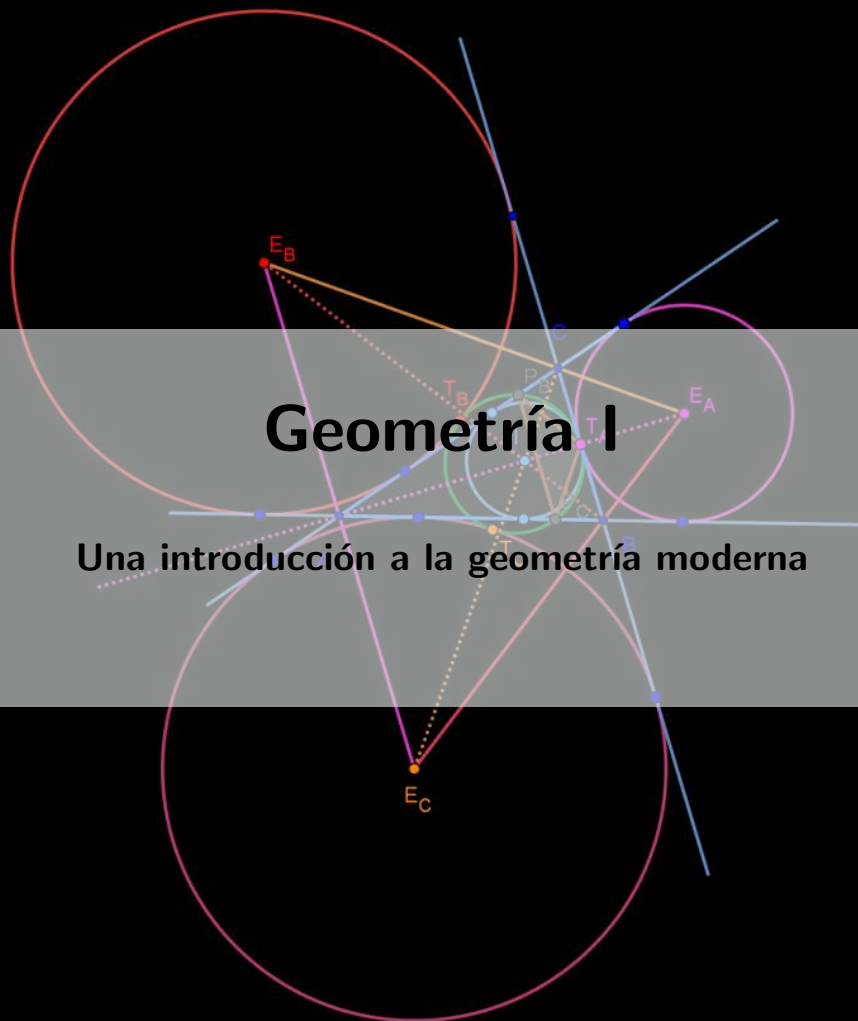




Geometría I

Una introducción a la geometría moderna

Laura Hidalgo Solís



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia
Rector General

Dra. Norma Rondero López
Secretaria General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dra. Verónica Medina Bañuelos
Rectora de Unidad

Dr. Javier Rodríguez Lagunas
Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero
Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Geometría I. Una introducción a la geometría moderna.

Primera edición: 2025

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, Núm. 186, Col. Leyes de Reforma 1 A Sección, Alcaldía
Iztapalapa, C.P. 09310, Ciudad de México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3481-1

Geometría I

Una introducción al estudio de la geometría moderna

Laura Hidalgo Solís

6 de abril de 2024

Gracias Dios:

*Por todo lo bueno y verdadero, por la
familia, los amigos, la alegría, el amor,
la esperanza, la paz y la oración, . . .*

A mi mamá ...

A mi tia Martha...

Índice general

Índice general	1
1 Fundamentos	1
1.1. Segmentos dirigidos	1
1.2. Razón de partición de un segmento	8
1.3. Ángulos dirigidos	12
1.4. El teorema de la bisectriz	19
1.5. Puntos al infinito y el plano extendido	26
1.6. Relaciones de incidencia	30
1.7. Ejercicios	33
2 Ptolomeo	37
2.1. Introducción	38
2.2. Rectas antiparalelas	43
2.3. Cuadriláteros cíclicos	59

Índice general

2.4.	El teorema de Ptolomeo	79
2.5.	El teorema de la recta de Simson	88
2.6.	Ejercicios	96
3	Apolonio	102
3.1.	Apolonio de Perga	103
3.2.	Figuras homotéticas	114
3.3.	Razón de homotecia para circunferencias . . .	118
3.4.	Circunferencias homotéticas	121
3.5.	Puntos homólogos	123
3.6.	Circunferencia de similitud	130
3.7.	La circunferencia de Apolonio	134
3.8.	Ejercicios	136
4	Teoremas de Configuración	140
4.1.	Los teoremas de Menelao y Ceva	141
4.2.	El teorema de la división interna y externa . .	157
4.3.	Desargues	160
4.4.	El teorema de Pappus	172
4.5.	Las bisectrices de un triángulo	176
4.6.	Medianas de un triángulo	190
4.7.	Las alturas de un triángulo	194
4.8.	Las mediatrices de un triángulo	202
4.9.	Ejercicios	210
5	Triángulo	216
5.1.	Introducción	216
5.2.	El teorema de Carnot	217

Índice general

5.3.	El triángulo órtico	228
5.4.	La recta de Euler	239
5.5.	La circunferencia de los nueve puntos	247
5.6.	Teorema de Feuerbach	263
5.7.	Ejercicios	274
6	Gamas armónicas	281
6.1.	Introducción	281
6.2.	La razón cruzada.	282
6.3.	Cuaternas armónicas	300
6.4.	Rectas armónicas	314
6.5.	Cuadrángulo y cuadrilátero completo	327
6.6.	Ejercicios	335
7	Inversión geométrica	340
7.1.	Potencia de un punto	341
7.2.	El teorema de Pascal	353
7.3.	Inversión	357
7.4.	Aplicaciones	382
7.5.	Inversión de un teorema	390
7.6.	Polos y polares	392
7.7.	La razón cruzada de una circunferencia	398
7.8.	Potencia negativa	400
7.9.	Comentarios finales	402
7.10.	Ejercicios:	403
8	Notación y terminología	408

Índice general

Bibliografía	415
A Euclides	419
A.1. Libro I	419
A.2. Libro III	425
Índice de figuras	432

Prefacio

La intención de estas notas es que sirvan como apoyo en el curso de Geometría I que se imparte en la UAM, unidad Iztapalapa.

El material se ha seleccionado con el fin de cubrir los fundamentos de la geometría moderna, la cual constituye una extensión de la geometría de los Elementos de Euclides.

Históricamente, la geometría moderna se sitúa entre los siglos III A.C. y XIX D.C.

Una de las formas en que los matemáticos de la era moderna han extendido la geometría más allá de la heredada de los griegos fue el descubrimiento de nuevas proposiciones relacionadas con las circunferencias y las figuras rectilíneas, deducidas de las enumeradas en los Elementos de Euclides.

Una de las innovaciones importantes de la geometría moderna elemental es el empleo, cuando es útil, de segmentos con sentido, o sea, con signo, también llamados segmentos

dirigidos, lo cual será el tema de estudio del capítulo 1.

Por medio de este concepto de magnitudes con sentido, algunos principios y relaciones que se dan separadamente frecuentemente pueden combinarse en un solo principio o relación que las abarque.

- * La noción de segmento dirigido nos conduce a la siguiente definición muy útil: la razón en la que un punto sobre una recta divide a un segmento de ésta.
- * Otra de las innovaciones es asignar sentido a los ángulos que están en un plano común. Se dice que un ángulo es negativo si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj, y que es positivo si la rotación es en sentido contrario al reloj. Un ángulo así es un ángulo con sentido o ángulo dirigido.
- * A veces, conviene asignar sentido a las áreas de triángulos que están en un plano común. Un triángulo ABC se considerará positivo o negativo según que el perímetro descrito de A hacia B y de B a C y finalmente, de C hacia A sea en el sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj) o en el sentido dextrógiro (sentido de las manecillas del reloj).
- * Otra innovación de la geometría moderna elemental es la creación de algunos elementos ideales llamados “puntos en el infinito”, “la recta del infinito” de un plano, y “el plano del infinito” del espacio.

En el capítulo 2 estudiaremos un tema relacionado con los conceptos de rectas paralelas y simetría con respecto a una recta, a saber, el concepto de rectas antiparalelas con respecto a una recta dada y algunas de sus consecuencias, en particular, presentaremos una demostración del teorema de Ptolomeo, el cual es una relación, en geometría euclidiana, entre los cuatro lados y las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico.

En el capítulo 3 estudiaremos los conceptos de homotecia para circunferencias y puntos homólogos, circunferencia de similitud, y concluiremos el capítulo demostrando el teorema del círculo de Apolonio, el cual nos dice que, dado un segmento de recta y un número positivo distinto de uno, una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a sus extremos es el número dado.

En el capítulo 4 se demostrarán los teoremas de Menelao y Ceva, los cuales son una herramienta importante para estudiar la concurrencia de ciertas rectas y de algunos puntos. El teorema de Ceva es una herramienta que nos da condiciones bajo las cuales tres rectas que pasan por cada uno de los vértices de un triángulo son concurrentes, mientras que, el teorema de Menelao es una herramienta muy útil que nos da condiciones necesarias y suficientes para que tres puntos, cada uno sobre los lados de un triángulo, sean colineales.

Estos teoremas nos conducen, de manera natural, al concepto de perspectiva, la relación entre los teoremas de Ceva y Menelao se resumen en el teorema de Desargues, el cual nos da condiciones necesarias y suficientes para que dos triángu-

los estén en perspectiva.

Uno de los problemas planteados por León Battista Alberti en el siglo XV es: si la perspectiva no preserva medidas ni ángulos, ¿qué preserva? La solución a este problema la estudiaremos a lo largo del capítulo 5, y mostraremos algunas aplicaciones de ello.

Los conceptos y las propiedades de la perspectiva son las bases de lo que actualmente conocemos como geometría proyectiva.

Asimismo, se demostrará que siempre es posible dividir interna y externamente un segmento dado interna y externamente en la misma razón. Finalmente, se demostrará que, en un triángulo dado, sus bisectrices internas, mediatrices, medianas y alturas concurren en el incentro, circuncentro, baricentro, ortocentro respectivamente.

En el capítulo 5 estudiaremos nuevas propiedades del triángulo, es decir, de puntos, rectas y circunferencias asociadas a un triángulo, en particular se estudiarán algunas propiedades del circuncentro, el triángulo órtico asociado a un triángulo dado, y quizá uno de los teoremas más importantes del curso: el teorema de la recta de Euler, que muestra que el incentro, circuncentro, baricentro y ortocentro de un triángulo dado, forman un triángulo, aún más, el circuncentro, baricentro y ortocentro son colineales y el baricentro está en el interior del segmento determinado por el circuncentro y el ortocentro. Posteriormente, se demostrará el teorema de la circunferencia de los nueve puntos y, finalmente, siguiendo los pasos de Feuerbach, se demostrará el teorema de las tangencias

de Feuerbach, el cual demuestra que la circunferencia de los nueve puntos es tangente a la circunferencia inscrita y las tres circunferencias excritas asociadas a un triángulo dado.

En el capítulo 6 se introduce el concepto de razón cruzada entre cuatro puntos como un invariante proyectivo, posteriormente, se considera un tipo particular de valor asociado de razón cruzada, denominado como razón armónica, en particular se muestra, como consecuencia del teorema de la recta de Euler, que el circuncentro, el baricentro, el centro de la circunferencia de los nueve puntos y el ortocentro constituyen una hilera armónica. Finalmente se introducen los conceptos de cuadrángulo y cuadrilátero completo.

En el capítulo 7, estudiaremos propiedades de la circunferencia y, en particular, el problema de inversión con respecto a una circunferencia, concretamente, se estudiará el comportamiento de rectas, círculos y ángulos bajo inversión, y se demostrará la invarianza de la razón cruzada bajo inversiones. Finalmente, se aplicará esta poderosa herramienta para dar una demostración alternativa del teorema de Feuerbach.

Debido al uso constante que se da de los teoremas de los libros I y III de los elementos de Euclides, y con el fin de que estas notas sean autocontenidas, se anexa un apéndice con los enunciados de estos teoremas.

Finalmente, deseo agradecer a los árbitros por sus valiosas sugerencias y comentarios.

Para la realización de este documento se utilizaron los programas LaTeX memoir y GeoGebra.

Fundamentos

El principal concepto que estudiaremos en este capítulo es el de orientación, el cual se aplica tanto a las rectas como a los ángulos, y en general, a planos y espacios.

Este concepto permite dar diversos enunciados y definiciones, como los teoremas de Ceva y Menelao, así como las definiciones de puntos conjugados isogonales e isotópicos, sin necesidad de enunciar casos.

En este capítulo daremos algunos de los resultados más elementales sin profundizar (en el sentido axiomático) en las demostraciones, y usaremos la intuición cotidiana.

1.1. Segmentos dirigidos

Una de las diferencias más importantes entre la geometría clásica y la geometría moderna es la introducción del concep-

Fundamentos

to de signo y no solo el de magnitud. Dados dos segmentos AB y CD en la misma recta podemos decidir si tienen la misma dirección o la dirección contraria.

Dadas dos rectas dirigidas, en general, no tiene sentido preguntarnos si tienen la misma dirección o no. Sin embargo, si las rectas son paralelas sí podemos comparar direcciones.

Por lo anterior, en las fórmulas donde aparecen magnitudes de segmentos, éstos pueden tener signo si estamos usando segmentos en rectas paralelas. El ejemplo más importante es cuando los puntos A , B y P están en la misma recta, entonces tenemos las expresiones $PA \cdot PB$ y $AP \cdot PB$ para las cuales tiene sentido preguntarnos si son positivas o negativas.

Si A y B son dos puntos distintos en el plano, en la geometría euclidiana, tenemos que el segmento AB es igual al segmento BA .

Definición 1.1.1:

Cuando al segmento AB le asignamos un sentido se obtiene un **segmento dirigido**, por ejemplo, si vamos del punto A al punto B , tenemos el **segmento dirigido** AB , mientras que si vamos del punto B al punto A tenemos el segmento dirigido BA .

El punto A se llama origen o punto inicial del segmento dirigido AB y, el punto B extremo o punto final del segmento dirigido AB .

Las magnitudes de los segmentos dirigidos AB y BA

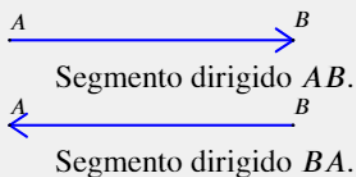


Figura 1.1: Segmentos dirigidos AB y BA .

son las mismas, pero sus direcciones son opuestas, como se muestra en la figura (1.1). Entonces el segmento BA tendrá sentido opuesto a AB , y esto lo señalamos expresando $BA = -AB$, esto es:

$$BA = -AB \iff AB + BA = 0.$$

En el caso en que los puntos A y B coincidan, podemos considerar que ellos determinan un segmento AB de longitud cero.

Todas las relaciones de esta sección son válidas cuando, debido a estas coincidencias, alguno o todos los segmentos incluidos tienen longitud cero.

En particular, $AB + BA = AA = 0$ y $BA + AB = BB = 0$. Lo anterior nos permite trabajar con la aritmética de los segmentos, por lo que, dependiendo del contexto de los enunciados, estaremos pensando que AB es un segmento, un segmento orientado, o bien, la magnitud orientada de un segmento orientado.

Fundamentos

Si ahora consideramos tres puntos distintos A , B y C sobre una línea recta, y suponemos además que la dirección positiva es de izquierda a derecha, entonces hay $3! = 6$ ordenaciones posibles de estos puntos, dando lugar a las siguientes relaciones:

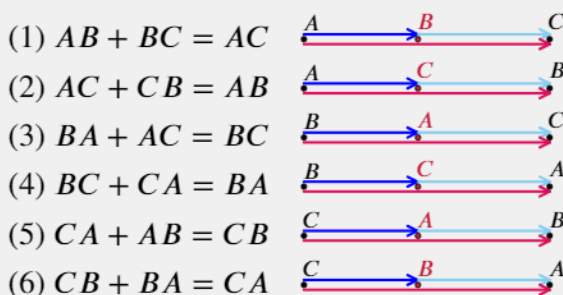


Figura 1.2: $3! = 6$ relaciones con A , B y C colineales.

Lo descrito en esta figura (1.2), se resume en el teorema (1.1.1):

Teorema 1.1.1: La relación fundamental

Si A , B y C son tres puntos diferentes en una línea recta, entonces

$$AB + BC + CA = 0. \quad (1.1)$$

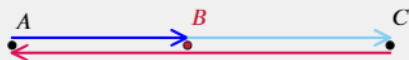


Figura 1.3: $AB + BC + CA = 0$.

Demostración: Sin perder generalidad, se puede suponer que B está entre A y C . Entonces $AB + BC = AC$, y como $AC + CA = 0$ se concluye que

$$AB + BC + CA = 0.$$

Los otros casos se demuestran de manera análoga. **Q.E.D.**

Definición 1.1.2:

Puntos colineales son aquellos que están en una misma recta.

Teorema 1.1.2: El teorema de Euler.

Si A , B , C y D son cuatro puntos cualesquiera en una línea recta, entonces

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

Demostración: Como A , B y D son puntos colineales, como consecuencia del teorema 1.1 tenemos que, $AB + BD + DA = 0$.

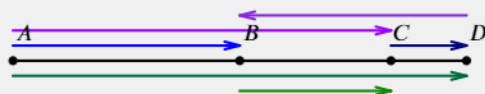


Figura 1.4: El teorema de Euler.

Como $BD = -DB$ lo anterior implica que $AB = -BD - DA = DB - DA$.

De manera similar tenemos que $AC + CD + DA = 0$ implica $AC = DC - DA$ y, de $BC + CD + DB$ se deduce $BC = DC - DB$.

Luego entonces

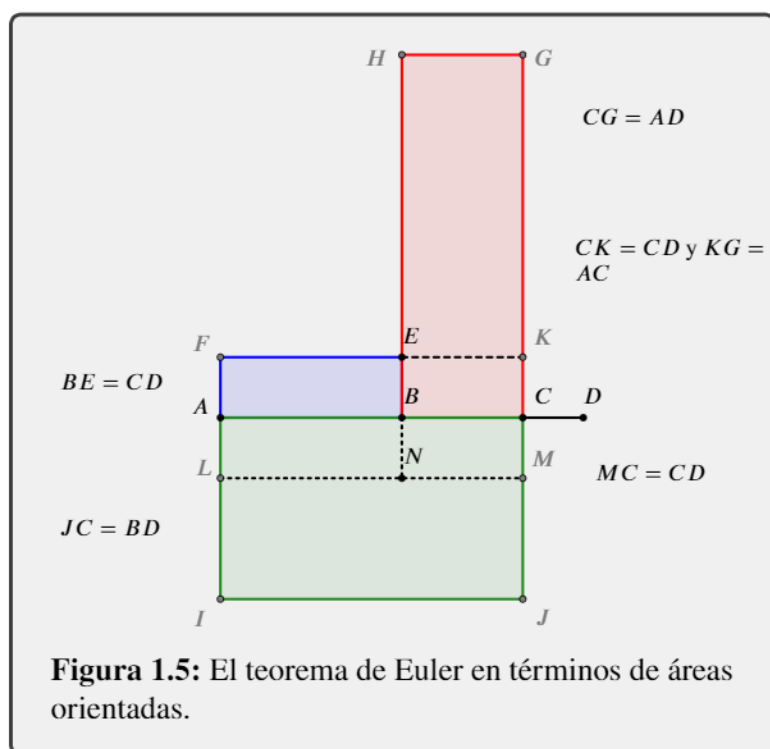
$$\begin{aligned}
 & AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC \\
 = & (DB - DA) \cdot CD + (DC - DA) \cdot DB \\
 & + AD \cdot (DC - DB) \\
 = & DB \cdot CD - DA \cdot CD + DC \cdot DB - DA \cdot DB \\
 & + AD \cdot DC - AD \cdot DB \\
 = & (DB \cdot CD + DC \cdot DB) + (AD \cdot DC - DA \cdot CD) \\
 & - (DA \cdot DB + AD \cdot DB) \\
 = & (DB \cdot CD + DC \cdot DB) + (AD \cdot DC - DA \cdot CD) \\
 & + (-DA \cdot DB - AD \cdot DB) \\
 = & 0 + 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Como se quería demostrar.

Q.E.D.

Fundamentos

Si pensamos que el producto de dos longitudes representa un área, el teorema de Euler (1.1.2), pág. 5, puede interpretarse en términos de áreas orientadas de paralelogramos, y en particular, para rectángulos, como se muestra en la figura (1.5):



Fundamentos

Así, la identidad

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

nos dice que el área del rectángulo de base AC y altura BD es igual a la suma de las áreas de los rectángulos de base AB altura CD y base BC altura AD .

1.2. Razón de partición de un segmento

Si tomamos en cuenta la relación fundamental dada por la ecuación (1.1) es natural preguntarse, ¿en qué razón divide el punto C al segmento AB ?

Definición 1.2.1:

Dados dos puntos distintos A y B , si P es un punto cualquiera de la recta AB , ya sea entre A y B , o bien, externo al segmento AB , decimos que P **divide al segmento AB en la razón $AP : PB$** .

Si P está entre A y B decimos que P divide al segmento **internamente** y la razón de partición $AP : PB$ es positiva; si Q está fuera del segmento AB el punto Q divide al segmento **externamente**, y la razón de partición $AQ : QB$ es negativa.

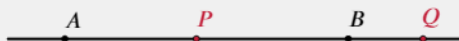


Figura 1.6: P divide internamente y Q divide externamente al segmento AB .

En la figura (1.6) que se muestra que P divide internamente el segmento AB y Q lo divide externamente.

Si P coincide con A o B , el segmento no está propiamente dividido.

Decimos entonces que P divide impropriamente al segmento AB , la razón de partición es cero o infinita de acuerdo si P coincide con A o con B , esto es:

$$AP : PB = \begin{cases} 0 & \text{si } P = A, \\ \infty & \text{si } P = B. \end{cases}$$

Por ejemplo, si A y B son dos puntos distintos, y P es el punto medio del segmento AB , entonces P divide al segmento AB en razón 1 a 1, esto es, $AP : PB = 1 : 1$, como se muestra en la figura (1.7).

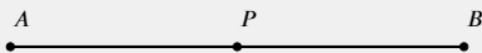


Figura 1.7: Si P es punto medio de AB , entonces $AP : PB = 1 : 1$.

Fundamentos

Si P y Q trisecan al segmento AB , de manera que

$$AP + PQ + QB = AB,$$

entonces

$$AP : PB = 1 : 2.$$

Por otra parte,

$$AQ : QB = 2 : 1,$$

como se muestra en la figura (1.8)

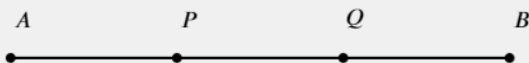


Figura 1.8: P divide al segmento AB en razón $1 : 2$, y Q divide al segmento AB en razón $2 : 1$.

Nuevamente, si P y Q trisecan al segmento AB , como en la figura (1.8) además de que P divide internamente al segmento AQ en razón $1 : 1$; mientras que B divide externamente al segmento AQ en razón $AB : BQ = -3 : 1$.

En este momento, resulta natural considerar el caso en que, salvo signo, los puntos P y Q dividan al segmento AB en razones iguales.

Definición 1.2.2:

Cuando cuatro puntos colineales A , B , P y Q están situados de tal manera que P y Q dividen interna y externamente en razones numéricamente iguales, esto es:

$$AP : PB = -AQ : QB$$

se dice que P y Q **dividen al segmento AB interna y externamente en la misma razón.**

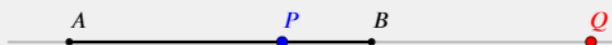


Figura 1.9: P y Q dividen interna y externamente al segmento AB numéricamente en la misma razón.

En la figura (1.9) mostramos un ejemplo en donde los puntos P y Q dividen al segmento AB interna y externamente en la misma razón.

En este momento cabe preguntarse: ¿si P es un punto en la recta AB , existe siempre un punto Q en la recta AB de manera que $AP : PB = -AQ : QB$?

1.3. Ángulos dirigidos

El ángulo formado por las rectas, con un punto común, OA y OB puede generarse por una recta en movimiento que gira con centro en O de la posición OA a la posición OB , lo cual se denota con el símbolo $\angle AOB$.

El símbolo $\angle AOB$ también denota la medida del ángulo; en estas notas usaremos los radianes como unidad de medida de los ángulos, a menos que se especifique lo contrario.

En los casos en que utilicemos el ángulo, medido en grados como unidad, lo diremos explícitamente.

Al igual que en los segmentos, hay ocasiones en que es muy útil dar a un ángulo una dirección.

Si en cada una de estas rotaciones la misma porción del plano es barrida por la recta en movimiento, los ángulos así generados son iguales en magnitud módulo 2π , es decir, salvo múltiplos enteros de 2π , pero opuestos en signo, es decir:

$$\angle BOA = -\angle AOB,$$

o equivalentemente

$$\angle AOB + \angle BOA = \angle AOA = 0 \quad \text{mód } 2\pi.$$

Cuando la rotación es en sentido levógiro, (sentido contrario a las manecillas del reloj) el signo del ángulo resultante es por convención considerado como positivo, como se muestra en la figura (1.10).

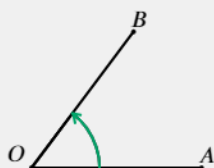


Figura 1.10: Ángulo orientado en sentido levógiro.

Cuando la rotación es en sentido dextrógiro (sentido a favor de las manecillas del reloj), el signo del ángulo es negativo.

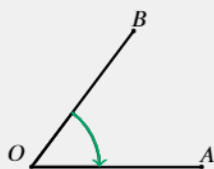


Figura 1.11: Ángulo orientado en sentido dextrógiro.

De los ángulos descritos anteriormente el ángulo $\angle AOB$ es el positivo y el ángulo $\angle BOA$ es el negativo.

Observación: Es frecuentemente ventajoso considerar el ángulo positivo $\angle AOB$ como la rotación de la recta completa OA alrededor de O , en levógiro, que por primera vez lleva a coincidir con la recta completa OB .

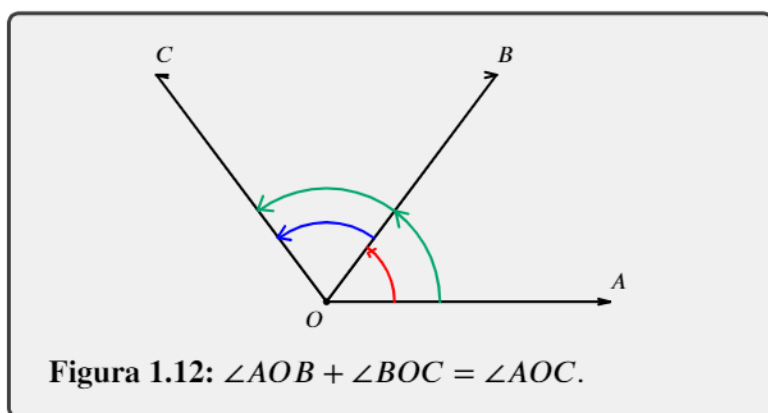
Fundamentos

La suma de los ángulos está determinada por las siguientes reglas:

- ✿ Dados los puntos distintos O, A, B y C , los ángulos $\angle AOB, \angle BOC, \angle AOC$ satisfacen la relación fundamental

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC \quad (1.2)$$

Ilustramos esta propiedad en la figura (1.12).



- ✿ Dados los puntos distintos O, A, B, C y D , entonces
 $\angle AOB + \angle COD = \angle AOE$, donde $\angle BOE = \angle COD$.

Se ilustra esta propiedad en la figura 1.13.

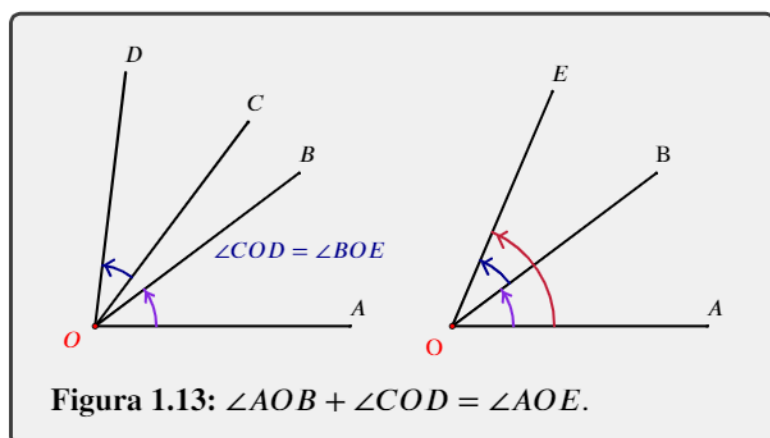
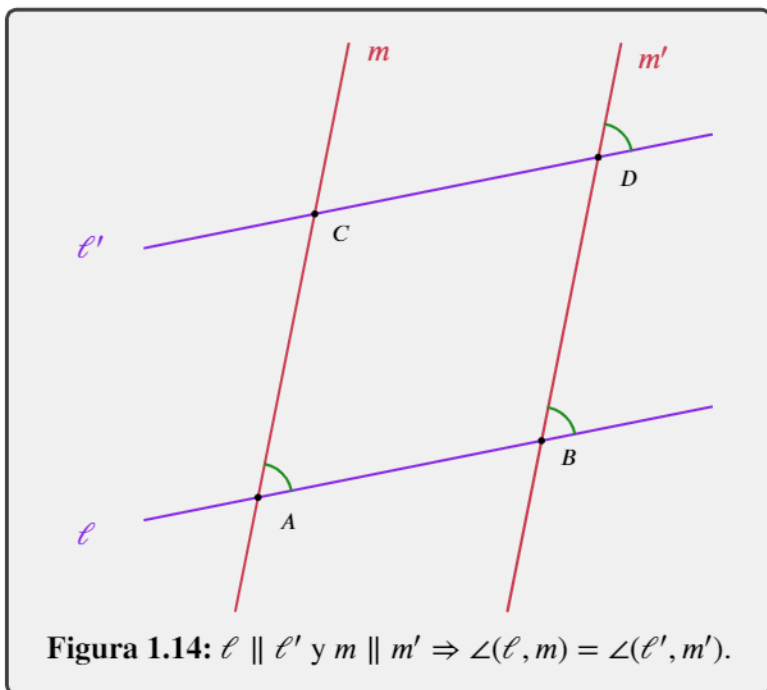


Figura 1.13: $\angle AOB + \angle COD = \angle AOE$.

Como consecuencia de las reglas de suma, la teoría de paralelas del libro I de los Elementos de Euclides, y los teoremas de Tales de Mileto sobre triángulos semejantes, tenemos los siguientes resultados:

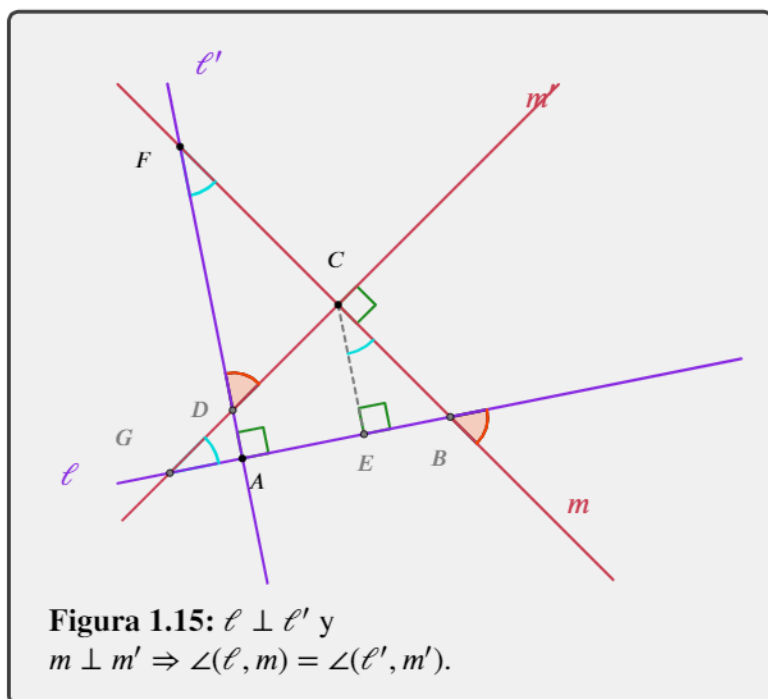
Proposición 1.3.1:

Si ℓ, ℓ', m y m' son líneas rectas, cuando $\ell \parallel \ell'$ y $m \parallel m'$, el ángulo formado por las rectas ℓ y m es igual, en medida, al ángulo formado por las rectas ℓ' y m' . Véase la figura (1.14).



Proposición 1.3.2:

Si ℓ, ℓ', m y m' son líneas rectas tales que $\ell \perp \ell'$ y $m \perp m'$, el ángulo formado por las rectas ℓ y m es igual, en medida, al ángulo formado por las rectas ℓ' y m' . Véase la figura (1.15).



Proposición 1.3.3:

Dados los puntos distintos O, A, B, C y D , como se muestra en la figura (1.16), entonces

$$\angle AOB + \angle COD = \angle AOD + \angle COB.$$

Demostración: Como consecuencia de la relación funda-

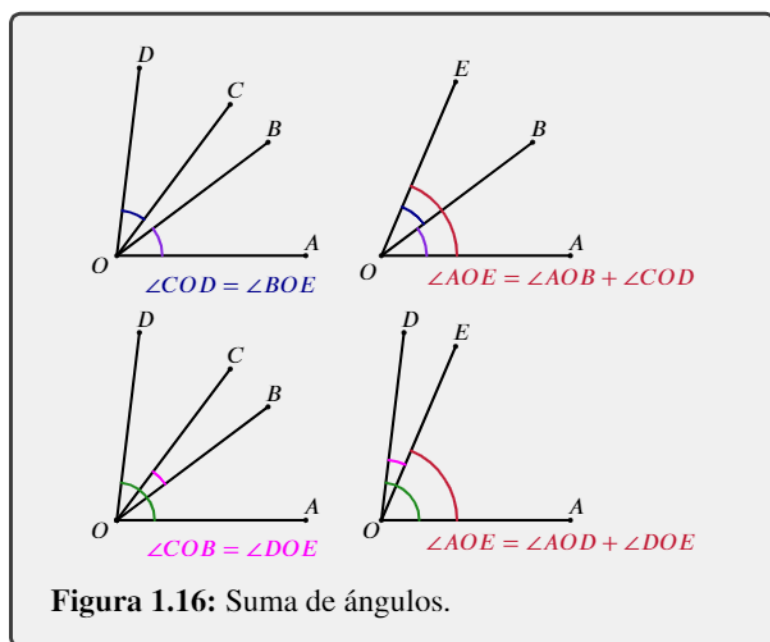


Figura 1.16: Suma de ángulos.

mental (1.2), pág. 14, se tiene $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOB$ y $\angle COD = \angle COB + \angle BOD$. Luego entonces

$$\begin{aligned}\angle AOB + \angle COB &= (\angle AOD + \angle DOB) \\ &\quad + (\angle COB + \angle BOD) \\ &= \angle AOD + \angle COB,\end{aligned}$$

ya que $\angle DOB = -\angle BOD$.

Q.E.D.

En las demostraciones de algunos resultados se encuentran varios casos a los cuales hay que darles un tratamiento por separado si los ángulos incluidos son considerados como no dirigidos. Considerando ángulos dirigidos estos casos por separado, que aparentemente pueden parecer como fundamentalmente diferentes, se encuentra que son aspectos similares de uno y pueden ser tratados juntos.

1.4. El teorema de la bisectriz

De geometría elemental conocemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1: de la bisectriz interna.

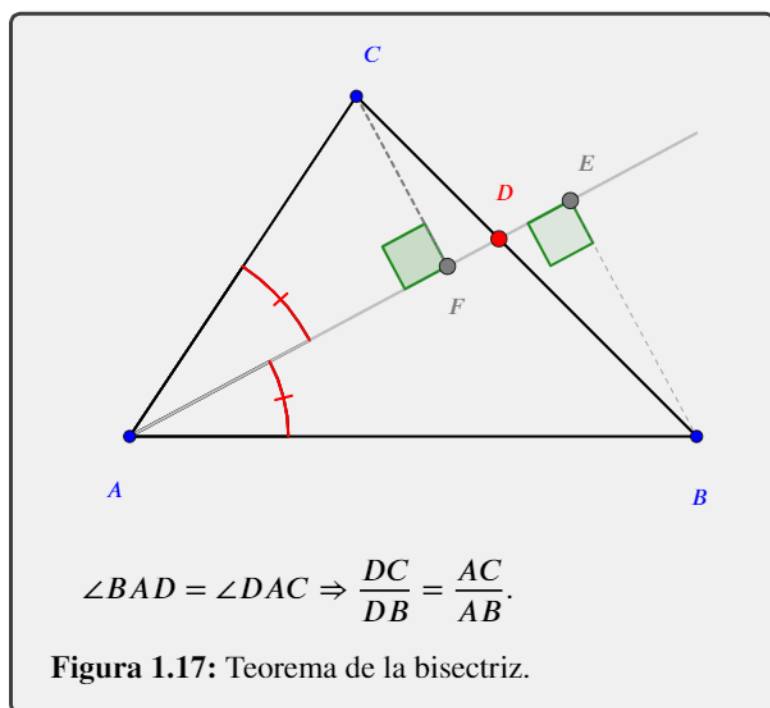
La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en segmentos cuya razón es la misma a la de los lados adyacentes del ángulo.

Hipótesis: Sea $\triangle ABC$ un triángulo, y se AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D en el segmento BC .

Tesis:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}.$$

Demostración: Consideremos EB la perpendicular a la recta AD por B , con E en la recta AD , y FC la perpendicular a la recta AC por C , con F en la recta AD , como se muestra en la figura (1.17):



Luego entonces $\triangle AFC \sim \triangle AEB$, de donde

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE}.$$

De manera similar $\triangle EDB \sim \triangle FDC$, implica

$$\frac{DC}{DB} = \frac{CF}{BE}.$$

Por lo tanto, $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$. Q.E.D.

El teorema de la bisectriz interior se puede generalizar como sigue:

Teorema 1.4.2: de la bisectriz generalizado.

Si el vértice A del triángulo $\triangle ABC$ es unido a cualquier punto L de la recta BC , entonces:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAL)}{\text{sen}(\angle LAC)}. \quad (1.3)$$

Hipótesis: Sea $\triangle ABC$ un triángulo, L un punto en la recta BC , distinto de B y C .

Tesis:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAL)}{\text{sen}(\angle LAC)}.$$

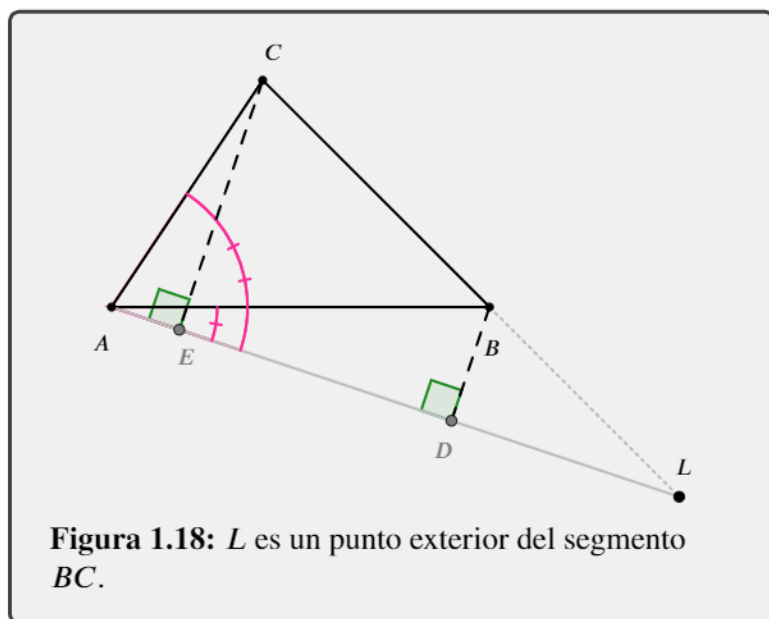
Demostración: Sea L un punto en la recta BC , distinto de B y C , como se muestra en la figura (1.18).

Como consecuencia de la ley de los senos aplicada al triángulo $\triangle ALB$:

$$\frac{\text{sen}(\angle LAB)}{LB} = \frac{\text{sen}(\angle ABL)}{AL} = \frac{\text{sen}(\angle BLA)}{BA}.$$

En particular:

$$\frac{\text{sen}(\angle LAB)}{\text{sen}(\angle ABL)} = \frac{LB}{AL} \text{ y } \text{sen}(\angle ABL) = \frac{AL \cdot \text{sen}(\angle BLA)}{BA}.$$



De manera similar, para el triángulo $\triangle ALC$ se tiene:

$$\frac{\text{sen}(\angle LAC)}{LC} = \frac{\text{sen}(\angle ACL)}{AL} = \frac{\text{sen}(\angle CLA)}{CA}.$$

Así:

$$\frac{\text{sen}(\angle LAC)}{\text{sen}(\angle ACL)} = \frac{LC}{AL} \text{ y } \text{sen}(\angle ACL) = \frac{AL \cdot \text{sen}(\angle CLA)}{CA}.$$

Como B , C y L son puntos colineales, si L es un punto exterior al segmento BC , entonces $\angle CLA = \angle BLA$, de donde $\text{sen}(\angle BLA) = \text{sen}(\angle CLA)$, véase la figura (1.19).

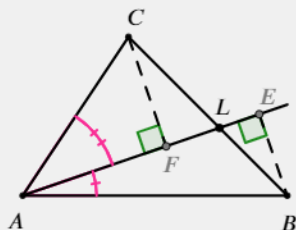


Figura 1.19: L es un punto interior del segmento BC .

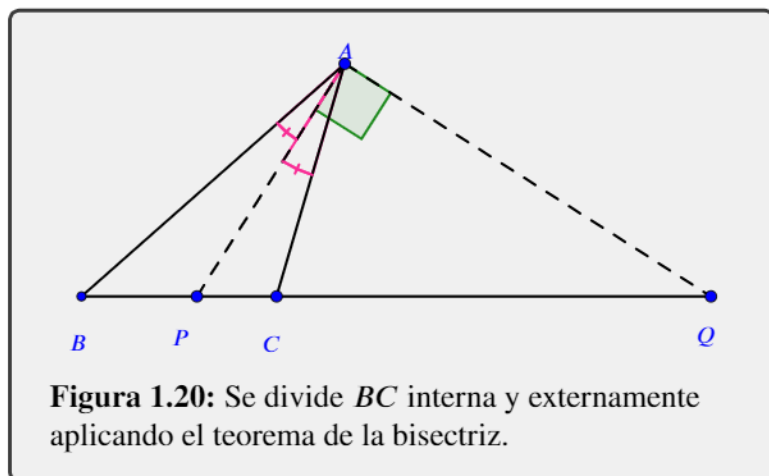
Por otra parte, si L es un punto interior al segmento BC , entonces $\text{sen } \angle ALB = \text{sen } \angle CLA$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{BL}{LC} &= \frac{BL}{AL} \cdot \frac{AL}{LC} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle BAL)}{\text{sen}(\angle ABL)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACL)}{\text{sen}(\angle LAC)} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle BAL)}{\text{sen}(\angle LAC)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle ACL)}{\text{sen}(\angle ABL)} \\
 &= \frac{\text{sen}(\angle BAL)}{\text{sen}(\angle LAC)} \cdot \frac{AL \cdot \text{sen}(\angle CLA)}{CA} \\
 &= \frac{AB}{CA} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BAL)}{\text{sen}(\angle LAC)}. \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

Corolario 1.4.1:

Dado un triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interna AP y la bisectriz externa AQ del ángulo $\angle BAC$ dividen interna y externamente el segmento BC .



Demostración: Como consecuencia del teorema de la bisectriz interna (1.4.1), página 19, tenemos que

$$BP : PC = AB : AC.$$

Por otra parte, como la bisectriz externa AQ del ángulo $\angle BAC$ es perpendicular a su bisectriz interna AP , entonces

$$\angle BAQ = \angle BAP + \frac{\pi}{2}$$

Fundamentos

y

$$\angle CAQ = \frac{\pi}{2} - \angle PAC.$$

Ya que AP es bisectriz del ángulo $\angle BAC$, entonces $\angle BAP = \angle PAC$.

Como consecuencia del teorema (1.4.2), página 21, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{BQ}{QC} &= \frac{AB \cdot \sin(\angle BAQ)}{CA \cdot \sin(\angle QAC)} \\ &= \frac{AB \cdot \sin(\angle BAP + \pi/2)}{CA \cdot \sin(\pi/2 - \angle PAC)} \\ &= \frac{AB \cdot \cos(\angle BAP)}{CA \cdot \cos(\angle PAC)} \\ &= -\frac{AB}{CA} \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{BH}{HC} = \frac{AB}{CA} = -\frac{BK}{KC},$$

es decir, H y K dividen interna y externamente el segmento BC , como se muestra en la figura (1.20).

Q.E.D.

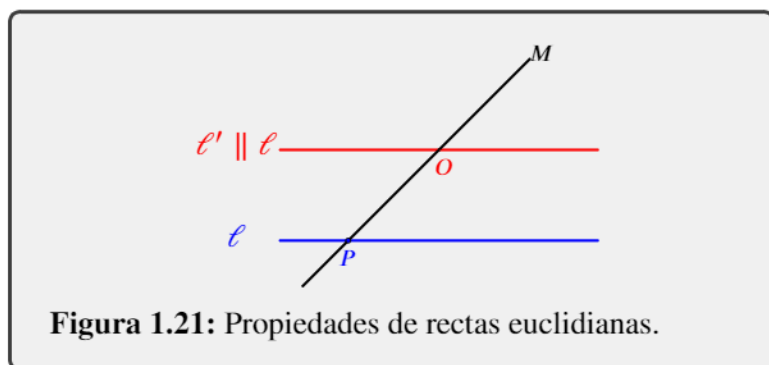
Dado un segmento de recta AB (con $A \neq B$) y P un punto en el segmento AB .

- ¿Cómo se construye el punto Q tal que P y Q dividan interna y externamente el segmento AB ?

- ¿Y si el punto P está fuera del segmento AB cómo se construye Q tal que P y Q dividan interna y externamente el segmento AB ?

1.5. Puntos al infinito y el plano extendido

Si consideramos una recta ℓ en el plano euclidiano y un punto O fuera de ella, cualquier recta que pasa por O satisface alguna de las siguientes opciones:



- Las rectas se cortan en un único punto P .
- Las rectas no se cortan, es decir, son paralelas en el sentido euclidiano.

Podemos asociar un *punto ideal*, llamado *punto al infinito de ℓ* , que denotaremos ∞_ℓ , el cual tiene la propiedad de que la recta que pasa por O y es paralela a ℓ interseca a la recta ℓ en este punto ideal. Aún más, cualquier recta, paralela a ℓ , interseca a ℓ en este punto ideal.

Simbólicamente, $\ell' \parallel \ell \Rightarrow \ell \cap \ell' = \infty_\ell$.

Definición 1.5.1:

La recta que se obtiene de ℓ al agregar su punto al infinito se denomina la **recta extendida**, y se denota ℓ_∞ . Simbólicamente

$$\ell_\infty = \ell \cup \infty_\ell.$$

La figura (1.21) sugiere que es fácil demostrar el siguiente enunciado:

Proposición 1.5.1

El conjunto de rectas por un punto se corresponde de manera biunívoca con los puntos en la recta extendida.

Demostración: Sean O un punto y ℓ una recta en el plano euclidiano que no pasa por el punto O .

Cada punto $P \in \ell$, determina una única recta OP .

Finalmente, al punto al infinito asociado a la recta ℓ se le asocia la recta ℓ' paralela a ℓ y que pasa por el punto O ,

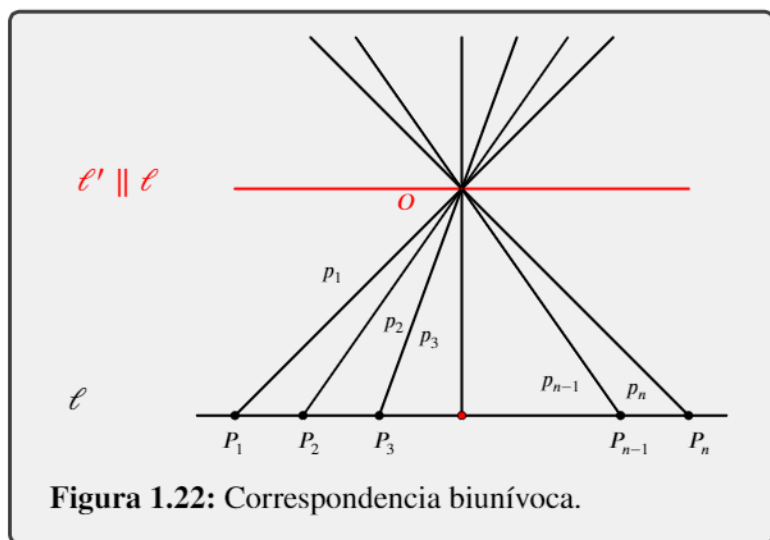


Figura 1.22: Correspondencia biunívoca.

con esto tenemos que, por cada punto en la recta extendida ℓ_∞ tenemos una recta que contiene al punto O .

Recíprocamente, por cada recta p que pasa por el punto O , y que no es paralela a ℓ consideramos el punto P donde p interseca a ℓ , es decir, $P = p \cap \ell$. Y a la recta p , que es paralela a ℓ , le corresponde el punto a infinito asociado a la recta ℓ . **Q.E.D.**

Corolario 1.5.1:

Por cada conjunto de rectas paralelas en el plano hay un único punto al infinito.

Como hay una infinidad de direcciones, entonces hay una infinidad de puntos al infinito.

Definición 1.5.2:

La **recta al infinito**, que denotaremos ℓ_∞ consta de todos los puntos al infinito de las rectas del plano euclidiano. Simbólicamente

$$\ell_\infty = \{\infty_\ell; \ell \text{ es una recta en el plano euclidiano}\}.$$

Definición 1.5.3:

La unión del plano euclidiano $\mathbb{E}$ con la recta al infinito ℓ_∞ se denomina el **plano euclidiano extendido**, y se denotará $\mathbb{E}_\infty$.

Así, cualesquiera dos rectas en el plano extendido se intersecan.

Si las rectas son paralelas en el plano euclidiano, ellas se intersecan en su *punto al infinito*.

Si las rectas no son paralelas en el plano euclidiano, se dice que se intersecan en un *punto ordinario o punto real*.

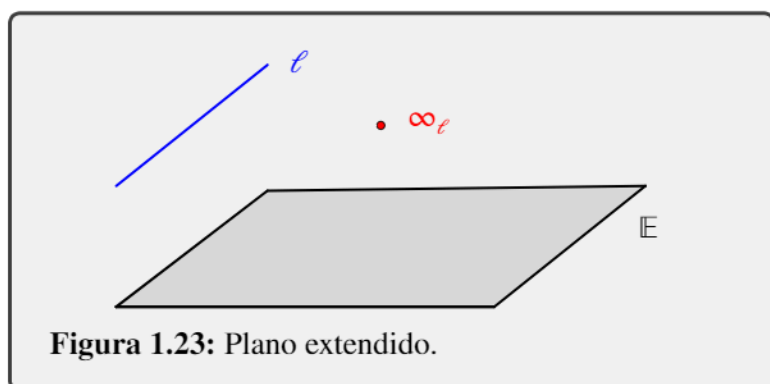
Una recta arbitraria en el plano euclidiano interseca a la recta al infinito en un único punto. Luego entonces, la recta al infinito se puede identificar con cualquier recta al infinito $\ell_\infty = \ell \cup \{\infty\}$, en el sentido de que existe una correspondencia biunívoca entre ésta y cualquier recta extendida.

Fundamentos

Finalmente, el plano extendido $\mathbb{E}_\infty$ se obtiene de unir al plano euclidiano $\mathbb{E}$ una recta al infinito ℓ_∞ , esto es, un modelo del plano extendido es de la forma:

$$\mathbb{E}_\infty = \mathbb{E} \cup \ell_\infty = \mathbb{E} \cup \ell \cup \{\infty_\ell\},$$

donde ℓ es una recta que no pertenece al plano euclidiano, e ∞_ℓ es un punto que no pertenece al plano euclidiano ni a la recta ℓ .



1.6. Relaciones de incidencia

En la geometría plana, el término indefinido *incidencia*, es una relación entre un punto y una recta. Esta relación de incidencia debe satisfacer los siguientes axiomas:

Fundamentos

- A1 Dados dos puntos distintos, existe una única recta que incide en ellos.
- A2 Dados tres puntos distintos y no colineales, existe un único plano que los contiene.
- A3 La intersección de dos planos es una única recta.
- A4 Si dos puntos inciden en un plano, la recta que incide en ellos está en el plano.
- A5 Dada una recta, existen dos puntos distintos que inciden en ella. Dado un plano, existen al menos tres puntos distintos no colineales que inciden en él.

Definición 1.6.1:

Si algunos puntos son colineales ellos constituyen una **hilera de puntos**.

La recta en la cual están situados se llama la **base de la hilera**.

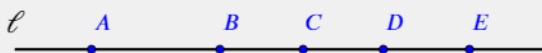


Figura 1.24: Hilera de puntos.

Fundamentos

En la figura (1.24) los puntos A, B, C, D y E son colineales, y constituyen una hilera de puntos. La recta ℓ es la base de la hilera.

Definición 1.6.2:

Rectas que pasan por un mismo punto se dice que son **concurrentes**.

Si algunas rectas son concurrentes, diremos que constituyen un **píncel**, o **haz** de rectas.

Las rectas individuales del pínzel se denominan **rayos**, y el punto al través del cual pasan estas rectas es el **centro** o **vértice** del pínzel.

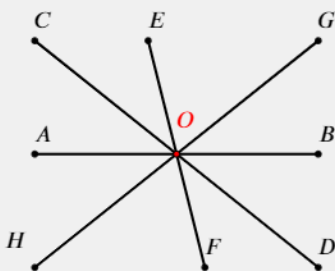


Figura 1.25: Rectas concurrentes.

En la figura (1.25) las rectas AB, CD, EF y GH concurren en el punto O , y forman un pínzel de rectas por el punto O . El punto O es el vértice del pínzel.

1.7. Ejercicios

1. Si la longitud de un segmento orientado AB es de $d = 4c$ unidades, determine, si existen, el punto que divide al segmento en razón $3 : 1$ y el punto que divide al segmento en razón $3 : -1$.
2. Realice una construcción geométrica que permita dividir un segmento orientado, si es posible, en razones $a : b$ y $a : -b$.
3. Si AB y CD son dos segmentos de recta, demuestre que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de AB y CD .
4. Dados dos haces de líneas rectas con vértices O y O' , demuestre que existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz con vértice O y las rectas del haz con vértice O' .
5. Demuestre que, si dos polígonos tienen el mismo número de lados, entonces sus ángulos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca.
6. Demuestre que, si dos polígonos tienen el mismo número de ángulos, entonces sus lados pueden ser puestos en correspondencia biunívoca.
7. Muestre que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros.

Fundamentos

8. Dado un triángulo $\triangle ABC$, si la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ interseca el lado BC en su punto medio, entonces el triángulo es isósceles.
9. Demuestre que, si A , B y C son tres puntos colineales, y D es cualquier otro punto en el plano euclidiano, entonces se satisface la siguiente propiedad:

$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$

10. Si A , B y C son puntos colineales, y si P , Q y R son los puntos medios de BC , CA y AB respectivamente, demuestre que el punto medio de CR coincide con el punto medio de PQ .
11. Si OA , OB , OC , OD son cuatro líneas cuyo vértice es O , entonces

$$0 = \text{sen}(\angle AOB) \text{sen}(\angle COD) + \text{sen}(\angle AOC) \text{sen}(\angle DOB) \\ + \text{sen}(\angle AOD) \text{sen}(\angle BOC).$$

12. Dado un triángulo $\triangle ABC$ inscrito en una circunferencia con centro en el punto O y radio $r > 0$, demuestre que:

$$\frac{\text{sen}(\angle BAC)}{BC} = \frac{\text{sen}(\angle CBA)}{CA} = \frac{\text{sen}(\angle ACB)}{AB} = \frac{1}{2r}.$$

Fundamentos

13. Demuestre que, el seno de un ángulo inscrito en una circunferencia de diámetro uno, es igual a la cuerda que abarca dicho ángulo.
14. Sean a , b y c las magnitudes de los lados BC , CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Sea I el incentro y D el punto donde la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ corta al lado BC . Demuestre que $\frac{AI}{ID} = \frac{b+c}{a}$.
15. Dados un triángulo $\triangle ABC$, y un punto O en su interior, si P , Q y R son los pies de las proyecciones perpendiculares del punto O sobre los lados BC , CA y AB respectivamente, demuestre que

$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR).$$

16. En cualquier triángulo $\triangle ABC$, si E es un punto en el interior del segmento AC , y D es un punto en el interior del segmento BC , si AF biseca interiormente el ángulo $\angle CAD$, y BF biseca interiormente el ángulo $\angle CBE$, demuestre que

$$\angle AEB + \angle ADB = 2\angle AFB.$$

17. En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, si CF es la mediana a la hipotenusa AB , CE es la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ y CD es la altura con respecto al lado AB , demuestre que $\angle DCE = \angle ECF$.

Fundamentos

18. En un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con $\angle ACB = 1$ ángulo recto, supóngase que la medida de un segmento de recta PC , perpendicular a la hipotenusa, es igual a la medida del lado BC . Demuestre que BP debe ser perpendicular o paralela a la bisectriz del ángulo interna $\angle BAC$.
19. Dado un paralelogramo $\square ABCD$, si M y N son puntos en el interior de los segmentos AB y BC respectivamente, y Q es el punto donde se intersecan AN y CM , demuestre que DQ es la bisectriz del ángulo $\angle CDA$.
20. En un cuadrilátero $\square ABCD$, las bisectrices externas de los ángulos $\angle CAD$ y $\angle CBD$ se intersecan en el punto P . Demuestre que $AD+AC = BC+BD$ implica $\angle ADP = \angle BPC$.
21. Demuestre que una recta paralela a un lado de un triángulo a través del punto donde se intersecan sus tres medianas divide el área del triángulo en dos partes tal que la razón de estas áreas es $4/5$.

El teorema de Ptolomeo

El objetivo principal del presente capítulo es demostrar el teorema de Ptolomeo, el cual es una relación, en geometría euclidiana, entre los cuatro lados y las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico. El teorema recibe su nombre del astrónomo y matemático griego Claudio Ptolomeo (100-170 d.C.). Este teorema afirma que:

En todo cuadrilátero cíclico, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

Para demostrar este resultado y sus generalizaciones, recordaremos el concepto de simetría de reflexión, el concepto de paralelismo y algunas de sus equivalencias.

Estudiaremos las propiedades básicas de las rectas anti-paralelas y de las propiedades fundamentales de los cuadriláteros cíclicos.

2.1. Introducción

Simetría de reflexión

Definición 2.1.1:

Sean ℓ una línea recta y P un punto en el plano, se dice que un punto P' es el **simétrico** de P con respecto a la recta ℓ si:

1. $P' = P$, cuando $P \in \ell$.
2. Cuando $P \notin \ell$, la mediatriz del segmento PP' es la recta ℓ como se muestra en la figura (2.1).

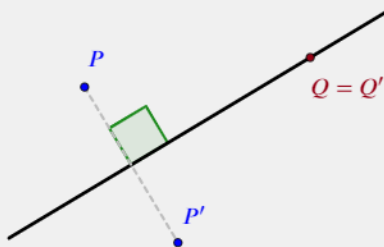


Figura 2.1: P' es simétrico de P con respecto a ℓ .

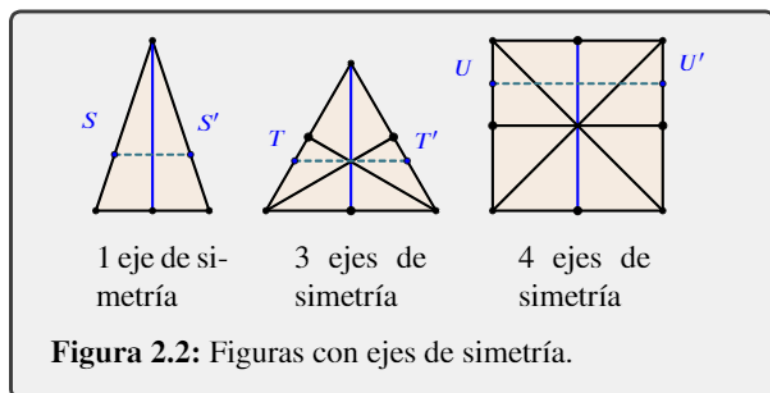
Note que, si P' es simétrico de P con respecto a la recta ℓ , entonces P es simétrico de P' con respecto a ℓ .

En otras palabras, la transformación $S_\ell : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ que envía cada punto en su simétrico con respecto a una recta dada ℓ es una transformación biyectiva que coincide con su inversa, es decir, $S_\ell \circ S_\ell(P) = P = id_{\mathbb{E}}(P)$ para cada $P \in \mathbb{E}$.

Definición 2.1.2:

Si $\mathcal{F}$ es una figura y ℓ es una línea recta en el plano, se dice que $\mathcal{F}$ es **simétrica** con respecto a ℓ si, para cada punto $P \in \mathcal{F}$ se tiene que P' , el punto simétrico de P con respecto a ℓ , también está en $\mathcal{F}$.
La recta ℓ se denomina eje de **reflexión**, o bien, eje de simetría.

Ejemplos: En la figura (2.2) mostramos algunos ejemplos de los conceptos anteriores:



Ptolomeo

1. Un triángulo isósceles, no equilátero, posee un único eje de simetría, a saber, la bisectriz del ángulo comprendido por los lados iguales.
2. Un triángulo equilátero admite tres ejes de simetría, a saber, las bisectrices de los tres ángulos interiores del triángulo.
3. Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, las dos diagonales, y las dos mediatrices con respecto a los lados del mismo.

El concepto de paralelas

Euclides presenta en las definiciones del libro I el concepto de rectas paralelas:

“Son rectas paralelas las que, estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.”

Y a continuación presenta cinco postulados, de los cuales cabe destacar el quinto postulado:

- V. *Postúlese que, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos ángulos rectos.*

En la introducción de los Elementos [E, Libros I-IV, pág. 155], el profesor Luis Vega Reñón menciona lo siguiente:

“El postulado (V) resulta un tanto peculiar. En primer lugar, se asemeja a los postulados operativos (I)–(III) al demandar la existencia de puntos de intersección de rectas con rectas.

En segundo lugar, completa el criterio de paralelismo avanzado en la definición de rectas paralelas.

En tercer lugar, y sobre todo, no goza de la evidencia inmediata que aureola los demás principios geométricos.

Debe ser borrado por completo de la lista de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Ptolomeo se propuso resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas, afirma Proclo (Com. 191, 21 ss.);

Dos motivos para dudar de su condición primordial de postulado son:

a) La existencia de asíntotas, líneas que se aproximan más y más a medida que se prolongan sin llegar a encontrarse.

b) La prueba en los Elementos de una proposición conversas de este postulado, a saber, la proposición I, 17: *La suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.*”

Estas son algunas de las razones por las cuales, durante varios siglos, se intentó demostrar que el quinto postulado es, en realidad, un teorema.

Sin embargo, solamente se lograron demostrar varias equivalencias de éste, entre ellas se encuentra el postulado de

Ptolomeo

Playfair, debida al matemático griego Proclo (412-485 d.C.).

“Por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela.”

Formulación que, a la postre, permitiría demostrar que el quinto postulado de Euclides es, en efecto, un postulado, y cuya negación dio lugar a las geometrías no euclidianas.

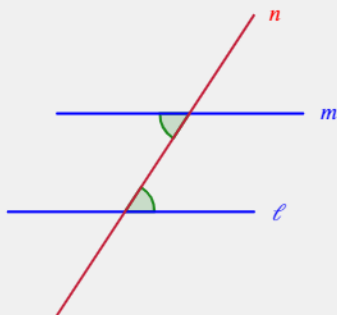


Figura 2.3: Rectas paralelas $\ell \parallel m$, donde n es una transversal.

Contribuyó además a la creencia de que el quinto postulado puede deducirse a partir de los primeros cuatro postulados, que las proposiciones 1–26 de los Elementos no hacen mención al concepto de rectas paralelas, o quinto postulado.

Podemos resumir el contenido de las proposiciones 26 al 29 referentes al concepto de paralelismo dadas en los Elementos como sigue:

“Una recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales. Recíprocamente, si una recta al incidir sobre otras dos hace ángulos alternos iguales entre si las rectas son paralelas.”

2.2. Rectas antiparalelas

Definición 2.2.1:

Sean a , b y c tres rectas, diremos que la recta a es una recta **antiparalela** a la recta b con respecto a la recta c si la recta a' , simétrica de a con respecto a la recta c , es paralela a la recta b y lo denotaremos $a \parallel_c b$. Ilustramos esto en la figura (2.4).

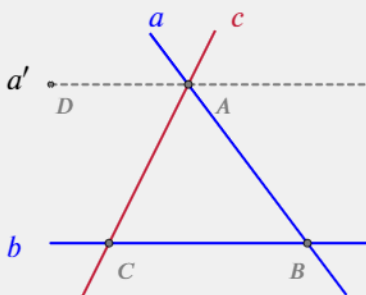


Figura 2.4: Rectas antiparalelas $a \parallel_c b$.

De acuerdo con el diccionario de la R.A.E. antiparalela es un adjetivo: “Dicho de dos cosas paralelas: Que se orientan o discurren en sentidos opuestos.”

Proposición 2.2.1:

Si $a \parallel_c b$, entonces las rectas a , b y c forman un triángulo isósceles.

Hipótesis: Sean $a = AB$, $b = BC$ y $c = AC$ tres rectas tales que $a \parallel_c b$.

Tesis: El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles.

Demostración: Supongamos que $a = AB$, $b = BC$ y $c = AC$.

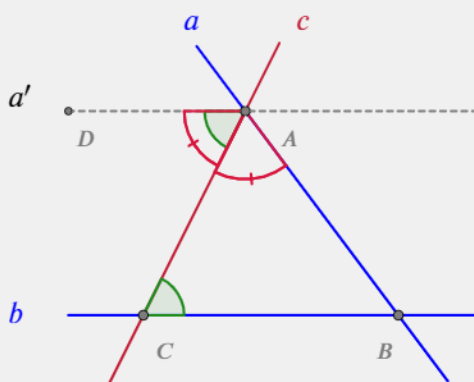


Figura 2.5: $a \parallel_c b \Rightarrow \triangle ABC$ es isósceles.

Denotemos por a' la recta simétrica a la recta a con respecto a la recta c y por D al punto simétrico de B con respecto a c , en particular, $a' \parallel b$ y c es una transversal.

Como $a' \parallel b$ y c es una transversal, los ángulos alternos internos son iguales, es decir, $\angle CAD = \angle BCA$, como se muestra en la figura (2.5).

Por otra parte, como a' es simétrica a la recta a con respecto a c , entonces $\angle CAD = \angle BAC$, como se muestra en color carmesí en la figura (2.5). Y como cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, $\angle BCA = \angle CAB$.

Por lo tanto, el triángulo $\triangle CBA$ es isósceles con base AC y $AB = CB$. Q.E.D.

Ejemplos:

1. En un cuadrilátero paralelogramo $\square ABCD$, si $a = AB$, $b = BC$ y $c = CA$, se tiene que a es antiparalela a b con respecto a c , y D es el punto simétrico de B con respecto a la recta c .
2. Si $a \parallel b$ y $c \perp a$ entonces, la recta a' , simétrica de a con respecto a c , la recta a' coincide con a , por lo que, en este caso, $a \uparrow|_c b$.

Proposición 2.2.2:

Dadas dos rectas concurrentes a, c y un punto P fuera de la recta a , existe una recta b que es antiparalela, con respecto a c , a la recta a por el punto P .

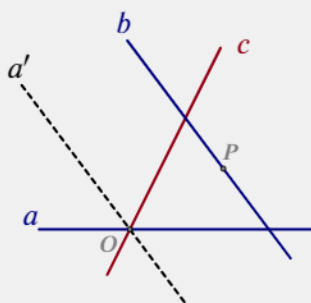


Figura 2.6: Existencia de antiparalela por un punto dado.

Demostración: Sea a' la recta simétrica de a con respecto a la recta c .

Como consecuencia del postulado de Playfair, existe una recta b que pasa por el punto P paralela a la recta a' .

Por definición $a \nparallel_c b$.

Q.E.D.

Como hay una infinidad de puntos en el plano, se concluye que:

Corolario 2.2.1:

Existen infinitas rectas antiparalelas a una recta dada a , respecto de otra recta c también dada.

Proposición 2.2.3:

Si la recta a es *antiparalela* a la recta b con respecto a la recta c , entonces la recta b es antiparalela a la recta a con respecto a la recta c , simbólicamente $a \uparrow_c b \iff b \uparrow_c a$.

Hipótesis: Supongamos que la recta $a = AB$ es antiparalela a la recta $b = BC$ con respecto a la recta $c = CA$, esto es, $b \uparrow_c a$.

Tesis: La recta b es antiparalela a la recta a con respecto a la recta c .

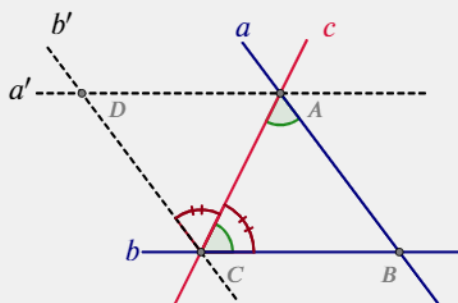


Figura 2.7: $a \uparrow_c b \Rightarrow b \uparrow_c a$.

Demostración: Sea $b' = DC$ la recta simétrica de b con respecto a la recta c , por definición $b' \parallel a$.

Como b' es simétrica de b con respecto a c , $\angle BCA = \angle ACD$.

Por otra parte, como a es antiparalela a b con respecto a c , como consecuencia de la proposición (2.2.1), página 44, el triángulo $\triangle BCA$ es isósceles, en particular, $\angle BCA = \angle CAB$.

Por [E, I.T.27], $\angle ACD = \angle CAB$ implica $a \parallel b'$.

Es decir, la recta b es antiparalela a la recta a con respecto a la recta c , simbólicamente $b \uparrow\downarrow_c a$. **Q.E.D.**

En particular, la recta c es bisectriz del ángulo $\angle BCD$. Los triángulos isósceles $\triangle CBA$ y $\triangle ADC$ son congruentes. Además, es fácil notar que los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle CBD$ también son isósceles y congruentes, por lo que la diagonal BD biseca el ángulo $\angle CBA$.

Como consecuencia de lo anterior se obtiene:

Corolario 2.2.2:

Con la notación de la proposición anterior, si $a \uparrow\downarrow_c b$ y $d = BD$ es la otra diagonal del cuadrilátero paralelogramo $\square abb'a'$, entonces $a \uparrow\downarrow_d b$.

Aún más, como consecuencia del corolario (2.2.2), página 48, podemos ver que, si $a \uparrow\downarrow_c b$, la recta c será paralela a una de las dos bisectrices, ℓ o m , de las rectas a y b , y dadas dos rectas a y b estas serán antiparalelas respecto de cualquier recta paralela a una de sus bisectrices. Véase la figura (2.8).

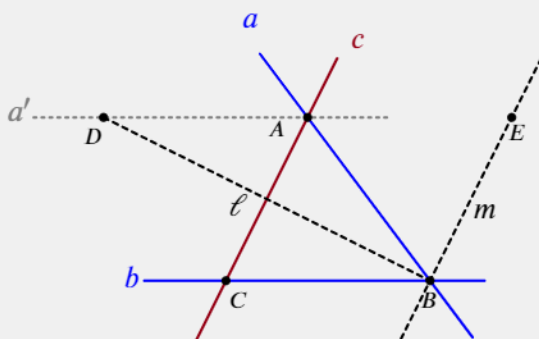


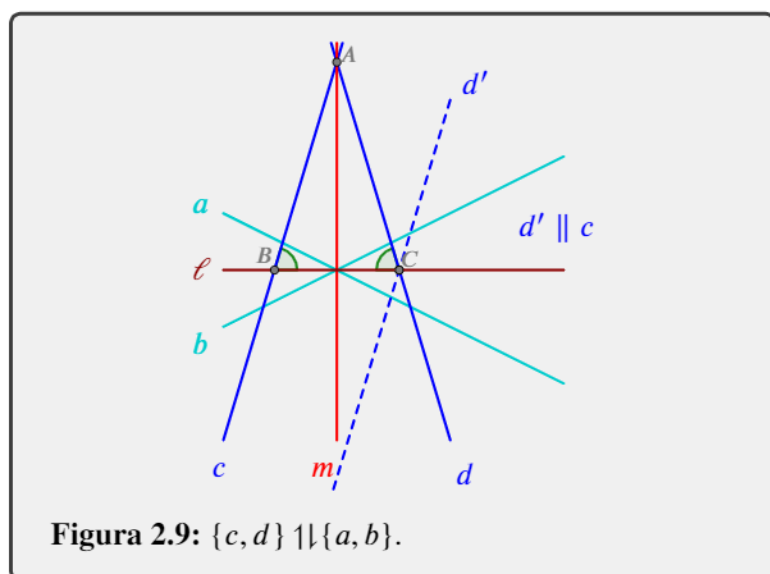
Figura 2.8: $a \parallel_c b \Rightarrow c$ es paralela a una bisectriz de $\angle(a, b)$.

Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición 2.2.2:

Si dos pares de rectas $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ están situados en forma tal que la bisectriz ℓ del par de rectas $\{a, b\}$ es transversal al par de rectas $\{c, d\}$ y la recta c es antiparalela a la recta d con respecto a la recta ℓ , esto es, $c \parallel_\ell d$; se dice que el par de rectas $\{c, d\}$ es **antiparalelo** al par de rectas $\{a, b\}$, y lo denotaremos $\{c, d\} \parallel \{a, b\}$.

Simbólicamente $c \parallel_\ell d \Rightarrow \{c, d\} \parallel \{a, b\}$. Véase la figura (2.9).



Cuando ℓ es una bisectriz del par de rectas $\{a, b\}$, también escribiremos $c \perp_{\{a, b\}} d$ para denotar $c \perp_{\ell} d$.

Es decir, el par de rectas $\{c, d\}$ es antiparalelo con respecto al par de rectas $\{a, b\}$ si $c \perp_{\{a, b\}} d$, y como consecuencia de la proposición (2.2.1), página 44, $c \perp_{\{a, b\}} d$ si el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles y $\angle CBA = \angle ACB$, o equivalentemente, si los ángulos interiores del mismo lado de la transversal ℓ son iguales entre sí.

Con la notación de la figura (2.9), como las rectas c, d y ℓ forman un triángulo isósceles, se sigue que la bisectriz m de los ángulos formados por las rectas c y d es perpendicular

a la recta ℓ . Esta bisectriz m , o cualquier otra recta paralela a m , junto con las rectas a y b también determinan un triángulo isósceles, consecuentemente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1:

Si dos pares de rectas están colocadas de tal forma que las rectas del primer par son antiparalelas con respecto a las rectas del segundo par, entonces las rectas del segundo par son antiparalelas con respecto a las rectas del primer par.

