s_5 = -2.1215 - j7.3824$$

$$s_6 = -0.7765 - j10.0845$$

Que corresponden a un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 6$, con un rizo en la banda de paso de 0.5 dB y una frecuencia de paso $\omega_p = 10 \text{ rad/seg}$.

En esta distribución aparecen polos y sus conjugados, por lo que éstos se pueden agrupar de tal forma que sus productos estarán dados por

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) \\ &= (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\ &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \end{aligned}$$

donde σ_k es la parte real y Ω_k la parte imaginaria de cada polo.

Para el polo s_1 y su conjugado s_6 se tiene (con $\sigma_1 = -0.7765$ y $\Omega_1 = 10.0845$)

$$(s - s_1)(s - s_6) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(0.7765)s + (0.7765)^2 + (10.0845)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_6) = s^2 + 1.553s + 102.30$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_5 se tiene (con $\sigma_2 = -2.1215$ y $\Omega_2 = 7.3824$)

$$(s - s_2)(s - s_5) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(2.1215)s + (2.1215)^2 + (7.3824)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_5) = s^2 + 4.243s + 59$$

Para el polo s_3 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_3 = -2.898$ y $\Omega_3 = 2.70215$)

$$(s - s_3)(s - s_4) = (s - s_3)(s - s_3^*) = s^2 + 2(2.898)s + (2.898)^2 + (2.70215)^2$$

$$(s - s_3)(s - s_4) = s^2 + 5.796s + 15.70$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 1.553s + 102.3)(s^2 + 4.243s + 59)(s^2 + 5.796s + 15.7)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(102.3 - \omega^2 + j1.553\omega)(59 - \omega^2 + j4.243\omega)(15.7 - \omega^2 + j5.796\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(102.3)(59)(15.7)} = \frac{K_0}{94760.49}$$

Por otro lado, para N par

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Como el rizo en la banda de paso es de 0.5 dB

$$0.5 \text{ dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.05} - 1} = 0.3493$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{94760.49} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.3493)^2}} \implies K_0 = \frac{94760.49}{\sqrt{1 + (0.3493)^2}} = 89459.98871$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{89459.98871}{(s^2 + 1.553s + 102.3)(s^2 + 4.243s + 59)(s^2 + 5.796s + 15.7)}$$

Problema 3.12 Utilice la distribución de polos del problema 5 para determinar la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 5$.

Solución:

A continuación se reescribe la distribución de los polos del problema 5.

$$s_1 = -1.789 + j19.802$$

$$s_2 = -4.684 + j12.2385$$

$$s_3 = -5.790$$

$$s_4 = -4.684 - j12.2385$$

$$s_5 = -1.789 - j19.802$$

Que corresponden a un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I de orden $N = 5$, con un rizo en la banda de paso de 1 dB y una frecuencia de paso $\omega_p = 20 \text{ rad/seg}$.

En esta distribución aparecen polos y sus conjugados, por lo que éstos se pueden agrupar de tal forma que sus productos estarán dados por

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) \\ &= (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\ &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \end{aligned}$$

donde σ_k es la parte real y Ω_k la parte imaginaria de cada polo.

Para el polo s_1 y su conjugado s_5 se tiene (con $\sigma_1 = -1.789$ y $\Omega_1 = 19.802$)

$$\begin{aligned} (s - s_1)(s - s_5) &= (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(1.789)s + (1.789)^2 + (19.802)^2 \\ (s - s_1)(s - s_5) &= s^2 + 3.578s + 395.32 \end{aligned}$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_2 = -4.684$ y $\Omega_2 = 12.2385$)

$$\begin{aligned} (s - s_2)(s - s_4) &= (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(4.684)s + (4.684)^2 + (12.2385)^2 \\ (s - s_2)(s - s_4) &= s^2 + 9.368s + 171.721 \end{aligned}$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 3.578s + 395.32)(s^2 + 9.368s + 171.721)(s + 5.79)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(s) \Big|_{s=j\omega} \\ H(\omega) &= \frac{K_0}{(395.32 - \omega^2 + j3.578\omega)(171.721 - \omega^2 + j9.368\omega)(5.79 + j\omega)} \end{aligned}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(395.32)(171.721)(5.79)} = \frac{K_0}{393052.68}$$

Por otro lado, para N impar

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = 1$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{393052.68} = 1 \quad \implies \quad K_0 = 393052.68$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{393052.68}{(s^2 + 3.578s + 395.32)(s^2 + 9.368s + 171.72)(s + 5.79)}$$

Problema 3.13 Determine la función de transferencia $H(s)$ para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con 2 dB del ancho del rizo en la banda de paso en el intervalo de 0 a 15 rad/seg y de orden $N = 4$. Utilice las tablas disponibles en la obra *Teoría de filtros del tipo Chebyshev: Función de transferencia* para dar solución al problema.

Solución:

En las tablas 3.5 y 3.6 se transcriben parte de las tablas de la obra de referencia. Se hace notar que éstas están evaluadas para $\omega_p = 1\text{ rad/seg}$.

Tabla 3.5: Polinomio denominador de la función Chebyshev tipo I con rizo: 2 dB

N	Función de Chebyshev tipo I (forma factorizada) con rizo de: 2 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 1.3076$
2	$s^2 + 0.8038s + 0.8231$
3	$(s^2 + 0.3689s + 0.8861)(s + 0.3689)$
4	$(s^2 + 0.2098s + 0.9287)(s^2 + 0.5064s + 0.2216)$
5	$(s^2 + 0.1349s + 0.9522)(s^2 + 0.3532s + 0.39315)(s + 0.2183)$
6	$(s^2 + 0.09395s + 0.96595)(s^2 + 0.2567s + 0.5329)(s^2 + 0.3506s + 0.0999)$
7	$(s^2 + 0.069s + 0.9746)(s^2 + 0.1937s + 0.6354)(s^2 + 0.28s + 0.2124)(s + 0.1553)$

Tabla 3.6: Factor de normalización de la función Chebyshev tipo I, rizo: 0.5 dB , 1 dB , 2 dB

N	Constante K_0 del numerador		
	Para un rizo de: $1/2\text{ dB}$	Para un rizo de: 1 dB	Para un rizo de: 2 dB
1	2.8628	1.9652	1.3076
2	1.4313	0.9826	0.6538
3	0.7157	0.4913	0.3269
4	0.3578	0.24565	0.16345
5	0.1789	0.1228	0.0817
6	0.0895	0.0614	0.0409
7	0.0447	0.0307	0.0204

Para determinar la función de transferencia $H(s)$ para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con un rizo en la banda de paso de 2 dB , una frecuencia $\omega_p = 15\text{ rad/seg}$ y un orden $N = 4$ utilizando la información de las tablas 3.5 y 3.6 se procede como sigue.

De la tabla 3.5 se consigue el polinomio denominador de la función de transferencia y de la tabla 3.6 el valor de la constante de normalización en amplitud, con $\omega_p = 1\text{ rad/seg}$, obteniéndose

$$H(s) = \frac{0.16345}{(s^2 + 0.2098s + 0.9287)(s^2 + 0.5064s + 0.2216)}$$

La función de transferencia solicitada se logra al sustituir s por s/ω_p con $\omega_p = 15\text{ rad/seg}$, como sigue

$$H(s) = H(s') \Big|_{s'=s/\omega_p}$$

$$H(s') = \frac{0.16345}{\left((s')^2 + 0.2098s' + 0.9287\right)\left((s')^2 + 0.5064s' + 0.2216\right)} \Big|_{s'=s/\omega_p}$$

$$H(s) = \frac{0.16345}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.2098 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.9287\right) \left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.5064 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.2216\right)}$$

$$H(s) = \frac{0.16345 \omega_p^4}{(s^2 + 0.2098 \omega_p s + 0.9287 \omega_p^2) (s^2 + 0.5064 \omega_p s + 0.2216 \omega_p^2)}$$

La función de transferencia para $\omega_p = 15 \text{ rad/seg}$ es

$$H(s) = \frac{8274.65625}{(s^2 + 3.147 s + 208.9575) (s^2 + 7.596 s + 49.86)}$$

Problema 3.14 Utilice las tablas disponibles en la obra *Teoría de filtros del tipo Chebyshev: Función de transferencia* para dar solución al problema. Determine la función de transferencia para un filtro Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud de orden cinco con frecuencia $\omega_p = 200 \text{ rad/seg}$, para un rizo en la banda de paso de:

- 0.5 dB
- 1 dB
- 2 dB

Solución:

En las tablas 3.7 a 3.10 se transcriben parte de las tablas de la obra de referencia. Se hace notar que éstas están evaluadas para $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$.

Tabla 3.7: Polinomio denominador de la función Chebyshev tipo I con rizo: 0.5 dB

N	Función de Chebyshev tipo I (forma factorizada) con rizo de: 1/2 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 2.8628$
2	$s^2 + 1.4256s + 1.5162$
3	$(s^2 + 0.6265s + 1.14245)(s + 0.6265)$
4	$(s^2 + 0.3507s + 1.0635)(s^2 + 0.8467s + 0.3564)$
5	$(s^2 + 0.2239s + 1.0358)(s^2 + 0.58625s + 0.4768)(s + 0.3623)$
6	$(s^2 + 0.1553s + 1.023)(s^2 + 0.4243s + 0.59)(s^2 + 0.5796s + 0.157)$
7	$(s^2 + 0.114s + 1.016)(s^2 + 0.3194s + 0.6769)(s^2 + 0.4616s + 0.2539)(s + 0.2562)$

Tabla 3.8: Polinomio denominador de la función Chebyshev tipo I con rizo: 1 dB

N	Función de Chebyshev tipo I (forma factorizada) con rizo de: 1 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 1.9652$
2	$s^2 + 1.0977s + 1.1025$
3	$(s^2 + 0.4942s + 0.9942)(s + 0.4942)$
4	$(s^2 + 0.2791s + 0.9865)(s^2 + 0.6737s + 0.2794)$
5	$(s^2 + 0.1789s + 0.9883)(s^2 + 0.4684s + 0.4293)(s + 0.2895)$
6	$(s^2 + 0.1244s + 0.9907)(s^2 + 0.3398s + 0.5577)(s^2 + 0.4641s + 0.1247)$
7	$(s^2 + 0.0914s + 0.9927)(s^2 + 0.25615s + 0.6535)(s^2 + 0.37s + 0.2305)(s + 0.2054)$

Tabla 3.9: Polinomio denominador de la función Chebyshev tipo I con rizo: 2 dB

N	Función de Chebyshev tipo I (forma factorizada) con rizo de: 2 dB Denominador de $H(s)$
1	$s + 1.3076$
2	$s^2 + 0.8038s + 0.8231$
3	$(s^2 + 0.3689s + 0.8861)(s + 0.3689)$
4	$(s^2 + 0.2098s + 0.9287)(s^2 + 0.5064s + 0.2216)$
5	$(s^2 + 0.1349s + 0.9522)(s^2 + 0.3532s + 0.39315)(s + 0.2183)$
6	$(s^2 + 0.09395s + 0.96595)(s^2 + 0.2567s + 0.5329)(s^2 + 0.3506s + 0.0999)$
7	$(s^2 + 0.069s + 0.9746)(s^2 + 0.1937s + 0.6354)(s^2 + 0.28s + 0.2124)(s + 0.1553)$

Tabla 3.10: Factor de normalización de la función Chebyshev tipo I, rizo: 0.5 dB, 1 dB, 2 dB

Constante K_0 del numerador			
N	Para un rizo de: 1/2 dB	Para un rizo de: 1 dB	Para un rizo de: 2 dB
1	2.8628	1.9652	1.3076
2	1.4313	0.9826	0.6538
3	0.7157	0.4913	0.3269
4	0.3578	0.24565	0.16345
5	0.1789	0.1228	0.0817
6	0.0895	0.0614	0.0409
7	0.0447	0.0307	0.0204

a) Para determinar la función de transferencia $H(s)$ para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con un rizo en la banda de paso de 0.5 dB, una frecuencia $\omega_p = 200 \text{ rad/seg}$ y un orden $N = 5$ utilizando la información de las tablas 3.7 a 3.10 se procede como sigue.

De la tabla 3.7 se consigue el polinomio denominador de la función de transferencia y de la tabla 3.10 el valor de la constante de normalización en amplitud, con $\omega_p = 1 \text{ rad/seg}$, obteniéndose

$$H(s) = \frac{0.1789}{(s^2 + 0.2239s + 1.0358)(s^2 + 0.58625s + 0.4768)(s + 0.3623)}$$

La función de transferencia solicitada se logra al sustituir s por s/ω_p con $\omega_p = 200 \text{ rad/seg}$, como sigue

$$H(s) = H(s') \Big|_{s' = \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H(s') = \frac{0.1789}{\left((s')^2 + 0.2239s' + 1.0358\right) \left((s')^2 + 0.58625s' + 0.4768\right) (s' + 0.3623)} \Big|_{s' = \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H(s) = \frac{0.1789}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.2239 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 1.0358\right) \left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.58625 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.4768\right) \left(\frac{s}{\omega_p} + 0.3623\right)}$$

$$H(s) = \frac{0.1789 \omega_p^5}{(s^2 + 0.2239 \omega_p s + 1.0358 \omega_p^2) (s^2 + 0.58625 \omega_p s + 0.4768 \omega_p^2) (s + 0.3623 \omega_p)}$$

La función de transferencia para $\omega_p = 200 \text{ rad/seg}$ es

$$H(s) = \frac{5.7248 \times 10^{10}}{(s^2 + 44.78s + 41432)(s^2 + 117.25s + 19072)(s + 72.46)}$$

b) Para determinar la función de transferencia $H(s)$ para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con un rizo en la banda de paso de 1 dB , una frecuencia $\omega_p = 200\text{ rad/seg}$ y un orden $N = 5$ utilizando la información de las tablas 3.7 a 3.10 se procede como sigue.

De la tabla 3.8 se consigue el polinomio denominador de la función de transferencia y de la tabla 3.10 el valor de la constante de normalización en amplitud, con $\omega_p = 1\text{ rad/seg}$, obteniéndose

$$H(s) = \frac{0.1228}{(s^2 + 0.1789s + 0.9883)(s^2 + 0.4684s + 0.4293)(s + 0.2895)}$$

La función de transferencia solicitada se logra al sustituir s por s/ω_p con $\omega_p = 200\text{ rad/seg}$, como sigue

$$H(s) = H(s') \Big|_{s' = \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H(s') = \frac{0.1228}{\left((s')^2 + 0.1789s' + 0.9883\right) \left((s')^2 + 0.4684s' + 0.4293\right) (s' + 0.2895)} \Big|_{s' = \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H(s) = \frac{0.1228}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.1789 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.9883\right) \left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.4684 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.4293\right) \left(\frac{s}{\omega_p} + 0.2895\right)}$$

$$H(s) = \frac{0.1228 \omega_p^5}{(s^2 + 0.1789 \omega_p s + 0.9883 \omega_p^2) (s^2 + 0.4684 \omega_p s + 0.4293 \omega_p^2) (s + 0.2895 \omega_p)}$$

La función de transferencia para $\omega_p = 200\text{ rad/seg}$ es

$$H(s) = \frac{3.9296 \times 10^{10}}{(s^2 + 35.78s + 39532)(s^2 + 93.68s + 17172)(s + 57.9)}$$

c) Para determinar la función de transferencia $H(s)$ para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I normalizado en amplitud con un rizo en la banda de paso de 2 dB , una frecuencia $\omega_p = 200\text{ rad/seg}$ y un orden $N = 5$ utilizando la información de las tablas 3.7 a 3.10 se procede como sigue.

De la tabla 3.9 se consigue el polinomio denominador de la función de transferencia y de la tabla 3.10 el valor de la constante de normalización en amplitud, con $\omega_p = 1\text{ rad/seg}$, obteniéndose

$$H(s) = \frac{0.0817}{(s^2 + 0.1349s + 0.9522)(s^2 + 0.3532s + 0.39315)(s + 0.2183)}$$

La función de transferencia solicitada se logra al sustituir s por s/ω_p con $\omega_p = 200\text{ rad/seg}$, como sigue

$$H(s) = H(s') \Big|_{s' = \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H(s') = \frac{0.0817}{\left((s')^2 + 0.1349s' + 0.9522\right) \left((s')^2 + 0.3532s' + 0.39315\right) (s' + 0.2183)} \Big|_{s' = \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H(s) = \frac{0.0817}{\left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.1349 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.9522\right) \left(\frac{s^2}{\omega_p^2} + 0.3532 \left(\frac{s}{\omega_p}\right) + 0.39315\right) \left(\frac{s}{\omega_p} + 0.2183\right)}$$

$$H(s) = \frac{0.0817 \omega_p^5}{(s^2 + 0.1349 \omega_p s + 0.9522 \omega_p^2) (s^2 + 0.3532 \omega_p s + 0.39315 \omega_p^2) (s + 0.2183 \omega_p)}$$

La función de transferencia para $\omega_p = 200 \text{ rad/seg}$ es

$$H(s) = \frac{2.6144 \times 10^{10}}{(s^2 + 26.98 s + 38088) (s^2 + 70.64 s + 15726) (s + 43.66)}$$

Problema 3.15 Determine la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I con las siguientes especificaciones:

Máxima atenuación en la banda de paso de 1.5 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$

Máxima ganancia en la banda de rechazo de 50 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 160 \text{ rad/seg}$

Solución:

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Primero se determina el orden del filtro.

