UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

Colección CBI

Libro de texto

Pensamiento Matemático

una introducción con enfoque universitario

Gabriel López Garza

Pensamiento Matemático

una introducción con enfoque universitario

Gabriel López Garza

Libro de texto

Casa abierta al tiempo
Dr. José Antonio de los Reyes
Rector General
Dra. Norma Rondero López
Secretario General
Dra. Verónica Medina Bañuelos
Rector de la Unidad Iztapalapa
Dr. Javier Rodríguez Lagunas
Secretario de Unidad
Dr. Román Linares Romero
Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Dr. Juan José Ambríz García
Coordinador de Extensión Universitaria
Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas
Jefe de la Sección de Producción Editorial

Pensamiento Matemático
Primera edición: 2025

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX, México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen:978-607-28-3343-2

Índice general

1 Argumentación válida vs. falacias 11

1.1 Introducción 11

1.2 Falacias persuasivas 11

1.2.1 Actividades del capítulo 12

1.2.2 Actividades con falacias 12

1.3 Estructura lógica subyacente de los razonamientos válidos 14

1.4 Equivalencias de la implicación lógica en el idioma español 16

1.5 Equivalencias lógicas 17

1.6 Más silogismos, tautologías y absurdos 17

1.6.1 Argumentación por reducción al absurdo 19

1.7 Revisando las falacias 21

1.8 Uso del "$\Leftrightarrow$" en las definiciones matemáticas 23

1.8.1 Demostraciones en lógica 24

1.9 Ejercicios del capítulo 1 26

1.9.1 Nivel básico 26

1.9.2 Nivel intermedio 26

2 Conjuntos, notación, operaciones elementales 27

2.1 Introducción 27

2.2 Construcción de nuevos conjuntos a partir de un conjunto dado 28

2.2.1 El universo del discurso 29

2.3 Subconjuntos y extensión de conjuntos 30

2.3.1 Unión e intersección de conjuntos 32

2.4 Diferencia y complemento de conjuntos 33

2.5 Conjunto potencia 34

2.6 El conjunto potencia es mayor que el potenciado 35

2.7 Conjuntos numerables 36

2.8 Paradoja de Russell **37**
2.9 Ejercicios del capítulo2 **39**
2.9.1 Nivel básico 39
2.9.2 Nivel intermedio 39
2.9.3 Nivel avanzado 39

3 Números 41

3.1 Fundamentos de aritmética **41**
3.2 Notación y el infinito en las representaciones decimales **42**
3.3 Notación de suma, sucesiones **43**
3.3.1 Heurística vs. demostraciones y una suma especial 44
3.4 Inducción matemática **45**
3.4.1 Invalidez de fórmula general que se cumple para múltiples casos. 46
3.4.2 Propiedades del operador suma 47
3.5 Sucesiones aritméticas **48**
3.5.1 Fórmula recursiva para sucesiones aritméticas 48
3.6 Sucesiones geométricas **49**
3.6.1 Fórmula recursiva para sucesiones geométricas 50
3.7 Representación decimal de los números reales **51**
3.7.1 Operaciones con sucesiones 53
3.7.2 Sumas que convergen y series que no convergen 53
3.8 Decimales periódicos **54**
3.8.1 ¿Por qué son convergentes los decimales? 56
3.9 Números irracionales, algebraicos y trascendentes **58**
3.9.1 $\mathbb{R}$ no es numerable 60
3.10 Ejercicios del capítulo 3 **62**
3.10.1 Nivel básico 62
3.10.2 Nivel intermedio 62
3.10.3 Nivel avanzado 62

4 Rudimentos del álgebra de los números reales 63

4.1 Introducción **63**
4.2 Propiedades de campo de $\mathbb{R}$ **63**
4.3 Expresiones algebraicas, notación **67**
4.3.1 Exponentes enteros 67
4.4 Raíces y exponentes fraccionarios **70**
4.4.1 Exponentes reales 72
4.4.2 Valor absoluto 72
4.5 Teorema del binomio **73**
4.6 La fórmula cuadrática **76**
4.7 Solución de ecuaciones **78**
4.8 Orden en los números reales **79**
4.8.1 Intervalos 80
4.9 Axioma del supremo **81**
4.10 Ejercicios del capítulo 4 **84**
4.10.1 Nivel básico 84
4.10.2 Nivel intermedio 85
4.10.3 Nivel avanzado 86

5 Construcciones geométricas 87
5.1 Preliminares geométricos, construcciones con regla y compás virtuales 87
5.1.1 Exploraciones con *GeoGebra* 88
5.2 Axiomas de orden 91
5.3 Otras geometrías 92
5.3.1 Modelo de la geometría hiperbólica 92
5.4 Existencia de paralelas 94
5.4.1 Modelo de la geometría elíptica 96
5.5 Congruencia en geometría euclidiana 97
5.5.1 Medidas con *GeoGebra* 100
5.5.2 Congruencia entre triángulos en geometría euclidiana 102
5.6 Ejercicios del capítulo 5 106
5.6.1 Nivel básico 106
5.6.2 Nivel intermedio 106
5.6.3 Nivel avanzado 107