Hipótesis: Sean a , b , c , y d rectas, y supongamos que el par $\{c, d\}$ es antiparalelo con el par $\{a, b\}$, simbólicamente $\{c, d\} \uparrow\downarrow \{a, b\}$.

Tesis: El par $\{a, b\}$ es antiparalelo con el par $\{c, d\}$, simbólicamente $\{a, b\} \uparrow\downarrow \{c, d\}$.

Demostración: Sean ℓ la bisectriz de las rectas a y b , m la bisectriz de las rectas c y d . En particular $\ell \perp m$.

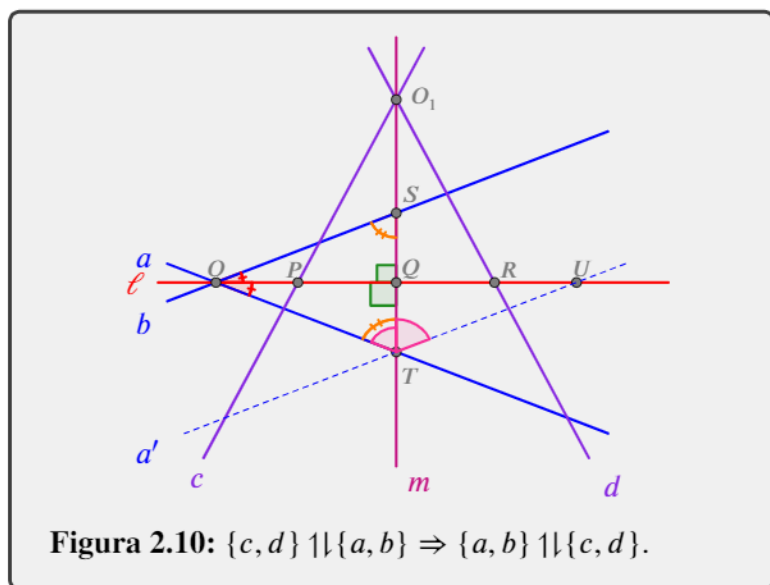
Y denótese $O = a \cap b$, $O_1 = c \cap d$, $P = \ell \cap c$, $Q = \ell \cap m$, $R = \ell \cap d$, $S = m \cap b$ y $T = m \cap a$ respectivamente, como se muestra en la figura (2.10).

Como OQ es la bisectriz del ángulo $\angle SOT$ entonces

$$\angle QOS = \angle TOQ.$$

Además, sabemos que $\ell \perp m$, de donde

$$\angle OQS = \angle TQO = 1 \text{ ángulo recto.}$$



Y como OQ es lado común, los triángulos $\triangle OQS$ y $\triangle OTQ$ son congruentes.

En particular $\angle TSO = \angle OTS$.

Luego entonces, el triángulo $\triangle OTS$ es isósceles.

Sea a' la recta simétrica de a con respecto a la recta m .

Si $U = \ell \cap a'$ entonces $\angle UTS = \angle STO$, y ya que $\angle STO = \angle TSO$, por lo tanto $\angle UTS = \angle TSO$.

Consecuentemente $a' \parallel b$, es decir, la recta a es antiparalela a la recta b con respecto a la recta m .

Por tanto, el par de rectas $\{a, b\}$ es antiparalelo al par de rectas $\{c, d\}$. **Q.E.D.**

Teorema 2.2.2:

Cuando los dos pares de rectas antiparalelas se intersecan en cuatro puntos distintos A , B , C y D y forman un cuadrilátero convexo, sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir:

$$\angle DAB + \angle BCD = \pi \quad \text{y} \quad \angle CDA + \angle ABC = \pi.$$

Hipótesis: Supongamos que el par de rectas $\{c, d\}$ es antiparalelo al par de rectas $\{a, b\}$ y que, con las rectas a, c, b y d , se forma un cuadrilátero convexo.

Tesis: Los ángulos opuestos de este cuadrilátero convexo son suplementarios.

Esto es, si $A = a \cap c$, $B = b \cap c$, $C = b \cap d$, $D = a \cap d$ y $O = a \cap b$ y el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo, entonces:

- Los ángulos $\angle DAB$ y $\angle BCD$ son suplementarios.
- Los ángulos $\angle CDA$ y $\angle ABC$ son suplementarios.

Una representación de este teorema y su demostración se muestra en la figura (2.11).

Demostración: Si $A = a \cap c$, $B = b \cap c$, $C = b \cap d$, $D = a \cap d$, $O = a \cap b$ y ℓ denota la bisectriz del ángulo $\angle AOB = \angle DOC$ con respecto a las cuales c y d son antiparalelas. Sean $P = c \cap \ell$ y $Q = d \cap \ell$. Como $\{c, d\} \perp \{a, b\}$, entonces

$$\angle APQ = \angle PQD. \quad (2.1)$$

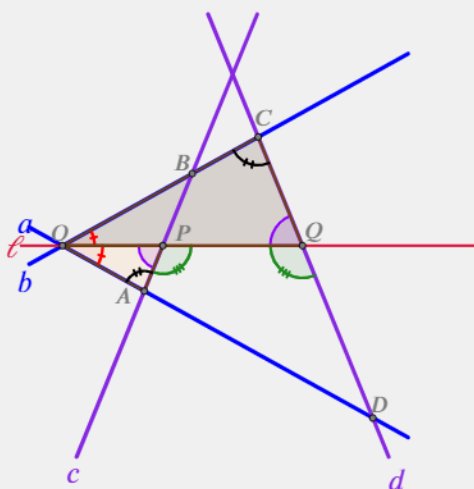


Figura 2.11: Los ángulos opuestos de este cuadrilátero son suplementarios.

Además, $\angle AOP = \angle QOC$ pues ℓ es la bisectriz del ángulo $\angle AOB = \angle DOC$.

Se demostrará que los triángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OQC$ son semejantes.

Como O , P y Q son puntos colineales, los ángulos $\angle APO$ y $\angle QPA$ son suplementarios, así $\angle APO + \angle QPA = \pi$.

De manera análoga, $\angle OQD + \angle CQO = \pi$, pues los puntos C, Q y D son colineales.

De la ecuación (2.1), se tiene que $\angle APQ = \angle PQD =$

Ptolomeo

$\angle OQD$, de donde $\angle OPA = \angle CQO$.

Así, los triángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OQC$ son semejantes, en particular $\angle OAP = \angle OCQ$.

Pero, por la definición de ángulo, $\angle OCQ = \angle BCD$ y $\angle DAP = \angle DAB$, de donde

$$\begin{aligned}\pi &= \angle PAO + \angle DAP \\ &= \angle OCQ + \angle DAP \\ &= \angle BCD + \angle DAB\end{aligned}$$

Es decir, los ángulos opuestos $\angle BCD$ y $\angle DAB$ son suplementarios.

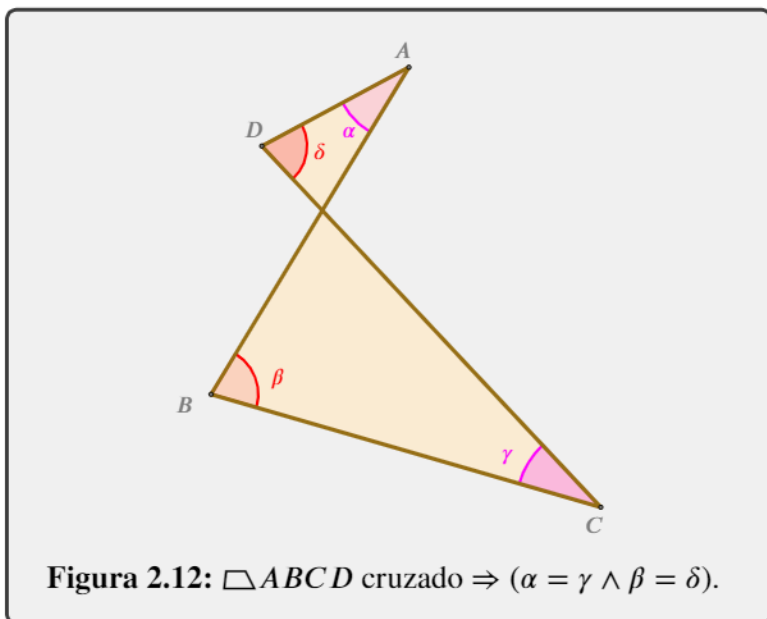
Y como la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos, los ángulos $\angle ABC$ y $\angle CDA$ son suplementarios, es decir, $\angle CDA + \angle ABC = \pi$.
Q.E.D.

Teorema 2.2.3:

En un cuadrilátero cuyos pares de lados opuestos son antiparalelos y forman un cuadrilátero cruzado, sus ángulos opuestos son iguales en magnitud.

En la figura (2.12) representamos este enunciado, es decir, $\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$.

Hipótesis: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cruzado tal que $\{AB, DC\} \parallel \{BC, DA\}$.

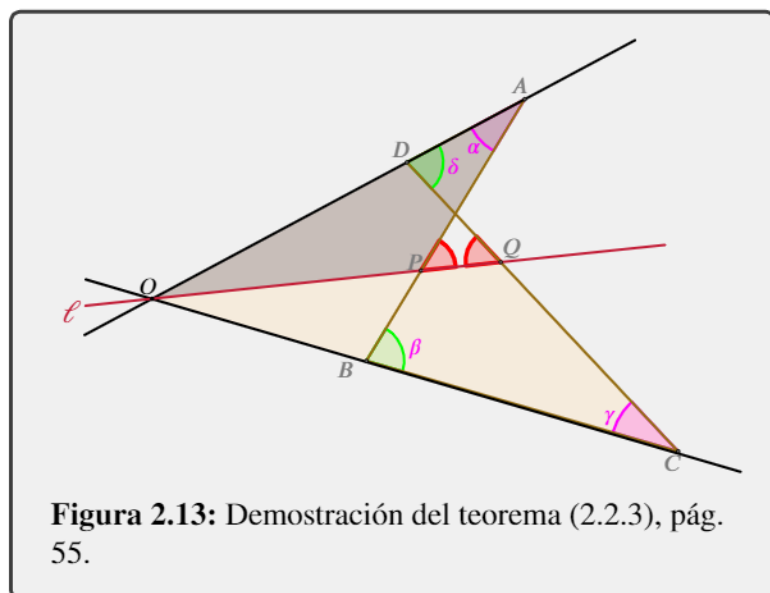


Tesis: Los ángulos opuestos del cuadrilátero cruzado dado $\square ABCD$, son iguales en magnitud, esto es:

$$\angle BAD = \angle BCD \text{ y } \angle CBA = \angle CDA.$$

Demostración: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cruzado tal que $\{AB, DC\} \parallel \{BC, DA\}$, suponga que $AD \cap CB = \{O\}$ y que la recta ℓ es la bisectriz del ángulo $\angle BOD = \angle COA$, como se muestra en la figura (2.13).

Si $P = \ell \cap AB$ y $Q = \ell \cap DC$, como consecuencia de la proposición (2.2.1), página 44, $\angle QPA = \angle DQP$.



Como O , P y Q son puntos colineales, y AP es una transversal sobre $\ell = OQ$, entonces $\angle QPA + \angle APO = \pi$.

Análogamente, ya que D , Q y C son puntos colineales,
 $\angle CQQ + \angle OQD = \pi$.

Como consecuencia de lo anterior

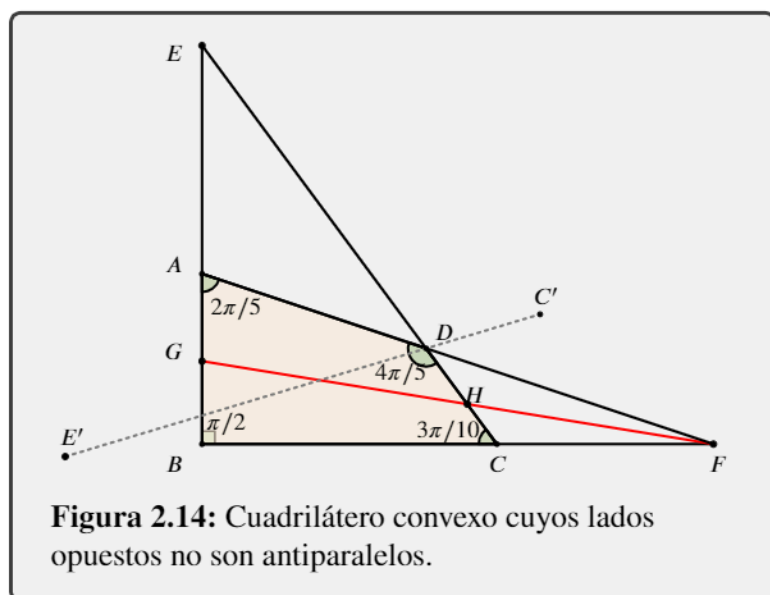
$$\angle OPA = \angle CQO. \quad (2.2)$$

Ya que la recta ℓ es la bisectriz del ángulo $\angle COA$, entonces $\angle COQ = \angle POA$.

En particular los triángulos $\triangle OPA$ y $\triangle OQC$ son semejantes, luego entonces $\angle PAO = \angle OCQ$.

De manera similar se obtiene que los triángulos $\triangle OBP$ y $\triangle OQD$ son semejantes y, por ende, $\angle CBA = \angle CDA$. **Q.E.D.**

En general, si tenemos un cuadrilátero convexo cuyos pares de lados opuestos no son antiparalelos, entonces sus ángulos opuestos no son suplementarios, es posible ver un ejemplo de esto en la figura (2.14).



2.3. Cuadriláteros cíclicos

Definición 2.3.1:

Si un conjunto de puntos están todos en la misma circunferencia, se dice que estos puntos son **concíclicos**. Véase la figura (2.15).

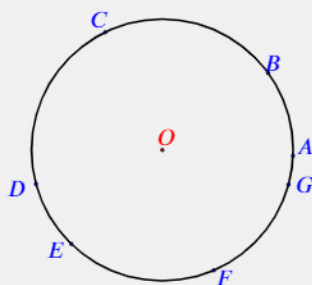


Figura 2.15: Puntos concíclicos.

En la figura anterior, los puntos A, B, C, D, E, F y G son concíclicos pues se encuentran en la circunferencia con centro O que pasa por A .

En la siguiente parte se dará una relación entre los cuadriláteros formados por pares de rectas antiparalelas y cuadriláteros cuyos vértices son concíclicos.

Definición 2.3.2:

Un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos se denomina **cuadrilátero cíclico**.

Dada una circunferencia C y cuatro puntos en ella A, B, C y D , se pueden formar seis cuadriláteros cíclicos orientados.

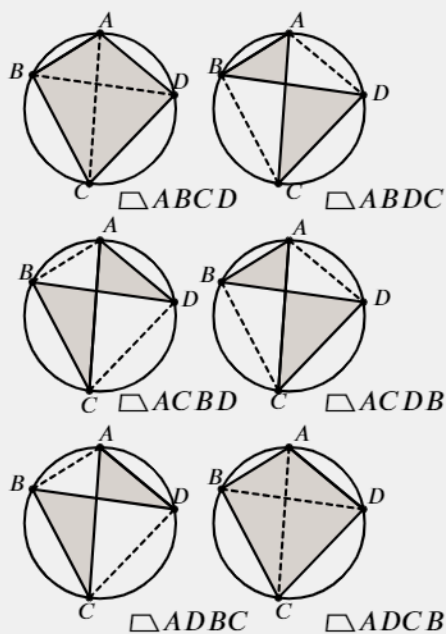


Figura 2.16: Cuadriláteros cíclicos.

Pero solamente hay 3 cuadriláteros cíclicos no congruentes entre ellos, pues $\triangle ABCD \equiv \triangle ADCB$, $\triangle ABDC \equiv \triangle ACDB$ y $\triangle ACBD \equiv \triangle ADBC$, en la figura (2.16) se muestran estos cuadriláteros y sus diagonales.

El cuadrilátero $\triangle ABCD$ es convexo, las diagonales se intersecan en su interior. Además, los cuadriláteros $\triangle ACDB$ y $\triangle ACBD$ son cruzados, pues dos lados opuestos se intersecan, nótese que las diagonales de los cuadriláteros cruzados no están contenidas en el interior del cuadrilátero.

Teorema 2.3.1:

Si un cuadrilátero es cíclico, entonces el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.

La demostración se divide en dos casos, en el primer caso el cuadrilátero es convexo, y en el segundo caso el cuadrilátero es cruzado.

Hipótesis: Sea $\triangle ABCD$ un cuadrilátero cíclico.

Tesis: El ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.

Demostración: Sea $\triangle ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo, AC y BD sus diagonales. Véase la figura (2.17).

Como los ángulos que subtienden el mismo arco son iguales, como consecuencia de [E, III. T. 21] y [E, Def.III.8], véase apéndice A, páginas 429 y 426, se tiene que:

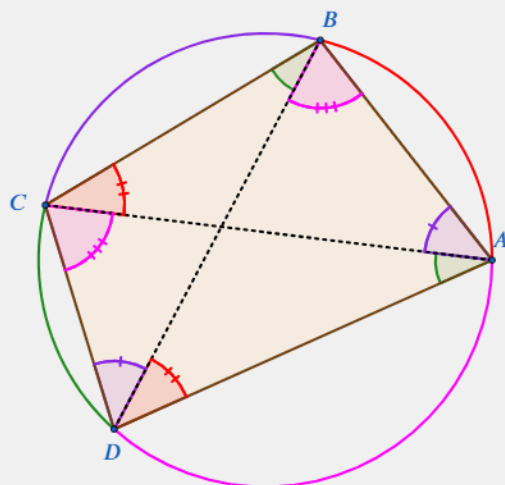


Figura 2.17: Demostración del teorema (2.3.1), pág. 61.

$$\angle DAC = \angle DBC,$$

$$\angle ADB = \angle ACB,$$

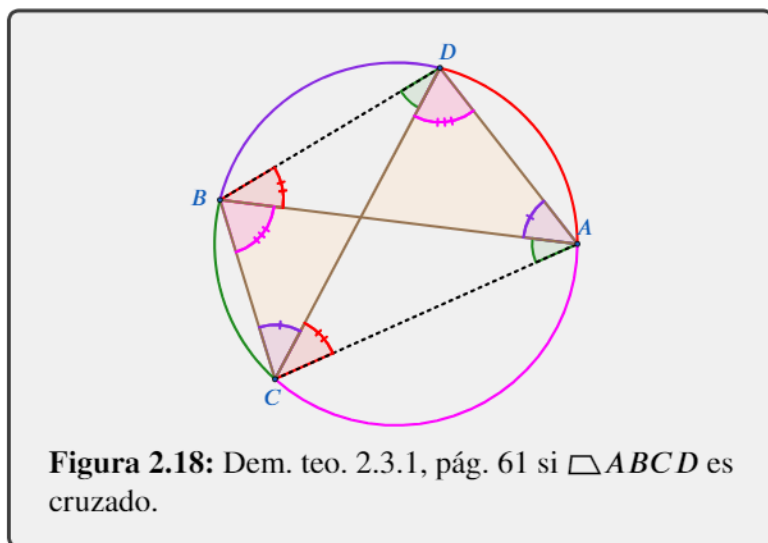
$$\angle CAB = \angle CDB,$$

$$\angle ACD = \angle ABD.$$

Por tanto, el ángulo formado entre un lado y la diagonal, es igual al ángulo formado por el lado opuesto y la diagonal,

por ejemplo, el lado DC y la diagonal AC forman el ángulo $\angle DAC$ y el lado AB y la diagonal BD forman el ángulo $\angle DBC$ y por lo visto en la página anterior, son iguales.

Supongamos ahora que el cuadrilátero $\square ABCD$ es cruzado y tracemos las rectas AC y BD .



Entonces el cuadrilátero cíclico $\square ADBC$ es convexo y tiene como diagonales AC y DB . Véase la figura (2.18).

Como consecuencia del primer caso tenemos que el ángulo formado entre un lado y la diagonal, es igual al ángulo formado por el lado opuesto y la diagonal. **Q.E.D.**

Teorema 2.3.2: recíproco del teorema (2.3.1), pág. 61.

Si en un cuadrilátero el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal, entonces el cuadrilátero es cíclico.

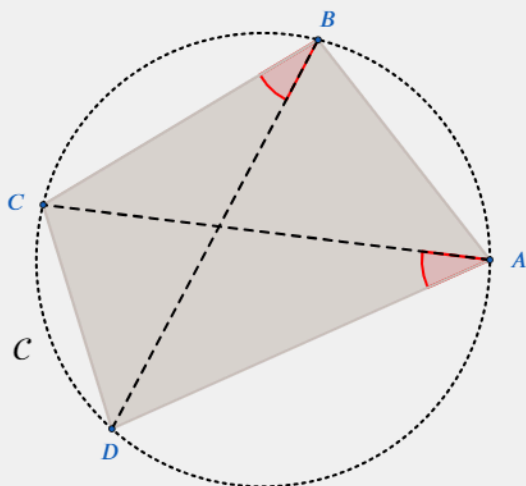


Figura 2.19: $\angle CBD = \angle CAD \Rightarrow ABCD$ es cíclico.

Nuevamente, se demostrará el teorema: cuando el cuadrilátero es convexo, y si el cuadrilátero es cruzado, se considerarán sus diagonales para obtener un cuadrilátero convexo, lo que reduce este caso al primero.

Hipótesis: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo y suponga que $\angle CBD = \angle CAD$.

Tesis: El cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico.

Demostración: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo y suponga que $\angle CBD = \angle CAD$.

Sea C la circuncircunferencia del triángulo $\triangle DAC$.

Se demostrará que el punto B está en C .

Los puntos D y C dividen a la circunferencia C en dos arcos, uno de los cuales, que denotaremos C_A , contiene al punto A .

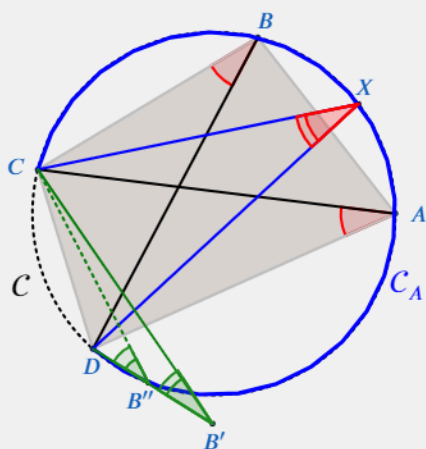


Figura 2.20: Demostración del teorema (2.3.2) 64, caso convexo.

Como consecuencia del teorema [E, III. T. 21], *en una misma circunferencia, o en circunferencias iguales, los ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son iguales*, se sigue que, para cada $X \in C_A$ se tiene $\angle DXC = \angle DAC$.

Sea B' un punto en el mismo semiplano que A con respecto a la recta CD tal que $\angle DB'C = \angle DAC$. Véase la figura (2.20).

Si B' no estuviera en el arco C_A defínase $B'' = DB' \cap C_A$, entonces $\angle DB''C = \angle DAC$, así $\angle DB'C = \angle DB''C$, es decir, las rectas CB' y CB'' son cortadas por la transversal DB' y hacen ángulos correspondientes iguales, de donde $CB' \parallel CB''$. Lo cual es una contradicción, pues las rectas CB' y CB'' tienen en común el punto C y $B' \neq B''$.

Por tanto, $B' \in C_A$.

Por hipótesis B es un punto en el mismo semiplano que A con respecto a la recta CD tal que $\angle DBC = \angle DAC$, como consecuencia de lo demostrado anteriormente $B \in C_A$, y como $C_A \subset C$, se deduce que, $B \in C$, por lo que, el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico.

Supongamos ahora que el cuadrilátero $\square ABCD$ es cruzado, como se muestra en la figura (2.21).

Entonces el cuadrilátero $\square ADBC$ es convexo y es tal que $\angle CAD = \angle CBD$. Véase la figura (2.21).

Aplicando el primer caso al cuadrilátero $\square ADBC$, se tiene que los puntos A, B, C, D son concíclicos, de donde, el cuadrilátero $\square ACDB$ es cíclico. **Q.E.D.**

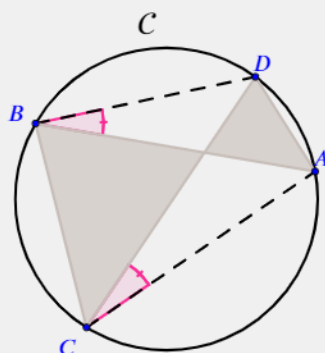


Figura 2.21: $\angle ABD = \angle BAC \Rightarrow ABCD$ es cíclico.

Teorema 2.3.3: Euclides, III, 22.

En los cuadriláteros cíclicos convexos, los ángulos opuestos son suplementarios.

Hipótesis: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo.

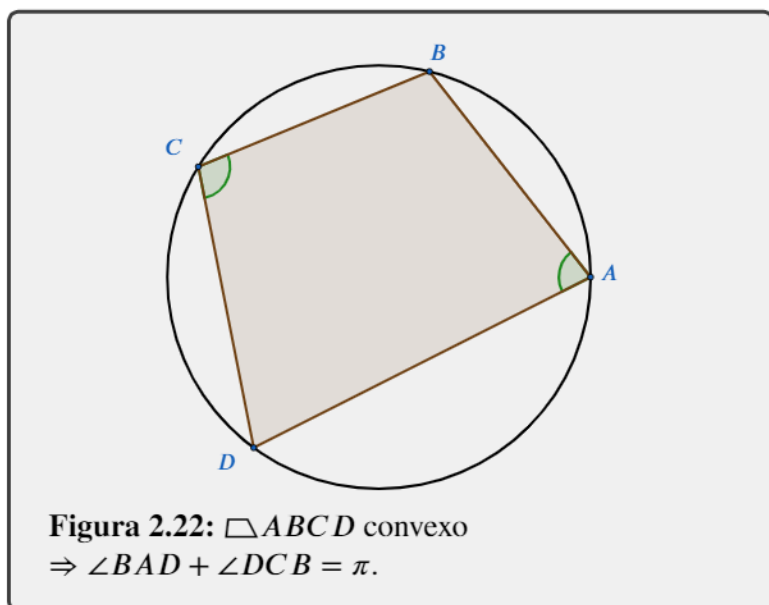
Tesis: Los ángulos opuestos son suplementarios, es decir:

$$\angle BAD + \angle DCB = \pi \quad \text{y} \quad \angle ADC + \angle ABC = \pi.$$

Demostración: Trácese las rectas diagonales AC y BD .

Como $\angle BAC = \angle BDC$ y $\angle ACB = \angle ADB$.

Y ya que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es igual a dos ángulos rectos, entonces:



$$\begin{aligned}\pi &= \angle CBA + \angle ACB + \angle BAC \\ &= \angle CBA + \angle ADB + \angle BDC \\ &= \angle CBA + \angle ADC.\end{aligned}$$

Y como la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos, $\angle BAD + \angle DCB = \pi$.
Q.E.D.

Antes de presentar el recíproco de este teorema recordamos que:

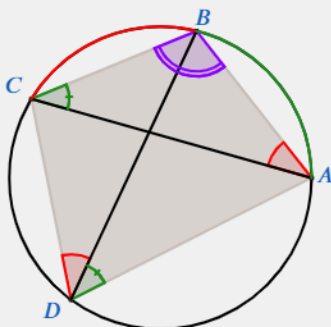


Figura 2.23: Demostración del teorema (2.3.3), página 67.

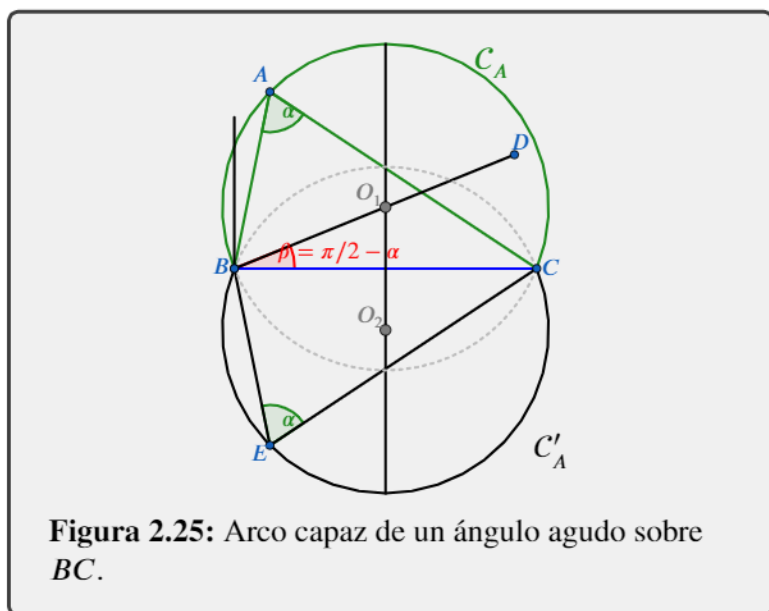
Definición 2.3.3:

Dados tres puntos distintos en el plano A , B y C ; $\alpha = \angle BAC$ un ángulo dado, el lugar geométrico de los puntos bajo los que un segmento BC se ve con el mismo ángulo α se denomina el **arco capaz**.

El arco capaz asociado al ángulo α con respecto al segmento BC consta de dos arcos de circunferencia.

Recordamos que [E, III T.21]; *En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí.* Y por definición, [E, III. D.8]; *Ángulo en un segmento es el ángulo que, cuando se determina un punto sobre una circunferencia del segmento y se dibujan rectas desde el punto hasta los extremos de la*

1. Sea C la circuncircunferencia del triángulo $\triangle ACB$.
2. El arco $C_A \subset C$, sobre BC que contiene al punto A , es una parte del arco capaz.
3. El arco simétrico C'_A de C_A con respecto a la recta BC es la otra parte del arco capaz, la que no contiene al punto A . Véanse las figuras (2.24) y (2.25).



Teorema 2.3.4: recíproco del teorema (2.3.3) pág. 67.

Si un cuadrilátero convexo tiene dos ángulos opuestos suplementarios, entonces el cuadrilátero es cíclico.

Hipótesis: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo con dos ángulos opuestos suplementarios, $\angle BAD + \angle DCB = \pi$.

Tesis: El cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico.

Demostración: Trácese la circuncircunferencia C asociada

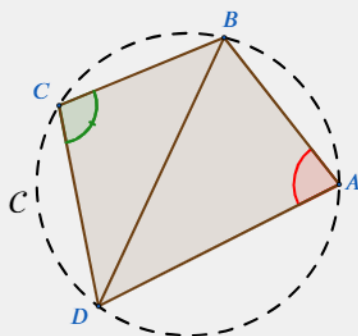


Figura 2.26: El recíproco del teorema III.22 de Euclides.

al triángulo $\triangle BCD$.

Denótese $C_{DB} \subset C$ el arco de circunferencia sobre el segmento BD que no contiene al vértice C . Véase la figura (2.27)

Como consecuencia del teorema III.21 de los Elementos, para cada $P \in C_{DB}$, el ángulo $\angle BPD$ coincide con el ángulo $\angle BAD$, y por ende, es suplementario al ángulo $\angle DCB$, es decir, $\angle BPD + \angle DCB = \pi$.

Por la definición del arco capaz, estos puntos P son los únicos tales que $\angle BPD$ es suplementario al ángulo $\angle BCD$.

Por lo tanto, el punto A se encuentra en la parte del arco capaz C_{BD} , ya que $\angle BAD = \pi - \angle DCB$ es constante.

Así, el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico. **Q.E.D.**

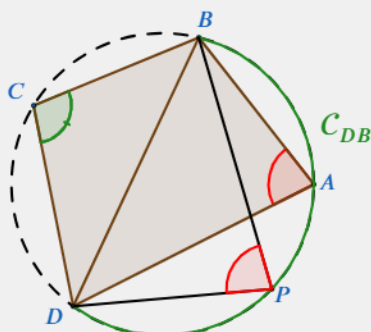


Figura 2.27: El recíproco del teorema III.22 de Euclides.

Teorema 2.3.5:

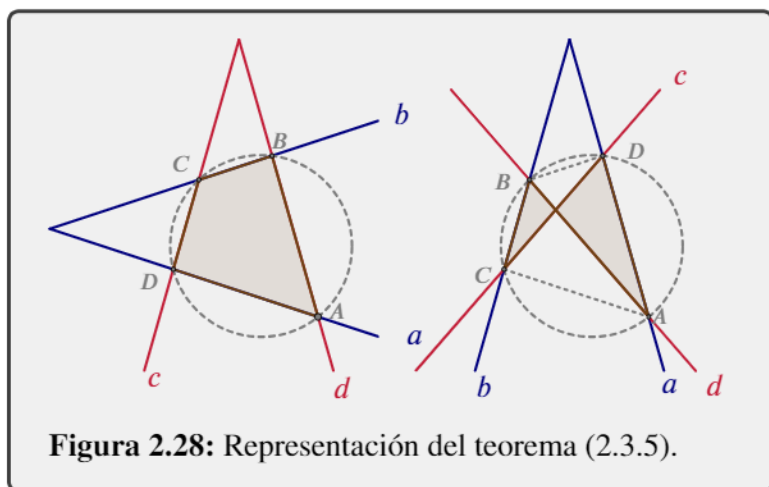
Si dos rectas que son antiparalelas con respecto a otras dos, cortan a estas últimas en cuatro puntos distintos, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico.

Hipótesis: Sean c y d antiparalelas con respecto al par de rectas a y b ; sean A , B , C y D los puntos donde se cortan, como se muestra en la figura (2.28).

Tesis: El cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico.

Demostración: De acuerdo con el teorema (2.2.2), pág. 53, si el par de rectas $\{c, d\}$ es antiparalelo con respecto al par de rectas $\{a, b\}$ y $A = a \cap d$, $B = b \cap d$, $C = b \cap c$ y $D = a \cap c$

son los puntos donde se cortan; si el cuadrilátero $\square ABCD$ es convexo, los ángulos opuestos son suplementarios.



Por otra parte, si el cuadrilátero $\square ABCD$ es cruzado, entonces el cuadrilátero $\square ADBC$ es convexo.

Como $\{a, b\} \perp \{c, d\}$, entonces los ángulos opuestos del cuadrilátero $\square ADBC$ son suplementarios. Véase el lado derecho de la figura (2.28).

Como consecuencia del teorema (2.3.4), página 71, si un cuadrilátero convexo tiene dos ángulos opuestos suplementarios, el cuadrilátero es cíclico. En particular, el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico. **Q.E.D.**

Teorema 2.3.6: recíproco del teorema (2.3.5), pág. 73.

Si un cuadrilátero es cíclico, entonces cada par de rectas opuestas es antiparalelo con respecto al otro par.

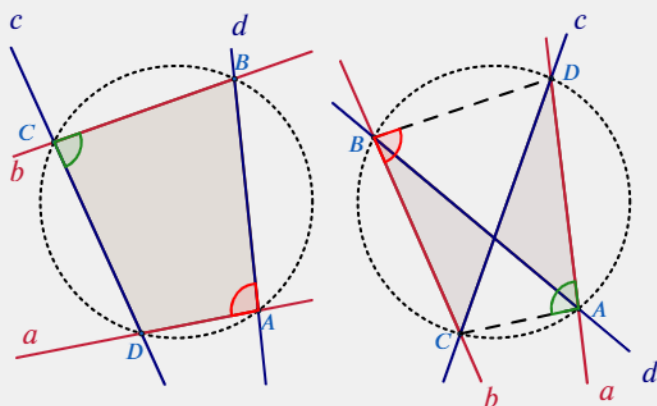


Figura 2.29: Representación del teorema (2.3.6), pág. 75.

Nuevamente dividiremos la demostración en dos casos: si el cuadrilátero cíclico es convexo o cruzado.

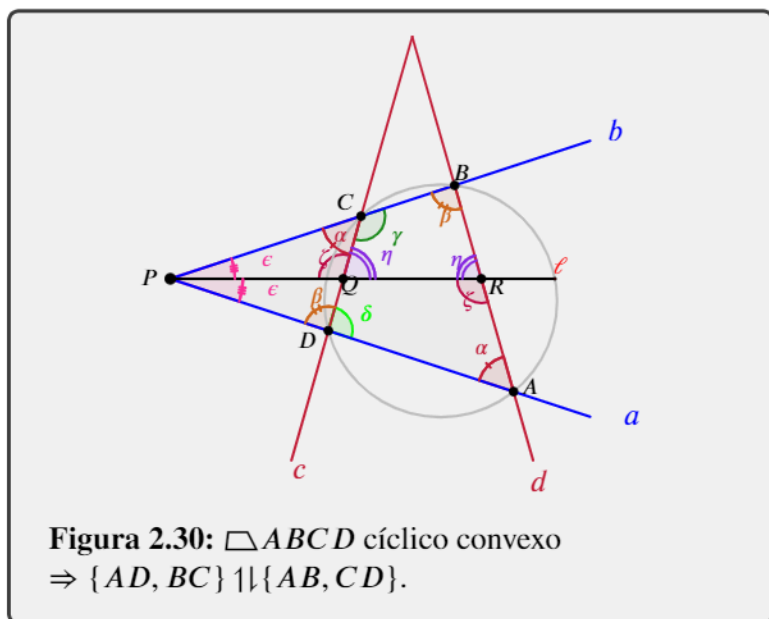
Si el cuadrilátero cíclico es un paralelogramo, como se vio anteriormente, los pares de rectas opuestos son antipara-

lelos, por lo que, se supondrá que al menos un par de lados opuestos no son paralelos.

Hipótesis 1: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo; supongamos que las rectas AD y BC se intersectan en un punto P .

Tesis 1: $\{AD, BC\} \parallel \{AB, CD\}$.

Demostración: Sea ℓ la bisectriz del ángulo $\angle CPD$ y considere los puntos $Q = AB \cap \ell$ y $R = CD \cap \ell$ respectivamente.



Siguiendo la notación de la figura (2.30), como el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico convexo, por el teorema (2.3.4),

pág. 71, sus ángulos opuestos son suplementarios.

De donde, $\alpha + \gamma = \angle DAB + \angle BCD = \pi$ y como P , C y B son colineales, $\angle QCP + \angle BCQ = \pi$. Análogamente, $\beta + \delta = \angle CBA + \angle ADC = \pi$.

Como ℓ es la bisectriz del ángulo $\angle APB$, entonces $\varepsilon = \angle APR = \angle RPB$.

Luego entonces, los triángulos $\triangle PQC$ y $\triangle PAR$ son semejantes.

En particular, $\zeta = \angle ARP = \angle CQP$.

Ya que P , Q y R son colineales

$$\zeta + \angle RQC = \angle CQP + \angle RQC = \pi.$$

Análogamente, A , R y B colineales implica:

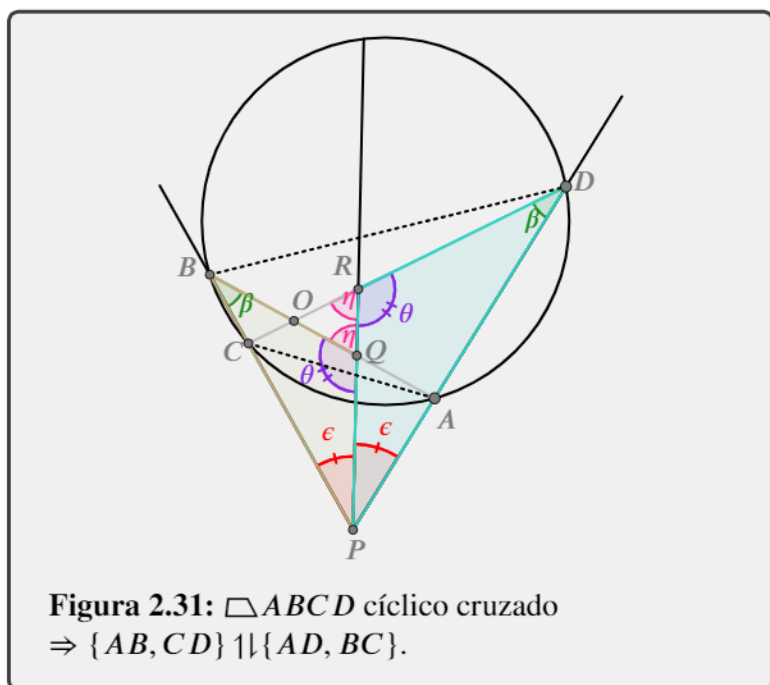
$$\zeta + \angle BRQ = \angle ARQ + \angle BRQ = \pi.$$

Así, $\angle RQC = \angle BRQ = \eta$, de donde, la recta simétrica a la recta $CQ = CD$ con respecto a la recta ℓ es paralela a la recta $RB = AB$.

Consecuentemente $AB \parallel_{\ell} CD$.

Supongamos ahora que el cuadrilátero $\square ABCD$ es cruzado, que $O = AB \cap CD$ es un punto en el interior del círculo limitado por C y $P = BC \cap AD$ es el punto de intersección de los otros dos lados opuestos, como se muestra en la figura (2.31)

Sea ℓ la bisectriz del ángulo $\angle DPB$, defínanse los puntos $Q = AB \cap \ell$ y $R = CD \cap \ell$.



Ya que ℓ biseca $\angle DPB$, se tiene en particular que $\epsilon = \angle DPR = \angle QPB$.

Como consecuencia del teorema (2.2.3), página 55, el ángulo formado por los lados AB y BC coincide con el ángulo formado por los lados CD y DA , de donde, $\beta = \angle PBQ = \angle RDP$.

Luego entonces, los triángulos $\triangle PRD$ y $\triangle PBQ$ son semejantes.

Ptolomeo

En particular, $\theta = \angle BQP = \angle PRD$.

Ya que P, Q, R son colineales y C, R, D son colineales

$$\angle BQP + \angle RQB = \angle CRP + \angle PRD.$$

De donde $\angle RQB = \angle CRP$, consecuentemente $\triangle OQR$ es isósceles se concluye que $\{AB, CD\} \parallel \{AD, BC\}$.

Luego entonces, si un cuadrilátero es cíclico, entonces cada par de rectas opuestas es antiparalelo con respecto al otro par. **Q.E.D.**

2.4. El teorema de Ptolomeo

Claudio Ptolomeo

Astrónomo, matemático y geógrafo griego. Es muy poca la información sobre la vida de Ptolomeo que ha llegado hasta nuestro tiempo, sin embargo, se cree que nació en el año 100 d.C. en Ptolemaida, Tebaida, y falleció en Cánope, alrededor del año 170 d.C., en Egipto bajo el imperio romano.

Su actividad se enmarca entre las fechas de su primera observación, cuya realización asignó al undécimo año del reinado de Adriano (127 d.C.), y de la última, fechada en el 141 d.C. En su catálogo de estrellas, adoptó el primer año del reinado de Antonino Pío (138 a.C.) como fecha de referencia para las coordenadas.

Ptolomeo

La admiración inspirada por la obra de Ptolomeo introdujo la costumbre de referirse a ella utilizando el término griego megisté (la grandísima, la máxima).

El califa al-Mamun la hizo traducir al árabe en el año 827, y del nombre de al-Magisti que tomó dicha traducción procede el título de *Almagesto* adoptado generalmente en el Occidente medieval a partir de la primera traducción de la versión árabe, realizada en Toledo en 1175.

Utilizando los datos recogidos por sus predecesores, especialmente por Hiparco, Ptolomeo construyó un sistema del mundo que representaba con un grado de precisión satisfactoria los movimientos aparentes del Sol, la Luna y los cinco planetas entonces conocidos, mediante recursos geométricos y cálculos de considerable complejidad; se trata de un sistema geocéntrico según el cual la Tierra se encuentra inmóvil en el centro del universo, mientras que en torno a ella giran, en orden creciente de distancia, la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno.

El teorema de Ptolomeo

Un famoso teorema de cuadriláteros cíclicos debido a Ptolomeo (150 d.C.) y usado por él en *El Almagesto* es el siguiente:

Teorema 2.4.1: de Ptolomeo.

El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico (convexo), es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

Hipótesis: Sean $\square ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo, AC y BD sus diagonales.

Tesis: $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

Demostración: Trácese la recta AE , con $E \in DB$, tal que $\angle DAE = \angle CAB$, véase la figura (2.32).

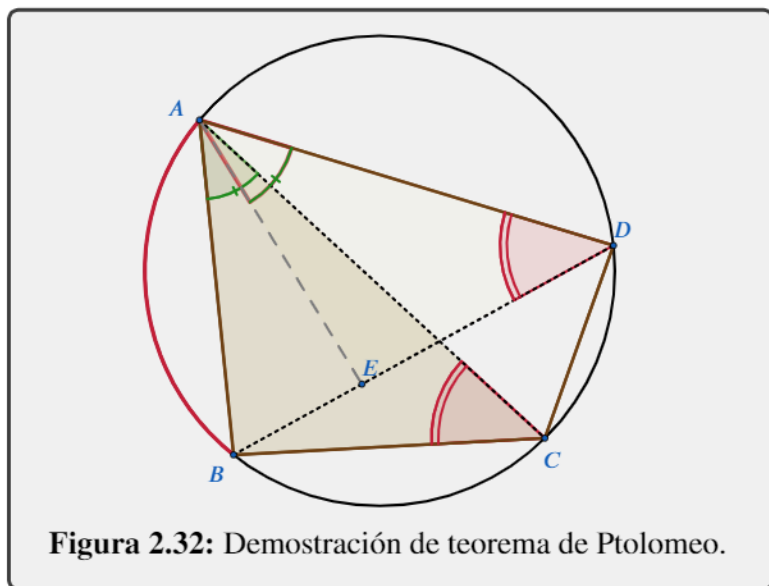


Figura 2.32: Demostración de teorema de Ptolomeo.

Ptolomeo

Y como los ángulos $\angle ADB$ y $\angle ACB$ subtienden el mismo arco, entonces $\angle ADB = \angle ACB$, por [E, III, T.21].

Así, los triángulos $\triangle DAE$ y $\triangle CAB$ son semejantes, y $\angle DEA = \angle CBA$.

Por lo tanto, los lados correspondientes de los triángulos $\triangle DAE$ y $\triangle CAB$ son proporcionales:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DE}, \quad \frac{CB}{BA} = \frac{DE}{EA} \quad \text{y} \quad \frac{BA}{AC} = \frac{EA}{AD}.$$

Consecuentemente, $AD \cdot CB = AC \cdot DE$.

Por otra parte,

$$\angle BAE = \angle BAC - \angle EAC = \angle EAD - \angle EAC = \angle CAD.$$

Además, como los ángulos $\angle DBA$ y $\angle DCA$ subtienden el arco DA son iguales entre si, $\angle DBA = \angle DCA$. Véase la figura (2.33).

Pero $\angle EBA = \angle DBA$, por tanto $\angle EBA = \angle DCA$, es decir, los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle ABE$ son semejantes, y sus lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}, \quad \frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DA} \quad \text{y} \quad \frac{DA}{AC} = \frac{EA}{BE}.$$

Así

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE.$$

Las identidades $AD \cdot CB = AC \cdot DE$ y $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ obtenidas anteriormente implican

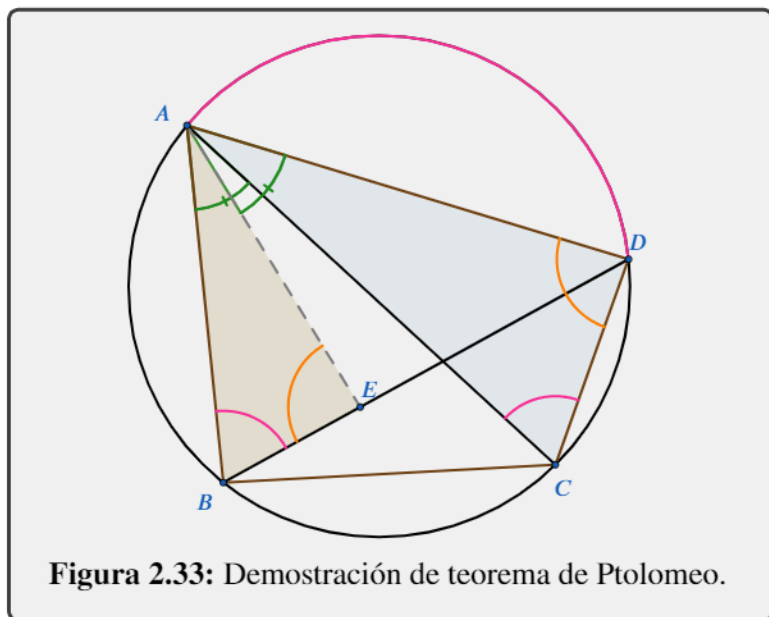


Figura 2.33: Demostración de teorema de Ptolomeo.

$$\begin{aligned} AD \cdot CB + AB \cdot CD &= AC \cdot DE + AC \cdot BE \\ &= AC \cdot (DE + EB). \end{aligned}$$

Y como $BE + ED = BD$, se concluye:

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Q.E.D.

Teorema 2.4.2: recíproco de Ptolomeo.

Si el producto de las diagonales de un cuadrilátero convexo es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, entonces el cuadrilátero es cíclico.

Hipótesis: Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero convexo, tal que

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

Tesis: El cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico, o equivalentemente, los ángulos opuestos son suplementarios.

Demostración: Sea $\square ABCD$ el cuadrilátero convexo y supóngase que $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

Constrúyase $\angle CDE = \angle BDA$, donde E es un punto en el interior del cuadrilátero $\square ABCD$ tal que $\frac{BD}{CD} = \frac{DA}{DE}$.

Trácese los segmentos AE y EC , como en la figura (2.34).

Como los triángulos $\triangle EDC$ y $\triangle ADB$ tienen dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo que los comprende, los triángulos $\triangle ECD$ y $\triangle ABD$ son semejantes.

Luego entonces

$$\angle CED = \angle BAD, \text{ y } \frac{AB}{EC} = \frac{DA}{DE}. \quad (2.3)$$

Además, los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle BCD$ son semejan-

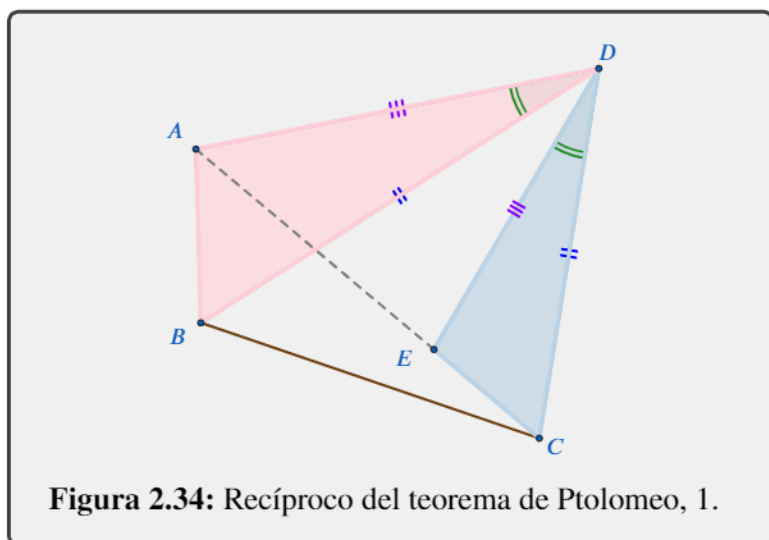


Figura 2.34: Recíproco del teorema de Ptolomeo, 1.

tes, pues $\angle ADE = \angle BDC$, puesto que

$$\begin{aligned}\angle ADE &= \angle ADB + \angle BDE \\ &= \angle BDE + \angle EDC = \angle BDC\end{aligned}$$

y, por construcción, los lados que comprenden dicho ángulo son proporcionales, esto es $\frac{DA}{DE} = \frac{BD}{CD}$.

En particular,

$$\frac{BC}{AE} = \frac{ED}{CD}, \text{ y } \angle DEA = \angle DCB \quad (2.4)$$

De las igualdades de los ángulos dados en las ecuaciones (2.3) y (2.4) se obtiene:

Ptolomeo

$$\angle CED + \angle DEA = \angle BAD + \angle DCB. \quad (2.5)$$

Como consecuencia de las proporciones dadas en las ecuaciones (2.3) y (2.4) se obtiene:

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = BD \cdot EC, \quad (2.6)$$

$$\frac{BC}{AE} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = BD \cdot AE. \quad (2.7)$$

Pero,

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &\stackrel{Hip.}{=} AD \cdot BC + AB \cdot CD \\ &\stackrel{(2.6)}{=} AD \cdot BC + BD \cdot EC, \\ &\stackrel{(2.7)}{=} BD \cdot AE + BD \cdot EC \\ &\stackrel{(dist.)}{=} BD \cdot (AE + EC). \end{aligned}$$

Como $B \neq D$, de lo anterior se deduce que

$$AC = AE + EC$$

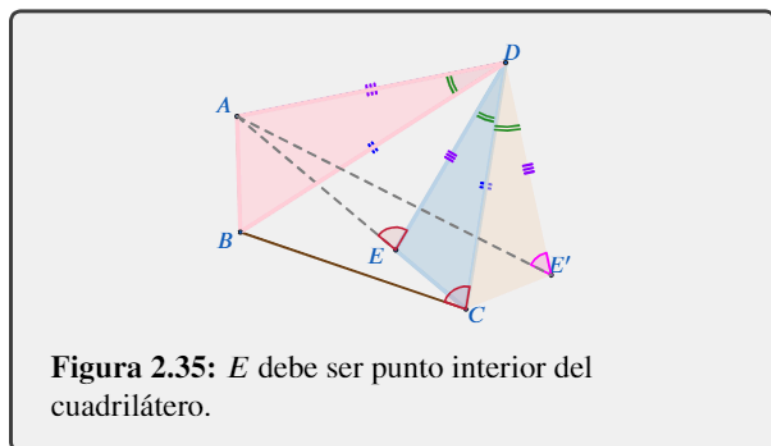
y, por la desigualdad del triángulo, los puntos A , E y C son colineales.

Es decir, los ángulos $\angle CED$ y $\angle DEA$ son suplementarios.

Como consecuencia de la ecuación (2.5), los ángulos opuestos $\angle BAD$ y $\angle DCB$ son suplementarios.

Por el teorema (2.3.4), pág. 71, se deduce que el cuadrilátero $\square ABCD$ es cíclico.

A continuación, se demostrará que el punto E debe ser un punto interior del cuadrilátero $\square ABCD$.



Si E' es un punto en el exterior del cuadrilátero $\square ABCD$ tal que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{DA}{DE'},$$

en particular E' es el punto simétrico a E con respecto al lado CD .

Por construcción se tendría que $\angle CDE' = \angle ADB$, además $\triangle CDE' \cong \triangle EDC$.

Como se demostró anteriormente, los triángulos $\triangle ADE'$ y $\triangle BDC$ son semejantes.

Ptolomeo

Pero $\angle ADE' = \angle ADB + \angle BDC + \angle CDE' \neq \angle BDC$, es decir, los ángulos comprendidos por lados proporcionales no son iguales, lo cual es una contradicción, véase la figura (2.35): **Q.E.D.**

2.5. El teorema de la recta de Simson

Teorema 2.5.1: de la recta de Simson.

Si un punto se encuentra sobre la circuncircunferencia de un triángulo, entonces las proyecciones del punto sobre los lados del triángulo son colineales. Véase la figura (2.36).

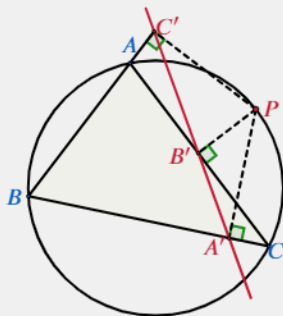


Figura 2.36: La recta de Simson.

Hipótesis: Sea $\triangle ABC$ un triángulo, sea P el punto dado sobre la circuncircunferencia de ABC , y sean A' , B' y C' las proyecciones de P sobre los lados BC , CA y AB , respectivamente.

Tesis: Los puntos A' , B' , C' son colineales.

Demostración: Supongamos que P está sobre el arco CA que no contiene al punto B .

Para concluir que A' , B' y C' son colineales, bastará demostrar que $B'C'$ y $B'A'$ forman con AC ángulos iguales, esto es, $\angle C'B'A = \angle A'B'C$.

Las proyecciones de P sobre los lados BC , CA y AB son A' , B' y C' , respectivamente.

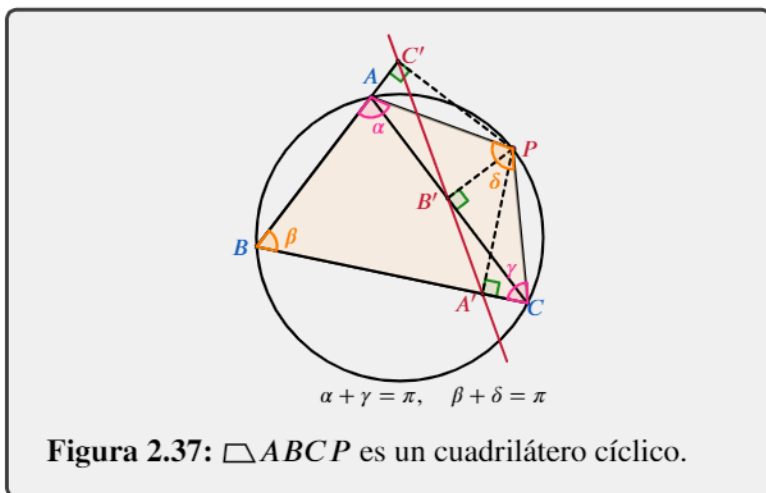
Como P está en la circuncircunferencia asociada al triángulo ABC , ver figura (2.37), el cuadrilátero $\square ABCP$ es cíclico, luego entonces los ángulos opuestos son suplementarios, en particular:

$$\delta + \beta = \angle APC + \angle CBA = \pi. \quad (2.8)$$

Además, en el cuadrilátero $\square BA'PC'$ los ángulos opuestos $\angle PA'B$ y $\angle C'A'B$ son ángulos rectos, y por ende suplementarios, como consecuencia del teorema (2.3.1), página 61, el cuadrilátero $\square BA'PC'$ es cíclico, como se muestra en la figura (2.38).

En particular, los ángulos $\angle A'BC'$ y $\angle C'PA'$ son suplementarios, es decir:

$$\angle A'BC' + \angle C'PA' = \pi. \quad (2.9)$$



Como consecuencia de las ecuaciones (2.8) y (2.9)

$$\angle C'PA' = \angle APC. \quad (2.10)$$

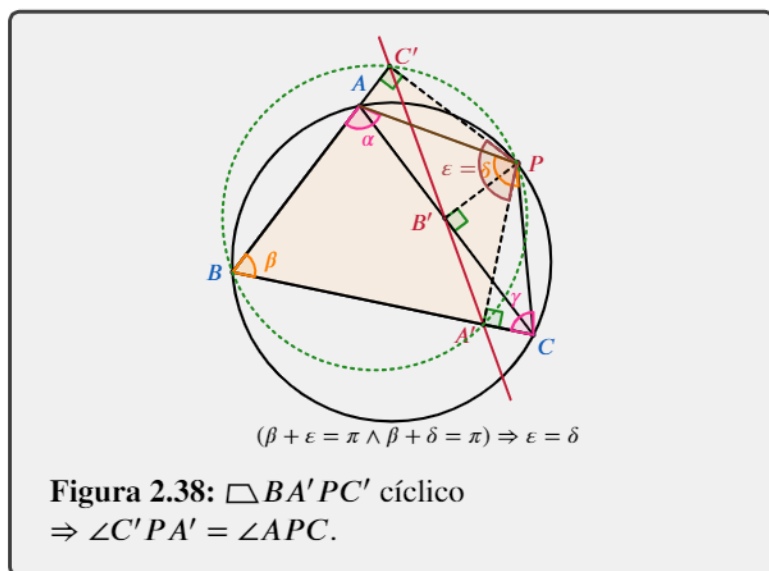
Restando en ambos lados de la ecuación (2.10) el ángulo común $\angle APA'$ se obtiene:

$$\angle APC - \angle APA' = \angle C'PA' - \angle APA'$$

de donde

$$\angle A'PC = \angle C'PA. \quad (2.11)$$

Como se muestra en la figura (2.39), en el cuadrilátero $\square AB'PC'$ los ángulos $\angle PB'A$ y $\angle AC'P$ son ángulos rectos y son opuestos, por lo que el cuadrilátero $\square AB'PC'$ es cíclico.



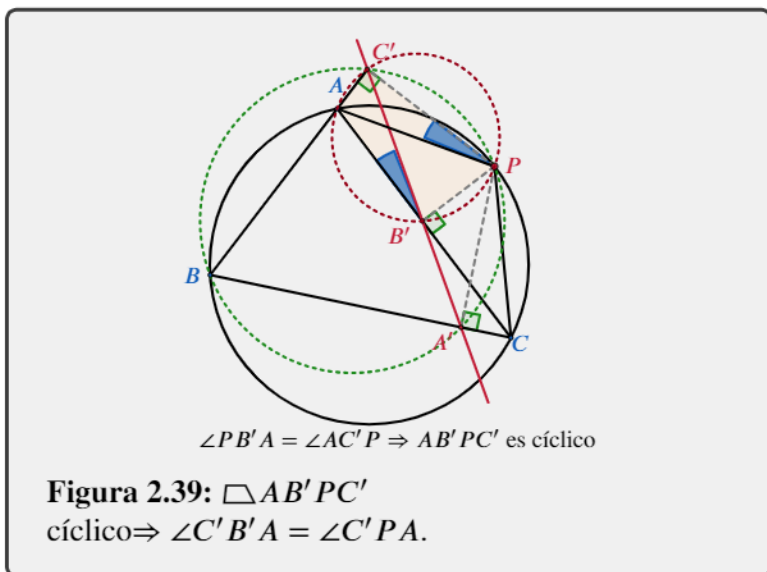
Como los ángulos $\angle C'B'A$ y $\angle C'PA$ subtienden el arco AC' , se sigue que

$$\angle C'B'A = \angle C'PA. \quad (2.12)$$

Así, en el cuadrilátero cruzado $\triangle CB'A'P$ los ángulos $\angle PB'C$ y $\angle PA'C$, comprendidos por un lado y la diagonal son ángulos rectos.

Como consecuencia del teorema (2.3.2), página 64, el cuadrilátero $\triangle CB'A'P$ es cíclico. Véase la figura (2.40).

Ya que los ángulos $\angle A'B'C$ y $\angle A'PC$ subtienden el arco



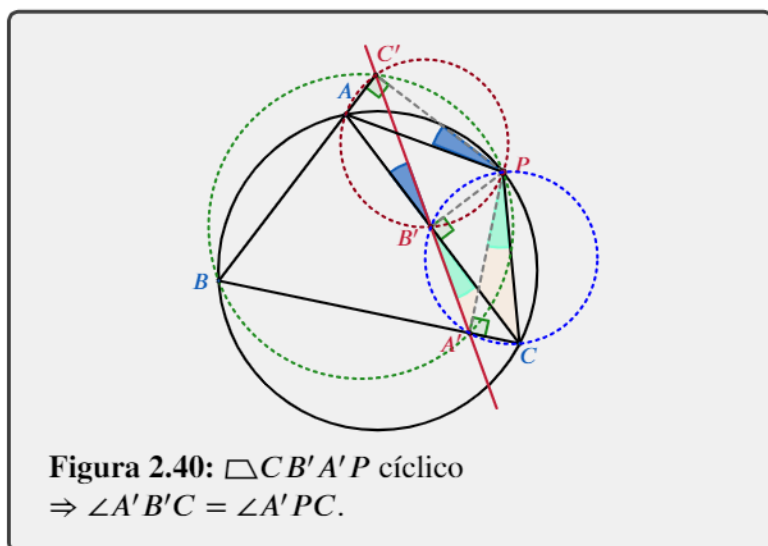
$A'C$, entonces

$$\angle A'B'C = \angle A'PC. \quad (2.13)$$

Como consecuencia de las ecuaciones (2.12) y (2.13) se sigue que

$$\angle C'B'A = \angle CB'A'.$$

Y como B' está sobre la recta AC , como consecuencia del teorema [E, I.14], si, respecto de una recta cualquiera, y de un punto de ella, dos rectas no colocadas en el mismo lado de ella hacen ángulos adyacentes iguales a dos ángulos rectos,



ambas rectas estarán sobre la misma recta, los puntos A' , B' y C' son colineales. **Q.E.D.**

Teorema 2.5.2: recíproco de la recta de Simson.

Si las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo son colineales, entonces el punto se encuentra sobre la circuncircunferencia del triángulo.

Hipótesis: Sean $\triangle ABC$ un triángulo, P un punto; A' , B' y C' las proyecciones de P sobre los lados BC , AC y AB respectivamente, y supóngase que A' , B' y C' son colineales.

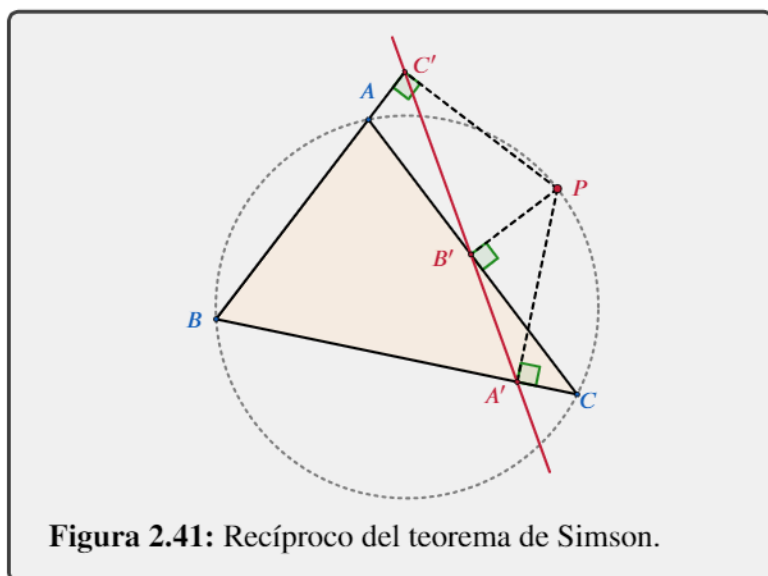


Figura 2.41: Recíproco del teorema de Simson.

Tesis: El punto P está en la circuncircunferencia del triángulo $\triangle ABC$.

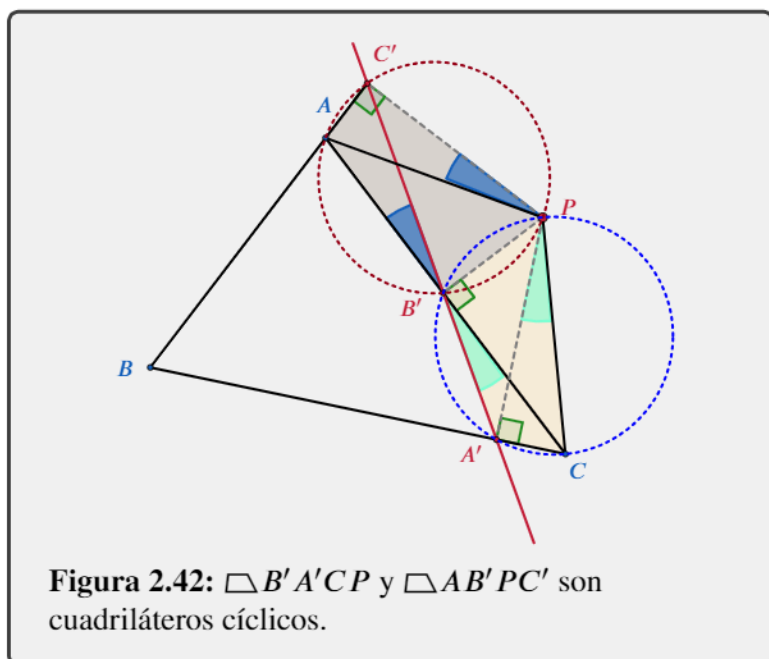
Demostración: Si A' , B' y C' son colineales, entonces

$$\angle C'B'A = \angle A'B'C,$$

pues son ángulos opuestos por el vértice.

Consecuentemente, el cuadrilátero $\square AB'PC'$ es cíclico, pues $\angle PC'A + \angle AB'P = \pi$ y son ángulos opuestos.

Ya que, en el cuadrilátero $\square B'A'CP$, los ángulos $\angle PA'C$ y $\angle PB'C$ son ambos ángulos rectos, por lo cual A' y B' pertenecen a la circunferencia de diámetro CP .



Por lo tanto el cuadrilátero $\square B'A'CP$ es cíclico. Véase la figura (2.42).

De lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned}\angle C'PA &= \angle C'B'A, \\ \angle A'PC &= \angle A'B'C.\end{aligned}$$

Igualando estos resultados en la primera igualdad se ob-

Ptolomeo

tiene

$$\angle C'PA = \angle A'PC.$$

Sumando a ambos lados de la igualdad anterior el ángulo $\angle APA'$ se tiene:

$$\angle C'PA' = \angle APC.$$

En el cuadrilátero $\square A'BC'P$ se tiene

$$\angle C'PA' + \angle ABC = \pi,$$

es decir, el cuadrilátero $\square A'BC'P$ es cíclico.

Luego entonces, en el cuadrilátero $\square ABCP$ se satisface que

$$\angle CPA + \angle CBA = \pi.$$

Como $\angle CPA$ y $\angle CBA$ son ángulos opuestos, el cuadrilátero $\square ABCP$ es cíclico.

Consecuentemente P está en la circuncircunferencia del triángulo $\triangle ABC$. **Q.E.D.**

2.6. Ejercicios

1. Aplique el teorema de Ptolomeo para demostrar el teorema de Pitágoras.
2. Demuestre que la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide al triángulo en dos triángulos directamente semejantes, cada uno de los cuales es inversamente semejante al triángulo dado.

Ptolomeo

3. Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo, se obtiene un triángulo homotético al triángulo dado.
4. Si el triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia C , y se traza una recta paralela ℓ a la tangente a C por A , entonces ℓ es antiparalela a BC con respecto a AB .
5. Si $\square ABCD$ es un cuadrilátero cíclico convexo, cuyas diagonales se cortan en O , demuestre que

$$AB \cdot BC \cdot OD = CD \cdot DA \cdot BO.$$

6. Sea $\square ABCD$ un paralelogramo, y considere una circunferencia C que pasa por el vértice A , e interseca el lado AB en el punto P , el lado AD en el punto R , y a la diagonal AC en el punto Q . Demuestre que

$$AQ \cdot AC = AP \cdot AB + AR \cdot AD.$$

7. Considere un pentágono regular $ABCDE$ de apotema $a = AB$ y diagonal $b = AC$, aplique el teorema de Ptolomeo para demostrar que la razón b/a es igual al número áureo $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
8. Aplique el teorema de Ptolomeo para encontrar la razón entre la diagonal y un lado de un pentágono regu-

Ptolomeo

lar. Haciendo uso de esta razón, demuestre que

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

9. Si un triángulo isósceles $\triangle ABC$, con $AB = AC$, está inscrito en un círculo, y P es un punto sobre el arco BC , demuestre que

$$\frac{PA}{PB + PC} = \frac{AC}{BC}.$$

10. Aplique el teorema de Ptolomeo para demostrar que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

11. Aplique el teorema de Ptolomeo para demostrar que, si $0 < \alpha$ y $0 < \beta$ son ángulos agudos tales que $\alpha + \beta \leq \pi/2$, entonces $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

12. Si $\alpha \neq 0$ es un ángulo agudo, aplique el teorema de Ptolomeo para demostrar que

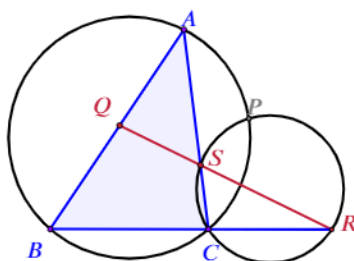
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ y } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

13. Dado un triángulo equilátero $\triangle ABC$ inscrito en la circunferencia C , si P es un punto en C , distinto de los vértices del triángulo, demuestre que la suma de las distancias desde el punto P a los vértices más cercanos es igual a la distancia desde P al otro vértice.

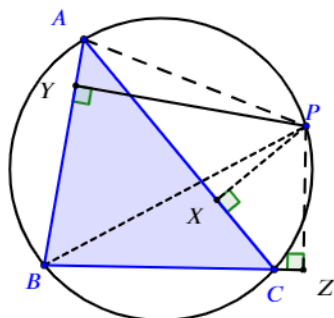
14. Dados un triángulo equilátero $\triangle ABC$, D un punto en el lado BC , si la semirecta BD corta a la circuncircunferencia en el punto P , demuestre que

$$\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$$

15. Si el triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia C , y se traza una recta ℓ , paralela a la recta tangente a C en el punto A , entonces el par $\{\ell, BC\}$ es antiparalelo al par $\{AB, AC\}$, es decir, ℓ es antiparalela a BC con respecto a la bisectriz interna de $\angle BAC$.
16. Sea QRS una recta transversal a los tres lados de un triángulo dado $\triangle ABC$, como se muestra en la siguiente figura, suponga además que las circuncircunferencias de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle SCR$ se intersectan en el punto P . Demuestre que el cuadrilátero $\square APSQ$ es cíclico.

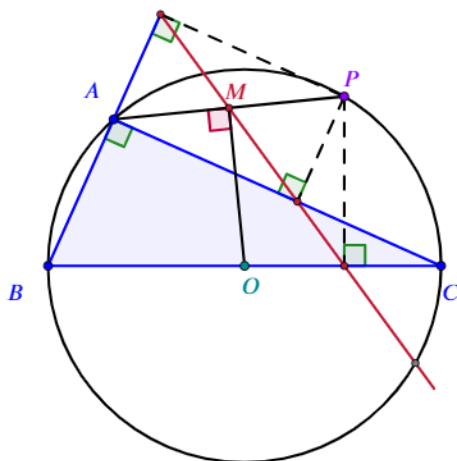


17. Dado un triángulo $\triangle ABC$, suponga que la altura AD interseca a la circuncircunferencia C del triángulo dado en el punto P . Demuestre que la recta de Simson del punto P con respecto al triángulo $\triangle ABC$ es paralela a la recta tangente a la circuncircunferencia C en el punto A .
18. Sea P un punto en la circuncircunferencia C del triángulo dado $\triangle ABC$, con P distinto de los vértices del triángulo, y trázese las rectas perpendiculares PX , PY y PZ a las rectas AC , AB y BC respectivamente. Demuestre que $PA \cdot PZ = PB \cdot PX$.



19. Dada una circunferencia C con centro en O y radio $r > 0$, desde un punto $P \in C$ trázese tres cuerdas PA , PB y PC , con $A, B, C \in C$. Demuestre que los tres puntos de intersección, distintos de P , de las tres circunferencias con diámetros PA , PB y PC son colineales.

20. En la circunferencia C con centro en O , inscribese un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, con $\angle BAC = 1$ ángulo recto. Supóngase además que la recta de Simson del punto P con respecto al triángulo $\triangle ABC$ interseca a la recta PA en el punto M . Demuestre que la recta MO es perpendicular a la recta PA .



Apolonio de Perga

En el presente capítulo se estudiarán los conceptos de homotecia y homología, los cuales están relacionados con el concepto de semejanza, pues preservan la forma de las figuras, pero no necesariamente su magnitud u orientación. Utilizando circunferencias, mostramos que es posible dividir un segmento dado interna y externamente en la misma razón.

Asimismo, presentamos una introducción a los problemas de tangencias de Apolonio, retomaremos el problema de la división interna y externa, en una misma razón, de un segmento dado.

Finalmente, se enunciará y demostrará el teorema de la circunferencia de Apolonio.

3.1. Apolonio de Perga

Nació alrededor del año 262 a. C. en Perga, Grecia (ahora Turquía) y falleció alrededor del año 190 a.C en Alejandría, Egipto, siendo su obra más famosa "*Sobre las secciones cónicas*".