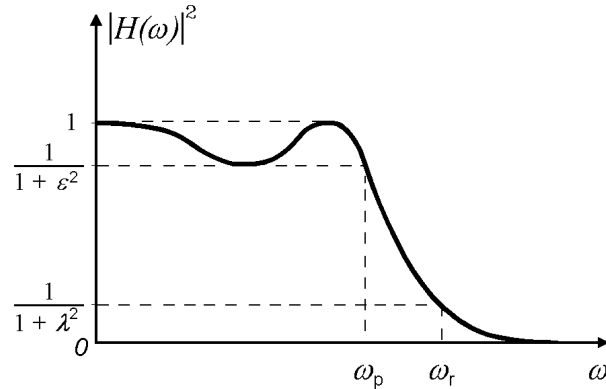


Figura 3.8: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.15

De la figura 3.8 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

$$10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1+\epsilon^2} \right)$$

$$10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1+\lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$1.5 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.15} - 1} = 0.64229$$

$$50 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^5 - 1} = 316.2262$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 3.2$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{316.2262}{0.64229} \right)}{\cosh^{-1} (3.2)} = \frac{\cosh^{-1} (492.342)}{1.831} = 3.764$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 4$.

Se proporcionan dos métodos en la obtención de los polos. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Para $N = 4$ la separación angular entre polos para la aproximación Butterworth es de $180^\circ/4 = 45^\circ$. Como el orden es par, para ubicar el primer polo se toma al eje real como referencia entre ángulos de dos polos consecutivos, es decir, a partir del eje real un polo se localiza a 22.5° y el otro a -22.5° , con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg.}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j22.5^\circ} & s_5 &= e^{j202.5^\circ} = e^{-j157.5^\circ} \\ s_2 &= e^{j67.5^\circ} & s_6 &= e^{j247.5^\circ} = e^{-j112.5^\circ} \\ s_3 &= e^{j112.5^\circ} & s_7 &= e^{j292.5^\circ} \\ s_4 &= e^{j157.5^\circ} & s_8 &= e^{j337.5^\circ} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j0.923879 \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j0.382683 \\ s_3 &= e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j0.382683 \\ s_4 &= e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j0.923879 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones (con $\varepsilon = 0.64229$ y $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$)

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

Al sustituir valores se tiene

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{1}{4} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.64229) = 0.306483 \\ \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k &= 50 \operatorname{senh}(0.306483) = 15.56518 \\ \omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k &= 50 \operatorname{cosh}(0.306483) = 52.36674 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k$, con $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.382683 (15.56518) + j0.923879 (52.36674) \\ s_2 &= -0.923879 (15.56518) + j0.382683 (52.36674) \\ s_3 &= -0.923879 (15.56518) - j0.382683 (52.36674) \\ s_4 &= -0.382683 (15.56518) - j0.923879 (52.36674) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$\begin{aligned} s_1 &= -5.9565 + j48.3805 \\ s_2 &= -14.3803 + j20.0398 \\ s_3 &= -14.3803 - j20.0398 \\ s_4 &= -5.9565 - j48.3805 \end{aligned}$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 4$, $\varepsilon = 0.64229$ y $\omega_p = 50\text{rad/seg}$,

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \text{sen } \alpha_k \text{senh } \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \text{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \beta'_k &= 0.306483 \\ \text{senh } \beta'_k &= 0.311304 \\ \cosh \beta'_k &= 1.047335 \end{aligned}$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.11 y 3.12. La tabla 3.11 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.12 especifica la ubicación de éstos.

Un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\ (s - s_k)(s - s_k^*) &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \end{aligned}$$

Tabla 3.11: Cálculo de los polos para: Rizo de 1.5 dB, $N = 4$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\text{sen } \alpha_k$	$\sigma'_k = \text{sen } \alpha_k \text{senh } \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	0.119131	0.967611
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	0.287607	0.400797
3	$5\pi/8$	-0.382683	0.923879	0.287607	-0.400797
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	0.119131	-0.967611
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-0.119131	-0.967611
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-0.287607	-0.400797
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-0.287607	0.400797
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-0.119131	0.967611

Tabla 3.12: Cálculo de los polos para: Rizo de 1.5 dB, $N = 4$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	- 5.9565	48.3805
2	- 14.3803	20.0398
3	- 14.3803	-20.0398
4	- 5.9565	-48.3805
5	5.9565	-48.3805
6	14.3803	-20.0398
7	14.3803	20.0398
8	5.9565	48.3805

Para el polo s_1 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_1 = -5.9565$ y $\Omega_1 = 48.3805$)

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(5.9565)s + (5.9565)^2 + (48.3805)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 11.913s + 2376.153$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_2 = -14.3803$ y $\Omega_2 = 20.0398$)

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(14.3803)s + (14.3803)^2 + (20.0398)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 28.761s + 608.387$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 11.913s + 2376.153)(s^2 + 28.761s + 608.387)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(2376.153 - \omega^2 + j11.913\omega)(608.387 - \omega^2 + j28.761\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(2376.153)(608.387)} = \frac{K_0}{1445620.595}$$

Por otro lado, para N par (con $\varepsilon = 0.64229$)

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{1445620.595} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.64229)^2}}$$

$$K_0 = \frac{1445620.595}{\sqrt{1 + (0.64229)^2}} = 1216338.62$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{1216338.62}{(s^2 + 11.913s + 2376.153)(s^2 + 28.761s + 608.387)}$$

Problema 3.16 Obtenga la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo I con las siguientes especificaciones:

Mínima ganancia en la banda de paso de 0.7 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$

Mínima pérdida en la banda de rechazo de 60 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 60 \text{ rad/seg}$

Solución:

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Primero se determina el orden del filtro.

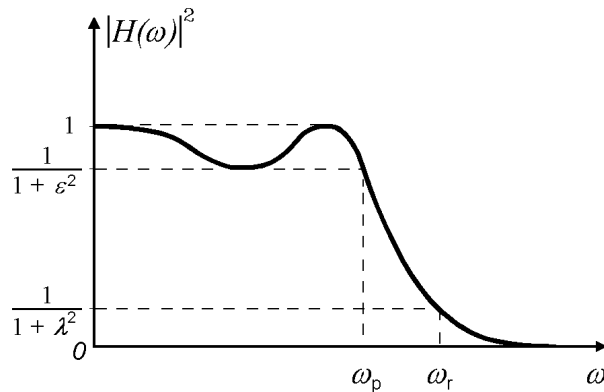


Figura 3.9: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.16

De la figura 3.9 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$0.7 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.07)} - 1} = 0.418208$$

$$60 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^6 - 1} = 999.9995$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 2$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{999.9995}{0.418208} \right)}{\cosh^{-1} (2)} = \frac{8.472678}{1.316958} = 6.4335$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 7$.

Se proporcionan dos métodos en la obtención de los polos. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Basados en la aproximación Butterworth, los polos para $N = 7$ tienen una separación angular entre polos de $180^\circ/7$ (25.714° o $\pi/7$ radianes). Como el orden es impar, un polo se ubica en el eje real, con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg.}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j102.86^\circ} = e^{j4\pi/7} = -0.222521 + j0.974928 = s_7^* \\ s_2 &= e^{j128.57^\circ} = e^{j5\pi/7} = -0.623490 + j0.781831 = s_6^* \\ s_3 &= e^{j154.29^\circ} = e^{j6\pi/7} = -0.900969 + j0.433884 = s_5^* \\ s_4 &= e^{j180^\circ} = e^{j\pi} = -1 \\ s_8 &= e^{j282.85^\circ} = e^{j11\pi/7} = 0.222521 - j0.974928 = s_{14}^* \\ s_9 &= e^{j308.57^\circ} = e^{j12\pi/7} = 0.623490 - j0.781831 = s_{13}^* \\ s_{10} &= e^{j334.28^\circ} = e^{j13\pi/7} = 0.900969 - j0.433884 = s_{12}^* \\ s_{11} &= e^{j360^\circ} = e^{j2\pi} = 1 \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j102.86^\circ} = -0.222521 + j0.974928 \\ s_2 &= e^{j128.57^\circ} = -0.623490 + j0.781831 \\ s_3 &= e^{j154.29^\circ} = -0.900969 + j0.433884 \\ s_4 &= e^{j180^\circ} = e^{j\pi} = -1 \\ s_5 &= e^{-j154.29^\circ} = -0.900969 - j0.433884 \\ s_6 &= e^{-j128.57^\circ} = -0.623490 - j0.781831 \\ s_7 &= e^{-j102.86^\circ} = -0.222521 - j0.974928 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones (con $\varepsilon = 0.418208$ y $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$)

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta_k' \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta_k' \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta_k' &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

Al sustituir valores se tiene

$$\begin{aligned} \beta_k' &= \frac{1}{7} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.418208) = 0.229433 \\ \omega_p \operatorname{senh} \beta_k' &= 30 \operatorname{senh}(0.229433) = 6.943535 \\ \omega_p \operatorname{cosh} \beta_k' &= 30 \operatorname{cosh}(0.229433) = 30.793062 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh} \beta_k'$ y la parte

imaginaria por el valor $\omega_p \cosh \beta'_k$, con $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.222521 (6.943535) + j0.974928 (30.793062) \\ s_2 &= -0.623490 (6.943535) + j0.781831 (30.793062) \\ s_3 &= -0.900969 (6.943535) + j0.433884 (30.793062) \\ s_4 &= -6.943535 \\ s_5 &= -0.900969 (6.943535) - j0.433884 (30.793062) \\ s_6 &= -0.623490 (6.943535) - j0.781831 (30.793062) \\ s_7 &= -0.222521 (6.943535) - j0.974928 (30.793062) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$\begin{aligned} s_1 &= -1.5451 + j30.0210 \\ s_2 &= -4.3292 + j24.0750 \\ s_3 &= -6.2559 + j13.3606 \\ s_4 &= -6.9435 \\ s_5 &= -6.2559 - j13.3606 \\ s_6 &= -4.3292 - j24.0750 \\ s_7 &= -1.5451 - j30.0210 \end{aligned}$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 7$, $\varepsilon = 0.418208$ y $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$,

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \beta'_k &= 0.229433 \\ \operatorname{senh} \beta'_k &= 0.231451 \\ \cosh \beta'_k &= 1.026435 \end{aligned}$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.13 y 3.14. La tabla 3.13 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.14 especifica la ubicación de éstos.

Un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$\begin{aligned} (s - s_k)(s - s_k^*) &= (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2 \\ (s - s_k)(s - s_k^*) &= s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2 \end{aligned}$$

Tabla 3.13: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.7 dB, $N = 7$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\operatorname{sen} \alpha_k$	$\sigma'_k = \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	$\pi/14$	0.974928	0.222521	0.051503	1.00070
2	$3\pi/14$	0.781831	0.623490	0.144307	0.802499
3	$5\pi/14$	0.433884	0.900969	0.208530	0.445354
4	$7\pi/14$	0	1	0.231451	0
5	$9\pi/14$	-0.433884	0.900969	0.208530	-0.445354
6	$11\pi/14$	-0.781831	0.623490	0.144307	-0.802499
7	$13\pi/14$	-0.974928	0.222521	0.051503	-1.00070
8	$15\pi/14$	-0.974928	-0.222521	-0.051503	-1.00070
9	$17\pi/14$	-0.781831	-0.62349	-0.144307	-0.802499
10	$19\pi/14$	-0.433884	-0.900969	-0.208530	-0.445354
11	$21\pi/14$	0	-1	-0.231451	0
12	$23\pi/14$	0.433884	-0.900969	-0.208530	0.445354
13	$25\pi/14$	0.781831	-0.623490	-0.144307	0.802499
14	$27\pi/14$	0.974928	-0.222521	-0.051503	1.00070

Tabla 3.14: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.7 dB, $N = 7$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	-1.5451	30.0210
2	-4.3292	24.0750
3	-6.2559	13.3606
4	-6.9435	0
5	-6.2559	-13.3606
6	-4.3292	-24.0750
7	-1.5451	-30.0210
8	1.5451	-30.0210
9	4.3292	-24.0750
10	6.2559	-13.3606
11	6.9435	0
12	6.2559	13.3606
13	4.3292	24.0750
14	1.5451	30.0210

Para el polo s_1 y su conjugado s_7 se tiene (con $\sigma_1 = -1.5451$ y $\Omega_1 = 30.021$)

$$(s - s_1)(s - s_7) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(1.5451)s + (1.5451)^2 + (30.021)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_7) = s^2 + 3.090s + 903.65$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_6 se tiene (con $\sigma_2 = -4.3292$ y $\Omega_2 = 24.075$)

$$(s - s_2)(s - s_6) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(4.3292)s + (4.3292)^2 + (24.075)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_6) = s^2 + 8.6584s + 598.35$$

Para el polo s_3 y su conjugado s_5 se tiene (con $\sigma_3 = -6.2559$ y $\Omega_3 = 13.3606$)

$$(s - s_3)(s - s_5) = (s - s_3)(s - s_3^*) = s^2 + 2(6.2559)s + (6.2559)^2 + (13.3606)^2$$

$$(s - s_3)(s - s_5) = s^2 + 12.512s + 217.64$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 3.09s + 903.65)(s^2 + 8.6584s + 598.35)(s^2 + 12.512s + 217.64)(s + 6.9435)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(903.65 - \omega^2 + j3.09\omega)(598.35 - \omega^2 + j8.6584\omega)(217.64 - \omega^2 + j12.512\omega)(6.9435 + j\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(903.65)(598.35)(217.64)(6.9435)} = \frac{K_0}{817095286.8}$$

Por otro lado, para N impar

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = 1$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{817095286.8} = 1 \quad \implies \quad K_0 = 817095286.8$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{817095286.8}{(s^2 + 3.09s + 903.65)(s^2 + 8.6584s + 598.35)(s^2 + 12.512s + 217.64)(s + 6.9435)}$$

Problema 3.17 Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo I con las siguientes especificaciones

Rizo en la banda de paso de 0.6 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 4 \text{ rad/seg}$

Mínima atenuación en la banda de rechazo de 45 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 25 \text{ rad/seg}$

Determine:

- El mínimo orden del filtro.
- La función de transferencia normalizada en amplitud.
- Las expresiones para la magnitud, la ganancia en dB , la fase y el retardo de grupo.

Solución:

a) Mínimo orden del filtro.

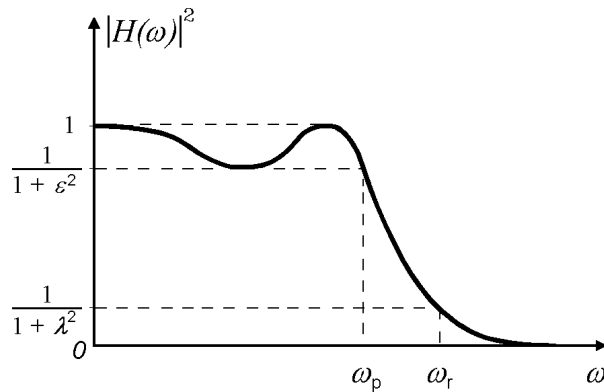


Figura 3.10: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.17

De la figura 3.10 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$0.6 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.06)} - 1} = 0.384907$$

$$45 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^{4.5} - 1} = 177.8251$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 6.25$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{177.8251}{0.384907} \right)}{\cosh^{-1} (6.25)} = \frac{6.8287}{2.519266} = 2.7106$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 3$.

b) Función de transferencia normalizada en amplitud.

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Se proporcionan dos métodos en la obtención de éstos. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Basados en la aproximación Butterworth, los polos para $N = 3$ tienen una separación angular entre polos de $180^\circ/3$ (60° o $\pi/3$ radianes). Como el orden es impar, un polo se ubica en el eje real, con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg.}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j120^\circ} = e^{j2\pi/3} \\ s_2 &= e^{j180^\circ} = e^{j3\pi/3} \\ s_3 &= e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = e^{j4\pi/3} \\ s_4 &= e^{j300^\circ} = e^{j5\pi/3} \\ s_5 &= e^{j360^\circ} = e^{j6\pi/3} \\ s_6 &= e^{j60^\circ} = e^{j\pi/3} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j120^\circ} = -0.5 + j0.866025 \\ s_2 &= e^{j180^\circ} = -1 \\ s_3 &= e^{-j120^\circ} = -0.5 - j0.866025 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones (con $\varepsilon = 0.384907$ y $\omega_p = 4 \text{ rad/seg}$)

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen}\alpha_k \operatorname{senh}\beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos\alpha_k \operatorname{cosh}\beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

Al sustituir valores se tiene

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{1}{3} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.384907) = 0.561012 \\ \omega_p \operatorname{senh}\beta'_k &= 4 \operatorname{senh}(0.561012) = 2.363628 \\ \omega_p \operatorname{cosh}\beta'_k &= 4 \operatorname{cosh}(0.561012) = 4.646153 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh}\beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \operatorname{cosh}\beta'_k$, con $\omega_p = 4 \text{ rad/seg}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.5 (2.363628) + j0.866025 (4.646153) \\ s_2 &= -2.363628 \\ s_3 &= -0.5 (2.363628) - j0.866025 (4.646153) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$s_1 = -1.18180 + j4.02368$$

$$s_2 = -2.36360$$

$$s_3 = -1.18180 - j4.02368$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 3$, $\varepsilon = 0.384907$ y $\omega_p = 4 \text{ rad/seg}$,

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

donde

$$\beta'_k = 0.561012$$

$$\operatorname{senh} \beta'_k = 0.590907$$

$$\operatorname{cosh} \beta'_k = 1.161538$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.15 y 3.16. La tabla 3.15 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.16 especifica la ubicación de éstos.