6 Principios de conteo y probabilidad elemental 109
6.1 Multiplicación de números, interpretaciones varias 109
6.1.1 Permutaciones 110
6.1.2 Permutaciones indistinguibles 112
6.1.3 Combinaciones 112
6.2 Nociones de probabilidad 113
6.2.1 Medida de probabilidad 114
6.3 σ-álgebras 116
6.3.1 Sistema de axiomas para la teoría de probabilidad 117
6.4 Independencia de eventos 117
6.5 Variables aleatorias 118
6.6 Ejercicios del capítulo 6 121
6.6.1 Nivel básico 121
6.6.2 Nivel intermedio 121
6.6.3 Nivel avanzado 122

Bibliografía 123

Índice 125

Prefacio

El presente libro de texto cubre el programa vigente a la fecha de hoy de la u.e.a. *Introducción al Pensamiento Matemático*, la cual corresponde a los primeros trimestres de licenciatura en Matemáticas de la UAMI. El texto también puede usarse como apoyo a los cursos *Fundamentos de Álgebra y Fundamentos de Geometría*, cursos también de la licenciatura en Matemáticas. Además, algunas secciones de los capítulos *Números* y *Rudimentos del álgebra de los números reales*, pueden utilizarse como apoyo en los cursos complementarios de la UAMI y aún pueden ser un buen material auxiliar en los cursos de precálculo y Cálculo diferencial e integral, del tronco común.

El enfoque del texto se centra en el método axiomático deductivo de la Matemática y no, prácticamente nunca, en la enseñanza ni aplicación de algoritmos. Como se sabe, la enseñanza elemental se centra casi totalmente en la práctica de algoritmos que tratan de mecanizar procedimientos y se descuida completamente la práctica del razonamiento matemático. Tal distorsión de la enseñanza de la matemática se constituye como principal obstáculo para quien emprende un estudio serio de las ciencias, en general, y de la matemática en particular, para quienes tienen una vocación de estudio de las matemáticas a nivel una licenciatura.

El texto que se presenta intenta iniciar al posible lector en los métodos propios de algunas áreas de la matemática, desde una perspectiva actual. Por ejemplo, se incluye un acercamiento elemental e intuitivo a un modelo de la geometría hiperbólica, para que cuando se emprenda el estudio de la geometría más profundamente, en un curso posterior, sean menores las dificultades al emprender el estudio de las paralelas y otros temas. También se guía al estudiante para que utilice tecnologías de la información y de la comunicación mediante el uso de software libre y gratuito como *GeoGebra* y en ningún caso se utiliza software comercial. *GeoGebra*, además contiene comandos y manuales de instrucciones en nuestro idioma, por estos motivos, además de su eficiencia, se ha escogido para este curso. Además, el programa es de código abierto por lo que eventualmente los alumnos pueden entender como funciona, si se avocan a ello, a diferencia de los programas comerciales los cuales normalmente *no son* de código abierto, por lo que sus usuarios serán siempre eso, üsuariosçuando se espera en la formación de matemáticos que puedan tener un rol más creativo en cuanto al uso y manejo de programas computacionales.

Muchos de los materiales incluidos en este texto han sido usados en las aulas desde que el curso *Introducción al Pensamiento Matemático* fue incorporado al currículo de la licenciatura en matemáticas, hace años. Algunos contenidos, por ejemplo: *Falacias*, pueden y deben ser discutidos a nivel de grupo con lo que se obtienen excelentes resultados desde el punto de vista didáctico. Otros materiales, por ejemplo: las demostraciones lógicas, requieren tratamiento individualizado, aunque siempre puede ser de ayuda la discusión en grupo de la solución de los ejercicios, pero nunca debe descuidarse los errores individuales que se cometan y que requieren un trabajo personalizado. Algunos contenidos encontrará el lector un poco difíciles al principio y pude omitirlos o bien, acercarse a ellos solo como textos de divulgación de temas muy importantes.

Finalmente, este libro fue pensado como un apoyo para estudiantes autónomos y con fuerte vocación para el estudio de las matemáticas, teniendo en mente las dificultades que enfrentan quienes han sido formados en el sistema de educación pública, conociendo los planes de estudio de la educación preuniversitaria con sus virtudes y defectos. habiendo sido yo mismo formado en este sistema (y agradecido por siempre con mis maestros comprometidos y dedicados). Es mi esperanzado deseo que mi libro en algo pueda servir para avivar en los posibles lectores la pasión por las matemáticas.