Apolonio fue quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las secciones cónicas. Propuso y resolvió el problema de hallar las circunferencias tangentes a tres círculos dados, conocido como problema de Apolonio. El problema aparece en su obra, hoy perdida, *Las Tangencias o Los Contactos*, conocida gracias a Pappus de Alejandría.

También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.

Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de *El Gran Geómetra*.

Los problemas de Apolonio

Una de las principales aportaciones de Apolonio a la geometría es la propuesta sistémica de los problemas de tangencias, que se plantea en el tratado sobre tangencias y se enuncia de la siguiente forma:

Apolonio

Dados tres objetos, cada uno de los cuales puede ser punto, recta o circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados. (o que los contenga en el caso de los puntos)

Al hacer las combinaciones de tres objetos (puntos, rectas o circunferencias) resultan los casos siguientes:

- I Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga. Para resolver este problema bastará trazar las mediatrices de dos de los segmentos determinados por los tres puntos. La intersección de las mismas determinará el centro de la circunferencia buscada.
- II Dadas tres rectas, construir una circunferencia que sea tangente a las tres rectas.
- III Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos.
- IV Dadas dos rectas y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.
- V Dados dos puntos y una circunferencia, construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada.

Apolonio

- VI Dadas dos circunferencias y un punto, construir una circunferencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas.
- VII Dadas dos rectas y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada.
- VIII Dadas dos circunferencias y una recta, construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas.
- IX Dadas una circunferencia, una recta y un punto, construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y la circunferencia dada.
- X Dadas tres circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas.

Los dos primeros problemas aparecen en el Libro IV de los *Elementos* de Euclides; los problemas III, IV, V, VI, VIII y IX se encuentran en el Libro I de la obra *Tangencias* de Apolonio.

Los problemas VII y X se encuentran en el Libro II de la misma obra.

A lo largo del presente capítulo se aplicarán algunas de las técnicas que se utilizan para resolver los problemas de Apolonio, en particular, se aplicará la solución del siguiente problema:

Problema 3.1.1: Tangentes a una circunferencia por un punto dado

Dada una circunferencia C con centro O , y un punto P fuera del círculo asociado, se deben construir las rectas tangentes a C que pasen por P .

Para resolver este problema procederemos de la siguiente forma:

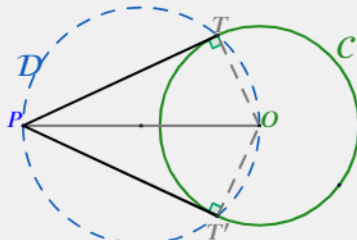


Figura 3.1: PT y PT' son tangentes a C por P .

1. Se traza el segmento OP .
2. Se traza una circunferencia D con diámetro OP .
3. Sea $C \cap D = \{T, T'\}$.
4. Como consecuencia del teorema de Thales para circunferencias, las rectas PT y PT' son tangentes a C .

Apolonio

Como los ángulos $\angle OTP$ y $\angle OT'P$ subtienden el arco de una semicircunferencia, como consecuencia del teorema de Thales los ángulos $\angle OTP$ y $\angle OT'P$ son rectos.

Ya que las tangentes a una circunferencia son perpendiculares a los radios, entonces PT y PT' son tangentes a la circunferencia C , como se aprecia en la figura (3.1). **Q.E.D.**

Siguiendo el espíritu de los problemas de Apolonio, el problema a plantearse es el siguiente:

Problema 3.1.2: Tangentes a dos circunferencias.

Dadas dos circunferencias C y C' con radios $r < r'$ y centros O , O' respectivamente ¿Cuándo es posible construir las rectas que son tangentes simultáneamente a C y C' ? Véase la figura (3.2).

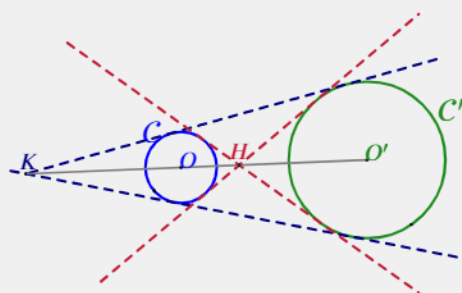


Figura 3.2: Tangentes comunes a C y C' .

Desde luego, si una circunferencia está contenida en la otra, dichas tangentes no existen, y si se cortan en más de un punto, no habrá tangentes internas.

Para resolver el problema (3.1.1), página 107, se considerarán por separado las tangentes externas e internas.

1. Las rectas tangentes son exteriores a las dos circunferencias. Como se muestra en la figura (3.2), las rectas que pasan por el punto K .
2. Las rectas tangentes son interiores a las dos circunferencias. Como se muestra en la figura (3.2), las rectas que pasan por el punto H .

Problema 3.1.3: Tangentes exteriores

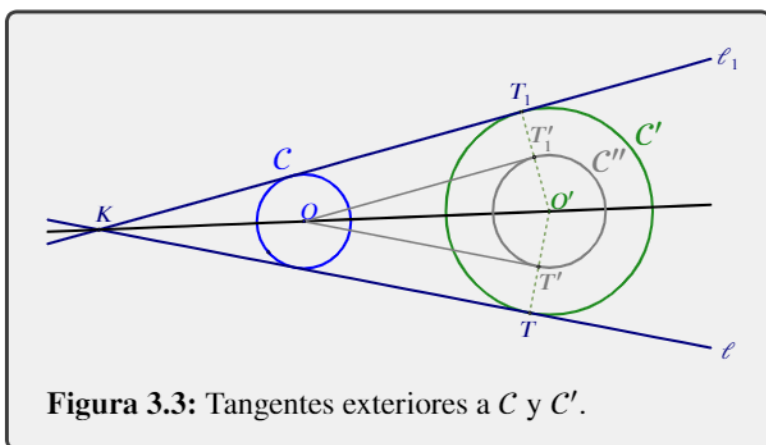
Sean C y C' dos circunferencias con centros O , O' y radios r y r' respectivamente, con $r < r'$. Trazar las rectas tangentes exteriores a dos circunferencias distintas C y C' .

Para resolver el presente problema, se supondrá que C no está contenida en el interior de C' , y que la distancia entre O y O' es mayor que $r' - r$, finalmente se aplicará la construcción dada en el problema (3.1.1), página 106.

1. Se traza la circunferencia C'' con centro en O' y radio $r' - r$.

Apolonio

2. Se aplica la construcción de las tangentes a una circunferencia C'' por el punto exterior O , dada en la solución del problema (3.1.1) para obtener las rectas tangentes OT' y OT'_1 a la circunferencia dada por el punto dado.
3. Sean $T = O'T' \cap C'$ y $T_1 = O'T'_1 \cap C'$.
4. Se trazan las rectas ℓ y ℓ_1 tales que $\ell \parallel OT'$ y $\ell_1 \parallel OT'_1$ con $T \in \ell$ y $T_1 \in \ell_1$ respectivamente.
5. Sea $K = \ell \cap \ell_1$.
6. Las rectas $\ell = KT$ y $\ell_1 = KT_1$ son simultáneamente tangentes a las circunferencias C y C' . Véase la figura (3.3)



Como $KT_1 \parallel OT'_1$ y $\angle OT'_1O' = 1$ ángulo recto, la recta KT_1 es perpendicular al radio $O'T_1$ de la circunferencia C' y, por ende, $\ell_1 = KT_1$ es tangente a C' , de manera análoga se demuestra que $\ell = KT$ es tangente a C' .

Como la distancia de O a la recta $\ell_1 = KT_1$ es igual a la distancia de T'_1 a la recta ℓ_1 y, por construcción, ésta es igual al radio de la circunferencia C , entonces $\ell_1 = KT_1$ también es tangente a C y, de manera análoga se demuestra que $\ell = KT$ es tangente a C .

Por lo tanto, $\ell = KT$ y $\ell_1 = KT_1$ son tangentes simultáneamente a las circunferencias C y C' . **Q.E.D.**

Problema 3.1.4: Tangentes interiores

Sean C y C' dos circunferencias con centros O, O' ; radios r y r' respectivamente, con $r < r'$. Trazar las rectas tangentes interiores a dos circunferencias distintas C y C' .

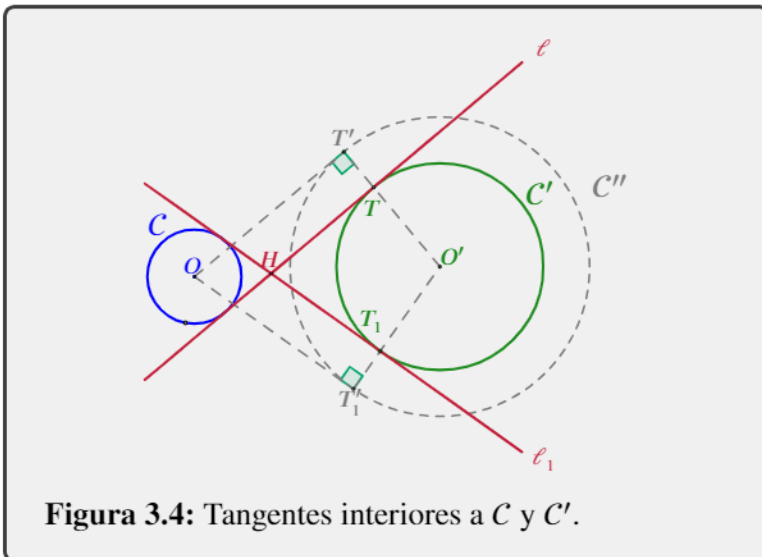
Si C y C' se cortan en un único punto H , la recta ℓ , perpendicular al segmento OO' , es simultáneamente tangente a las circunferencias dadas.

Para resolver el presente problema, se supondrá que C y C' no se intersectan, es decir, la distancia entre los centros O y O' es mayor que la suma de los radios. Finalmente se aplicará la construcción dada en el problema (3.1.1), página 106).

1. Trazar la circunferencia C'' con centro en O' y radio $r' + r$.

Apolonio

2. Aplicar la construcción dada en (3.1.1) para obtener las rectas tangentes OT' y OT_1' a la circunferencia C'' por el punto O .
3. Sea $T = O'T' \cap C''$ y $T' = O'T_1' \cap C''$.
4. Trazamos las rectas ℓ y ℓ_1 tales que $\ell \parallel OT$ y $\ell_1 \parallel OT_1$ con $T \in \ell$ y $T_1 \in \ell_1$.
5. Sea $H = \ell \cap \ell_1$. Entonces $\ell = HT$ y $\ell_1 = HT_1$ son tangentes a C y C' simultáneamente.



En el diagrama (3.4) se puede apreciar la construcción de las rectas tangentes interiores a las dos circunferencias distintas C y C' .

Como $HT_1 \parallel OT'_1$ y $\angle OT'_1O' = 1$ ángulo recto, la recta HT_1 es perpendicular al radio $O'T_1$ de la circunferencia C' y, por ende, $\ell_1 = HT_1$ es tangente a C' , de manera análoga se demuestra que $\ell = HT$ es tangente a C .

Como la distancia de O a la recta $\ell_1 = HT_1$ es igual a la distancia de T'_1 a la recta ℓ_1 y, por construcción, ésta es igual al radio de la circunferencia C , entonces $\ell_1 = HT_1$ también es tangente a C , de manera análoga se prueba que $\ell = HT$ es tangente a C .

Por lo tanto $\ell = HT$ y $\ell_1 = HT_1$ son tangentes simultáneamente a las circunferencias C y C' . **Q.E.D.**

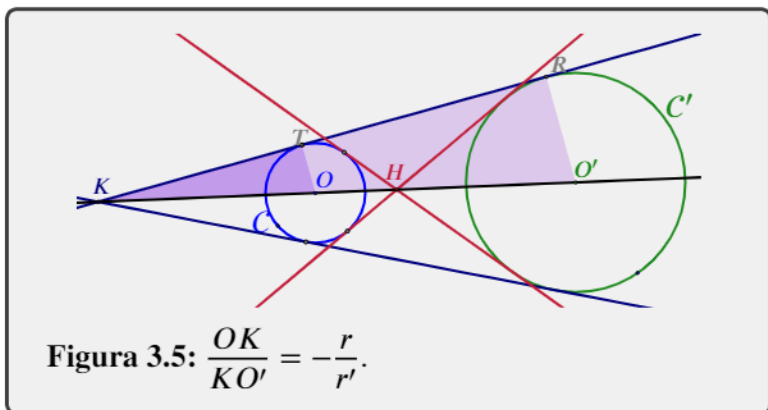
En este momento cabe preguntarse: ¿Cómo se relacionan los puntos H y K ?

Teorema 3.1.1:

Sean C y C' dos circunferencias no concéntricas, y supongamos que admiten tangentes interiores y exteriores. Si H es el punto donde se intersecan las tangentes interiores y K el punto donde se intersecan las tangentes exteriores, entonces H y K dividen interna y externamente el segmento OO' en razón de sus radios, esto es:

$$OH : HO' = -OK : KO' = r : r'.$$

Demostración: Si la recta KT es una recta tangente externa a C y C' con $T \in C$, $R = C' \cap KT$, como consecuencia del teorema de semejanza (AAA) el triángulo $\triangle KOT$ es semejante al $\triangle KO'R$, como se muestra en la figura (3.5).



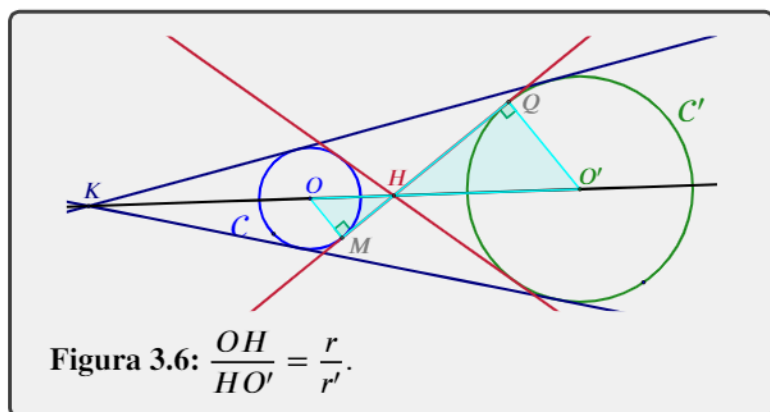
Por lo tanto

$$\frac{KO}{KO'} = \frac{OT}{OR} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \frac{OK}{KO'} = -\frac{r}{r'}.$$

Si la recta HM es una tangente interna a C y C' con $M \in C$, y $Q = C' \cap KM$, entonces los triángulos $\triangle OMH$ y $\triangle O'HQ$ son semejantes, véase la figura (3.6), de donde

$$\frac{OH}{HO'} = \frac{OM}{O'Q} = \frac{r}{r'}.$$

Luego entonces, $\frac{r}{r'} = \frac{OH}{HO'} = -\frac{OK}{KO'}$. **Q.E.D.**



3.2. Figuras homotéticas

En esta sección, estudiaremos qué son las homotecias así como algunas de sus propiedades.

Informalmente hablando, una homotecia es una transformación que hace que una figura aumente o disminuya su tamaño.

Cuánto aumenta o disminuye su tamaño es lo que llamaremos el factor de homotecia, este número puede ser tanto positivo como negativo.

Además, habrá un punto que se mantiene fijo mientras que la figura aumenta o disminuye su tamaño, dicho punto es el centro de homotecia.

Definición 3.2.1:

Sea O un punto fijo, y consideremos dos figuras planas con vértices $A_1, A_2, A_3, \dots$ y $A'_1, A'_2, A'_3, \dots$ respectivamente.

Para cada subíndice n , denótese OA_n el segmento de recta que une el punto A_n con el punto O y, de manera análoga, OA'_n es el segmento de recta que une el punto A'_n con O .

Si existe un número $k \in \mathbb{R}$ tal que, como segmentos orientados:

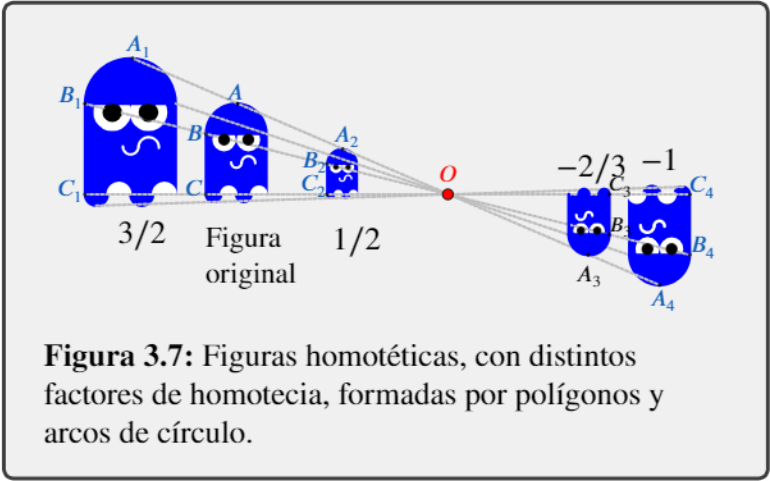
$$\frac{OA'_n}{OA_n} = k \quad \forall n$$

entonces, la figura formada por los puntos $A'_1, A'_2, A'_3, \dots$ es **semejante** a la figura formada por los puntos $A_1, A_2, A_3, \dots$, y está **semejantemente colocada**.

Definición 3.2.2:

Se dice que dos polígonos (figuras) son **directamente semejantes** o **inversamente semejantes** si las partes correspondientes están colocadas en el mismo orden o en orden inverso.

De los teoremas de semejanza se sabe que, cuando las figuras son triángulos, la igualdad de sus ángulos es consecuencia de la proporcionalidad de los lados y recíprocamente.



En la figura denominada original de la ilustración (3.7) se indican los puntos A , B y C , las imágenes de estos puntos bajo las razones, que aquí se muestran, quedan ilustrados en la siguiente tabla:

puntos \ factor	$3/2$	1	$1/2$	$-2/3$	-1
A	A_1	A	A_2	A_3	A_4
B	B_1	B	B_2	B_3	B_4
C	C_1	C	C_2	C_3	C_4

Definición 3.2.3:

Dos figuras semejantes colocadas semejantemente, se denominan figuras **homotéticas**. El punto O es su **centro de homotecia** y la constante k se llama su **razón de homotecia**.

La razón homotética de dos figuras homotéticas también se denomina la *razón de similitud*, su centro de homotecia es llamado *centro de similitud*.

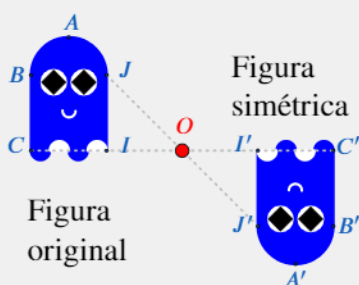


Figura 3.8: Simetría con respecto al punto O .

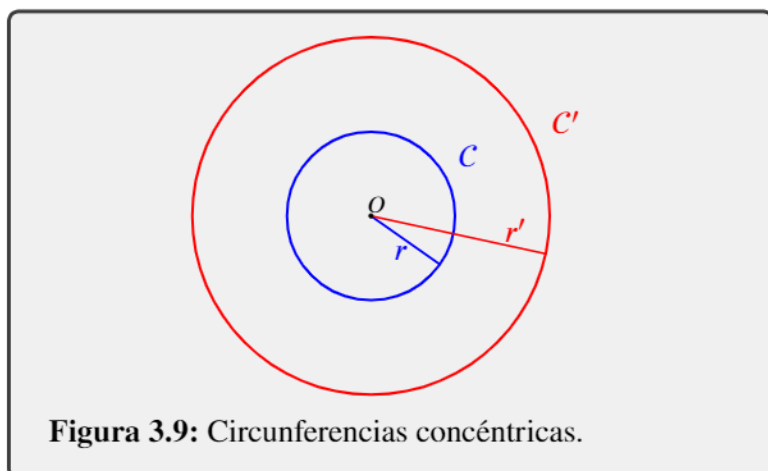
Definición 3.2.4:

Se dice que dos figuras son **simétricas** con respecto al punto O como **centro de simetría** si la razón de similitud es igual a -1 .

En la figura (3.8) se muestran dos figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$, donde $\mathcal{F}'$ es la imagen simétrica de $\mathcal{F}$ con respecto al punto O . En la figura original $\mathcal{F}$ se marcan algunos puntos, y sus puntos simétricos correspondientes en $\mathcal{F}'$. Desde luego, la figura simétrica de $\mathcal{F}'$ es $\mathcal{F}$.

3.3. Razón de homotecia para circunferencias

Si dos circunferencias son concéntricas, ellas son homotéticas, el centro de la circunferencia es el centro de homotecia, la razón de sus radios es la razón de homotecia.



En el ejemplo que se muestra en la figura (3.9) la circunferencia C es homotética a C' con centro de homotecia O y razón de homotecia r'/r , mientras que C' es homotética con C con razón de homotecia r/r' .

Circunferencias no concéntricas

Si C y C' son dos circunferencias no concéntricas, cabe preguntarse:

¿Serán C y C' homotéticas?

Si es así, ¿en dónde se encuentra el centro de homotecia?

¿Cuál es su razón de homotecia?

Para responder tal pregunta, se considerarán los siguientes casos:

1. El radio r de C es igual al radio r' de C' .
2. El radio r de C es diferente del radio r' de C' . Para este caso bastará suponer que $r < r'$, ya que el caso $r > r'$ se trabaja de manera análoga.

Primer caso: Si $r = r'$, el punto medio M del segmento OO' es el centro de homotecia con razón de homotecia igual a -1 , es decir, C y C' son simétricas con respecto al punto M . Véase la figura(3.10).

Segundo caso: Si $r < r'$ y C y C' tienen centros distintos O y O' respectivamente, como se muestra en la figura (3.11).

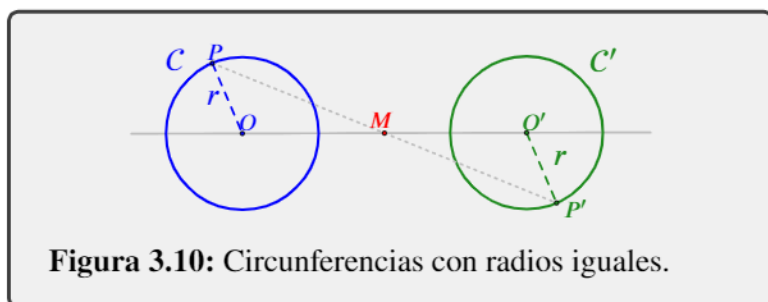


Figura 3.10: Circunferencias con radios iguales.

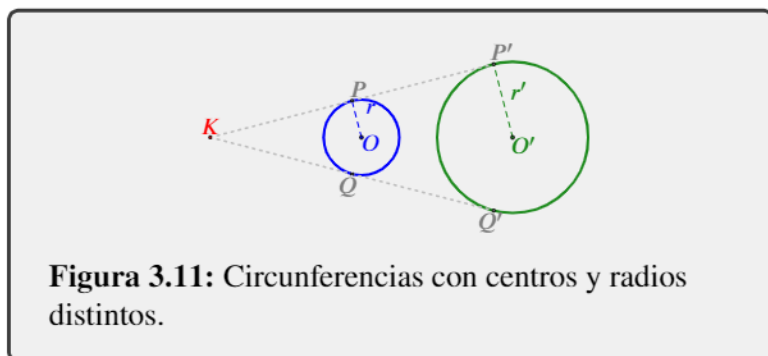


Figura 3.11: Circunferencias con centros y radios distintos.

Para resolver este problema aplicaremos lo estudiado en la sección 3.1, en donde se mostró cómo trazar las tangentes comunes, internas y externas a las circunferencias C y C' .

En la próxima sección se demostrará que los puntos en donde se intersecan las tangentes interiores y exteriores corresponden a los centros de homotecia de las circunferencias.

Además, como consecuencia del teorema (3.1.1) pág. 113

se tiene que los centros de homotecia dividen el segmento OO' interna y externamente en razón de los radios.

3.4. Circunferencias homotéticas

Dadas dos circunferencias C y C' con centros O , O' y radios r y r' respectivamente; supongamos que C y C' admiten tangentes internas y externas.

Supongamos que $r < r'$ y se construyen los pares de rectas tangentes a C y C' , estos pares de rectas tangentes cortarán a la recta OO' en el par de puntos H y K que, como se demostró en el teorema (3.1.1), pág. 113, dividen interna y externamente al segmento OO' .

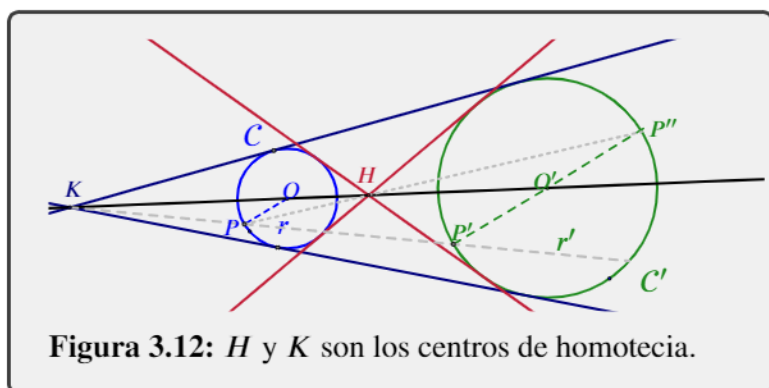
Se demostrará que, en general, C' es homotética a C en dos formas distintas, el punto interior H será centro de homotecia con razón de homotecia $-r'/r$, mientras que el punto exterior K será centro de homotecia con razón de homotecia r'/r . Véase la figura (3.12).

Si las circunferencias C y C' se intersecan en dos puntos, no hay tangentes comunes que pasen por el punto interior H .

Corolario 3.4.1: del teorema (3.1.1)

Si dos circunferencias tienen tangentes externas comunes, estas tangentes pasan por uno de sus centros de homotecia, y si tienen tangentes internas, éstas pasan por el otro centro de homotecia.

Nota: Si una circunferencia está contenida propiamente en el círculo determinado por la otra, no existen tangentes internas ni externas comunes.



Demostración: Si $P \in C$ y $P', P'' \in C'$ son los puntos que se obtienen al trazar las rectas KP , HP e intersecarlas con C' , entonces

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{OP}{OP''} = \frac{r}{r'}.$$

Como consecuencia del teorema (3.1.1), pág. 113,

$$\frac{OH}{HO'} = \frac{r}{r'} = -\frac{OK}{KO'}.$$

Como consecuencia de la definición (3.2.1), pág. 115 la circunferencia C' es homotética a la circunferencia C con centros de homotecia H y K . **Q.E.D.**

3.5. Puntos homólogos

Definición 3.5.1:

Si una recta que pasa por un centro de similitud de dos circunferencias no concéntricas interseca a una de ellas en dos puntos distintos, intersectará también a la otra en dos puntos distintos.

Estos cuatro puntos de intersección son homotéticos en pares, y los dos puntos de cada par son llamados **puntos homólogos**.

Si se aparean de forma tal que cada par contenga un punto en cada circunferencia y no sean homotéticos, los puntos de estos pares se denominan **puntos anti-homólogos** con respecto al centro de similitud que está en la recta que pasa por estos puntos.

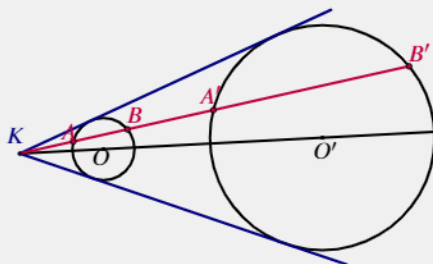
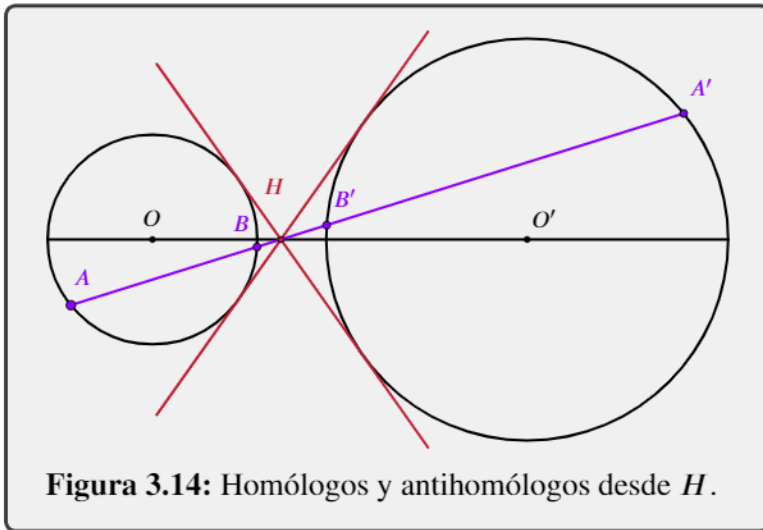


Figura 3.13: Homólogos y antihomólogos desde K .

Apolonio

En la figura (3.13), A, A' y B, B' son pares de puntos homólogos, mientras que A, B' y A', B son pares de puntos antihomólogos con centro de homotecia K .



En la figura (3.14), A, A' y B, B' son pares de puntos homólogos, mientras que A, B' y A', B son pares de puntos antihomólogos con centro de homotecia H .

Teorema 3.5.1:

Sean A, A', B, B', C, C' y D, D' pares de puntos homólogos con centro de homotecia a K , con A, B, A', B' y C, D, C', D' colineales, como se muestra en la figura (3.15):

Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

1. La recta $B'D'$ es paralela a la recta BD con respecto a la recta OO' , además los triángulos $\triangle KD'B'$ y $\triangle KDB$ son directamente similares.
2. El par de rectas $\{A'C', BD\}$ es antiparalelo con respecto al par de rectas $\{A'B, C'D\}$.
3. Los triángulos $\triangle KC'A'$ y $\triangle KDB$ son inversamente semejantes.
4. El cuadrilátero $\square A'C'DB$ es cíclico.
5. Cada uno de los conjuntos de puntos A', C', D, B y A, C, D', B' es concíclico.
6. El producto de los segmentos KA y KB' es constante.
7. Tangentes a las circunferencias en A' y B forman ángulos iguales con la recta $A'B$. Si estas tangentes se intersectan en el punto E , entonces el triángulo $\triangle EA'B$ es isósceles.

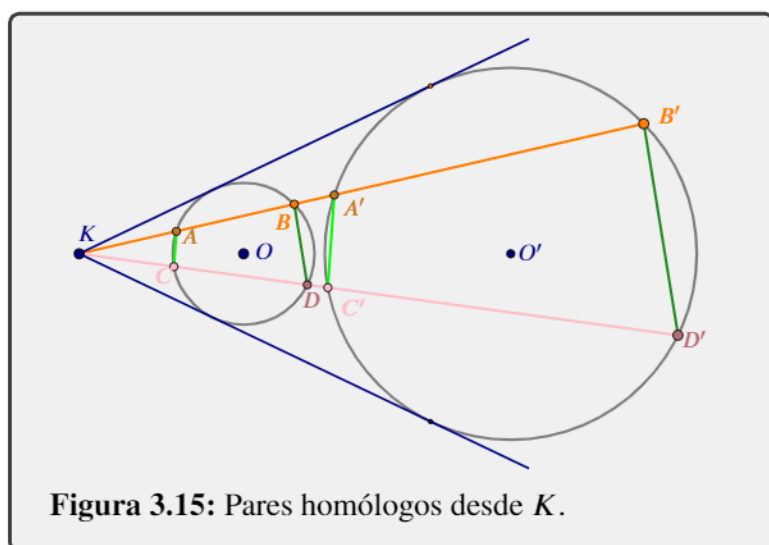


Figura 3.15: Pares homólogos desde K .

Demostración: (1) Como K es el centro de homotecia exterior de C y C' en particular,

$$\frac{KD}{KD'} = \frac{KB}{KB'} = \frac{r}{r'} \text{ y } \angle DKB = \angle D'KB'.$$

De donde los triángulos $\triangle KDB$ y $\triangle KD'B'$ son directamente similares, en particular $\angle BDK = \angle B'D'K$, y como KD' es una transversal a las rectas BD y $B'D'$, se concluye que $B'D'$ es paralela a BD .

De manera análoga se obtiene que $\triangle KCA \sim \triangle KC'A'$ y $AC \parallel A'C'$.

(2) Como los cuadriláteros $\square ACDB$ y $\square AC'D'B'$ son cíclicos convexos, como consecuencia del teorema (2.3.6), pág. 75, se tiene que $AC \parallel_{OO'} BD$ y $A'C' \parallel_{OO'} B'D'$.

Y ya que $BD \parallel B'D'$ entonces, $A'C' \parallel_{OO'} BD$.

Como consecuencia de la definición de antiparalelo se concluye que $\{A'C', BD\} \parallel \{A'B, C'D\}$.

(3) Ya que $\{A'C', BD\} \parallel \{A'B, C'D\}$, en particular

$$\angle KBD = \angle A'C'K.$$

Y, como K, B, A' y K, D, C' son conjuntos de puntos colineales, $\angle DKB = \angle C'KA'$.

Por lo tanto, los triángulos $\triangle KC'A' \sim \triangle KDB$; por definición, son inversamente semejantes

(4) Como consecuencia del inciso (2) y el teorema (2.3.5), pág. 73, se sigue que los cuadriláteros $\square BDC'A'$ y $\square ACD'B'$ son cíclicos convexos, como se aprecia en la figura (3.16).

Consecuentemente, los conjuntos de puntos A', C', D, B y A, C, D', B' son concíclicos, con lo cual queda demostrado el inciso (6).

(5) Como los triángulos $\triangle KC'A'$ y $\triangle KDB$ son inversamente semejantes, los lados correspondientes son proporcionales, luego entonces,

$$\frac{KA'}{KC'} = \frac{KD}{KB}.$$

Lo cual implica que $KA' \cdot KB = KC' \cdot KD$, es decir, el producto de los segmentos KA' y KB es constante.

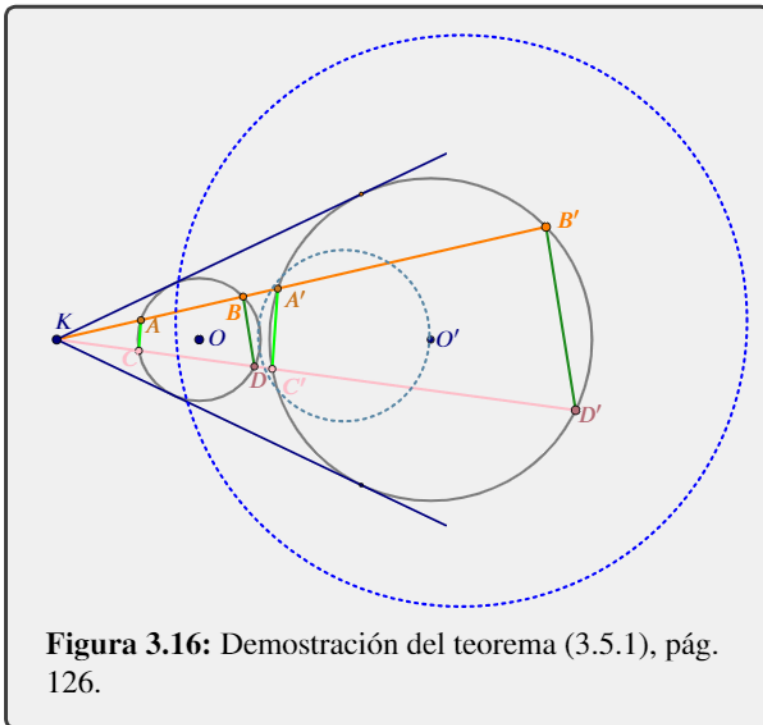


Figura 3.16: Demostración del teorema (3.5.1), pág. 126.

(7) Sean BF , AG las rectas tangentes a C , C' en B y A' respectivamente.

Si el punto B pertenece a la recta OO' , entonces $A' \in OO'$ y las tangentes a C y C' son perpendiculares a la recta OO' , por lo que las tangentes a las circunferencias en B y A' forman ángulos iguales con respecto a la recta $BA' = OO'$.

Supongamos ahora que el punto B no pertenece a la recta

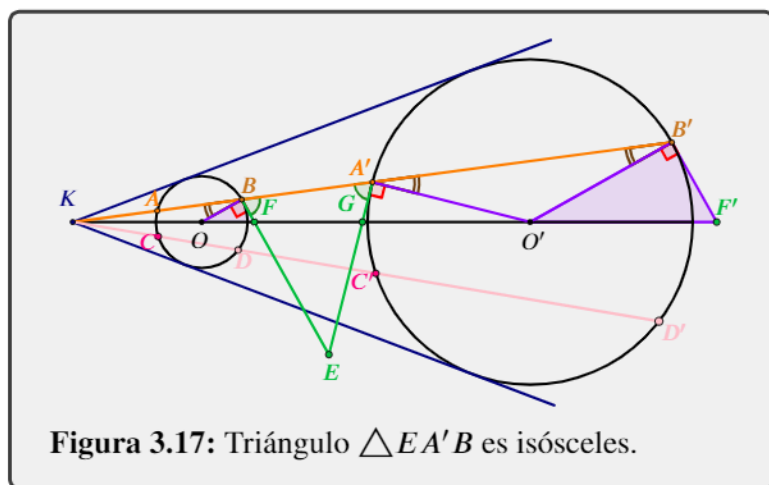


Figura 3.17: Triángulo $\triangle EA'B$ es isósceles.

OO' y que F y G pertenecen a la recta OO' .

Entonces, el triángulo $\triangle OFB$ es un triángulo rectángulo con $\angle OFB = 1$ ángulo recto, y sea F' el punto homólogo de F con respecto al punto K .

Luego entonces, el triángulo $\triangle O'F'B'$ es directamente similar al triángulo $\triangle OFB$ con $\angle O'B'F' = 1$ recto y, $O'B'$ un radio de C' .

Como K, A, B, A' y B' son colineales, entonces $\angle KBO = \angle KB'O'$.

Como $A'O'$ también es radio de C' , entonces $A'O' = B'O'$, y el triángulo $\triangle A'O'B'$ es isósceles, en particular

$$\angle O'A'B' = \angle A'B'O'.$$

Apolonio

Luego entonces

$$\begin{aligned}
 \angle FBA &= 2\angle\text{'s rectos} - \angle ABF \\
 &= 2\angle\text{'s rectos} - (\angle ABO + \angle OBF) \\
 &= 2\angle\text{'s rectos} - (\angle A'B'O' + \angle O'B'F') \\
 &= 2\angle\text{'s rectos} - (\angle O'A'B' + \angle GA'O') \\
 &= \angle BA'G.
 \end{aligned}$$

Si E denota el punto de intersección de las rectas tangentes BF y $A'G$ en particular $\triangle BEA'$ es isósceles y $BE = A'E$. Q.E.D.

3.6. Circunferencia de similitud

Definición 3.6.1:

Sean C y C' dos circunferencias no concéntricas con centros O y O' respectivamente. Se define la **circunferencia de similitud** de C y C' como la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une sus centros de similitud.

Los puntos P en la circunferencia de similitud satisfacen que las razones de sus distancias a los centros de las circunferencias C y C' permanecen constantes y coinciden con las razones entre los radios de C y C' .

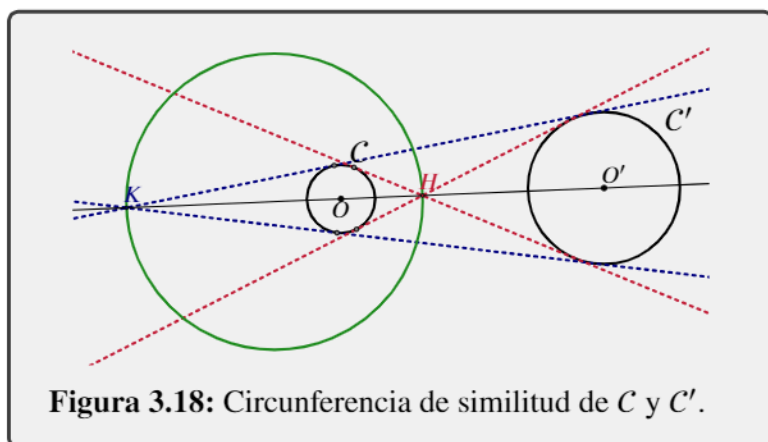


Figura 3.18: Circunferencia de similitud de C y C' .

Teorema 3.6.1: de la circunferencia de similitud.

La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas C y C' es el lugar geométrico de los puntos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Las razones de sus distancias a los centros de las circunferencias son iguales a las razones entre los radios.
2. Desde los cuales las dos circunferencias subtenden ángulos iguales.

Hipótesis: Sean C y C' dos circunferencias no concéntricas de radios r y r' respectivamente, y sea C'' su circun-

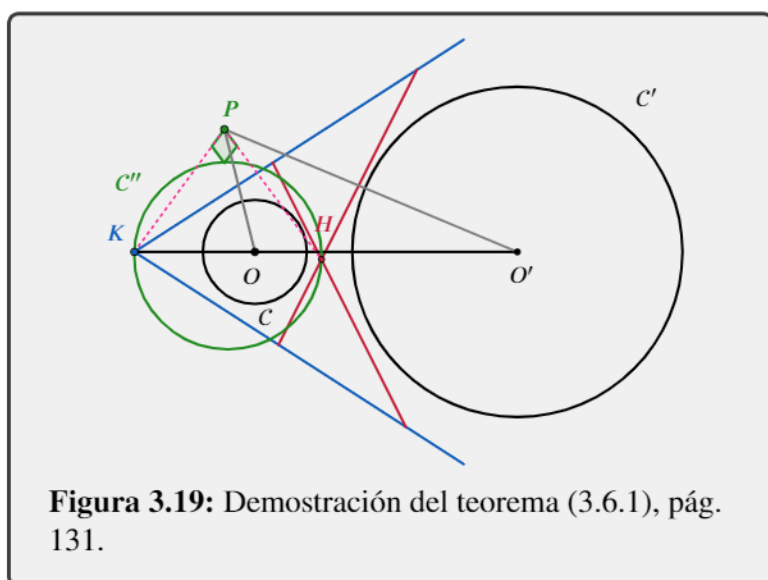
ferencia de similitud, donde H y K denotan los centros de similitud interno y externo respectivamente.

Tesis: Si $P \in C''$ entonces $PO : PO' = r : r'$ y $\angle OPH = \angle HPO'$.

Demostración: Sea P un punto tal que $PO : PO' = r : r'$.

Como $OH : HO' = r : r'$ se sigue que PH es la bisectriz interior del ángulo $\angle OPO'$ y PK es la bisectriz exterior del ángulo $\angle OPO'$.

Por tanto, $PH \perp PK$, y $P \in C''$.



Apolonio

Además, si $P \in C''$, sea $O'' \in OO'$ tal que PH biseque el ángulo $\angle O'PO''$.

Como $PH \perp PK$ y se bisecan los ángulos interior y exterior en P del triángulo $\triangle O''PO'$, entonces:

$$O''H : HO' = -O''K : KO' \text{ y } OH : HO' = -OK : KO',$$

de donde

$$HO'' : O''K = HO : OK.$$

Así, el segmento $O''O$ también está dividido interna y externamente por H y K , por lo que $O'' = O$.

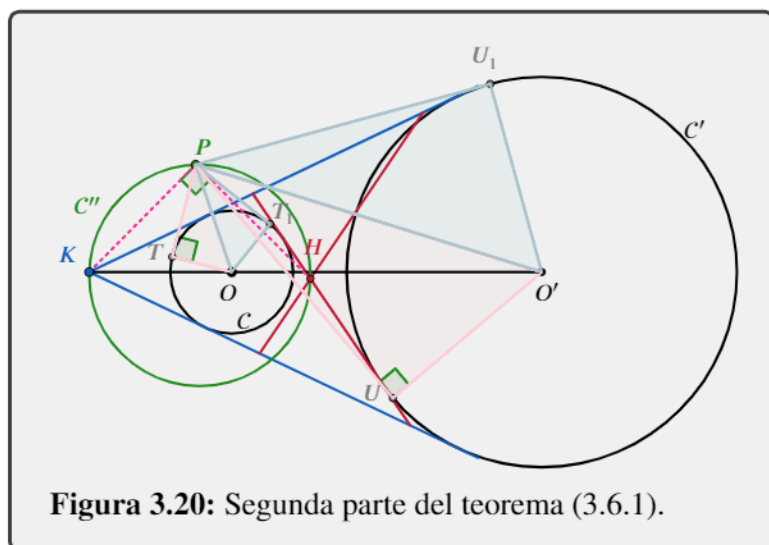
Por tanto $PO : PO' = r : r'$.

Si desde el punto P se trazan tangentes PT , PT_1 a la circunferencia C y PU , PU_1 a la circunferencia C' , si además en cada circunferencia el punto de tangencia es unido al centro de la circunferencia correspondiente, como consecuencia de los teoremas de semejanza de se obtienen triángulos rectángulos similares:

$$\triangle OPT_1 \equiv \triangle OPT \sim \triangle O'PU \equiv \triangle O'PU_1.$$

En particular, $\angle OPT = \angle O'PU$ con lo que se obtiene la segunda parte del teorema. Véase la figura (3.20)

Si dos circunferencias tienen el mismo radio, su circunferencia de similitud degenera en la mediatriz del segmento que une sus centros y la recta al infinito. **Q.E.D.**



3.7. La circunferencia de Apolonio

Teorema 3.7.1: de Apolonio.

Sean OO' un segmento fijo, y $k > 0$ un número real, $k \neq 1$. El lugar geométrico de los puntos P que satisfacen $PO : PO' = k$ es una circunferencia de diámetro HK , donde H y K son los puntos de la recta OO' que verifican $HO : HO' = k = KO : KO'$, uno punto es interior y el otro exterior al segmento OO' .

Definición 3.7.1:

La circunferencia dada por el teorema de Apolonio (3.7.1), pág. 134 se denomina la **circunferencia de Apolonio**, y el círculo correspondiente es el círculo de Apolonio.

Hipótesis: Sean O y O' los puntos fijos, sea P un punto tal que las razones de sus distancias a O y O' es $k = r : r' \neq 1$.

Tesis: El lugar geométrico de los puntos P tales que

$$PO : PO' = k$$

es una circunferencia.

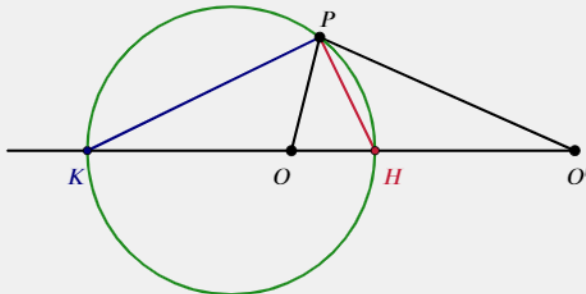


Figura 3.21: Circunferencia de Apolonio $\odot KHP$.

Demostración: Si P es un punto tal que $PO : O'P = k$, consideremos la bisectriz interior PH y la bisectriz exterior PK del ángulo $\angle OPO'$, con $H, K \in OO'$.

Como las bisectrices interior y exterior de un ángulo $\angle OPO'$ son perpendiculares, entonces el ángulo $\angle HPK = 1$ recto. Luego entonces, P es un punto en la circunferencia de diámetro HK . Véase la figura (3.21).

Aplicando el teorema de la circunferencia de similitud (3.6.1) pág. 131, si P está en la circunferencia de diámetro HK entonces $PO : O'P = k$. **Q.E.D..**

Teorema 3.7.2:

El lugar geométrico de los puntos cuyas razones de distancias a dos puntos fijos distintos es igual a 1 es una recta, a saber, la mediatriz del segmento dado.

Demostración: Como consecuencia del teorema de la mediatriz, todo punto que se encuentre sobre la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del segmento. **Q.E.D.**

3.8. Ejercicios

1. Muestre que es posible construir un triángulo dada su base, su altura y la razón de sus otros lados.
2. Demuestre que, si una circunferencia es tangente a dos circunferencias no concéntricas, entonces los puntos de tangencia son antihomólogos.

Apolonio

3. Demuestre que la circunferencia de similitud de dos circunferencias que se intersecan pasa por los puntos de intersección.
4. Si dos circunferencias se intersecan, demuestre que las rectas que van del punto de intersección a los centros de similitud bisecan los ángulos formados por los radios trazados a ese punto.
5. Demuestre que, cada circunferencia de Apolonio asociada a un triángulo, es ortogonal con la circunferencia circunscrita del triángulo dado.
6. Dada una circunferencia C y un punto P en su interior, demuestre que el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un punto P es una circunferencia.

Analice el caso cuando el punto se encuentra fuera de la circunferencia.

7. Dados dos segmentos consecutivos AB y BC sobre una misma recta, determine el lugar geométrico de los puntos P tales que $\angle APB = \angle BPC$
8. Dados tres puntos A, B, C y un ángulo α , explique cómo se puede construir una circunferencia que pase por los puntos A y B y tal que el ángulo entre las tangentes trazadas desde el punto C a la circunferencia sea igual al ángulo dado α .

Apolonio

9. Demuestre que las tres circunferencias de Apolonio de un triángulo concurren en dos puntos.
10. Construya, si es posible, un cuadrado dada la suma de sus lados y su diagonal.
11. Construya, si es posible, un triángulo semejante a un triángulo dado y cuya área sea igual a la de un cuadrado dado.
12. Sea C una circunferencia dada, demuestre que es posible circunscribir un triángulo isósceles en el que la razón entre un lado y la base sea un valor dado. Recuerde que, en un triángulo isósceles, se denomina base del triángulo al lado desigual.
13. Construya un triángulo rectángulo dado el perímetro y la razón de los cuadrados de los dos catetos.
14. Construya un paralelogramo dadas la razón de un lado con respecto a las diagonales, y el área del paralelogramo.
15. En una circunferencia dada, inscriba un triángulo isósceles dada la suma de su base y su altura.
16. Por un punto dado, muestre que es posible trazar una línea recta de modo que el segmento intersecado en él por los lados de un ángulo dado se divida por el punto dado en una proporción dada.

Apolonio

17. Si dos triángulos son homotéticos, demuestre que sus circuncentros, incentros y centros de gravedad, son puntos homólogos.
18. Si dos triángulos son homotéticos, demuestre que las alturas, las medianas, las mediatrices, y las bisectrices son rectas homólogas en las dos figuras homotéticas.
19. En un triángulo dado, inscriba un cuadrado.
20. En un semicírculo, inscriba un rectángulo semejante a un rectángulo dado.

Teoremas de Configuración

Un teorema de configuración es un teorema que se refiere a un número finito de puntos y rectas, y a sus relaciones de incidencia. Por lo general, un teorema de configuración establece que, como consecuencia de que varios puntos se encuentran sobre una misma recta o de que varias rectas pasen por un solo punto, habrá otros determinados puntos que han de estar situados sobre la recta o habrá algunas otras rectas que pasen por un punto en común.

Iniciaremos el capítulo con el estudio de los teoremas de configuración de Menelao y Ceva, estos teoremas permitirán resolver el problema de la división interna y externa planteado en el capítulo 1 §1.4.

También se introducirá el concepto de perspectiva lineal y, aplicando el teorema de Menelao, se demostrará el teorema de Desargues, que en el caso de triángulos, determina que es equivalente estudiar la perspectiva desde un punto que desde

Teoremas de Configuración

una recta.

Asimismo, se aplicará el teorema de Ceva para demostrar que las bisectrices, las mediatrices, las medianas y las alturas de un triángulo concurren, así como algunas de sus consecuencias.

4.1. Los teoremas de Menelao y Ceva

Entre los resultados más simples de la geometría se encuentran los teoremas de configuración. Estos teoremas estudian las relaciones entre un número finito de puntos y de rectas.

En general, un teorema de configuración se formula de tal modo que si algunos puntos son colineales, o bien, algunas rectas son concurrentes, entonces otra serie de puntos son colineales, o bien, las rectas son concurrentes.

Los teoremas de Menelao y Ceva son potentes herramientas que permiten tratar diversos problemas en los que intervienen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas.

Ambos teoremas están estrechamente relacionados, aunque el teorema de Menelao es del siglo I, mientras que el de Ceva del siglo XVII, ambos consisten principalmente en relacionar la colinealidad de tres puntos o la concurrencia de tres rectas con ciertas medidas que forman un triángulo. Lo relevante es que sus demostraciones son sencillas.

Definición 4.1.1:

Un punto que esté en la recta que determina un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice, se llama **punto de Menelao** del triángulo para dicho lado.

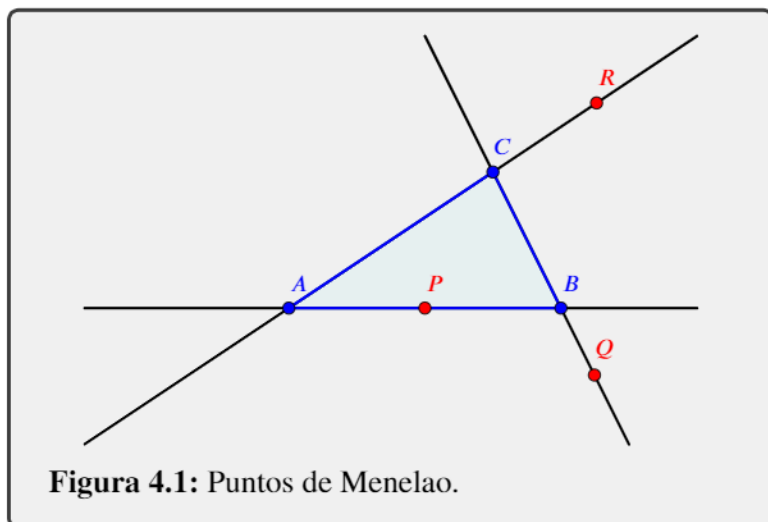


Figura 4.1: Puntos de Menelao.

En la figura (4.1) los puntos P , Q y R son puntos de Menelao para el triángulo $\triangle ABC$.

Nótese que el punto puede estar en el interior, o bien, en el exterior de los segmentos que determinan los lados.

Definición 4.1.2:

Una recta que pasa por un vértice de un triángulo, pero no coincide con ningún lado, se denomina una **recta ceviana** del triángulo.

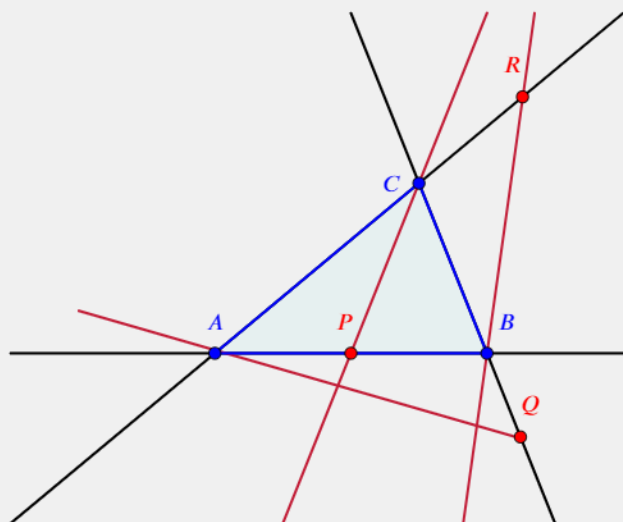


Figura 4.2: Rectas cevianas.

En la figura (4.2) las rectas AQ , BR y CP son ejemplos de rectas cevianas.

El teorema de Menelao

Teorema 4.1.1: de Menelao.

Si una recta interseca los tres lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos L , M y N respectivamente, entonces:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1. \quad (4.1)$$

Y recíprocamente, si L , M y N son tres puntos en los lados BC , CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$ para los cuales se cumple la relación anterior, entonces los tres puntos son colineales.

El -1 que aparece en la fórmula anterior nos dice que hay 1 o 3 puntos fuera de los segmentos AB , BC y CA .

Ya que este es un enunciado bicondicional, primeramente se supondrá que la colinealidad de los puntos L , M y N implican que se satisface la ecuación (4.1).

Hipótesis: Sea ℓ la recta que corta los tres lados BC , CA y AB en los puntos L , M y N .

Tesis: Se satisface la siguiente relación:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Demostración: Sean P , Q y R los pies de las perpendiculares desde A , B y C sobre la recta ℓ .

Teoremas de Configuración

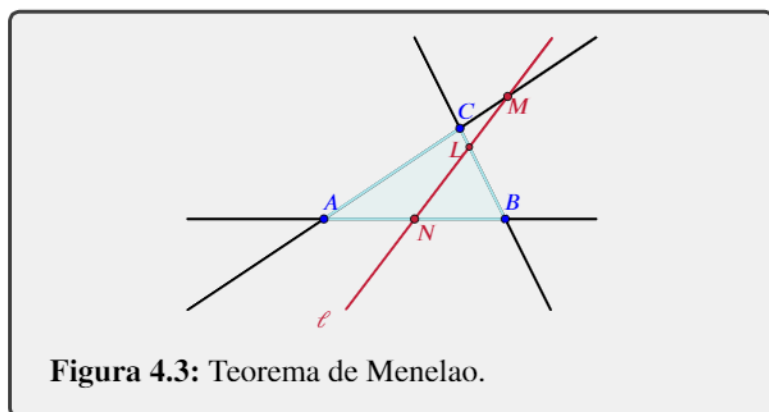


Figura 4.3: Teorema de Menelao.

Como $\angle ANP = \angle BNQ$ por ser opuestos por el vértice y, $\angle NPA = \angle NQB = 1$ ángulo recto entonces, $\triangle APN \sim \triangle NBQ$.

De manera similar, es fácil ver que $\triangle QBL \sim \triangle LRC$.

Y como $\angle MPA = \angle MRC = 1$ recto y $\angle PMA = \angle RMC$ por ser ángulo común, se sigue que los triángulos $\triangle APM$ y $\triangle CRM$ son semejantes. De donde, los lados correspondientes de estos triángulos rectángulos son proporcionales, en particular:

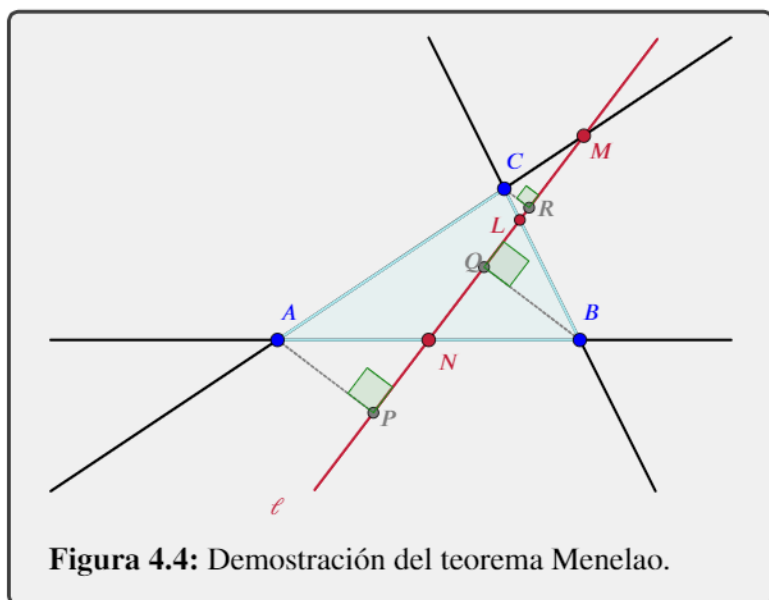
$$AN : NB = PA : BQ \quad (4.2)$$

$$BL : LC = QB : CR \quad (4.3)$$

$$CM : MA = RC : AP \quad (4.4)$$

Multiplicando las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4) se obtie-

Teoremas de Configuración



ne:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{PA}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \frac{RC}{AP},$$

Como $QB = -BQ$, $RC = -CR$ y $PA = -AP$, al simplificar el lado derecho de la expresión anterior se reduce a -1 , de donde

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1.$$

Recíprocamente:

Teoremas de Configuración

Hipótesis: Sean L , M y N tres puntos en los lados BC , CA y AB de un triángulo $\triangle ABC$ para los cuales se cumple la relación:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1,$$

Tesis: Los puntos L , M y N son colineales.

Supongamos que las rectas AB y LM se intersectan en un punto N' .

Como consecuencia de la parte directa del teorema de Menelao se cumple

$$\frac{AN'}{N'B} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1,$$

y por hipótesis

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1,$$

Al igualar las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB}.$$

Puesto que, tanto N como N' están sobre la recta AB , y la dividen en la misma razón, se deduce que $N = N'$.

Por lo tanto, la recta que pasa por L y M también pasa por N , es decir, L , M y N son puntos colineales. **Q.E.D.**

Teorema 4.1.2: forma trigonométrica de Menelao.

Si ℓ es una recta que corta los tres lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ en los puntos L , M y N respectivamente, entonces

$$\frac{\text{sen } \angle ACN}{\text{sen } \angle NCB} \cdot \frac{\text{sen } \angle BAL}{\text{sen } \angle LAC} \cdot \frac{\text{sen } \angle CBM}{\text{sen } \angle MBA} = -1. \quad (4.5)$$

Recíprocamente, si L , M y N son puntos respectivamente en los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$, para los cuales se satisface la relación anterior (4.5), entonces L , M y N son colineales.

Demostración: Supongamos que L está en el segmento BC , N en el segmento AB y M fuera del segmento AC . Los otros casos se trabajan de manera similar.

Aplicando la ley de los senos al triángulo $\triangle ANC$

$$\frac{\text{sen } \angle ACN}{AN} = \frac{\text{sen } \angle NAC}{NC} = \frac{\text{sen } \angle CNA}{CA}.$$

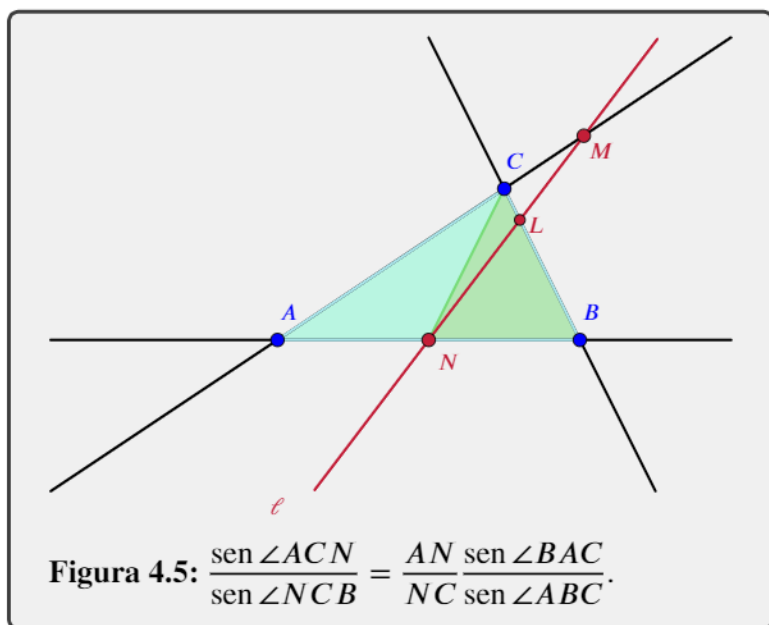
y como $\angle NAC = \angle BAC$, entonces

$$\frac{\text{sen } \angle NAC}{NC} = \frac{\text{sen } \angle BAC}{NC}.$$

Para el triángulo $\triangle NBC$ se procede de manera análoga, véase la figura (4.5), obteniéndose

$$\frac{\text{sen } \angle NBC}{NC} = \frac{\text{sen } \angle BCN}{BN} = \frac{\text{sen } \angle CNB}{CB}.$$

Teoremas de Configuración



y como $\angle NBC = \angle ABC$ entonces,

$$\frac{\text{sen } \angle NCB}{NB} = \frac{\text{sen } \angle NBC}{NC} = \frac{\text{sen } \angle ABC}{NC}.$$

Luego entonces

$$\frac{\text{sen } \angle ACN}{AN} = \frac{\text{sen } \angle BAC}{NC} \text{ y } \frac{\text{sen } \angle NCB}{NB} = \frac{\text{sen } \angle ABC}{NC}.$$

De donde

Teoremas de Configuración

$$\frac{\text{sen } \angle ACN}{\text{sen } \angle NCB} = \frac{AN}{NC} \frac{\text{sen } \angle BAC}{\text{sen } \angle ABC}. \quad (4.6)$$

Con los triángulos $\triangle LCA$ y $\triangle BLA$ se procede de manera análoga, así

$$\frac{\text{sen } \angle BAL}{\text{sen } \angle LAC} = \frac{BL}{LC} \frac{\text{sen } \angle ABC}{\text{sen } \angle ACB}. \quad (4.7)$$

Finalmente, si se consideran los triángulos $\triangle CBM$ y $\triangle ABM$ se obtiene

$$\frac{\text{sen } \angle CBM}{\text{sen } \angle MBA} = \frac{CM}{MA} \cdot \frac{\text{sen } \angle BCM}{\text{sen } \angle BAC}.$$

Por hipótesis, M está fuera del segmento AC , y como $\angle ACB$ y $\angle BCM$ son suplementarios, entonces $\text{sen } \angle ACB = \text{sen } \angle BCM$, de donde

$$\frac{\text{sen } \angle CBM}{\text{sen } \angle MBA} = \frac{CM}{MA} \cdot \frac{\text{sen } \angle ACB}{\text{sen } \angle BAC}. \quad (4.8)$$

Multiplicando las ecuaciones (4.6), (4.7) y (4.8), como consecuencia del teorema de Menelao (4.1.1) pág. 144 se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\text{sen } \angle ACN}{\text{sen } \angle NCB} \cdot \frac{\text{sen } \angle BAL}{\text{sen } \angle LAC} \cdot \frac{\text{sen } \angle CBM}{\text{sen } \angle MBA} \\ &= \left(\frac{AN}{NC} \frac{\text{sen } \angle BAC}{\text{sen } \angle ABC} \right) \left(-\frac{BL}{LC} \frac{\text{sen } \angle CBA}{\text{sen } \angle ACB} \right) \left(\frac{CM}{MA} \frac{\text{sen } \angle ACB}{\text{sen } \angle BAC} \right) \\ &= \frac{AN}{NC} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Teoremas de Configuración

Recíprocamente, supongamos que las rectas AB y LM se intersectan en un punto N' .

Como consecuencia de la parte directa de la versión trigonométrica del teorema de Menelao se cumple

$$\frac{\text{sen } ACN'}{\text{sen } N'CB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = -1.$$

y por hipótesis

$$\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = -1.$$

Al igualar las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} = \frac{\text{sen } ACN'}{\text{sen } N'CB}.$$

Pero tanto N como N' están sobre la recta AB y, como consecuencia del teorema de la bisectriz generalizado (1.4.2), pág. 21,

$$\frac{AN'}{N'B} = \frac{AN}{NB},$$

así, N y N' dividen al segmento AB en la misma razón, es decir, $N = N'$.

Por lo tanto, la recta que pasa por L y M también pasa por N , es decir, L , M y N son puntos colineales. **Q.E.D.**

El teorema de Ceva

Teorema 4.1.3: de Ceva.

Tres cevianas AL , BM y CN de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes en el punto O si, y solamente si,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \quad (4.9)$$

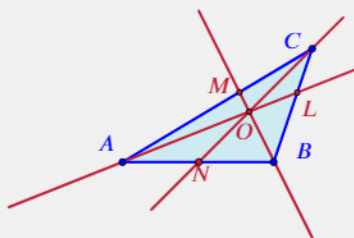


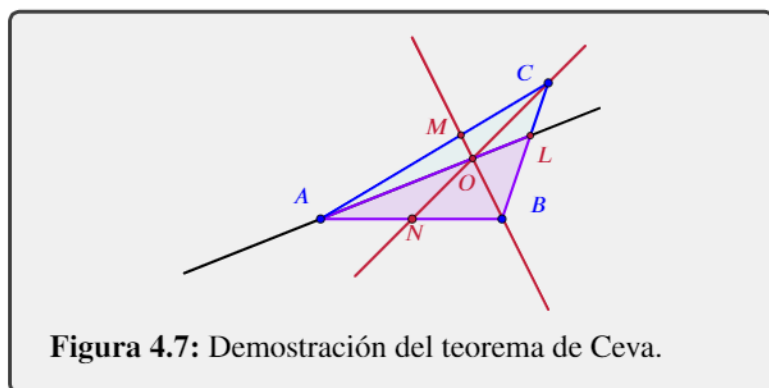
Figura 4.6: Teorema de Ceva.

Para la primera parte:

Hipótesis: Supongamos que tres cevianas AL , BM y CN de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes en el punto O .

Tesis: Se satisface la siguiente relación:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$



Si al triángulo $\triangle ABL$ y la recta CN se le aplica el teorema de Menelao (4.1.1), pág. 144, se obtiene

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LO}{OA} = -1. \quad (4.10)$$

De manera análoga, aplicando el teorema de Menelao al triángulo $\triangle ALC$ y la recta MB

$$\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{OL} \cdot \frac{LB}{BC} = -1. \quad (4.11)$$

Multiplicando las ecuaciones (4.10), (4.11) y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LO}{OA} \right) \left(\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{OL} \cdot \frac{LB}{BC} \right) \\ &= \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}. \end{aligned}$$

Teoremas de Configuración

Para el recíproco:

Hipótesis: Sean AL , BM y CN tres cevianas del triángulo $\triangle ABC$ y supongamos que ellas satisfacen la relación:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Tesis: Las rectas AL , BM y CN son concurrentes.

Demostración: Sea O el punto de intersección de las rectas BM y CN y sea L' el punto de intersección de la recta AO con BC .

Como consecuencia de la primera parte del teorema de Ceva

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Pero por hipótesis

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Luego entonces

$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC},$$

y como L y L' están en la recta BC y satisfacen la misma relación se sigue que $L = L'$.

Por lo tanto, la recta AL pasa por el punto O y las rectas AL , BM y CN son concurrentes. **Q.E.D.**

Teorema 4.1.4: forma trigonométrica de Ceva.

Si las hipótesis del teorema de Ceva se satisfacen, entonces

$$\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = 1.$$

Recíprocamente, si L , M y N son puntos de los lados BC , CA y AB , respectivamente, del triángulo $\triangle ABC$, para el cual se cumple la relación anterior, entonces las rectas AL , BM y CN son concurrentes.

Demostración: Aplicando la forma generalizada del teorema de la bisectriz al triángulo $\triangle ABC$ (1.4.2), pág. 21, se obtiene

- Con la recta CN :

$$\frac{AN}{NB} = \frac{CA \text{ sen } \angle ACN}{BC \text{ sen } \angle NCB}. \quad (4.12)$$

- Con la recta AL :

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB \text{ sen } \angle BAL}{CA \text{ sen } \angle LAC}. \quad (4.13)$$

- Con la recta BM :

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC \text{ sen } \angle CBM}{AB \text{ sen } \angle MBA}. \quad (4.14)$$

Teoremas de Configuración

Multiplcando las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) se obtiene de la versión anterior del teorema de Ceva (4.1.4), pág. 155.

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \\
 &= \left(\frac{CA \operatorname{sen} \angle ACN}{BC \operatorname{sen} \angle NCB} \right) \left(\frac{AB \operatorname{sen} \angle BAL}{CA \operatorname{sen} \angle LAC} \right) \left(\frac{BC \operatorname{sen} \angle CBM}{AB \operatorname{sen} \angle MBA} \right) \\
 &= \left(\frac{\operatorname{sen} \angle ACN}{\operatorname{sen} \angle NCB} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \angle BAL}{\operatorname{sen} \angle LAC} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \angle CBM}{\operatorname{sen} \angle MBA} \right).
 \end{aligned}$$

Observe que los pasos de esta demostración son reversibles, por lo que, si

$$\left(\frac{\operatorname{sen} \angle ACN}{\operatorname{sen} \angle NCB} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \angle BAL}{\operatorname{sen} \angle LAC} \right) \left(\frac{\operatorname{sen} \angle CBM}{\operatorname{sen} \angle MBA} \right) = 1,$$

entonces

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Lo cual implica, por el teorema (4.1.4), pág. 155, que las rectas AL , BM y CN son concurrentes. **Q.E.D.**

Los teoremas de Menelao y Ceva tienen varias aplicaciones relacionadas con problemas de concurrencia de rectas y colinealidad de puntos.

En particular, gracias a estos teoremas se logrará dar respuesta al problema que se planteó al inicio del curso: ¿Dado un segmento de recta AB y un punto P en su interior, existirá siempre un punto Q tales que P y Q dividan al segmento AB interna y externamente en la misma razón?

Teoremas de Configuración

Asimismo, permiten mostrar que, en todo triángulo, las alturas, las bisectrices, las medianas y las mediatrices son concurrentes.

4.2. El teorema de la división interna y externa

Teorema 4.2.1: de la división interna y externa.

Si L , M y N son puntos cualesquiera en los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ tales que AL , BM y CN son concurrentes, y si la recta MN interseca BC en L' , entonces los puntos L y L' dividen el segmento BC interna y externamente en la misma razón.

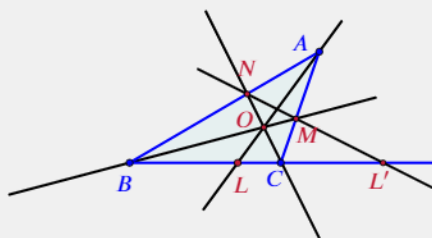


Figura 4.8: Teorema de la división interna y externa.

Teoremas de Configuración

Hipótesis: Sean L , M y N puntos cualesquiera en los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ tales que AL , BM y CN son concurrentes, y supongamos que la recta MN interseca BC en L' .

Tesis: L y L' dividen interna y externamente al segmento BC , es decir, $BL : LC = -BL' : L'C$.

Demostración: Como AL , BM y CN son concurrentes, como consecuencia del teorema de Ceva

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Y como L' , M y N son colineales, por el teorema de Menelao se tiene que:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1,$$

Así, $BL : LC = -BL' : L'C$. Por lo tanto, L y L' dividen interna y externamente el segmento BC . **Q.E.D.**

Definición 4.2.1:

Dada una recta AB y dos puntos P y Q en ella, se dice que Q es **conjugado armónico** de P con respecto a los puntos A y B si

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}.$$

Teoremas de Configuración

En otras palabras Q es conjugado armónico de P si P y Q dividen interna y externamente (o externa e internamente) al segmento AB en la misma razón.

Proposición 4.2.1:

Dado un segmento de recta AB y un punto P en la recta AB , existe un punto Q tales que P y Q dividen el segmento AB interna y externamente en la misma razón.

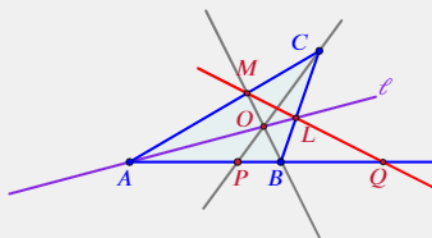


Figura 4.9: Q es el conjugado armónico de P .

Demostración: Sea C un punto que no esté en la recta AB y trácese las rectas CA , CB , CP y una recta ceviana ℓ por A , como se muestra en la figura (4.9).

Sean L y O sus intersecciones con BC y CP respectivamente, es decir, $L = \ell \cap BC$ y $O = \ell \cap CP$.

Sea M el punto de intersección de la recta BO con la recta AC , es decir, $M = BO \cap AC$.

Teoremas de Configuración

Entonces Q , el conjugado armónico de P con respecto a AB , es la intersección de la recta LM con la recta AB , simbólicamente $Q = LM \cap AB$. **Q.E.D.**

Cabe notar que el conjugado armónico de P con respecto a los puntos A y B es independiente de la elección del punto C y de la recta por A que no pase por B y C .

Finalmente, si P es el punto medio del segmento AB , entonces la recta LM es paralela a la recta AB por lo que Q es el punto al infinito.