Tabla 3.15: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.6 dB , $N = 3$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\operatorname{sen} \alpha_k$	$\sigma'_k = \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	$\pi/6$	0.866025	0.5	0.295453	1.005921
2	$3\pi/6$	0	1	0.590907	0
3	$5\pi/6$	-0.866025	0.5	0.295453	-1.005921
4	$7\pi/6$	-0.866025	-0.5	-0.295453	-1.005921
5	$9\pi/6$	0	-1	-0.590907	0
6	$11\pi/6$	0.866025	-0.5	-0.295453	1.005921

Un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo s_1 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_1 = -1.1818$ y $\Omega_1 = 4.02368$)

$$(s - s_1)(s - s_3) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(1.1818)s + (1.1818)^2 + (4.02368)^2$$

Tabla 3.16: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.6dB, $N = 3$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	-1.1818	4.02368
2	-2.3636	0
3	-1.1818	-4.02368
4	1.1818	-4.02368
5	2.3636	0
6	1.1818	4.02368

$$(s - s_1)(s - s_3) = s^2 + 2.3636s + 17.5867$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 2.3636s + 17.5867)(s + 2.3636)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(17.5867 - \omega^2 + j2.3636\omega)(2.3636 + j\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(17.5867 - \omega^2 + j2.3636\omega)(2.3636 + j\omega)} \Big|_{\omega=0}$$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(17.5867)(2.3636)} = \frac{K_0}{41.5679}$$

Por otro lado, para N impar

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = 1$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{41.5679} = 1 \quad \implies \quad K_0 = 41.5679$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{41.5679}{(s^2 + 2.3636s + 17.5867)(s + 2.3636)}$$

c) Expresiones para la magnitud, la magnitud en dB, la fase y el retardo de grupo.

A partir de la función de transferencia obtenida en el inciso anterior al evaluarla en frecuencia, aplicando el operador $s = j\omega$, se obtiene

$$H(\omega) = \frac{41.5679}{(17.5867 - \omega^2 + j2.3636\omega)(2.3636 + j\omega)}$$

La función magnitud está dada por

$$|H(\omega)| = \frac{41.5679}{\sqrt{(17.5867 - \omega^2)^2 + (2.3636\omega)^2} \sqrt{(2.3636)^2 + \omega^2}}$$

La evaluación de la ganancia en dB es

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log |H(\omega)| = 20 \log(41.5679) \\ - 10 \log \left[(17.5867 - \omega^2)^2 + (2.3636 \omega)^2 \right] - 10 \log \left[(2.3636)^2 + \omega^2 \right]$$

Para evaluar la fase, se requiere determinar el $\arg[H(\omega)]$, esto es

$$\arg[H(\omega)] = - \arctan \left[\frac{2.3636 \omega}{17.5867 - \omega^2} \right] - \arctan \left[\frac{\omega}{2.3636} \right]$$

En la evaluación del $\arg[H(\omega)]$ anterior, se hace notar que para el argumento de un número complejo $\alpha + j\beta$ con α y β positivos ($\alpha > 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq \pi/2$$

Mientras que para un α negativo y un β positivo ($\alpha < 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{-|\alpha|} \right) = - \arctan \left(\frac{\beta}{|\alpha|} \right) \pm \pi$$

De lo anterior se concluye que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 17.5867$ del primer término del argumento $\arg[H(\omega)]$ es

$$\arg \left[(17.5867 - \omega^2 + j2.3636 \omega)^{-1} \right] = - \arctan \left[\frac{2.3636 \omega}{17.5867 - \omega^2} \right] \\ = + \arctan \left[\frac{2.3636 \omega}{\omega^2 - 17.5867} \right] \pm \pi$$

El retardo de grupo es

$$\tau_g(\omega) = - \frac{d \arg[H(\omega)]}{d \omega}$$

Usando tablas[7], la expresión de la derivada del $\arg[H(\omega)]$ es

$$\frac{d \arctan[H(\omega)]}{d \omega} = \frac{1}{1 + H^2(\omega)} \frac{d[H(\omega)]}{d \omega}$$

de aquí que

$$- \frac{d \arg[H(j\omega)]}{d \omega} = \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{2.3636 \omega}{17.5867 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(17.5867 - \omega^2)(2.3636) - (2.3636 \omega)(-2 \omega)}{(17.5867 - \omega^2)^2} \right] \\ + \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{2.3636} \right)^2} \left[\frac{1}{2.3636} \right]$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{(2.3636)(17.5867 - \omega^2) + 2(2.3636) \omega^2}{(17.5867 - \omega^2)^2 + (2.3636 \omega)^2} + \frac{2.3636}{(2.3636)^2 + \omega^2}$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{2.3636(17.5867 + \omega^2)}{(17.5867 - \omega^2)^2 + (2.3636 \omega)^2} + \frac{2.3636}{(2.3636)^2 + \omega^2}$$

Problema 3.18 Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo I con las siguientes especificaciones

Rizo en la banda de paso de 2.5 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$

Máxima ganancia en la banda de rechazo de 80 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 350 \text{ rad/seg}$

Determine:

- El mínimo orden del filtro.
- La función de transferencia normalizada en amplitud.
- Las expresiones para la magnitud, la ganancia en dB , la fase y el retardo de grupo.

Solución:

a) Mínimo orden del filtro.

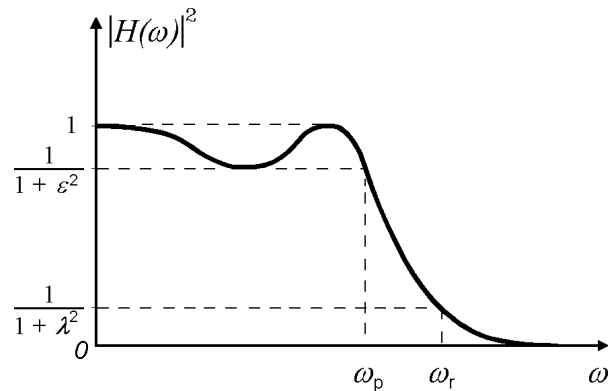


Figura 3.11: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.18

De la figura 3.11 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1+\epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1+\lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1+\lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$2.5 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.25)} - 1} = 0.88220$$

$$80 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^8 - 1} = 9999.99995$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 7$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{9999.99995}{0.8822} \right)}{\cosh^{-1}(7)} = \frac{10.028824}{2.633916} = 3.81$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 4$.

b) Función de transferencia normalizada en amplitud.

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Se proporcionan dos métodos en la obtención de éstos. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Basados en la aproximación Butterworth, los polos para $N = 4$ tienen una separación angular entre polos de $180^\circ/4$ (45° o $\pi/4$ radianes). Como el orden es par, para ubicar el primer polo se toma al eje real como referencia entre ángulos de dos polos consecutivos, es decir, a partir del eje real un polo se localiza a 22.5° y el otro a -22.5° , con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg.}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} & s_5 &= e^{j292.5^\circ} \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} & s_6 &= e^{j337.5^\circ} \\ s_3 &= e^{j202.5^\circ} = e^{-j157.5^\circ} & s_7 &= e^{j22.5^\circ} \\ s_4 &= e^{j247.5^\circ} = e^{-j112.5^\circ} & s_8 &= e^{j67.5^\circ} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j0.923879 \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j0.382683 \\ s_3 &= e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j0.382683 \\ s_4 &= e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j0.923879 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\epsilon) \end{aligned}$$

Al sustituir valores se tiene

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{1}{4} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.8822) = 0.243179 \\ \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k &= 50 \operatorname{senh}(0.243179) = 12.279143 \\ \omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k &= 50 \operatorname{cosh}(0.243179) = 51.485332 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k$, con $\omega_p = 50 \text{ rad/seg.}$

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.382683 (12.279143) + j0.923879 (51.485332) \\ s_2 &= -0.923879 (12.279143) + j0.382683 (51.485332) \\ s_3 &= -0.923879 (12.279143) - j0.382683 (51.485332) \\ s_4 &= -0.382683 (12.279143) - j0.923879 (51.485332) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$s_1 = -4.6990 + j47.5662$$

$$s_2 = -11.3444 + j19.7025$$

$$s_3 = -11.3444 - j19.7025$$

$$s_4 = -4.6990 - j47.5662$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 4$, $\varepsilon = 0.8822$ y $\omega_p = 50\text{rad/seg}$,

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \sin \alpha_k \sinh \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \sinh^{-1}(1/\varepsilon)$$

donde

$$\beta'_k = 0.243178$$

$$\sinh \beta'_k = 0.245583$$

$$\cosh \beta'_k = 1.029707$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.17 y 3.18. La tabla 3.17 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.18 especifica la ubicación de éstos.

Tabla 3.17: Cálculo de los polos para: Rizo de 2.5 dB, $N = 4$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\sin \alpha_k$	$\sigma'_k = \sin \alpha_k \sinh \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \cosh \beta'_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	0.093980	0.951325
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	0.226889	0.394051
3	$5\pi/8$	-0.382683	0.923879	0.226889	-0.394051
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	0.093980	-0.951325
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-0.093980	-0.951325
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-0.226889	-0.394051
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-0.226889	0.394051
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-0.093980	0.951325

Un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Tabla 3.18: Cálculo de los polos para: Rizo de 2.5 dB, $N = 4$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	-4.6990	47.5662
2	-11.3444	19.7025
3	-11.3444	-19.7025
4	-4.6990	-47.5662
5	4.6990	-47.5662
6	11.3444	-19.7025
7	11.3444	19.7025
8	4.6990	47.5662

Para el polo s_1 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_1 = -4.699$ y $\Omega_1 = 47.5662$)

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(4.699)s + (4.699)^2 + (47.5662)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 9.398s + 2284.62$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_2 = -11.3444$ y $\Omega_2 = 19.7025$)

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(11.3444)s + (11.3444)^2 + (19.7025)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 22.6888s + 516.884$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 9.398s + 2284.62)(s^2 + 22.6888s + 516.884)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(2284.62 - \omega^2 + j9.398\omega)(516.884 - \omega^2 + j22.6888\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(2284.62 - \omega^2 + j9.398\omega)(516.884 - \omega^2 + j22.6888\omega)} \Big|_{\omega=0}$$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(2284.62)(516.884)} = \frac{K_0}{1180883.524}$$

Por otro lado, para N par (con $\varepsilon = 0.8822$)

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{1180883.524} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.8822)^2}}$$

$$K_0 = \frac{1180883.524}{\sqrt{1 + (0.8822)^2}} = 885538.3562$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{885538.3562}{(s^2 + 9.398s + 2284.62)(s^2 + 22.6888s + 516.884)}$$

c) Expresiones para la magnitud, la magnitud en dB , la fase y el retardo de grupo.

A partir de la función de transferencia obtenida en el inciso anterior al evaluarla en frecuencia, aplicando el operador $s = j\omega$, se obtiene

$$H(\omega) = \frac{885538.3562}{(2284.62 - \omega^2 + j9.398\omega)(516.884 - \omega^2 + j22.6888\omega)}$$

La función magnitud está dada por

$$|H(\omega)| = \frac{885538.3562}{\sqrt{(2284.62 - \omega^2)^2 + (9.398\omega)^2} \sqrt{(516.884 - \omega^2)^2 + (22.6888\omega)^2}}$$

La evaluación de la ganancia en dB es

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log (885538.3562) \\ &- 10 \log \left[(2284.62 - \omega^2)^2 + (9.398\omega)^2 \right] \\ &- 10 \log \left[(516.884 - \omega^2)^2 + (22.6888\omega)^2 \right] \end{aligned}$$

Para evaluar la fase, se requiere determinar el $\arg[H(\omega)]$, esto es

$$\arg[H(\omega)] = -\arctan \left[\frac{9.398\omega}{2284.62 - \omega^2} \right] - \arctan \left[\frac{22.6888\omega}{516.884 - \omega^2} \right]$$

En la evaluación del $\arg[H(\omega)]$ anterior, se hace notar que para el argumento de un número complejo $\alpha + j\beta$ con α y β positivos ($\alpha > 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq \pi/2$$

Mientras que para un α negativo y un β positivo ($\alpha < 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{-|\alpha|} \right) = -\arctan \left(\frac{\beta}{|\alpha|} \right) \pm \pi$$

De lo anterior se concluye que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 2284.62$ del primer término del argumento $\arg[H(\omega)]$ es

$$\begin{aligned} \arg \left[(2284.62 - \omega^2 + j9.398\omega)^{-1} \right] &= -\arctan \left[\frac{9.398\omega}{2284.62 - \omega^2} \right] \\ &= +\arctan \left[\frac{9.398\omega}{\omega^2 - 2284.62} \right] \pm \pi \end{aligned}$$

Mientras que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 516.884$ del segundo término del argumento $\arg[H(\omega)]$ es

$$\begin{aligned} \arg \left[(516.884 - \omega^2 + j22.6888\omega)^{-1} \right] &= -\arctan \left[\frac{22.6888\omega}{516.884 - \omega^2} \right] \\ &= +\arctan \left[\frac{22.6888\omega}{\omega^2 - 516.884} \right] \pm \pi \end{aligned}$$

El retardo de grupo es

$$\tau_g(\omega) = - \frac{d \arg [H(\omega)]}{d \omega}$$

Usando tablas[7], la expresión de la derivada del $\arg [H(\omega)]$ es

$$\frac{d \arctan [H(\omega)]}{d \omega} = \frac{1}{1 + H^2(\omega)} \frac{d [H(\omega)]}{d \omega}$$

de aquí que

$$\begin{aligned} - \frac{d \arg [H(j\omega)]}{d \omega} = & \frac{1}{1 + \left(\frac{9.398 \omega}{2284.62 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(2284.62 - \omega^2)(9.398) - (9.398 \omega)(-2 \omega)}{(2284.62 - \omega^2)^2} \right] \\ & + \frac{1}{1 + \left(\frac{22.6888 \omega}{516.884 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(516.884 - \omega^2)(22.6888) - (22.6888 \omega)(-2 \omega)}{(516.884 - \omega^2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_g(\omega) = & \frac{(9.398)(2284.62 - \omega^2) + 2(9.398) \omega^2}{(2284.62 - \omega^2)^2 + (9.398 \omega)^2} \\ & + \frac{(22.6888)(516.884 - \omega^2) + 2(22.6888) \omega^2}{(516.884 - \omega^2)^2 + (22.6888 \omega)^2} \end{aligned}$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{9.398 (2284.62 + \omega^2)}{(2284.62 - \omega^2)^2 + (9.398 \omega)^2} + \frac{22.6888 (516.884 + \omega^2)}{(516.884 - \omega^2)^2 + (22.6888 \omega)^2}$$

Problema 3.19 Para el diseño de un filtro pasa bajas con aproximación Chebyshev del tipo I, determine la ubicación de los polos y la función de transferencia normalizada en frecuencia de tal forma que éste satisfaga las siguientes restricciones

Ancho del rizo en la banda de paso de 0.2 dB

Atenuación en la banda de rechazo $\geq 30 \text{ dB}$

Frecuencia de paso de $f_p = 1 \text{ kHz}$

Frecuencia de rechazo de $f_r = 2.5 \text{ kHz}$

Solución:

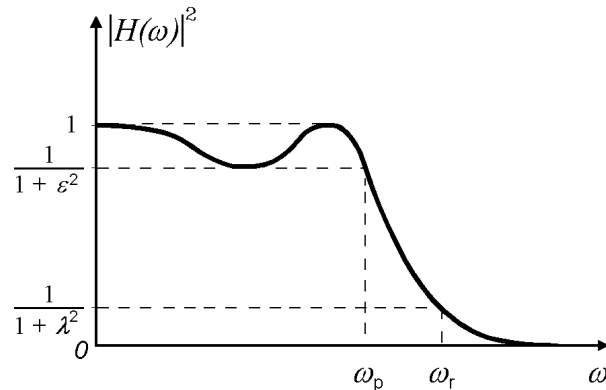


Figura 3.12: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.19

De la figura 3.12 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1+\epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1+\lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1+\lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$0.2 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.02)} - 1} = 0.217091$$

$$30 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^3 - 1} = 31.606961$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 2.5$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{31.606961}{0.217091} \right)}{\cosh^{-1}(2.5)} = \frac{5.673951}{1.566799} = 3.62$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 4$.