Gabriel López Garza

1. Argumentación válida vs. falacias

La lógica matemática estudiada en este capítulo está dedicada a lectores que enfrentan por primera vez la estructura lógica que subyace en las matemáticas formales. Gran parte del capítulo esta dedicada a tratar de esclarecer lo que se entiende por razonamiento válido en matemáticas y se espera que por lo menos el lector alcance cierta familiaridad con los términos y operadores de la lógica matemática. No es objetivo del presente enfoque que el lector se vuelva experto en los temas aquí contenidos.

1.1 Introducción

¿Qué es una argumentación válida? Particularmente en Matemáticas ¿cuándo se considera que se argumenta correctamente? Quizá un primer acercamiento a esta cuestión requiere un rodeo en el ámbito mundano de llegar a las matemáticas: ¿cuáles argumentaciones, en general, *no son consideradas válidas*? La respuesta a la última pregunta es inmediata: no se considera válida ninguna falacia, por supuesto.

Desde un punto de vista elemental, las falacias son argumentos donde las conclusiones no se siguen de las premisas o antecedentes. Dicho lo anterior, es pertinente conocer las falacias, tanto las que ocurren de manera cotidiana como las que ocurren en el ámbito científico, aquellas que ocurren en los medios masivos de comunicación, como en los debates políticos y científicos, así como las que aparecen en la mayoría de las actividades humanas donde exista una diferencia de opiniones o de ideologías.

1.2 Falacias persuasivas

Algunas falacias que deberían ser obvias son aquellas cuyo propósito es desvirtuar a alguien por su aspecto físico o sustentar la validez ideas en las opiniones de algún experto que tenga reconocimiento público. Por increíble que parezca, estos y otros tipos de falacias han sido usados por filósofos famosos y todo tipo de engañabobos de manera más o menos abundante a lo largo de la civilización. Por ejemplo, la siguiente opinión de Nietzsche en su obra "El crépusculo de los ídolos" (cap. 1):

"De origen, Sócrates pertenecía a la clase más baja: Sócrates era plebeyo. Sabemos, todavía podemos ver por nosotros mismos, lo feo que era. Pero si la fealdad es en sí misma una objeción, se encuentra entre los griegos casi como una refutación. ¿Era Sócrates un griego en absoluto? La fealdad a menudo es la expresión de un desarrollo que ha sido cruzado, frustrado por la cruza...".

De particular importancia en la historia de la ciencia es la falacia apoyada en la opinión de alguien a quien se le da autoridad sobre las demás personas. Se llama en latín falacia *ad verecundiam*, lo que traducido a nuestro idioma sería: *falacia que apela a la vergüenza*. La vergüenza que trata de provocarse en alguien por desconocer la opinión de un “experto” o por atreverse a comparar la propia opinión con la del “experto”. Ejemplos ilustres sobran quienes han contradicho las opiniones de Aristóteles de que la tierra era el centro del universo o que los cuerpos mas pesados caen mas rápido que los ligeros; como es sabido, oponerse a tales opiniones le causó muchos terribles problemas a Galileo.

Por ningún motivo debe pensarse que este tipo de falacias son cosa del pasado. En ciencia siguen produciéndose cotidianamente, por ejemplo, cuando el dos veces premio nobel Linus Pauling obstaculizó los descubrimientos de Dan Shechtman [19] cuando este último, quien no era conocido, fue sujeto de sus vilipendios: *Dos años después del descubrimiento, publiqué dos artículos sobre este tema con mis colegas [3], [18]. Miles de investigadores de todo el mundo se unieron a nosotros y comenzaron a estudiar los cuasicristales (ahora hay más de 10 000 artículos publicados sobre los cuasicristales). Pero también surgió una fuerte oposición, encabezada por el gran científico estadounidense Linus Pauling, quien ganó dos veces el premio Nobel. Pauling me atacó personalmente e incluso dijo,“No hay cuasi-cristales, hay cuasi-científicos”*.

Puede pensarse que detenerse en las falacias *ad homnem* y *ad verecundiam* en un libro de matemáticas puede ser excesivo, sin embargo, pensando que este texto podría llegar a lectores sin mucha experiencia, debo enfatizar que *por ningún motivo son válidos los argumentos contra la persona* en matemáticas y que no se utilizan en este libro, por supuesto. Finalmente, mencionar que cuando en un texto de matemáticas aparece el nombre de un autor en un teorema, digamos Euler, Gauss o cualquier otro matemático famoso, se trata solo para honrar la memoria del personaje nombrado y *en ninguna circunstancia* debe utilizarse un nombre para argumentar que un razonamiento es válido porque es obra de tal o cual sabio.