4.3. Perspectiva y el teorema de Desargues

El teorema de Desargues está íntimamente ligado con el estudio de la perspectiva.

La perspectiva es el arte de dibujar para recrear la profundidad y la posición relativa de los objetos comunes. En un dibujo, la perspectiva simula la profundidad y los efectos de reducción.

Auxiliados por la geometría, podemos simular el efecto visual de la perspectiva proyectando los objetos tridimensionales sobre un plano bidimensional utilizando los métodos de la perspectiva cónica, mediante este procedimiento se pueden obtener imágenes realistas. Sin embargo, la perspectiva cónica no puede imitar fielmente la visión estereoscópica del ser humano. Si bien, a lo largo de la historia se han desarrollado

Teoremas de Configuración

distintos tipos de perspectiva, por ahora solamente nos dedicaremos a aquella relacionada con el teorema de Desargues.

Con objeto de dar solución a ciertas necesidades del arte de la pintura y arquitectura de la época, Gerard Desargues (1591-1661) publicó en París, en 1639, un tratado original pionero en geometría proyectiva titulado "*Brouillon proiect d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*" (*Borrador de un ensayo de tratado de los resultados de los encuentros de un cono con un plano*).

En esta obra introduce la noción de punto y recta al infinito, prueba la invarianza por proyección de una cuaterna armónica, y desarrolla la teoría de polos y polares entre otras cosas.

Algunas de estas nociones habían sido introducidas por autores clásicos como Pappus de Alejandría (290-350) o Apolonio de Perga (262-190 A.C.), sin embargo, ellos nunca razonaron en términos de proyección y sección.

Su plan de trabajo consistía en el estudio de resultados comunes a las tres cónicas, descubriendo para ello aquellas propiedades de la circunferencia que se conservan bajo proyección, pues toda cónica se obtiene como sección de la proyección de una circunferencia.

Desde el punto de vista histórico, el trabajo de 1639 se presenta como los *Elementos*, un contexto absolutamente cierto.

Desargues explica sus definiciones como hace Euclides, las ideas son simples, y algunas de ellas son meras convenciones, así:

Teoremas de Configuración

- *Cada recta puede prolongarse, si es necesario, al infinito en ambas direcciones.*

Y también

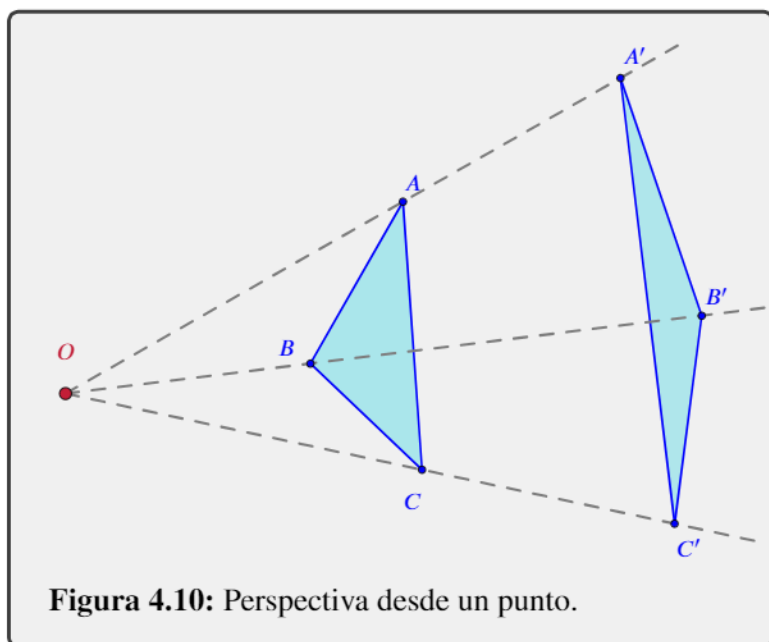
- *Cada plano puede extenderse al infinito en cualquier dirección.*

Actualmente estas formulaciones parecen generales, pero no era así en 1639, ya que, en los *Elementos*, prolongar una recta, significaba prolongarla hasta otro punto, lo infinito y lo indefinido eran equivalentes.

Desargues es el primer matemático en dar la idea de un infinito bajo control. Utiliza el concepto en una forma matemática completamente precisa. Esto no es inmediato, pues tuvo que introducir el infinito basado en definiciones de objetos matemáticos muy simples, cuyo significado no es, en principio, aparente.

Definición 4.3.1: perspectiva desde un punto

Dos figuras están en **perspectiva desde un punto P** si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras concurren en P . El punto por el cual pasan estas rectas se denomina **centro de perspectiva**. Véase la figura (4.10).



Definición 4.3.2: triángulos en perspectiva desde una recta

Si dos triángulos cumplen que sus lados correspondientes se intersecan y los puntos de intersección están sobre una misma recta, entonces se dice que **los triángulos están en perspectiva desde una recta**. Véase la figura (4.11)

Teoremas de Configuración

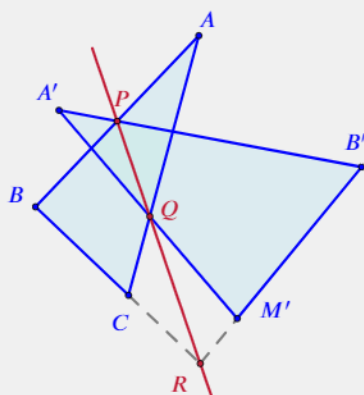
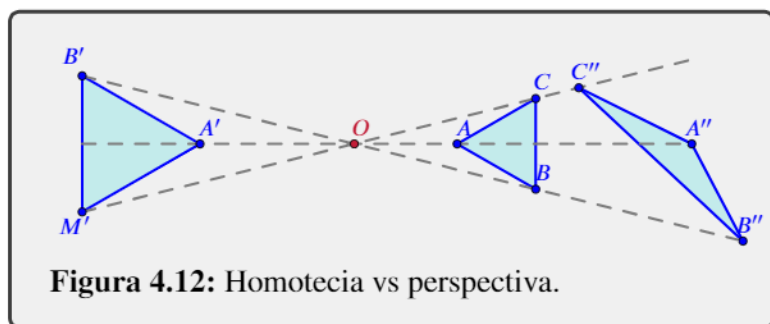


Figura 4.11: Perspectiva desde una recta.

Por ejemplo, las figuras homotéticas siempre están en perspectiva desde un punto, a saber, el centro de homotecia, pero no necesariamente las figuras en perspectiva son homotéticas.

En la figura (4.12) los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son homotéticos, y están en perspectiva desde el punto O , mientras que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A''B''C''$ están en perspectiva desde O , pero no son homotéticos, pues no se preservan los ángulos, ni las magnitudes de los lados correspondientes.

En este momento surge de manera natural la pregunta: *¿Si la perspectiva no preserva ángulos ni magnitudes, qué*



propiedades preserva?

El teorema de Desargues

Gian-Carlo Rota [R, pg. 13] observa lo siguiente:

“El enunciado del teorema de Desargues pretende ser definitivo, pero en realidad es tan solo la punta de un iceberg de conexiones con otros hechos de la matemática. El valor del teorema de Desargues, y la razón por la cual el enunciado de este teorema ha sobrevivido el paso de siglos, cuando otros teoremas geométricos igualmente impactantes han sido olvidados, radica en que abrió un horizonte de posibilidades que relacionan la geometría y el álgebra de maneras inesperadas.”

Teorema 4.3.1: de Desargues.

Dos triángulos están en perspectiva desde un punto cuando, y solamente cuando, están en perspectiva desde una recta.

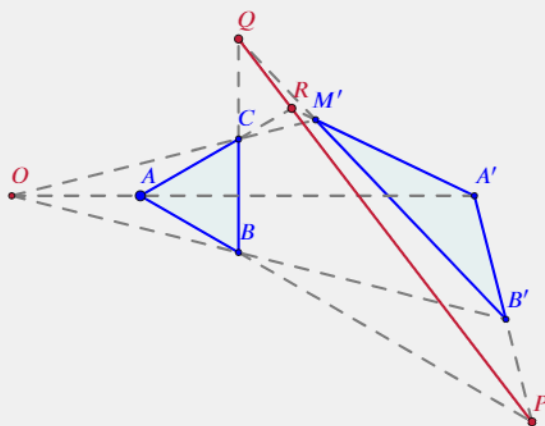


Figura 4.13: Teorema de Desargues.

Para la primera parte

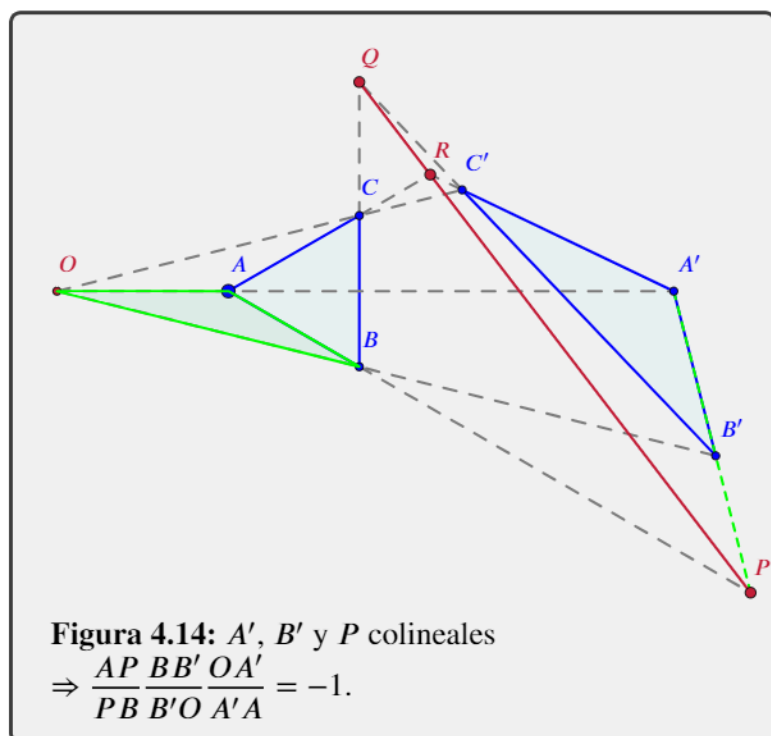
Hipótesis: Supóngase que $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva desde un punto O , como en la figura (4.13), y que $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ y $R = CA \cap C'A'$ son las intersecciones de los lados correspondientes.

Tesis: Los puntos P , Q y R son colineales.

Teoremas de Configuración

Demostración: Aplicando el teorema de Menelao al triángulo $\triangle OBA$ con $A'B'P$ como transversal, se obtiene:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1. \quad (4.15)$$

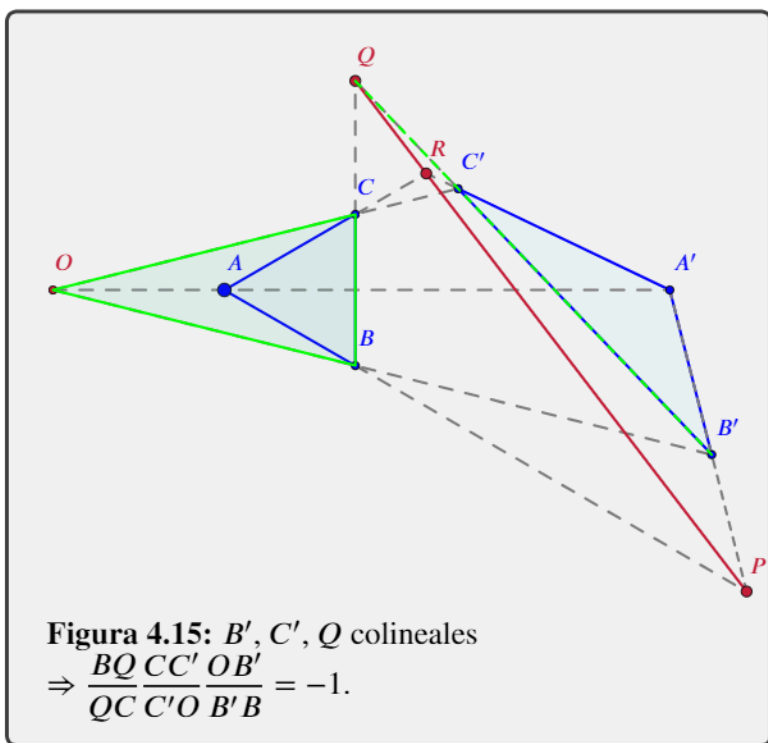


Análogamente, aplicando el teorema de Menelao al trián-

Teoremas de Configuración

gulo $\triangle OBC$ con $B'C'Q$ como transversal, se obtiene:

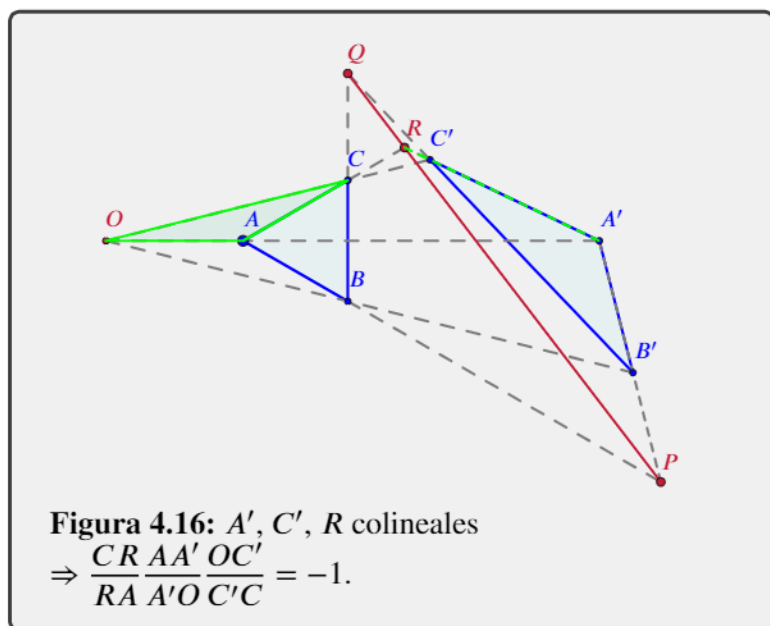
$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1. \quad (4.16)$$



Finalmente, para $\triangle CAO$ y la recta $A'C'R$:

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1. \quad (4.17)$$

Teoremas de Configuración



Multiplicando las ecuaciones (4.15), (4.16) y (4.17) se obtiene

$$\begin{aligned} -1 &= \left(\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} \right) \left(\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} \right) \left(\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} \right) \\ &= \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA}. \end{aligned}$$

Como consecuencia del recíproco del teorema de Menelao, los puntos P , Q y R son colineales.

Teoremas de Configuración

Para el recíproco:

Hipótesis: Considere dos triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ tales que los puntos $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ y $R = CA \cap C'A'$ son colineales.

Tesis: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva desde el punto O donde concurren las rectas AA' , BB' y CC' .

Demostración: Por hipótesis, P , Q y R son colineales así, los triángulos $\triangle AA'R$ y $\triangle BB'Q$ están en perspectiva desde P , pues se tienen las ternas colineales $\{P, A, B\}$, $\{P, A', B'\}$ y $\{P, Q, R\}$, como se muestra en la figura (4.17).

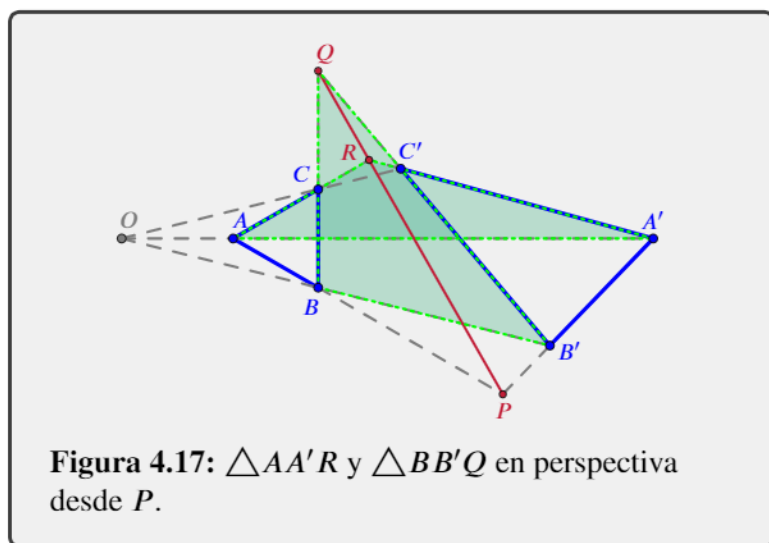


Figura 4.17: $\triangle AA'R$ y $\triangle BB'Q$ en perspectiva desde P .

Por la parte directa del teorema de Desargues, como los

Teoremas de Configuración

triángulos $\triangle AA'R$ y $\triangle BB'Q$ están en perspectiva desde P , entonces están en perspectiva desde la recta OCC' , donde $O = AA' \cap BB'$, $C = RA \cap QB$ y $C' = QB' \cap RA'$.

Es decir, las rectas AA' , BB' y CC' concurren desde el punto O .

Lo anterior establece el recíproco del teorema de Desargues. **Q.E.D.**

Como aplicación del teorema de Desargues tenemos un sencillo método que permite resolver el siguiente problema: “Utilizando sólo una regla (sin marcar), trazar por un punto dado la recta que pasa por el punto de intersección de otras dos rectas dadas que se cortan fuera de nuestro alcance”.

Solución: Sean A el punto dado, p y q las rectas dadas.

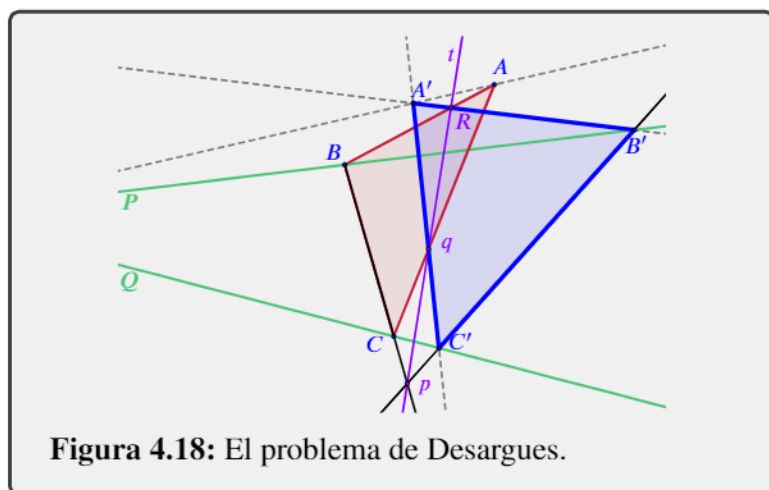
Sean $B \in p$ y $C \in q$, dos puntos a nuestro alcance, formando así un triángulo $\triangle ABC$.

Trácese una recta cualquiera t que corte a las tres rectas que determinan los tres lados BC , AC y AB del triángulo ABC dentro de los límites del dibujo en los puntos P , Q y R respectivamente.

Trácese ahora otra recta ℓ por P con $\ell \neq BC$ y $\ell \neq t$, la cual cortará a p y q en B' y C' respectivamente, con B' y C' a nuestro alcance, como se muestra en la figura (4.18).

Si $A' = B'R \cap C'Q$, como consecuencia del teorema de Desargues las rectas AA' , $p = BB'$ y $q = CC'$ concurren en el centro de perspectiva O , el cual está fuera de nuestro alcance.

Por lo tanto, la recta AA' es la recta buscada. **Q.E.H.**



4.4. El teorema de Pappus

Teorema 4.4.1: de Pappus.

Si A_1, A_2, A_3 son tres puntos en una recta ℓ , y B_1, B_2, B_3 son tres puntos en otra recta ℓ' (ninguno de los puntos anteriores en la intersección de ℓ y ℓ') y $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1B_3 \cap A_3B_1$ y $R = A_2B_3 \cap A_3B_2$, entonces P, Q y R son colineales.

Hipótesis: Sean ℓ, ℓ' dos rectas distintas, $A_1, A_2, A_3 \in \ell$, $B_1, B_2, B_3 \in \ell'$ puntos que no coincidan con el punto de intersección de ℓ con ℓ' .

Teoremas de Configuración

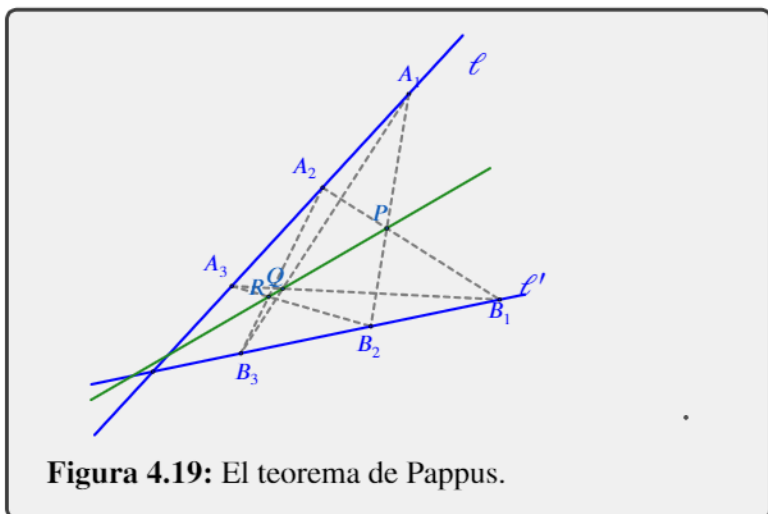


Figura 4.19: El teorema de Pappus.

Tesis: $P = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Q = A_1B_3 \cap A_3B_1$ y $R = A_2B_3 \cap A_3B_2$ son colineales.

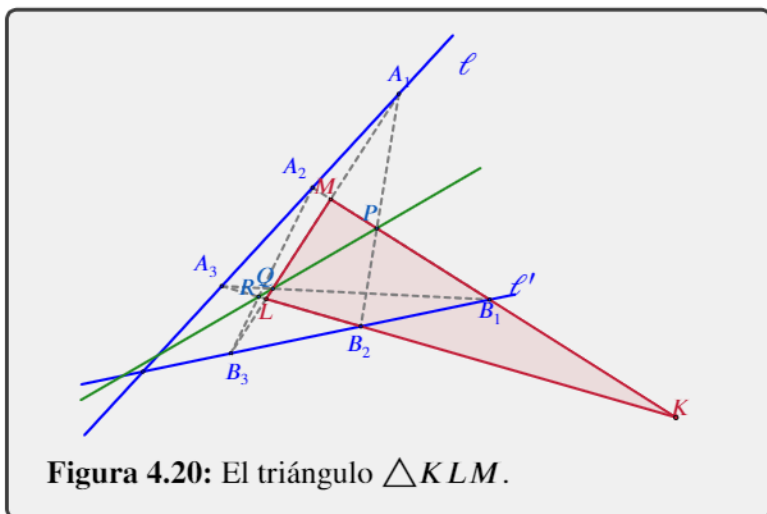
Demostración: Sean $K = A_2B_1 \cap A_3B_2$, $L = A_1B_3 \cap A_3B_2$ y $M = A_1B_3 \cap A_2B_1$, y considere el triángulo $\triangle KLM$, como se muestra en la figura (4.20).

Como $\ell \cap KL = A_3$, $\ell \cap LM = A_1$ y $\ell \cap MK = A_2$ son colineales, como consecuencia del teorema de Menelao

$$\frac{KA_3}{A_3L} \cdot \frac{LA_1}{A_1M} \cdot \frac{MA_2}{A_2K} = -1. \quad (4.18)$$

Si $\ell_1 = A_3B_1$, por hipótesis, los puntos $\ell_1 \cap KL = A_3$, $\ell_1 \cap LM = Q$ y $\ell_1 \cap MK = B_1$ son colineales, y aplicando

Teoremas de Configuración



el teorema de Menelao

$$\frac{KA_3}{A_3L} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MB_1}{B_1K} = -1. \quad (4.19)$$

Cuando $\ell_2 = A_1B_2$, por construcción, los puntos $\ell_2 \cap KL = B_2$, $\ell_2 \cap LM = A_1$ y $\ell_2 \cap MK = P$ son colineales, de donde

$$\frac{KB_2}{B_2L} \cdot \frac{LA_1}{A_1M} \cdot \frac{MP}{PK} = -1. \quad (4.20)$$

Por construcción, si $\ell_3 = A_2B_3$, esta recta corta los lados del triángulo $\triangle KLM$ de la siguiente forma $\ell_3 \cap KL = R$,

Teoremas de Configuración

$\ell_3 \cap LM = B_3$ y $\ell_3 \cap MK = A_2$, y como consecuencia del teorema de Menelao

$$\frac{KR}{RL} \cdot \frac{LB_3}{B_3M} \cdot \frac{MA_2}{A_2K} = -1. \quad (4.21)$$

Finalmente, la recta ℓ' corta los lados del triángulo $\triangle KLM$ en los puntos $\ell' \cap KL = B_2$, $\ell' \cap LM = B_3$ y $\ell' \cap MK = B_1$, y aplicando una vez más el teorema de Menelao

$$\frac{KB_2}{B_2L} \cdot \frac{LB_3}{B_3M} \cdot \frac{MB_1}{B_1K} = -1. \quad (4.22)$$

Multiplicando las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21), con los recíprocos de las ecuaciones (4.18) y (4.22) se obtiene

$$\begin{aligned} -1 = & \left(\frac{A_3L}{KA_3} \cdot \frac{A_1M}{LA_1} \cdot \frac{A_2K}{MA_2} \right) \cdot \left(\frac{KA_3}{A_3L} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MB_1}{B_1K} \right) \\ & \left(\frac{KB_2}{B_2L} \cdot \frac{LA_1}{A_1M} \cdot \frac{MP}{PK} \right) \left(\frac{KR}{RL} \cdot \frac{LB_3}{B_3M} \cdot \frac{MA_2}{A_2K} \right) \\ & \left(\frac{B_2L}{KB_2} \cdot \frac{B_3M}{LB_3} \cdot \frac{B_1K}{MB_1} \right). \end{aligned}$$

Que, simplificando

$$-1 = \frac{KR}{RL} \frac{LQ}{QM} \frac{MP}{PK}.$$

Como consecuencia del teorema de Menelao (4.1.1), pág. 144, los puntos P , Q y R son colineales. **Q.E.D.**

4.5. Las bisectrices de un triángulo

Proposición 4.5.1:

Un punto P está en la bisectriz interna de un ángulo sí, y sólo sí, P equidista de los lados del ángulo.

Demostración: Sea P un punto de la bisectriz interna del ángulo $\angle CAB$.

Denótese por Z y Y los pies de las perpendiculares por P sobre las rectas AB y CA respectivamente, como se muestra en la figura (4.21).

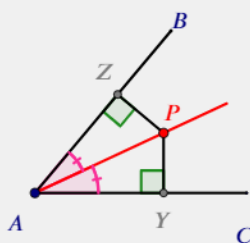


Figura 4.21: Caracterización de los puntos en la bisectriz.

Los triángulos $\triangle AZP$ y $\triangle AYP$ tienen el lado AP en común y dos ángulos iguales, por el criterio de congruencia ALA, los triángulos $\triangle AZP$ y $\triangle AYP$ son congruentes y, en particular, $PZ = PY$.

Teoremas de Configuración

Recíprocamente, supóngase que P es un punto en la región limitada por el ángulo $\angle CAB$ tal que si Z y Y denotan los pies de las perpendiculares por P sobre AB y CA respectivamente, entonces $PZ = PY$.

Constrúyase la recta AP , entonces los triángulos rectángulos $\triangle APY$ y $\triangle APZ$ tienen dos pares de lados iguales $PZ = PY$ y $AP = AP$ por ser lado común.

Como los triángulos son rectángulos, como consecuencia del teorema de Pitágoras, el otro par de catetos son iguales, y como consecuencia del criterio de congruencia LLL, los triángulos $\triangle APY$ y $\triangle APZ$ son congruentes.

De donde, $\angle PAZ = \angle PAY$, es decir, P está en la bisectriz interna del ángulo $\angle CAB$. **Q.E.D.**

A continuación, aplicando el teorema de Ceva, se procederá a demostrar que las bisectrices interiores de un triángulo dado concurren.

Teorema 4.5.1:

En todo triángulo, sus bisectrices interiores son concurrentes.

Hipótesis: Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean AL , BM y CN las bisectrices interiores de los ángulos $\angle BAC$, $\angle CBA$ y $\angle ACB$, con $L \in BC$, $M \in CA$ y $N \in AB$, como se muestra en la figura (4.22).

Tesis: AL , BM y CN son concurrentes, o bien, usando

Teoremas de Configuración

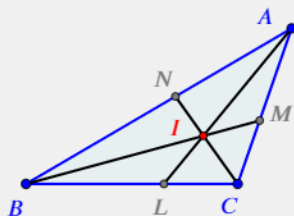


Figura 4.22: El teorema de la bisectriz.

la forma trigonométrica del teorema de Ceva:

$$\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = 1.$$

Demostración: Como AL es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, entonces $\angle BAL = \angle LAC$, en particular

$$\text{sen } \angle BAL = \text{sen } \angle LAC.$$

De manera análoga se obtiene

$$\text{sen } \angle CBM = \text{sen } \angle MBA \text{ y } \text{sen } \angle ANC = \text{sen } \angle NCB.$$

Luego entonces

$$\frac{\text{sen } ACN}{\text{sen } NCB} \cdot \frac{\text{sen } BAL}{\text{sen } LAC} \cdot \frac{\text{sen } CBM}{\text{sen } MBA} = 1.$$

Como consecuencia de la forma trigonométrica del teorema de Ceva, las bisectrices de un triángulo concurren en un punto. **Q.E.D.**

Definición 4.5.1:

El **incentro** de un triángulo es el punto en el que concurren las bisectrices interiores del triángulo.

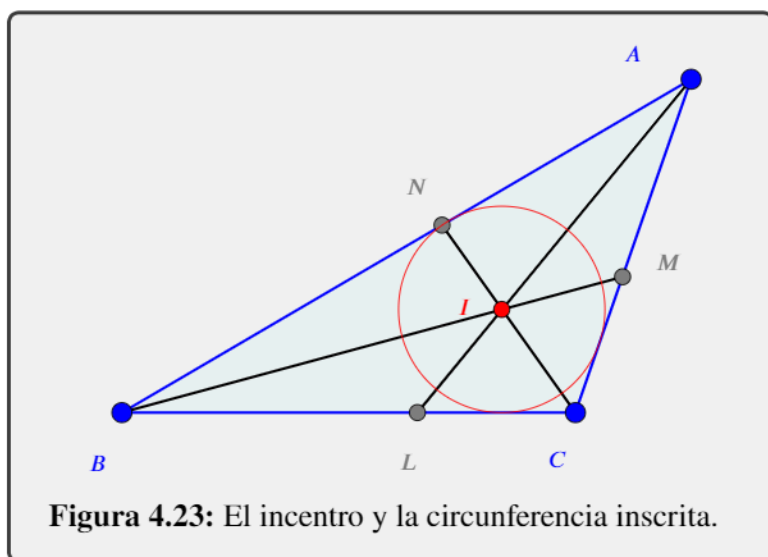


Figura 4.23: El incentro y la circunferencia inscrita.

Ya que los puntos en la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados del ángulo, como se demostró en la proposición (4.5.1), pág. 176, el incentro, que suele denotarse con la letra I , equidista de los tres lados del triángulo y, por ende, es el centro del círculo inscrito en el triángulo dado, aún más, la circunferencia inscrita es tangente a los tres lados del triángulo, como se muestra en la figura (4.23), el radio de la circun-

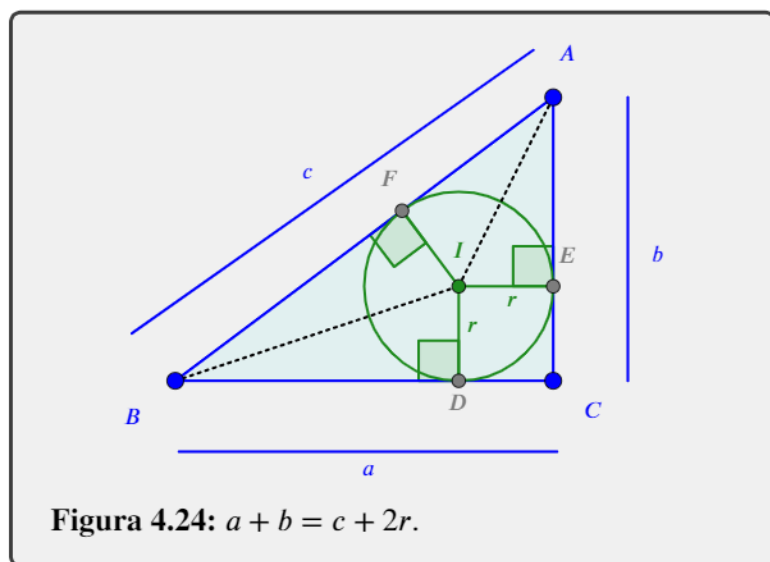
Teoremas de Configuración

ferencia inscrita se denomina el inradio, y se suele denotar con la letra r .

En el caso particular en que el triángulo sea rectángulo, el teorema de Poncelet permite calcular el inradio en términos de los lados del triángulo dado, esto es:

Teorema 4.5.2: de Poncelet.

En un triángulo rectángulo, la suma de los catetos es igual a la hipotenusa más el doble del inradio.



Hipótesis: Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con án-

Teoremas de Configuración

gulo recto $\angle ACB$, lados de longitudes $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, e inradio r . Si I denota el incentro, sean D , E , F las proyecciones perpendiculares de I sobre los lados BC , CA y AB respectivamente.

Tesis: $a + b = c + 2r$.

Demostración: Como el incentro es el punto en donde concurren las bisectrices, en particular, se tienen los triángulos rectángulos $\triangle AFI \equiv \triangle AEI$, $\triangle BDI = \triangle BFI$ y el cuadrado $\square DCEI$ de lado r

Luego entonces $BD = BF$ y $FA = EA$, de donde $BA = BF + FA = BD + EA$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}c + 2r &= BA + 2r \\&= (BD + DA) + 2r \\&= (BD + r) + (r + EA) \\&= (BD + DC) + (CE + EA) \\&= BC + CA = a + b\end{aligned}$$

Q.E.D.

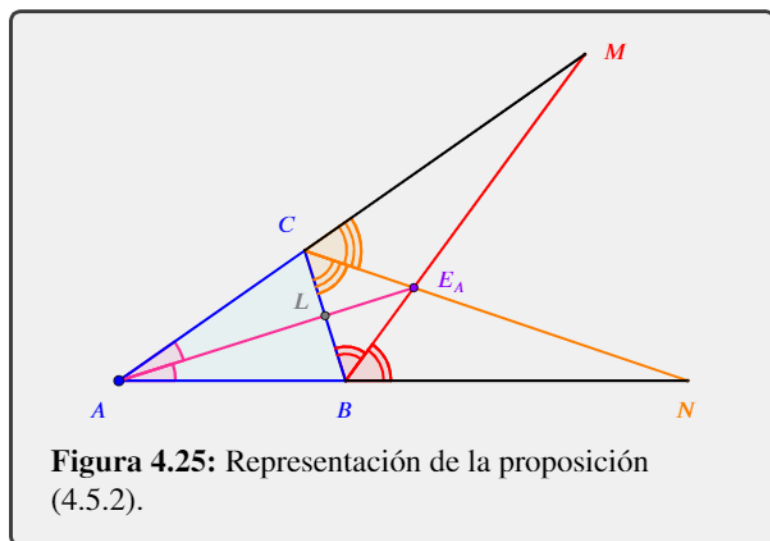
No solamente la circunferencia inscrita es tangente a los tres lados del triángulo, hay otras tres circunferencias que tienen esta propiedad y cuyos centros, denominados *excentros*, son los puntos de intersección de la bisectriz de un ángulo interior y las bisectrices de los ángulos exteriores de los otros dos vértices del triángulo. Estas circunferencias se denominan *circunferencias excritas*.

Proposición 4.5.2:

Dado un triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interna de un ángulo y dos bisectrices externas de los otros dos ángulos concurren.

Demostración: Sea AL una bisectriz interna, BM y CN las bisectrices externas de los otros dos ángulos.

Se aplicará el teorema de Ceva para demostrar que las rectas AL , BM y CN son concurrentes. Véase la figura (4.25).



Por el teorema de la bisectriz (1.4.1), pág. 19, la bisectriz

Teoremas de Configuración

interna AL divide al lado opuesto BC , y

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CA}.$$

Además, por el teorema (1.4.2), pág. 21, la bisectriz externa BM divide al lado opuesto CA , y es tal que

$$\frac{CM}{MA} = -\frac{BC}{AB}.$$

Igualmente, la bisectriz externa CN divide al lado opuesto AB , y es tal que satisface

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{CA}{BC}.$$

Multiplicando miembro a miembro las tres ecuaciones anteriores se tiene:

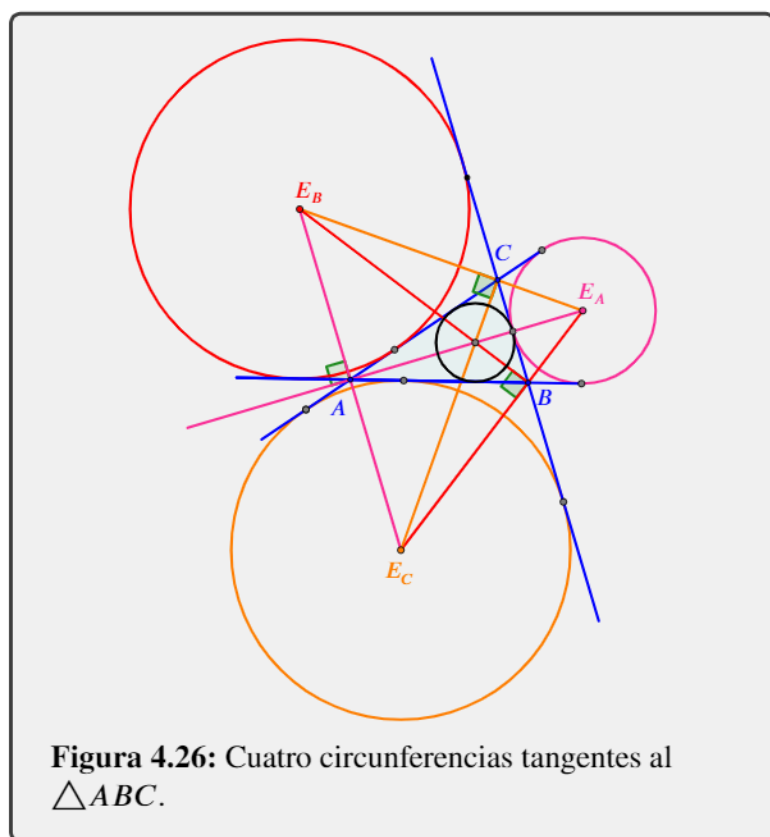
$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{AB}{CA} \left(-\frac{BC}{AB}\right) \left(-\frac{CA}{BC}\right) = 1.$$

Como consecuencia del teorema de Ceva, la bisectriz interna AL y las bisectrices externas BM y CN concurren en un punto. **Q.E.D.**

Dado que un triángulo tiene tres vértices, se puede concluir lo siguiente:

Corolario 4.5.1:

Dado un triángulo $\triangle ABC$, existen cuatro circunferencias tangentes a las rectas que determinan los lados del triángulo.



Cabe notar que, en cada lado del triángulo $\triangle ABC$ hay cuatro puntos de tangencia, uno por cada circunferencia y, por supuesto, cabe preguntarse:

- ¿Hay alguna relación entre los puntos de tangencia?
- ¿Qué relaciones hay entre los radios de las circunferen-

Teoremas de Configuración

cias excritas y la circunferencia inscrita?

¿Hay alguna relación entre los excentros y el incentro?

Teorema 4.5.3:

El punto medio de un lado de un triángulo es también el punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto de dicho lado con la circunferencia inscrita y la correspondiente excrita.

Hipótesis Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean M_A, M_B, M_C los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente, I es el incentro del triángulo, E_A el excentro del triángulo que está en la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$. Denótese, además C_I a la circunferencia inscrita y C_{E_A} a la circunferencia excrita con centro E_A .

Sean $Z = C_I \cap AB$ y $Z_1 = C_{E_A} \cap AB$, $Y = C_I \cap AC$ y $Y_1 = C_{E_A} \cap AC$, $X = C_I \cap BC$ y $X_1 = C_{E_A} \cap BC$ los puntos donde las rectas AB, AC y BC cortan a las circunferencias inscrita y excrita respectivamente, como se muestra en la figura (4.27):

Tesis: M_A es el punto medio del segmento XX_1 .

Demostración: Como AB y AC son tangentes a C_{E_A} en Z_1 y Y_1 respectivamente, entonces $AZ_1 = AY_1$.

Análogamente AB y BC son tangentes a C_{E_A} en Z_1 y X_1 , así $BZ_1 = BX_1$.

Finalmente, $CX_1 = CY_1$, pues BC y AC son tangentes a C_{E_A} en los puntos X_1 y Y_1 respectivamente.

De manera análoga, al estudiar las relaciones entre los

Teoremas de Configuración

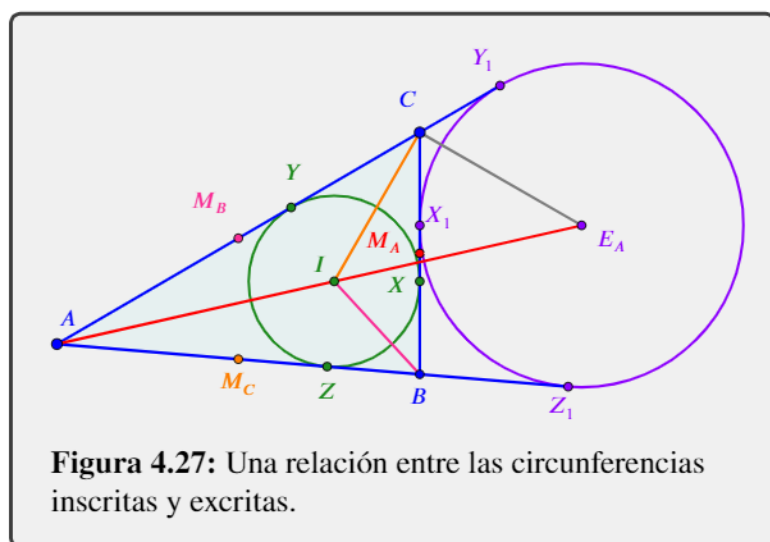


Figura 4.27: Una relación entre las circunferencias inscritas y excritas.

puntos de tangencia de la circunferencia inscrita C_1 con los lados del triángulo se tiene que, $AZ = AY$, $BZ = BX$ y $CX = CY$.

Consecuentemente

$$\begin{aligned} AB + BX_1 &= AB + BZ_1 = AZ_1 = Y_1A \\ &= Y_1C + CA = X_1C + CA. \end{aligned}$$

Ya que el semiperímetro s del triángulo $\triangle ABC$ es la mitad del perímetro, entonces

Teoremas de Configuración

$$\begin{aligned}2s &= AB + BC + CA \\&= (AB + BX_1) + (X_1C + CA) \\&= 2(AB + BX_1) = 2(X_1C + CA).\end{aligned}$$

De donde,

$$BX_1 = s - AB. \quad (4.23)$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}AB + XC &= (AZ + ZB) + XC \\&= (AZ + BX) + XC \\&= YA + BX + CY = CA + BX,\end{aligned}$$

pero $(AB + XC) + (CA + BX) = AB + BC + CA = 2s$, de donde $AB + XC = s$, por tanto

$$XC = s - AB. \quad (4.24)$$

De las ecuaciones (4.23) y (4.24) $BX_1 = s - AB = XC$, de donde

$$BX = BX_1 - XX_1 = XC - XX_1 = X_1C.$$

Por ende, M_A también es punto medio del segmento XX_1 .
Q.E.D.

Proposición 4.5.3:

El área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro y el radio del círculo inscrito.

El área del triángulo también es igual al producto del semiperímetro disminuido en un lado y el radio del excírculo correspondiente.

Demostración: Siguiendo con la notación del teorema anterior (4.5.1), pág. 185, sean r el radio de C_I , r_A , r_B y r_C los radios de las circunferencias excritas C_{E_A} , C_{E_B} y C_{E_C} respectivamente.

Como el área de un triángulo es la mitad del producto de la base por la altura,

$$\text{área } \triangle IBC = \frac{BC}{2}r,$$

$$\text{área } \triangle ICA = \frac{CA}{2}r,$$

$$\text{área } \triangle IAB = \frac{AB}{2}r.$$

Y ya que el todo es la suma de las partes, entonces

$$\begin{aligned}\text{área } \triangle ABC &= \text{área } \triangle IBC + \text{área } \triangle ICA \\ &\quad + \text{área } \triangle IAB \\ &= \frac{BC + CA + AB}{2}r = sr.\end{aligned}$$

Teoremas de Configuración

Para la segunda parte, observe que

$$\text{área } \triangle E_A BC = \frac{BC}{2} r_A,$$

$$\text{área } \triangle E_A CA = \frac{CA}{2} r_A,$$

$$\text{área } \triangle E_A AB = \frac{AB}{2} r_A,$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{área } \triangle ABC &= (\text{área } \triangle E_A CA + \text{área } \triangle E_A AB) \\ &\quad - \text{área } \triangle E_A BC \\ &= \frac{(CA + AB) - BC}{2} r_A = (s - BC) r_A. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\text{área } \triangle ABC = (s - CA) r_B = (s - AB) r_C.$$

Q.E.D.

Corolario 4.5.2:

Dado un triángulo, entonces el recíproco de su inradio es igual a la suma de los recíprocos de sus exradios.

Demostración: Con la notación de la proposición anterior (4.5.3), pág. 188, si $\Delta = \text{área del triángulo } \triangle ABC$, entonces

Teoremas de Configuración

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} &= \frac{(s - BC)}{\Delta} + \frac{(s - CA)}{\Delta} + \frac{(s - AB)}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Delta} ((s - BC) + (s - CA) + (s - AB)) \\ &= \frac{s}{\Delta} = \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

4.6. Medianas de un triángulo

Teorema 4.6.1:

Las medianas de un triángulo concurren.

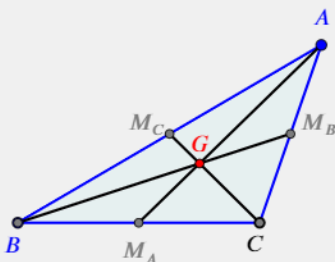


Figura 4.28: Las medianas son concurrentes.

Hipótesis: Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean AM_A , BM_B y CM_C sus medianas.

Teoremas de Configuración

Tesis: AM_A , BM_B y CM_C son concurrentes, o bien, aplicando el teorema de Ceva:

$$\frac{AM_C}{M_CB} \cdot \frac{BM_A}{M_AC} \cdot \frac{CM_B}{M_BA} = 1.$$

Demostración: Como M_C es punto medio de AB , entonces $AM_C = M_CB$, de manera análoga $BM_A = M_AC$ y $CM_B = M_BA$.

Por lo tanto

$$\frac{AM_C}{M_CB} \cdot \frac{BM_A}{M_AC} \cdot \frac{CM_B}{M_BA} = 1.$$

Como consecuencia del teorema de Ceva, las medianas son concurrentes. **Q.E.D.**

Definición 4.6.1:

El **baricentro** de un triángulo es el punto en el que concurren las medianas, y suele denotarse con la letra G .

En una lámina triangular de densidad uniforme, el centro de masas coincide con el baricentro, por esta razón al baricentro también se le conoce como **centroide**, o **centro de gravedad**.

Proposición 4.6.1:

El baricentro divide cada mediana del triángulo en relación 2 : 1.

Teoremas de Configuración

Demostración: Si AM_A y BM_B son medianas del triángulo $\triangle ABC$, en particular M_A es el punto medio del segmento BC , por el teorema generalizado de la bisectriz (1.4.2), pág. 21 se obtiene:

$$1 = \frac{BM_A}{M_AC} = \frac{AB \cdot \text{sen } \angle BAM_A}{CA \cdot \text{sen } \angle M_A AC}.$$

De donde

$$\frac{CA}{AB} = \frac{\text{sen } \angle BAM_A}{\text{sen } \angle M_A AC} = \frac{\text{sen } \angle BAG}{\text{sen } \angle GAM_B}.$$

Aplicando ahora el teorema generalizado de la bisectriz al triángulo $\triangle ABM_B$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{BG}{GM_B} &= \frac{AB \cdot \text{sen } \angle BAG}{M_B A \cdot \text{sen } \angle GAM_B} \\ &= \frac{AB}{M_B A} \frac{CA}{AB} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Luego entonces, el baricentro divide cada mediana en razón $2 : 1$. **Q.E.D.**

Como consecuencia de la proposición (4.6.1), pág. 192, el baricentro G es un punto de trisección de cada una de las medianas del triángulo, en particular, $AG = 2GM_A$, $BG = 2GM_B$ y $CG = 2GM_C$.

Proposición 4.6.2:

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de tal lado.

Demostración: Dado un triángulo $\triangle ABC$, si M_A , M_B y M_C denotan los puntos medios de los segmentos BC , CA y AB respectivamente, trácese el segmento $M_B M_C$, entonces

$$\frac{AM_B}{M_B C} = \frac{AM_C}{M_C B} = 1.$$

Por el recíproco del primer teorema de Thales, la recta $M_C M_B$ es paralela a la recta BC .

Por el punto M_B se traza la recta $M_B P$ paralela a la recta AB , formándose el triángulo $\triangle M_B P C$, véase la figura (4.29).

Los triángulos, $\triangle AM_C M_B$ y $\triangle M_B P C$, satisfacen que $\angle M_C A M_B = \angle P M_B C$, $\angle A M_B M_C = \angle M_B C P$ y $A M_B = M_B C$.

Por el teorema de congruencia de triángulos ALA, se concluye que

$$\triangle AM_C M_B \equiv \triangle M_B P C$$

Por ser lados homólogos de triángulos iguales se obtiene $M_B M_C = CP$,

Ya que $M_B M_C$ y BP son los lados opuestos del paralelogramo $\square M_B M_C B P$, en particular $M_B M_C = PB$.

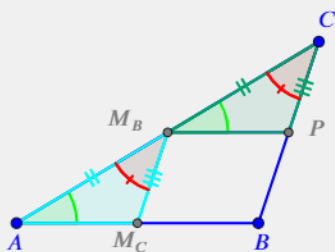


Figura 4.29: $M_C M_B \parallel BC$ y $2 M_C M_B = BC$.

De donde $CP = M_B M_C = PB$, pero $CP + PB = CB$ es decir, $P = M_A$ y $2 M_B M_C = BC$. **Q.E.D.**

Definición 4.6.2:

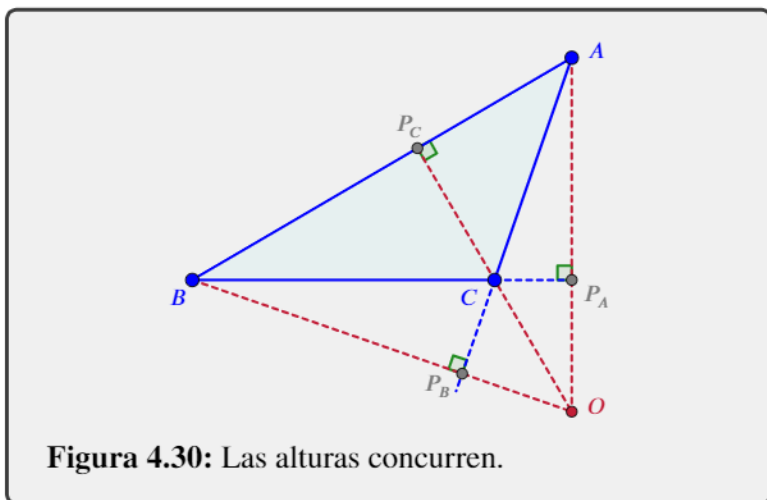
El **triángulo medial** de un triángulo dado es el que tiene sus vértices en los puntos medios de los lados del triángulo dado.

4.7. Las alturas de un triángulo

Teorema 4.7.1:

Las alturas de un triángulo concurren.

Teoremas de Configuración



Hipótesis: Sean AP_A , BP_B y CP_C las alturas del triángulo $\triangle ABC$ con $P_A \in BC$, $P_B \in AC$ y $P_C \in AB$ respectivamente.

Tesis: AP_A , BP_B y CP_C son concurrentes, o bien, usando el teorema de Ceva:

$$\frac{AP_C}{P_C B} \cdot \frac{BP_A}{P_A C} \cdot \frac{CP_B}{P_B A} = 1.$$

Demostración: Como $BP_B \perp AC$ y $CP_C \perp AB$, los triángulos $\triangle AP_B B$ y $\triangle AP_C C$ son triángulos rectángulos, y ya que tienen en común el ángulo $\angle BAP_B = \angle P_C AC$, estos

Teoremas de Configuración

triángulos son semejantes. En particular

$$\frac{AP_C}{P_B A} = \frac{CA}{AB}. \quad (4.25)$$

De manera similar se obtiene $\triangle ABP_A \sim \triangle BCP_C$, así

$$\frac{BP_A}{P_C B} = \frac{AB}{BC}. \quad (4.26)$$

Considérese ahora los triángulos rectángulos $\triangle BP_B C$ y $\triangle ACP_A$, como los ángulos $\angle BCP_B$ y $\angle P_A CA$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle BCP_B = \angle P_A CA$, por tanto $\triangle BP_B C \sim \triangle ACP_A$.

En particular $\angle P_B BC = \angle CAP_A$ y

$$\frac{CP_B}{P_A C} = \frac{BC}{CA}. \quad (4.27)$$

Como consecuencia de las ecuaciones (4.25), (4.26) y (4.27) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{AP_C}{P_C B} \cdot \frac{BP_A}{P_A C} \cdot \frac{CP_B}{P_B A} &= \frac{AP_C}{P_B A} \cdot \frac{BP_A}{P_C B} \cdot \frac{CP_B}{P_A C} \\ &= \frac{CA}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Como consecuencia del teorema de Ceva, las alturas AP_A , BP_B y CP_C concurren en un punto H . **Q.E.D.**

Definición 4.7.1:

El **ortocentro** de un triángulo es el punto H donde concurren las tres alturas del triángulo.

El **triángulo órtico** es el que tiene como vértices los pies de las tres alturas del triángulo.

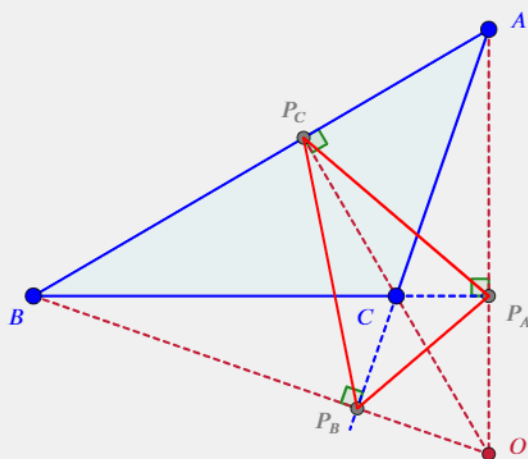


Figura 4.31: Ortocentro y triángulo órtico.

En la figura (4.31) se muestra el triángulo órtico $\triangle P_A P_B P_C$ asociado al triángulo $\triangle ABC$.

Proposición 4.7.1:

Las alturas de un triángulo son las bisectrices, internas o externas, de su triángulo órtico y recíprocamente.

Demostración: Con la notación de la demostración del teorema (4.7.1), pág. 194, los triángulos $\triangle ABP_A$ y $\triangle ABP_B$ son triángulos rectángulos, por ende, los puntos P_A y P_B pertenecen a la circunferencia de diámetro AB .

Luego entonces, el cuadrilátero $\square ABP_B P_A$ es cíclico, con diagonales AP_B y BP_A , véase la figura (4.32).

Como en los cuadriláteros cíclicos convexos el ángulo formado por un lado y la diagonal es igual al ángulo formado por el lado opuesto y la otra diagonal, por los teoremas (2.3.1) y (2.3.6), páginas 61 y 75, se deduce que

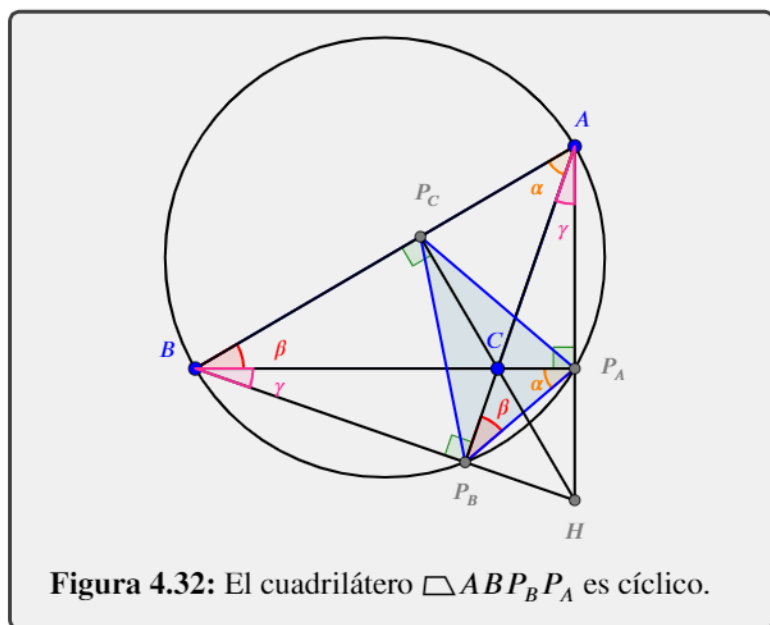
$$\alpha = \angle BP_A P_B = \angle BAP_B, \quad (4.28)$$

$$\beta = \angle P_A P_B A = \angle P_A B A, \quad (4.29)$$

$$\gamma = \angle P_B A P_A = \angle P_B B P_A. \quad (4.30)$$

De manera análoga se demuestra que los cuadriláteros $\square BP_B C P_C$ y $\square AP_C C P_A$ son cíclicos, véase la figura (4.33)

Como el cuadrilátero $\square BP_B C P_C$ es cíclico, consecuencia de los teoremas (2.3.1) y (2.3.6), páginas 61 y 75, se obtiene



$$\beta = \angle P_A B A \stackrel{\text{def.}\angle}{=} \angle C B P_C \stackrel{\text{def.}\angle}{=} \angle C P_B P_C, \quad (4.31)$$

$$\gamma = \angle P_B B P_A \stackrel{\text{def.}\angle}{=} \angle P_B B C = \angle P_B P_C C. \quad (4.32)$$

De las ecuaciones (4.29) y (4.31), y el hecho que P_B, C y A sean colineales, se deduce que $\beta = \angle P_A P_B A = \angle A P_B P_C$, es decir, $P_B A$ es la bisectriz del ángulo $\angle P_A P_B P_C$.

Y finalmente, como el cuadrilátero $\square A P_C C P_A$ es cíclico, se sigue que

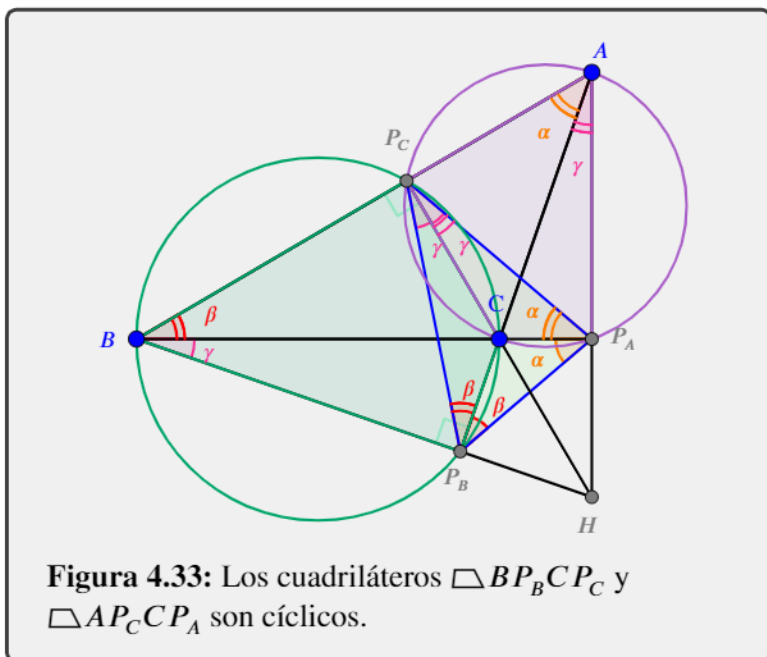


Figura 4.33: Los cuadriláteros $\square BP_BCP_C$ y $\square AP_CCP_A$ son cíclicos.

$$\begin{aligned}\alpha &= \angle BAP_B \stackrel{def.\angle}{=} \angle P_CAC = \angle P_CP_AB, \\ \gamma &= \angle P_AP_B \stackrel{def.\angle}{=} \angle P_AP_C = \angle P_AP_C.\end{aligned}$$

Como consecuencia de las ecuaciones (4.28) y (4.33) se obtiene que $\alpha = \angle P_BP_AP_C = \angle BP_AP_C$, es decir, BP_A es la bisectriz del ángulo $\angle P_BP_AP_C$.

Teoremas de Configuración

Finalmente las ecuaciones (4.30), (4.33) y (4.32) implican que $\gamma = \angle P_B P_C C = \angle C P_C P_A$, por lo que la recta $P_C C$ biseca el ángulo $\angle P_B P_C P_A$, es decir, las alturas de un triángulo son las bisectrices, internas o externas, del triángulo órtico.

El análisis que aquí se presenta se basa en la figura (4.34), el triángulo $\triangle ABC$ es obtusángulo, y las alturas BP_B y AP_A son bisectrices externas, y CP_C es bisectriz interna del triángulo órtico $\triangle P_A P_B P_C$.

Puede verificarse fácilmente que, en un triángulo agudo $\triangle ABC$, las tres alturas son bisectrices internas del triángulo órtico $\triangle P_A P_B P_C$.

En la figura (4.34) se muestran los tres cuadriláteros cíclicos, y las circunferencias asociadas.

Como todos los pasos de la demostración son reversibles, las bisectrices del triángulo órtico son las alturas del triángulo dado y recíprocamente. **Q.E.D.**

Así, en los cuadriláteros cíclicos $\square ABP_B P_A$, $\square BP_B P_C$ y $\square AP_C P_A$, como cada par de lados opuestos es antiparalelo con respecto al otro par, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \{AB, P_B P_A\} & \parallel \{AP_A, BP_B\}, \\ \{P_C C, AP_A\} & \parallel \{CP_A, P_C A\} \text{ y} \\ \{BP_B, CP_C\} & \parallel \{CP_B, P_C B\}. \end{aligned}$$

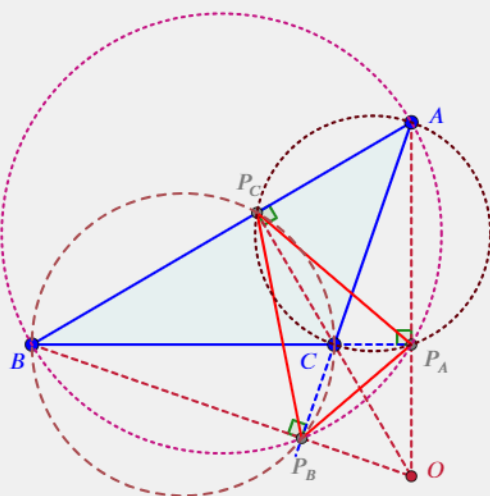


Figura 4.34: Las alturas del triángulo son bisectrices, interiores o exteriores, del triángulo órtico.

4.8. Las mediatrices de un triángulo

Definición 4.8.1:

La **mediatriz** de un segmento es aquella recta que pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a este.

Proposición 4.8.1:

Un punto P está en la mediatriz de un segmento cuando, y solamente cuando, P equidista de los extremos del segmento.

Demostración: Sean P un punto de la mediatriz del segmento AB , y M el punto medio del segmento AB .

Si $P = M$, por definición de punto medio $AP = AM = MB = PB$, por lo que se cumple la propiedad deseada.

Supóngase ahora que $P \neq M$ y considere los triángulos rectángulos $\triangle PAM$ y $\triangle PBM$.

Estos triángulos, por definición de mediatriz, satisfacen $AM = MB$, $\angle PMA = 1 \text{ ángulo recto} = \angle BMP$, además el lado PM es común.

Por el criterio de congruencia LAL, los triángulos $\triangle PAM$ y $\triangle PBM$ son congruentes, de donde, $PA = PB$.

Recíprocamente, supóngase que P es un punto tal que $PA = PB$.

Sea M' el pie de la perpendicular por P sobre el segmento AB . Entonces los triángulos rectángulos $\triangle PAM'$ y $\triangle PBM'$ satisfacen $PA = PB$, PM' es lado común y $AB \perp PM'$.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras, los triángulos $\triangle PAM'$ y $\triangle PBM'$ son congruentes, de donde, $AM' = M'B$.

Así, M' es el punto medio del segmento AB , por lo tanto, el punto P está en la mediatriz del segmento AB . **Q.E.D.**

Teorema 4.8.1:

Las mediatrices de un triángulo son concurrentes.

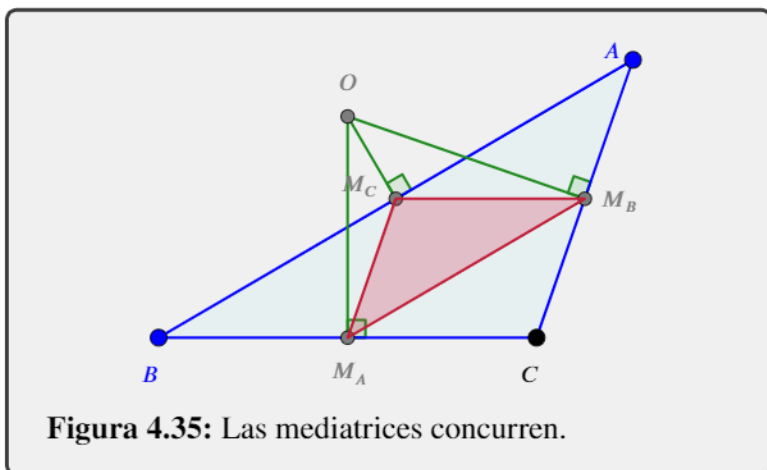


Figura 4.35: Las mediatrices concurren.

Hipótesis: Dado un triángulo $\triangle ABC$, si M_A , M_B y M_C denotan los puntos medios de los lados BC , AC y AB respectivamente. Denótese m_a , m_b y m_c a las mediatrices de los segmentos BC , AC y AB respectivamente.

Tesis: Las rectas m_a , m_b y m_c concurren en un punto O .

Nótese que, en general, no puede aplicarse el teorema de Ceva a las rectas m_a , m_b y m_c con respecto al triángulo $\triangle ABC$, pues dichas rectas no son cevianas del triángulo $\triangle ABC$.

Teoremas de Configuración

Demostración: Considérese el triángulo medial $\triangle M_a M_b M_c$ asociado al triángulo $\triangle ABC$.

Por hipótesis $M_a \in m_a$, $m_a \perp BC$ y $BC \parallel M_b M_c$, por lo tanto $m_a \perp M_b M_c$. De lo anterior se concluye m_a es la altura por M_a del triángulo $\triangle M_a M_b M_c$.

De manera análoga se tiene que m_b y m_c son las alturas por M_b y M_c del triángulo $\triangle ABC$, en otras palabras, las mediatrices del triángulo $\triangle ABC$ son las alturas del triángulo $\triangle M_a M_b M_c$.

Como consecuencia del teorema (4.7.1), pág. 194, las rectas m_a , m_b y m_c concurren en un punto O . **Q.E.D.**

Corolario 4.8.1:

Las mediatrices de un triángulo son las alturas de su triángulo medial, en particular, el ortocentro del triángulo medial $H_{\triangle M_a M_b M_c}$ coincide con el circuncentro del triángulo dado $O_{\triangle ABC}$.

Dado que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento, y que las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto común, dicho punto es el centro de la única circunferencia a la que pertenecen los tres vértices del triángulo, esta circunferencia es la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

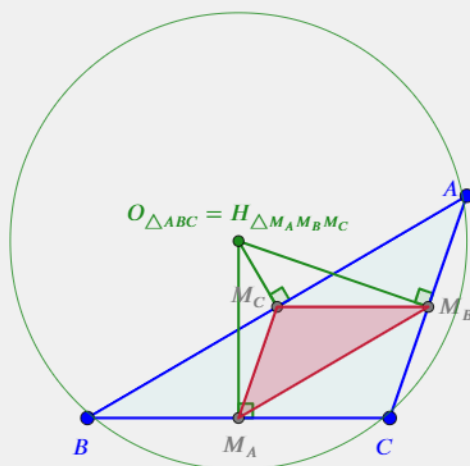


Figura 4.36: El punto O es el circuncentro del $\triangle ABC$ y es el ortocentro del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$.

Definición 4.8.2:

El **circuncentro** de un triángulo es el punto en el que se cortan las tres mediatrices del triángulo. El circuncentro de un triángulo suele denotarse con la letra O .

El radio de la circunferencia circunscrita se denomina circunradio, y puede calcularse como la distancia del circuncen-

Teoremas de Configuración

tro a cualquiera de los vértices del triángulo.

El circuncentro de un triángulo puede ser interior o exterior al mismo, dependiendo de su clasificación por ángulos.

Corolario 4.8.2:

Dado un triángulo $\triangle ABC$, la circunferencia con centro en O y que pasa por el vértice A es la circunferencia circunscrita del triángulo dado.

El radio de la circunferencia circunscrita se denomina el *circunradio*, y suele denotarse con la letra R . A la circunferencia circunscrita también se le denomina circuncircunferencia.

Corolario 4.8.3:

Tres puntos distintos no colineales son concíclicos.

En la proposición (4.5.3), pág. 188, se da una relación entre el inradio y el área del triángulo, la siguiente proposición determina una relación entre el área del triángulo y el circunradio.

Proposición 4.8.2:

El área de un triángulo es igual al producto de sus lados sobre cuatro veces su circunradio.

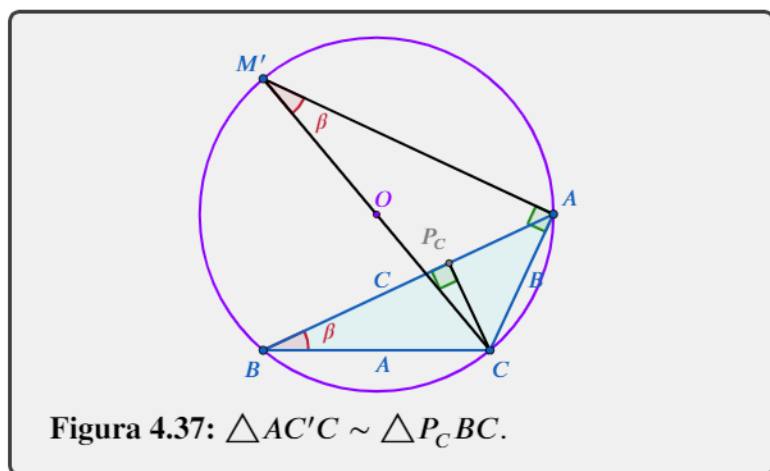
Teoremas de Configuración

Demostración: Supongamos que $\triangle ABC$ es un triángulo denótese por O su circuncentro, C_O su circunferencia circunscrita, $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$; P_C es la proyección del punto C sobre la recta AB y, finalmente, sea C' el punto simétrico de C con respecto al punto O .

Supóngase que el ángulo $\angle ACB$ es mayor o igual que los otros ángulos, así P_C pertenecerá al segmento AB .

Tómese el segmento AB como base, y el $P_C C$ como altura, entonces

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{c}{2} P_C C.$$



Como CC' es un diámetro, entonces $\angle C'AC = 1$ recto, y como P_C es la proyección del punto C sobre el segmento AB , también $\angle BP_C C = 1$ recto.

Teoremas de Configuración

Por otra parte, $\angle CC'A = \angle CBA$, pues subtienden el mismo arco, a saber el arco CA , por hipótesis, P_C es un punto en el segmento AB , de donde $\angle CBA = \angle CBP_C$.

Consecuentemente, los triángulos $\triangle AC'C$ y $\triangle P_C BC$ son semejantes, véase la figura (4.37), y sus lados correspondientes son proporcionales, de donde,

$$\frac{C'C}{CA} = \frac{BC}{CP_C}.$$

Ya que $C'C$ es diámetro de la circunferencia circunscrita, entonces $C'C = 2R$, además $CA = b$ y $BC = a$ de donde

$$CP_C = \frac{BC \cdot CA}{C'C} = \frac{ab}{2R}.$$

Por lo tanto, área $\triangle ABC = c \left(\frac{ab}{2R} \right) = \frac{abc}{2R}$.

Si el triángulo $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice C , entonces

$$\text{área}(\triangle ABC) = \frac{ab}{2}.$$

Por otra parte, se sabe que el centro O de la circunferencia circunscrita es el punto medio del segmento AB , y el circunradio está dado por $R = c/2$, de donde

$$\frac{abc}{4R} = \frac{abc}{4c/2} = \frac{ab}{2} = \text{área} \triangle ABC.$$

Por lo tanto, el área de un triángulo es igual al producto de sus lados sobre cuatro veces su circunradio. **Q.E.D.**

4.9. Ejercicios

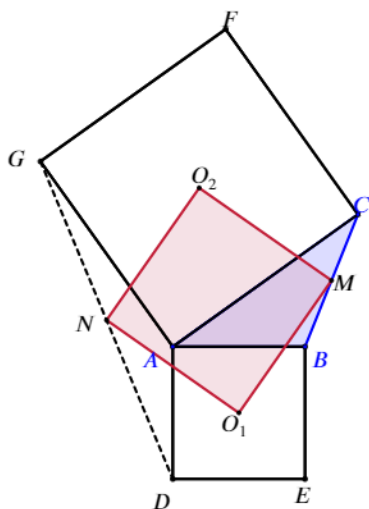
1. Demuestre que, los seis centros de similitud de tres circunferencias, tomadas por parejas, están por tercias en cuatro líneas rectas.
2. Demuestre que las seis bisectrices de los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, pasan por tercias por cuatro puntos.
3. Con la notación de la demostración del teorema de Ceva (4.1.4) pág. 155, demuestre que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$

4. Si los puntos C y D dividen interna y externamente el segmento AB en razón $p : q$, demuestre que los puntos B , A dividen el segmento DC interna y externamente en razón $(p + q) : (p - q)$.
5. Si la circunferencia inscrita C_I , del triángulo $\triangle ABC$, es tangente a los lados BC , CA y AB en los puntos I_A , I_B e I_C , entonces las rectas AI_A , BI_B y CI_C son concurrentes. El punto de concurrencia se denomina el punto de Gergonne de triángulo $\triangle ABC$.
6. Dado un triángulo $\triangle ABC$, construya externamente sobre AB y AC los cuadrados $\square ABDE$ y $\square ACFG$ y

Teoremas de Configuración

sean O_1, O_2 los centros de los cuadrados, si M y N denotan los puntos medios de BC y DG respectivamente, como se muestra en la figura adjunta, demuestre que el cuadrilátero $\square MO_1NO_2$ es un cuadrado.