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Se proporcionan dos métodos en la obtención de éstos. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Basados en la aproximación Butterworth, los polos para $N = 4$ tienen una separación angular entre polos de $180^\circ/4$ (45° o $\pi/4$ radianes). Como el orden es par, para ubicar el primer polo se toma al eje real como referencia entre ángulos de dos polos consecutivos, es decir, a partir del eje real un polo se localiza a 22.5° y el otro a -22.5° , con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg.}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} & s_5 &= e^{j292.5^\circ} \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} & s_6 &= e^{j337.5^\circ} \\ s_3 &= e^{j202.5^\circ} = e^{-j157.5^\circ} & s_7 &= e^{j22.5^\circ} \\ s_4 &= e^{j247.5^\circ} = e^{-j112.5^\circ} & s_8 &= e^{j67.5^\circ} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j0.923879 \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j0.382683 \\ s_3 &= e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j0.382683 \\ s_4 &= e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j0.923879 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon) \end{aligned}$$

Al sustituir valores se tiene (con $\omega_p = 2\pi f_p = 6283.1853$)

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{1}{4} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.217091) = 0.558041 \\ \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k &= 6283.1853 \operatorname{senh}(0.558041) = 3691.111022 \\ \omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k &= 6283.1853 \operatorname{cosh}(0.558041) = 7287.161182 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k$, con $\omega_p = 2\pi f_p = 6283.1853 \text{ rad/seg.}$

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.382683 (3691.111022) + j0.923879 (7287.161182) \\ s_2 &= -0.923879 (3691.111022) + j0.382683 (7287.161182) \\ s_3 &= -0.923879 (3691.111022) - j0.382683 (7287.161182) \\ s_4 &= -0.382683 (3691.111022) - j0.923879 (7287.161182) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$s_1 = -1412.525 + j6732.455$$

$$s_2 = -3410.140 + j2788.672$$

$$s_3 = -3410.140 - j2788.672$$

$$s_4 = -1412.525 - j6732.455$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 4$, $\varepsilon = 0.217091$ y $\omega_p = 2\pi f_p = 6283.1853 \text{ rad/seg}$,

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

donde

$$\beta'_k = 0.558041$$

$$\operatorname{senh} \beta'_k = 0.587459$$

$$\operatorname{cosh} \beta'_k = 1.159788$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.19 y 3.20. La tabla 3.19 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.20 especifica la ubicación de éstos.

Un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Tabla 3.19: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.2dB, $N = 4$, primera parte

k	α_k	$\cos \alpha_k$	$\operatorname{sen} \alpha_k$	$\sigma'_k = \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega'_k = \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	0.224811	1.071504
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	0.542741	0.443831
3	$5\pi/8$	-0.382683	0.923879	0.542741	-0.443831
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	0.224811	-1.071504
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-0.224811	-1.071504
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-0.542741	-0.443831
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-0.542741	0.443831
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-0.224811	1.071504

Para el polo s_1 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_1 = -1412.525$ y $\Omega_1 = 6732.455$)

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(1412.525)s + (1412.525)^2 + (6732.455)^2$$

Tabla 3.20: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.2dB, $N = 4$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	-1412.529	6732.458
2	-3410.142	2788.672
3	-3410.142	-2788.672
4	-1412.529	-6732.458
5	1412.529	-6732.458
6	3410.142	-2788.672
7	3410.142	2788.672
8	1412.529	6732.458

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 2825.05s + 47321177$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_2 = -3410.14$ y $\Omega_2 = 2788.672$)

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(3410.14)s + (3410.14)^2 + (2788.672)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 6820.280s + 19405746$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 2825.05s + 47321177)(s^2 + 6820.280s + 19405746)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(47321177 - \omega^2 + j2825.05\omega)(19405746 - \omega^2 + j6820.28\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(47321177 - \omega^2 + j2825.05\omega)(19405746 - \omega^2 + j6820.28\omega)} \Big|_{\omega=0}$$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(47321177)(19405746)} = \frac{K_0}{9.183027413 \times 10^{14}}$$

Por otro lado, para N par (con $\varepsilon = 0.217091$)

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{9.183027413 \times 10^{14}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.217091)^2}}$$

$$K_0 = \frac{9.183027413 \times 10^{14}}{\sqrt{1 + (0.217091)^2}} = 8.973996384 \times 10^{14}$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{8.973996384 \times 10^{14}}{(s^2 + 2825.05s + 47321177)(s^2 + 6820.280s + 19405746)}$$

Problema 3.20 Encuentre la función de aproximación Chebyshev del tipo I necesaria para satisfacer las siguientes restricciones de un filtro pasa bajas, vea la figura 3.13, donde

$$A_p = 0.25 \text{ dB}$$

$$A_r = 40 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 1200 \text{ rad/seg.}$$

$$\omega_r = 4000 \text{ rad/seg.}$$

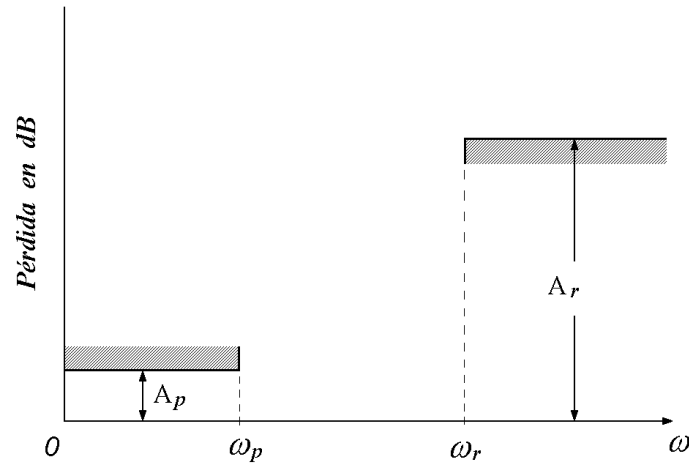


Figura 3.13: Representación en potencia del filtro Chebyshev en función de su pérdida, para el problema 3.20

Solución:

La relación de pérdida para la banda de paso es

$$0.25 \text{ dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.025)} - 1} = 0.243421$$

Mientras que la relación de pérdida para la banda de rechazo es

$$40 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^4 - 1} = 99.9949999$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 10/3$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_r}{\omega_p}\right)} = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{99.9949999}{0.243421}\right)}{\cosh^{-1}(10/3)} = \frac{6.711229}{1.87382} = 3.58$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 4$.

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Se proporcionan dos métodos en la obtención de éstos. En el primero se determina los polos para la aproximación Butterworth y a partir de dicha ubicación se obtiene los polos de la aproximación Chebyshev tipo I. En el segundo método se obtiene los polos directamente de las expresiones que se obtuvieron para tal fin.

Basados en la aproximación Butterworth, los polos para $N = 4$ tienen una separación angular entre polos de $180^\circ/4$ (45° o $\pi/4$ radianes). Como el orden es par, para ubicar el primer polo se toma al eje real como referencia entre ángulos de dos polos consecutivos, es decir, a partir del eje real un polo se localiza a 22.5° y el otro a -22.5° , con los polos distribuidos en un círculo de radio unitario, esto es, se considera una frecuencia normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/seg.}$).

La distribución de los polos para la aproximación Butterworth es

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} & s_5 &= e^{j292.5^\circ} \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} & s_6 &= e^{j337.5^\circ} \\ s_3 &= e^{j202.5^\circ} = e^{-j157.5^\circ} & s_7 &= e^{j22.5^\circ} \\ s_4 &= e^{j247.5^\circ} = e^{-j112.5^\circ} & s_8 &= e^{j67.5^\circ} \end{aligned}$$

Los polos de interés son los ubicados en la parte izquierda del plano s

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{j112.5^\circ} = -0.382683 + j0.923879 \\ s_2 &= e^{j157.5^\circ} = -0.923879 + j0.382683 \\ s_3 &= e^{-j157.5^\circ} = -0.923879 - j0.382683 \\ s_4 &= e^{-j112.5^\circ} = -0.382683 - j0.923879 \end{aligned}$$

Para obtener la ubicación de los polos Chebyshev del tipo I a partir de la posición de los polos para la aproximación Butterworth se hace uso de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \sigma_k &= -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k \\ \Omega_k &= \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k \\ \alpha_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\ \beta'_k &= \frac{1}{N} \operatorname{senh}^{-1}(1/\epsilon) \end{aligned}$$

Al sustituir valores se tiene (con $\omega_p = 1200 \text{ rad/seg}$)

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{1}{4} \operatorname{senh}^{-1}(1/0.243421) = 0.530151 \\ \omega_p \operatorname{senh} \beta'_k &= 1200 \operatorname{senh}(0.530151) = 666.403662 \\ \omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k &= 1200 \operatorname{cosh}(0.530151) = 1372.622978 \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev tipo I se determina al multiplicar la parte real de los polos obtenidos de la aproximación Butterworth por el valor $\omega_p \operatorname{senh} \beta'_k$ y la parte imaginaria por el valor $\omega_p \operatorname{cosh} \beta'_k$, con $\omega_p = 1200 \text{ rad/seg}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.382683 (666.403662) + j0.923879 (1372.622978) \\ s_2 &= -0.923879 (666.403662) + j0.382683 (1372.622978) \\ s_3 &= -0.923879 (666.403662) - j0.382683 (1372.622978) \\ s_4 &= -0.382683 (666.403662) - j0.923879 (1372.622978) \end{aligned}$$

La ubicación de los polos para la aproximación Chebyshev es

$$\begin{aligned} s_1 &= -255.0214 + j1268.1375 \\ s_2 &= -615.6763 + j525.2795 \\ s_3 &= -615.6763 - j525.2795 \\ s_4 &= -255.0214 - j1268.1375 \end{aligned}$$

Segundo método para determinar la ubicación de los polos de la aproximación Chebyshev tipo I.

Para determinar la ubicación de los polos se aplica, con $N = 4$, $\varepsilon = 0.243421$ y $\omega_p = 1200 \text{ rad/seg}$,

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\sigma_k = -\omega_p \text{sen } \alpha_k \text{senh } \beta'_k$$

$$\Omega_k = \omega_p \text{cos } \alpha_k \text{cosh } \beta'_k$$

$$\alpha_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$\beta'_k = \frac{1}{N} \text{senh}^{-1}(1/\varepsilon)$$

donde

$$\beta'_k = 0.530151$$

$$\text{senh } \beta'_k = 0.555336$$

$$\text{cosh } \beta'_k = 1.143852$$

La evaluación requerida para determinar la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.21 y 3.22. La tabla 3.21 presenta los cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.22 especifica la ubicación de éstos.

Un polo complejo y su conjugado se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo s_1 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_1 = -255.0214$ y $\Omega_1 = 1268.1375$)

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^4 + 2(255.0214)s + (255.0214)^2 + (1268.1375)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 510.043s + 1673208.633$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_2 = -615.6763$ y $\Omega_2 = 525.2795$)

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(615.6763)s + (615.6763)^2 + (525.2795)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 1231.353s + 654975.86$$

Tabla 3.21: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.25 dB, $N = 4$, primera parte

k	α_k	$\text{cos } \alpha_k$	$\text{sen } \alpha_k$	$\sigma'_k = \text{sen } \alpha_k \text{senh } \beta'_k$	$\Omega'_k = \text{cos } \alpha_k \text{cosh } \beta'_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	0.212518	1.056781
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	0.513063	0.437733
3	$5\pi/8$	-0.382683	0.923879	0.513063	-0.437733
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	0.212518	-1.056781
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-0.212518	-1.056781
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-0.513063	-0.437733
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-0.513063	0.437733
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-0.212518	1.056782

Tabla 3.22: Cálculo de los polos para: Rizo de 0.25 dB, $N = 4$, segunda parte

k	$\sigma_k = -\omega_p \operatorname{sen} \alpha_k \operatorname{senh} \beta'_k$	$\Omega_k = \omega_p \cos \alpha_k \operatorname{cosh} \beta'_k$
1	-255.0216	1268.1372
2	-615.6756	525.2796
3	-615.6756	-525.2796
4	-255.0216	-1268.1372
5	255.0216	-1268.1372
6	615.6756	-525.2796
7	615.6756	525.2796
8	255.0216	1268.1372

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0}{(s^2 + 510.043s + 1673208.633)(s^2 + 1231.353s + 654975.86)}$$

Ahora se determina la constante de normalización K_0 . Para ello, primero se obtiene la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0}{(1673208.633 - \omega^2 + j510.043\omega)(654975.86 - \omega^2 + j1231.353\omega)}$$

Luego, se evalúa la magnitud en $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(1673208.633 - \omega^2 + j510.043\omega)(654975.86 - \omega^2 + j1231.353\omega)} \Big|_{\omega=0}$$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0}{(1673208.633)(654975.86)} = \frac{K_0}{1.095911263 \times 10^{12}}$$

Por otro lado, para N par (con $\varepsilon = 0.243421$)

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Por lo que

$$\frac{K_0}{1.095911263 \times 10^{12}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0.243421)^2}}$$

$$K_0 = \frac{1.095911263 \times 10^{12}}{\sqrt{1 + (0.243421)^2}} = 1.064817986 \times 10^{12}$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{1.064817986 \times 10^{12}}{(s^2 + 510.043s + 1673208.633)(s^2 + 1231.353s + 654975.86)}$$

Problema 3.21 Un filtro Chebyshev del tipo I de quinto orden tiene una pérdida de 72 dB a 4000 kHz. Determine la frecuencia en la cual un filtro tipo Butterworth de quinto orden presenta la misma pérdida, dado que ambas aproximaciones satisfacen las mismas restricciones en la banda de paso.

Solución:

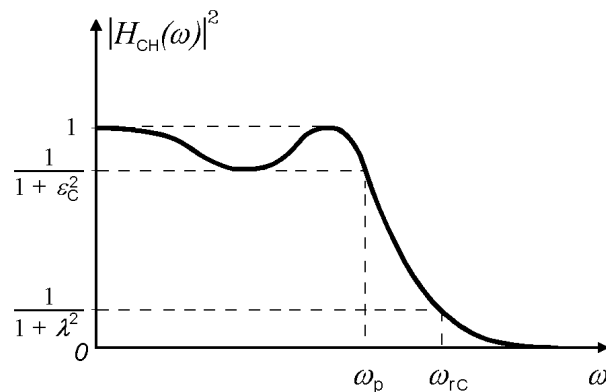


Figura 3.14: Magnitud en potencia de un filtro Chebyshev del tipo I, indicando los parámetros ϵ_C , λ , ω_p y ω_{rC} , para el problema 3.20

Para la aproximación Chebyshev del tipo I, la magnitud en potencia evaluada en la frecuencia de rechazo, $\omega = \omega_{rC}$ (vea la figura 3.14), es

$$|H_{CH}(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_{rC}} = \frac{1}{1 + \epsilon_C^2 V_N^2(\omega/\omega_p)} \Big|_{\omega=\omega_{rC}} = \frac{1}{1 + \epsilon_C^2 V_N^2(\omega_{rC}/\omega_p)} = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Se hace notar que con respecto a la notación establecida en la sección “2. Introducción Teórica” de este documento, en la solución de este problema se realizan cambios de notación para los siguientes parámetros: ω_r (utilizado para establecer la frecuencia de rechazo), ϵ (utilizado para establecer el límite superior de la banda de paso) y $H(\omega)$ (utilizado para representar la expresión de la respuesta en frecuencia). Estos cambios tienen la finalidad de distinguir los parámetros ω_r , ϵ y $H(\omega)$ usados para representar la expresión de la magnitud en potencia de la aproximación Chebyshev del tipo I con respecto a los usados para representar la expresión de la magnitud en potencia de la aproximación Butterworth.

Para la aproximación Chebyshev del tipo I, ω_r se cambió por ω_{rC} , ϵ por ϵ_C y $H(\omega)$ por $H_{CH}(\omega)$; mientras que ω_r se cambió por ω_{rB} , ϵ por ϵ_B y $H(\omega)$ por $H_B(\omega)$ para la aproximación Butterworth, como se indica más adelante.