1.2.1 Actividades del capítulo

El aprendizaje de las matemáticas requiere muchas horas de práctica, tanto de planteamiento y resolución de problemas, como de ejercicios que ayuden al sujeto de aprendizaje a apropiarse del lenguaje y de las técnicas propias de la ciencia que nos ocupa. Encaminadas a lograr buenas dinámicas de aprendizaje, en esta sección se presentan algunas actividades relacionadas con los temas del presente capítulo, las cuales no están restringidas estrictamente al currículo de ningún curso de la UAMI y algunas de ellas son un poco más difíciles de realizar que los de la sección dedicada a los problemas y ejercicios. Sin embargo conocer de los temas que se presentarán o, simplemente, verse involucrado en las actividades puede ser de mucho provecho para quienes logren interesarse en ellas. Cabe mencionar que, sin embargo, *en un primer acercamiento puede ser muy difícil para algunos* asimilar todos los saberes que entran en juego, por lo que estas actividades pueden ser omitidas en una primera lectura si no despiertan interés o al menos curiosidad de posibles lectores.

Finalmente, la cantidad de diferentes tipos de falacias sobrepasa por mucho los objetivos de este libro. En los siguientes ejercicios se seleccionan algunas falacias cuyo conocimiento se considera indispensable para quien comience una carrera en ciencias y en particular en matemáticas. Los siguientes ejemplos fueron tomados del libro de Copi [5] libro que se recomienda por su extenso estudio de las falacias formales, así como otros temas de lógica.

1.2.2 Actividades con falacias

Se recomienda para el trabajo en esta actividad dedicar entre una y dos horas. Se trata de analizar falacias tratando de reconocer por qué son erróneas mediante un análisis en grupo. Otra actividad que puede ser enriquecedora consiste en que un grupo trate de defender la postura de un texto, mientras que otra lo critique.

Ejercicio 1.1 Lea cuidadosamente las siguientes argumentaciones. ¿Son falaces? Si considera que son falaces diga las causas y encuentre casos donde lo que se afirma o se infiere de lo que se afirma sean falsos. Si es posible elabore un argumento semejante donde sea más obvia la falacia.

1. En nuestras escuelas no nos enseñaron sobre la anticoncepción. No nos repartieron condones como muchas escuelas en la actualidad lo hacen...No fue sino hasta que la gente empezó a enseñar a los niños sobre los anticonceptivos que comenzaron nuestros problemas con el embarazo [Webster, F., “ No Sex Education, No Sex.”*Insight,* 17 de noviembre de 1997].
2. Si desea una vida llena de placeres sexuales, no estudie en la universidad. Un estudio que se publicará el próximo mes en la revista *American Demographics* muestra que la gente con mayor educación tiene la menor cantidad de sexo [*The Chonicle of Higher Education*, 23 de enero de 1998].
3. Permitir a toda persona una libertad de expresión ilimitada siempre tiene que ser, en general, ventajoso para el estado; porque es propicio para los intereses de la comunidad que cada individuo disfrute de una libertad, completamente ilimitada, para expresar sus sentimientos [5, p. 183].
4. En 1960 esta gran nación (EUA) tenía las mejores escuelas públicas del mundo. Después de 35 años y de invertir miles de millones de dólares de fondos federales, nuestras escuelas públicas figuran entre las más malas del mundo industrializado. ¿Qué ocurrió? El gobierno federal se entrometió en la educación pública. Ahora tenemos el mayor número de analfabetas funcionales en el mundo industrializado [Perot, R., *Discurso durante campaña presidencial,* 14 de septiembre 1996].
5. El orden es imprescindible para la justicia porque la justicia puede alcanzarse solo mediante el orden social y legal. [Van Den Haag, E., *Punishing Criminals,* 1975].
6. El universo es de forma esférica...porque todas las partes constitutivas del universo, esto es, el sol la luna y los planetas, aparecen en esta forma. Copérnico, N., [*La nueva concepción del universo*. 1514].
7. La inquisición debe haber estado justificada y debe haber sido benéfica, si pueblos enteros la invocaron y la defendieron, si hombres de las más nobles almas la fundaron y la crearon por separado e imparcialmente...[Croce, B. *Filosofía de la praxis,* 1935].
8. Premisa mayor: sesenta hombres pueden hacer un trabajo sesenta veces más rápido que un solo hombre. Premisa menor: un hombre puede cavar un hoyo para poste en sesenta segundos. Por lo tanto, conclusión: sesenta hombres pueden cavar un hoyo en un segundo. Esto puede llamarse silogismo aritmético, en que , al combinar lógica y matemáticas obtenemos una doble certeza y somos doblemente bendecidos. [Bierce, A. *El diccionario del Diablo,* 1911].
9. ¿Por qué tantas personas se sienten atraídas por el “automóvil x”? Puede ser que tantas personas se sienten atraídas por x porque, ¡son tantas las personas que se sienten atraídas por x![5, p. 153].
10. En mayo de 1935, el gobierno de Stalin anuncia la firma de un pacto Franco-Soviético de no agresión. El ministro de asuntos exteriores francés Pierre Laval trata de convencer a Stalin de la necesidad de firmar este pacto. Stalin quiere saber de cuántas divisiones dispone el Ejército Francés y su eficacia. Laval le da respuesta y le pide a Stalin que rebaje la presión que está ejerciendo sobre los católicos rusos, puesto que esta medida ayudaría a mejorar las relaciones de su gobierno con la Santa Sede. Fue en ese momento cuando Stalin le preguntó a Laval “Ah, ¡el Papa! ¿Cuántas divisiones tiene el Papa?” https://www.historiassegundaguerramundial.com/stalin-pregunta-cuantas-divisiones-tiene-el-papa/