7. En el triángulo $\triangle ABC$, sea D un punto en el lado BC . Suponga que la recta DE biseca el ángulo $\angle ADC$, con E un punto en la recta AC . Trace la recta DF perpendicular a la DE , con F en la recta AB . Demuestre que las rectas AD , BE y CF son concurrentes.
8. Dado un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, si AD es la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$, BE es una mediana

Teoremas de Configuración

y CF es una altura. Demuestre que AD , BE y CF son concurrentes si y solo si F se encuentra en la bisectriz perpendicular de AD .

9. Si P , Q y R son puntos en los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$, de tal forma que AP , BQ y CR son concurrentes, y si QR , RP y PQ cortan BC , CA y AB en P' , Q' y R' respectivamente, entonces:

a) P' , Q' y R' son colineales.

b) Las rectas AP , BQ' y CR' son concurrentes.

10. Una circunferencia C pasa por los vértices B y C del triángulo $\triangle ABC$, además interseca al lado AB en el punto P y al lado AC en el punto R . Si las rectas PR y BC se intersecan en Q , demuestre que

$$\frac{QC}{QB} = \frac{RC \cdot AC}{PB \cdot AB}.$$

11. En un cuadrilátero $\square ABCD$, las rectas que determinan lados opuestos AB y CD se intersecan en P , mientras que las rectas que determinan los lados opuestos AD y BC se intersecan en Q . Suponga además que las rectas diagonales AC y BD intersecan la recta PQ en los puntos X y Y respectivamente. Demuestre que

$$\frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}.$$

Teoremas de Configuración

12. Dado un triángulo $\triangle ABC$ con baricentro G , si se traza una línea recta por el punto G de manera que corte los lados AB y AC en los puntos M y N respectivamente, demuestre que

$$AM \cdot NC + AN \cdot MB = AM \cdot AN.$$

13. Dado un triángulo $\triangle ABC$, E y F puntos sobre los lados AB y AC respectivamente. Suponga que la recta mediana AM interseca a la recta EF en el punto Q . Demuestre que

$$\frac{QE}{QF} = \frac{AC}{AB}.$$

14. Dado el triángulo $\triangle ABC$, suponga que L , M y N son puntos en las rectas determinadas por los lados BC , CA y AB respectivamente. Si las líneas rectas AL , BM y CN concurren en el punto P , exprese la razón $\frac{AP}{PL}$ en términos de los segmentos formados por las rectas concurrentes sobre los lados del triángulo $\triangle ABC$.

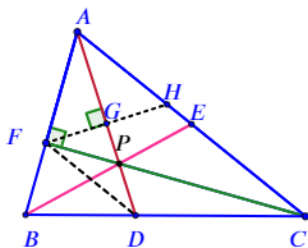
15. Dados un triángulo $\triangle ABC$ y una circunferencia C , tangente al lado BC en su punto medio M , suponga que C interseca a los lados AB y AC en los puntos R , R' y S , S' respectivamente. Si las rectas RS y $R'S'$ intersecan a la recta BC en los puntos P y P' respectivamente, demuestre que $BP \cdot BP' = CP \cdot CP'$.

Teoremas de Configuración

16. Considere un cuadrado $\square ABCD$ y prolonguese el lado AB hasta un punto P en forma tal que $BP = 2AB$. Sea M el punto medio del segmento DC . La recta BM interseca a la recta AC en el punto Q y la recta PQ interseca la recta BC en el punto R , aplique el teorema de Menelao para determinar el valor $\frac{CR}{RB}$.
17. Dado un triángulo $\triangle ABC$, considere las rectas tangentes t_A, t_B y t_C a su circunferencia circunscrita en los vértices A, B y C respectivamente. Supóngase además que t_A interseca BC en el punto P , t_B interseca AC en el punto Q y t_C interseca AB en el punto R . Demuestre que los puntos P, Q y R son colineales.
18. Dado el triángulo $\triangle ABC$, sea CD el segmento perpendicular a AB , con D un punto en la recta AB , y considere un punto P en el interior del segmento DC , suponga además que las rectas AP y CB se intersecan en el punto Q , mientras que las rectas BP y AC se intersecan en el punto R , aplique el teorema de Ceva para demostrar que, en medida, $\angle RDC = \angle QDC$.
19. En el triángulo $\triangle ABC$ denote por F, E y D los pies de las alturas por los vértices A, B y C respectivamente. Cuando se extienden los lados del triángulo $\triangle FED$, las rectas EF, DF y DE intersecan a las rectas AB, AC y BC en los puntos M, N y L respectivamente. Demuestre que M, N y L son puntos colineales.

Teoremas de Configuración

20. Dado un triángulo $\triangle ABC$, suponga que una recta paralela a BC interseca a los lados AB y AC en los puntos B' y C' respectivamente. Demuestre que las rectas BC' , $B'C$ y la recta mediana por A del triángulo $\triangle ABC$ concurren en un punto.
21. Dado un triángulo $\triangle ABC$, dibuje triángulos equiláteros externos a los lados del triángulo $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ y $\triangle ACE$. Demuestre que las rectas AD , BE y CF son concurrentes.
22. Dado un triángulo agudo $\triangle ABC$, suponga que AD es la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$; BE es una mediana y CF es una altura. Demuestre que las rectas AD , BE y CF concurren en un punto P cuando, y solamente cuando, el punto F está en la mediatriz GH del segmento AD .



El triángulo

5.1. Introducción

En este capítulo se estudiarán algunos de los teoremas que muestran las relaciones que existen entre los puntos y las rectas notables del triángulo.

En particular, se estudiará el teorema de Carnot, que proporciona una relación entre las longitudes de las proyecciones del circuncentro sobre los lados de un triángulo con el inradio y el circunradio del triángulo dado, el teorema de la recta de Euler que afirma que el ortocentro, el baricentro y circuncentro son colineales, el teorema de la circunferencia de los nueve puntos y básicamente se presentará la demostración de Feuerbach del teorema de las tangencias de Feuerbach.

5.2. El teorema de Carnot

Carnot en su obra [Ca, §II, cita 137, pg.167–168] enuncia y demuestra, para triángulos acutángulos, el teorema que actualmente se conoce como el teorema de Carnot, el cual se generaliza para cualquier triángulo, y cuyo enunciado se presenta a continuación:

Teorema 5.2.1: de Carnot.

La suma de las distancias desde el circuncentro de un triángulo a sus lados es igual a la suma de los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita del triángulo, tomando con signo negativo la distancia al lado opuesto al ángulo obtuso, si lo tiene.

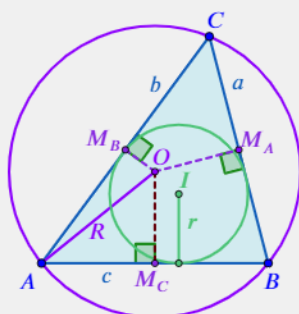


Figura 5.1: $OM_A + OM_B + OM_C = R + r$.

Triángulo

Hipótesis: Dado un triángulo $\triangle ABC$, como el circuncentro es la intersección de las mediatrices, entonces M_A , M_B y M_C son las proyecciones de su circuncentro O sobre los lados BC , CA y AB respectivamente.

Para simplificar la notación, denotaremos las longitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$ como $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, mientras que R es el circunradio y r es el inradio.

Tesis: $OM_A + OM_B + OM_C = r + R$.

Aquí, el signo de la distancia es negativo si el segmento OX está completamente fuera del triángulo $\triangle ABC$, y esto sucede cuando el punto X está en la recta opuesta al ángulo obtuso.

Por esta razón, la demostración se dividirá en tres casos: el triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

Demostración: Si el triángulo $\triangle ABC$ es acutángulo, los cuadriláteros $\square AM_C OM_B$, $\square M_B OM_A C$ y $\square M_C BM_A O$ tienen ángulos opuestos suplementarios, como consecuencia del teorema (2.3.4), pág. 71, ellos son cíclicos convexos, como se muestra en la figura (5.2).

Como el cuadrilátero $\square AM_C OM_B$ es cíclico convexo, como consecuencia del teorema de Ptolomeo (2.4.1), pág. 81, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, por ende,

$$M_B M_C \cdot AO = M_B A \cdot OM_C + AM_C \cdot OM_B.$$

Como M_A , M_B y M_C son los puntos medios de BC , CA y AB , como consecuencia del recíproco del primer teorema

Triángulo

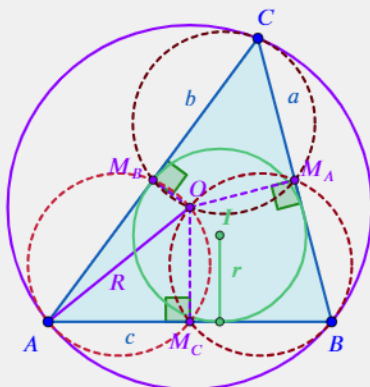


Figura 5.2: $\triangle AM_COM_B$, $\triangle OM_CBM_A$ y $\triangle OM_BOM_A$ son cíclicos convexos.

de Thales, $M_B M_C \parallel BC$ y $M_B M_C = \frac{a}{2}$, véase la demostración de la proposición (4.6.2), pág. 193, así $M_B M_C \cdot AO = \frac{BC}{2} \cdot R = \frac{aR}{2}$, mientras que $M_B A \cdot OM_C + AM_C \cdot OM_B = \frac{b}{2} OM_C + \frac{c}{2} OM_B$ de donde

$$\frac{aR}{2} = \left(\frac{b}{2} OM_C + \frac{c}{2} OM_B + \frac{a}{2} OM_A \right) - \frac{a}{2} OM_A,$$

o equivalentemente

$$aR = (b OM_C + c OM_B + a OM_A) - a OM_A. \quad (5.1)$$

Triángulo

Análogamente, del cuadrilátero cíclico convexo $\square OM_C BM_A$ se deduce que

$$bR = (a OM_C + c OM_A + b OM_B) - b OM_B. \quad (5.2)$$

Y, del cuadrilátero cíclico convexo $\square CM_B OM_A$ se obtiene

$$cR = (a OM_B + b OM_A + c OM_C) - c OM_C. \quad (5.3)$$

Sumando las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) se obtiene

$$\begin{aligned} (a + b + c)R &= (b OM_C + c OM_B + a OM_A) - a OM_A \\ &\quad + (a OM_C + c OM_A + b OM_B) - b OM_B \\ &\quad + (a OM_B + b OM_A + c OM_C) - c OM_C \\ &= (b + a + c) OM_C + (c + b + a) OM_B \\ &\quad + (a + c + b) OM_A \\ &\quad - [a OM_A + b OM_B + c OM_C]. \end{aligned}$$

Si s denota el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$, la ecuación anterior implica que

$$\begin{aligned} 2sR &= 2s(OM_A + OM_B + OM_C) \\ &\quad - [a OM_A + b OM_B + c OM_C]. \end{aligned}$$

Triángulo

Como área $\triangle OCA = \frac{b}{2}OM_B$, área $\triangle OAB = \frac{c}{2}OM_C$,
 área $\triangle OBC = \frac{a}{2}OM_A$ y, ya que el todo es la suma de las
 partes:

$$\text{área } \triangle ABC = \text{área } \triangle OCA + \text{área } \triangle OAB + \text{área } \triangle OBC.$$

Por lo tanto

$$2sR = 2s(OM_A + OM_B + OM_C) - 2\text{área } \triangle ABC.$$

Como consecuencia de la proposición (4.5.3), pág. 188,
 se tiene

$$2Rs = 2s(OM_A + OM_B + OM_C) - 2rs,$$

o equivalentemente,

$$R + r = OM_A + OM_B + OM_C.$$

Lo que concluye la demostración si el triángulo es acutángulo.

Si el triángulo $\triangle ABC$ es obtusángulo, con $\angle ACB$ obtuso, como se muestra en la figura (5.3), se afirma que

$$OM_A + OM_B - OM_C = R + r.$$

Procediendo de manera similar al caso anterior, se deduce que los cuadriláteros $\square OBM_A M_C$, $\square OM_A C M_B$ y $\square OM_C M_B A$ son cíclicos convexos.

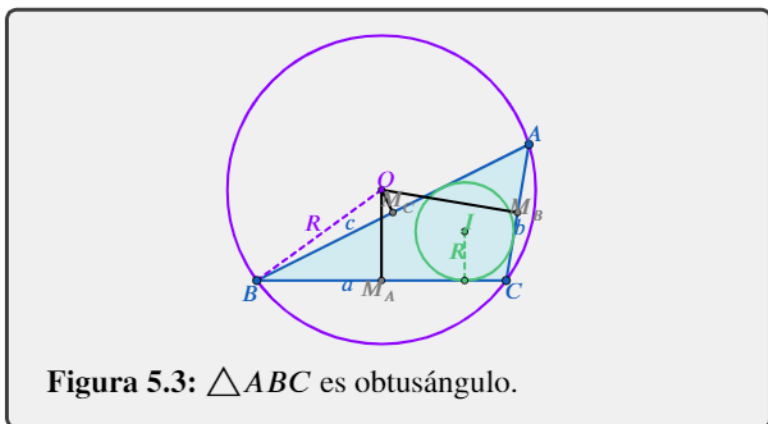


Figura 5.3: $\triangle ABC$ es obtusángulo.

Como el cuadrilátero $\square OBM_A M_C$ es cíclico convexo,

$$OM_A \cdot BM_C = OB \cdot M_A M_C + BM_A \cdot OM_C$$

o equivalentemente, $b R = c OM_A - a OM_C$.

En el cuadrilátero cíclico convexo $\square OM_A C M_B$ se tiene

$$OC \cdot M_A M_B = OM_A \cdot CM_B + M_A C \cdot OM_B,$$

es decir, $c R = b OM_A + a OM_B$.

Finalmente, procediendo de manera análoga con el cuadrilátero cíclico convexo $\square OM_C M_B A$,

$$OM_A \cdot M_C A = OM_C \cdot M_B A + M_C M_B \cdot OA,$$

Triángulo

así, $aR = c OM_B - b OM_C$. De donde

$$\begin{aligned}
 & R(b + c + a) \\
 = & (c OM_A - a OM_C + b OM_B - b OM_B) \\
 & + (b OM_A + a OM_B + c OM_C - c OM_C) \\
 & + (c OM_B - b OM_C + a OM_A - a OM_A) \\
 = & (c + b + a) OM_A + (b + a + c) OM_B - (a + c + b) OM_C \\
 & [-b OM_B + c OM_C - a OM_A] \\
 = & 2s(OD + OE - OF) \\
 & + 2[-\text{área } \triangle OCA + \text{área } \triangle OBA - \text{área } \triangle OBC] \\
 = & 2s(OM_A + OM_B - OM_C) - 2\text{área } \triangle ABC.
 \end{aligned}$$

Por ende

$$2sR = 2s(OM_A + OM_B - OM_C) - 2\text{área } \triangle ABC,$$

y como $\text{área } \triangle ABC = 2sr$, se tiene

$$2sR = 2s(OM_A + OM_B - OM_C) - 2sr.$$

De lo anterior se concluye

$$R + r = OM_A + OM_B - OM_C.$$

Finalmente, si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con $\angle ACB = 1$ recto, como consecuencia del teorema de Pitágoras, el punto O es el punto medio de la hipotenusa, así $R = \frac{c}{2}$

y $O = M_C$, por lo que $OM_C = 0$, $OM_A = \frac{b}{2}$ y $OM_B = \frac{a}{2}$.

Triángulo

Como consecuencia del teorema de Poncelet (4.5.2), pág. 180, en un triángulo rectángulo el inradio satisface

$$a + b = c + 2r,$$

entonces

$$r + R = \frac{a + b - c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a + b}{2} = OM_A + OM_B + OM_C.$$

Q.E.D.

Corolario 5.2.1:

La suma de las distancias desde el ortocentro de un triángulo a sus vértices es igual a la suma de los diámetros de las circunferencias circunscrita e inscrita del triángulo, tomando con signo negativo la distancia al ángulo obtuso, si lo hay.

Demostración: Como la distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto y aplicando el teorema de Carnot se sigue el resultado.

Q.E.D.

Corolario 5.2.2:

El radio de la circunferencia inscrita entre el radio de la circunferencia circunscrita es igual a la suma de los cosenos de los ángulos disminuida en 1.

Triángulo

Demostración: Si $\triangle ABC$ es acutángulo, como se demostró en el teorema de Carnot (5.2.1), pág. 217, el cuadrilátero $\square OM_C BM_A$ es cíclico, véase la figura (5.2), y por el teorema (2.3.1), pág. 61, el ángulo formado por una diagonal y un lado es igual al ángulo formado por la otra diagonal y el lado opuesto, luego entonces $\angle BM_C M_A = \angle BOM_A$.

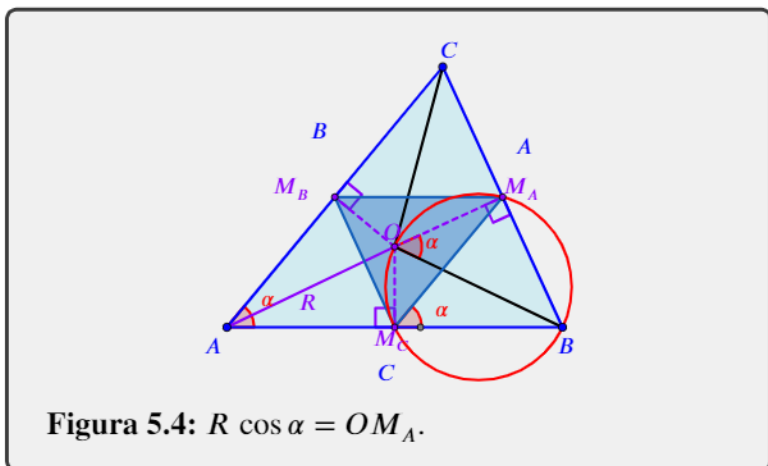


Figura 5.4: $R \cos \alpha = OM_A$.

Pero, $AC \parallel FD$ y AB es una transversal, de donde

$$\alpha = \angle BAC = \angle BM_C M_A = \angle BOM_A.$$

Como $\triangle BOM_A$ es un triángulo rectángulo con $\angle BOM_A = 1$ recto, entonces $OB \cos \alpha = R \cos \alpha = OM_A$

De manera análoga, si $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle ACB$, se demuestra que

Triángulo

$$R \cos \beta = OE \text{ y } R \cos \gamma = OF.$$

Aplicando el teorema de Carnot (5.2.1) pág. 217,

$$R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = OM_A + OM_B + OM_C = R + r.$$

Así,

$$(\cos \angle BAC + \cos \angle CBA + \cos \angle ACB) - 1 = \frac{r}{R}.$$

Si el triángulo es obtusángulo, con $\beta = \angle CBA > 1$ ángulo recto, $\alpha = \angle BAC$ y $\gamma = \angle ACB$, de manera análoga a la anterior se demuestra que

$$\cos \alpha = \frac{OM_A}{R} \text{ y } \cos \gamma = \frac{OM_C}{R}.$$

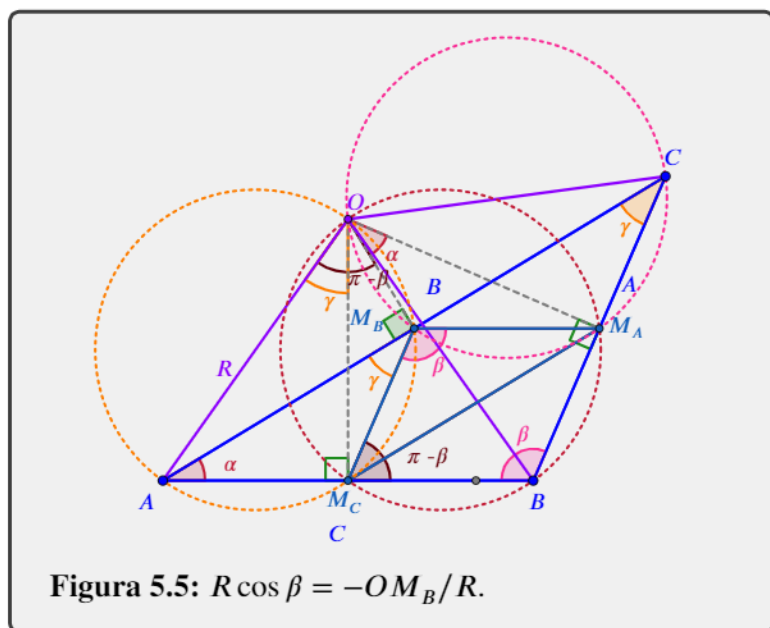
Ya que $\square M_C B M_A M_B$ es un cuadrilátero paralelogramo, se deduce fácilmente que $\angle BFE = \pi - \beta$, y como $\square O A M_C M_E$ es un cuadrilátero cíclico $\angle A O M_B = \pi - \beta$, de donde, $\cos(\pi - \beta) = \frac{OM_B}{R}$, como se muestra en la figura (5.5).

Y como $-\cos \beta = \cos(\pi - \beta)$, se obtiene

$$\cos \beta = -\frac{OM_B}{R}.$$

Como consecuencia del teorema de Carnot para triángulos obtusángulos (5.2.1), pág. 217

Triángulo



$$R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = OM_A - OM_B + OM_C = R + r.$$

Por tanto,

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1 = \frac{r}{R}.$$

Si el triángulo es rectángulo $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA = 1$ recto, $\gamma = \angle BCA$, en particular, $\cos \beta = 0$, y como el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ es semejante a los triángulos

Triángulo

rectángulos $\triangle AM_C O$ y $\triangle OM_A C$, y además, ellos son congruentes, se obtiene $\cos \alpha = \frac{OM_A}{R}$ y $\cos \gamma = \frac{OM_C}{R}$.

Por lo tanto

$$R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) = OM_A + OM_B + OM_C = R + r,$$

de donde

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1 = \frac{r}{R}.$$

Q.E.D.

5.3. El triángulo órtico

El triángulo órtico de un triángulo dado satisface una serie de interesantes propiedades, en esta sección estudiaremos algunas de ellas.

Teorema 5.3.1:

En un triángulo no rectángulo, los tres triángulos que determinan los lados del triángulo órtico son semejantes al triángulo original.

Hipótesis: Sean $\triangle ABC$ un triángulo dado, P_A , P_B y P_C los pies de las alturas sobre BC , CA y AB respectivamente.

Tesis: Los triángulos $\triangle AP_C P_B$, $\triangle P_C B P_A$ y $\triangle P_B P_A C$ son semejantes al triángulo $\triangle ABC$.

Demostración: Si el triángulo $\triangle ABC$ es acutángulo, como $AP_A \perp BC$ y $CP_C \perp CA$, en el cuadrilátero $\square P_C B P_A H$ el

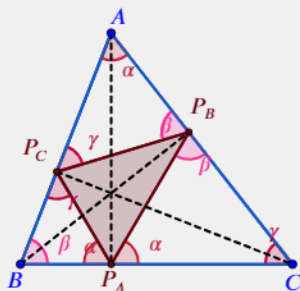


Figura 5.6:

$$\triangle AP_C P_B \sim \triangle P_C B P_A \sim \triangle P_B P_A C \sim \triangle ABC.$$

ángulo $\angle APAB$ formado por el lado $P_B A$ y la diagonal BP_B coincide con el ángulo $\angle BP_C C$, formado por el lado opuesto y la otra diagonal, como consecuencia del teorema (2.3.2), pág. ??, el cuadrilátero $\square P_C B P_A H$ es cíclico convexo, como se muestra en la figura (5.7).

En particular, si $\alpha = \angle P_C P_A B$, $\beta = \angle C B A$ y $\gamma = \angle B P_C P_A$

$$\alpha = \angle P_C H B = \angle C H P_B \text{ y } \gamma = \angle B H P_A = \angle P_B H A.$$

Como los puntos P_C , H y C son colineales, y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, se sigue que

$$\begin{aligned} \angle P_C H B + \angle B H P_A + \angle P_A H C &= \alpha + \gamma + \angle P_A H C \\ &= \angle P_C P_A B + \angle B P_C P_A + \angle P_A B P_C. \end{aligned}$$

Triángulo

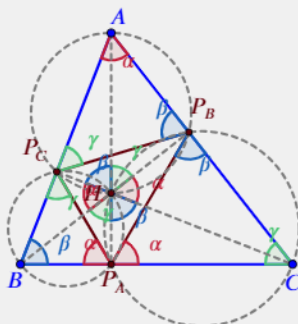


Figura 5.7: $\square P_C B P_A H$, $\square H P_A C P_B$ y $\square A P_C H P_B$ son cíclicos convexos.

De donde $\angle P_A H C = \angle P_A B P_C = \angle C B A = \beta$.

Análogamente, puede demostrarse que los cuadriláteros $\square H P_A C P_B$ y $\square A P_C H P_B$ son cíclicos convexos.

Como $\square H P_A C P_B$ es cíclico convexo, aplicando el teorema (2.3.1), pág. 61, se tiene que

$$\alpha = \angle C H P_B = \angle C P_A P_B, \text{ y } \beta = \angle P_A H C = \angle P_A P_B C.$$

Finalmente, como $\square A P_C H P_B$ es cíclico convexo, entonces

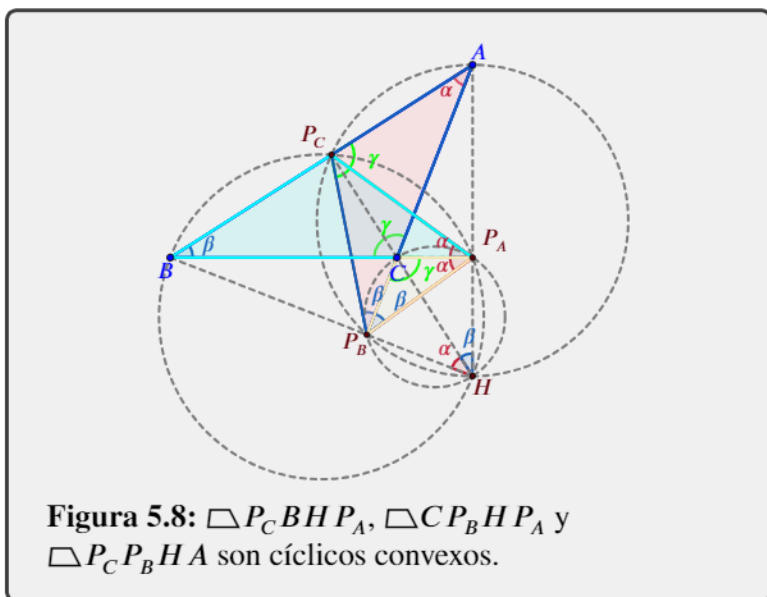
$$\beta = \angle A H P_C = \angle A P_B H \text{ y } \gamma = \angle P_B H A = \angle P_B P_C A.$$

Triángulo

Como dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales, los triángulos

$$\triangle AP_C P_B, \triangle P_C B P_A \text{ y } \triangle P_B P_A C$$

son semejantes al triángulo $\triangle ABC$.



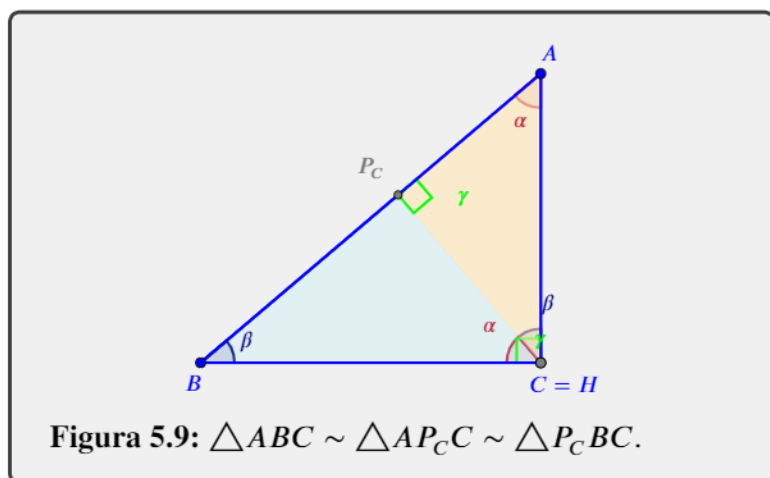
Si el triángulo $\triangle ABC$ es obtusángulo, con ángulo obtuso en el vértice C , procediendo de manera similar, se demuestra que los cuadriláteros $\square P_C B H P_A$, $\square C P_B H P_A$ y $\square P_C P_B H A$ son cíclicos convexos, como se muestra en la figura (5.8).

Triángulo

Finalmente, si el triángulo $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en el vértice C , entonces $P_A = P_B = H = C$, por lo que el triángulo órtico degenera al segmento CP_C y, como consecuencia de los teoremas de semejanza de Thales, solamente hay dos triángulos semejantes al original, a saber,

$$\triangle ABC \sim \triangle AP_C C \sim \triangle P_C BC,$$

como se muestra en la figura (5.9).



Como esperábamos demostrar.

Q.E.D.

Corolario 5.3.1:

Con la notación del teorema anterior, si el triángulo $\triangle ABC$ no es rectángulo, entonces $\triangle ABP_B \sim \triangle AP_C C$, $\triangle ABP_A \sim \triangle BCP_C$ y $\triangle AP_A C \sim \triangle BP_B C$.

Si el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo, $P_A = P_B = H = C$, por lo que solamente se tiene $\triangle ABP_B \sim \triangle AP_C C$ y $\triangle ABP_A \sim \triangle BCP_C$.

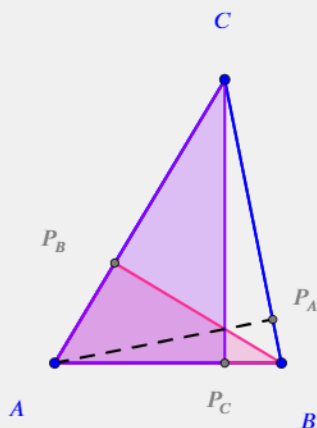


Figura 5.10: $\triangle ABP_B \sim \triangle AP_C C$.

Proposición 5.3.1:

En un triángulo dado, su triángulo órtico asociado satisface las siguientes propiedades:

1. El producto del circunradio R del triángulo dado con la suma de las longitudes de los lados del triángulo órtico es igual al doble del área del triángulo dado, tomando con signo negativo la longitud del lado opuesto al ángulo obtuso del triángulo dado.
2. El área de su triángulo órtico asociado es igual al doble producto de los cosenos de los ángulos interiores por el área del triángulo dado.
3. El inradio ρ del triángulo órtico es igual al doble producto del circunradio dado por el producto de los cosenos de los ángulos interiores del triángulo dado, es decir,

$$\rho = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Mientras que, el radio r_p de la circunferencia circunscrita al triángulo órtico es $R/2$.

Demostración: Dado un triángulo $\triangle ABC$, con ángulos interiores $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle ACB$. Sean P_A , P_B y P_C los pies de sus alturas.

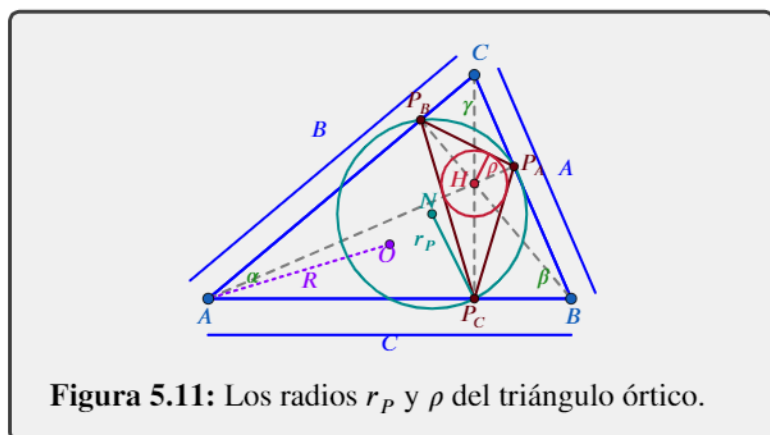


Figura 5.11: Los radios r_p y ρ del triángulo órtico.

En el triángulo $\triangle CAP_C$ se tiene $AP_C = b \cos \alpha$, mientras que en el triángulo $\triangle P_B AB$ se tiene que $AP_B = c \cos \alpha$.

Aplicando la ley de los cosenos al triángulo $\triangle P_B AP_C$ se tiene que

$$P_B P_C^2 = AP_B^2 + AP_C^2 - 2(AP_B)(AP_C) \cos \alpha,$$

de donde, el cuadrado de la distancia de P_B a P_C está dada como

$$\begin{aligned} P_B P_C^2 &= (b \cos \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 - 2(b \cos \alpha)(c \cos \alpha) \cos \alpha \\ &= (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado, si se aplica la ley de los cosenos al triángulo $\triangle ABC$ se obtiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

Triángulo

y, sustituyendo este resultado en la ecuación anterior se obtiene

$$P_B P_C^2 = a^2 \cos^2 \alpha,$$

en otras palabras, la distancia del punto P_B al punto P_C es

$$P_B P_C = \pm a \cos \alpha,$$

tomando en cuenta que $\cos \alpha < 0$ si el ángulo α es obtuso. De manera análoga se obtiene que

$$P_A P_C = \pm b \cos \beta \text{ y } P_B P_C = \pm c \cos \gamma,$$

donde el signo negativo solamente aparece si el ángulo dado es obtuso.

Si $\triangle ABC$ es agudo, expresando el coseno de cada ángulo en términos de sus lados se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \Rightarrow P_B P_C = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2)}{2bc}, \\ \cos \beta &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} \Rightarrow P_C P_A = \frac{b(a^2 - b^2 + c^2)}{2ac}, \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow P_A P_B = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}. \end{aligned}$$

Sumando estos tres valores se obtiene que, la suma de las

Triángulo

longitudes de los lados del triángulo órtico está dado como

$$\begin{aligned}
 & P_A P_B + P_B P_C + P_C P_A = \\
 = & \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2)}{2bc} + \frac{b(a^2 - b^2 + c^2)}{2bc} + \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2bc} \\
 = & \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2abc} \\
 = & \frac{-c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{2abc}
 \end{aligned}$$

Como consecuencia de la fórmula de Herón, el cuadrado del área del triángulo $\triangle ABC$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) \\
 &= \frac{-c^4 + (2b^2 + 2a^2)c^2 - b^4 + 2a^2b^2 - a^4}{16},
 \end{aligned}$$

donde s denota el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$ dado, de donde

$$P_A P_B + P_B P_C + P_C P_A = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{2abc} = \frac{8\Delta^2}{abc}$$

De la proposición (4.8.2), pág. 207, $\Delta = \frac{abc}{4R}$, por tanto:

$$P_A P_B + P_B P_C + P_C P_A = \frac{2\Delta}{R}.$$

Si el triángulo es obtuso, con ángulo obtuso β , entonces

Triángulo

$$P_A P_B + P_B P_C - P_C P_A = \frac{2\Delta}{R}.$$

Con lo cual se concluye la primera parte.

Como el área de un triángulo es igual al producto de una de sus bases por su altura correspondiente, como consecuencia de lo anterior se tiene que área $\triangle AP_B P_C = \Delta \cos^2 \alpha$, área $\triangle BP_A P_C = \Delta \cos^2 \beta$ y área $\triangle CP_A P_B = \Delta \cos^2 \gamma$.

Y como el todo es la suma de las partes:

$$\text{área } \triangle P_A P_B P_C = \Delta (1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma))$$

Ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 2 rectos, entonces $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, de donde

$$\cos \gamma = \cos(\pi - (\alpha + \beta)) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Por ende

$$\cos^2 \gamma = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2.$$

Ya que

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

se sigue que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Por lo tanto

Triángulo

$$\begin{aligned} \text{área } \triangle P_A P_B P_C &= 2\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ &= \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2 b^2 c^2} \Delta. \end{aligned}$$

Como consecuencia de la proposición (4.5.3), pág. 188, se sigue que, si ρ denota el radio de la circunferencia inscrita del triángulo órtico $\triangle P_A P_B P_C$:

$$\rho = \frac{4\Delta \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma} = 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

En particular, el radio r_p de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle P_A P_B P_C$ es $R/2$. **Q.E.D.**

5.4. La recta de Euler

El matemático Leonhard Euler, demostró en 1765 "Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum" (Una solución fácil a un problema muy difícil en geometría), [Eu, pg.115] que el ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo están alineados, además en el caso general, el incentro no forma parte de esta recta, formándose con estos cuatro puntos un triángulo.

Cabe notar que esta recta también contiene al centro de la circunferencia de los nueve puntos, el nombre se debe a que la circunferencia atraviesa nueve puntos con nombre propio, seis de ellos sobre el mismo triángulo, a saber:

Triángulo

- Los tres puntos medios de los tres lados del triángulo.
- Los tres pies de las alturas de tal triángulo.
- Los tres puntos medios de cada uno de los segmentos que unen los tres vértices del triángulo con su ortocentro.

Euler describe su enunciado de la siguiente forma:

El problema de la recta de Euler

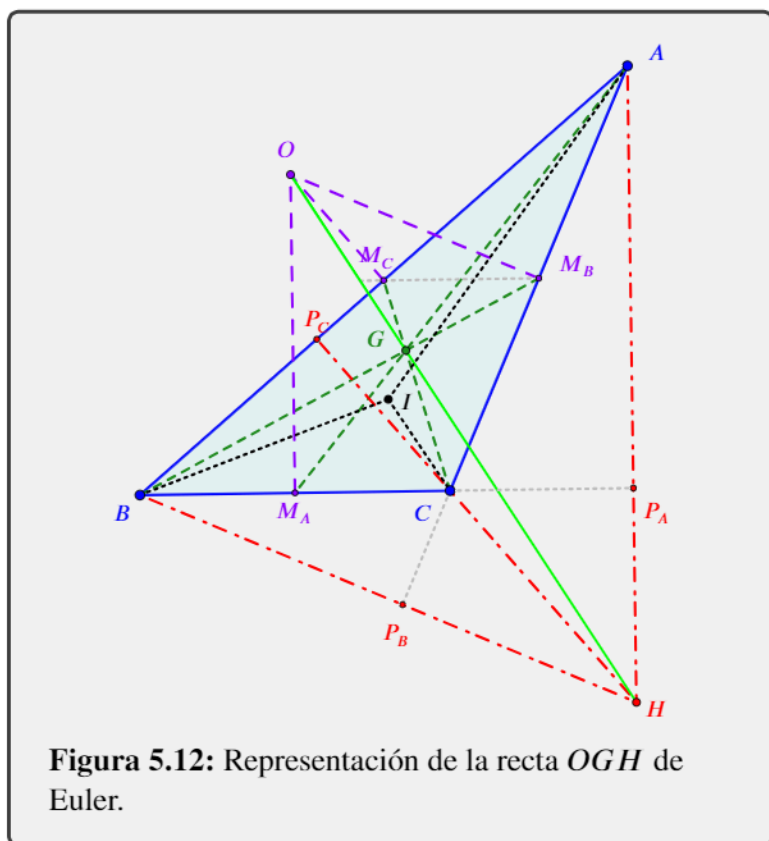
Datis positione his quatuor punctis in quolibet triangulo offignabilibus

1. *Interfectione perpendicularium ex fingulus angulus in latera opposita ductarum E,*
2. *centro gravitatis F,*
3. *centro circuli inscripti G et*
4. *centro circuli circumscriptio H;*

conftruere triangulum.

Quod problema ex hactenus erutis horum punctorum affectionibus fatis concinne refoluere licebit.

Actualmente no se sigue la notación de Euler para estos cuatro puntos notables del triángulo, el problema de Euler con la notación actual, y que se ha utilizado a lo largo del presente capítulo, se muestra en la figura (5.12), y es la siguiente:



En la figura M_A , M_B y M_C denotan los puntos medios de los segmentos BC , CA y AB respectivamente, mientras que P_A , P_B , P_C denotan los pies de las alturas del triángulo $\triangle ABC$ por los vértices A , B y C .

Problema 5.4.1: El problema de Euler

Dado el número de estos cuatro puntos que se pueden encontrar en cualquier triángulo:

1. *Por la intersección de las perpendiculares trazadas desde los vértices del triángulo en los lados opuestos H , es decir, el ortocentro del triángulo.*
2. *Por el centro de gracia G , actualmente al centro de gracia se le denomina el baricentro, centro de masa o centroide de un triángulo.*
3. *En el centro del círculo inscrito I , es decir, el incentro del triángulo.*
4. *En el centro del círculo el circunscrito O , a saber, el circuncentro del triángulo.*

Se formará un triángulo. Este problema puede reexaminarse prolijamente a partir de los afectos de los destinos de estos puntos extraídos hasta ahora.

Desde luego, es posible que algunos de estos puntos coincidan, en cuyo caso dos de ellos determinan la recta de Euler.

Finalmente, en el caso del triángulo equilátero, en que las bisectrices, las mediatrices, las medianas y las alturas coinciden, no hay recta de Euler.

Teorema 5.4.1: de la recta de Euler.

En todo triángulo no equilátero, el circuncentro O , el baricentro G y el ortocentro H son colineales. Además, el baricentro siempre está en el segmento determinado por el circuncentro y el ortocentro y $HG = 2GO$.

Demostración: Prolónguese el segmento de recta OG hasta un punto P tal que $GP = 2OG$.

La proposición (4.6.1), pág. 192, muestra que el baricentro G del triángulo $\triangle ABC$, divide a las medianas en razón $2 : 1$, por lo tanto $AG = 2GM_A$ y $PG = 2GO$.

Además, $\triangle PGA \sim \triangle OGM_A$ ya que $\angle PGA = \angle BGO$, por ser opuestos por el vértice, y los lados que los comprenden son proporcionales, véase la figura (5.13).

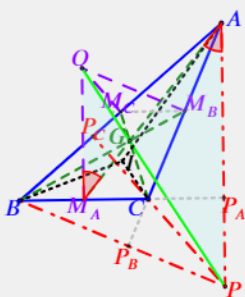


Figura 5.13: $\triangle PGA \sim \triangle OGM_A \Rightarrow OM_A \parallel AP$.

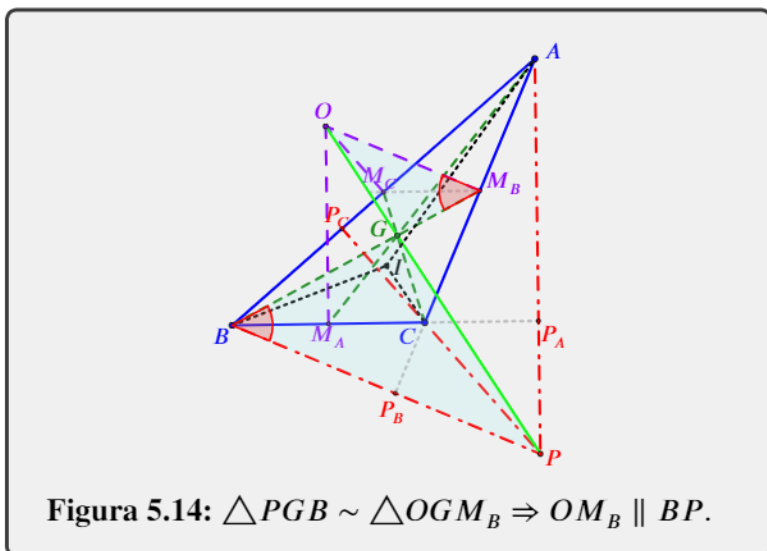
Triángulo

Luego entonces $\angle PAG = \angle GM_AO$, de donde, la recta AP es paralela a la recta OM_A .

Como OM_A es una mediatriz del triángulo $\triangle ABC$, con $OM_A \perp BC$, entonces $AP \perp BC$.

Pero $AG = 2GM_A$ y $PG = 2GO$.

De manera análoga se demuestra que los triángulos $\triangle PGB$ y $\triangle OGM_B$ son semejantes, véase la figura (5.14).



Y BP también es altura del triángulo $\triangle ABC$.

Como BP y AP son alturas del $\triangle ABC$ se concluye que $P = H$, es decir, O , G y H son puntos colineales. **Q.E.D.**

Definición 5.4.1:

A los puntos medios de los segmentos que unen los vértices de un triángulo dado con su ortocentro se les denomina los **puntos de Euler**, y el triángulo que tiene como vértices estos puntos se le conoce como el triángulo de Euler asociado al triángulo dado. Ver figura (5.15).

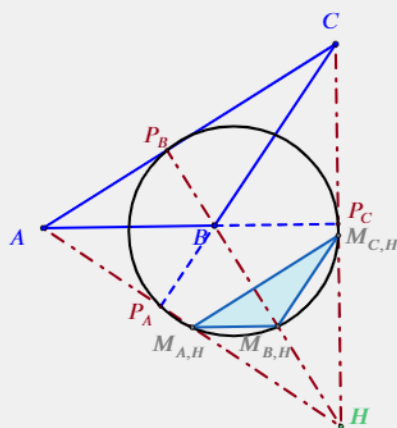


Figura 5.15: Puntos de Euler y triángulo de Euler.

Además, es evidente que el triángulo es similar al triángulo de Euler con razón de semejanza $1/2$ y centro de homotecia H , lo cual se deja como ejercicio para el lector. Con-

Triángulo

secuentemente, el triángulo medial, definición (4.6.2), pág. 194, y el triángulo de Euler son congruentes.

Corolario 5.4.1: El problema de Euler

Con el ortocentro H , el baricentro G , el incentro I y el circuncentro O de un triángulo $\triangle ABC$ se formará, en general, un triángulo.

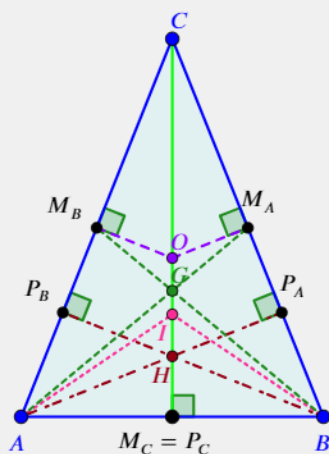


Figura 5.16: La recta de Euler y el triángulo isósceles.

Cuando el triángulo dado es isósceles, la altura que pasa por el vértice en donde se unen los lados iguales, la bisec-

Triángulo

triz interior del ángulo en donde se unen los lados iguales, la mediana por dicho vértice, y la mediatriz del lado opuesto a dicho vértice coinciden, en este caso, los puntos H , G , I y O son colineales, como se aprecia en la figura (5.16).

5.5. La circunferencia de los nueve puntos

La circunferencia de los nueve puntos, también conocida como circunferencia de Feuerbach, o circunferencia de Euler, es la circunferencia que puede trazarse por puntos notables ligados a un triángulo dado.

Su nombre, que menciona el cardinal de un conjunto de puntos, se debe a que la circunferencia atraviesa nueve puntos con nombre propio, seis de ellos sobre el mismo triángulo, a saber:

- Los tres centros de los tres lados del triángulo.
- Los tres pies de las alturas de tal triángulo.
- Los tres centros de cada uno de los segmentos que unen los tres vértices del triángulo con su ortocentro.

Teorema 5.5.1: de la circunferencia de los nueve puntos.

Los pies de las tres alturas del triángulo $\triangle ABC$, los puntos medios de sus tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $R/2$, donde R es el circunradio del triángulo $\triangle ABC$. Esta circunferencia se conoce como la circunferencia de los nueve puntos del triángulo dado.

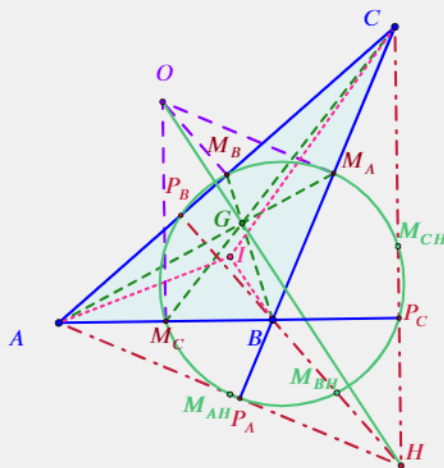


Figura 5.17: La circunferencia de los 9 puntos.

Triángulo

Hipótesis: Dado el triángulo $\triangle ABC$, con ortocentro H y circuncentro O . Sean P_A, P_B, P_C los pies de sus alturas, M_A, M_B, M_C los puntos medios de sus lados de los lados BC, CA, AB y M_{AH}, M_{BH}, M_{CH} los puntos medios de los segmentos que van de los vértices A, B y C al ortocentro H respectivamente.

Tesis: La circunferencia circunscrita C asociada al triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$ contiene los puntos $P_A, P_B, P_C, M_A, M_B, M_C, M_{AH}, M_{BH}$ y M_{CH} . Además, su radio es $R/2$, donde R es el circunradio asociado al triángulo $\triangle ABC$.

Demostración: La proposición (4.6.2), pág. 193, afirma que los lados del triángulo medial son paralelos a los lados del triángulo dado, y su longitud es la mitad de éste.

- Aplicada al triángulo medial del triángulo $\triangle ABC$:

$$M_B M_C \parallel BC \wedge 2M_B M_C = BC.$$

$$AB \parallel M_A M_B \wedge AB = 2M_A M_B.$$

- Aplicada al triángulo medial del triángulo $\triangle CBH$:

$$CB \parallel M_{BH} M_{CH} \wedge 2M_{BH} M_{CH} = CB.$$

$$BH \parallel M_A M_{CH} \wedge 2M_A M_{CH} = BH.$$

- Aplicada al triángulo medial del triángulo $\triangle BAH$:

$$M_C Q \parallel AH \wedge 2M_C Q = AH.$$

Triángulo

- Finalmente, aplicada al triángulo medial del triángulo $\triangle CAH$:

$$M_B M_{CH} \parallel AH \wedge 2M_B M_{CH} = AH.$$

Ya que $M_B M_C = M_{BH} M_{CH}$, $M_B M_C \parallel M_{BH} M_{CH}$, como $M_C M_{BH} = M_{CH} M_B$ y $M_C M_{BH} \parallel M_{CH} M_B$ se tiene así el cuadrilátero paralelogramo $\square M_B M_C M_{BH} M_{CH}$.

Finalmente, $AH \perp BC$, $AH \parallel M_C M_{BH}$ y $BC \parallel M_B M_C$ implica que $\angle M_{BH} M_C M_B = 1$ recto, y el paralelogramo $\square M_B M_C M_{BH} M_{CH}$ es un rectángulo, ver figura (5.18).

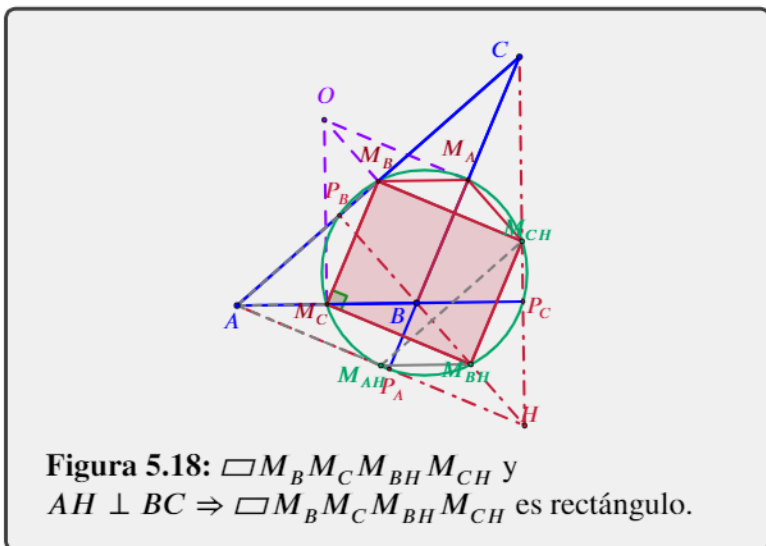
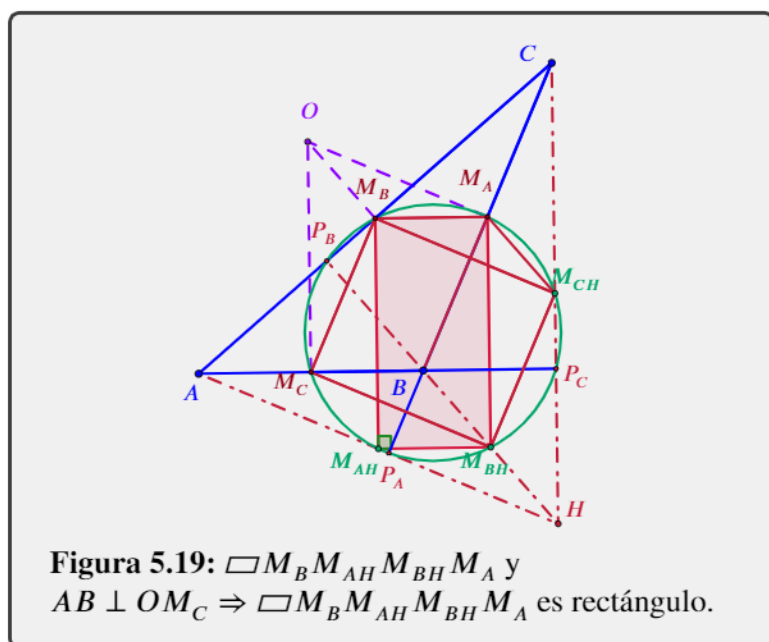


Figura 5.18: $\square M_B M_C M_{BH} M_{CH}$ y $AH \perp BC \Rightarrow \square M_B M_C M_{BH} M_{CH}$ es rectángulo.

Triángulo

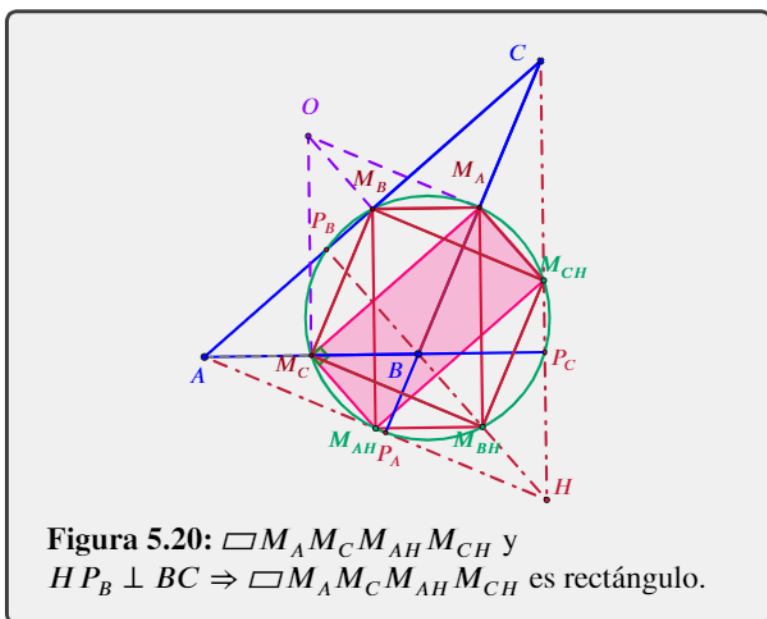
De manera análoga, el triángulo $\triangle M_B M_{AH} M_{CH}$ es el triángulo medial del $\triangle CAH$, de donde $2M_B M_{AH} = HC$ y $M_B M_{AH} \parallel HC$, y $\triangle CBH$ tiene como triángulo medial $\triangle M_A M_{BH} M_{CH}$, por lo que $M_B M_{AH} = M_{BH} M_A$, asimismo $2M_{AH} M_{BH} = BA$, $M_{AH} M_{BH} \parallel BA$, $2M_A M_B = AB$ y $M_A M_B \parallel AB$, de donde, $\square M_B M_{AH} M_{BH} M_A$ es un paralelogramo.

Ya que $HC \perp AB$, este cuadrilátero $\square M_B M_{AH} M_{BH} M_A$ es un rectángulo, como se muestra en la figura (5.19).



Triángulo

Procediendo de manera similar, se tiene que el cuadrilátero paralelogramo $\square M_A M_C M_{AH} M_{CH}$ también es un rectángulo, como se muestra en la figura (5.20).



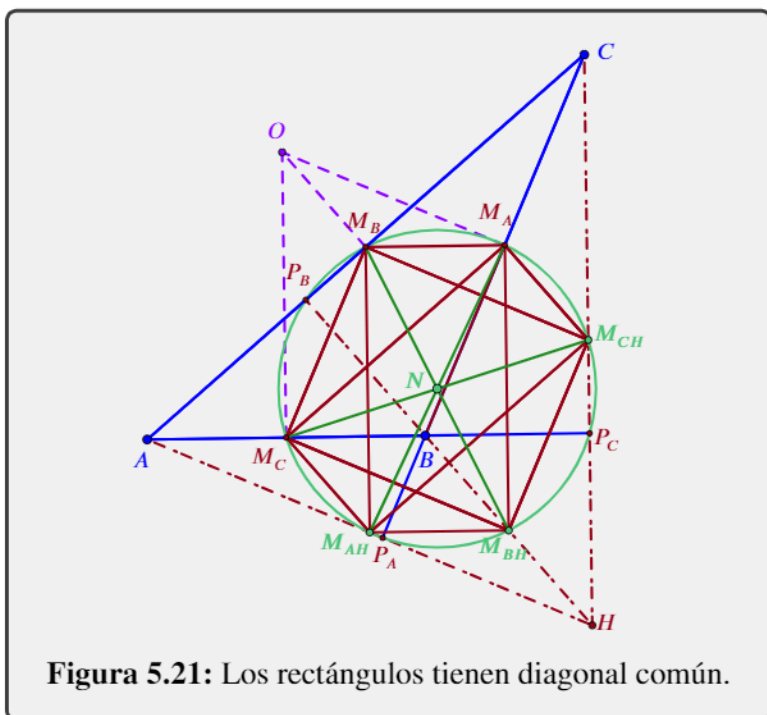
Como en un rectángulo sus diagonales son congruentes y se cortan en el punto medio, en particular:

1. $M_B M_{BH} = M_C M_{CH}$ son diagonales del rectángulo $\square M_B M_C M_{BH} M_{CH}$.
2. $M_B M_{BH} = M_{CH} M_A$ son diagonales del rectángulo $\square M_B M_{AH} M_{BH} M_A$.

Triángulo

3. Por lo tanto, $M_C M_{CH} = M_{AH} M_A$.

Pero, como se ha visto anteriormente, cada dos de los rectángulos tienen una diagonal común, por lo tanto, todos ellos son diámetros de la misma circunferencia, a saber, la circunferencia circunscrita del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$ como se muestra, en la figura (5.21).



Triángulo

En particular, los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$ están en la circunferencia circunscrita C del triángulo medial.

Y el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$ es igual a $R/2$ donde R es el circunradio del triángulo $\triangle ABC$.

Como $P_A \in AH$ y $AH \perp BC$, en particular, el ángulo $\angle M_A P_A M_{AH} = 1$ ángulo recto, por teorema de Thales, P_A pertenece a la circunferencia C de diámetro $M_A M_{AH}$. Análogamente, los puntos P_B, P_C pertenecen a la circunferencia C .

Por lo tanto, los tres pies P_A, P_B y P_C de las alturas, los tres puntos medios M_A, M_B y M_C de los lados del triángulo $\triangle ABC$ y los tres puntos medios M_{AH}, M_{BH} y M_{CH} de los segmentos AH, BH y CH que unen los vértices con el ortocentro H están en una circunferencia de radio $R/2$.

Como consecuencia de lo anterior, el circuncentro N del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$ es el centro de la circunferencia de los nueve puntos. **Q.E.D.**

El teorema de la circunferencia de los nueve puntos (5.5.1), pág. 248, nos dice que:

Corolario 5.5.1:

El triángulo de Euler, el triángulo medial y el triángulo órtico, de un triángulo dado, tienen la misma circunferencia circunscrita.

Proposición 5.5.1:

El centro N de la circunferencia de los nueve puntos, es el punto medio del segmento que une el ortocentro H y el circuncentro O del triángulo $\triangle ABC$ dado.

Demostración: Con la notación del teorema anterior (5.5.1), pág. 248, se demostrará primero que $M_{AH}H = OM_A$.

Como consecuencia de la proposición (4.6.2), pág. 193, los triángulos $\triangle AM_C M_B$ y $\triangle M_A M_B M_C$ son congruentes.

Además, por el corolario (4.8.1), pág. 205, el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$ coincide con el ortocentro del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$.

Ya que $\triangle ABC$ es directamente proporcional al triángulo $\triangle AM_C M_B$, M_C es el punto medio de BC y M_B es el punto medio de CA , entonces el ortocentro del triángulo $\triangle AM_C M_B$ coincide con el punto M_{AH} , el punto medio del segmento AH .

Como $OM_A \perp BC$ y $AH \perp BC$, entonces $OM_A \parallel AH$.

Si P'_A , P'_{M_B} y P'_{M_C} denotan los pies de las alturas del triángulo $\triangle AM_C M_B$, y P_{M_A} , P_{M_B} y P_{M_C} denotan las alturas del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$ y, ya que $P_{M_A} P'_A \perp AH$, los triángulos rectángulos $\triangle AP'_A M_B$ y $\triangle M_A P_{M_A} M_C$ son congruentes y, en particular $AP'_A = M_A P_{M_A}$.

Por lo tanto $AM_{AH} = OM_A$, pero M_{AH} es el punto medio del segmento AH , de donde $AM_{AH} = M_{AH}H$.

De donde $M_{AH}H = M_A O$, y como $M_{AH}H \parallel OM_A$, el

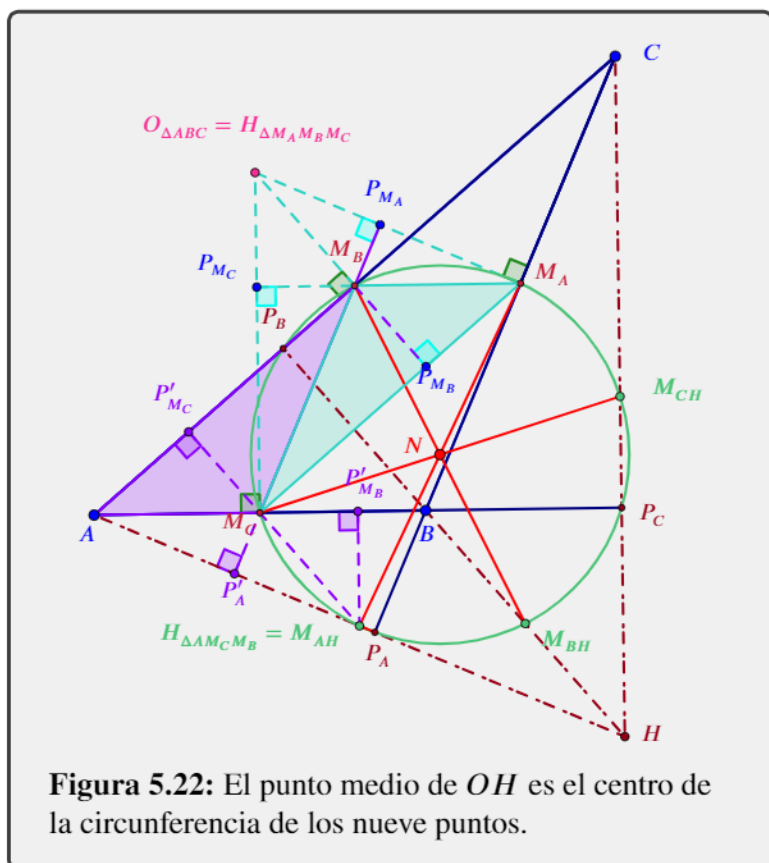


Figura 5.22: El punto medio de OH es el centro de la circunferencia de los nueve puntos.

cuadrilátero $\square M_{AH} H M_A O$ es un paralelogramo.

Si N es la intersección de sus diagonales entonces, N es punto medio de HO y $M_{AH} M_A$.

Triángulo

Pero el punto medio de $M_{AH}M_A$ es el centro de la circunferencia C de los nueve puntos.

Luego entonces, el punto medio N del segmento OH es el centro de la circunferencia de los nueve puntos. **Q.E.D.**

Corolario 5.5.2:

El baricentro G divide en razón 1 : 2 al segmento NO , donde O es el circuncentro y N es el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo dado, es decir, $GO = 2NG$.

Demostración: De la proposición (5.5.1), pág. 255, se tiene que N es el punto medio del ortocentro H y el circuncentro O , en particular $HO = HN + NO$, con $HN = NO$.

De donde

$$\begin{aligned}HG &= HN + NG \\&= NO + NG \\&= (NG + GO) + NG \\&= 2NG + GO.\end{aligned}$$

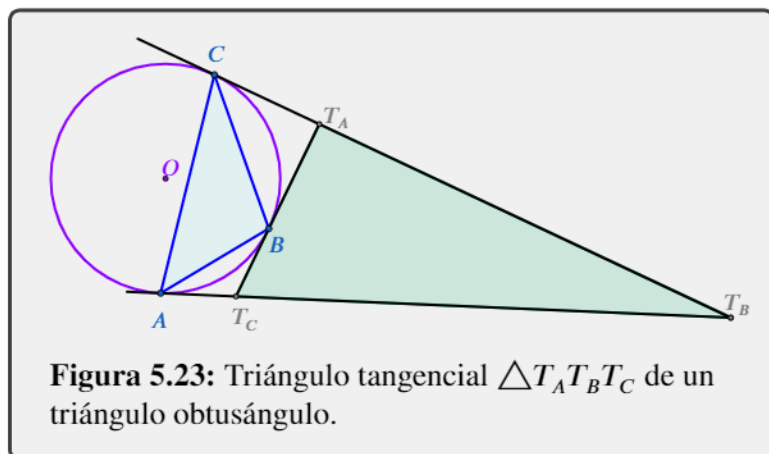
Por el teorema de la recta de Euler (5.4.1), pág. 243, el baricentro G siempre está en el segmento determinado por el circuncentro y el ortocentro y, además $HG = 2GO$.

Luego entonces $2GO = HG = 2NG + GO$ y, por tanto, $GO = 2NG$. **Q.E.D.**

Definición 5.5.1:

El **triángulo tangencial** de un triángulo dado, que no sea un triángulo rectángulo, es el triángulo cuyos lados son tangentes con respecto a la circunferencia circunscrita del triángulo dado en sus tres vértices.

Si el triángulo es obtusángulo, el triángulo tangencial tiene como base el segmento de recta que es tangente al ángulo obtuso, y no contiene en su interior a la circunferencia circunscrita del triángulo dado, como se muestra en la figura (5.23).



En un triángulo acutángulo, es evidente que, la circunferencia inscrita del triángulo tangencial, coincide con la cir-

Triángulo

circunferencia circunscrita del triángulo dado, como se muestra en la figura (5.24).

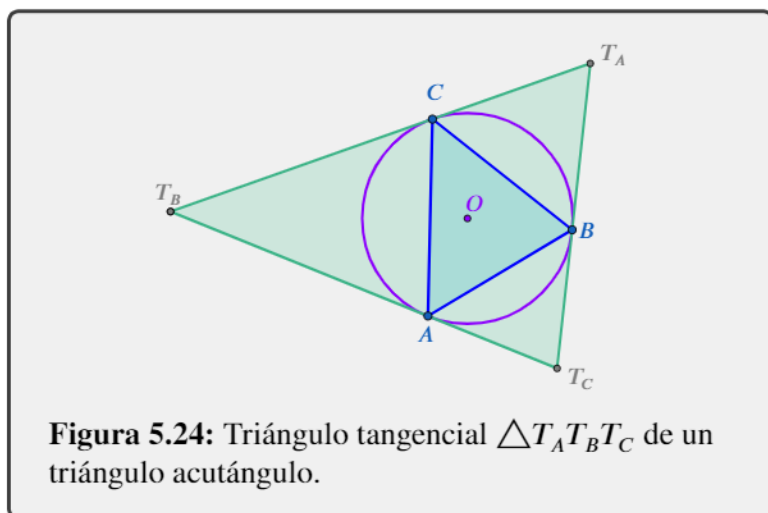


Figura 5.24: Triángulo tangencial $\triangle T_A T_B T_C$ de un triángulo acutángulo.

Un triángulo rectángulo no tiene triángulo tangencial, porque las líneas tangentes a su circunferencia circunscrita en sus vértices agudos son paralelas y, por lo tanto, no pueden formar los lados de un triángulo.

Proposición 5.5.2:

El triángulo tangencial y el triángulo órtico de un triángulo dado son homotéticos desde un punto que se encuentra en la recta de Euler.

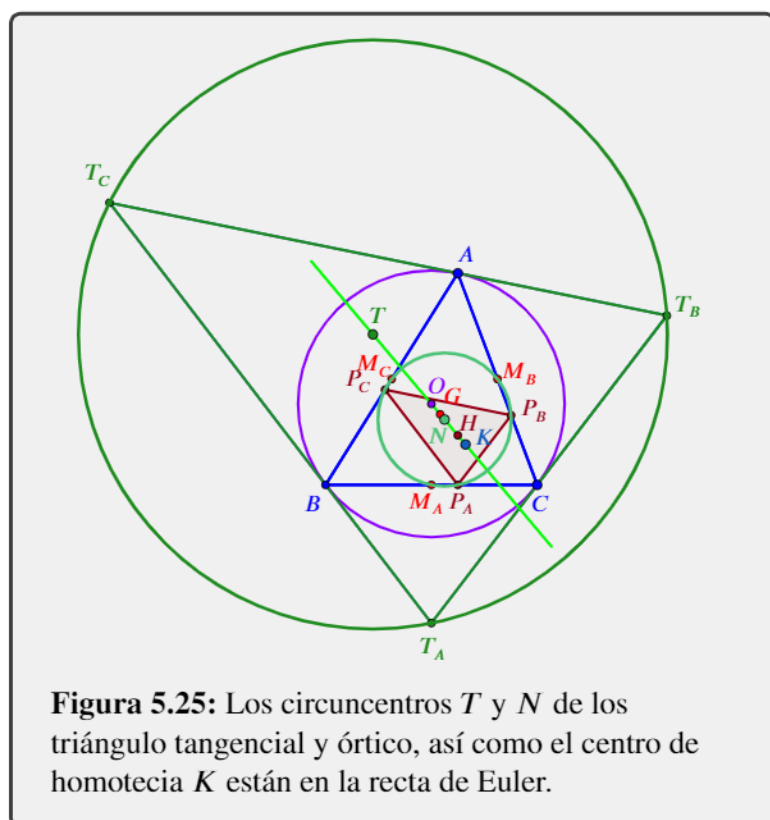


Figura 5.25: Los circuncentros T y N de los triángulo tangencial y órtico, así como el centro de homotecia K están en la recta de Euler.

Demostración: Sean $\triangle P_A P_B P_C$ y $\triangle T_A T_B T_C$ el triángulo órtico y tangencial respectivamente del triángulo $\triangle ABC$.

Como los lados del triángulo tangencial son perpendiculares a los radios que pasan por los vértices del triángulo da-

Triángulo

do, entonces los lados del triángulo órtico son paralelos a los lados del triángulo tangencial y esto implica que los triángulos son homotéticos.

Como $\triangle P_A P_B P_C$ y $\triangle T_A T_B T_C$ son homotéticos entonces sus respectivos incentros son puntos homólogos.

Como el incentro del triángulo órtico es el ortocentro del triángulo dado $\triangle ABC$ y, por construcción, el incentro del triángulo tangencial es el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$.

Y ya que el centro de homotecia se encuentra en la recta que pasa por cualquier par de puntos homólogos, entonces el centro de homotecia de $\triangle P_A P_B P_C$ y $\triangle T_A T_B T_C$ se encuentra en la recta determinada por H y O , es decir, la recta de Euler del triángulo $\triangle ABC$. **Q.E.D.**

Teorema 5.5.2:

El circuncentro del triángulo tangencial de un triángulo dado se encuentra en la recta de Euler del triángulo dado.

Demostración: Como el triángulo tangencial y el triángulo órtico de un triángulo $\triangle ABC$ están en homotecia desde un punto K que se encuentra en la recta de Euler de $\triangle ABC$ y como los circuncentros T y N de los triángulos tangencial y el triángulo órtico, son puntos correspondientes de esta homotecia, entonces T es colineal con N y K , como se muestra en la figura (5.25). Además, N es el centro de la circunferencia de los nueve puntos.

Triángulo

Como el radio de la circunferencia de los nueve puntos es igual a la mitad del circunradio y el centro de los nueve puntos biseca al segmento que une al circuncentro con el ortocentro, N está en la recta de Euler de $\triangle ABC$, por lo tanto, T está en la recta de Euler de $\triangle ABC$. **Q.E.D.**

Corolario 5.5.3:

El circuncentro de un triángulo dado se encuentra en la recta de Euler del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo dado.

Demostración: Notemos que todo triángulo es el triángulo tangencial del triángulo formado por los puntos de tangencia de su incírculo con sus lados.

El resultado se sigue al aplicar el teorema anterior. **Q.E.D.**

Corolario 5.5.4:

El cuadrado del circunradio de un triángulo es dos veces el producto del inradio de su triángulo órtico multiplicado por el circunradio de su triángulo tangencial.

Demostración: Sean R , p y ρ los circunradios de $\triangle ABC$, de su triángulo tangencial $\triangle T_A T_B T_C$ y el inradio de su triángulo órtico $\triangle P_A P_B P_C$, respectivamente.

Como $\triangle T_A T_B T_C$ y $\triangle P_A P_B P_C$ son homotéticos entonces la razón entre sus inradios y la razón entre sus circunra-

Triángulo

dios son iguales a su razón de homotecia y por lo tanto son iguales entre si, además el radio de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es igual a la mitad del circunradio, R es dos veces el circunradio del triángulo $\triangle P_A P_B P_C$.

Como

$$\frac{R}{\rho} = \frac{p}{R/2},$$

entonces $R^2 = 2p\rho$.

Q.E.D.

5.6. Teorema de Feuerbach

Boyer, en su libro [Bo, pg.659] escribió:

“Que el círculo de los nueve puntos debe conocerse como el círculo de Feuerbach no está justificado por prioridad de publicación, sino a través de otras propiedades descubiertas por Feuerbach. El centro del círculo de los nueve puntos, él mostró que estaba en las líneas de Euler y es la mitad del camino entre el ortocentro y el circuncentro. Más notable todavía, es la propiedad contenida en lo que ahora es conocido como el teorema de Feuerbach: el círculo de los nueve puntos es tangente internamente al círculo inscrito y tangente externamente a los tres círculos exinscritos, posiblemente el teorema más bonito en geometría elemental que se ha descubierto desde los tiempos de Euclides.”

Aunque fue Olry Terquem, poco después de Feuerbach, quien demostró la existencia del círculo de nueve puntos, siendo el primero en reconocer las propiedades de los puntos de

Triángulo

Euler, a saber, los tres puntos medios de los segmentos entre los vértices y el ortocentro, y por lo tanto, fue el primero en usar el nombre de la circunferencia de los nueve puntos.

En esta sección seguiremos el procedimiento realizado por Feuerbach para demostrar su teorema, que se basa en la comparación de las distancias entre el centro de la circunferencia de los nueve puntos y los centros de las circunferencias tangentes al triángulo dado con los radios de sus circunferencias asociadas.

Lema 5.6.1:

Dado un triángulo $\triangle ABC$, si I denota su incentro e I_C denota el pie de la perpendicular de I sobre el lado BC , entonces

$$1. AI = \sqrt{\frac{4bc(-a + b + c)}{a + b + c}}.$$

$$2. AI_C = \frac{-a + b + c}{2}.$$

Demostración: Si $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$ denotan las longitudes de los lados del triángulo $\triangle ABC$, y $\alpha = \angle BAC$, como consecuencia de la ley de los cosenos

$$\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}.$$

Ya que I_C es el pie de la perpendicular del incentro I

Triángulo

sobre el lado BC , en particular $\triangle IAI_C$ es un triángulo rectángulo, y $r = II_C$ es el radio de la circunferencia inscrita.