Haciendo referencia a la aproximación Chebyshev del tipo I, al evaluar, con $\omega = \omega_{rC}$ y $N = 5$, la expresión de la ganancia en dB, se obtiene

$$\begin{aligned} |H_{CH}(\omega_{rC})|_{dB} &= 10 \log |H_{CH}(\omega_{rC})|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon_C^2 V_5^2(\omega_{rC}/\omega_p)} \right) \\ &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right) \end{aligned}$$

Para la pérdida de 72 dB en la frecuencia de rechazo se obtiene

$$\begin{aligned} |H_{CH}(\omega_{rC})|_{dB} &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right) = -72 \text{ dB} \\ 7.2 &= \log(1 + \lambda^2) \\ \lambda^2 &= 10^{7.2} - 1 \\ \lambda &= \sqrt{10^{7.2} - 1} = 3981.07158 \end{aligned}$$

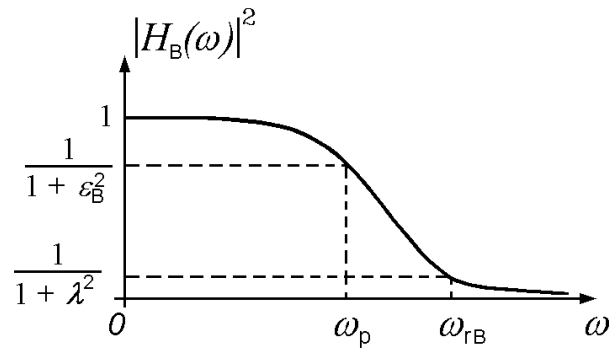


Figura 3.15: Magnitud en potencia de un filtro Butterworth, indicando los parámetros ϵ_B , λ , ω_p y ω_{rB} para el problema 3.21

Por otro lado, para la aproximación Butterworth, la magnitud en potencia evaluada en la frecuencia de rechazo, $\omega = \omega_{rB}$, vea la figura 3.15, es

$$|H_B(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_{rB}} = \frac{1}{1 + \epsilon_B^2 (\omega/\omega_p)^{2N}} \Big|_{\omega=\omega_{rB}} = \frac{1}{1 + \epsilon_B^2 (\omega_{rB}/\omega_p)^{2N}} = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Mientras que la ganancia en dB , con $\omega = \omega_{rB}$, $N = 5$ y pérdida de 72 dB , es

$$\begin{aligned} |H_B(\omega_{rB})|_{dB} &= 10 \log |H_B(\omega_{rB})|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon_B^2 (\omega_{rB}/\omega_p)^{10}} \right) \\ &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right) = -72 \text{ dB} \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned} -72 \text{ dB} &= 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon_C^2 V_5^2 (\omega_{rC}/\omega_p)} \right) = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon_B^2 (\omega_{rB}/\omega_p)^{10}} \right) \\ 10^{7.2} &= 1 + \epsilon_C^2 V_5^2 (\omega_{rC}/\omega_p) = 1 + \epsilon_B^2 (\omega_{rB}/\omega_p)^{10} \\ 10^{7.2} - 1 &= \epsilon_C^2 V_5^2 (\omega_{rC}/\omega_p) = \epsilon_B^2 (\omega_{rB}/\omega_p)^{10} \\ \sqrt{10^{7.2} - 1} &= \epsilon_C V_5 (\omega_{rC}/\omega_p) = \epsilon_B (\omega_{rB}/\omega_p)^5 \end{aligned}$$

De la definición de los polinomios de Chebyshev

$$V_N(x) = \cos [N \cos^{-1} x] = \begin{cases} \cos [N \cos^{-1} x] & \text{para } |x| \leq 1 \\ \cosh [N \cosh^{-1} x] & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

Como $|x| > 1$ (con $x = \omega_{rC}/\omega_p$) entonces

$$V_N(x) = \cosh [N \cosh^{-1} x]$$

Para $N = 5$ y $\omega_{rC}/\omega_p = f_{rC}/f_p$ se obtiene

$$\epsilon_C V_5(f_{rC}/f_p) = \epsilon_C \cosh [5 \cosh^{-1} (f_{rC}/f_p)]$$

entonces

$$\epsilon_C \cosh [5 \cosh^{-1} (f_{rC}/f_p)] = \epsilon_B (\omega_{rB}/\omega_p)^5 = \sqrt{10^{7.2} - 1}$$

De la igualdad

$$\varepsilon_C \cosh [5 \cosh^{-1} (f_{rC}/f_p)] = \sqrt{10^{7.2} - 1}$$

se despega el valor f_p , como se muestra a continuación

$$\cosh [5 \cosh^{-1} (f_{rC}/f_p)] = \varepsilon_C^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1}$$

$$5 \cosh^{-1} (f_{rC}/f_p) = \cosh^{-1} \left(\varepsilon_C^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1} \right)$$

$$\frac{f_{rC}}{f_p} = \cosh \left[\frac{\cosh^{-1} \left(\varepsilon_C^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1} \right)}{5} \right]$$

$$f_p = \frac{f_{rC}}{\cosh \left[\frac{\cosh^{-1} \left(\varepsilon_C^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1} \right)}{5} \right]}$$

Por otro lado

$$\varepsilon_B (\omega_{rB}/\omega_p)^5 = \sqrt{10^{7.2} - 1}$$

Para $\omega_{rB}/\omega_p = f_{rB}/f_p$ se obtiene

$$(f_{rB}/f_p)^5 = \varepsilon_B^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1}$$

$$f_{rB}/f_p = \varepsilon_B^{-1/5} (10^{7.2} - 1)^{1/10}$$

$$f_{rB} = \varepsilon_B^{-1/5} f_p (10^{7.2} - 1)^{0.1}$$

Al sustituir el valor de f_p en la expresión anterior, se obtiene

$$f_{rB} = \frac{\varepsilon_B^{-1/5} (10^{7.2} - 1)^{0.1} f_{rC}}{\cosh \left[\frac{\cosh^{-1} \left(\varepsilon_C^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1} \right)}{5} \right]}$$

Sin embargo, cuando ambas aproximaciones (Chebyshev del tipo I y Butterworth) satisfacen las mismas restricciones en la banda de paso, esto es, el valor de ω_p es la misma en ambas aproximaciones, los valores de ε_C y ε_B son diferentes, como se observa en la figura 3.16. Por lo que existe una infinidad de soluciones para la última expresión.

En el diseño de filtros pasa bajas utilizando la aproximación Chebyshev del tipo I, es común que la pérdida en la banda de paso se restrinja a valores menores de 3 dB, implicando que el valor de ε_C se encuentre en el intervalo $0 < \varepsilon_C < 1$. Por lo que, para ejemplificar la solución se propone que en la frecuencia de paso, $\omega = \omega_p$, se presente una pérdida de 1.5 dB para la aproximación Chebyshev. Esto es

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_C^2} = -1.5dB$$

$$\varepsilon_C = \sqrt{10^{0.15} - 1} = 0.642291$$

Con los valores obtenidos de los parámetros:

$$\lambda = 3981.07158$$

$$f_{rC} = 4000 \times 10^3$$

y $\varepsilon_C = 0.642291$

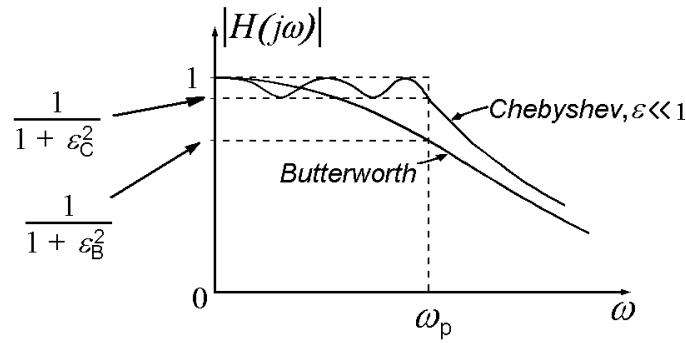


Figura 3.16: ϵ_C y ϵ_B diferentes para las mismas restricciones en la banda de paso

se obtiene el valor de la frecuencia de paso

$$f_p = \frac{f_{rC}}{\cosh \left[\frac{\cosh^{-1} (\epsilon_C^{-1} \sqrt{10^{7.2} - 1})}{5} \right]} = \frac{4000 \times 10^3}{\cosh \left[\frac{\cosh^{-1} ((0.642291)^{-1} (3981.07158))}{5} \right]}$$

$$= \frac{4000 \times 10^3}{\cosh \left[\frac{\cosh^{-1} (6198.236594)}{5} \right]} = \frac{4000 \times 10^3}{\cosh (1.885033)} = \frac{4000 \times 10^3}{3.369198}$$

$$f_p = 1187.226159 \text{ kHz}$$

Al utilizar los valores de los parámetros f_{rC} , λ , ϵ_C y f_p , estos dos últimos obtenidos de la suposición considerada para el filtro Chebyshev del tipo I, se verifica que el orden del filtro para el filtro Chebyshev del tipo I es de orden 5. El orden del filtro se determina a partir de

$$N \geq \frac{\cosh^{-1} (\lambda / \epsilon_C)}{\cosh^{-1} (f_{rC} / f_p)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{3981.07158}{0.642291} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{4000}{1187.226159} \right)} = \frac{9.425167}{1.885033} = 5$$

Quedando verificado que los parámetros obtenidos de λ , ϵ_C , f_{rC} y f_p cumplen con la restricción del orden del filtro indicado en la enunciación del problema.

Mientras que f_{rB} queda como

$$f_{rB} = \epsilon_B^{-1/5} f_p (10^{7.2} - 1)^{0.1} = \epsilon_B^{-1/5} (1187226.159) (5.248075)$$

$$f_{rB} = \epsilon_B^{-0.2} (6230.651924 \times 10^3)$$

Se hace notar que en nuestro caso el parámetro utilizado para establecer el límite superior de la banda de paso ϵ_B para el filtro Butterworth, se encuentra restringido al intervalo $0 < \epsilon_C < \epsilon_B < 1$, donde ϵ_C tiene el valor numérico de 0.642291. Por lo que, para continuar ejemplificando la solución se propone el valor de 0.8 para ϵ_B , como se describe a continuación

$$f_{rB} = (0.8)^{-0.2} (6230.651924 \times 10^3) = 6515016.09$$

Al utilizar los valores de los parámetros λ , f_p , ϵ_B y f_{rB} , estos tres últimos obtenidos de las suposiciones consideradas para el filtro Chebyshev del tipo I y del filtro Butterworth, se verifica que el orden del filtro para el filtro Butterworth es de orden 5. El orden del filtro se determina a partir de

$$N \geq \frac{\log (\lambda / \epsilon_B)}{\log (f_{rB} / f_p)} = \frac{\log \left(\frac{3981.07158}{0.8} \right)}{\log \left(\frac{6515.01609}{1187.226159} \right)} = \frac{3.69691}{0.739382} = 5$$

Quedando verificado que los parámetros obtenidos de λ , ϵ_B , f_{rB} y f_p cumplen con la restricción del orden del filtro indicado en la enunciación del problema.

Del análisis anterior se concluye que un filtro Butterworth, con respecto a un filtro Chebyshev del tipo I, que cumple con las mismas condiciones de diseño para la pérdida en potencia en la frecuencia de rechazo (con una pérdida de 72 dB) y en el orden del filtro ($N = 5$), tiene una frecuencia de rechazo mayor que la del filtro Chebyshev del tipo I. Esto se observa al comparar las frecuencias de rechazo de ambos diseños.

Para el filtro Butterworth la frecuencia de rechazo es

$$f_{rB} = 6515.01609 \text{ kHz}$$

Mientras que para el filtro Chebyshev del tipo I es

$$f_{rB} = 4000 \text{ kHz}$$

Del análisis anterior se infiere que los filtros Chebyshev del tipo I tienen un mejor comportamiento en la banda de transición con respecto a los filtro Butterworth, esto es, decaen con mayor rapidez entre la banda de paso y la banda de rechazo.

Problema 3.22 Se desea un filtro pasa bajas que satisfaga las siguientes restricciones:

- Atenuación en la banda de paso con 3 dB desde 0 a 5 kHz.
- Atenuación ≥ 30 dB para $f \geq 10$ kHz.

Determine el mínimo orden para un filtro Butterworth y un filtro Chebyshev del tipo I que cumpla con las especificaciones.

Solución:

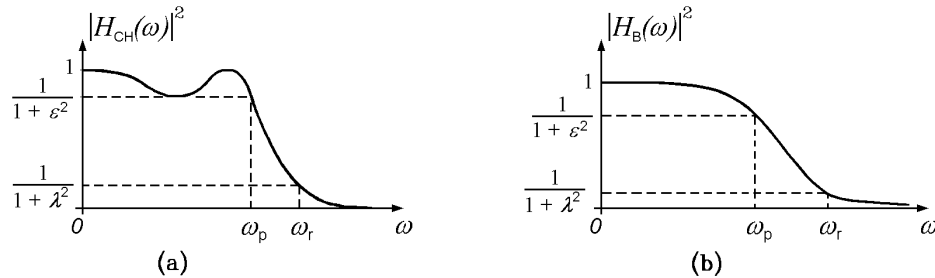


Figura 3.17: Magnitud en potencia para el filtro: a) Chebyshev del tipo I y b) Butterworth

De las condiciones de la ganancia en dB de los filtros Chebyshev del tipo I y Butterworth, vea las figuras 3.17a y 3.17b, y de la especificación de la banda de paso establecida en la enunciación del problema, se obtiene

$$-3 \text{ dB} = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)$$

$$3 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{0.3} - 1} = 1$$

Por lo que se determina que $\epsilon = 1$. Mientras que para la banda de rechazo se tiene

$$30 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^3 - 1} = 31.60696$$

La expresión de la magnitud en potencia del filtro Chebyshev es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\omega/\omega_p)}$$

El orden del filtro se determina a partir de

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}(\lambda/\epsilon)}{\cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p)}$$

Mientras que la expresión de la magnitud en potencia del filtro Butterworth es

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (\omega/\omega_p)^{2N}}$$

El orden del filtro se determina a partir de

$$N \geq \frac{\log(\lambda/\epsilon)}{\log(\omega_r/\omega_p)}$$

Al sustituir valores, con $\epsilon = 1$, $\lambda = 31.60696$ y $\omega_r/\omega_p = 2$

El orden del filtro para la aproximación Chebyshev es

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}(31.60696)}{\cosh^{-1}(2)} = \frac{4.146274}{1.316958} = 3.15$$

Mientras que el orden del filtro para la aproximación Butterworth es

$$N \geq \frac{\log(31.60696)}{\log(2)} = \frac{1.4998}{0.30103} = 4.98$$

Para las mismas especificaciones del filtro se tiene:

- El mínimo orden para un filtro Chebyshev del tipo I es $N = 4$.
- El mínimo orden para un filtro Butterworth es $N = 5$.

Del análisis anterior se infiere que un filtro Chebyshev del tipo I, con respecto a un filtro Butterworth, que cumple con las mismas condiciones de diseño, tiene un orden del filtro menor que la del filtro Butterworth. Esto se observa al comparar el orden del filtro de ambos diseños.

Con relación a una implementación física del filtro, el filtro Chebyshev del tipo I requiere de un menor número de componentes en su diseño con respecto al del filtro Butterworth.

Problema 3.23 Para la siguiente distribución de polos y de ceros, grafique su ubicación en un diagrama de polos y ceros. Éstos corresponden a un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II de orden $N = 8$, con una máxima pérdida en la banda de paso de 1.5 dB , una mínima ganancia en la banda de rechazo de 80 dB , una frecuencia de paso $\omega_p = 45\text{ rad/seg}$ y una frecuencia de rechazo $\omega_r = 95\text{ rad/seg}$.

Tabla 3.23: Distribución de polos y de ceros para el problema 3.23

Polos	Ceros
$s_1 = -8.070719 + j46.763044$	$z_1 = j96.861160$
$s_2 = -24.647665 + j42.514348$	$z_2 = j114.255528$
$s_3 = -41.096135 + j31.647973$	$z_3 = j170.995482$
$s_4 = -52.729879 + j12.088458$	$z_4 = j486.953935$
$s_5 = -52.729879 - j12.088458$	$z_5 = -j486.953935$
$s_6 = -41.096135 - j31.647973$	$z_6 = -j170.995482$
$s_7 = -24.647665 - j42.514348$	$z_7 = -j114.255528$
$s_8 = -8.070719 - j46.763044$	$z_8 = -j96.861160$

Solución:

La gráfica con la distribución de polos y ceros se muestra en la figura 3.18. La figura de la derecha es una ampliación del recuadro de la figura de la izquierda.

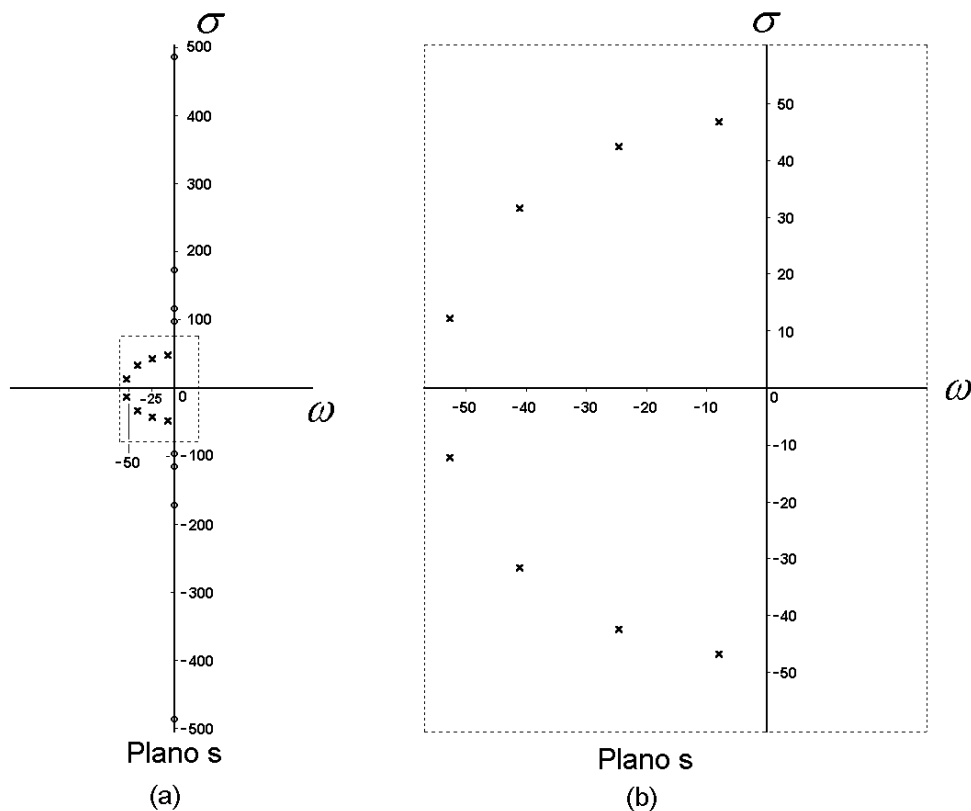


Figura 3.18: (a) Distribución de polos y ceros del filtro Chebyshev del tipo II del problema 3.23, (b) Amplificación del recuadro

Problema 3.24 Para un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II de orden $N = 9$, con una mínima ganancia en la banda de paso de 0.75 dB , una mínima pérdida en la banda de rechazo de 85 dB , una frecuencia de paso $\omega_p = 30 \text{ rad/seg}$ y una frecuencia de rechazo $\omega_r = 60 \text{ rad/seg}$, tiene la siguiente distribución de polos y de ceros. En un diagrama de polos y ceros grafique su ubicación.