■

Solución del ejercicio 1.1. Se dará solamente una guía para resolver los ejercicios, no la solución completa esto con el fin de favorecer que se lleve a cabo una discusión sin prejuicios en el grupo. Si no se llega a un consenso sobre la solución se deberá buscar mayor información sobre la falacia en cuestión, por ejemplo en [5], a veces se dará el nombre en latín de la falacia. 1) y 2) Causa falsa. 3) Petición de principio. 6) Generalización precipitada. 7) y 9) *Ad populum*. 10) *Ad baculum.*

Ejercicio 1.2 Busque falacias la sección de política de cualquier diario, de cualquier día. Preséntelas en grupo, discuta, si de verdad son falacias, en que consiste la falsedad de la argumentación. ■

1.3 Estructura lógica subyacente de los razonamientos válidos

Para los argumentos que consideramos válidos, en matemáticas existe una estructura lógica subyacente que ilustraremos con ejemplos. El primer razonamiento válido que ejemplificaremos debe ser conocido por toda persona que haya cursado la enseñanza elemental y, si acaso no lo conociera, aún así, seguramente habrá utilizado este tipo de razonamiento en algún contexto de la vida cotidiana.

■ **Ejemplo 1.1 (ejempo de razonamiento válido).** Para cualesquiera números reales a, b, si $ab = 0$ y $a \neq 0$ entonces $b = 0$. ■

El razonamiento anterior que aparece en muchas aplicaciones y de manera natural al resolver ecuaciones[1], está basado en el teorema matemático que dice que si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ y que se estudiará a detalle más adelante. Si denotamos con A la proposición $a = 0$ y con B la proposición $b = 0$ la estructura lógica del razonamiento del ejemplo anterior puede representarse en una forma general donde A y B denoten cualquier tipo de proposiciones simples.

$$A \quad \vee \quad B \tag{1.1}$$

$$\neg A \tag{1.2}$$

$$\therefore\ B \tag{1.3}$$

En la primera línea (1.1) que se lee “A o B” hemos reemplazado la palabra “o” por el símbolo “$\vee$” ya que no corresponde a la “o” exclusiva del castellano[2]. La “o” inclusiva, la cual denotamos $\vee$ significa que o bien se cumple A o bien se cumple B o bien se cumplen A y B al mismo tiempo. En la línea (1.2) el símbolo “$\neg$” indica que se debe negar la proposición A, claramente la negación lógica de $a = 0$ es $a \neq 0$. Por último, en la línea (1.3) el símbolo “$\therefore$” se lee “por lo tanto” y significa que se puede concluir de la validez de (1.1) y (1.2) que la última línea es válida.

El razonamiento presentado por (1.1), (1.2) y por (1.3) se conoce desde la antigüedad y es llamado *silogismo disyuntivo*. Hay evidencia experimental de la universalidad de este razonamiento y de que aún ciertos simios lo aplican instintivamente [9] en situaciones experimentales, por lo cual hay evidencia de que este silogismo no requiere del uso del lenguaje humano.

Como se ha mencionado, no utilizaremos argumentos falaces en este texto (en lo posible) y, por lo tanto, debemos dar ciertos argumentos que den al lector la certeza de que puede utilizar el silogismo disyuntivo sin ninguna limitación cuando lo requiera, sin apelar al carácter intuitivo o instintivo de este razonamiento. Para este fin, primero analizaremos todas los casos que pueden ocurrir suponiendo que las proposiciones A y B son tan simples que se les puede atribuir con toda certeza si son verdaderas o no. Simbolizaremos el valor de verdad con el número 1 y el de falsedad con el número 0. La siguiente tabla puede interpretarse como la definición del símbolo $\vee$.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabla 1.1: Tabla de verdad de la disyunción lógica “$\vee$ ”.

[1]Por ejemplo si se sabe que $(x-1)(x+1) = 0$ y también se sabe que $x \neq -1$ entonces se concluye que $x = 1$.

[2]La “o” exclusiva del castellano que significa o que bien se cumple A o que bien se cumple B, pero no ambas al mismo tiempo, lo cual la distingue de la “o” inclusiva de la lógica matemática.