Además, $\angle I_CAI = \frac{\alpha}{2}$, de donde $AI_C = AI \cos \frac{\alpha}{2}$.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras

$$AI^2 = AI_C^2 + I_C I^2 = AI^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + r^2.$$

Luego entonces

$$AI^2 \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) = r^2. \quad (5.4)$$

A continuación se procederá a obtener los valores de r^2 y $1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ en términos de a , b y c .

Como $r = \frac{\Delta}{s}$, donde $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ denota el área y s el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$, entonces

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\Delta^2}{s^2} \\ &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}. \end{aligned}$$

Ya que $a^2 - (b-c)^2 = (a - (b-c))(a + (b-c))$ se sigue que

$$r^2 = \frac{(-a+b+c)(a^2 - (b-c)^2)}{4(a+b+c)}. \quad (5.5)$$

Triángulo

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{4bc} \\ &= \frac{-a^2 + (b + c)^2}{4bc}.\end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - \left(\frac{-a^2 + (b + c)^2}{4bc} \right) \\ &= \frac{4bc - (-a^2 + b^2 + 2bc + c^2)}{4bc} \\ &= \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{4bc}.\end{aligned}$$

Así,

$$1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}. \quad (5.6)$$

Como consecuencia de las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6) se deduce que

$$\begin{aligned}AI^2 &= r^2 \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{(-a + b + c)(a^2 - (b - c)^2)}{4(a + b + c)} \right) \left(\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} \right)^{-1} \\ &= \frac{bc(-a + b + c)}{a + b + c}.\end{aligned}$$

Triángulo

Con lo que se concluye la primera parte.

Para la segunda parte, como

$$AI_C^2 = AI^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} AI_C^2 &= \left(\frac{bc(-a+b+c)}{a+b+c} \right) \left(\frac{-a^2+(b+c)^2}{4bc} \right) \\ &= \frac{(-a+b+c)(a+b+c)(-a+b+c)}{4(a+b+c)} \\ &= \frac{(-a+b+c)^2}{4}. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que $AI_C = \frac{-a+b+c}{2}$, y se tienen los resultados análogos para los otros vértices. **Q.E.D.**

Lema 5.6.2:

En cualquier triángulo, el cuadrado de la distancia entre los centros de la circunferencia inscrita y la circunscrita es igual al cuadrado del radio de la circunferencia circunscrita menos el doble producto de este radio por el radio de la circunferencia inscrita.

Demostración: Dado un triángulo $\triangle ABC$, si $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$ son las longitudes de sus lados, M_A , M_B y M_C son los puntos medios de los lados BC , CA y AB respectivamente.

Triángulo

Además, r e I denotan el radio y centro de su circunferencia inscrita, R y O el radio y centro de su circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$

Si $I_C \in AB$ denota el pie de la perpendicular al segmento AB por el punto C y si O_{I_C} denota el pie de la perpendicular por el punto O , como consecuencia del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\triangle O_{I_C}OI$

$$\begin{aligned}OI^2 &= M_C I_C^2 + IO_{I_C}^2 \\&= (AI_C - AM_C)^2 + (M_C O - I_C I)^2.\end{aligned}$$

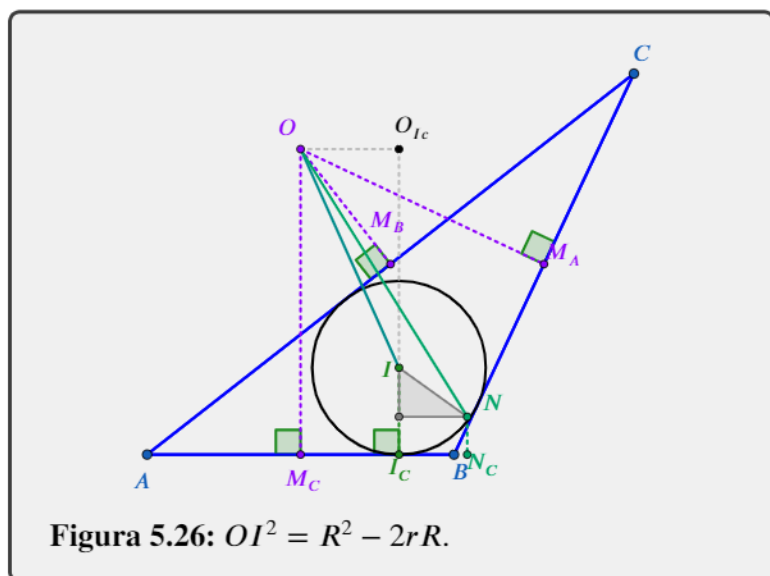


Figura 5.26: $OI^2 = R^2 - 2rR$.

Triángulo

Como M_C es el punto medio del segmento $c = AB$ se tiene $AM_C = \frac{c}{2}$ y, por el lema anterior (5.6.1), pág. 264, $AI_C = \frac{-a+b+c}{2}$, entonces

$$AI_C - AM_C = \frac{-a+b+c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{-a+b}{2}.$$

Además, como consecuencia de la proposición (4.5.3), pág. 188,

$$I_C I = r = \frac{2\Delta}{a+b+c} = \frac{\Delta}{s}.$$

Y por la proposición (4.8.2), pág. 207,

$$M_C O = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8\Delta},$$

se sigue que,

$$\begin{aligned} IO_{I_C}^2 &= (M_C O - I_C I)^2 \\ &= \frac{c(a^2 + b^2 - c^2) - (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{8\Delta}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5.7) se obtiene

$$OI^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 - abc(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{16\Delta^2},$$

Triángulo

que, en términos de los valores conocidos de r y R dados en las proposiciones (4.5.3) y (4.8.2), páginas 188 y 207 respectivamente, se describe como

$$OI^2 = R^2 - 2rR,$$

lo cual esperábamos demostrar.

Q.E.D.

De manera análoga se demuestra que, si E_A, r_A, E_B, r_B y E_C, r_C son los excentros y exradios de las circunferencias exinscritas del triángulo $\triangle ABC$

$$OE_A^2 = R^2 + 2r_A R.$$

Exactamente de la misma forma se obtiene que

$$HI^2 = 2r^2 - 2\rho R,$$

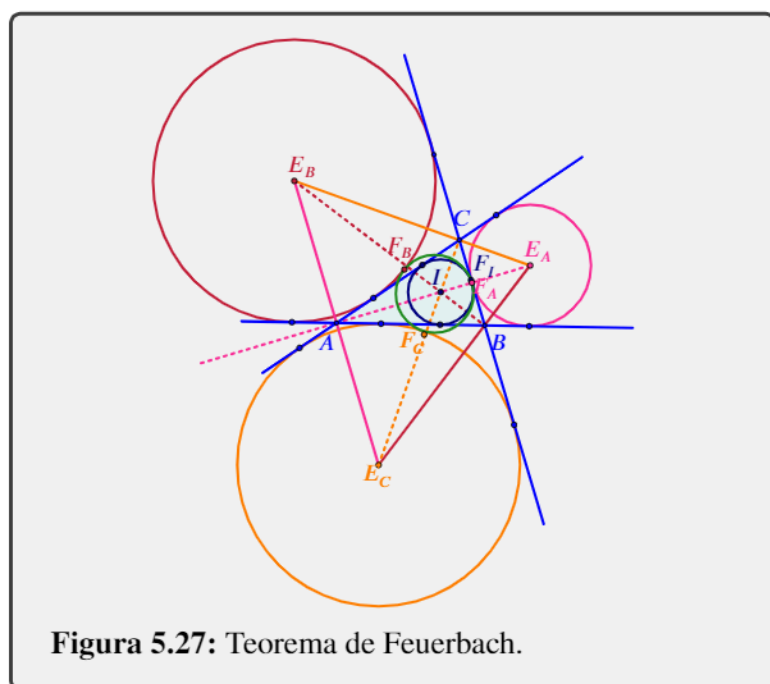
y

$$OH^2 = R^2 - 4\rho R,$$

donde ρ es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle P_A P_B$, y se deja como ejercicio al lector verificarlo.

Teorema 5.6.1: de Feuerbach.

En un triángulo no equilátero, la circunferencia de los nueve puntos es tangente interna a la circunferencia inscrita y es tangente externa a las circunferencias ex-critas del triángulo dado.

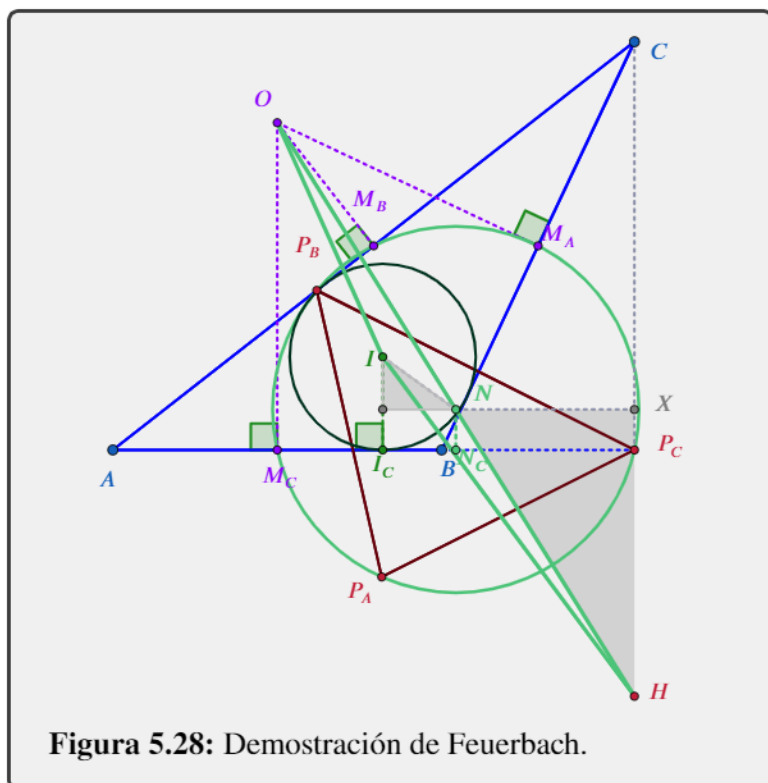


Demostración: Supongamos que la circunferencia de los nueve puntos y el incírculo no son concéntricos.

Como dos circunferencias no concéntricas son tangentes internamente cuando, y solamente cuando, la distancia entre sus centros es igual al valor absoluto de la diferencia entre sus radios, y ya que, por el teorema (5.5.1), pág. 248, el radio de la circunferencia de los nueve puntos es $R/2$, y si r es el radio de la circunferencia inscrita, entonces la diferencia entre sus

Triángulo

radios es $\frac{R}{2} - r$.



A continuación, procederemos a calcular la distancia entre N y el punto I .

Trácese el segmento NI , y considérese el triángulo del problema de Euler $\triangle OHI$, como el centro de la circunferen-

Triángulo

cia de los nueve puntos N es punto medio del segmento OH , entonces $OH = ON + NH$, con $ON = NH$, de donde:

$$2HN^2 + 2NI^2 = OI^2 + IH^2.$$

Si se sustituyen en esta ecuación los valores de los cuadrados de los segmentos HN , OI , y HI hallados anteriormente implica que

$$NI^2 = \frac{R^2}{4} - rR + r^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 \Rightarrow NI = \frac{R}{2} - r.$$

Análogamente, cambiando por turno el signo a los valores a , b y c se tiene que

$$NE_A = \frac{R}{2} + r_A, NE_B = \frac{R}{2} + r_B, NE_C = \frac{R}{2} + r_C.$$

Como el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle P_A P_B P_C$ es $\frac{R}{2}$, y ya que dos circunferencias son internamente tangentes cuando la distancia entre sus centros es igual a la diferencia entre sus radios, se concluye que, la circunferencia de los nueve puntos C y la circunferencia inscrita C_I son tangentes internamente.

Como la suma del radio de la excircunferencia con excentro E_A y la circunferencia de los nueve puntos es $E_A N = r_A + \frac{R}{2}$, entonces C_{E_A} y C son tangentes.

Si la circunferencia de los nueve puntos C y la circunferencia inscrita C_I son concéntricas, en particular $I = N$, de

Triángulo

donde

$$0 = IN = \frac{R}{2} - r = \frac{OI^2}{2R}.$$

Por lo tanto, $I = O$ y el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.
Q.E.D.

Definición 5.6.1:

Al punto de tangencia entre el incírculo y la circunferencia de los nueve puntos, se le conoce como **punto de Feuerbach**.

El punto de Feuerbach satisface una serie de propiedades interesantes, entre ellas se demuestra que es posible construir tres triángulos asociados a la circunferencia inscrita, cuyas rectas de Euler concurren en el punto de Feuerbach del triángulo original [SY], sin embargo, el estudio de las propiedades de este punto queda fuera de los alcances de este curso.

5.7. Ejercicios

1. Demuestre el teorema de Erdős-Mordel: Si O es un punto cualquiera dentro de un triángulo $\triangle ABC$, y P , Q , R son los pies de las perpendiculares por O a los lados correspondientes BC , CA , AB , entonces

$$OA + OB + OC \geq 2(OP + OQ + OR).$$

Triángulo

Sugerencia: Sean P_1 y P_2 los pies de las perpendiculares desde R y Q a BC . Defínanse puntos análogos Q_1 , Q_2 y R_1 , R_2 en los otros dos lados. Por medio de la semejanza de los triángulos $\triangle PRP_1$, $\triangle OBR$ se puede expresar P_1P en términos de RP , OR y OB . Cuando esas expresiones se han sustituido en

$$OA + OB + OC \geq \frac{OA(P_1P + PP_2)}{RQ} + \frac{OB(Q_1Q + QQ_2)}{PR} + \frac{OC(R_1R + RR_2)}{QP}$$

se pueden reunir los términos en los que intervienen respectivamente OP , OQ , OR . [León Bankoff, *American Mathematical Monthly*, **65**, (1958), pag. 521.]

2. ¿Bajo qué circunstancias se puede reemplazar el símbolo $\geq$ por el $=$ en el ejercicio anterior?
3. De acuerdo con la notación anterior, demuestre que

$$OA \cdot OB \cdot OC \geq (OQ + OR)(OR + OP)(OP + OQ).$$

[A. Oppenheim, *American Mathematical Monthly*, **68**, (1961), pag. 230]

4. Demuéstrese el teorema de Steiner-Lehmus: Cualquier triángulo que tenga dos bisectrices de ángulos internos iguales es isósceles.

Triángulo

Sugerencia: Si un triángulo tiene dos ángulos diferentes, la bisectriz del ángulo menor es la más larga.

5. Cualquier triángulo en el que dos medianas son iguales es isósceles.
6. La suma de las medianas de un triángulo está entre $\frac{3(a+b+c)}{4}$ y $a+b+c$, donde $a+b+c$ es la suma de los lados.
7. Demuestre la generalización del teorema de Poncelet para triángulos. Dado un triángulo $\triangle ABC$ tal que $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ y $\alpha = \angle BAC$, demuestre que
$$b+c = a + r \cot \frac{\alpha}{2}.$$
8. Demuestre que la suma de los recíprocos de las alturas de un triángulo es igual a la suma de los recíprocos de los radios de los excírculos.
9. Los exradios de un triángulo equilátero son iguales, y cada uno es tres veces el inradio.
10. Si el triángulo determinado por los excentros del triángulo dado es isósceles, entonces el triángulo es isósceles y recíprocamente.
11. En cualquier triángulo, el producto de los dos segmentos en que es dividida la altura por el ortocentro, es el mismo para las tres alturas.

Triángulo

12. La longitud del segmento que une un vértice de un triángulo con el ortocentro, es el doble de la perpendicular bajada del circuncentro al lado opuesto.
13. Si H y O denotan el ortocentro y el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$ y P , L son los puntos medios de los segmentos AH y BC , demuestre que PO y AL se bisecan.
14. Si M_A , M_B , M_C son los puntos medios de los lados BC , CA y AB del triángulo $\triangle ABC$, y $D \in BC$ es el pie de la altura que pasa por A , demuestre que los triángulos $\triangle M_A M_B M_C$ y $\triangle D M_B M_C$ son congruentes y el cuadrilátero $\square D M_A M_B M_C$ es un trapecio.
15. A Brahmagupta se le adjudica una extensión de la fórmula de Heron para cuadriláteros cíclicos, ésta afirma que, el área de un cuadrilátero cíclico $\square ABCD$ dado, cuyos lados miden a , b , c y d unidades, está dada como

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

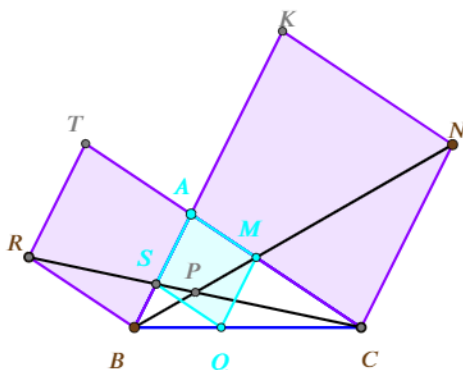
donde s denota el semiperímetro del cuadrilátero dado. Demuestre esta fórmula, y de un ejemplo dé un cuadrilátero no cíclico en que no se satisface esta fórmula.

16. Los lados BA y CA del triángulo $\triangle ABC$ se prolongan del lado del vértice A para formar los rombos $\diamond BATR$ y $\diamond CAKN$, como se muestra en la figura. Suponga además que BN y RC se intersecan en P , AB y RC

Triángulo

se intersectan en S y AC intersecta BN en M . Trace la recta MQ .

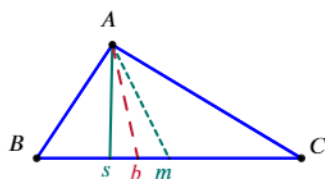
- Demuestre que el cuadrilátero $\square AMQS$ es un rombo.
- Demuestre que el área del triángulo $\triangle BPC$ coincide con el área del cuadrilátero $\square ASPM$.



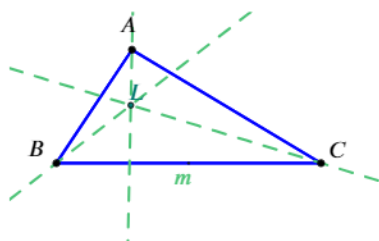
- Dada una circunferencia C con centro O , trace una cuerda AB , y sea M su punto medio. Por M trace otras dos cuerdas FE y CD . Las rectas CE y FD intersectan la recta AB en los puntos Q y P respectivamente. Demuestre que $MP = MQ$.
- Por definición, la recta simétrica de la mediana de un triángulo con respecto a la bisectriz interna emitida desde el mismo vértice es una **simediana** del triángulo. En

Triángulo

la figura adjunta, la recta b representa la bisectriz por A , la recta m la mediana por A , y la recta s representa a la simediana por A .

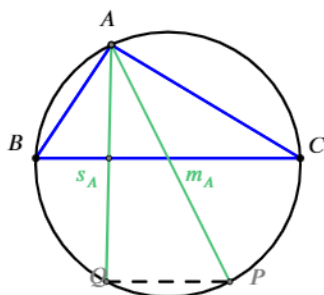


Demuestre que las tres simedianas de un triángulo concurren en un punto, dicho punto se denomina el punto de **Lemoine**.



19. Demuestre que, si P , Q son las trazas en la circunferencia circunscrita C de un triángulo $\triangle ABC$, de una mediana m_A y la simediana s_A correspondiente, entonces la recta PQ es paralela a la recta BC .

Triángulo



20. Dado un triángulo $\triangle ABC$, demuestre que la simediana que pasa por el vértice A , y las tangentes a la *circunferencia circunscrita* en los puntos B y C concurren.
21. Los segmentos en los cuales un lado del triángulo es dividido por la simediana correspondiente son proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes del triángulo.
22. En los lados AB , AC del triángulo $\triangle ABC$ se construyen cuadrados externos al triángulo dado. Demuestre que los lados de estos cuadrados opuestos a los lados AB , AC y la simediana por A son concurrentes.

Gamas armónicas

6.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos algunos resultados relacionados con el teorema de Desargues (4.3.1), pág.166, los cuales se consideran teoremas de naturaleza proyectiva.

En el capítulo 4, §4.3 se planteó el problema *¿si la perspectiva no preserva ángulos ni magnitudes, qué propiedades preserva?*

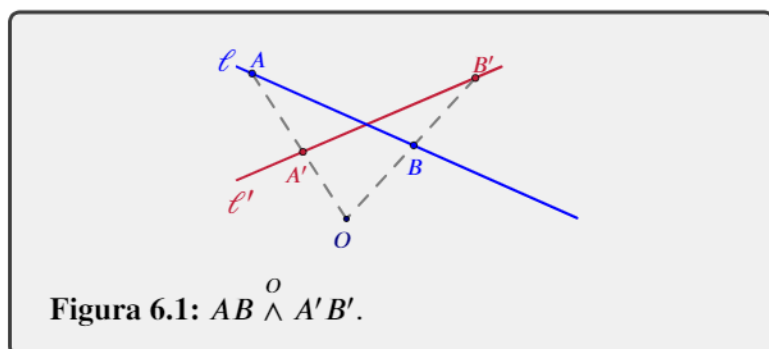
En este capítulo se estudiará la razón cruzada como un ejemplo de “invariante proyectivo”, esto es, un objeto que permanece invariante bajo perspectiva., así como diversas aplicaciones del teorema de Desargues, seguido del estudio de cuadrángulos y cuadriláteros y concluiremos con el famoso teorema de Pascal.

6.2. La razón cruzada.

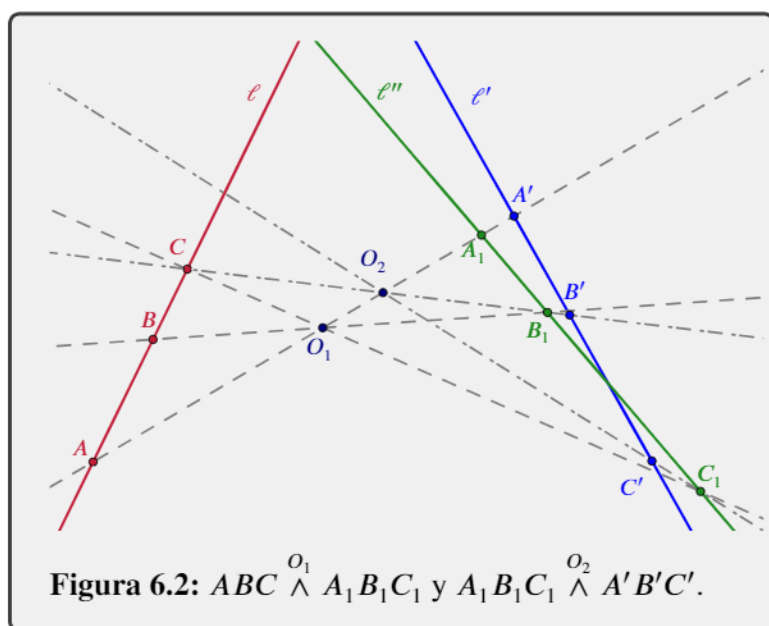
La razón cruzada, llamada por Desargues, “*cuatro puntos en involución*”, es un invariante proyectivo, y responde a la siguiente pregunta: ¿Si tenemos k puntos alineados, bajo que condiciones puede definirse un invariante proyectivo asociado a ellos?

Para resolver este problema, primeramente considérese dos puntos A, B en una recta ℓ , y A', B' otros dos puntos en otra recta ℓ' .

Si $O = AA' \cap BB'$ es el punto de intersección de las rectas AA' y BB' , por proyección desde O , el par de puntos A, B se transforma en el par de puntos A', B' , y se denotará $AB \overset{O}{\wedge} A'B'$, como se muestra en la figura (6.1). Si AA' es paralela a la recta BB' , el punto O es el punto al infinito de estas rectas.



Por otra parte, dadas dos ternas de puntos A, B, C en ℓ y $A' B' C'$ en ℓ' , no siempre es posible transformar la terna ordenada A, B, C en la terna ordenada $A' B' C'$ por medio de la proyección desde un punto, sin embargo, es posible lograrlo utilizando al menos dos proyecciones.



Para lograr esto, considérese dos puntos distintos O_1, O_2 en la recta AA' y defínase los puntos $B_1 = BO_1 \cap B'O_2$, $C_1 = CO_1 \cap C'O_2$, y la recta $\ell'' = B_1 C_1$.

Por construcción, la terna A, B, C se transformará en la

terna $A_1 = \ell'' \cap AO_1$, B_1 , C_1 por la proyección de ℓ en ℓ'' desde O_1 , mientras que los puntos A_1 , B_1 , C_1 se transforman en A' , B' , C' por la proyección de ℓ'' en ℓ' desde el punto O_2 .

Luego entonces, la terna A , B , C se transformará en la terna A' , B' , C' por la proyección de ℓ sobre ℓ'' desde O_1 seguida de la proyección de ℓ'' sobre ℓ' desde O_2 , como se muestra en la figura (6.2).

Sin embargo, si se consideran dos cuaternas de puntos alineados, en general, ya no es posible llevar una cuaterna sobre la otra bajo composición de proyecciones.

La razón es que existe un invariante proyectivo asociado a cuatro puntos alineados, el cual se denomina la **razón cruzada**, también llamada **razón doble**.

Este concepto recibió un nuevo impulso a principios del siglo XIX, con la noción de magnitud con sentido, introducida por Lazare Nicholas-Marguerite Carnot (1790-1823) en su *Geometría de la posición* [Ca], y por August Ferdinand Möbius (1790-1868) en su obra *Der barycentriche Calcul*[M], lo que dio lugar a una notación más cómoda y eficaz

La expresión razón doble, o razón cruzada, proviene del hecho de que esta cantidad queda definida como un cociente de razones simples, esto es:

Definición 6.2.1:

Dado un segmento orientado AB y P un punto colineal con A y B tal que $P \neq B$, se denomina **la razón simple en la que el punto P divide al segmento AB** al cociente

$$(AB, P) = \frac{AP}{PB}.$$

Por otra parte, si A y B son fijos, y P se desplaza a lo largo de la recta que contiene al segmento AB , tanto si P se aleja por la derecha como por la izquierda, la razón simple (AB, P) tiende a -1 .

Lo cual sugiere definir la razón simple, en la que el punto ideal I_∞ (o punto al infinito) divide a un segmento dado, como -1 , esto es $(AB, I_\infty) = -1$.

Por otro lado, si $P = B$ se conviene representar la razón simple (AB, B) por el símbolo ∞ .

De esta forma, hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta ampliada que contiene al segmento AB y los valores del campo $\mathbb{R}$ ampliado con ∞ .

Esto es, si $\ell = AB$, entonces

$$\ell_\infty \equiv \mathbb{R}_\infty.$$

Una forma alternativa de calcular la razón simple está dada en el siguiente enunciado:

Teorema 6.2.1:

Si C es cualquier punto de la recta ampliada que contiene al segmento AB , entonces

$$(AB, C) = \frac{OA \cdot \operatorname{sen} \angle AOC}{OB \cdot \operatorname{sen} \angle COB},$$

donde O es cualquier punto que no pertenece a dicha recta, y donde los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COB$ se consideran ángulos orientados.

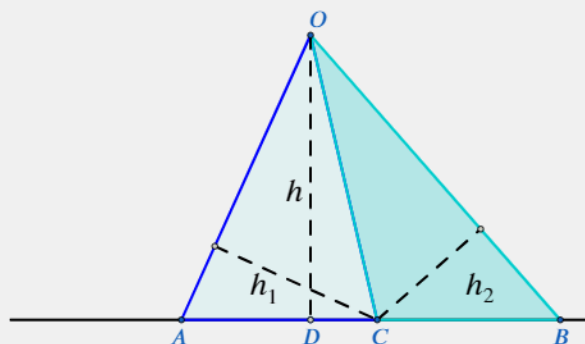


Figura 6.3: Razón simple (AB, P) .

Demostración: En el triángulo $\triangle OAC$ considere las alturas h por O y h_1 por C , y en el triángulo $\triangle OCB$ considere la altura h_2 por C sobre OB , entonces

Gamas armónicas

$$\text{sen } \angle OAC = \frac{h_1}{AC}, \text{ de donde}$$

$$h_1 = AC \text{ sen } \angle OAC = AC \frac{h}{OA}.$$

$$\text{De manera análoga } \text{sen } \angle AOC = \frac{h_1}{OC}, \text{ implica}$$

$$h_1 = OC \text{ sen } \angle AOC.$$

$$\text{Finalmente, de la igualdad } \text{sen } \angle OBC = \frac{h_2}{CB}, \text{ se obtiene}$$

$$h_2 = CB \text{ sen } \angle OBC = CB \frac{h}{OB}.$$

Como consecuencia de la definición de razón simple y de las expresiones que se obtienen para h , h_1 y h_2 :

$$\begin{aligned} (AB, C) = \frac{AC}{CB} &= \frac{\frac{h_1}{\text{sen } \angle OAC}}{\frac{h_2}{\text{sen } \angle OBC}} \\ &= \frac{h_1 \text{ sen } \angle OBC}{h_2 \text{ sen } \angle OAC} \\ &= \frac{OC \text{ sen } \angle AOC \text{ sen } \angle OBC}{OC \text{ sen } \angle COB \text{ sen } \angle OAC} \\ &= \frac{OC \text{ sen } \angle AOC}{OC \text{ sen } \angle COB} \cdot \frac{h/OB}{h/OA} \\ &= \frac{OA \text{ sen } \angle AOC}{OB \text{ sen } \angle COB} \end{aligned}$$

En el caso en que C fuera el punto ideal, el valor de la razón simple es, por definición, -1 . **Q.E.D.**

Dicha expresión muestra que el cociente OA/OB impide la invarianza proyectiva, por lo cual, es necesario cancelar este cociente considerando un cuarto punto. Es decir:

Definición 6.2.2:

Dados cuatro puntos ordinarios A, B, C, D en la recta o , se define su **razón cruzada**, también conocida como **razón doble**, como el cociente de las razones simples, y está dada por

$$o(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}.$$

Proposición 6.2.1:

Si A, B y C son tres puntos en la recta o , entonces

1. $o(AB, CC) = 1$.
2. $o(AB, CB) = 0$.
3. $o(AB, CA) = \infty$.

Demostración: Por definición

$$o(AB, CC) = \frac{(AB, C)}{(AB, C)} = 1.$$

Gamas armónicas

Además,

$$o(AB, CB) = \frac{(AB, C)}{(AB, B)} = \frac{AC/CB}{AB/BB} = \frac{AC \cdot BB}{CB \cdot AB} = 0.$$

Finalmente,

$$o(AB, CA) = \frac{(AB, C)}{(AB, A)} = \frac{AC/CB}{AA/BA} = \frac{AC \cdot BA}{CD \cdot AA} = \infty.$$

Q.E.D.

La razón cruzada depende del orden en que se elijan los puntos, puesto que hay $4! = 24$ permutaciones de cuatro letras, hay 24 razones cruzadas de cuatro puntos colineales, sin embargo, estos valores no son todos diferentes.

Proposición 6.2.2:

De las veinticuatro permutaciones posibles, que pueden tomar los cuatro puntos distintos, éstas pueden ser agrupadas en seis grupos de cuatro permutaciones tales que las razones cruzadas de cada grupo son iguales.

Demostración: Sean A, B, C y D cuatro puntos distintos en la recta o , si $o(AB, CD) = \lambda$, entonces

$$\lambda = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{AC/CB}{AD/DB} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD}.$$

Pero

$$o(BA, DC) = \frac{(BA, D)}{(BA, C)} = \frac{BD \cdot CA}{DA \cdot BC} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD} = \lambda.$$

Procediendo de manera similar, es fácil ver que

$$o(CD, AB) = o(DC, BA) = \lambda.$$

Como consecuencia de la definición, de razón cruzada sigue que

$$o(AB, DC) = \frac{(AB, D)}{(AB, C)} = \frac{AD \cdot CB}{DB \cdot AC} = \frac{1}{\lambda},$$

y aplicando la primera parte se obtiene

$$o(BA, CD) = o(CD, BA) = o(DC, AB) = \frac{1}{\lambda}.$$

De la identidad de Euler (1.1.2), pág. 5, se tiene que

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

de donde

$$0 = \frac{AB \cdot CD}{AD \cdot BC} + \frac{AC \cdot DB}{AD \cdot BC} + 1 = -\frac{AB}{BC} / \frac{AD}{DC} - \frac{AC}{CB} / \frac{AD}{DB} + 1,$$

o equivalentemente,

$$o(AC, BD) = \frac{(AC, B)}{(AC, D)} = 1 - \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = 1 - o(AB, CD),$$

Gamas armónicas

de donde $o(AC, BD) = 1 - \lambda$. Procediendo nuevamente como en la primera parte se sigue que

$$1 - \lambda = o(CA, DB) = o(BD, AC) = o(AC, BD).$$

Combinando esta tercera parte con la segunda se concluye que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \lambda} &= o(AC, DB) = o(CA, BD) \\ &= o(DB, AC) = o(BD, CA). \end{aligned}$$

Para la quinta parte, utilizando nuevamente la identidad de Euler

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

se deduce que

$$0 = \frac{AB \cdot CD}{AC \cdot DB} + 1 + \frac{AD \cdot BC}{AC \cdot DB} = -\frac{AB}{BD} / \frac{AC}{CD} + 1 - \frac{AD}{DB} / \frac{AC}{CB},$$

de donde

$$-\frac{(AD, B)}{(AD, C)} + 1 - \frac{(AB, D)}{(AB, C)} = 0,$$

es decir

$$-o(AD, BC) + 1 - o(AB, DC) = 0,$$

o equivalentemente

$$o(AD, BC) = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Gamas armónicas

Aplicando la primera parte se deduce que

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} = o(BC, AD) = o(CB, DA) = o(DA, CB).$$

Combinando esta última parte con la segunda se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda - 1} &= o(AD, CB) = o(CB, AD) \\ &= o(BC, DA) = o(DA, BC). \end{aligned}$$

Con lo cual se han agrupado las veinticuatro permutaciones posibles en seis grupos de cuatro, como se esperaba demostrar. **Q.E.D.**

Teorema 6.2.2:

La razón cruzada es una propiedad proyectiva.

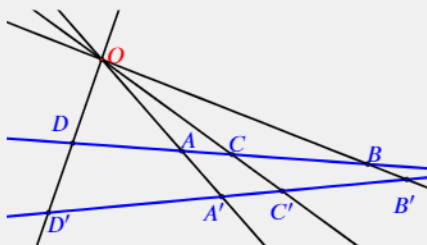


Figura 6.4: La razón cruzada es una propiedad proyectiva.

Hipótesis: Sean o , o' dos rectas y O un punto fuera de ellas, y supóngase que los puntos A , B , C y D están en la recta o y se proyectan, desde el punto O , sobre los puntos A' , B' , C' y D' en una recta o' , como se muestra en la figura (6.4).

Tesis: $o(AB, CD) = o'(A'B', C'D')$.

Demostración: Por definición

$$o(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)},$$

Aplicando el teorema (6.2.1), pág. 286, a los puntos dados en las rectas o y o' y, la definición de ángulo se obtiene

$$\begin{aligned} o(AB, CD) &= \frac{(AB, C)}{(AB, D)} \\ &= \frac{(OA \text{ sen } \angle AOC)/(OB \text{ sen } \angle COB)}{(OA \text{ sen } \angle AOD)/(OB \text{ sen } \angle DOB)} \\ &= \frac{\text{sen } \angle AOC \cdot \text{sen } \angle DOB}{\text{sen } \angle AOD \cdot \text{sen } \angle COB}. \end{aligned}$$

Y como $ABCD \overset{O}{\wedge} A'B'C'D'$, entonces $\angle AOC = \angle A'OC'$, $\angle DOB = \angle D'OB'$, $\angle AOD = \angle A'OD'$ y $\angle COB = \angle C'OB'$ se sigue que

$$\begin{aligned} o(AB, CD) &= \frac{\text{sen } \angle A'OC' \cdot \text{sen } \angle D'OB'}{\text{sen } \angle A'OD' \cdot \text{sen } \angle C'OB'} \\ &= \frac{(OA' \text{ sen } \angle A'OC')/(OB' \text{ sen } \angle C'OB')}{(OA' \text{ sen } \angle A'OD')/(OB' \text{ sen } \angle D'OB')} \\ &= \frac{(A'B', C')}{(A'B', D')} = o'(A'B', C'D'). \end{aligned}$$

Como se esperaba demostrar.

Q.E.D.

Obsérvese que la razón simple se ha definido para puntos ordinarios, pero teniendo en cuenta la invarianza por proyección y los convenios anteriores, es claro que es posible definir la razón cruzada cuando alguno de los puntos es el punto ideal de la recta, o incluso cuando los cuatro puntos sean puntos ideales, es decir, están en la recta al infinito, por lo cual, se obtiene un invariante proyectivo asociado a cada cuaterna de puntos alineados del plano extendido.

Definición 6.2.3:

Si a, b, c y d son cuatro rectas que concurren en un punto ordinario O , se define su **razón cruzada** como

$$O(ab, cd) = \frac{\frac{\text{sen}(a, c)}{\text{sen}(c, b)}}{\frac{\text{sen}(a, d)}{\text{sen}(d, b)}},$$

donde (a, b) denota el ángulo, orientado en sentido positivo, formado por las rectas a y b .

Teorema 6.2.3:

La razón cruzada de un haz de cuatro rectas que concurren en un punto ordinario O es igual a la razón cruzada de una hilera de cuatro puntos en los cuales cualquier transversal que no pase por O corta a las cuatro rectas.

La relación que transforma las rectas a, b, c y d que concurren en O en los puntos A, B, C y D que inciden en la recta o se denotará $abcd \wedge ABCD$.

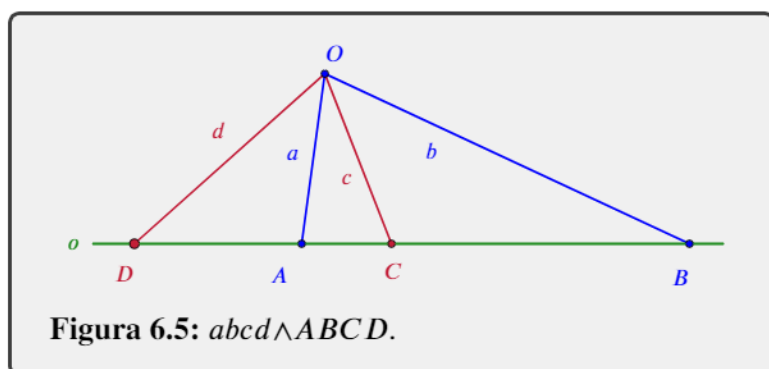


Figura 6.5: $abcd \wedge ABCD$.

Demostración: Sean a, b, c y d cuatro rectas que concurren en el punto O , y o una recta que no pase por O , si $A = a \cap o$, $B = b \cap o$, $C = c \cap o$ y $D = d \cap o$, como se muestra en la figura (6.5), por la definición de razón cruzada para puntos

Gamas armónicas

$$(AB, C) = \frac{OA \cdot \text{sen } \angle AOC}{OB \cdot \text{sen } COB},$$

y

$$(AB, D) = \frac{OA \cdot \text{sen } \angle AOD}{OB \cdot \text{sen } DOB}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} o(AB, CD) &= \frac{(AB, C)}{(AB, D)} \\ &= \frac{\frac{OA \cdot \text{sen } \angle AOC}{OB \cdot \text{sen } COB}}{\frac{OA \cdot \text{sen } \angle AOD}{OB \cdot \text{sen } DOB}} \\ &= \frac{\frac{\text{sen}(a, c)}{\text{sen}(c, b)}}{\frac{\text{sen}(a, d)}{\text{sen}(d, b)}} \\ &= O(ab, cd). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Si O fuera el punto al infinito, entonces las rectas a , b , c y d serían paralelas.

Corolario 6.2.1:

Si a, b, c y d son cuatro rectas que concurren en el punto O , y o, o' son dos rectas que no pasan por O , si además $A = a \cap o, B = b \cap o, C = c \cap o, D = d \cap o, A' = a \cap o', B' = b \cap o', C' = c \cap o', D' = d \cap o'$, como se muestra en la figura (6.6), entonces

$$o(AB, CD) = o'(A'B', C'D').$$

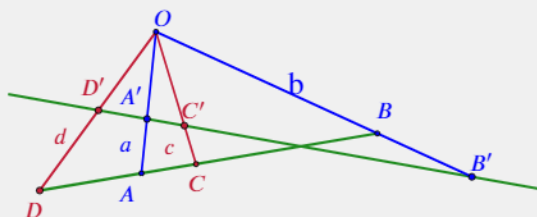


Figura 6.6: $o(AB, CD) = o'(A'B', C'D')$.

Demostración: Como $abcd \wedge ABCD$ y $abcd \wedge A'B'C'D'$, como consecuencia del teorema (6.2.3), pág. 295,

$$o(AB, CD) = O(ab, cd) \text{ y } o'(A'B', C'D') = O(ab, cd),$$

de donde $o(AB, CD) = o'(A'B', C'D')$.

Q.E.D.

Corolario 6.2.2:

Si dos haces de cuatro rectas con vértices en O y O' son subtendidos por la misma hilera de puntos A, B, C, D en o , entonces

$$O(ab, cd) = O'(a'b', c'd').$$

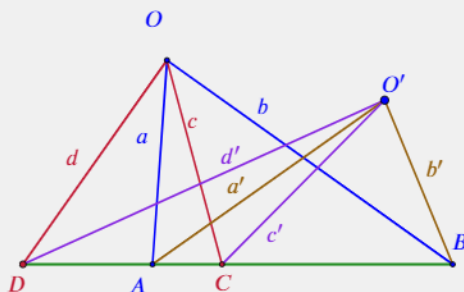


Figura 6.7: $O(ab, cd) = O'(a'b', c'd')$.

Demostración: Si $abcd \wedge ABCD$ y $a'b'c'd' \wedge ABCD$, entonces

$$O(ab, cd) = o(AB, CD) \text{ y } O'(a'b', c'd') = o(AB, CD).$$

Por lo tanto

$$O(ab, cd) = O'(a'b', c'd').$$

Q.E.D.

Corolario 6.2.3:

Sean A, B, C, D una hilera de puntos en la recta o ; A', B', C', D' otra hilera de puntos en la recta o' , tales que $o(AB, CD) = o'(A'B', C'D')$, si O y O' son dos puntos distintos colineales con A y A' , entonces los puntos de intersección de los pares de rectas $OB, O'B'$; $OC, O'C'$ y $OD, O'D'$ son colineales.

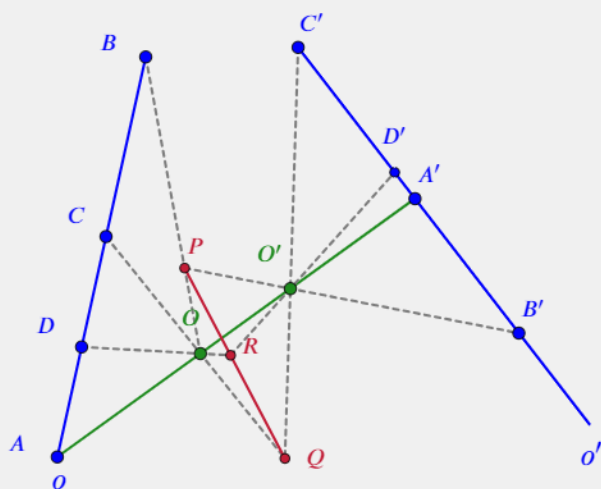


Figura 6.8: Condición para obtener puntos colineales.

Demostración: Considere las rectas $a = OA = O'A'$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$, $b' = O'B'$, $c' = O'D'$ y $d' = O'D'$, los puntos $P = OB \cap O'B'$, $Q = OC \cap O'C'$, $R = OD \cap O'D'$ y la recta $\ell = PQ$.

Supóngase que $R_1 = OD \cap \ell$ y $S_1 = a \cap \ell$, entonces $ABCD \overset{O}{\wedge} S_1PQR_1$, de donde, $\alpha(AB, CD) = \ell(S_1PQR_1)$.

Por otra parte $A'B'C'D' \overset{O'}{\wedge} S_1PQR_2$, para algún $R_2 \in \ell$ así $\alpha'(A'B', C'D') = \ell(S_1PQR_2)$, como consecuencia de la definición de razón cruzada se sigue que $R_1 = R_2$.

Pero $OD \cap \ell = R_1 = O'D' \cap \ell$, de donde

$$OD \cap \ell \cap O'D' = R_1.$$

pero $OD \cap O'D' = R$, por tanto, $R = R_1$, es decir, P , Q y R son colineales. **Q.E.D.**

6.3. Cuaternas armónicas

Definición 6.3.1:

Se dice que cuatro puntos colineales A , B , C , D forman una **cuaterna armónica**, o bien, que el punto D es el **conjugado armónico de C con respecto a A y B** si $\alpha(AB, CD) = -1$.

En este caso se dice que los puntos A , C , B y D constituyen una **hílera armónica**.

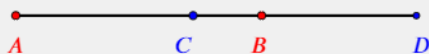


Figura 6.9: A, C, B, D es una hilera armónica.

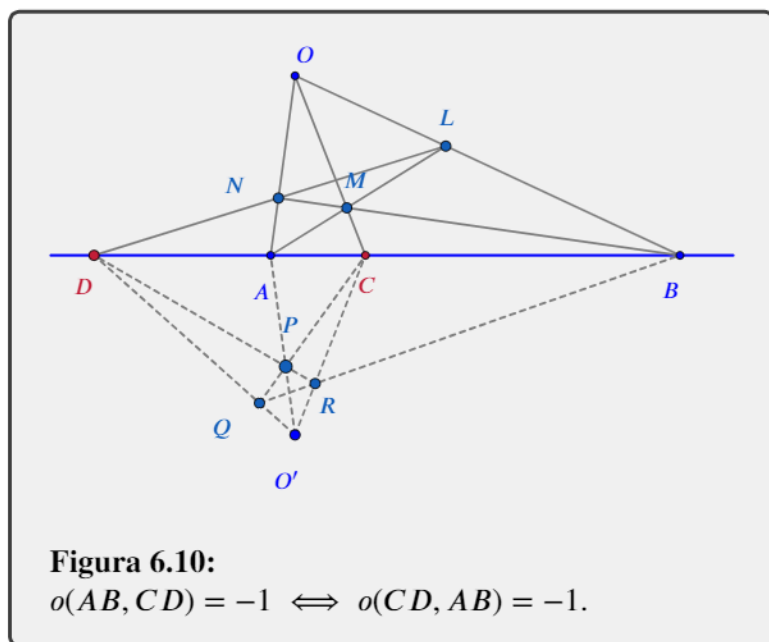
Por ejemplo, dos puntos ordinarios, su punto medio y el punto ideal de la recta en que yacen forman una cuaterna armónica, es decir, el conjugado armónico del punto medio de un segmento cualquiera es el punto del infinito de la recta.

De acuerdo a lo estudiado en el capítulo 4, §4.2, el teorema (4.2.1), pág. 157, garantiza que, dado un punto en una recta AB siempre es posible construir su conjugado armónico.

Pedir que B sea conjugado armónico de A con respecto a C y D es equivalente a pedir que los puntos B y A dividan interna y externamente al segmento CD en la misma razón, es decir:

$$\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD}.$$

En la figura (6.10) se muestra, en la parte superior, la construcción del conjugado armónico de C con respecto a A y B , mientras que, en la parte inferior, se muestra la construcción del conjugado armónico del punto B con respecto a los puntos C y D basados en la construcción realizada en la sección §4.2, proposición (4.2.1), pág. 159.



Como $o(AB, CD) = o(CD, AB)$ los siguientes enunciados son equivalentes:

1. B es conjugado armónico de A con respecto a C y D .
2. D es conjugado armónico de C con respecto a A y B .

Teorema 6.3.1:

Dados tres puntos colineales, el conjugado armónico de cualquiera de ellos es único.

Demostración: Sean A, B, C y D cuatro puntos colineales tales que $(AB; CD) = -1$, es decir

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB},$$

y sea E otro punto tal que

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AE}{EB}.$$

Luego entonces

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB},$$

de donde $D = E$, pues no puede haber dos puntos distintos que dividan a un segmento en la misma razón. **Q.E.D.**

Teorema 6.3.2:

Supongamos que A, B, C y D son una hilera armónica, es decir, $\alpha(AB, CD) = -1$, entonces cada una de las otras siete permutaciones de estos puntos en las cuales los pares conjugados se conservan es armónica.

Demostración: Este enunciado es consecuencia inmediata de la proposición (6.2.2), pág. 289, ya que

$$o(AB, CD) = o(BA, DC) = o(CD, AB) = o(DC, BA)$$

y, si $o(AB, CD) = -1$, entonces

$$o(BA, DC) = o(CD, AB) = o(DC, BA) = -1.$$

Nuevamente, como consecuencia de la proposición (6.2.2),

$$(AB, DC) = \frac{1}{(AB, CD)} = -1,$$

y como

$$(AB, DC) = (DC, AB) = (CD, BA) = (BA, CD)$$

de donde $(DC, AB) = (CD, BA) = (BA, CD) = -1$.

Q.E.D.

Ejemplo: Como consecuencia del teorema de la recta de Euler (5.4.1), pág. 243, el circuncentro O , el baricentro G , el centro de la circunferencia de los nueve puntos N y el ortocentro H pertenecen a la recta de Euler, que se denotará e .

Además, N es el punto medio del segmento de Euler OH , y del corolario (5.5.2), pág. 257, se tiene que $2GO = HG$ y $2NG = GO$, de donde

$$\frac{NG}{GO} = -\frac{GO}{HG},$$

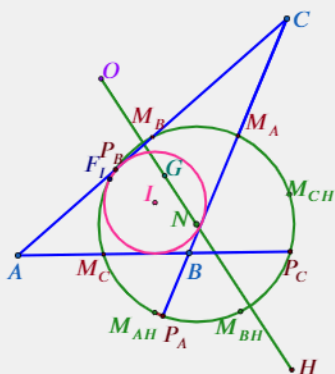


Figura 6.11: $e(ON, GH) = -1$.

así $e(ON, GH) = -1$, es decir, O, N, G y H constituyen una hilera armónica, ilustramos esto en la figura (6.11).

Recordamos que:

- Una sucesión es un conjunto de términos $\{s_n\}$ arreglados en cierto orden. Si X es el conjunto de términos, una sucesión en X es una función $s : \mathbb{N} \rightarrow X$, y se escribe $s(x) = s_n \in X$.
- Una sucesión se denomina una progresión aritmética si cada elemento, después del primero, es igual a la suma del término anterior y una constante, la constante se denomina la *diferencia común*. Esto es, si c es la cons-

Gamas armónicas

tante común, $s_2 = s_1 + c$, $s_3 = s_2 + c$ y en general, $s_{n+1} = s_n + c$.

- Una sucesión se denomina una progresión geométrica si cada término, después del primero, es igual al producto del término anterior por una constante común, denominada *razón común*. Es decir, si r es la razón común, entonces $s_2 = rs_1$, $s_3 = rs_2$ y en general $s_{n+1} = rs_n$.
- Una sucesión se denomina una progresión armónica si los recíprocos de sus términos forman una progresión aritmética, es decir, $\{h_n\}$ es una progresión armónica si $\{h_n^{-1}\}$ es una progresión aritmética.

El nombre de armónica proviene de los pitagóricos y su conocimiento de la música, cuando una cuerda tensada es cortada a la mitad, esta produce un tono que es armónico con el tono que produce la cuerda con su longitud original, y así sucesivamente.

Por ejemplo, si desean escuchar cómo suenan los tonos armónicos, en el video <https://www.youtube.com/watch?v=f7zw5XGaGvE&list=PPSV>, Paola Hermosin lo explica usando como instrumento la guitarra.

Por ejemplo, la sucesión

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

Gamas armónicas

es una progresión armónica pues sus recíprocos

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

forman una progresión aritmética con constante común 2.

La *media aritmética* también conocida como promedio de dos números es la suma de tales números dividida por 2. Si a y c son dos números, entonces

$$\text{media aritmética } b = \frac{a + c}{2}.$$

La *media geométrica* de dos números a y c se define como

$$\text{media geométrica } b = \pm\sqrt{ac}.$$

La *media armónica* de dos números a y c se define como

$$\text{media armónica } b = \frac{2ac}{a + c}.$$

Teorema 6.3.3:

Supongamos que A , C , B y D son una hilera armónica, entonces los segmentos AC , AB y AD están en progresión armónica y recíprocamente.

Es decir:

Gamas armónicas

$$\frac{1}{AC}, \frac{1}{AB}, \frac{1}{AD}$$

forman una progresión aritmética si y solamente si A , B , C y D son cuatro puntos armónicos.

Esta relación también puede expresarse diciendo que AB es la media armónica de AC y AD .

Demostración: Los segmentos AC , AB y AD están en progresión armónica si y solamente si:

$$\frac{1}{AC}, \frac{1}{AB}, \frac{1}{AD}$$

forman una progresión aritmética.

Lo único que debemos ver es que

$$\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC} = \frac{1}{AD} - \frac{1}{AB}$$

o equivalentemente

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Ya que A , B , C y D son cuatro puntos armónicos, entonces

$$\frac{CB}{AC} = -\frac{DB}{AD}$$

si, y solamente si,

$$\frac{CB}{AB \cdot AC} = -\frac{DB}{AB \cdot AD}.$$

Gamas armónicas

Como $AC = AB + BC$, entonces $BC = AC - AB$, o equivalentemente, $CB = AB - AC$.

Análogamente, ya que $AD = AB + BD$, entonces $BD = AD - AB$, por lo tanto, $\frac{CB}{AB \cdot AC} = \frac{AB - AC}{AC}$ y

$$\frac{DB}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AB \cdot AD} = \frac{AD - AB}{AB \cdot AD}.$$

De donde $\frac{AB - AC}{AB \cdot AC} = \frac{AD - AB}{AB \cdot AD}$ cuando, y solamente cuando, $\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$, es decir,

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Siguiendo los pasos del argumento en sentido contrario se demuestra el recíproco del enunciado. **Q.E.D.**

Teorema 6.3.4:

Si A, C, B y D es una hilera armónica, y O es el punto medio de AB , entonces

$$OB^2 = OC \cdot OD,$$

y recíprocamente.

Demostración: Ya que $\sigma(AB, CD) = -1$, entonces $AC : CB = -AD : DB$, y como O es el punto medio del segmen-

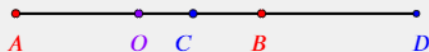


Figura 6.12: $OB^2 = OC \cdot OD \iff O$ es punto medio de AB .

to AB , se satisfacen las siguientes identidades:

$$AC = AO + OC = OB + OC, \text{ ya que, } AO = OB,$$

$$OB = OC + CB, \text{ así, } CB = OB - OC,$$

$$AD = AO + OD = OB + OD, \text{ pues } AO = OB,$$

$$OD = OB + BD, \text{ de donde, } BD = OD - OB.$$

Luego entonces

$$\frac{OB + OC}{OB - OC} = \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} = \frac{AD}{BD} = \frac{OB + OD}{OD - OB},$$

o equivalentemente,

$$(OB + OC) \cdot (OD - OB) = (OB + OD) \cdot (OB - OC).$$

Simplificando se obtiene, $OB^2 = OC \cdot OD$.

Nuevamente, como todos los pasos son reversibles, se obtiene el recíproco. **Q.E.D.**

Corolario 6.3.1:

Si A , B , C y D son cuatro puntos tales que $o(AB, CD) = -1$, O es el punto medio del segmento AB y O' es el punto medio del segmento CD , entonces

$$(OB)^2 + (O'C)^2 = (OO')^2.$$

En otras palabras, es posible construir un triángulo rectángulo cuyos catetos sean congruentes con OB y $O'C$ y cuya hipotenusa sea congruente con OO' .

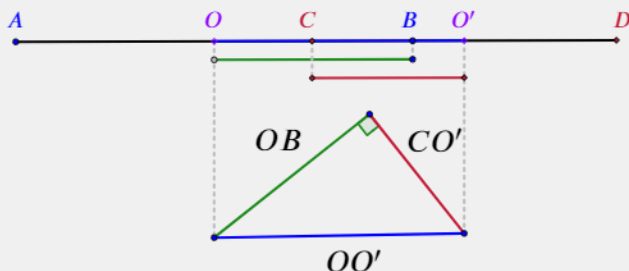


Figura 6.13: $(OB)^2 + (O'C)^2 = (OO')^2$.

Demostración: Como A , B , C , D constituyen una hiler armónica, por el teorema (6.3.2), pág. 303, se tiene que $o(AB, CD) = -1$ y $o(DC; AB) = -1$.

Del teorema (6.3.4), pág.309, se obtienen

$$OB^2 = OC \cdot OD \text{ y } O'C^2 = O'A \cdot O'B.$$

Además, $OB + BO' = OO'$, de donde $OO' - OB = BO'$, es decir, $O'B = -BO' = OB - OO'$.

Luego entonces

$$\begin{aligned} (OB)^2 - (OO')^2 &= (OB + OO')(OB - OO') \\ &= (AO + OO')(O'B) \\ &= AO' \cdot -(BO') \\ &= -(CO')^2 = -(O'C)^2, \end{aligned}$$

de donde

$$(OB)^2 + (O'C)^2 = (OO')^2.$$

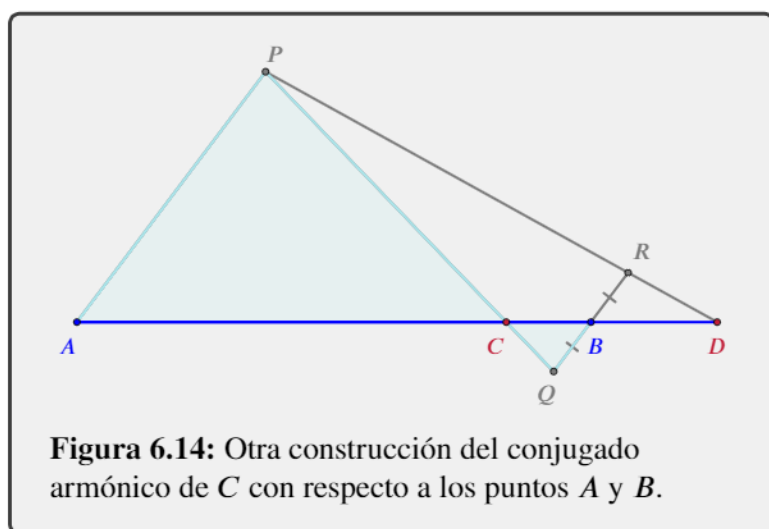
Q.E.D.

Dado un segmento AB y un punto C en la recta AB , otra forma de construir el conjugado armónico de C con respecto a los puntos A y B es la siguiente:

Primeramente tómese un punto P fuera de la recta AB y trácese la recta AP .

A continuación, construya una recta BQ paralela a la recta AP por el punto B , y sobre esta recta sea R el simétrico de Q con respecto a B , finalmente trácese la recta PR .

El punto donde esta recta interseca a la recta AB es el conjugado armónico D del punto C con respecto a los puntos A y B .



Ya que $\triangle ACP \sim \triangle BCQ$, sus lados correspondientes son proporcionales $AP : BQ = AC : BC$, pero $QB = BR$ implica $AP : RB = AC : BC$, y como $\triangle APD \sim \triangle BRD$ se sigue que $AD : DB = -AP : BR$.

Luego entonces

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{RB} = -\frac{AD}{DB}.$$

De donde D es el conjugado armónico de C con respecto a los puntos A y B .

6.4. Rectas armónicas

Definición 6.4.1:

Si a, b, c y d son cuatro rectas concurrentes en un punto O , se dice que a y b están **armónicamente separadas** por c y d , o bien que c y d son **conjugadas armónicas** con respecto a a y b , si

$$O(ab, cd) = -1.$$

Teorema 6.4.1:

Si a y b están armónicamente separadas por c y d , entonces c y d están armónicamente separadas por a y b .

Demostración: Si o es una recta que no pasa por O y es concurrente con las rectas a, b, c, d , en los puntos A, B, C y D como consecuencia del teorema (6.2.3), pág. 295,

$$O(ab, cd) = o(AB, CD) \text{ y } O(cd, ab) = o(CD, AB).$$

Por el teorema (6.3.2), pág. 303,

$$o(AB, CD) = o(CD, AB).$$

Luego entonces $O(ab, cd) = O(cd, ab)$.

Q.E.D.

Tal haz de cuatro rectas se denomina *haz armónico*, y sus rectas son llamadas cuatro rectas armónicas.

Teorema 6.4.2:

La hilera de puntos en que las rectas de un haz armónico cortan cualquier recta que no pase por el vértice del haz, es una hilera armónica; e inversamente, el haz de rectas que se obtiene uniendo cuatro puntos armónicos con cualquier punto del plano que no sea colineal con la hilera armónica es un haz armónico.

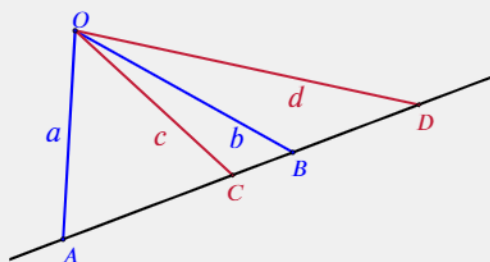


Figura 6.15:

$$O(ab, cd) = -1 \iff o(AB, CD) = -1.$$

Demostración: Si o y o' son rectas que no contienen al punto O y concurren con las rectas a, b, c, d en los puntos A, B, C, D y A', B', C', D' respectivamente, como consecuencia del teorema (6.2.3), pág. 295, corolario (6.2.1), pág. 297, se sigue que

$$o(AB, CD) = O(ab, cd) = o'(A'B', C'D'),$$

y como $O(ab, cd) = -1$ se sigue el resultado. **Q.E.D.**

Tomando en cuenta que la razón cruzada es una propiedad proyectiva, del teorema anterior podemos deducir los siguientes resultados:

Corolario 6.4.1:

Dadas tres rectas concurrentes, la conjugada armónica de cualquiera de ellas es única.

Corolario 6.4.2:

Si un haz de cuatro rectas es cortada por una transversal o en una hilera armónica de puntos, entonces cualquier otra transversal o' del haz también corta sus rectas en una hilera armónica de puntos.

Corolario 6.4.3:

Si a y b están armónicamente separadas por c y d entonces, para cada una de las otras siete permutaciones de estas rectas, en las cuales los pares de rectas conjugadas se conservan es armónica.

Teorema 6.4.3:

Si las hileras armónicas A, B, C, D y A, B', C', D' , están en dos rectas distintas, entonces:

1. Las rectas BB', CC' y DD' son concurrentes.
2. Las rectas $BB', C'D$ y CD' son concurrentes.

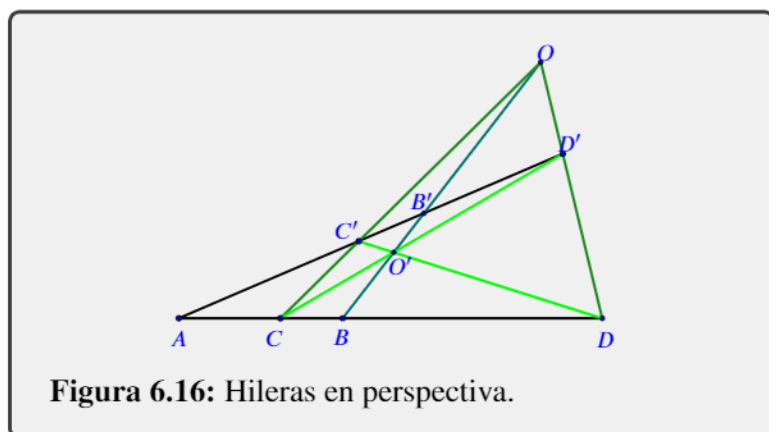


Figura 6.16: Hileras en perspectiva.

Demostración: Dadas dos hileras armónicas A, C, B, D en o y A, C', B', D' en o' , en particular, $o(AB, CD) = -1$ y $o'(AB'; C'D') = -1$.

Para demostrar la primera parte, supóngase además que las rectas CC' y BB' concurren en O .

Se demostrará que el punto O incide en la recta DD' .

Trácese las rectas $a = OA$ y $d = OD$, como A, C, B, D constituyen una hilera armónica, entonces $o(AB, CD) = -1$, como consecuencia del teorema (6.4.2), pág. 315, las rectas $a, c = OC, b = OB$ y d forman un haz armónico de cuatro rectas, así $O(ab, cd) = -1$.

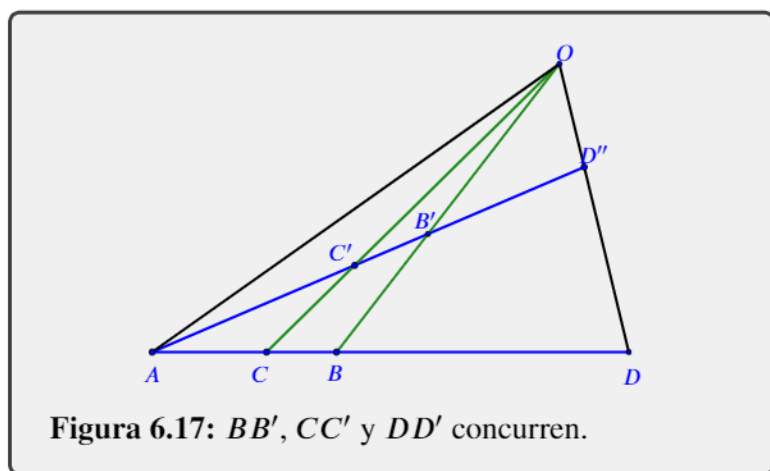


Figura 6.17: BB', CC' y DD' concurren.

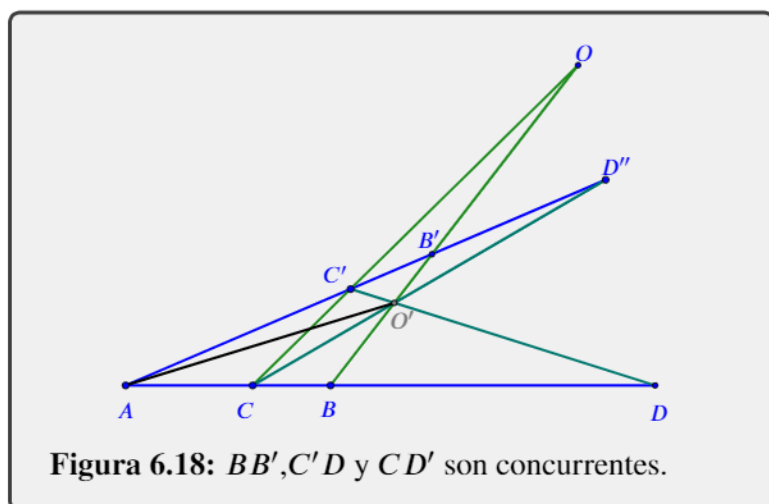
Del corolario (6.4.2), pág. 316, se obtiene $o'(AB', C'D'') = -1$, donde D'' es el punto donde concurren las rectas OD y AB' .

Como consecuencia de la unicidad del conjugado armónico, corolario (6.4.1), pág. 316, se tiene que $D' = D''$, en particular O incide en la recta DD' , por ende, las rectas BB', CC' y DD' concurren en O .

Para demostrar la segunda parte, supóngase además que las rectas CD' y BB' concurren en el punto O' .

Se desea demostrar que el punto O' incide en la recta $C'D$.

Trácese las rectas $O'A$ y $O'D$, como $o(AB, CD) = -1$, se sigue que las rectas $a' = O'A$, $c' = O'C$, $b' = O'B$ y $d' = O'D$ forman un haz armónico, así $O'(a'b', c'd') = -1$.



Nuevamente, como consecuencia del corolario (6.4.2), pág. 316, se tiene que $O'(a'b', c''d') = -1$, donde c'' es la recta $O'C''$ y $C'' = O'C \cap AB'$, luego entonces $\sigma'(AB', C''D') = -1$.

Como consecuencia de la unicidad del conjugado armónico, corolario (6.4.1), pág. 316, se tiene que $C' = C''$, así O' incide en la recta $C'D$. **Q.E.D.**

Teorema 6.4.4:

Si en un haz armónico de rectas diferentes, un par de rectas es perpendicular, una a otra, entonces estas rectas bisecan los ángulos formados por las otras dos, e inversamente si en un haz de cuatro rectas distintas uno de los pares biseca los ángulos formados por el otro par, el haz es armónico.

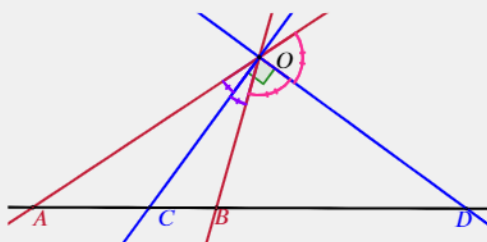


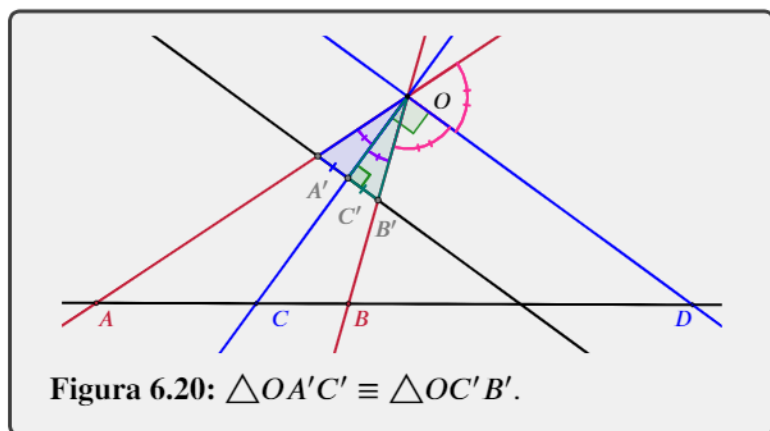
Figura 6.19: $O(ab, cd) = -1$ y $c \perp d \Rightarrow a$ y b bisecan $\angle(c, d)$.

Demostración: Sean $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ y $d = OD$ rectas tales que $o(AB; CD) = -1$ con $c \perp d$.

Se debe demostrar que OC y OD bisecan interna y externamente al ángulo $\angle AOB$.

Considérese una recta o' paralela a OD que corte transversalmente a OA , OB y OC en A' , B' y C' respectivamente ($C' \neq O$).

Como consecuencia del corolario (6.4.2), pág. 316, la hilera armónica A, C, B, D se proyecta, desde O , en la hilera armónica A', C', B', ∞ , por ende, C' es el punto medio de A y B .



Como c y d son perpendiculares, entonces $\angle CC'A' = \angle B'CO = 1$ recto, y como OC' es lado común, los triángulos $\triangle OA'C'$ y $\triangle OC'B'$ son congruentes, en particular, $\angle A'OC' = \angle B'OC'$, es decir, AC biseca el ángulo $\angle AOB$.

Como la bisectriz interna y externa del ángulo $\angle AOB$ son perpendiculares, se sigue que la recta d es la bisectriz exterior del ángulo $\angle AOB$.

Recíprocamente, supóngase que $c = OC$ y $d = OD$ son las bisectrices interna y externa de los ángulos formados por las rectas $a = OA$ y $b = OB$.

Gamas armónicas

Sea A' el simétrico del punto A con respecto al punto O .
Como $\angle AOC = \angle BOC$, entonces

$$\text{sen } \angle AOC = \text{sen } \angle BOC \text{ y } \angle BOD = \angle DOA',$$

de donde, $\text{sen } \angle BOD = \text{sen } \angle DOA'$.

Ya que el ángulo $\angle AOD$ es el suplemento del ángulo $\angle DOA'$, entonces $\text{sen } \angle DOA' = -\text{sen } \angle DOB$.

Por lo tanto

$$\frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle COB} = -\frac{\text{sen } \angle AOD}{\text{sen } \angle DOB},$$

o equivalentemente:

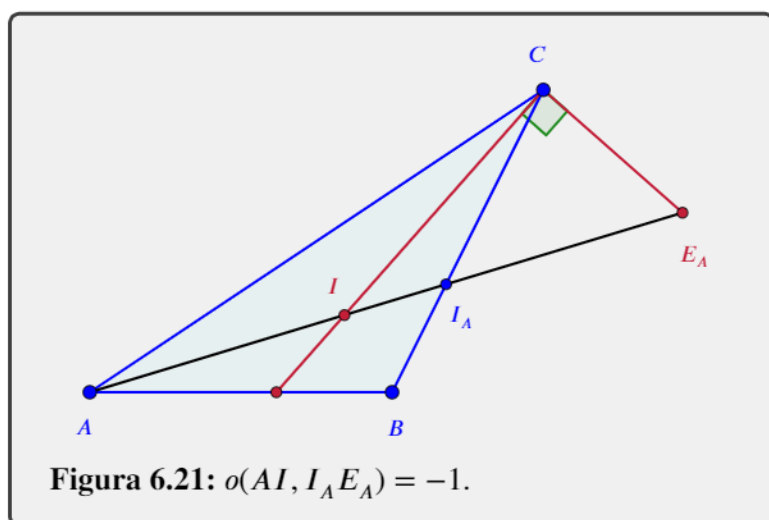
$$\frac{\frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle COB}}{\frac{\text{sen } \angle AOD}{\text{sen } \angle DOB}} = -1,$$

y como consecuencia de la definición de razón cruzada (6.2.2),
pág. 294, $O(ab, cd) = -1$, es decir, las rectas a, b, c y d constituyen un haz armónico por O con $c \perp d$.

Q.E.D.

Corolario 6.4.4:

Dado un triángulo $\triangle ABC$, si I denota su incentro, E_A el excentro relativo al vértice A , e $I_A = AI \cap CB$, entonces $o(AI_A, IE_A) = -1$.



Demostración: Como I es el incentro del triángulo $\triangle ABC$, entonces CI es una bisectriz interna del ángulo $\angle ACB$, y como E_A es el excentro relativo al vértice A , en particular CE_A es una bisectriz externa del ángulo $\angle ACB$.

Como las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle ACB$ son perpendiculares, entonces CI y CE_A son perpendiculares, véase a figura (6.21).

Como consecuencia del teorema (6.4.4), pág. 320, las rectas CA , CB , CI y CE_A constituyen un haz armónico, y por ende, al intersecar este haz con la bisectriz interna $o = AI$ se obtiene una hilera armónica $A, I_A = o \cap AB, I, E_A$, o equivalentemente $o(AI_A, IE_A) = -1$. **Q.E.D.**

Definición 6.4.2:

El **ángulo de intersección** de dos curvas, en un punto común, es el ángulo entre las rectas tangentes a las curvas en ese punto común.

Se dice que dos curvas son **ortogonales** si su ángulo de intersección es un ángulo recto.

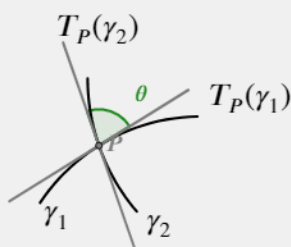


Figura 6.22: Ángulo entre curvas.

Observaciones: Las siguientes propiedades concernientes a circunferencias son obvias:

- Si dos circunferencias se intersectan, los ángulos de intersección en sus puntos comunes son iguales.
- Si dos circunferencias son ortogonales, una tangente a una de ellas en el punto de intersección pasa por el centro de la otra; y si el radio de una de las circunferencias

trazado a un punto común es tangente a la otra circunferencia, entonces las circunferencias son ortogonales.

- El cuadrado de la distancia entre los centros de dos circunferencias ortogonales es igual a la suma de los cuadrados de los radios.

Teorema 6.4.5:

Si se construye una circunferencia con diámetro AB y se traza una segunda circunferencia que corte la recta de ese diámetro en C y D , un par de conjugados armónicos con respecto a A y B , entonces las circunferencias son ortogonales.