Tabla 3.24: Distribución de polos y de ceros para el problema 3.19

Polos	Ceros
$s_1 = -4.783710 + j32.262589$	$z_1 = j60.925597$
$s_2 = -14.731108 + j30.342346$	$z_2 = j69.282032$
$s_3 = -25.257875 + j25.203650$	$z_3 = j93.343430$
$s_4 = -34.608783 + j14.979775$	$z_4 = j175.428264$
$s_5 = -38.614317$	$z_5 = \text{Cero en el infinito}$
$s_6 = -34.608783 - j14.979775$	$z_6 = -j175.428264$
$s_7 = -25.257875 - j25.203650$	$z_7 = -j93.343430$
$s_8 = -14.731108 - j30.342346$	$z_8 = -j69.282032$
$s_9 = -4.783710 - j32.262589$	$z_9 = -j60.925597$

Solución:

La gráfica con la distribución de polos y ceros se muestra en la figura 3.19. La figura de la derecha es una ampliación del recuadro de la figura de la izquierda.

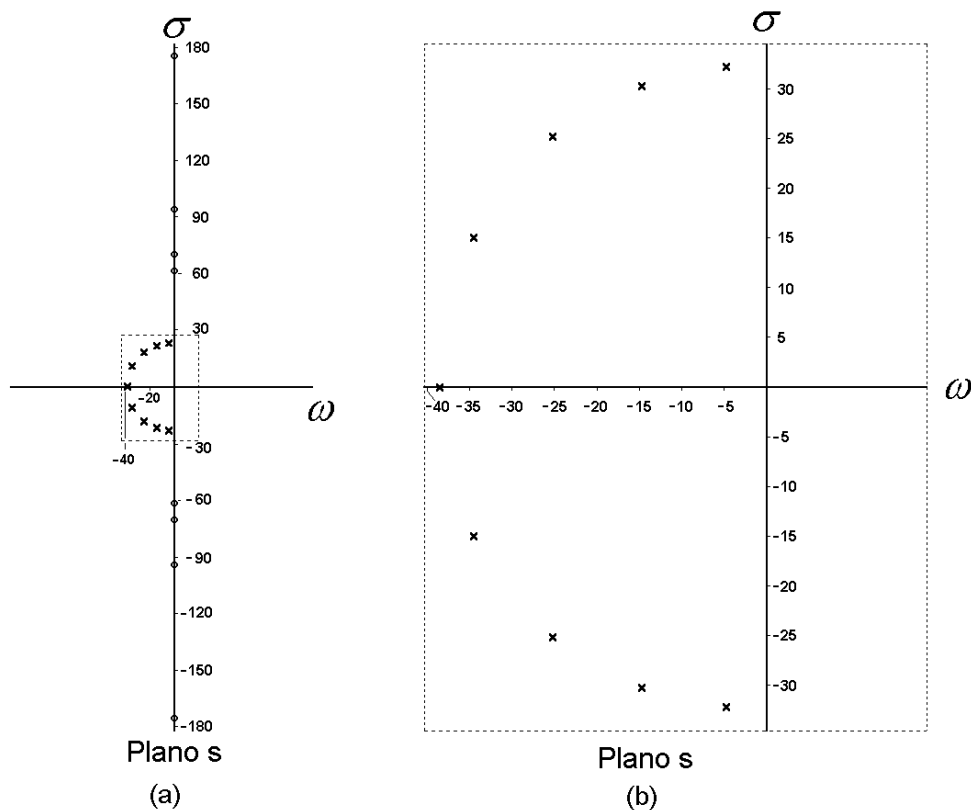


Figura 3.19: (a) Distribución de polos y ceros del filtro Chebyshev del tipo II del problema , (b) Amplificación del recuadro

Problema 3.25 Determine la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II con las siguientes especificaciones:

Máxima atenuación en la banda de paso de 1 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 10\text{ rad/seg}$

Máxima ganancia en la banda de rechazo de 50 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 25\text{ rad/seg}$

Solución:

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Primero se determina el orden del filtro.

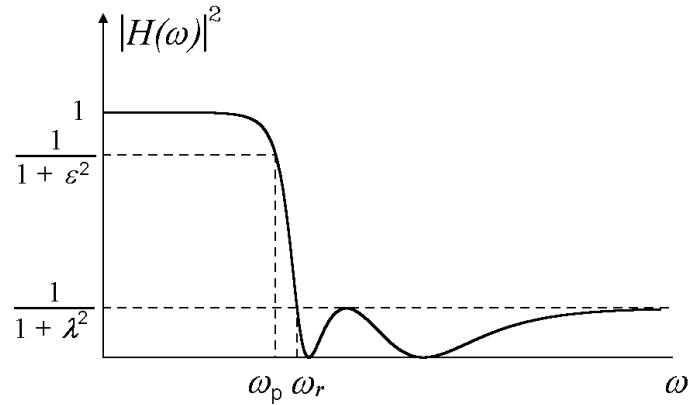


Figura 3.20: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.25

De la figura 3.20 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$1\text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.1)} - 1} = 0.508847$$

$$50\text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^5 - 1} = 316.226185$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 2.5$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{316.226185}{0.508847} \right)}{\cosh^{-1} (2.5)} = \frac{7.125212}{1.566799} = 4.547$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 5$.

Para determinar la función de transferencia se determina la ubicación de los polos y de los ceros. Se inicia con la ubicación de los polos. Para ello, se hace uso de las siguientes expresiones.

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\text{con } \sigma_k = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\Omega_k = \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$$

$$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$$

$$\eta_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$v_k = \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[\varepsilon \cosh \left[N \cosh^{-1} (\omega_r / \omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de v_k , con $N = 5$, $\varepsilon = 0.508847$ y $\omega_r / \omega_p = 2.5$, esto es

$$v_k = \frac{1}{5} \text{senh}^{-1} \left[(0.508847) \cosh \left[5 \cosh^{-1} (2.5) \right] \right]$$

$$v_k = 1.431678$$

$$\text{senh } v_k = \text{senh} (1.431678) = 1.973405$$

$$\text{cosh } v_k = \text{cosh} (1.431678) = 2.212312$$

La evaluación de la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.25 y 3.26. La tabla 3.25 presenta los primeros cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.26 continúa con estos cálculos, finalizando con los valores de la ubicación de los polos.

Tabla 3.25: Cálculo de los polos: Máxima atenuación en banda de paso de 1 dB y $N = 5$, primera parte

k	η_k	$\text{cos } \eta_k$	$\text{sen } \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$	$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$
1	$\pi/10$	0.951057	0.309017	0.609816	2.104035
2	$3\pi/10$	0.587785	0.809017	1.596518	1.300364
3	$5\pi/10$	0	1	1.973405	0
4	$7\pi/10$	-0.587785	0.809017	1.596518	-1.300364
5	$9\pi/10$	-0.951057	0.309017	0.609816	-2.104035
6	$11\pi/10$	-0.951057	-0.309017	-0.609816	-2.104035
7	$13\pi/10$	-0.587785	-0.809017	-1.596518	-1.300364
8	$15\pi/10$	0	-1	-1.973405	0
9	$17\pi/10$	0.587785	-0.809017	-1.596518	1.300364
10	$19\pi/10$	0.951057	-0.309017	-0.609816	2.104035

De la tabla 3.26 se obtiene la ubicación los polos, se considera aquellos que se encuentran en la parte izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$s_1 = -3.1769 + j10.9612$$

$$s_2 = -9.4138 + j7.6676$$

$$s_3 = -12.6684$$

$$s_4 = -9.4138 - j7.6676$$

$$s_5 = -3.1769 - j10.9612$$

Tabla 3.26: Cálculo de los polos: Máxima atenuación en banda de paso de 1 dB y $N = 5$, segunda parte

k	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	4.798839	0.127076	0.438447	-3.1769	10.9612
2	4.239816	0.376554	0.306703	-9.4138	7.6676
3	3.894327	0.506738	0	-12.6684	0
4	4.239816	0.376554	-0.306703	-9.4138	-7.6676
5	4.798839	0.127076	-0.438447	-3.1769	-10.9612
6	4.798839	-0.127076	-0.438447	3.1769	-10.9612
7	4.239816	-0.376554	-0.306703	9.4138	-7.6676
8	3.894327	-0.506738	0	12.6684	0
9	4.239816	-0.376554	0.306703	9.4138	7.6676
10	4.798839	-0.127076	0.438447	3.1769	10.9612

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la siguiente expresión.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

La evaluación de la ubicación de los ceros se muestra en la tabla 3.27.

Tabla 3.27: Cálculo de los ceros: Máxima atenuación en banda de paso de 1 dB y $N = 5$.

k	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/10$	0.951057	26.2865
2	$3\pi/10$	0.587785	42.5326
3	$5\pi/10$	0	En el infinito
4	$7\pi/10$	-0.587785	-42.5326
5	$9\pi/10$	-0.951057	-26.2865
6	$11\pi/10$	-0.951057	-26.2865
7	$13\pi/10$	-0.587785	-42.5326
8	$15\pi/10$	0	En el infinito
9	$17\pi/10$	0.587785	42.5326
10	$19\pi/10$	0.951057	26.2865

De la tabla 3.27 se obtiene la ubicación los ceros, los cuales se enumeran a continuación (con $\omega_r = 25 \text{ rad/seg}$).

$$\begin{aligned} z_1 &= +j26.2865 \\ z_2 &= +j42.5326 \\ z_3 &= \text{Cero en el infinito} \\ z_4 &= -j42.5326 \\ z_5 &= -j26.2865 \end{aligned}$$

De la distribución de los polos se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo s_1 y su conjugado s_5 se tiene (con $\sigma_1 = -3.1769$ y $\Omega_1 = 10.9612$)

$$(s - s_1)(s - s_5) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(3.1769)s + (3.1769)^2 + (10.9612)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_5) = s^2 + 6.3538s + 130.2406$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_2 = -9.4138$ y $\Omega_2 = 7.6676$)

$$(s - s_2)(s - s_4) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(9.4138)s + (9.4138)^2 + (7.6676)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_4) = s^2 + 18.8276s + 147.4117$$

De la distribución de los ceros se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\Omega_k)(s + j\Omega_k) = s^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \Omega_k^2$$

Para el cero z_1 y su conjugado z_5 se tiene (con $\Omega_1 = 26.2865$)

$$(s - z_1)(s - z_5) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (26.2865)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_5) = s^2 + 690.980$$

Para el cero z_2 y su conjugado z_4 se tiene (con $\Omega_2 = 42.5326$)

$$(s - z_2)(s - z_4) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (42.5326)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_4) = s^2 + 1809.0220$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 690.98)(s^2 + 1809.022)}{(s^2 + 6.3538s + 130.2406)(s^2 + 18.8276s + 147.4117)(s + 12.6684)}$$

Se determina la constante de normalización K_0 al obtener la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0 (690.98 - \omega^2)(1809.022 - \omega^2)}{(130.2406 - \omega^2 + j6.3538\omega)(147.4117 - \omega^2 + j18.8276\omega)(12.6684 + j\omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0 (690.98)(1809.022)}{(130.2406)(147.4117)(12.6684)} = K_0 (5.13936) = 1$$

$$K_0 = 0.194577$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{0.194577 (s^2 + 690.98)(s^2 + 1809.022)}{(s^2 + 6.3538s + 130.2406)(s^2 + 18.8276s + 147.4117)(s + 12.6684)}$$

Problema 3.26 Obtenga la función de transferencia normalizada en amplitud de un filtro pasa bajas Chebyshev del tipo II con las siguientes especificaciones:

Mínima ganancia en la banda de paso de 2 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 150\text{ rad/seg}$

Mínima pérdida en la banda de rechazo de 60 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 700\text{ rad/seg}$

Solución:

La función de transferencia se determina a partir de la ubicación de los polos. Primero se determina el orden del filtro.

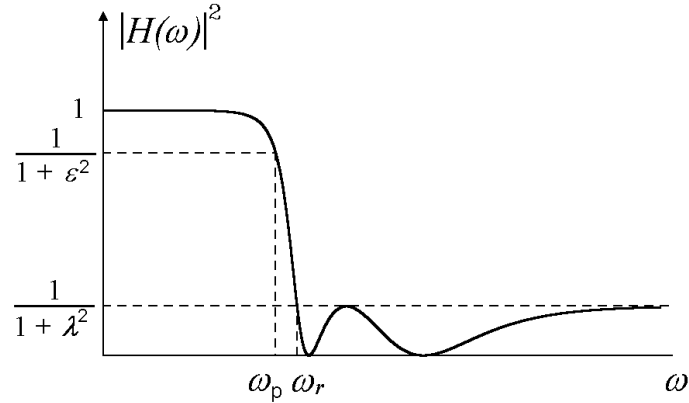


Figura 3.21: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.26

De la figura 3.21 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$2\text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.2)} - 1} = 0.764783$$

$$60\text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^6 - 1} = 999.9995$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 14/3$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{999.9995}{0.764783} \right)}{\cosh^{-1} (14/3)} = \frac{7.869065}{2.22191} = 3.54$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 4$.

Para determinar la función de transferencia se determina la ubicación de los polos y de los ceros. Se inicia con la ubicación de los polos. Para ello, se hace uso de las siguientes expresiones.

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k$$

$$\text{con } \sigma_k = -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\Omega_k = \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$$

$$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$$

$$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$$

$$\eta_k = \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi$$

$$v_k = \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[\varepsilon \cosh \left[N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de v_k , con $N = 4$, $\varepsilon = 0.764783$ y $\omega_r/\omega_p = 14/3$, esto es

$$v_k = \frac{1}{4} \text{senh}^{-1} \left[(0.764783) \cosh \left[4 \cosh^{-1}(14/3) \right] \right]$$

$$v_k = 2.154869$$

$$\text{senh } v_k = \text{senh}(2.154869) = 4.255421$$

$$\text{cosh } v_k = \text{cosh}(2.154869) = 4.371339$$

La evaluación de la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.28 y 3.29. La tabla 3.28 presenta los primeros cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.29 continúa con estos cálculos, finalizando con los valores de la ubicación de los polos.

De la tabla 3.29 se obtiene la ubicación los polos, se considera aquellos que se encuentran en la parte izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$s_1 = -60.1160 + j149.0874$$

$$s_2 = -150.7555 + j64.1459$$

$$s_3 = -150.7555 - j64.1459$$

$$s_4 = -60.1160 - j149.0874$$

Tabla 3.28: Cálculo de los polos: Mínima ganancia en banda de paso de 2 dB y $N = 4$, primera parte

k	η_k	$\text{cos } \eta_k$	$\text{sen } \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$	$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	1.628477	4.038588
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	3.931494	1.672837
3	$5\pi/10$	-0.382683	0.923879	3.931494	-1.672837
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	1.628477	-4.038588
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-1.628477	-4.038588
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-3.931494	-1.672837
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-3.931494	1.672837
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-1.628477	4.038588

Tabla 3.29: Cálculo de los polos: Mínima ganancia en banda de paso de $2dB$ y $N = 4$, segunda parte

k	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	18.962130	0.085880	0.212982	-60.1160	149.0874
2	18.255029	0.215365	0.091637	-150.7555	64.1459
3	18.255029	0.215365	-0.091637	-150.7555	-64.1459
4	18.962130	0.085880	-0.212982	-60.1160	-149.0874
5	18.962130	-0.085880	-0.212982	60.1160	-149.0874
6	18.255029	-0.215365	-0.091637	150.7555	-64.1459
7	18.255029	-0.215365	0.091637	150.7555	64.1459
8	18.962130	-0.085880	0.212982	60.1160	149.0874

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la siguiente expresión.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

La evaluación de la ubicación de los ceros se muestra en la tabla 3.30.