La tabla 1.1 muestra que la disyunción $A \vee B$ *no es verdadera* solo en el caso en que tanto A como B sean falsas al mismo tiempo, lo cual se ilustra en el último renglón de la tabla. Como ya se mencionó, la tabla 1.1 puede considerarse como definición de la disyunción lógica ya que indica como debe utilizarse en todos los casos que puedan ocurrir cuando se admiten unicamente dos valores de verdad, 0 o 1. A partir de este ejemplo podemos definir todos los símbolos de la lógica matemática que requeriremos en este texto. El ejemplo más simple es la definición de la negación que se presenta en la siguiente tabla. La tabla 1.2 nos indica que cuando A es verdadera,

A	$\neg A$
1	0
0	1

Tabla 1.2: Tabla de verdad de la negación lógica "$\neg$" .

su negación $\neg A$ es falsa, y viceversa.

La conjunción de dos proposiciones, para ser congruentes, se denota con un símbolo especial, a pesar de que corresponde al significado de la palabra española "y", es decir, la fórmula $A \wedge B$ se lee "A y B", y está definida por la siguiente tabla 1.3.

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabla 1.3: Tabla de verdad de la conjunción lógica "$\wedge$".

De esta forma, la conjunción $A \wedge B$ solo es verdadera si tanto A como B son verdaderas simultáneamente.

Con las definiciones previas estamos en condiciones de poder definir la implicación lógica $A \Rightarrow B$, cuya fórmula se lee "A implica B". A diferencia de los operadores lógicos ya definidos ($\vee$, $\wedge$ y $\neg$), la *implicación lógica* suele suscitar en los novicios ciertas inquietudes e inconformidades dado que da lugar a ciertos tecnicismos que los principiantes no consideran (en mi experiencia con muchos estudiantes) intuitivos ni mucho menos "lógicos". Esto debe interpretarse solo como un inconveniente pasajero ya que el uso correcto de la implicación lógica, apegado a la definición, dará lugar a una congruencia y consistencia que nos acompañara para siempre en las matemáticas. La siguiente tabla 1.4 contiene la definición de la implicación lógica.

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabla 1.4: Tabla de verdad de la implicación lógica "$\Rightarrow$" .

La proposición colocada antes de la flecha "$\Rightarrow$", (en la tabla 1.4, la proposición A), se llama *antecedente* y la proposición colocada después de la flecha (en nuestra tabla la proposición B) se llama *consecuente*. La segunda línea en la tabla 1.4 indica que la implicación lógica solo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. De esta forma, *no se da el caso* en una implicación lógica que sea verdadera cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Abreviadamente: *no ocurre que de verdadero se siga algo falso*. En realidad, a diferencia de los demás operadores, la implicación es la más utilizada en toda la matemática y en el contexto en el que se usa siempre que aparezca una implicación se quiere decir exactamente que cuando dos proposiciones están conectadas por medio de una implicación suponiendo el antecedente verdadero no puede ocurrir que el consecuente sea falso. Por otra parte el uso técnico que se dará a la implicación es cuando el antecedente sea falso, en la tabla 1.4 se muestra en los dos renglones últimos que no importa el valor de verdad del consecuente, cuando el antecedente es falso la implicación es verdadera. Ejemplo de una implicación que se considera verdadera es: si un conjunto no tiene elementos implica que es subconjunto de todo conjunto. A este ejemplo volveremos cuando tratemos de conjuntos, pero por ahora se puede adelantar que esta implicación es verdadera ya que un conjunto Z es subconjunto de otro W si todos los elementos de Z pertenecen a W, en símbolos

$$(x \text{ pertenece a } Z) \Rightarrow (x \text{ pertenece a } W)$$

y dado que la afirmación "x pertenece a Z" es falsa (ya que Z no tiene elementos), la implicación es necesariamente verdadera, de acuerdo con la definición en del tabla 1.4.

Con la implicación lógica establecida se puede definir la doble implicación llamada *bicondicional* y denotada por "$\Leftrightarrow$", por medio del siguiente tabla 1.5. La proposición $A \Leftrightarrow B$ suele leerse "A

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Tabla 1.5: Tabla de verdad de la bicondicional "$\Leftrightarrow$" .

si y solo si B", y como vemos de la definición la tabla 1.5, solo es verdadera en el caso en el que ambas proposiciones que lo conforman son ambas verdaderas o ambas falsas.

1.4 Equivalencias de la implicación lógica en el idioma español

En español pueden encontrarse varias formas en las cuales está implícita o explícitamente utilizada una implicación, algunas de ellas se muestran en la tabla 1.6. Muchos ejemplos de

Equivalencias de "$A \Rightarrow B$"
1. Si A entonces B.
2. Si A, B.
3. B si A.
4. A implica que B.
5. De A se sigue B.