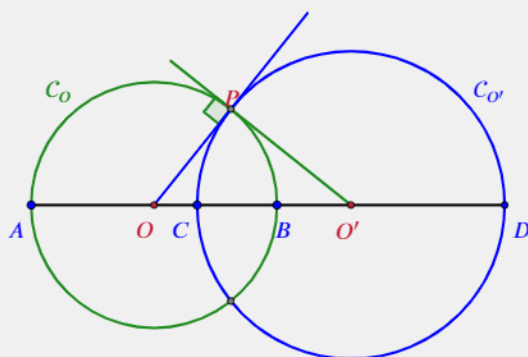


Figura 6.23: $\sigma(AB, CD) = -1 \Rightarrow C_O \perp C_{O'}$.

Demostración: Sea P un punto de intersección de las dos circunferencias, O el punto medio de AB y O' el punto medio de CD , como se aprecia en la figura (6.23).

Como consecuencia del corolario (6.3.1), pág. 311,

$$OB^2 + O'C^2 = OO'^2$$

Ya que $OP = OB$ y $O'C = O'P$, por ser radios de las mismas circunferencias, se sigue que $OP^2 + O'P^2 = OO'^2$, es decir, $\triangle POO'$ es un triángulo rectángulo, con $\angle OPO' = 1$ ángulo recto.

Puesto que dos circunferencias son ortogonales, si una tangente a una de ellas en el punto de intersección pasa por el centro de la otra, se sigue que el radio OP es tangente a la circunferencia con centro O' y diámetro CD .

En particular $OP \perp O'P$, es decir, las circunferencias son ortogonales. **Q.E.D.**

El recíproco del teorema anterior también es cierto, y nuevamente es consecuencia de las observaciones previas y el recíproco del teorema (6.3.4), pág. 309, es decir:

Teorema 6.4.6:

Si dos circunferencias ortogonales son cortadas por una recta que pasa por el centro de ellas, los cuatro puntos de intersección constituyen una hilera armónica de puntos.

Demostración: Supóngase que C_O y $C_{O'}$ son dos circunferencias ortogonales en un punto P , la primera con centro en

O y diámetro AB ; la segunda con centro O' y diámetro CD , con A, B, C y D colineales.

Entonces $OB^2 = OP^2 = OC \cdot OD$, como consecuencia del recíproco del teorema (6.3.4), pág. 309, los puntos C y D son conjugados armónicos con respecto a A y B . **Q.E.D.**

6.5. Cuadrángulo y cuadrilátero completo

Definición 6.5.1:

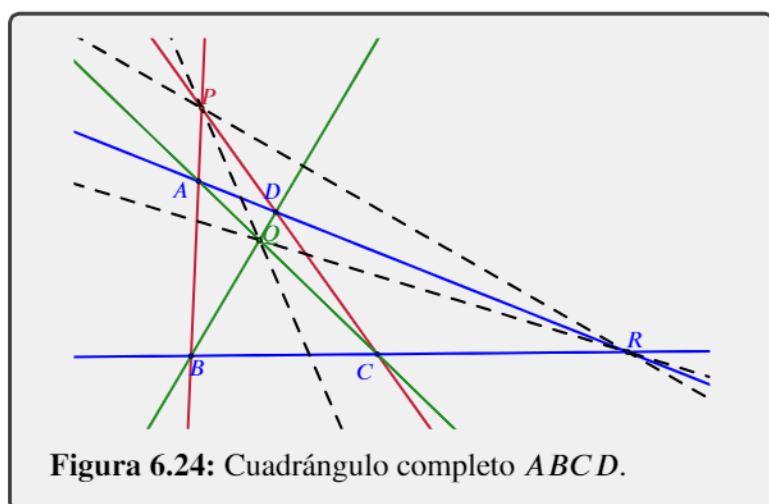
La figura que consiste de cuatro puntos, cualesquiera tres de ellos no colineales, y de las seis rectas determinadas por estos puntos es un **cuadrángulo completo**.

Los cuatro puntos son sus *vértices*, y las seis rectas son sus lados, se dice que dos lados son *opuestos* si no tienen un vértice común.

En un cuadrángulo completo hay tres pares de lados opuestos.

Los tres puntos determinados por los tres pares de lados opuestos son sus *puntos diagonales*, y el triángulo determinado por estos tres puntos es el *triángulo diagonal*.

En la figura (6.24), los cuatro puntos A, B, C y D son no colineales, ya que cuatro elementos pueden tomarse de dos en dos en seis formas distintas, i.e., $\binom{4}{2} = 6$, hay 6 rectas



asociadas a estos cuatro puntos, a saber: AB , AC , AD , BC , BD y CD .

Hay tres pares de rectas opuestas, el primer par AB, CD , que se representan en color rojo; el segundo par es AC, BD , representadas en color verde, y finalmente se tiene el par de rectas opuestas AD, BC representadas en color azul.

Puesto que cada dos rectas distintas, en el plano extendido, concurren en un punto, los puntos $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$ y $R = AD \cap BC$ son los puntos diagonales asociados al cuadrángulo completo A, B, C y D .

Finalmente, el triángulo $\triangle PQR$ es el triángulo diagonal asociado al cuadrángulo completo $ABCD$.

Definición 6.5.2:

La figura que consiste de cuatro rectas, cada tres de las cuales no son concurrentes y los seis puntos determinados por la intersección de estas rectas es un **cuadrilátero completo**.

Las cuatro rectas son sus *lados* y los seis puntos son sus *vértices*.

Se dice que dos vértices son *opuestos* si ellos no están en el mismo lado. En un cuadrilátero completo hay tres pares de vértices opuestos.

Las tres rectas determinadas por los pares de vértices opuestos de un cuadrilátero completo son sus *diagonales*, y el triángulo determinado por estas tres rectas, es su *triángulo diagonal*.

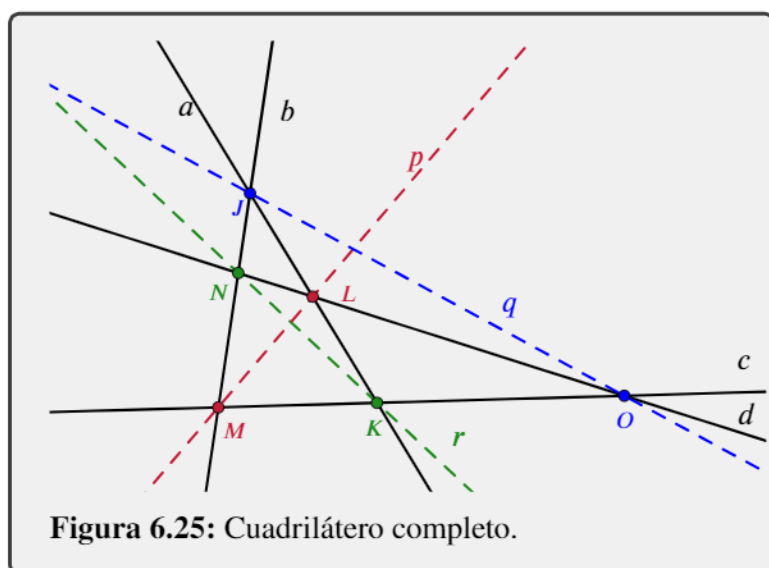
En la figura (6.25) se tienen las cuatro rectas a, b, c y d , que constituyen los lados del cuadrilátero completo.

Como mencionamos anteriormente, cuatro elementos distintos pueden tomarse de dos en dos de seis formas distintas, entonces cada par de recta determina un punto, a saber, se tienen los seis puntos:

$$\begin{aligned} J &= a \cap b, K = a \cap c, L = a \cap d, \\ M &= b \cap c, N = b \cap d \text{ y } O = c \cap d, \end{aligned}$$

que constituyen los vértices del cuadrilátero completo.

Así, los pares de vértices opuestos son:



- $J = a \cap b$, $O = c \cap d$ en color azul;
- $K = a \cap c$ y $N = b \cap d$ en color verde;
- Finalmente, $L = a \cap d$ y $M = b \cap c$ en color rojo.

Las rectas $p = LM$ en color rojo, $q = JO$ en color azul y $r = KN$ en color verde, son las rectas diagonales del cuadrilátero completo $abcd$.

La figura trilátera $\triangle pqr$ es la trilátera diagonal del cuadrilátero completo $abcd$.

A continuación, se muestra una relación entre los cuadrángulos completos y los haces armónicos, así como entre los cuadriláteros completos y las hilera armónicas.

Teorema 6.5.1:

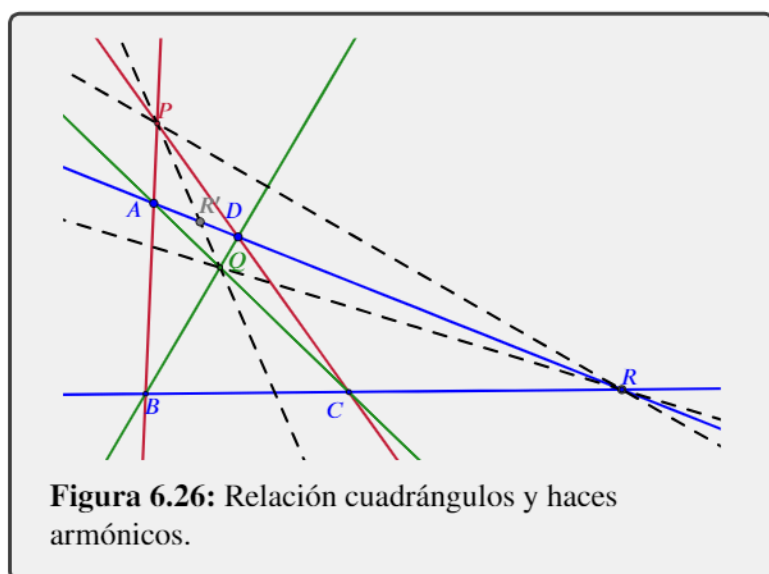
Por cada punto diagonal de un cuadrángulo completo, concurren cuatro rectas armónicas, que son los dos lados que pasan por el punto y las rectas que lo unen con los otros dos puntos diagonales.

Hipótesis: Sea $ABCD$ un cuadrángulo completo, $P = AB \cap CD$, $Q = AC \cap BD$ y $R = AD \cap CD$ sus puntos diagonales, así como las rectas diagonales PQ , RP y RQ , como se muestra en la figura (6.26).

Tesis: La recta AP es conjugada armónica de DP con respecto a las rectas PR' y PR .

Demostración: Si la recta PQ interseca a la recta AD en R' , como consecuencia de la construcción del conjugado armónico dada en el teorema de la división interna y externa (4.2.1), pág. 157, A, R', D, R es una hilera armónica, es decir, $\ell(AD, R'R) = -1$, donde $\ell = AD$.

Como consecuencia del teorema (6.4.2), pág. 315, PA , PR' , PD y PR es un haz de rectas armónicas. **Q.E.D.**



Teorema 6.5.2:

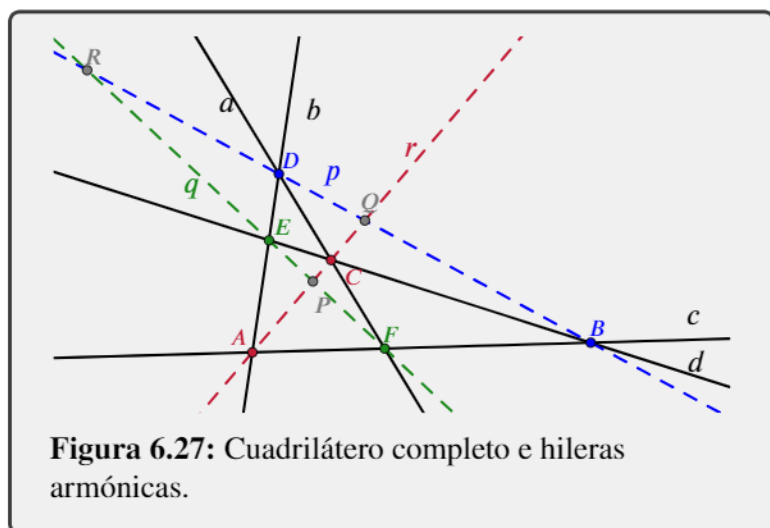
En cada diagonal de un cuadrilátero completo hay una hilera armónica de puntos que consiste de los dos vértices de la diagonal y los puntos en los cuales es intersecada por las otras dos.

Hipótesis: Sea $abcd$ un cuadrilátero completo con pqr su trilateral diagonal, como se muestra en la figura (6.27).

Si $A = b \cap c$, $B = c \cap d$, $C = a \cap d$, $D = a \cap b$, $E = b \cap d$, $F = a \cap c$ son sus vértices, $p = BD$, $q = EF$, $r = AC$ sus

rectas diagonales, $P = q \cap r$, $Q = p \cap r$ y $R = p \cap q$ los puntos en donde concurren las rectas diagonales.

Tesis: $BQDR$ es una cuaterna armónica, es decir, R es el conjugado armónico de Q con respecto a B y D .



Consideremos el triángulo $\triangle ABD$ con rectas $p = BD$, $d = BE$, y $a = DF$ concurrentes en C .

La transversal $q = FE$ interseca $p = BD$ en el punto R , por la construcción del teorema de la división interna y externa Q y R dividen BD interna y externamente en la misma razón, por lo tanto, la hilera B, D, Q, R es armónica.

De manera análoga se demuestra que F, E, P, R y A, C, P, Q son hileras armónicas. **Q.E.D.**

En las definiciones de cuadrángulo y cuadrilátero completo se puede observar que básicamente se intercambian las palabras punto y recta.

Con pequeñas modificaciones de lenguaje, cuando se intercambian las palabras punto con recta, incide con concurre y un enunciado verdadero se convierte en el otro verdadero se dice que se satisface el *principio de dualidad*.

Por ejemplo:

Dos rectas concurren en un punto	Dos puntos inciden en una recta
Figura triangular	Figura Trilátera
Hilera de puntos	Haz de rectas
Cuadrángulo completo	Cuadrilátero completo
Punto diagonal	Recta diagonal
Concurren 4 rectas armónicas Los dos lados que pasan por un punto diagonal	Inciden 4 puntos armónicos Los dos vértices de la recta diagonal

Así, los teoremas anteriores (6.5.1), pág. 331, y (6.5.2), pág. 332 son un ejemplo de este principio.

Este principio de dualidad es fundamental en el estudio de la geometría proyectiva.

6.6. Ejercicios

1. Si tres puntos distintos están uno en cada lado de un triángulo, sus conjugados armónicos con respecto a los vértices del triángulo están unidos con los vértices opuestos. Demuestre que las tres rectas así obtenidas son concurrentes si, y solamente si, los tres puntos son colineales.
2. Demuestre que los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo son colineales.
3. Enuncie y demuestre el dual del ejercicio anterior.
4. Demuestre que, cada uno de los triángulos cuyos lados son tres de las cuatro rectas de un cuadrilátero completo, está en perspectiva con el triángulo diagonal del cuadrilátero.
5. Los vértices de un cuadrángulo completo son los tres vértices de un triángulo y el punto de intersección de sus medianas, construya su triángulo diagonal. Construya además un cuadrilátero completo que tenga su mismo triángulo diagonal.
6. Si, en la hilera armónica $o(AB, CD)$, todos los segmentos dirigidos se miden desde el punto B , entonces

$$\frac{2}{BA} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{BD}.$$

Gamas armónicas

Recíprocamente, si A, B, C y D son cuatro puntos colineales, y los segmentos dirigidos BA, BC y BD satisfacen la relación anterior, entonces los puntos A, B, C y D constituyen una hilera armónica.

7. Si los puntos C, D dividen armónicamente al segmento AB , y su punto medio es M , demuestre que

$$MC^2 + MD^2 = CD^2 + 2MA^2.$$

8. Si $o(AB, CD) = -1$, y M es el punto medio de AB , demuestre que

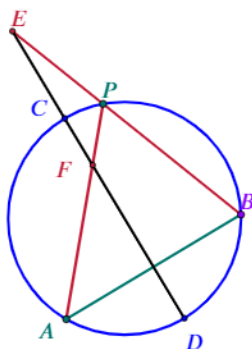
$$\frac{1}{CA \cdot CB} + \frac{1}{DA \cdot DB} = \frac{1}{MA \cdot MB}.$$

9. Si $o(AB, CD) = -1$, demuestre que

$$\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

10. Si A, B, C y D son cuatro puntos colineales, tomados en orden, demuestre que el lugar geométrico de los puntos en los cuales los segmentos AB, CD subtenden ángulos iguales es una circunferencia que tiene por extremos de un diámetro el par de puntos que separan armónicamente cada uno de los dos pares de puntos $A, D; B, C$.

11. Si A, B, C y D son cuatro puntos tales que $o(AB, CD) = -1$ y O es un punto fuera de la recta o , si la recta paralela a OA por el punto B interseca a las rectas OC y OD en los puntos P y Q respectivamente, demuestre que $PB = BQ$, y recíprocamente.
12. Dado un triángulo $\triangle ABC$, si A', B', C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, demuestre que la recta $A'A$ es conjugada armónica de $A'C$ con respecto a las rectas $A'B'$ y $A'C'$.
13. Demuestre que las rectas que unen un punto P de una circunferencia con los extremos de una cuerda dividen armónicamente al diámetro perpendicular a esa cuerda.



14. Si en el paralelogramo $\square ABCD$, la recta AE es paralela a BD , demuestre que E, C, B y D constituyen una hilera armónica.

15. Si los puntos C y D dividen al segmento AB armónicamente en la razón $p : q$, demuestre que el punto medio M del segmento CD divide externamente al segmento AB en razón $p^2 : q^2$.
16. Demuestre que la suma de los cuadrados de dos segmentos armónicos es igual a cuatro veces el cuadrado de la distancia entre los puntos medios de estos segmentos, simbólicamente si los segmentos son AB, CD y sus puntos medios son M y O respectivamente, entonces $AB^2 + CD^2 = 4MO^2$.
17. Dados tres puntos colineales A, B, C , sean A', B' y C' puntos en la misma recta o , tales que, $o(AA', BC) = -1$, $o(BB', CA) = -1$ y $o(CC', AB) = -1$. Demuestre que $o(A'A, B'C') = -1$, $o(B'B, C'A') = -1$ y $o(C'C, A'B') = -1$.
18. Dadas dos rectas fijas OX, OY , una secante variable que pasa por el punto fijo A de OX interseca la recta OY en el punto B , y la circunferencia C con centro en C y radio BO interseca la recta AB en los puntos C y D . Demuestre que el lugar geométrico de los puntos M tal que $o(AM, CD) = \mu 1$ es una circunferencia.
19. Considere dos puntos variables P, Q en la base BC del triángulo $\triangle ABC$ tales que $o(BC, PQ) = \mu 1$. Demuestre que el lugar geométrico de los circuncentros del triángulo $\triangle APQ$ es una línea recta.

Gamas armónicas

20. Dado un triángulo $\triangle ABC$, AD la altura y AA' la mediana por A , con D y A' en la recta BC . Suponga además que las rectas paralelas a las rectas AB y AC por el punto A' intersecan a la recta AD en los puntos P y Q respectivamente. Demuestre que $o(AD, PQ) = -1$.

Inversión geométrica

En el presente capítulo se estudiará el problema de inversión de un punto con respecto a una circunferencia.

Todas las transformaciones que se han estudiado hasta ahora, transforman rectas en rectas, pero la inversión con respecto a una circunferencia, de acuerdo con Coxeter [Co, Cap. 6], inventada por L.J. Magnus en 1831, transforma, en general, rectas en circunferencias, pero preserva ángulos.

Al igual que las reflexiones con respecto a una recta y a un punto son involutivas y tiene una infinidad de puntos fijos, los cuales se encuentran en la misma circunferencia, y el centro carece de imagen.

Usando el método de inversión se dará otra demostración alternativa del teorema de tangencias de Feuerbach (5.6.1), pág. 270.

7.1. Potencia de un punto

Proposición 7.1.1:

Si se trazan dos secantes cualesquiera desde un punto P , exterior a la circunferencia C , tales que corten a la circunferencia en los puntos A, B y A', B' , respectivamente, los triángulos $\triangle PAB'$ y $\triangle PA'B$ son semejantes y, por lo tanto,

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

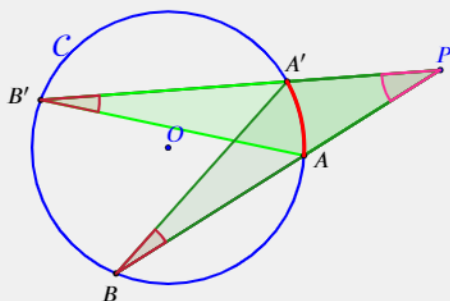


Figura 7.1: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$.

Demostración: Nótese que $\angle A'B'A = \angle A'BA$ pues ellos subtienden el mismo arco, a saber el AA' y, como consecuen-

Inversión geométrica

cia de la definición de ángulo,

$$\angle PB'A = \angle PBA'.$$

Por otra parte $\angle A'PA$ es ángulo común, luego entonces

$$\angle B'PA = \angle BPA',$$

consecuentemente los triángulos $\triangle BPA'$ y $\triangle B'PA$ son semejantes, y sus lados correspondientes son proporcionales, en particular

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}$$

o equivalentemente

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

Q.E.D.

En la proposición anterior el punto P puede ser tanto un punto interior como exterior del círculo C .

Si $P \in C$ no se forman triángulos, en este caso, $P = A$ y $P = A'$ o bien $P = B$ y $P = B'$, de donde $PA = PA' = 0$, o $PB = PB' = 0$, y también se satisface la condición $PA \cdot PB = 0 = PA' \cdot PB'$.

Definición 7.1.1:

Dado un punto P y una circunferencia C cualquiera, considérese una recta por P que corte en dos puntos A y B a la circunferencia C . Se denomina **potencia del punto P** con respecto a la circunferencia C al producto $PA \cdot PB$ de los segmentos PA y PB .

Inversión geométrica

Como consecuencia de la proposición (7.1.1), pág. 341, la potencia de un punto está bien definida.

Además, la potencia de un punto es:

- Negativa, si P es un punto interior del círculo C .
- Cero, si P está en la circunferencia C .
- Positiva, si P es un punto exterior del círculo C .

Proposición 7.1.2:

Dado un punto P y una circunferencia C con centro en O y radio r , entonces:

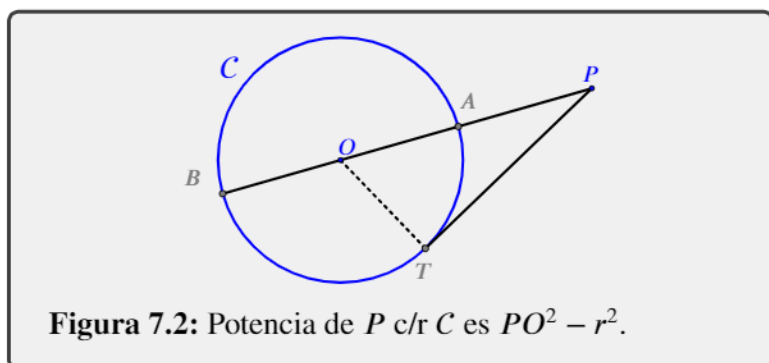
1. El valor de la potencia de P con respecto a C es

$$PO^2 - r^2.$$

2. Si P está fuera del círculo C , su potencia es igual PT^2 , donde $T \in C$ y PT es tangente a la circunferencia.
3. Si la circunferencia tiene radio cero, entonces la potencia de P con respecto a esta circunferencia es PO^2 , es decir, es igual al cuadrado de la distancia de P a O .

Demostración: Como consecuencia de la proposición (7.1.1), pág. 341, el valor de la potencia no depende de la elección de

Inversión geométrica



la recta que cota a C , por lo que, si $P \neq O$ se tomará la recta OP .

La recta OP corta la circunferencia C en dos puntos A y B , de donde, AB es un diámetro de C y O es su punto medio. Por ende,

$$PA = PO + OA, PB = PO + OB \text{ y } AO = OB = r.$$

Luego entonces

$$PA \cdot PB = (PO + OA) \cdot (PO + OB) \quad (7.1)$$

$$= PO^2 + PO \cdot (OA + OB) + OA \cdot OB \quad (7.2)$$

$$= PO^2 - r^2. \quad (7.3)$$

Si $P = O$, entonces $PA \cdot PB = OA \cdot OB = -r^2$.

Si P es un punto exterior al círculo C , sea PT una tangente a C por P .

Inversión geométrica

Como consecuencia de la proposición (7.1.1), pág. 341, la potencia de P es independiente de la recta, por lo que, la potencia de P con respecto a C es igual a $PT \cdot PT = PT^2$.

Finalmente, si la circunferencia C tiene radio cero, como consecuencia del primer inciso, la potencia de P es igual a $PO^2 - 0^2 = PO^2$. **Q.E.D.**

Definición 7.1.2:

El **eje radical** de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con respecto a las dos circunferencias es igual.

Proposición 7.1.3:

El eje radical es una línea recta.

Demostración: Sean C, C' dos circunferencias no concéntricas con centros O, O' y radios r, r' respectivamente.

Por un punto P que tiene las mismas potencias con respecto a estas circunferencias, trácese las rectas PO, PO' y, finalmente PM perpendicular a la recta OO' que une los centros, como se muestra en la figura (7.3). Así $PO \cap C = \{A, A'\}$ y $PO' \cap C = \{B, B'\}$, véase la figura (7.4).

Por definición, de potencia de P con respecto a C y C' se sigue que

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB',$$

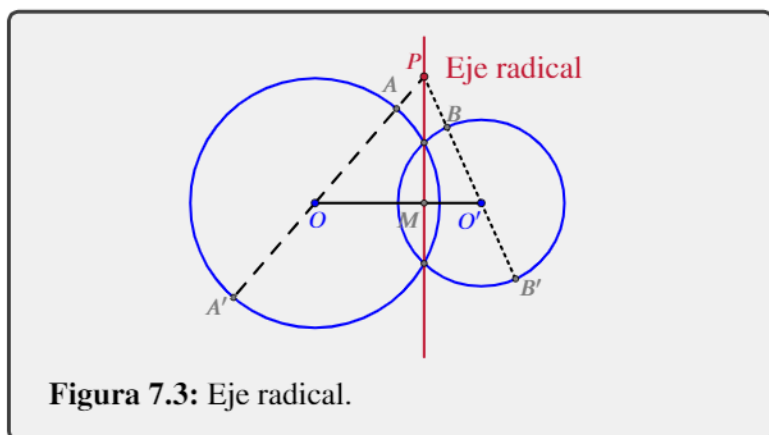


Figura 7.3: Eje radical.

pero, de la proposición (7.1.2), pág. 343 se sigue que

$$PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2.$$

Restando el valor MP^2 en ambos lados de la igualdad se obtiene $OM^2 - r^2 = MO'^2 - r'^2$, es decir,

$$(OM + MO')(OM - MO') = OM^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2.$$

Ya que $OO' = OM + MO'$, la expresión anterior es equivalente a

$$OM - MO' = \frac{r^2 - r'^2}{OO'}. \quad (7.4)$$

Y solamente hay un punto M que satisface la ecuación

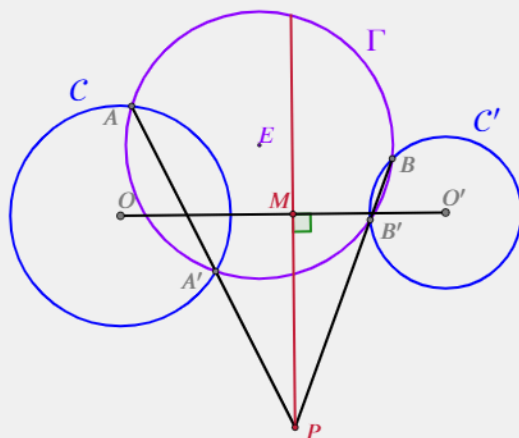


Figura 7.4: Construcción del eje radical de dos circunferencias no concéntricas C y C' .

anterior, ya que si N fuera otro punto semejante, entonces

$$\begin{aligned} ON + NM - MO' &= OM - MO' \\ &= ON - NO' \\ &= OM + MN - NO'. \end{aligned}$$

Lo cual significa que $MN = 0$, así $M = N$.

Por lo tanto, si un punto tiene potencias iguales con respecto a dos circunferencias, este punto está en una perpendicular a la recta que une sus centros, y ya que los pasos son reversibles se obtiene el recíproco. **Q.E.D.**

Inversión geométrica

Si los centros de dos circunferencias de radios desiguales se aproximan, el punto M tiende al punto al infinito de la recta OO' , y la recta MP tiende a una recta al infinito.

Por tal razón se define el eje radical de dos circunferencias concéntricas desiguales como la recta al infinito, y el eje radical de dos circunferencias concéntricas iguales queda indefinido.

Finalmente, si dos circunferencias se intersecan, su eje radical pasará por los puntos comunes.

Teorema 7.1.1:

Los ejes radicales de tres circunferencias tomadas por pares son concurrentes.

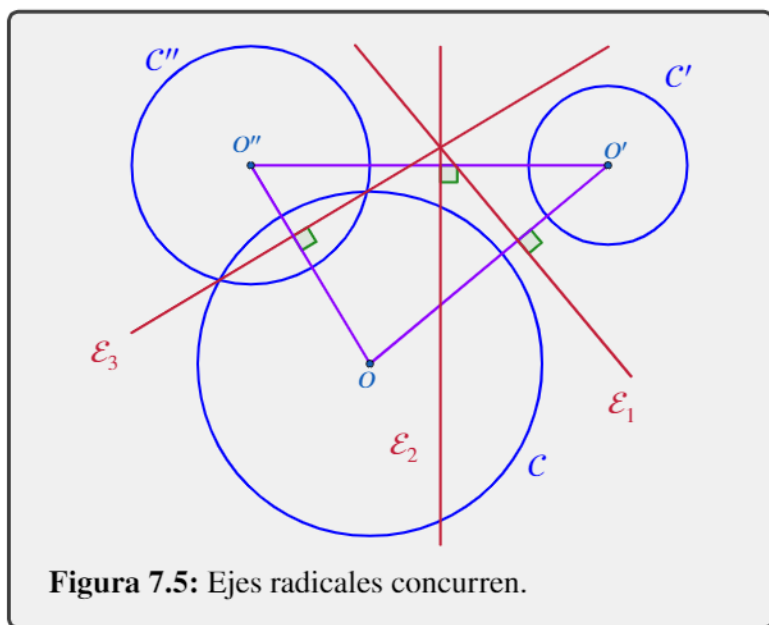
Hipótesis: Sean C, C', C'' , tres circunferencias no concéntricas con centros O, O', O'' y radios r, r', r'' respectivamente. Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ los ejes radicales de C, C' ; C', C'' y C, C'' respectivamente.

Tesis: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ son concurrentes.

Demostración: Si O, O', O'' son colineales, los ejes radicales $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ son paralelos y distintos, o bien, dos de ellos coinciden y el eje común es paralelo al tercero, o bien, los tres ejes coinciden. En cualesquiera de estos casos, los ejes radicales concurren en un punto al infinito.

Supóngase ahora que O, O' y O'' no son colineales, y sea $P = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$.

Entonces $PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2$ y $PO' - r'^2 = PO'' - r''^2$.



Así, $PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2$, por ende $P \in \mathcal{E}_3$, de donde $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ son concurrentes. **Q.E.D.**

Definición 7.1.3:

El punto donde concurren los ejes radicales de tres circunferencias tomadas en pares se denomina **centro radical**.

Teorema 7.1.2:

El eje radical de la circunferencia inscrita y de las circunferencias excritas de un triángulo tomadas por pares, son las bisectrices de los ángulos del triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado.

Basta demostrar el teorema para la circunferencia inscrita y una de las circunferencias excritas.

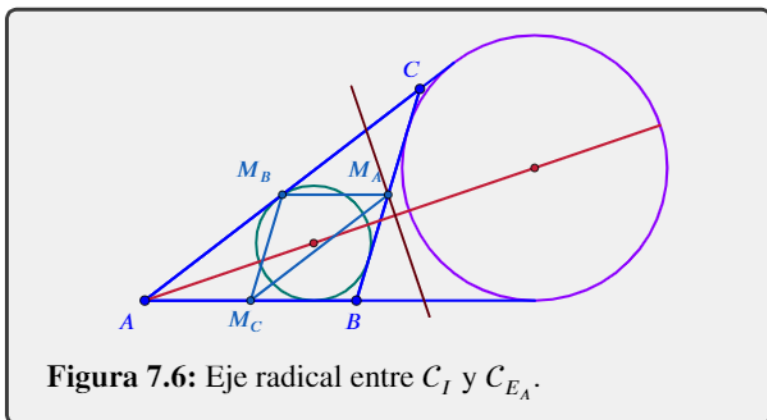


Figura 7.6: Eje radical entre C_I y C_{E_A} .

Hipótesis: Dado un triángulo $\triangle ABC$, con circunferencia inscrita C_I , circunferencia excrita C_{E_A} , M_A , M_B , M_C los puntos medios de BC , CA y AB respectivamente, y $\mathcal{E}_A$ el eje radical de C_I y C_{E_A} , como se muestra en la figura (7.6).

Inversión geométrica

Tesis: C_{E_A} es una bisectriz, por el vértice M_A del triángulo $\triangle M_A M_B M_C$.

Demostración: El punto M_A pertenece al eje radical $\mathcal{E}_A$ ya que la potencia de M_A con respecto a C_I y C_{E_A} coinciden.

Además, $\mathcal{E}_A$ es perpendicular a IE_A , la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$.

Pero la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$ es paralela a la bisectriz del ángulo interior $\angle M_B M_A M_C$ y, por tanto, el eje radical es bisectriz del ángulo $\angle M_B M_A M_C$, es decir, el eje radical $\mathcal{E}_A$ es la bisectriz del ángulo exterior en M_A , del triángulo $\triangle M_A M_B M_C$. **Q.E.D.**

Corolario 7.1.1:

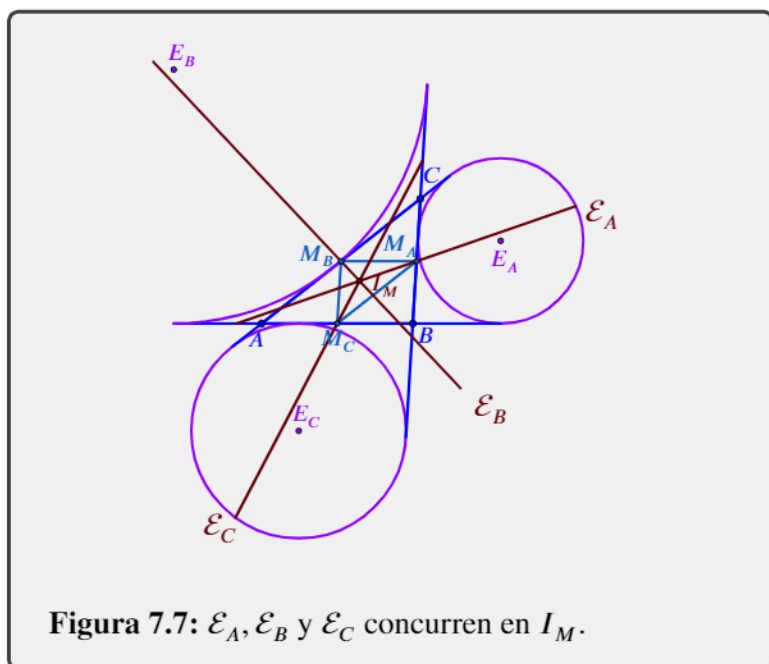
Con la notación del teorema anterior (7.1.2), pág. 350, la bisectriz interior en M_A , para el triángulo $\triangle M_A M_B M_C$, es el eje radical de las otras dos circunferencias excritas.

Es consecuencia inmediata de la demostración del teorema anterior.

Corolario 7.1.2:

Con la notación del teorema (7.1.2), pág. 350, el centro radical de las tres circunferencias excritas es el incentro I_M del triángulo $\triangle M_A M_B M_C$.

Demostración: Dadas las circunferencias excéntricas C_{E_A} ,



C_{E_B} y C_{E_C} como consecuencia del primer corolario del teorema (4.5.3), pág. 185, el eje radical $\mathcal{E}_A$ de C_{E_B} y C_{E_C} es la bisectriz interior del ángulo $\angle M_B M_A M_C$, asimismo el eje radical $\mathcal{E}_B$ de C_{E_A} y C_{E_C} es la bisectriz interior del ángulo $\angle M_C M_B M_A$, finalmente el eje radical $\mathcal{E}_C$ de C_{E_A} y C_{E_B} es la bisectriz interior del ángulo $\angle M_A M_C M_B$, como consecuencia del teorema (7.1.1), pág. 348, estos tres ejes concurren, y como son las bisectrices interiores del triángulo medial

$\triangle M_A M_B M_C$, el punto en el que concurren es el incentro I_M del triángulo medial. **Q.E.D.**

7.2. El teorema de Pascal

El teorema del hexagrama místico de Pascal es un resultado que Blaise Pascal descubrió en 1639, cuando tenía solamente 16 años. Éste es una generalización del teorema del hexágono de Pappus (4.4.1), pág. 172.

Teorema 7.2.1: de Pascal.

Los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una circunferencia son colineales.

Hipótesis: Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en una circunferencia, $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$ y $R = CD \cap FA$.

Tesis: Los puntos P , Q y R son colineales.

Demostración: Sean $K = AB \cap CD$, $L = CD \cap EF$ y $M = AB \cap EF$, con respecto al triángulo $\triangle KLM$ y aplicando el teorema de Menelao (4.1.1), pág. 144, se obtienen las ecuaciones:

- A la recta FA :

$$\frac{KR}{RL} \cdot \frac{LF}{FM} \cdot \frac{MA}{AK} = -1;$$

Inversión geométrica

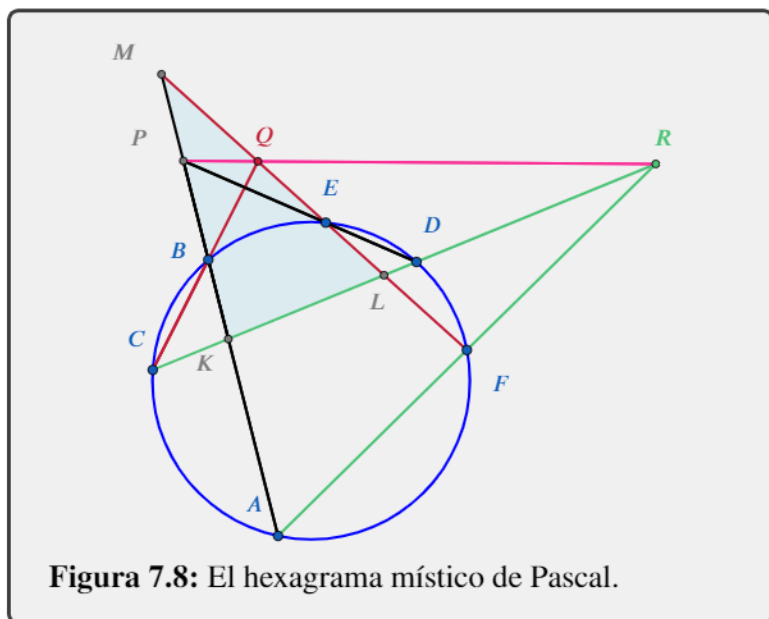
- A la recta BC :

$$\frac{KC}{CL} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MB}{BK} = -1;$$

- A la recta DE :

$$\frac{KD}{DL} \cdot \frac{LE}{EM} \cdot \frac{MP}{PK} = -1.$$

Véase la figura (7.8).



Inversión geométrica

Multiplicando estas tres ecuaciones, y agrupando algunos términos convenientemente se obtiene

$$\begin{aligned} -1 &= \left(\frac{KR}{RL} \cdot \frac{LF}{FM} \cdot \frac{MA}{AK} \right) \cdot \left(\frac{KC}{CL} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MB}{BK} \right) \\ &\quad \left(\frac{KD}{DL} \cdot \frac{LE}{EM} \cdot \frac{MP}{PK} \right) \\ &= \left(\frac{KC \cdot KD}{AK \cdot BK} \cdot \frac{MA \cdot MB}{EM \cdot FM} \cdot \frac{LE \cdot LF}{CL \cdot DL} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{KR}{RL} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MP}{PK} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Como las rectas AB y CD concurren en K , por definición (7.1.1), pág. 342, de potencia de un punto

$$KC \cdot KD = KA \cdot KB = AK \cdot BK,$$

de donde

$$\frac{KC \cdot KD}{AK \cdot BK} = 1.$$

De manera análoga, como M es el punto donde concurren las rectas AB y EF se sigue que

$$MA \cdot MB = ME \cdot MF = EM \cdot FM,$$

así que

$$\frac{MA \cdot MB}{EM \cdot FM} = 1.$$

Inversión geométrica

Finalmente, en L concurren las rectas CD y EF , por tanto

$$CL \cdot DL = LC \cdot LD = LE \cdot LF,$$

lo cual implica

$$\frac{LE \cdot LF}{CL \cdot DL} = 1.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (7.5) se sigue que

$$\frac{KR}{RL} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MP}{PK} = -1.$$

Como consecuencia del recíproco del teorema de Menelao (4.1.1), pág. 144, se tiene que los puntos P , Q y R son colineales, como se esperaba demostrar. **Q.E.D.**

Definición 7.2.1:

La recta en que inciden los puntos P , Q y R se denomina la **recta de Pascal** asociada al hexágono.

Si los mismos puntos se unen consecutivamente en otro orden se obtiene un hexágono diferente, para cada uno de estos hexágonos hay una recta de Pascal, y usando técnicas de combinatoria se puede demostrar que hay sesenta rectas de Pascal de los posibles hexágonos diferentes.

7.3. Inversión con respecto a una circunferencia

Definición 7.3.1:

Sea C una circunferencia con centro O y radio r . Una **inversión respecto a la circunferencia C** es la transformación del plano que envía cada punto P (con $P \neq O$) al punto P' de la semirrecta OP tal que

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

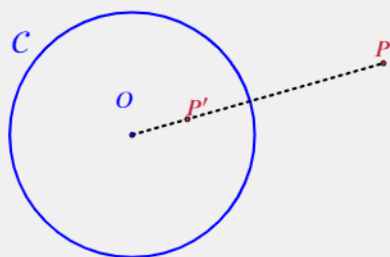


Figura 7.9: El inverso de un punto.

Cuando no haya lugar a confusión, se dirá que se tiene una inversión de centro O y radio r .

Inversión geométrica

El punto O se llama centro de inversión y el radio r *radio de inversión*.

Nótese que en la definición se ha supuesto que $P \neq O$. Si $P = O$, entonces $OP = 0$ y P' no podría ser un punto en el plano euclidiano.

Teorema 7.3.1:

Todo punto en el plano distinto del centro de una circunferencia de radio positivo, tiene un inverso con respecto a esa circunferencia, y además el inverso es único.

Hipótesis: Sean C una circunferencia con centro O y radio $r > 0$, y P un punto distinto de O .

Tesis: Existe el inverso de P con respecto a C , y además es único, es decir, existe un punto P' tal que $\frac{OP}{r} = \frac{r}{OP'}$.

Demostración: Si P es un punto exterior al círculo C , trácese la recta OP y una recta tangente PT a C por P , con $T \in C$.

Entonces $\triangle OPT$ es un triángulo rectángulo con hipotenusa OP y ángulo recto $\angle OTP$.

La altura TP' por el vértice T corta a la hipotenusa OP en un punto P' y los triángulos $\triangle OPT$, $\triangle OP'T$ y $\triangle P'PT$ son semejantes, por ende, sus lados correspondientes son proporcionales, en particular $TO = r$ y

$$\frac{OP}{r} = \frac{r}{OP'},$$

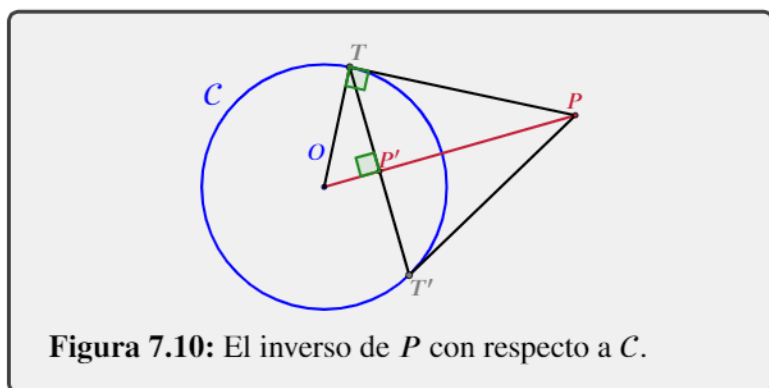


Figura 7.10: El inverso de P con respecto a C .

o, equivalentemente

$$OP \cdot OP' = TO^2 = r^2.$$

Si $P \in C$, es claro que $P' = P$ satisface $OP \cdot OP = r^2$.

Finalmente, si $P \neq O$ es un punto en el interior del círculo C , trácese la recta OP y, constrúyase la recta PT perpendicular a OP por el punto P , con $T \in C$. A continuación, trácese el radio OT y sea TP' la recta perpendicular a OT en T con $P' \in OP$, como $T \neq O$, las rectas OP y OP' no son paralelas, por lo que concurren en un punto, por tal razón puede suponerse que $P' \in OP$.

Nuevamente, se tienen los triángulos semejantes $\triangle OPT$, $\triangle OP'T$ y $\triangle P'PT$ y, procediendo como en la primera parte, se obtiene que $OP \cdot OP' = r^2$.

Como consecuencia de la construcción se tiene la unici-

Inversión geométrica

dad, si P'' fuera otro punto en la semirrecta OP tal que

$$OP \cdot OP'' = r^2,$$

entonces

$$OP \cdot OP'' = OP \cdot OP'$$

y como $P \neq O$, se concluye que $OP' = OP''$.

Pero P' y P'' están en la semirrecta OP a la misma distancia orientada de O por tanto $P' = P''$. **Q.E.D.**

Así, dada una circunferencia C con centro O se tiene una transformación definida en el plano euclidiano $\mathbb{E}$, salvo el punto O , que denotaremos

$$\iota_{O,r} : \mathbb{E} \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{E} \setminus \{O\}$$

$$\iota_{O,r}(P) = P',$$

que asocia a cada punto P , su inverso P' con respecto a C .

Corolario 7.3.1:

Todo punto en la región interior de C tiene por imagen un punto en la región exterior de C y recíprocamente.

Demostración: Ya que, si $OP < OR$, como $OP \cdot OP' = OR^2$, entonces $OP' > OR$. **Q.E.D.**

Corolario 7.3.2:

El inverso de todo punto en la circunferencia es el propio punto.

Inversión geométrica

Demostración: Si P es un punto en la circunferencia de centro O y radio r , entonces $OP = r$, y como P está en la semirrecta OP tenemos que P es el único punto en tal semirrecta que satisface $OP = r$, y así, $OP \cdot OP = r^2$. **Q.E.D.**

Corolario 7.3.3:

El inverso del inverso de un punto es el propio punto, en otras palabras, las inversiones son involutivas.

Demostración: Sea P un punto en el plano distinto de O , si P' es el inverso de P con respecto a la circunferencia C de centro O y radio r , entonces $OP \cdot OP' = r^2$, por otra parte, el inverso de P' con respecto a C es un punto P'' tal que $OP' \cdot OP'' = r^2$, de donde $OP \cdot OP' = OP' \cdot OP''$.

Como $P \neq O$, en particular $OP = OP''$, luego entonces $P = P''$.

En otras palabras $\iota_{O,r}(P) = P$.

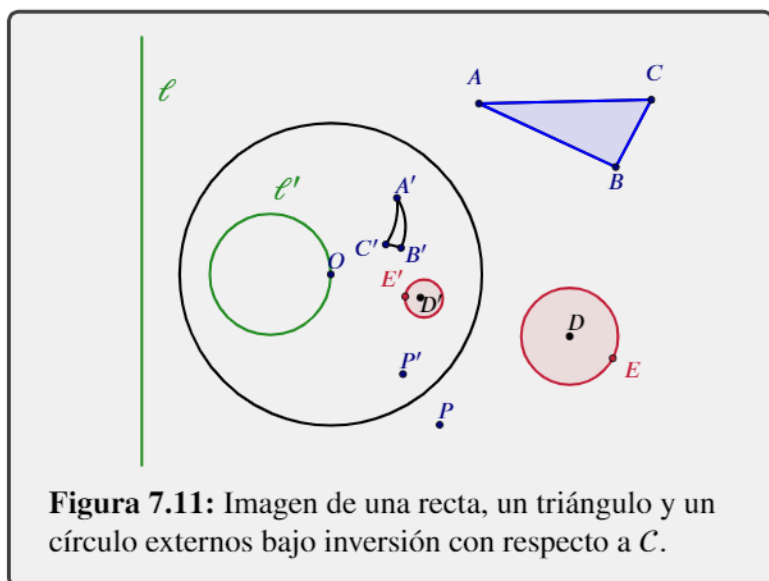
Q.E.D.

Definición 7.3.2:

Sea P' el inverso de P con respecto a la circunferencia C de centro O y radio $r > 0$.

Si P se mueve en el plano trazando una curva cualquiera Γ , entonces P' también trazara una curva Γ' , la curva Γ' es, por definición, la **curva inversa** de Γ .

Por ejemplo,



En la figura (7.11) se muestran las imágenes bajo inversión con respecto a la circunferencia C :

- Del punto P es el punto P' .
- De la recta ℓ es el arco de circunferencia ℓ' , sin incluir el punto O .
- Del triángulo $\triangle ABC$ es la figura trilátera $\triangle A'B'C'$ cuyos lados son arcos de circunferencia.

Inversión geométrica

- Del círculo con centro en D y radio DE es un círculo que contiene en su interior al punto D' y en su frontera al punto E' .

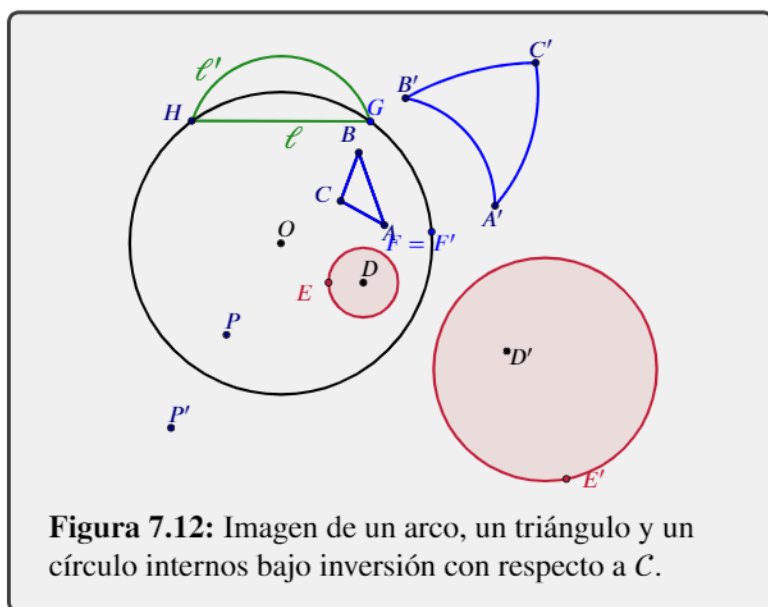


Figura 7.12: Imagen de un arco, un triángulo y un círculo internos bajo inversión con respecto a C .

De manera similar, se pueden considerar figuras conocidas en el interior del círculo C y obtener sus imágenes por inversión con respecto a la circunferencia C , como se muestra en (7.12).

A continuación, estudiaremos formalmente el comportamiento de circunferencias y rectas bajo inversiones.

Proposición 7.3.1:

La composición de las inversiones en dos circunferencias concéntricas cuyos radios son r y r' es la homotecia con centro en O y razón de homotecia $\mu = \left(\frac{r'}{r}\right)^2$.

Demostración: Sean C y C' dos circunferencias con centro en O y radios r y r' respectivamente.

Sea P un punto en el plano, P' el inverso de P con respecto a C y P'' el inverso de P' con respecto a C' , entonces

$$OP \cdot OP' = r^2 \text{ y } OP' \cdot OP'' = r'^2.$$

Por tanto

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \frac{OP' \cdot OP''}{OP \cdot OP'} = \frac{OP''}{OP}.$$

De la definición (3.2.3), pág. 117 se tiene el resultado. **Q.E.D.**

Teorema 7.3.2:

Cualquier circunferencia que pasa por un par de puntos inversos distintos, es ortogonal a la circunferencia de inversión.

Recíprocamente, cualquier circunferencia que es ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.

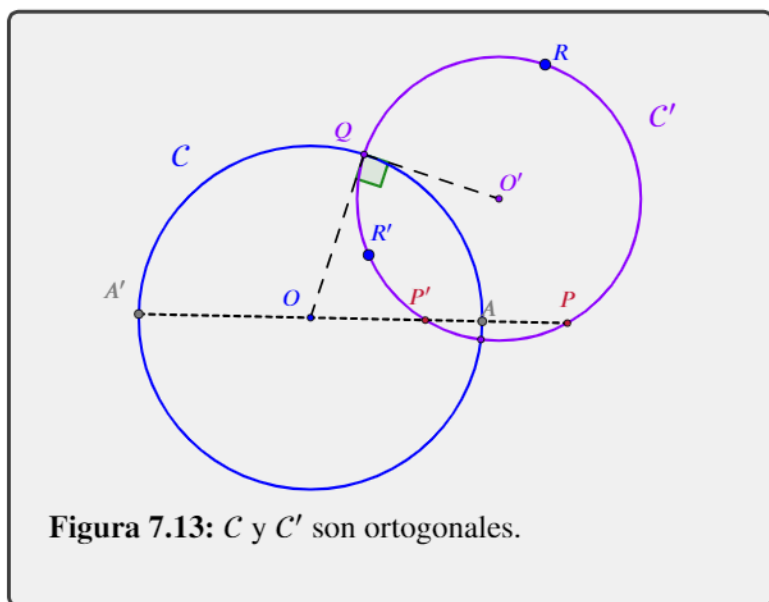


Figura 7.13: C y C' son ortogonales.

Hipótesis: Sea C una circunferencia con centro O y radio r . Sea $P \neq O$ un punto dado, $\iota_{O,r}(P) = P'$ el inverso de P con respecto a C , y supóngase además que $P \neq P'$, finalmente sea C' cualquier circunferencia que pase por P y P' .

Tesis: C' es la imagen bajo la inversión con respecto a C de C' . demás, C y C' son ortogonales.

Demostración: Supóngase que C y C' se intersecan en dos puntos Q_1 y Q_2 , como $\iota_{O,r}(P) = P'$, entonces

$$OP \cdot OP' = r^2 = OQ_1.$$

Inversión geométrica

Pero PP' es una secante de C' , por ende $OP \cdot OP'$ es potencia de O con respecto a C' , con signo positivo por ser O un punto exterior a C' .

Como consecuencia de la proposición (7.1.2), pág. 343, inciso (2), el valor de la potencia de O con respecto a C' es el cuadrado de una tangente OT de él a la circunferencia, es decir,

$$OP \cdot OP' = OT^2,$$

donde T es el punto de intersección de la tangente a C' desde O con C' .

Por lo tanto, T está en C y el radio OT de C es una tangente a C' desde el punto O .

Ya que todos los pasos de la demostración son reversibles, se tiene también el recíproco. **Q.E.D.**

Como consecuencia del resultado anterior, es posible trazar un haz de circunferencias que pasen por dos puntos inversamente relacionados, tales que todos sean ortogonales al círculo de inversión, aún más:

Corolario 7.3.4:

El inverso de un punto dado P es la segunda intersección de dos circunferencias cualquiera que pasan por P y son ortogonales a la circunferencia de inversión.

Corolario 7.3.5:

Es posible trazar, por un punto dado P , una circunferencia (o una recta) que sea ortogonal a dos circunferencias dadas.

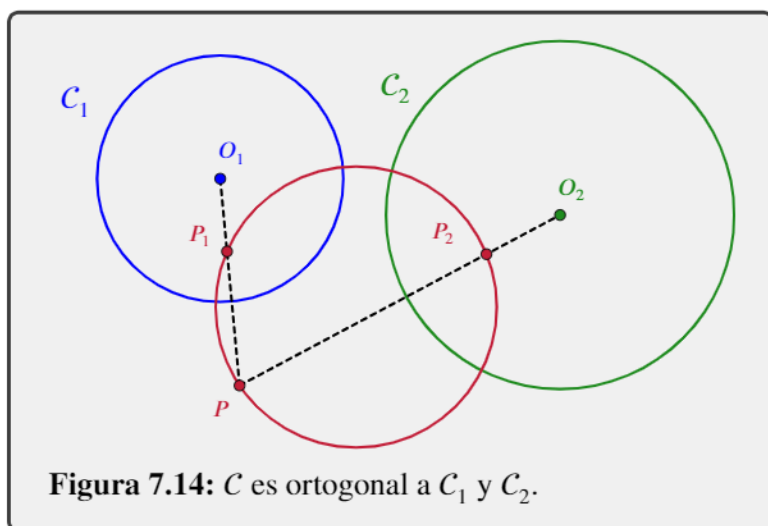


Figura 7.14: C es ortogonal a C_1 y C_2 .

Demostración: Si C_1 y C_2 son las circunferencias dadas, y P_1 , P_2 son los inversos de P con respecto a estas circunferencias, como consecuencia del teorema (7.3.2), pág. 364, la circunferencia $\odot P_1 P P_2$ (o recta) es ortogonal a C_1 y C_2 , como se muestra en la figura (7.14). **Q.E.D.**

Teorema 7.3.3:

Si P' y Q' son puntos inversos respectivamente de P y Q por una inversión respecto a una circunferencia C de centro O y radio r . Entonces

$$\angle OPQ = \angle OQ'P' \quad \text{y} \quad \angle OQP = \angle OP'Q'.$$

En particular los puntos P, Q, P' y Q' son concíclicos.

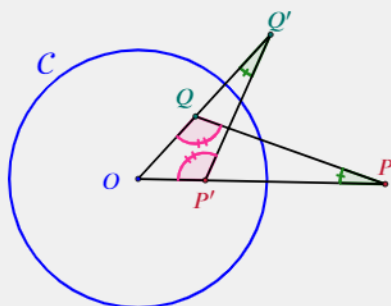


Figura 7.15: P, Q, P', Q' son concíclicos.

Demostración: Como P', A' son inversos respectivamente de P y Q con respecto a C entonces

$$OP \cdot OP' = r^2 = OQ \cdot OQ'.$$

Inversión geométrica

De donde

$$\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$$

y como el ángulo $\angle QOP = \angle Q'OP'$ como consecuencia del teorema de semejanza *LAL* tenemos que los triángulos $\triangle Q'OP'$ y $\triangle POQ$ son semejantes.

Consecuentemente los ángulos correspondientes son iguales, es decir

$$\angle OPQ = \angle OQ'P' \quad \text{y} \quad \angle OQP = \angle OP'Q'.$$

Dado el cuadrilátero $\square PP'Q'Q$ como consecuencia de lo anterior, sus ángulos opuestos son iguales, o bien, suplementarios.

Como consecuencia de los teoremas (2.3.2) y (2.3.4), páginas. ?? y 71, el cuadrilátero $\square PP'Q'Q$ es cíclico. **Q.E.D.**

De las propiedades anteriores se obtienen los siguientes resultados:

Corolario 7.3.6:

La circunferencia C y la que pasa por los puntos P , P' , Q y Q' son ortogonales.

Corolario 7.3.7:

Cualquier circunferencia C' que pase por P y P' es invariante, es decir, si $Q \in C'$, entonces $Q' \in C'$.

Teorema 7.3.4:

Las inversiones transforman circunferencias y/o rectas en circunferencias y/o rectas, según pasen o no por el centro de inversión. Concretamente, si C es una circunferencia de centro O y radio r entonces:

1. La imagen de una recta que no pasa por O es una circunferencia que pasa por O .
2. La imagen de una circunferencia que no pasa por O es una circunferencia que no pasa por O .
3. La imagen de una circunferencia que pasa por O es una recta que no pasa por O .
4. La imagen de una recta que pasa por O es ella misma.

Recuerde que el centro de inversión con respecto a una circunferencia C de centro O y radio $r > 0$ no está en el dominio de la transformación de inversión $\iota_{O,r}$, por ende, cuando se habla de la imagen de una recta o circunferencia que pasa por el centro de inversión O , se habla de la imagen bajo $\iota_{O,r}$ de la circunferencia o recta salvo el punto O .

Demostración: La demostración se realizará analizando cada uno de los casos separadamente.

(1) Si ℓ es una recta que no pasa por O y P es el pie de la perpendicular desde O a ℓ , dado un punto $X \in \ell$ arbitra-

Inversión geométrica

rio, si $X' = \iota_{O,r}(X)$ y $P' = \iota_{O,r}(P)$ denotan las inversiones de X y P respectivamente, como consecuencia del teorema (7.3.3), pág. 7.3, $\angle OX'P' = \angle OPX = 1$ recto, como consecuencia del teorema de Thales X' está en la circunferencia de diámetro OP' , como se muestra en la figura (7.16)

Además, cualquier punto $X \in C' \setminus \{O\}$ tiene su inverso sobre ℓ .

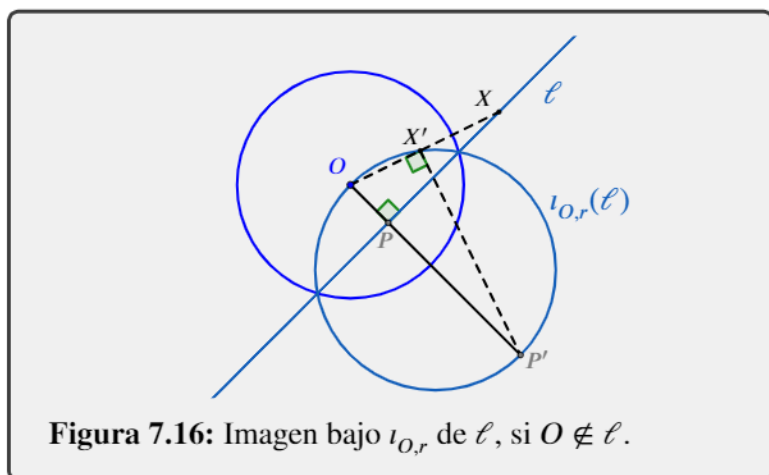


Figura 7.16: Imagen bajo $\iota_{O,r}$ de ℓ , si $O \notin \ell$.

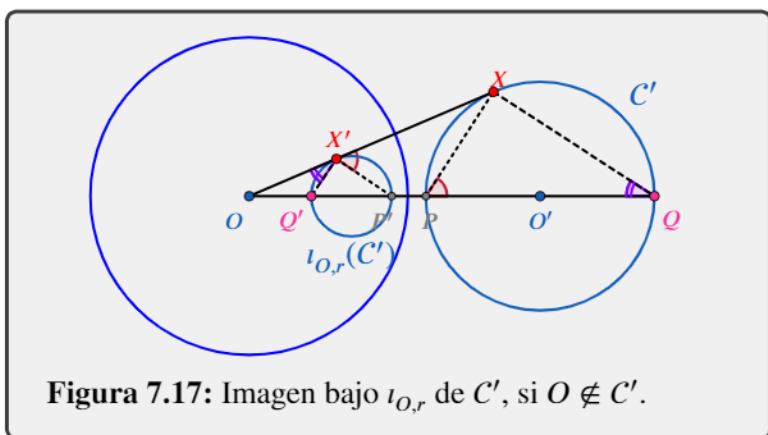
(2) Considérese ahora una circunferencia $C' \neq C$, con centro en O' , radio r' y que no pase por el punto O . Considérese los puntos P, Q donde la recta OO' interseca C' , y sean $P' = \iota_{O,r}(P)$ y $Q' = \iota_{O,r}(Q)$, los inversos de P y Q con respecto a C .

Inversión geométrica

Dado $X \in C'$ un punto arbitrario, y $X' = \iota_{O,r}(X)$ su inverso con respecto a C .

Como consecuencia del teorema (7.3.3), pág. 368:

$$\angle XQP = \angle OX'Q' \quad \text{y} \quad \angle XPQ = \angle P'X'X.$$



Como PQ es un diámetro de C' , entonces $\angle PXQ = 1$ recto, por tanto $\angle Q'X'P' = 1$ recto y, como consecuencia del teorema de Thales, X' pertenece a la circunferencia de diámetro $P'Q'$, como se muestra en la figura (7.17)

Como X es arbitrario, todo punto de C' tiene la imagen sobre esta circunferencia y recíprocamente.

Nótese que $O'' = \iota_{O,r}$ el inverso del centro O' de C' no es el centro de la circunferencia $C'' = \iota_{O,r}(C')$ que es la involución de C' con respecto a C .

Inversión geométrica

Como las inversiones son involutivas se tiene que las propiedades (3) y (4) son consecuencia de las propiedades (1) y (2). **Q.E.D.**

Corolario 7.3.8:

Líneas rectas paralelas, ninguna de las cuales pasa por el centro de la circunferencia de inversión, se invierten en circunferencias tangentes una a otra en el centro de inversión.

Teorema 7.3.5:

Las inversiones preservan ángulos en magnitud, pero invierten el sentido, es decir, son transformaciones isogonales.

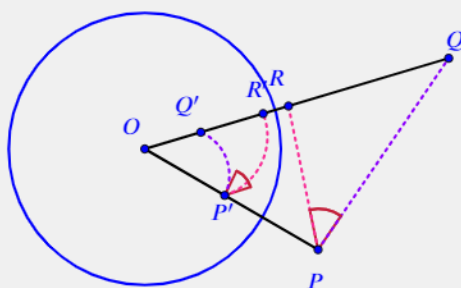


Figura 7.18: Las inversiones preservan ángulos.

Inversión geométrica

Ya que el ángulo entre dos curvas es igual al ángulo entre sus rectas tangentes, bastará demostrar que el ángulo entre dos rectas se preserva bajo inversiones con respecto a una circunferencia en magnitud.

Hipótesis: Dada una circunferencia C con centro O y radio r , $P \neq O$ un punto en el plano, a y b dos rectas distintas que concurren en P . Sean $Q \in a \setminus \{O, P\}$, $R \in b \setminus \{O, P\}$ puntos distintos en el plano. P' , Q' , R' sus imágenes y sean $a' = \iota_{O,r}(a)$ y $b' = \iota_{O,r}(b)$.

Tesis: El ángulo entre a' y b' en P' es igual, en medida, al ángulo entre a y b en P , pero se recorre en sentido opuesto, es decir, cuando Q y R se aproximan a P , el ángulo $\angle Q'P'R'$ se aproxima al ángulo $-\angle QPR$.

Demostración: Sin perder generalidad, se puede suponer que el punto R pertenece a la recta OQ , con $R \neq Q$.

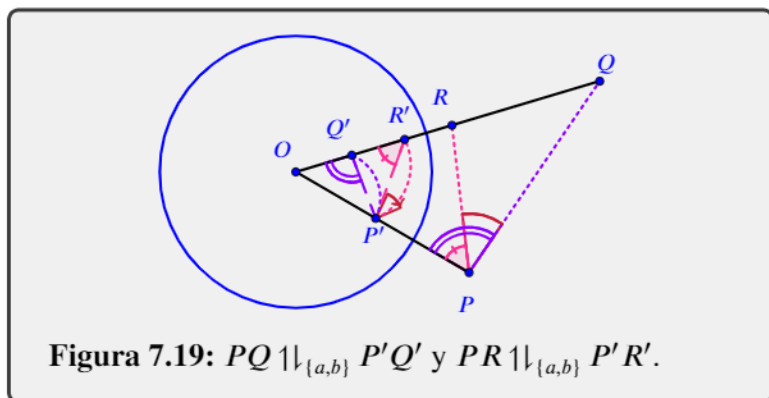


Figura 7.19: $PQ \parallel_{\{a,b\}} P'Q'$ y $PR \parallel_{\{a,b\}} P'R'$.

Inversión geométrica

Como consecuencia de la proposición (7.1.1), pág. 341, $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$, de donde $\triangle OP'Q'$ es inversamente semejante al triángulo $\triangle OPQ$, por ende, la recta PQ es antiparalela a $P'Q'$ con respecto al par $\{OP, OQ\}$, y por el teorema (2.3.5), pág. 73,

$$\angle QPO = \angle OQ'P'.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\angle RPO = \angle OR'P'.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\angle QPR &= \angle QPO - \angle RPO \\ &= \angle OQ'P' - \angle OR'P' \\ &= -\angle Q'R'P'.$$

Si Q se aproxima a P , por construcción R también se aproxima a P , y las rectas $Q'P'$ y $R'P'$ tienden a las tangentes de a' , b' en el punto P , de donde, cuando Q y R se aproximan a P , el ángulo $\angle Q'P'R'$ se aproxima al ángulo $-\angle QPR$, como se esperaba demostrar. **Q.E.D.**

Corolario 7.3.9:

Si dos curvas son tangentes una a la otra en P , sus imágenes bajo la inversión con respecto a C son tangentes una a la otra en P' .

Inversión geométrica

Una consecuencia de la definición (7.1.2), pág. 345, de eje radical, es la siguiente:

Si ℓ es el eje radical de dos circunferencias C y C' , desde un punto $E \in \ell$ se trazan los segmentos tangentes, estos cuatro segmentos serán iguales y además serán perpendiculares a los radios en los puntos de contacto.

Luego entonces, E es el centro de la circunferencia que pasa por cualesquiera de los puntos de tangencia, también pasará por los otros tres, y cortará perpendicularmente a las dos circunferencias.

Es decir, *el eje radical de dos circunferencias es también el lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a C y C'*

Teorema 7.3.6:

Cualquier circunferencia ortogonal a dos circunferencias dadas C y C' tiene su centro en el eje radical de C y C' .

Demostración: Sean O y O' respectivamente los centros de las circunferencias C y C' . Supóngase que el círculo de centro P corta a las circunferencias C y C' perpendicularmente.

Si P es el centro de una circunferencia ortogonal a las circunferencias C y C' , entonces los triángulos $\triangle POA$ y $\triangle POA'$ son rectángulos, por lo tanto

$$PA^2 = PO^2 - OA^2 \quad \text{y} \quad PA'^2 = PO'^2 - O'A'^2.$$

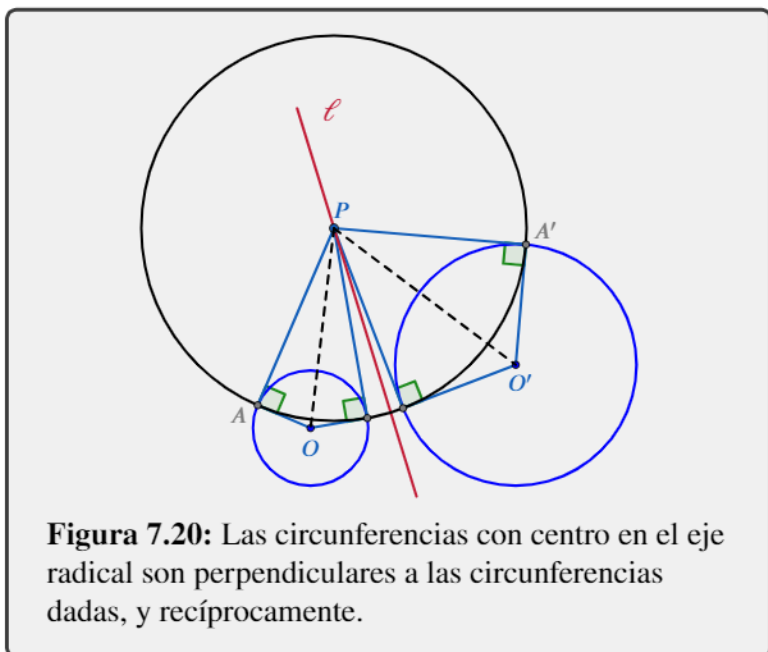


Figura 7.20: Las circunferencias con centro en el eje radical son perpendiculares a las circunferencias dadas, y recíprocamente.

Pero $PA = PA'$, por ser radios de la circunferencia con centro P , entonces las potencias de P con respecto a ambas circunferencias son iguales, es decir, P está en el eje radical.

En particular, si una circunferencia con centro en el eje radical de dos circunferencias es ortogonal a una de ellas, también lo es ortogonal a la otra. **Q.E.D.**

Definición 7.3.3:

A las circunferencias que comparten un eje radical se les llama **circunferencias coaxiales**.

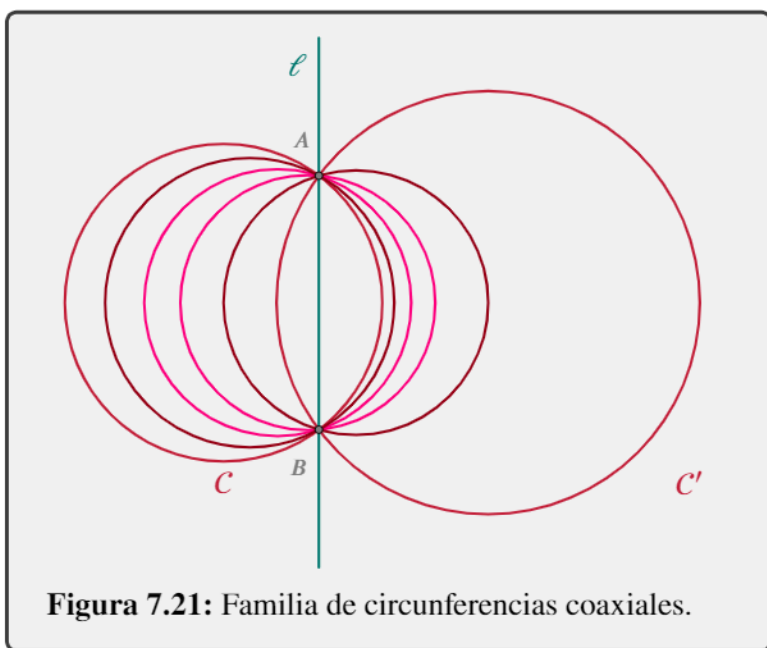


Figura 7.21: Familia de circunferencias coaxiales.

En la figura (7.21) las circunferencias C y C' concurren en A y B , por lo que tienen eje radical $\ell = AB$. Observe que cada una de las circunferencias que se muestran en la figura pasan por los puntos A y B , y como consecuencia de la

proposición (7.1.3), pág. 345, todas ellas comparten el mismo eje radical.

Teorema 7.3.7:

Considere la circunferencia C de centro O y radio r . Si A' y B' son respectivamente los transformados de A y B bajo $\iota_{O,r}$, entonces

$$A'B' = -\frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}$$

Hipótesis: Sea C una circunferencia con centro O y radio r , A, B dos puntos en el plano, distintos del centro de inversión, $A' = \iota_{O,r}(A)$, $B' = \iota_{O,r}(B)$.

Tesis: $\frac{A'B'}{AB} = -\frac{r^2}{OA \cdot OB}$.

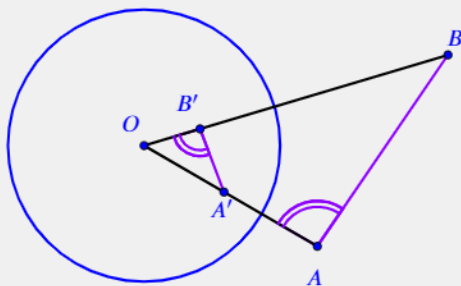


Figura 7.22: $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$.

Inversión geométrica

Demostración: Primeramente, supóngase que la recta AB no pasa por el punto O . Como consecuencia de la proposición (7.1.1), pág. 341, se tiene que $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$.