De la tabla 3.30 se obtiene la ubicación los ceros, los cuales se enumeran a continuación (con $\omega_r = 14/3 \text{ rad/seg}$).

$$\begin{aligned} z_1 &= +j757.6750 \\ z_2 &= +j1829.1902 \\ z_3 &= -j1829.1902 \\ z_4 &= -j757.6750 \end{aligned}$$

Tabla 3.30: Cálculo de los ceros: Mínima ganancia en banda de paso de $2dB$ y $N = 4$

k	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/8$	0.923879	757.6750
2	$3\pi/8$	0.382683	1829.1902
3	$5\pi/8$	-0.382683	-1829.1902
4	$7\pi/8$	-0.923879	-757.6750
5	$9\pi/8$	-0.923879	-757.6750
6	$11\pi/8$	-0.382683	-1829.1902
7	$13\pi/8$	0.382683	1829.1902
8	$15\pi/8$	0.923879	757.6750

De la distribución de los polos se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo s_1 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_1 = -60.1160$ y $\Omega_1 = 149.0874$)

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(60.116)s + (60.116)^2 + (149.0874)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 120.2320s + 25840.9863$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_2 = -150.7555$ y $\Omega_2 = 64.1459$)

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(150.7555)s + (150.7555)^2 + (64.1459)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 301.511s + 26841.9173$$

De la distribución de los ceros se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\Omega_k)(s + j\Omega_k) = s^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \Omega_k^2$$

Para el cero z_1 y su conjugado z_4 se tiene (con $\Omega_1 = 757.6750$)

$$(s - z_1)(s - z_4) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (757.675)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_4) = s^2 + 574071.4056$$

Para el cero z_2 y su conjugado z_3 se tiene (con $\Omega_2 = 1829.1902$)

$$(s - z_2)(s - z_3) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (1829.1902)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_3) = s^2 + 3345936.788$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 574071.4056) (s^2 + 3345936.788)}{(s^2 + 120.232s + 25840.9863) (s^2 + 301.511s + 26841.9173)}$$

Se determina la constante de normalización K_0 al obtener la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0 (574071.4056 - \omega^2) (3345936.788 - \omega^2)}{(25840.9863 - \omega^2 + j120.232\omega) (26841.9173 - \omega^2 + j301.511\omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} =$$

$$\frac{K_0 (574071.4056 - \omega^2) (3345936.788 - \omega^2)}{(25840.9863 - \omega^2 + j120.232\omega) (26841.9173 - \omega^2 + j301.511\omega)} \Big|_{\omega=0}$$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0 (574071.4056) (3345936.788)}{(25840.9863) (26841.9173)} = (2769.2427) K_0 = 1$$

$$K_0 = 3.611095553 \times 10^{-4}$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{3.611095553 \times 10^{-4} (s^2 + 574071.4056) (s^2 + 3345936.788)}{(s^2 + 120.232s + 25840.9863) (s^2 + 301.511s + 26841.9173)}$$

Problema 3.27 Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo II con las siguientes especificaciones

Máxima atenuación en la banda de paso de 0.6 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 4\text{ rad/seg}$

Mínima atenuación en la banda de rechazo de 45 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 15\text{ rad/seg}$

Determine:

- El mínimo orden del filtro.
- La función de transferencia normalizada en amplitud.
- Las expresiones para la magnitud, la ganancia en dB , la fase y el retardo de grupo.

Solución:

a) Mínimo orden del filtro

De la figura 3.22 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

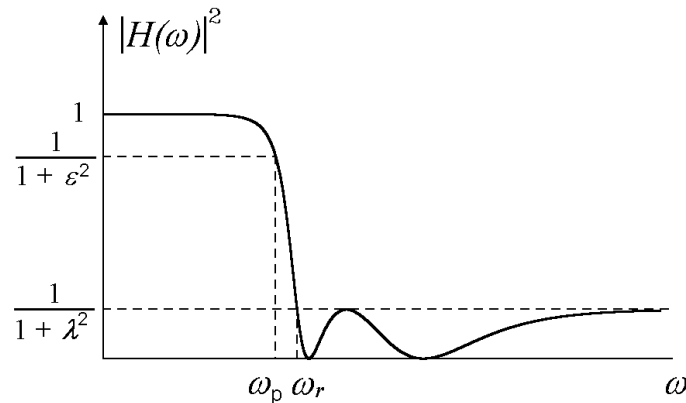


Figura 3.22: Magnitud en potencia indicando los parámetros ε , λ , ω_p y ω_r para el problema 3.27

Los valores de ε y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$0.6\text{ dB} = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.06)} - 1} = 0.384907$$

$$45\text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^{4.5} - 1} = 177.825129$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 3.75$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{177.825129}{0.384907} \right)}{\cosh^{-1} (3.75)} = \frac{6.82870}{1.996632} = 3.42$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 4$.

b) Función de transferencia normalizada en amplitud

Para determinar la función de transferencia se determina la ubicación de los polos y de los ceros. Se inicia con la ubicación de los polos. Para ello, se hace uso de las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\ \text{con} \quad \sigma_k &= -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \\ \Omega_k &= \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \\ \gamma_k &= \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k \\ \rho_k &= \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k \\ \eta_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \end{aligned}$$

$$v_k = \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[\varepsilon \cosh \left[N \cosh^{-1} (\omega_r / \omega_p) \right] \right]$$

Se determina el valor de v_k , con $N = 4$, $\varepsilon = 0.384907$ y $\omega_r / \omega_p = 3.75$, esto es

$$v_k = \frac{1}{4} \text{senh}^{-1} \left[(0.384907) \cosh \left[4 \cosh^{-1} (3.75) \right] \right]$$

$$v_k = 1.757943$$

$$\text{senh } v_k = \text{senh} (1.757943) = 2.814047$$

$$\text{cosh } v_k = \text{cosh} (1.757943) = 2.986446$$

La evaluación de la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.31 y 3.32. La tabla 3.31 presenta los primeros cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.32 continúa con estos cálculos, finalizando con los valores de la ubicación de los polos.

Tabla 3.31: Cálculo de los polos: Máxima atenuación en banda de paso de 0.6 dB y $N = 4$, primera parte

k	η_k	$\text{cos } \eta_k$	$\text{sen } \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$	$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$
1	$\pi/8$	0.923879	0.382683	1.076888	2.759115
2	$3\pi/8$	0.382683	0.923879	2.599839	1.142862
3	$5\pi/8$	-0.382683	0.923879	2.599839	-1.142862
4	$7\pi/8$	-0.923879	0.382683	1.076888	-2.759115
5	$9\pi/8$	-0.923879	-0.382683	-1.076888	-2.759115
6	$11\pi/8$	-0.382683	-0.923879	-2.599839	-1.142862
7	$13\pi/8$	0.382683	-0.923879	-2.599839	1.142862
8	$15\pi/8$	0.923879	-0.382683	-1.076888	2.759115

Tabla 3.32: Cálculo de los polos: Máxima atenuación en banda de paso de 0.6 dB y $N = 4$, segunda parte

k	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	8.772403	0.122759	0.314522	-1.8414	4.7178
2	8.065296	0.322349	0.141701	-4.8352	2.1255
3	8.065296	0.322349	-0.141701	-4.8352	-2.1255
4	8.772403	0.122759	-0.314522	-1.8414	-4.7178
5	8.772403	-0.122759	-0.314522	1.8414	-4.7178
6	8.065296	-0.322349	-0.141701	4.8352	-2.1255
7	8.065296	-0.322349	0.141701	4.8352	2.1255
8	8.772403	-0.122759	0.314522	1.8414	4.7178

De la tabla 3.32 se obtiene la ubicación los polos, se considera aquellos que se encuentran en la parte izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$\begin{aligned} s_1 &= -1.8414 + j4.7178 \\ s_2 &= -4.8352 + j2.1255 \\ s_3 &= -4.8352 - j2.1255 \\ s_4 &= -1.8414 - j4.7178 \end{aligned}$$

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la siguiente expresión.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

La evaluación de la ubicación de los ceros se muestra en la tabla 3.33.

De la tabla 3.33 se obtiene la ubicación los ceros, los cuales se enumeran a continuación (con $\omega_r = 3.75 \text{ rad/seg}$).

$$\begin{aligned} z_1 &= +j16.2359 \\ z_2 &= +j39.1969 \\ z_3 &= -j39.1969 \\ z_4 &= -j16.2359 \end{aligned}$$

De la distribución de los polos se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo s_1 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_1 = -1.8414$ y $\Omega_1 = 4.7178$)

$$(s - s_1)(s - s_4) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(1.8414)s + (1.8414)^2 + (4.7178)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_4) = s^2 + 3.6828s + 25.6484$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_3 se tiene (con $\sigma_2 = -4.8352$ y $\Omega_2 = 2.1255$)

$$(s - s_2)(s - s_3) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(4.8352)s + (4.8352)^2 + (2.1255)^2$$

Tabla 3.33: Cálculo de los ceros: Máxima atenuación en banda de paso de $0.6dB$ y $N = 4$

k	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/8$	0.923879	16.2359
2	$3\pi/8$	0.382683	39.1969
3	$5\pi/8$	-0.382683	-39.1969
4	$7\pi/8$	-0.923879	-16.2359
5	$9\pi/8$	-0.923879	-16.2359
6	$11\pi/8$	-0.382683	-39.1969
7	$13\pi/8$	0.382683	39.1969
8	$15\pi/8$	0.923879	16.2359

$$(s - s_2)(s - s_3) = s^2 + 9.6704s + 27.8969$$

De la distribución de los ceros se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\Omega_k)(s + j\Omega_k) = s^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \Omega_k^2$$

Para el cero z_1 y su conjugado z_4 se tiene (con $\Omega_1 = 16.2359$)

$$(s - z_1)(s - z_4) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (16.2359)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_4) = s^2 + 263.6044$$

Para el cero z_2 y su conjugado z_3 se tiene (con $\Omega_2 = 39.1969$)

$$(s - z_2)(s - z_3) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (39.1969)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_3) = s^2 + 1536.3970$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 263.6044) (s^2 + 1536.397)}{(s^2 + 3.6828s + 25.6484) (s^2 + 9.6704s + 27.8969)}$$

Se determina la constante de normalización K_0 al obtener la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0 (263.6044 - \omega^2) (1536.397 - \omega^2)}{(25.6484 - \omega^2 + j3.6828\omega) (27.8969 - \omega^2 + j9.6704\omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para $\omega = 0$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0 (263.6044 - \omega^2) (1536.397 - \omega^2)}{(25.6484 - \omega^2 + j3.6828\omega) (27.8969 - \omega^2 + j9.6704\omega)} \Big|_{\omega=0}$$

$$|H(\omega)| \Big|_{\omega=0} = \frac{K_0 (263.6044) (1536.397)}{(25.6484) (27.8969)} = (566.030563) K_0 = 1$$

$$K_0 = 1.766689054 \times 10^{-3}$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{1.766689054 \times 10^{-3} (s^2 + 263.6044) (s^2 + 1536.397)}{(s^2 + 3.6828s + 25.6484) (s^2 + 9.6704s + 27.8969)}$$

c) Expresiones para la magnitud, la magnitud en dB , la fase y el retardo de grupo.

A partir de la función de transferencia obtenida en el inciso anterior al evaluarla en frecuencia, aplicando el operador $s = j\omega$, se obtiene

$$H(\omega) = \frac{1.766689054 \times 10^{-3} (263.6044 - \omega^2) (1536.397 - \omega^2)}{(25.6484 - \omega^2 + j3.6828\omega) (27.8969 - \omega^2 + j9.6704\omega)}$$

La función magnitud esta dada por

$$|H(\omega)| = \frac{1.766689054 \times 10^{-3} |263.6044 - \omega^2| |1536.397 - \omega^2|}{\sqrt{(25.6484 - \omega^2)^2 + (3.6828\omega)^2} \sqrt{(27.8969 - \omega^2)^2 + (9.6704\omega)^2}}$$

La evaluación de la ganancia en dB es

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log (1.766689054 \times 10^{-3}) \\ &+ 20 \log |263.6044 - \omega^2| + 20 \log |1536.397 - \omega^2| \\ &- 10 \log [(25.6484 - \omega^2)^2 + (3.6828\omega)^2] \\ &\quad - 10 \log [(27.8969 - \omega^2)^2 + (9.6704\omega)^2] \end{aligned}$$

Para evaluar la fase, se requiere determinar el $\arg[H(\omega)]$, esto es

$$\begin{aligned} \arg[H(\omega)] &= \arg[263.6044 - \omega^2] + \arg[1536.397 - \omega^2] \\ &\quad - \arctan \left[\frac{3.6828\omega}{25.6484 - \omega^2} \right] - \arctan \left[\frac{9.6704\omega}{27.8969 - \omega^2} \right] \end{aligned}$$

En la evaluación del $\arg[H(\omega)]$ anterior, en particular enfatizando en los polos, se hace notar que para el argumento de un número complejo $\alpha + j\beta$ con α y β positivos ($\alpha > 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq \pi \quad (\acute{o}: \leq 90^\circ)$$

Mientras que para un α negativo y un β positivo ($\alpha < 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{-|\alpha|} \right) = -\arctan \left(\frac{\beta}{|\alpha|} \right) \pm \pi \quad (\acute{o}: \pm 180^\circ)$$

De lo anterior se concluye que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 25.6484$ es

$$\begin{aligned} \arg[(25.6484 - \omega^2 + j3.6828\omega)^{-1}] &= -\arctan \left[\frac{3.6828\omega}{25.6484 - \omega^2} \right] \\ &= +\arctan \left[\frac{3.6828\omega}{\omega^2 - 25.6484} \right] \pm \pi \end{aligned}$$

Mientras que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 27.8969$ es

$$\begin{aligned} \arg \left[(27.8969 - \omega^2 + j9.6704 \omega)^{-1} \right] &= - \arctan \left[\frac{9.6704 \omega}{27.8969 - \omega^2} \right] \\ &= + \arctan \left[\frac{9.6704 \omega}{\omega^2 - 27.8969} \right] \pm \pi \end{aligned}$$

En la evaluación del $\arg[H(\omega)]$, en particular enfatizando en los ceros, se hace notar que para el argumento de un número real α positivos ($\alpha > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha] = 0^\circ$$

Mientras que para un α negativo ($\alpha < 0$) se tiene

$$\arg[\alpha] = \arg[-|\alpha|] = \pm \pi \quad (\text{ó: } \pm 180^\circ)$$

De lo anterior se concluye que la evaluación para valores de $\omega^2 > 263.6044$ es

$$\arg[263.6044 - \omega^2] = \arg[-(\omega^2 - 263.6044)] = \pm \pi$$

Mientras que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 1536.397$ es

$$\arg[1536.397 - \omega^2] = \arg[-(\omega^2 - 1536.397)] = \pm \pi$$

De manera que cada término del $\arg[H(\omega)]$ debe evaluarse de acuerdo con las observaciones anterior.

El retardo de grupo es

$$\tau_g(\omega) = - \frac{d \arg[H(\omega)]}{d \omega}$$

Usando tablas[7], la expresión de la derivada del arctan $[H(\omega)]$ es

$$\frac{d \arctan[H(\omega)]}{d \omega} = \frac{1}{1 + H^2(\omega)} \frac{d[H(\omega)]}{d \omega}$$

de aquí que

$$\begin{aligned} - \frac{d \arg[H(j\omega)]}{d \omega} &= \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{3.6828 \omega}{25.6484 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(25.6484 - \omega^2)(3.6828) - (3.6828 \omega)(-2 \omega)}{(25.6484 - \omega^2)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{1 + \left(\frac{9.6704 \omega}{27.8969 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(27.8969 - \omega^2)(9.6704) - (9.6704 \omega)(-2 \omega)}{(27.8969 - \omega^2)^2} \right] \\ \tau_g(\omega) &= \frac{(3.6828)(25.6484 - \omega^2) + 2(3.6828) \omega^2}{(25.6484 - \omega^2)^2 + (3.6828 \omega)^2} \\ &\quad + \frac{(9.6704)(27.8969 - \omega^2) + 2(9.6704) \omega^2}{(27.8969 - \omega^2)^2 + (9.6704 \omega)^2} \end{aligned}$$

Problema 3.28 Se requiere diseñar un filtro Chebyshev pasa bajas del tipo II con las siguientes especificaciones

Mínima ganancia en la banda de paso de 2.5 dB

Límite de la banda de paso: $\omega_p = 50 \text{ rad/seg}$

Máxima ganancia en la banda de rechazo de 80 dB

Límite de la banda de rechazo: $\omega_r = 250 \text{ rad/seg}$

Determine:

- El mínimo orden del filtro.
- La función de transferencia normalizada en amplitud.
- Las expresiones para la magnitud, la ganancia en dB, la fase y el retardo de grupo.

Solución:

a) Mínimo orden del filtro

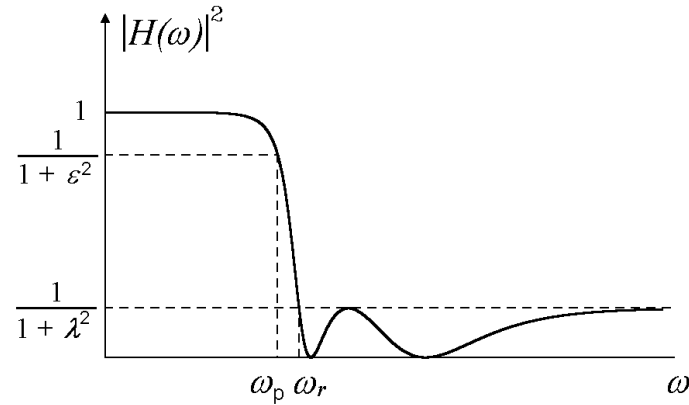


Figura 3.23: Magnitud en potencia indicando los parámetros ϵ , λ , ω_p y ω_r para el problema 28

De la figura 3.23 se observa que al evaluar $|H(\omega)|^2$ en $\omega = \omega_p$ y en $\omega = \omega_r$ se obtiene

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_p} = |H(\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \implies 10 \log |H(\omega_p)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \epsilon^2} \right)$$

$$|H(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_r} = |H(\omega_r)|^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2} \implies 10 \log |H(\omega_r)|^2 = 10 \log \left(\frac{1}{1 + \lambda^2} \right)$$

Los valores de ϵ y λ se determinan utilizando las ganancias en dB de las bandas de paso y rechazo especificadas en la enunciación del problema, como sigue

$$2.5 \text{ dB} = 10 \log(1 + \epsilon^2)$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{(0.25)} - 1} = 0.882201$$

$$80 \text{ dB} = 10 \log(1 + \lambda^2)$$

$$\lambda = \sqrt{10^8 - 1} = 9999.99995$$

Entonces, con $\omega_r/\omega_p = 5$, el orden del filtro es

$$N = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{\lambda}{\epsilon} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\omega_r}{\omega_p} \right)} = \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{9999.99995}{0.882201} \right)}{\cosh^{-1}(5)} = \frac{10.028823}{2.292432} = 4.37$$

Para satisfacer las condiciones del filtro es necesario que el menor orden del filtro sea de $N = 5$.

b) Función de transferencia normalizada en amplitud

Para determinar la función de transferencia se determina la ubicación de los polos y de los ceros. Se inicia con la ubicación de los polos. Para ello, se hace uso de las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}
 s_k &= \sigma_k + j\Omega_k \\
 \text{con} \quad \sigma_k &= -\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \\
 \Omega_k &= \frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2} \\
 \gamma_k &= \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k \\
 \rho_k &= \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k \\
 \eta_k &= \left(\frac{2k-1}{2N} \right) \pi \\
 v_k &= \frac{1}{N} \text{senh}^{-1} \left[\varepsilon \cosh \left[N \cosh^{-1}(\omega_r/\omega_p) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Se determina el valor de v_k , con $N = 5$, $\varepsilon = 0.882201$ y $\omega_r/\omega_p = 5$, esto es

$$v_k = \frac{1}{5} \text{senh}^{-1} \left[(0.882201) \cosh \left[5 \cosh^{-1}(5) \right] \right]$$

$$v_k = 2.267365$$

$$\text{senh } v_k = \text{senh}(2.267365) = 4.775172$$

$$\text{cosh } v_k = \text{cosh}(2.267365) = 4.878757$$

La evaluación de la ubicación de los polos se muestran en las tablas 3.34 y 3.35.