Tabla 1.6: Equivalencias en español de la implicación lógica "$\Rightarrow$" .

oraciones pueden construirse a partir del tabla 1.6 sustituyendo A y B por algo coherente, pero también muchas oraciones falsas o absurdas pueden construirse de la misma manera. Como ejemplo de algo coherente, al sustituir A con "un número es par" y B con "es divisible por dos" se obtiene:

1. Si un número es par entonces es divisible por dos.
2. Si un número es par, es divisible por dos.
3. Es divisible por dos si un número es par.
4. Que un número es par implica que es divisible por dos.
5. De que un número que es par se sigue que es divisible por dos.

A estas equivalencias deben añadirse otras, por ejemplo, "que un número sea par *es suficiente* para que sea divisible por dos" y otras que son consecuencias de equivalencias lógicas que ahora se estudiarán.

1.5 Equivalencias lógicas

Diremos que dos proposiciones lógicas son equivalentes si y solo si tienen la misma tabla de verdad. La equivalencia entre A y B será denotada con $A \equiv B$ lo cual se lee "A es equivalente a B". Entenderemos la equivalencia entre dos proposiciones en el sentido en el que podremos intercambiar una proposición por otra en cualquier momento de una argumentación matemática. Las dos primeras equivalencias que vale la pena destacar ya que se utilizan ampliamente en matemáticas son

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{1.4}$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B \tag{1.5}$$

De la definición del bicondicional del tabla 1.5 puede verse que dos proposiciones tienen la misma tabla de verdad si están unidas por un bicondicional por lo que la equivalencia entre A y B será denotada con $A \Leftrightarrow B$ o bien $A \equiv B$ indistintamente.

En la tabla 1.7 se constata la equivalencia (1.4). Observe que para construir la tabla se ponen los valores de verdad de $\neg A$ en correspondencia con los valores de A y con esto se construye $\neg A \vee B$, mediante la definición del tabla 1.1. Dado que las columnas bajo $A \Rightarrow B$ y bajo $\neg A \vee B$ son

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Tabla 1.7: Tabla de equivalencia "$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$" .

iguales las proposiciones son equivalentes de acuerdo con nuestra definición. La comprobación de la equivalencia (1.5) se deja como ejercicio.

Muchas equivalencias lógicas son utilizadas con frecuencia en matemáticas, el listado presentado abajo incluye algunas de las más destacadas, la comprobación de la equivalencia por medio de tablas de verdad se deja como ejercicio muy recomendable.

$$\neg B \Rightarrow \neg A \equiv A \Rightarrow B \tag{1.6}$$

$$A \vee B \equiv B \vee A \tag{1.7}$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \tag{1.8}$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \tag{1.9}$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \tag{1.10}$$

$$\neg(\neg A) \equiv A \tag{1.11}$$

La equivalencia (1.6) se llama *contrapositiva* de "$A \Rightarrow B$" y debe ser tomada muy en cuenta por los principiantes que pudieran creer que es lo mismo $A \Rightarrow B$ que $B \Rightarrow A$, **no es lo mismo**, el hecho de que no sean equivalentes lo debe comprobar el lector, por medio de una tabla de verdad. Las equivalencias (1.7) y (1.8) indican que al contrario de la implicación, $\vee$ y $\wedge$ si conmutan. Las fórmulas, (1.9) y (1.10) se conocen como *leyes de De Morgan* y serán muy importantes en el estudio de la teoría de conjuntos. Finalmente (1.11) se conoce como el *principio de la doble negación* o *tercero excluido*.

1.6 Más silogismos, tautologías y absurdos

Dada la equivalencia (1.4) podemos ver que el siguiente razonamiento es muy similar al silogismo disyuntivo y de hecho si se acepta el silogismo disyuntivo como válido el siguiente, llamado *modus ponens* también es válido.

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow B \qquad (1.12)\\ A & \qquad (1.13)\\ \therefore B & \qquad (1.14) \end{aligned}$$

El razonamiento anterior puede expresarse diciendo que si se sabe que la implicación en (1.12) es verdadera y también se sabe que A es verdadera, se puede concluir que B es verdadera. Claramente, sustituyendo la implicación por su equivalencia (1.4) vemos que el *modus ponens* se sigue del silogismo disyuntivo, en efecto:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &\equiv \neg A \vee B \qquad (1.15)\\ A &\equiv \neg(\neg A) \qquad (1.16)\\ \therefore B & \qquad (1.17) \end{aligned}$$

Claramente con $\neg A \vee B$ y la equivalencia de A con la doble negación $\neg(\neg A)$ se puede usar el silogismo disyuntivo para obtener B.

La validez del *modus ponens* está entonces determinado por la validez del silogismo disyuntivo, cuya validez justificaremos en seguida. Primero establecemos un procedimiento para escribir el silogismo disyuntivo y el *modus ponens* en una sola línea. El primero y segundo renglones se unen con una $\wedge$ usando paréntesis para no confundir las proposiciones, mientras el último renglón (el que lleva el signo $\therefore$) se une por medio de una implicación lógica. Observemos la tabla de verdad de esta implicación:

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \wedge \neg A$	$[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Tabla 1.8: El silogismo disyuntivo es tautología.