De donde

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Por lo que los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OB'A'$ son inversamente semejantes, entonces

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'O}{OA} = -\frac{r^2/OB}{OA} = -\frac{r^2}{OA \cdot OB},$$

de donde

$$A'B' = \frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

Si O está en la recta AB , como consecuencia del inciso (4) teorema (7.3.4), pág. 370), los puntos A' y B' también estarán en la recta AB .

De donde

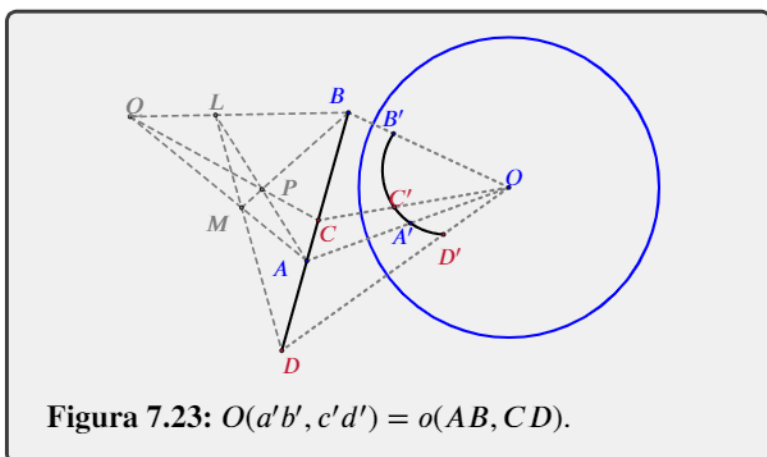
$$\begin{aligned} A'B' &= A'O + OB' \\ &= OB' - OA' \\ &= \frac{r^2}{OB} - \frac{r^2}{OA} \\ &= \frac{r^2}{OA \cdot OB} (OA - OB) \\ &= -\frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Teorema 7.3.8:

La razón cruzada es invariante bajo inversiones.

Ya que la razón cruzada se definió para puntos colineales y rectas concurrentes, pero las inversiones solamente envían rectas que pasan por el origen en rectas por el origen, este teorema deberá interpretarse como la razón cruzada entre puntos colineales y rectas concurrentes, como se muestra en la figura (7.23).



Hipótesis: Sea C una circunferencia con centro O y radio r , A, B, C, D cuatro puntos colineales distintos del centro de inversión O , y sean A', B', C', D' sus inversos con respecto a C , y sean $a' = OA', b' = OB', c' = OC'$ y $d' = OD'$.

Tesis: $O(a'b', c'd') = o(AB, CD)$.

Demostración: Como consecuencia de los teoremas (6.2.2) y (7.3.3), páginas 292 y 368 respectivamente:

$$\begin{aligned}o(AB, CD) &= \frac{\text{sen } \angle AOC}{\text{sen } \angle AOD} \cdot \frac{\text{sen } \angle DOB}{\text{sen } \angle COB} \\&= \frac{-\text{sen } \angle A'OC'}{-\text{sen } \angle A'OD'} \cdot \frac{-\text{sen } \angle D'OB'}{-\text{sen } \angle C'OB'} \\&= O(ab, cd).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Corolario 7.3.10:

Si D es conjugado armónico de C con respecto a los puntos A y B , entonces d es conjugada armónica de c con respecto a las rectas a y b .

7.4. Aplicaciones

Como una aplicación de la inversión se presentará otra demostración del teorema de las tangencias de Feuerbach (5.6.1) pág. 270.

Teorema 7.4.1: Teorema de Feuerbach.

La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a la circunferencia inscrita y a cada una de las circunferencias excritas al triángulo dado.

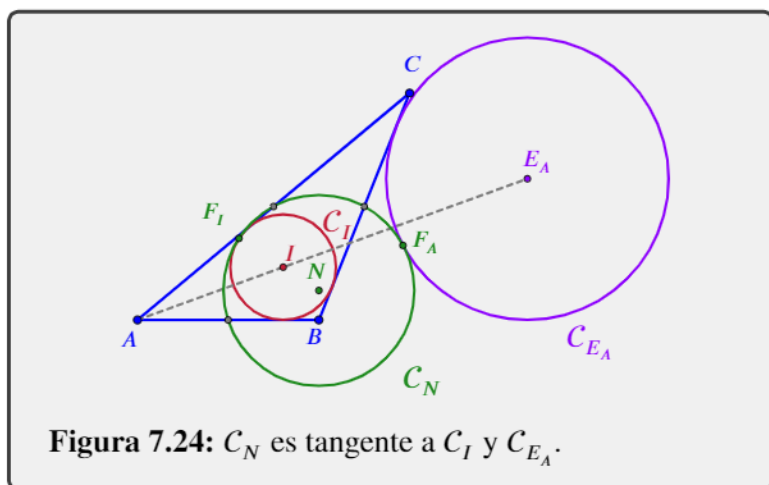


Figura 7.24: C_N es tangente a C_I y C_{E_A} .

Se demostrará que la circunferencia de los nueve puntos C_N es tangente a la circunferencia inscrita C_I .

Posteriormente bastará demostrar que C_N es tangente a la circunferencia excrita C_{E_A} , pues los otros casos son análogos.

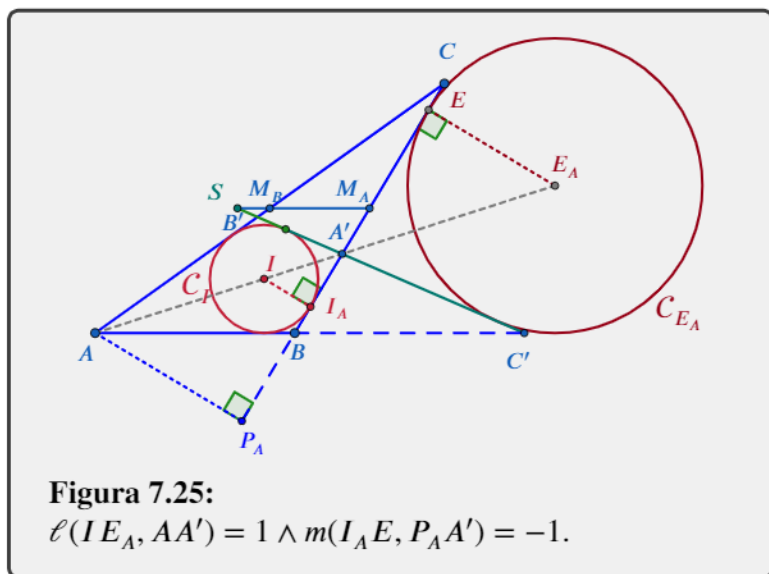
Hipótesis: Dado el triángulo $\triangle ABC$ de lados $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, con incentro I , circunferencia inscrita C_I , circunferencia de los nueve puntos C_N , donde N denota su centro, y circunferencia excrita C_{E_A} , donde E_A denota el excentro opuesto al vértice A .

Tesis: La circunferencia C_N es tangente a C_I y C_{E_A} .

Demostración: Ya que BC es una tangente común interior de C_I y C_{E_A} , y la otra tangente común interior $B'C'$ es la simétrica a BC con respecto a la bisectriz AI , por simetría,

Inversión geométrica

$B' \in AC$ y $C' \in AB$; considere el punto A' donde concurren las tangentes interiores $B'C'$ y BC .



Como consecuencia del corolario (3.4.1), pág. 121, A y A' son centros de homotecia de las circunferencias C_I y C_{E_A} , por el teorema (3.1.1), pág. 113, los puntos A' y A dividen interna y externamente el segmento IE_A en razón de sus radios, es decir,

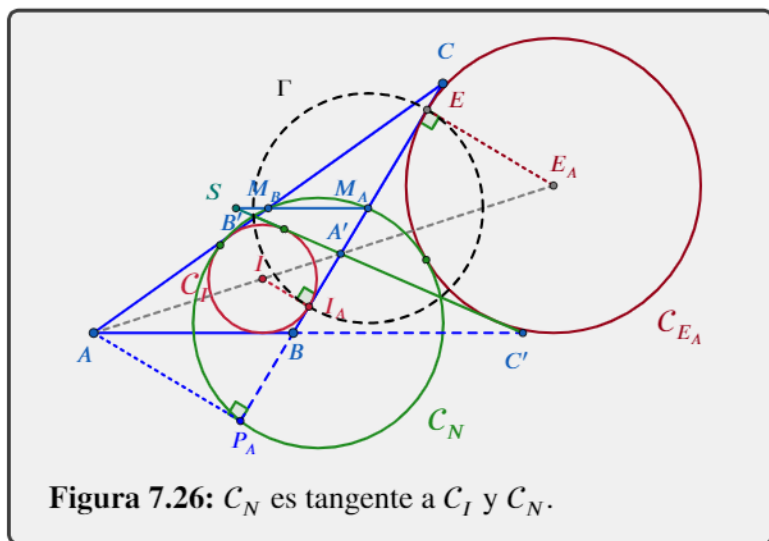
$$\frac{IA'}{A'E_A} = \frac{r}{r_A} = -\frac{IA}{AE_A},$$

en otras palabras, A y A' son conjugados armónicos con respecto a I y E_A .

Inversión geométrica

Sea I_A el pie de la perpendicular de I sobre BC , P_A el pie de la perpendicular de A sobre la recta BC y E el pie de la perpendicular de E_A sobre la recta BC , entonces EE_A , I_AI y P_AA son perpendiculares a BC , como consecuencia del teorema (6.2.2), pág. 292, P_A y A' son conjugados armónicos con respecto a los puntos I_A y E , véase la figura (7.25).

Si M_A denota el punto medio del segmento BC , entonces M_A también es el punto medio de I_AE , sea Γ la circunferencia que tiene como centro M_A y M_AI_A como radio, en particular, los puntos A' y P_A son mutuamente inversos.



Inversión geométrica

Ahora

$$EI_A = BC - 2I_AC = a - 2(s - c) = c - b.$$

Por lo que el radio de Γ es $\frac{c-b}{2}$, y $M_A M_B = \frac{c}{2}$.

Sea $S = B'C' \cap M_A M_B$, como $M_A S = M_A M_B + M_B S = M_A M_B - SM_B$, y $M_A M_B$ es paralela a la recta BA entonces, los triángulos $\triangle B'SM_B$ y $\triangle B'C'A'$ son semejantes, por lo tanto, sus lados correspondientes son proporcionales, así:

$$\frac{SM_B}{C'A} = \frac{M_B B'}{AB'},$$

de donde

$$SM_B = \frac{C'A \cdot B'M_B}{B'A}$$

Y como, en longitud, $CA = C'A$, $B'A = BA$:

$$SM_B = \frac{C'A \cdot B'M_B}{B'A} = \frac{CA(BA - M_B A)}{BA} = \frac{2bc - b^2}{2c},$$

de donde

$$M_A S = \frac{c}{2} - \frac{2bc - b^2}{2c} = \frac{(c-b)^2}{2c}.$$

Así, el producto

$$M_A S \cdot M_A M_B = \frac{(c-b)^2}{4},$$

Inversión geométrica

y los puntos S y M_B son inversos con respecto a la circunferencia Γ de diámetro $I_A E$.

El inverso de la recta $B'C'$ es una circunferencia que pasa por M_A , el centro de inversión, y los puntos P_A y M_B , pero una circunferencia está determinada por tres puntos y la circunferencia de los nueve puntos C_N satisface esta propiedad, es decir, $C_N = I_\Gamma(B'C')$.

Puesto que $I_\Gamma(C_I) = C_I$ e $I_\Gamma(C_{E_A}) = C_{E_A}$, y estas circunferencias son ortogonales, cada una, a la circunferencia Γ , y $B'C'$ es tangente a C_I y C_{E_A} , entonces sus imágenes bajo inversión con respecto a la circunferencia Γ también son tangentes.

Por lo tanto, la circunferencia de los nueve puntos C_N es tangente a las circunferencias C_I y C_{E_A} . **Q.E.D.**

Problema 7.4.1: Círculo de Apolonio.

Determinése el lugar geométrico de los puntos P tal que la razón de sus distancias a dos puntos fijos distintos, A, A' tienen una razón constante $1 : \mu$, es decir,

$$A'P = \mu AP.$$

Demostración: Cuando $\mu = 1$, el lugar geométrico de los puntos P tales que $AP = A'P$ es la mediatriz del segmento AA' .

Supóngase que $\mu \neq 1$, si P es un punto tal que $A'P = \mu AP$, sean A_1 y A_2 los puntos de intersección de las bisec-

Inversión geométrica

trices interna y externa del ángulo $\angle APA'$ con la recta AA' , como se muestra en la figura (7.27):

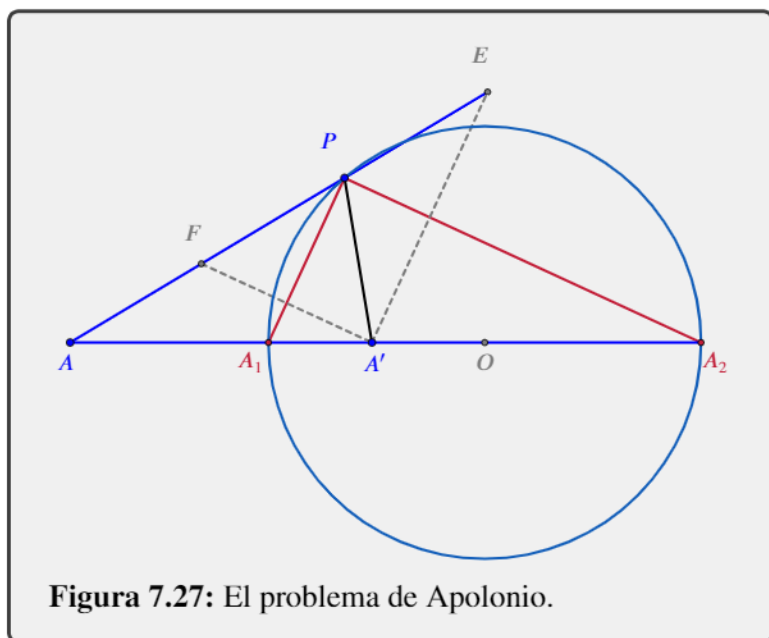


Figura 7.27: El problema de Apolonio.

Sean E y F puntos en la recta AP tales que $A'E \parallel A_1P$ y $A'F \parallel A_2P$, es decir, perpendicular a A_1P .

Como $FP = PA' = PE$, como consecuencia del teorema 3 del libro VI de los elementos entonces

Inversión geométrica

$$\frac{AA_1}{AA'} = \frac{AP}{PE} = \frac{AP}{PA'},$$

$$\frac{AA_2}{A'A_2} = \frac{AP}{FP} = \frac{AP}{PA'}.$$

Por lo tanto, A_1 y A_2 dividen interna y externamente el segmento AA' en razón $1 : \mu$.

Como $\angle A_1PA_1 = 1$ ángulo recto, P está en la circunferencia de diámetro A_1A_2 .

Recíprocamente, si se definen A_1 y A_2 con la propiedad de dividir interna y externamente el segmento AA' en la razón $1 : \mu$, y P es un punto cualquiera en la circunferencia de diámetro A_1A_2 , entonces

$$\frac{AP}{PE} = \frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{1}{\mu} = \frac{AA_2}{A'A_2} = \frac{AP}{FP}.$$

Por tanto, $FP = PE$, y como P es el punto medio de FE , también es el circuncentro del triángulo rectángulo $\triangle EFA'$. Por lo tanto, $PA' = PE$ y

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AP}{PE} = \frac{1}{\mu}.$$

Finalmente, la circunferencia $\odot A_1A_2P$ invierte A en A' , ya que, si O es su centro, y r su radio, las distancias $a = AO$ y $a' = A'O$ satisfacen las igualdades

$$\frac{a - r}{r - a'} = \frac{AA_1}{A_1A'} = \frac{a + r}{a' + r},$$

de donde $aa' = r^2$.

Q.E.D.

7.5. Inversión de un teorema

Como se mostró en la sección anterior, la inversión con respecto a una circunferencia puede ser útil para deducir y demostrar teoremas ya conocidos o, nuevos teoremas. Este proceso se denomina inversión de un teorema.

Ejemplo:

Si dos circunferencias C y C' se intersecan en A y O , el diámetro EO de C interseca también en el punto C a C' mientras que el diámetro FO de C' interseca además a C en el punto B .

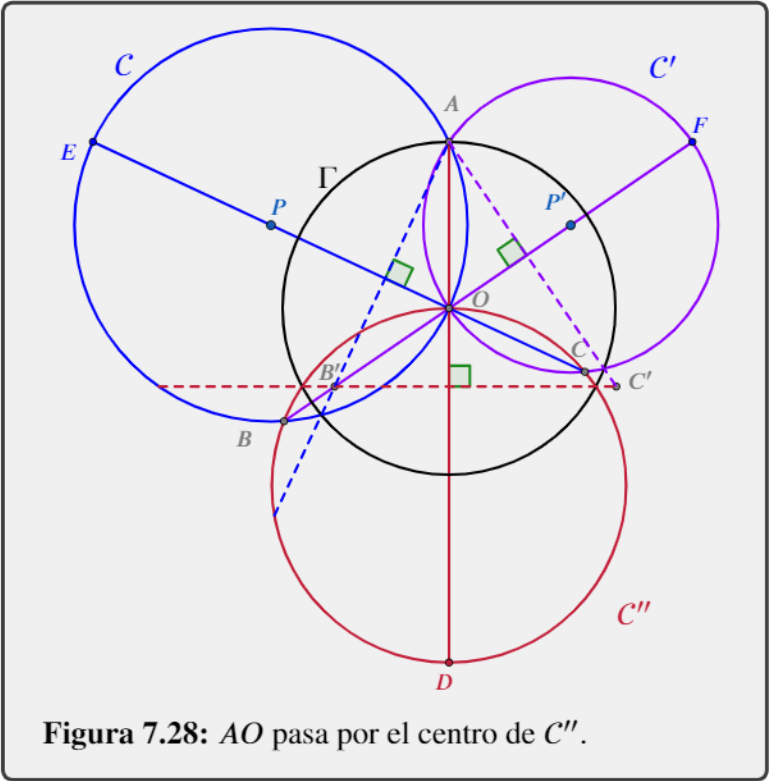
Entonces, el eje radical AO de las circunferencias C y C' pasa por el centro de la circunferencia C'' determinada por los puntos O , B y C .

Demostración: Considere la circunferencia Γ con centro O y radio OA , y sean B' y C' los inversos de B y C con respecto a Γ respectivamente.

Las rectas AO , FO y EO se invierten en ellas mismas, mientras que las circunferencias C , C' y C'' se invierten en AB' , AC' y $B'C'$ respectivamente, como se muestra en la figura (7.28).

Ya que un diámetro interseca ortogonalmente a su circunferencia, $B'O$ y $C'O$ son las alturas del triángulo $\triangle AB'C'$.

Por lo tanto, AO es ortogonal a la circunferencia C'' , de donde es un diámetro, y pasa por el centro de C'' . **Q.E.D.**



7.6. Polos y polares

Definición 7.6.1:

Si P y P' son dos puntos inversos cualesquiera con respecto a una circunferencia C de radio $r > 0$ con centro en O , la recta p que pasa por P' y es perpendicular a la recta PP' es la **recta polar** a P con respecto a C . Por definición, la **recta polar de un punto** en la circunferencia es la recta tangente a la circunferencia por el punto dado.

La **polar del centro** de la circunferencia se define como la recta al infinito.

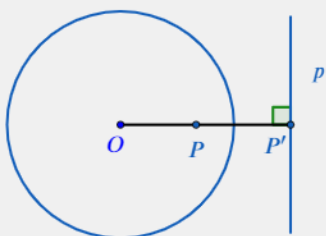


Figura 7.29: Polo P y su polar p .

Es claro que la polar de un punto interseca a la circunferencia cuando el punto está en el círculo determinado por ella, y no lo interseca si el punto está fuera de ella.

Inversión geométrica

Cuando el punto P está fuera de la circunferencia se pueden trazar dos rectas tangentes a C por el punto P . Si A y B son los puntos de contacto de estas tangentes, el segmento AB es la cuerda de contacto del punto P , y la cuerda de contacto de un punto exterior es la polar de ese punto con respecto a la circunferencia dada.

Definición 7.6.2:

Dada una circunferencia C de radio $r > 0$ con centro en O , y una recta p que no pase por O , trácese p' , la recta perpendicular a p que pasa por O , si P' es el punto donde concurren p y p' , se define el **polo** de p con respecto a C como el inverso de P' con respecto a C .

Por definición, el polo de un diámetro es el punto al infinito.

Con respecto a una circunferencia dada, la relación polo y polar establece una correspondencia biunívoca entre todos los puntos y todas las rectas del plano.

Teorema 7.6.1: el teorema fundamental.

Si con respecto a una circunferencia dada, la polar de P pasa por Q , entonces la polar de Q pasa por P .

Hipótesis: Dada una circunferencia C de radio $r > 0$ con centro en O , sean P y Q puntos en el plano, p y q las rectas

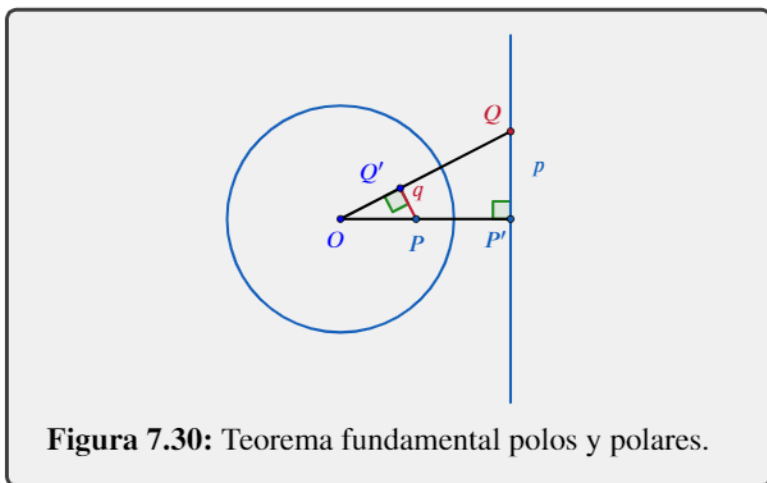


Figura 7.30: Teorema fundamental polos y polares.

polares de P y Q respectivamente, y supóngase que $Q \in p$.

Tesis: $P \in q$.

Demostración: Por hipótesis, $p \perp OP$, $P' = i_C(P)$ y $Q \in p$.

Si $Q' = i_C(P)$, entonces $Q' \in OQ$ y q es perpendicular a la recta OQ en el punto Q' .

Por lo tanto $PQ' \perp_{OP, OQ} P'Q$, de donde PQ' es perpendicular a OQ , y por definición, $P \in q$ **Q.E.D.**

Corolario 7.6.1:

Si p y q son rectas tales que, con respecto a una circunferencia dada, el polo de p está en q , entonces el polo de q está en p .

Inversión geométrica

Luego entonces, las rectas polares de una hilera de puntos son las rectas de un haz, y los polos de las rectas de un haz son puntos en una hilera.

Definición 7.6.3:

Dos puntos que tienen la propiedad de que la polar de uno pasa por el otro se denominan **puntos conjugados**; y dos rectas tales que el polo de una esté en la otra se denominan **rectas conjugadas**.

En particular, dados dos puntos conjugados distintos en una recta que corte a la circunferencia, uno estará dentro de la circunferencia y el otro fuera.

Además, dadas dos rectas conjugadas distintas que concurren fuera de la circunferencia, una cortará a la circunferencia y la otra no.

Como consecuencia del teorema fundamental (7.6.1), pág. 393, se deduce fácilmente que:

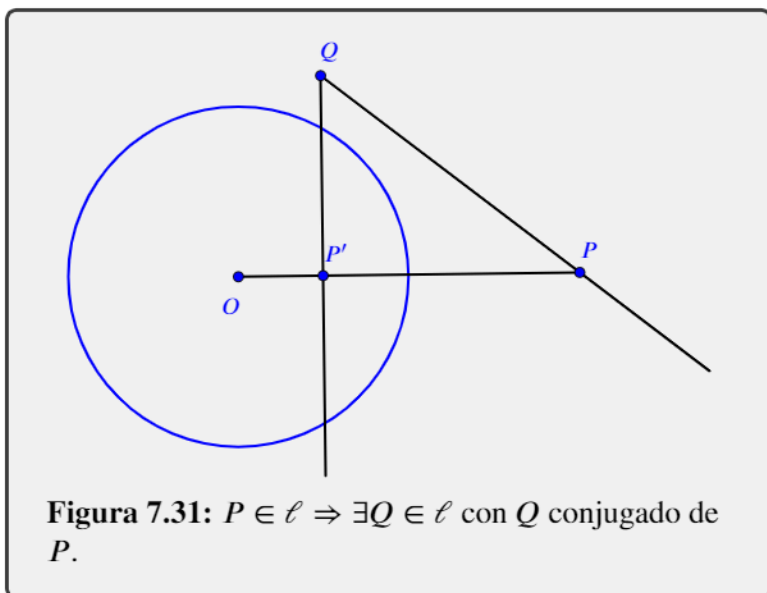
Corolario 7.6.2:

Cada punto de una recta dada tiene un punto conjugado en esa recta, a saber, el punto en el cual la recta dada es cortada por la polar del punto.

Si P pertenece a una recta ℓ , como consecuencia de la definición de conjugado, el punto Q en donde concurren ℓ y la polar p de P es un conjugado de P que satisface las condi-

Inversión geométrica

ciones dadas.



En particular, cualquier punto en la circunferencia dada es conjugado de todos los puntos de la recta tangente en ese punto, y cualquier tangente a la circunferencia es una recta conjugada a todas las rectas que pasen por su punto de contacto con la circunferencia.

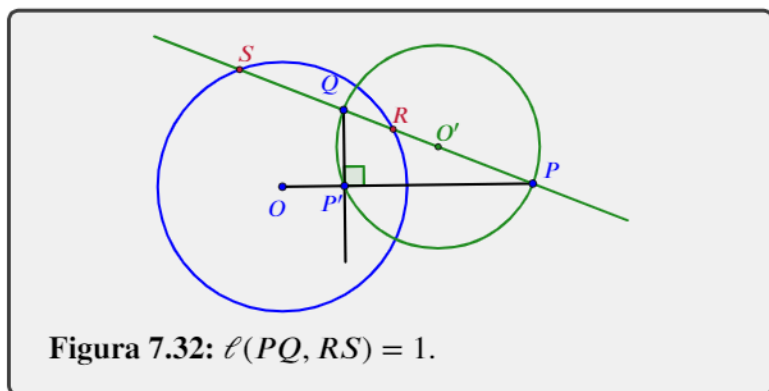
La teoría de polos y polares está íntimamente relacionada con la división armónica, e indicamos a continuación algunas de esas relaciones

Teorema 7.6.2:

Si con respecto a una circunferencia dada, dos puntos conjugados están en una recta que interseca la circunferencia, entonces están separados armónicamente por los puntos de intersección.

Hipótesis: Dada una circunferencia C de radio $r > 0$ con centro en O , sean P y Q puntos conjugados que pertenecen a una recta ℓ que interseca a C en dos puntos R y S .

Tesis: P y Q están armónicamente separados por R y S .



Demostración: Sea P' el inverso de P con respecto a C , como P y Q son conjugados, entonces $p = P'Q$ es la recta polar de P .

Ya que $P'Q \perp PP'$, como consecuencia del teorema de Thales, la circunferencia C' que tiene diámetro PQ pasa por

Inversión geométrica

el punto P' .

Por construcción C' es ortogonal a C en los puntos de intersección R y S .

Por lo tanto, P y Q están armónicamente separados por R y S , véase la figura (7.32). **Q.E.D.**

7.7. La razón cruzada de una circunferencia

Dados cuatro puntos concíclicos cualesquiera A, B, C, D y dos puntos P, P' en su circunferencia. Considere las rectas $a = PA, b = PB, c = PC$ y $d = PD$; $a' = P'A, b' = P'B, c' = P'C$ y $d' = P'D$, véase la figura (7.33).

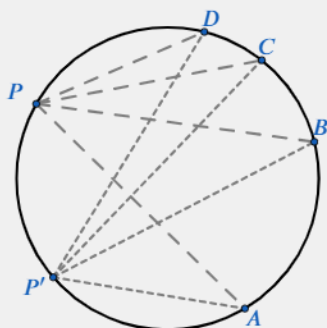


Figura 7.33: $P(ab, cd) = P'(a'b', c'd')$.

Inversión geométrica

Como en una misma circunferencia arcos iguales subtienen ángulos iguales, sus razones cruzadas son iguales:

$$P(ab, cd) = P'(a'b', c'd').$$

Si ahora se trazan las rectas tangentes t_A, t_B, t_C, t_D y t_P a la circunferencia asociada en estos cinco puntos, si además,

$$A' = t_A \cap t_P, B' = t_B \cap t_P, C' = t_C \cap t_P \text{ y } D' = t_D \cap t_P.$$

Como las tangentes son perpendiculares a los radios, los senos de los ángulos correspondientes son iguales, por ejemplo, si O es el centro de la circunferencia,

$$\text{sen } \angle A'OC' = \text{sen } \angle APC,$$

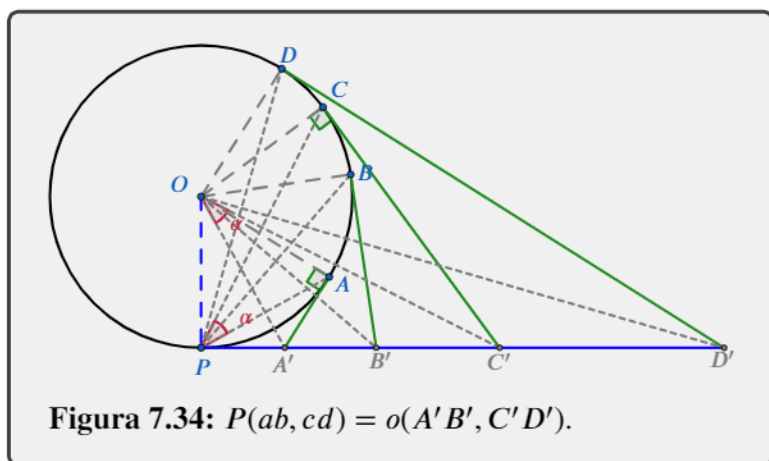
y análogamente para los otros ángulos, se obtiene así:

$$o(A'B', C'D') = P(ab, cd).$$

Finalmente, si el punto Q donde concurren las rectas no está en la circunferencia C que contiene a los puntos A, B, C, D entonces, las rectas $a'' = QA, b'' = QB, c'' = QC$ y $d'' = QD$ intersecan a la circunferencia dada en otro punto, a saber, $a'' \cap C = \{A', A\}, b'' \cap C = \{B', B\}, c'' \cap C = \{C', C\}$ y $d'' \cap C = \{D', D\}$, donde los puntos coinciden sólo si la recta dada es tangente a la circunferencia.

Pero, al inicio de esta sección, se demostró que si P y P' son dos puntos cualesquiera en esta circunferencia, entonces

$$P(ab, cd) = P'(a'b', c'd'),$$



Por ende, para los haces de rectas que pasan por A' y los puntos A, B, C, D , así como por A y los puntos A', B', C', D' se obtiene

$$A'(ab, cd) = A(a'b', c'd'),$$

y de aquí

$$P(ab, cd) = P'(a'b', c'd').$$

7.8. Potencia negativa

Si ahora deseamos saber qué sucede si se realiza la composición de la inversión con respecto a una circunferencia con

Inversión geométrica

la inversión con respecto al centro de la circunferencia de inversión se obtiene una nueva transformación que está bien definida en el plano euclidiano salvo el centro de inversión, se tiene así la siguiente definición:

Definición 7.8.1:

La composición de una inversión de centro O y radio r con la simetría central de centro O se conoce, en algunos textos, como **inversión de potencia negativa**.

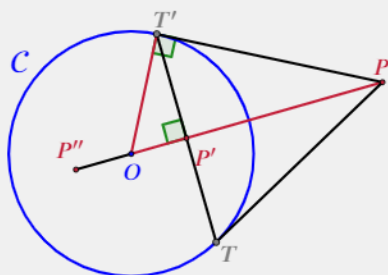


Figura 7.35: Inversión de potencia negativa.

La inversión de potencia negativa es la transformación del plano que envía cada punto P (con $P \neq O$) al punto P'' del complemento de la semirrecta OP en la recta OP tal que,

Inversión geométrica

como segmentos orientados,

$$OP \cdot OP'' = -r^2.$$

Corolario 7.8.1:

Todo punto en el plano, distinto del centro de inversión, tiene un inverso de potencia negativa único.

Demostración: Como consecuencia del teorema (7.3.1), pág. 358, existe un único punto P' en la semirrecta OP tal que $OP \cdot OP' = r^2$.

Sea P'' el simétrico de P' con respecto al punto O .

Entonces $P''P' = P''O + OP'$, pero O es el punto medio de $P''P'$, de donde $OP'' = -OP'$, por lo tanto

$$OP \cdot OP'' = OP \cdot (-OP') = -r^2.$$

Q.E.D.

En la figura (7.35) P'' es el inverso negativo de P con respecto a la circunferencia C , mientras que P es el inverso negativo de P'' con respecto a C .

7.9. Comentarios finales

Como se ha visto a lo largo del presente capítulo, la inversión tiene propiedades similares a la reflexión con respecto a una recta, a saber, los puntos inversos están en la intersección de un conjunto de circunferencias coaxiales ortogonales

Inversión geométrica

a la circunferencia de inversión original, igualmente, un punto y su imagen, bajo una reflexión, están en la intersección de un conjunto de circunferencias coaxiales ortogonales al eje de reflexión; la inversión y la reflexión son transformaciones que preservan ángulos en magnitud y son involutivas. Por tal razón se dice que una inversión es una reflexión en una circunferencia.

Sin embargo, mientras que una reflexión con respecto a una recta es una transformación biyectiva en el plano euclidiano, la inversión con respecto a una circunferencia no lo es, pues el centro de la circunferencia de inversión no tiene inverso.

Para extender la definición al centro de inversión se debe cambiar de modelo y anexar los puntos al infinito.

Al anexar convenientemente puntos al infinito y el significado de recta se da lugar a las geometrías no euclidianas.

7.10. Ejercicios:

1. Cualquier circunferencia que pasa por un par de puntos inversos distintos, es su propia inversa y es ortogonal a la circunferencia de inversión; e inversamente, cualquier circunferencia que es ortogonal a la circunferencia de inversión es su propia inversa.
2. Demuestre que líneas rectas paralelas, ninguna de las cuales pase por el centro de la circunferencia de in-

Inversión geométrica

versión, se invierten en circunferencias tangentes una a otra en el centro de inversión.

3. El inverso de una circunferencia de radio finito que no pasa por el centro de inversión, es una circunferencia de radio finito que no pasa por este punto.
4. Si P está fuera de la circunferencia de inversión, su inverso está en la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a la circunferencia desde P .
5. Si dos circunferencias que se intersecan son ortogonales a una tercera, sus puntos de intersección son colineales con el centro de la tercera circunferencia.
6. Estudie la figura obtenida por inversión de un cuadrángulo completo, donde uno de los vértices del cuadrángulo es el centro de inversión.¹
7. Dada una circunferencia C con centro O y radio r , P un punto que no esté en la circunferencia C , y Q su inverso. Demuestre que P y Q dividen armónicamente al diámetro correspondiente y, recíprocamente.
8. Dada una circunferencia C con centro O , y un punto P fijo, con $P \neq O$, demuestre que es posible trazar una circunferencia C' ortogonal a C con centro en P .

¹Recuerde que la figura que consiste de cuatro puntos, cualesquiera tres de ellos no colineales, y de las seis rectas determinadas por estos puntos es un cuadrángulo completo.

Inversión geométrica

9. Demuestre que, si el cuadrilátero que tiene como vértices los centros y los puntos de intersección de dos circunferencias es cíclico, entonces las circunferencias son ortogonales.
10. Demuestre que, si la suma de los ángulos en los segmentos de dos círculos que se intersecan en lados opuestos de la cuerda común es igual a $\pi/2$ o $3\pi/2$ radianes, entonces los dos círculos son ortogonales.
11. Demuestre que el producto de los radios de dos círculos ortogonales es igual a la mitad del producto de la cuerda común y la recta de centros de los dos círculos.
12. Dados dos puntos y una recta, determine cuándo es posible construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos, y constrúyala.
13. Dadas dos rectas y un punto en posición general, demuestre que es posible construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto.
14. Dados dos puntos y una circunferencia, con ambos puntos en el interior, o bien, en el exterior de la circunferencia, demuestre que es posible construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada.
15. Dadas dos circunferencias y un punto, en posición general, demuestre que es posible construir una circunfe-

Inversión geométrica

rencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas.

16. Dadas dos rectas y una circunferencia, en posición general, demuestre que es posible construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada.
17. Dadas dos circunferencias y una recta, en posición general, demuestre que es posible construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas.
18. Dadas una circunferencia, una recta y un punto, en posición general, demuestre que es posible construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y la circunferencia dada.
19. Dadas tres circunferencias en posición general, demuestre que es posible construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas.
20. Demuestre que, si AB es un diámetro de la circunferencia C con centro O , y M es un punto en C , entonces las circunferencias $\odot AMO$ y $\odot BMO$ son ortogonales.
21. Si un triángulo es polar con respecto a una circunferencia, el centro de la circunferencia coincide con el ortocentro del triángulo.

Inversión geométrica

22. Dado un triángulo, encuentre una circunferencia con respecto a la cual el triángulo es auto-polar, es decir, cada lado del triángulo es la polar del vértice opuesto.
23. Demuestre que la circunferencia polar de un triángulo corta los lados del triángulo armónicamente.
24. Demuestre que el polo de la recta que une dos puntos conjugados es el ortocentro del triángulo determinado por los dos puntos dados y el centro de la circunferencia.

Notación y terminología

En el capítulo 1 se presenta la mayoría de notación que se utilizará a lo largo de estas notas, en los capítulos posteriores se introducirá notación adicional, propia del tema a estudiar.

Los capítulos 4 y 5 hacen referencia al triángulo y sus propiedades, por lo que hay notación especial para varios puntos, rectas y segmentos asociados. A menos que se especifique lo contrario, esta notación no se preserva para los capítulos posteriores.

Notación y terminología

Cuadro 8.1: Capítulo 1. Notación y terminología

Símbolo	Significado
AB	Segmento. Magnitud del segmento.
$\overrightarrow{AB}$	Segmento dirigido de A hacia B .
$\overleftrightarrow{AB}$	Recta determinada por los puntos A y B .
AA	Segmento de magnitud cero.
$AB + CD$	Suma de (magnitudes) segmentos dirigidos.
$AB \cdot CD$	Producto de (magnitudes) segmentos dirigidos.
$n!$	Factorial del número n .
$AP : PB$	Razón en que P divide al segmento AB .
$\frac{AB}{CD} = AB : CD$	Razón entre dos segmentos orientados
∞	Infinito
$\angle AOB$	Ángulo (medida). Ángulo orientado.
$\angle AOB + \angle COD$	Suma de ángulos orientados.
$\parallel$	Rectas paralelas.
$\perp$	Rectas perpendiculares.
$\triangle ABC$	Triángulo de vértices A, B, C .
$\sin x$	Seno del ángulo x .
∞_ℓ	Punto al infinito asociado a la recta ℓ .
ℓ_∞	Recta extendida, $\ell_\infty = \ell \cup \infty_\ell$
ℓ'_∞	Recta al infinito, formada por los puntos ∞_ℓ .
$\mathbb{E}$	Plano euclidiano
$\mathbb{E}_\infty$	Plano extendido $\mathbb{E}_\infty = \mathbb{E} \cup \ell'_\infty$

Notación y terminología

Cuadro 8.2: Capítulos 2,3. Notación y terminología

Símbolo	Significado
P'	Punto simétrico de P c/r punto o recta ℓ .
a'	Recta simétrica de a c/r punto o recta ℓ .
$\mathcal{F}$	Figura geométrica plana.
$\mathcal{F}'$	Figura simétrica de $\mathcal{F}$ c/r punto o recta.
$a \parallel_c b$	a es antiparalela a b c/r recta c .
$\square ABCD$	Paralelogramo de vértices A, B, C, D .
$\{c, d\} \parallel \{a, b\}$	el par $\{c, d\}$ es antiparalelo al el par de rectas $\{a, b\}$.
$\square ABCD$	Cuadrilátero de vértices A, B, C, D .
$\mathcal{C}$	Circunferencia.
$\equiv$	Congruentes, equivalentes.
$\sim$	Semejantes, similares.

Notación y terminología

Cuadro 8.3: Capítulos 4 y 5. Notación y terminología

Símbolo	Significado
I	incentro del triángulo dado.
r	inradio del triángulo dado.
C_I	Circunferencia inscrita.
M_A	Punto medio del segmento BC .
E_A	Excentro del $\triangle ABC$ en AI .
C_{E_A}	Circunferencia excrita con centro E_A .
r_A	Radio de la circunferencia excrita C_{E_A} .
s	Semiperímetro del triángulo dado.
Δ	Área del triángulo dado.
G	Baricentro del triángulo dado.
$\triangle M_A M_B M_C$	triángulo medial del $\triangle ABC$.
H	Ortocentro del triángulo dado.
P_A	Pie de la perpendicular sobre BC por A .
$\triangle P_A P_B P_C$	Triángulo órtico asociado al $\triangle ABC$.
O	Circuncentro del triángulo dado.
R	Circunradio del triángulo dado.
ρ	Inradio del triángulo órtico.
C_O	Circuncircunferencia triángulo dado.
M_{XY}	Punto medio del segmento XY .
N	Centro circunferencia 9 puntos.
C_N	Circunferencia de los nueve puntos.
$\square ABCD$	Rectángulo con vértices A, B, C, D .
$\triangle T_A T_B T_C$	Triángulo tangencial del triángulo dado.
T	Circuncentro del triángulo tangencial.
F_I	Punto de tangencia entre C_I y C_N .

Cuadro 8.4: Capítulo 6. Notación y terminología

Símbolo	Significado
O	Centro de proyección.
$AB \overset{O}{\wedge} A'B'$	El par A, B se transforma por proyección desde O en A', B' .
(AB, P)	Razón simple $(AB, P) = \frac{AP}{PB}$.
A, B, C, D	Hilera de puntos colineales.
a, b, c, d	Haz de rectas concurrentes.
$o(AB, CD)$	Razón cruzada de hilera $o(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}$.
$O(ab, cd)$	Razón cruzada de haz por O .
$abcd \wedge ABCD$	Haz de rectas a, b, c, d se proyecta en hilera A, B, C, D .
$o(AB, CD) = -1$	D es conjugado armónico de C c/r al par A, B .
$O(ab, cd) = -1$	d es conjugada armónica de c c/r al par a, b .
$ABCD$	Cuadrángulo completo con vértices A, B, C, D .
$abcd$	Cuadrilátero completo con lados a, b, c, d .

Notación y terminología

Cuadro 8.5: Capítulo 7. Notación y terminología

Símbolo	Significado
$\mathcal{E}_1$	Eje radical c/r C y C' .
I_M	Incentro del triángulo medial $\triangle M_A M_B M_C$.
$ABCDEF$	Hexágono inscrito.
$\iota_{O,r}(P)$	Inverso de P c/r circunferencia centro O radio r .
$\iota_C(P)$	Inverso de P c/r circunferencia C .

Notación y terminología

Bibliografía

- [Bo] C. B. Boyer, *Historia de la Matemática*, Ed. Alianza, Universidad Textos, Madrid, 1996.
- [Ca] L. N. M. Carnot, *Géométrie de position*. De l'Institut national de France, de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon, etc. De L'imprimerie de Crapelet. A Paris, An XI-1803. https://books.google.fr/books?id=xTGul_XQmcUC&hl=fr&pg=PA168#v=onepage&q&f=false
- [Co] H.S.M. Coexeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa 1971.
- [E] Euclides, *Elementos*, Libros I-IV, Ed. Gredos, Primera edición, Madrid, 1991. <https://euclides.org/los-elementos/>

Bibliografía

- [Eu] L. Euler, *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* (1767), Euler Archive-All Works, 325. <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/325>
- [Ev] H. Eves, *Estudio de las Geometrías*. Vol. I y II. México: UTEHA. 1985. <https://ia801001.us.archive.org/3/items/algebraalinea16taedicionstanleygrossman/Estudio%20De%20Las%20Geometr%C3%ADas.pdf>
- [Fr] K. Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren: Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung. (Propiedades de algunos puntos extraños del triángulo recto y múltiples líneas determinadas por ellos y figuras: un tratado analítico-trigonométrico)* Ed. 2. nichtgeänderte Ausgabe, Haarlem: P. Visser, 1908. <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/download/pdf/PPN512512426/PPN512512426.pdf>, y <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN512512426?tify=%7B%22view%22%3A%22export%22%7D>.

Bibliografía

- [M] A. F. Möbius, *Der barycentrische Calcul, ein neues Hilfsmittel sur analytischen Behandlung der Geometrie*. Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1827. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99419h/f25#>
- [Mo] E.E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* (3rd ed.). Boston. Addison-Wesley. 1990. [1963]. ISBN 978-0-201-50867-3.
- [M.D.] E.E. Moise and F. L. Downs. *Geometry*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company. 1991. [1964]. ISBN 978-0-201-25335-1.
- [L.S.] L. Shively, *Introducción a la geometría moderna*, Cia. Editorial Continental S.A. de C.V., México. Décimo tercera impresión, 1984, impreso en México.
- [R] G. Rota, *Indiscrete Thoughts*, Birkhäuser, Boston, 1997
- [SY] B. Suceavă and P. Yiu, *The Feuerbach Point and Euler lines*. Forum Geometricorum. Volume 6, (2006) 191–197. ISSN 1534-1178. <https://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200621.pdf>

Bibliografía

- [R.T.] Reventós Tarrida, A.. "*Geometría inversiva.*"
Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
6.1 (2003): 39-79. <http://eudml.org/doc/43115>.
- [Y] P. Yiu <http://math.fau.edu/Yiu/Geometry.html>

— A —

Euclides

A continuación, incluiremos los enunciados de los postulados y teoremas de los libros I y III de los Elementos de Euclides [E].

A.1. Libro I

Los Postulados.

- I Por dos puntos diferentes pasa una y sólo una línea recta.
- II Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado.
- III Hay una única circunferencia con un centro y un radio dados.
- IV Todos los ángulos rectos son iguales.
- V Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado.

Los teoremas del libro I

1. Construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado.
2. Dibujar en un punto dado una recta igual a una recta dada.
3. Restar del mayor de dos segmentos dados un segmento igual al menor.
4. (LAL) Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y tienen el ángulo comprendido entre ellas igual, también tendrán las bases iguales, y los triángulos serán iguales, y los ángulos restantes serán iguales, concretamente los opuestos a los lados iguales.
5. En triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se alargan, los ángulos situados bajo la base serán iguales entre sí.
6. Si en un triángulo dos ángulos son iguales, entonces los lados opuestos a los ángulos iguales también son iguales uno al otro.
7. No se podrán levantar sobre la misma recta otras dos rectas iguales respectivamente a dos rectas, de modo que se encuentren en dos puntos distintos por el mismo lado y con los mismos extremos que las rectas dadas.
8. (LLL) Si dos triángulos tienen dos lados respectivos iguales, y también tienen la base igual, también tendrán iguales los ángulos comprendidos por los segmentos iguales.
9. Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado.

Euclides

10. Dividir en dos partes iguales un segmento dado.
11. Trazar una recta perpendicular a un segmento dado desde un punto del mismo segmento.
12. Trazar una recta perpendicular a una recta por un punto exterior a ella.
13. Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos ángulos rectos o bien dos ángulos iguales a dos ángulos rectos.
14. Si, respecto de una recta cualquiera, y de un punto de ella, dos rectas no colocadas en el mismo lado de ella hacen ángulos adyacentes iguales a dos rectos, ambas rectas estarán sobre la misma recta.
15. Si dos rectas se cortan, hacen ángulos opuestos por el vértice iguales.
Corolario. Si dos rectas se cortan entre sí los ángulos alrededor del corte harán ángulos iguales en total a cuatro ángulos rectos.
16. En cualquier triángulo, si se alarga uno de los lados, el ángulo exterior es mayor o igual que cada uno de los ángulos internos y opuestos.
17. En cualquier triángulo, la suma de cualquiera de los dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.
18. En cualquier triángulo, el ángulo más grande es el opuesto al lado mayor.

Euclides

19. En cualquier triángulo, el lado más grande es el opuesto al ángulo mayor.
20. En cualquier triángulo la suma de cualquiera de los dos lados es mayor que el tercero.
21. Si dos rectas que parten de los extremos de uno de los lados de un triángulo se juntan dentro de él, tales rectas son menores en total que los dos restantes lados del triángulo, pero el ángulo que comprenden será mayor.
22. Construir un triángulo con tres rectas que son iguales a tres rectas dadas. Pero es necesario que dos de las rectas tomadas juntas de cualquier manera sean mayores que la restante.
23. Construir sobre un segmento dado y en un punto sobre él, un ángulo rectilíneo igual a un ángulo rectilíneo dado.
24. Si dos triángulos tienen iguales dos lados de uno respectivamente iguales a dos del otro, más de los ángulos comprendidos por las rectas iguales es uno de ellos mayor que el otro, la base de uno será mayor que la del otro.
25. Si dos triángulos tienen dos lados de uno respectivamente iguales a dos de los lados del otro, más la base es mayor en uno que la del otro, tendrán también el uno el ángulo comprendido por las rectas iguales mayor que el del otro.
26. (ALA) Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales a dos ángulos del otro, y uno lado de uno igual a un lado del otro, —el que une los dos ángulos iguales o el opuesto a uno de los ángulos iguales—, tendrán los demás

Euclides

lados de uno respectivamente iguales a los demás del otro y el ángulo restante de uno será igual al restante del otro.

27. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.
28. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos ángulos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.
29. Una recta que corta a otras dos rectas paralelas hace que los ángulos alternos sean iguales, los ángulos externos iguales a los interiores y opuestos, y la suma de los ángulos internos por el mismo lado iguales a dos rectos.
30. Las rectas paralelas a una recta dada también son paralelas entre sí.
31. Construir una recta paralela a una dada por un punto dado.
32. En cualquier triángulo, si un de los lados se prolonga, el ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores y opuestos, y la suma de los tres ángulos del triángulo es igual a dos ángulos rectos.
33. Rectas que unen por el mismo lado rectas iguales y paralelas son ellas mismas iguales y paralelas.
34. Los lados y los ángulos opuestos de dominios paralelogramos son iguales entre si y el diámetro (una diagonal) divide en dos (partes iguales) tales dominios.

Euclides

35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales (en área) entre sí.
36. Los paralelogramos que tienen las bases iguales y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales (en área) entre sí.
37. Los triángulos que están sobre la misma base y contenidos entre las mismas paralelas, son iguales (en área) entre sí.
38. Triángulos que están en sobre bases iguales y contenidos entre las mismas paralelas, son iguales (en área) entre sí.
39. Triángulos iguales (en área) que están sobre la misma base y del mismo lado, están también entre las mismas paralelas.
40. Triángulos iguales (en área) que están sobre bases iguales y en el mismo lado, están contenidos también entre las mismas paralelas.
41. Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está contenido entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo (en área).
42. En un ángulo rectilíneo dado construir un paralelogramo igual a un triángulo dado (en área).
43. En cualquier paralelogramo los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí.

Euclides

44. En una recta dada aplicar a un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.
45. Construir un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada con un ángulo rectilíneo dado.
46. Construir un cuadrado sobre un segmento da- do.
47. En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto
48. Si en un triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes, el ángulo comprendido por esos dos lados restantes del triángulo es recto.

A.2. Libro III

Definiciones

1. Circunferencias iguales son aquellas cuyos diámetros son iguales, o los radios son iguales.
2. Una recta es tangente a una circunferencia cuando, tocando a la circunferencia y siendo alargada no corta a la circunferencia.
3. Dos circunferencias son tangentes cuando, tocándose el uno con el otro no se cortan.

Euclides

4. En un círculo las rectas están a la misma distancia del centro, cuando las perpendiculares dibujadas desde el centro hasta ellas, son iguales.
5. Está a mayor distancia aquella recta sobre la que cae la perpendicular mayor.
6. Un segmento de un círculo es la figura comprendida por una recta y una circunferencia de un círculo.
7. Un ángulo de un segmento es el que está comprendido por una recta y una circunferencia de un círculo.
8. Ángulo en un segmento es el ángulo que cuando se determina un punto sobre una circunferencia del segmento y se dibujan rectas desde el punto hasta los extremos de la recta que es la base del mismo segmento, está comprendido por las rectas dibujadas.
9. Cuando las rectas que comprenden el ángulo cortan a una circunferencia se dice que el ángulo está en la circunferencia.
10. Un sector de un círculo es la figura que, cuando se construye un ángulo en el centro del círculo, está comprendida por las rectas que comprenden el ángulo y la circunferencia que corta a las rectas.
11. Segmentos semejantes de un círculo son los que admiten ángulos iguales, o aquellos en los que los ángulos son iguales entre sí.

Los teoremas del libro III

Euclides

1. Determinar el centro de una circunferencia dada.
2. Si se toman dos puntos al azar en la circunferencia de un círculo, la recta que une los dos puntos estará dentro del círculo.
3. Si en un círculo una recta dibujada a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no dibujada a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.
4. Si en un círculo se cortan entre sí dos rectas que no pasan por el centro, no se dividen entre sí en dos partes iguales.
5. Si dos círculos se cortan entre sí, sus centros no coinciden.
6. Si dos círculos se tocan el uno al otro, sus centros no coinciden.
7. Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro del círculo y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la que queda y de las demás la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y sólo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.
8. Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se dibujan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por

el centro, y de las demás siempre la más próxima a la que pasa por el centro es mayor que la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más próxima a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y sólo caen dos de iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.

9. Si se toma un punto dentro de un círculo y del punto al círculo caen más de dos rectas iguales, el punto dado es el centro del círculo.
10. Un círculo no corta a otro círculo en más de dos puntos.
11. Si dos círculos se tocan uno al otro interiormente, y se toman sus centros, la recta que une sus centros prolongada caerá encima del punto de contacto de los dos círculos.
12. Si dos círculos se tocan el uno al otro exteriormente, la recta que une sus centros pasará a través del punto de contacto.
13. Un círculo no toca a otro círculo en más de un punto, ya sea interior o exteriormente.
14. En un círculo las rectas iguales están a la misma distancia del centro, y las que están a la misma distancia del centro son iguales entre sí.
15. En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana.
16. La recta dibujada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el diámetro, caerá fuera del

Euclides

círculo, y no se interpondrá otra recta al espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el que queda es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

17. Desde un punto dado dibujar una línea recta tangente a un círculo dado.
18. Si una recta toca a un círculo, y se dibuja una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la recta dibujada será perpendicular a la tangente.
19. Si una recta toca a un círculo, y desde el punto de contacto se dibuja una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará contenido en la recta dibujada.
20. En un círculo, el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia cuando los ángulos tienen como base la misma circunferencia.
21. En un círculo los ángulos en el mismo segmento son iguales entre sí.
22. Los ángulos opuestos de los cuadriláteros en los círculos son iguales a dos ángulos rectos.
23. Sobre la misma recta no se podrán construir dos segmentos circulares semejantes y desiguales al mismo lado.
24. Los segmentos circulares semejantes que están sobre rectos iguales son iguales entre sí.

Euclides

25. Dado un segmento de círculo completar el dibujo del círculo del que es semejante.
26. En los círculos iguales los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales, ya sean a los centros o a las circunferencias.
27. En los círculos iguales, los ángulos que están sobre circunferencias iguales son iguales entre sí, ya estén en los centros o en las circunferencias.
28. En los círculos iguales las rectas iguales cortan circunferencias iguales, la mayor igual a la mayor y la menor a la menor.
29. En los círculos iguales las rectas iguales subtienden circunferencias iguales.
30. Dividir en dos partes iguales una circunferencia dada.
31. En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto, el ángulo en el segmento mayor es menor que un ángulo recto, el ángulo en el segmento menor es mayor que un ángulo recto; y además el ángulo del segmento mayor es mayor que un ángulo recto y el ángulo del segmento menor es menor que un ángulo recto.
32. Si una recta toca a un círculo, y desde el punto de contacto hasta el círculo se dibuja una recta que corte al círculo, los ángulos que forma con la recta tangente serán iguales a los ángulos en los segmentos alternos del círculo.
33. Sobre una recta dada, describir un segmento de círculo que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.

Euclides

34. A partir de un círculo dado cortar un segmento que admita un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado.
35. Si en un círculo se cortan dos rectas entre sí, el rectángulo comprendido por los segmentos de una es igual al rectángulo comprendido por los segmentos del otro.
36. Si se determina un punto exterior a un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra le toca, el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior determinada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente.
37. Si se determina un punto exterior a un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra cae sobre de él, y a más a más el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior determinada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la que cae, la recta que cae tocará al círculo.

Índice de figuras

1.1. Segmentos dirigidos AB y BA	3
1.2. Relación puntos colineales	4
1.3. $AB + BC + CA = 0$	5
1.4. El teorema de Euler.	6
1.5. Teorema de Euler como área	7
1.6. División interna y externa	9
1.7. Punto medio	9
1.8. Razón $1 : 2$ y $2 : 1$	10
1.9. Dividir interna y externamente	11
1.10. Ángulo orientado en sentido levógiro.	13
1.11. Ángulo orientado en sentido dextrógiro.	13
1.12. $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$	14
1.13. $\angle AOB + \angle COD = \angle AOE$	15
1.14. $\ell \parallel \ell'$ y $m \parallel m' \Rightarrow \angle(\ell, m) = \angle(\ell', m')$	16
1.15. $\ell \perp \ell'$ y $m \perp m' \Rightarrow \angle(\ell, m) = \angle(\ell', m')$	17
1.16. Suma de ángulos.	18

Índice de figuras

1.17. Teorema de la bisectriz.	20
1.18. L es un punto exterior del segmento BC	22
1.19. L es un punto interior del segmento BC	23
1.20. Aplicación teorema de la bisectriz	24
1.21. Propiedades de rectas euclidianas.	26
1.22. Correspondencia biunívoca.	28
1.23. Plano extendido.	30
1.24. Hilera de puntos.	31
1.25. Rectas concurrentes.	32
2.1. P' es simétrico de P con respecto a ℓ	38
2.2. Figuras con ejes de simetría.	39
2.3. Rectas paralelas	42
2.4. Rectas antiparalelas $a \parallel_c b$	43
2.5. $a \parallel_c b \Rightarrow \triangle ABC$ es isósceles.	44
2.6. Existencia de antiparalela	46
2.7. $a \parallel_c b \Rightarrow b \parallel_c a$	47
2.8. Propiedad de antiparalelas	49
2.9. $\{c, d\} \parallel \{a, b\}$	50
2.10. Simetría par antiparalelos	52
2.11. Antiparalelas y ángulos	54
2.12. Ángulos y cuadrilátero cruzado	56
2.13. Demostración del teorema (2.2.3), pág. 55.	57
2.14. Cuadrilátero convexo	58
2.15. Puntos concíclicos.	59
2.16. Cuadriláteros cíclicos.	60
2.17. Demostración del teorema (2.3.1), pág. 61.	62
2.18. Dem. teo. 2.3.1, pág. 61 si $\square ABCD$ es cruzado.	63

Índice de figuras

2.19. $\angle CBD = \angle CAD \Rightarrow ABCD$ es cíclico.	64
2.20. Demostración del teorema (2.3.2) 64, caso convexo.	65
2.21. $\angle ABD = \angle BAC \Rightarrow ABCD$ es cíclico.	67
2.22. Propiedad cuadrilátero convexo	68
2.23. Demostración del teorema (2.3.3), página 67. . .	69
2.24. Arco capaz con ángulo obtuso	70
2.25. Arco capaz con ángulo agudo	71
2.26. El recíproco del teorema III.22 de Euclides. . . .	72
2.27. El recíproco del teorema III.22 de Euclides. . . .	73
2.28. Representación del teorema (2.3.5).	74
2.29. Representación del teorema (2.3.6), pág. 75. . . .	75
2.30. Propiedad cuadrilátero cíclico convexo	76
2.31. Propiedad cuadrilátero cíclico cruzado	78
2.32. Demostración de teorema de Ptolomeo.	81
2.33. Demostración de teorema de Ptolomeo.	83
2.34. Recíproco del teorema de Ptolomeo, 1.	85
2.35. E debe ser punto interior del cuadrilátero.	87
2.36. La recta de Simson.	88
2.37. $\square ABCP$ es un cuadrilátero cíclico.	90
2.38. Propiedad ángulos cuadrilátero cíclico	91
2.39. $\square AB'PC'$ cíclico $\Rightarrow \angle C'B'A = \angle C'PA$	92
2.40. $\square CB'A'P$ cíclico $\Rightarrow \angle A'B'C = \angle A'PC$	93
2.41. Recíproco del teorema de Simson.	94
2.42. $\square B'A'CP$ y $\square AB'PC'$ cíclicos	95
3.1. PT y PT' son tangentes a C por P	106
3.2. Tangentes comunes a C y C'	107

Índice de figuras

3.3. Tangentes exteriores a C y C'	109
3.4. Tangentes interiores a C y C'	111
3.5. $OK : KO' = -r : r'$	113
3.6. $OH : HO' = r : r'$	114
3.7. Figuras homotéticas	116
3.8. Simetría con respecto al punto O	117
3.9. Circunferencias concéntricas.	118
3.10. Circunferencias con radios iguales.	120
3.11. Circunferencias con centros y radios distintos.	120
3.12. H y K son los centros de homotecia.	122
3.13. Homólogos y antihomólogos desde K	123
3.14. Homólogos y antihomólogos desde H	124
3.15. Pares homólogos desde K	126
3.16. Demostración del teorema (3.5.1), pág. 126.	128
3.17. Triángulo $\triangle EA'B$ es isósceles.	129
3.18. Circunferencia de similitud de C y C'	131
3.19. Demostración del teorema (3.6.1), pág. 131.	132
3.20. Segunda parte del teorema (3.6.1).	134
3.21. Circunferencia de Apolonio $\odot KHP$	135
4.1. Puntos de Menelao.	142
4.2. Rectas cevianas.	143
4.3. Teorema de Menelao.	145
4.4. Demostración del teorema Menelao.	146
4.5. Menelao, forma trigonométrica	149
4.6. Teorema de Ceva.	152
4.7. Demostración del teorema de Ceva.	153
4.8. Teorema de la división interna y externa.	157

Índice de figuras

4.9. Q es el conjugado armónico de P	159
4.10. Perspectiva desde un punto.	163
4.11. Perspectiva desde una recta.	164
4.12. Homotecia vs perspectiva.	165
4.13. Teorema de Desargues.	166
4.14. A', B' y P colineales $\Rightarrow \frac{AP}{PB} \frac{BB'}{B'O} \frac{OA'}{A'A} = -1$. . .	167
4.15. B', C', Q colineales $\Rightarrow \frac{BQ}{QC} \frac{CC'}{C'O} \frac{OB'}{B'B} = -1$. . .	168
4.16. A', C', R colineales $\Rightarrow \frac{CR}{RA} \frac{AA'}{A'O} \frac{OC'}{C'C} = -1$. . .	169
4.17. $\triangle AA'R$ y $\triangle BB'Q$ en perspectiva desde P . . .	170
4.18. El problema de Desargues.	172
4.19. El teorema de Pappus.	173
4.20. El triángulo $\triangle KLM$	174
4.21. Caracterización de los puntos en la bisectriz. . . .	176
4.22. El teorema de la bisectriz.	178
4.23. El incentro y la circunferencia inscrita.	179
4.24. $a + b = c + 2r$	180
4.25. Representación de la proposición (4.5.2).	182
4.26. Cuatro circunferencias tangentes al $\triangle ABC$	184
4.27. Relación circunferencias inscrita, excritas	186
4.28. Las medianas son concurrentes.	190
4.29. $M_C M_B \parallel BC$ y $2M_C M_B = BC$	194
4.30. Las alturas concurren.	195
4.31. Ortocentro y triángulo órtico.	197
4.32. El cuadrilátero $\square ABP_B P_A$ es cíclico.	199
4.33. Triángulo órtico y otros cuadriláteros cíclicos . .	200

Índice de figuras

4.34. Alturas y bisectrices del órtico	202
4.35. Las mediatrices concurren.	204
4.36. Circuncentro triángulo es ortocentro del medial	206
4.37. $\triangle AC'C \sim \triangle P_C BC$	208
5.1. $OM_A + OM_B + OM_C = R + r$	217
5.2. Carnot y cuadriláteros cíclicos	219
5.3. $\triangle ABC$ es obtusángulo.	222
5.4. $R \cos \alpha = OM_A$	225
5.5. $R \cos \beta = -OM_B/R$	227
5.6. Propiedades del triángulo órtico	229
5.7. Semejanza triángulos 1	230
5.8. Cuadriláteros cíclicos convexos	231
5.9. $\triangle ABC \sim \triangle AP_C C \sim \triangle P_C BC$	232
5.10. $\triangle ABP_B \sim \triangle AP_C C$	233
5.11. Los radios r_p y ρ del triángulo órtico.	235
5.12. Representación de la recta OGH de Euler.	241
5.13. $\triangle PGA \sim \triangle OGM_A \Rightarrow OM_A \parallel AP$	243
5.14. $\triangle PGB \sim \triangle OGM_B \Rightarrow OM_B \parallel BP$	244
5.15. Puntos de Euler y triángulo de Euler.	245
5.16. La recta de Euler y el triángulo isósceles.	246
5.17. La circunferencia de los 9 puntos.	248
5.18. $\square M_B M_C M_{BH} M_{CH}$	250
5.19. $\square M_B M_{AH} M_{BH} M_A$	251
5.20. $\square M_A M_C M_{AH} M_{CH}$	252
5.21. Diagonal común	253
5.22. Centro circunferencia 9 puntos	256
5.23. Triángulo tangencial 1	258

Índice de figuras

5.24. Triángulo tangencial 2	259
5.25. Homotecia $\triangle$'s tangencial y órtico	260
5.26. $OI^2 = R^2 - 2rR$	268
5.27. Teorema de Feuerbach.	271
5.28. Demostración de Feuerbach.	272
6.1. Transformar 2 puntos	282
6.2. $ABC \overset{O_1}{\wedge} A_1B_1C_1$ y $A_1B_1C_1 \overset{O_2}{\wedge} A'B'C'$	283
6.3. Razón simple (AB, P)	286
6.4. Razón cruzada	292
6.5. $abcd \wedge ABCD$	295
6.6. $o(AB, CD) = o'(A'B', C'D')$	297
6.7. $O(ab, cd) = O'(a'b', c'd')$	298
6.8. Condición para obtener puntos colineales.	299
6.9. A, C, B, D es una hilera armónica.	301
6.10. $o(AB, CD) = -1 \iff o(CD, AB) = -1$	302
6.11. $e(ON, GH) = -1$	305
6.12. $OB^2 = OC \cdot OD \iff O$ es punto medio de AB	310
6.13. $(OB)^2 + (OC')^2 = (OO')^2$	311
6.14. Construcción conjugado armónico	313
6.15. $O(ab, cd) = -1 \iff o(AB, CD) = -1$	315
6.16. Hileras en perspectiva.	317
6.17. BB', CC' y DD' concurren.	318
6.18. $BB', C'D$ y CD' son concurrentes.	319
6.19. $O(ab, cd) = -1$ y $c \perp d \Rightarrow a$ y b bisecan $\angle(c, d)$	320
6.20. $\triangle OA'C' \equiv \triangle OC'B'$	321
6.21. $o(AI, I_A E_A) = -1$	323

Índice de figuras

6.22. Ángulo entre curvas.	324
6.23. $\sigma(AB, CD) = -1 \Rightarrow C_O \perp C_{O'}$	325
6.24. Cuadrángulo completo $ABCD$	328
6.25. Cuadrilátero completo.	330
6.26. Relación cuadrángulos y haces armónicos.	332
6.27. Cuadrilátero completo e hileras armónicas.	333
7.1. $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$	341
7.2. Potencia de P c/r C es $PO^2 - r^2$	344
7.3. Eje radical.	346
7.4. Construcción del eje radical	347
7.5. Ejes radicales concurren.	349
7.6. Eje radical entre C_I y C_{E_A}	350
7.7. $\mathcal{E}_A, \mathcal{E}_B$ y $\mathcal{E}_C$ concurren en I_M	352
7.8. El hexagrama místico de Pascal.	354
7.9. El inverso de un punto.	357
7.10. El inverso de P con respecto a C	359
7.11. Imagen bajo inversión	362
7.12. Imagen bajo inversión	363
7.13. C y C' son ortogonales.	365
7.14. C es ortogonal a C_1 y C_2	367
7.15. P, Q, P', Q' son concíclicos.	368
7.16. Imagen bajo $\iota_{O,r}$ de ℓ , si $O \notin \ell$	371
7.17. Imagen bajo $\iota_{O,r}$ de C' , si $O \notin C'$	372
7.18. Las inversiones preservan ángulos.	373
7.19. $PQ \parallel_{\{a,b\}} P'Q'$ y $PR \parallel_{\{a,b\}} P'R'$	374
7.20. Circunferencias con centro en eje radical	377
7.21. Circunferencias coaxiales	378

Índice de figuras

7.22. $\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$	379
7.23. $O(a'b', c'd') = o(AB, CD)$	381
7.24. C_N es tangente a C_I y C_{E_A}	383
7.25. $\ell(IE_A, AA') = 1 \wedge m(I_A E, P_A A') = -1$	384
7.26. C_N es tangente a C_I y C_N	385
7.27. El problema de Apolonio.	388
7.28. AO pasa por el centro de C''	391
7.29. Polo P y su polar p	392
7.30. Polos y polares	394
7.31. $P \in \ell \Rightarrow \exists Q \in \ell$ con Q conjugado de P	396
7.32. $\ell(PQ, RS) = 1$	397
7.33. $P(ab, cd) = P'(a'b', c'd')$	398
7.34. $P(ab, cd) = o(A'B', C'D')$	400
7.35. Inversión de potencia negativa.	401

Índice alfabético

- Ángulo
 - entre curvas, 324
- Ángulos
 - propiedades, 15
 - propiedades suma, 17
- Paralelas
 - propiedad 1, 44
- Antiparalelas
 - cuadrilátero cíclico,
 - 73
 - cuadrilátero convexo,
 - 53
 - cuadrilátero cruzado,
 - 55
 - existencia, 46
 - propiedad de simetría,
 - 47
 - simetría , 51
- Antiparalelos
 - dos pares de rectas, 49
- Arco capaz, 69
- Baricentro, 191
- Bisectriz
 - caracterización, 176
- Centro
 - de gravedad, 191
 - de similitud, 117
 - radical, 349
 - de homotecia, 117
- Centroide, 191

Índice de figuras

- Circuncentro, 206
- Circunferencia
 - 9 puntos centro, 255
- Circunferencia
 - 9 puntos, 247
 - de Apolonio, 135
 - de similitud, 130
 - excrita, 181
 - inscrita, 180
- Circunferencias
 - coaxiales, 378
- Circunradio
 - definición, 207
 - valor, 207
- Composición de
 - inversiones, 364
- Conjugado armónico, 158
- Cuadilátero cíclico
 - caracterización, 71
- Cuadrángulo completo,
 - 327
- Cuadrilátero
 - caracterización
 - cíclico, 64
- Cuadrilátero cíclico, 60
- Cuadrilátero completo,
 - 329
- Cuaterna armónica, 300
- Curvas ortogonales, 324
- División
 - de un segmento en
 - una razón, 8
 - externa de un
 - segmento , 8
 - impropia de un
 - segmento , 9
 - interna de un
 - segmento, 8
 - interna y externa de
 - un segmento, 11
- Eje radical, 345
- Euclides
 - teorema III.22, 67
- Euler
 - problema, 242
 - puntos, 245
 - recta, 243
 - solución al problema,
 - 246
 - triángulo, 245
- excentro, 181
- Haz armónico, 314
- Hilera armónica, 300
- Hilera de puntos, 31

Índice de figuras

- Incentro, 179
- Inradio, 180
- Inversión
 - de potencia negativa, 401
- Inversión
 - respecto a una circunferencia, 357
- Media
 - aritmética, 307
 - armónica, 307
 - geométrica, 307
- Mediatriz, 202
- Mediatriz
 - caracterización, 203
- Ortocentro, 197
- Perspectiva
 - centro de, 162
 - desde un punto, 162
 - desde una recta, 163
- Pincel de rectas, 32
- Polo, 393
- Potencia de un punto, 342
- Progresión armónica, 306
- Progresión geométrica, 306
- Proposición
 - relación tangencial y órtico, 259
- Punto
 - conjugado armónico, 158
 - de Feuerbach, 274
 - de Menelao, 142
 - Gergonne, 210
 - potencia de, 342
- Puntos
 - antihomólogos, 123
 - conjugados, 395
 - de Euler, 245
 - homólogos, 123
- Puntos colineales, 5
- Razón
 - cruzada, 288
 - doble, 288
 - simple, 285
 - de homotecia, 117
 - de similitud, 117
- Recta
 - ceviana, 143
 - de Euler, 243

Índice de figuras

- de Pascal, 356
- de perspectiva, 163
- polar, 392
- Rectas
 - antiparalelas, 43
 - antiparalelas con respecto a un par, 49
 - armónicas, 314
 - concurrentes, 32
 - conjugadas, 395
- Segmento dirigido, 2
- Semejanza
 - directa, 115
 - inversa, 115
- Sucesión, 305
- Sucesión
 - aritmética, 306
 - armónica, 306
- Tangentes
 - a dos circunferencias, 107
 - a una circunferencia por punto, 106
 - exteriores a dos circunferencias, 108
 - interiores a dos circunferencias, 110
- Teorema
 - unicidad conjugado armónico, 303
- Teorema
 - razón cruzada, 292
 - T en la recta de Euler, 261
 - alturas concurren, 194
 - bisectrices concurren, 177
 - Ceva trigonométrico, 155
 - circunferencia de Euler, 248
 - circunferencia de Feuerbach, 248
 - circunferencia de los 9 puntos, 248
 - circunferencia de similitud, 131
 - circunferencia inscrita y excrita, 185
 - circunferencia y puntos inversos, 364

Índice de figuras

- circunferencias
 - ortogonales, 325, 326
 - de Apolonio, 134
 - de Carnot, 217
 - de Ceva, 152
 - de Desargues, 166
 - de Euler, 5
 - de Feuerbach, 270, 382
 - de la bisectriz
 - generalizado , 21
 - de la bisectriz interna, 19
 - de la división interna y externa, 157
 - de Menelao, 144
 - de Pappus, 172
 - de Pascal, 353
 - de Poncelet, 180
 - de Ptolomeo, 81
 - ejes radicales
 - concurren, 348
 - fundamental polos polares, 393
 - imagen
 - circunferencias bajo inversión, 370
 - inversiones preservan ángulos, 373
 - las medianas
 - concurren, 190
 - mediatrices
 - concurren, 204
 - Menelao
 - trigonométrico, 148
 - preservación armonía, 303
 - puntos homólogos, 124
 - razón simple, 286
 - recíproco de
 - Ptolomeo, 84
 - recíproco de Simson, 93
 - recta de Simson, 88
 - relación cuadrángulos y haces
 - armónicos, 331
 - valor $\iota_{O,r}(OA)\iota_{O,r}(B)$, 379
- Triángulo
 - órtico, 197
 - de Euler, 245

Índice de figuras

excentros , 182
medial, 194
simediana, 278
tangencial, 258

Triángulo órtico
 área, 234
 cirunradio, 234
 inradio , 234