Tabla 3.34: Cálculo de los polos: Mínima ganancia en banda de paso de 2.5 dB y $N = 5$, primera parte

k	η_k	$\text{cos } \eta_k$	$\text{sen } \eta_k$	$\gamma_k = \text{sen } \eta_k \text{ senh } v_k$	$\rho_k = \text{cos } \eta_k \text{ cosh } v_k$
1	$\pi/10$	0.951057	0.309017	1.475609	4.639976
2	$3\pi/10$	0.587785	0.809017	3.863195	2.867660
3	$5\pi/10$	0	1	4.775172	0
4	$7\pi/10$	-0.587785	0.809017	3.863195	-2.867660
5	$9\pi/10$	-0.951057	0.309017	1.475609	-4.639976
6	$11\pi/10$	-0.951057	-0.309017	-1.475609	-4.639976
7	$13\pi/10$	-0.587785	-0.809017	-3.863195	-2.867660
8	$15\pi/10$	0	-1	-4.775172	0
9	$17\pi/10$	0.587785	-0.809017	-3.863195	2.867660
10	$19\pi/10$	0.951057	-0.309017	-1.475609	4.639976

La tabla 3.34 presenta los primeros cálculos intermedios en la determinación de los polos, mientras que la tabla 3.35 continúa con estos cálculos, finalizando con los valores de la ubicación de los polos.

Tabla 3.35: Cálculo de los polos: Mínima ganancia en banda de paso de 2.5 dB y $N = 5$, segunda parte

k	$\gamma_k^2 + \rho_k^2$	$\frac{\gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$\frac{\rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$	$-\left(\frac{\omega_r \gamma_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}\right)$	$\frac{\omega_r \rho_k}{\gamma_k^2 + \rho_k^2}$
1	23.706799	0.062244	0.195723	-15.5610	48.9307
2	23.147749	0.166893	0.123885	-41.7232	30.9712
3	22.802256	0.209417	0	-52.3542	0
4	23.147749	0.166893	-0.123885	-41.7232	-30.9712
5	23.706799	0.062244	-0.195723	-15.5610	-48.9307
6	23.706799	-0.062244	-0.195723	15.5610	-48.9307
7	23.147749	-0.166893	-0.123885	41.7232	-30.9712
8	22.802256	-0.209417	0	52.3542	0
9	23.147749	-0.166893	0.123885	41.7232	30.9712
10	23.706799	-0.062244	0.195723	15.5610	48.9307

De la tabla 3.35 se obtiene la ubicación los polos, se considera aquellos que se encuentran en la parte izquierda del eje imaginario por motivos de estabilidad, los cuales se enumeran a continuación.

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -15.5610 + j48.9307 \\
 s_2 &= -41.7232 + j30.9712 \\
 s_3 &= -52.3542 \\
 s_4 &= -41.7232 - j30.9712 \\
 s_5 &= -15.5610 - j48.9307
 \end{aligned}$$

Para la ubicación de los ceros se hace uso de la siguiente expresión.

$$z_k = \frac{j\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$$

La evaluación de la ubicación de los ceros se muestra en la tabla 3.36.

Tabla 3.36: Cálculo de los ceros: Mínima ganancia en banda de paso de 2.5 dB y $N = 5$

k	$\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi$	$\frac{\omega_r}{\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\right)\pi}$
1	$\pi/10$	0.951057	262.8655
2	$3\pi/10$	0.587785	425.3256
3	$5\pi/10$	0	En el infinito
4	$7\pi/10$	-0.587785	-425.3256
5	$9\pi/10$	-0.951057	-262.8655
6	$11\pi/10$	-0.951057	-262.8655
7	$13\pi/10$	-0.587785	-425.3256
8	$15\pi/10$	0	En el infinito
9	$17\pi/10$	0.587785	425.3256
10	$19\pi/10$	0.951057	262.8655

De la tabla 3.36 se obtiene la ubicación los ceros, los cuales se enumeran a continuación (con

$\omega_r = 25 \text{ rad/seg}$).

$$z_1 = +j262.8655$$

$$z_2 = +j425.3256$$

$$z_3 = \text{Cero en el infinito}$$

$$z_4 = -j425.3256$$

$$z_5 = -j262.8655$$

De la distribución de los polos se observa que al aparecer un polo complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = (s - \sigma_k - j\Omega_k)(s - \sigma_k + j\Omega_k) = (s - \sigma_k)^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \Omega_k^2$$

Para el polo s_1 y su conjugado s_5 se tiene (con $\sigma_1 = -15.561$ y $\Omega_1 = 48.9307$)

$$(s - s_1)(s - s_5) = (s - s_1)(s - s_1^*) = s^2 + 2(15.561)s + (15.561)^2 + (48.9307)^2$$

$$(s - s_1)(s - s_5) = s^2 + 31.122s + 2636.358$$

Para el polo s_2 y su conjugado s_4 se tiene (con $\sigma_2 = -41.7232$ y $\Omega_2 = 30.9712$)

$$(s - s_2)(s - s_4) = (s - s_2)(s - s_2^*) = s^2 + 2(41.7232)s + (41.7232)^2 + (30.9712)^2$$

$$(s - s_2)(s - s_4) = s^2 + 83.446s + 2700.04$$

De la distribución de los cero se observa que al aparecer un cero complejo también aparece su conjugado, por lo que éstos se pueden agrupar de la forma

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = (s - j\Omega_k)(s + j\Omega_k) = s^2 + \Omega_k^2$$

$$(s - z_k)(s - z_k^*) = s^2 + \Omega_k^2$$

Para el cero z_1 y su conjugado z_5 se tiene (con $\Omega_1 = 262.8655$)

$$(s - z_1)(s - z_5) = (s - z_1)(s - z_1^*) = s^2 + (262.8655)^2$$

$$(s - z_1)(s - z_5) = s^2 + 69098.271$$

Para el cero z_2 y su conjugado z_4 se tiene (con $\Omega_2 = 425.3256$)

$$(s - z_2)(s - z_4) = (s - z_2)(s - z_2^*) = s^2 + (425.3256)^2$$

$$(s - z_2)(s - z_4) = s^2 + 180901.866$$

La función de transferencia normalizada en amplitud es

$$H(s) = \frac{K_0 (s^2 + 69098.271) (s^2 + 180901.866)}{(s^2 + 31.122s + 2636.358) (s^2 + 83.446s + 2700.04) (s + 52.354)}$$

Se determina la constante de normalización K_0 al obtener la respuesta en frecuencia al aplicar el operador $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{K_0 (69098.271 - \omega^2) (180901.866 - \omega^2)}{(2636.358 - \omega^2 + j31.122 \omega) (2700.04 - \omega^2 + j83.446 \omega) (52.354 + j \omega)}$$

Luego, la magnitud se evalúa para $\omega = 0$

$$|H(\omega)|_{\omega=0} = \frac{K_0 (69098.271) (180901.866)}{(2636.358) (2700.04) (52.354)} = K_0 (33.54175451) = 1$$

$$K_0 = 0.02981358652$$

La función de transferencia solicitada es

$$H(s) = \frac{0.02981358652 (s^2 + 69098.271) (s^2 + 180901.866)}{(s^2 + 31.122s + 2636.358) (s^2 + 83.446s + 2700.04) (s + 52.354)}$$

c) Expresiones para la magnitud, la magnitud en dB , la fase y el retardo de grupo.

A partir de la función de transferencia obtenida en el inciso anterior al evaluarla en frecuencia, aplicando el operador $s = j\omega$, se obtiene

$$H(\omega) = \frac{0.02981358652 (69098.271 - \omega^2) (180901.866 - \omega^2)}{(2636.358 - \omega^2 + j31.122 \omega) (2700.04 - \omega^2 + j83.446 \omega) (52.354 + j \omega)}$$

La función magnitud esta dada por

$$|H(\omega)| = \frac{0.02981358652 \left| 69098.271 - \omega^2 \right| \left| 180901.866 - \omega^2 \right|}{\sqrt{(2636.358 - \omega^2)^2 + (31.122 \omega)^2} \sqrt{(2700.04 - \omega^2)^2 + (83.446 \omega)^2} \sqrt{(52.354)^2 + (\omega)^2}}$$

La evaluación de la ganancia en dB es

$$\begin{aligned} |H(\omega)|_{dB} &= 20 \log |H(\omega)| = 20 \log (0.02981358652) + 20 \log \left| 69098.271 - \omega^2 \right| \\ &+ 20 \log \left| 180901.866 - \omega^2 \right| - 10 \log \left[(2636.358 - \omega^2)^2 + (31.122 \omega)^2 \right] \\ &\quad - 10 \log \left[(2700.04 - \omega^2)^2 + (83.446 \omega)^2 \right] - 10 \log \left[(52.354)^2 + (\omega)^2 \right] \end{aligned}$$

Para evaluar la fase, se requiere determinar el $\arg[H(\omega)]$, esto es

$$\begin{aligned} \arg [H(\omega)] &= \arg [69098.271 - \omega^2] + \arg [180901.866 - \omega^2] \\ &\quad - \arctan \left[\frac{31.122 \omega}{2636.358 - \omega^2} \right] - \arctan \left[\frac{83.446 \omega}{2700.04 - \omega^2} \right] - \arctan \left[\frac{\omega}{52.354} \right] \end{aligned}$$

En la evaluación del $\arg[H(\omega)]$ anterior, en particular enfatizando en los polos, se hace notar que para el argumento de un número complejo $\alpha + j\beta$ con α y β positivos ($\alpha > 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg [\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \leq \pi \quad (\acute{o}: \leq 90^\circ)$$

Mientras que para un α negativo y un β positivo ($\alpha < 0$ y $\beta > 0$) se tiene

$$\arg [\alpha + j\beta] = \arctan \left(\frac{\beta}{-|\alpha|} \right) = -\arctan \left(\frac{\beta}{|\alpha|} \right) \pm \pi \quad (\acute{o}: \pm 180^\circ)$$

De lo anterior se concluye que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 2636.358$ es

$$\begin{aligned} \arg \left[(2636.358 - \omega^2 + j31.122 \omega)^{-1} \right] &= -\arctan \left[\frac{31.122 \omega}{2636.358 - \omega^2} \right] \\ &= +\arctan \left[\frac{31.122 \omega}{\omega^2 - 2636.358} \right] \pm \pi \end{aligned}$$

Mientras que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 27.895$ es

$$\begin{aligned} \arg \left[(2700.04 - \omega^2 + j83.446 \omega)^{-1} \right] &= -\arctan \left[\frac{83.446 \omega}{2700.04 - \omega^2} \right] \\ &= +\arctan \left[\frac{83.446 \omega}{\omega^2 - 2700.04} \right] \pm \pi \end{aligned}$$

En la evaluación del $\arg[H(\omega)]$, en particular enfatizando en los ceros, se hace notar que para el argumento de un número real α positivos ($\alpha > 0$) se tiene

$$\arg[\alpha] = 0^\circ$$

Mientras que para un α negativo ($\alpha < 0$) se tiene

$$\arg[\alpha] = \arg[-|\alpha|] = \pm \pi \quad (\text{ó: } \pm 180^\circ)$$

De lo anterior se concluye que la evaluación para valores de $\omega^2 > 69098.271$ es

$$\arg[69098.271 - \omega^2] = \arg[-(\omega^2 - 69098.271)] = \pm \pi$$

Mientras que la evaluación para valores de $\omega^2 \geq 180901.866$ es

$$\arg[180901.866 - \omega^2] = \arg[-(\omega^2 - 180901.866)] = \pm \pi$$

De manera que cada término del $\arg[H(\omega)]$ debe evaluarse de acuerdo con las observaciones anterior.

El retardo de grupo es

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d \arg[H(\omega)]}{d \omega}$$

Usando tablas[7], la expresión de la derivada del $\arctan[H(\omega)]$ es

$$\frac{d \arctan[H(\omega)]}{d \omega} = \frac{1}{1 + H^2(\omega)} \frac{d[H(\omega)]}{d \omega}$$

de aquí que

$$\begin{aligned} -\frac{d \arg[H(j\omega)]}{d \omega} &= \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{31.122 \omega}{2636.358 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(2636.358 - \omega^2)(31.122) - (31.122 \omega)(-2 \omega)}{(2636.358 - \omega^2)^2} \right] \\ &+ \frac{1}{1 + \left(\frac{83.446 \omega}{2700.04 - \omega^2} \right)^2} \left[\frac{(2700.04 - \omega^2)(83.446) - (83.446 \omega)(-2 \omega)}{(2700.04 - \omega^2)^2} \right] \\ &+ \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{52.354} \right)^2} \left[\frac{1}{52.354} \right] \end{aligned}$$

$$\tau_g(\omega) = \frac{(31.122)(2636.358 - \omega^2) + 2(31.122)\omega^2}{(2636.358 - \omega^2)^2 + (31.122\omega)^2} + \frac{(83.446)(2700.04 - \omega^2) + 2(83.446)\omega^2}{(2700.04 - \omega^2)^2 + (83.446\omega)^2} + \frac{52.354}{\omega^2 + (52.354)^2}$$



Bibliografía

- [1] Antoniou, Andreas. *Digital Filters: Analysis and Design*. McGraw-Hill, 1979.
- [2] Ashok, Ambardar. *Procesamiento de señales analógicas y digitales*. Editorial Thomson, México, 2002.
- [3] Budak, Aram. *Passive and active network analysis and synthesis*. Houghton Mifflin Company, 1974.
- [4] Daryanani, Gobind. *Principles of active network synthesis and design*. Wiley New York, 1976.
- [5] David J. DeFatta, Joseph G. Lucas, William S. Hodgkiss. *Digital Signal Processing: A System Design Approach*. John Wiley and Sons, 1988.
- [6] Franklin F. Kuo. *Network Analysis and Synthesis*. Second Edition. Wiley International Edition, 1966.
- [7] Granville, Smith and Longley *Cálculo diferencial e integral*. Limusa. 1980.
- [8] Hamming, RW. *Digital filters*. Prentice Hall, 1989.
- [9] Harry Y - Lam, F. *Analog and digital filters: design and realization*. Englewood Cliffs, New Jersey. 1979.
- [10] Huelsman, Lawrence P. and Allen, Phillip E. *Introduction to the theory and design of active filters*. McGraw-Hill, 1980.
- [11] Khan, Muhammad Nasir and Hasnain, Syed K and Jamil, Mohsin and Imran, Ali. *Electronic Signals and Systems: Analysis, Design and Applications*. CRC Press, 2022.
- [12] López Villaseñor M, García González M. T., Peña Castillo M. A. y Ortiz Pedroza M. R. *Teoría de filtros analógicos del tipo Butterworth*. 02.0202.II.01.002.95. UAM-Iztapalapa, 1995.
- [13] Nilsson, James W. *Circuitos eléctricos (4.ª edición)*. AddisonWesley, 1995.
- [14] Oppenheim, Alan V and Buck, John R. and Schafer, Ronald W. *Discrete-time signal processing. Vol. 2*. Prentice Hall, 2001.

-
- [15] Oppenheim, Alan V. and Schafer, Ronald W. *Digital signal processing*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1975.
- [16] Pactitis, S.A. *Active filters: theory and design*. CRC Press, 2007.
- [17] Proakis John, G. and Manolakis Dimitris, G. *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*. Fourth Edition. Pearson, Pentice Hall, 2007.
- [18] Rabiner, Lawrence R. and Gold, Bernard. *Theory and application of digital signal processing*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [19] Stanley, William D. *Digital Signal Processing*. Reston Pub., 1975.
- [20] Stark, Henry and Tuteur, Franz B. *Modern electrical communications: theory and systems*. Prentice-Hall, 1979.
- [21] Tan, Li and Jiang, Jean. *Digital signal processing: fundamentals and applications*. Academic press, 2018.
- [22] Thompson, Marc. *Intuitive analog circuit design*. Elsevier, 2006.