Puede observarse que la última columna del tabla 1.8 tiene el número "1" en cada una de sus entradas, lo cual quiere decir que independientemente de los valores de verdad de A y B, las proposiciones componentes, la proposición $[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$ es siempre verdadera. Una proposición cuya tabla de verdad contiene solamente el valor "1" al haber sido agotadas todas las posibilidades de los valores de verdad de las proposiciones componentes se llama *tautología*. El lector debe comprobar que las siguientes proposiciones son tautologías

$$\begin{aligned} S &\vee \neg S \qquad (1.18)\\ ((A \Rightarrow B) \wedge A) &\Rightarrow B \qquad (1.19)\\ (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \qquad (1.20)\\ \neg(\neg A) &\Leftrightarrow A. \qquad (1.21) \end{aligned}$$

Puede observarse que (1.18) donde una posible interpretación es la expresión "ser o no ser" incluye todos los casos posibles y por lo tanto es universalmente válida pero se recomienda construir la tabla de verdad para verificar que efectivamente es una tautología. Por otra parte (1.19) es el silogismo *modus ponens* escrito en una línea mediante una implicación lógica y una conjunción, al ser tautología, lo aceptaremos como un argumento válido. Finalmente (1.20) y (1.21) son equivalencias lógicas en donde se ha intercambiado el signo "$\equiv$" por "$\Leftrightarrow$", al construir la tabla de verdad puede comprobarse que las equivalencias lógicas son tautologías.

Para definir lo que entenderemos por un *absurdo* o contradicción construyamos la tabla de verdad de $A \wedge \neg A$: Véase que al contrario de la tautología en la columna de $A \wedge \neg A$ hay solo

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
1	0	0
0	1	0

Tabla 1.9: Tabla de verdad de "$A \wedge \neg A$" .

ceros. Es decir, habiendo sido agotados todos los posibles valores de verdad de las proposiciones componentes, la proposición es universalmente falsa, las proposiciones con esta propiedad las llamaremos absurdos o contradicciones o proposiciones contradictorias.

1.6.1 Argumentación por reducción al absurdo

Recapitulando, aceptaremos como argumentaciones válidas (o como componentes de argumentaciones válidas) aquellas proposiciones que sean tautologías. Una argumentación válida extensamente usada es la *argumentación por reducción al absurdo* o *principio de contradicción* que puede describirse brevemente así: si de $\neg A$ se sigue un absurdo cualquiera $P \wedge \neg P$, se puede concluir A. Este principio es válido dado que la proposición

$$(\neg A \Rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow A \tag{1.22}$$

es una tautología, como ahora verificamos

A	$\neg A$	$P \wedge \neg P$	$\neg A \Rightarrow (P \wedge \neg P)$	$(\neg A \Rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow A$
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1

Tabla 1.10: Tabla de verdad de principio de contradicción.

Dado que la proposición (1.22) es tautología, si se puede demostrar la validez de una proposición de la forma $\neg A \Rightarrow (P \wedge \neg P)$, entonces mediante el *modus ponens* se concluye A.

■ **Ejemplo 1.2 (ejemplo del principio de contradicción).** El ejemplo más clásico, bello y simple posible es la demostración de Euclides de la infinitud de los números primos (Libro 9 proposición 20)[8]: ■

Proposición 1.6.1 Los números primos[3] son infinitos.

Demostración. Supongamos contrariamente a lo que se desea demostrar que los números primos son finitos en número y sea p_n el mayor de los números primos, bajo esta hipótesis. Considere el número p construido como el producto de todos los números primos más el número 1, es decir, sea $p = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p_n) + 1$. Entonces p no es divisible por ningún primo, ya que, si lo fuera, al ser dividido por cada primo se obtendría residuo 1 indefectiblemente. Por tal motivo p es necesariamente primo lo que constituye una contradicción ya que $p > p_n$ y p_n, por hipótesis, sería el mayor de los primos. Por lo tanto, la hipótesis de que los primos son finitos no puede ser verdadera y se concluye (por el principio de contradicción) que los números primos son infinitos.□

El lector no debe tener dificultad para identificar A con la proposición "los números primos son infinitos" y P con "hay un primo mayor que todos" y $\neg P$, con la proposición "no hay un primo mayor que todos". Así se ha obtenido $\neg A \Rightarrow (P \wedge \neg P)$ de tal forma que mediante *modus ponens* en (1.22) se obtiene A, es decir, los primos son infinitos.

También, mediante el principio de contradicción, si se desea demostrar que $A \Rightarrow B$ esto puede hacerse al tomar como hipótesis $A \wedge \neg B$ y si de esto se sigue un absurdo cualquiera $P \wedge \neg P$, con esta proposición puede concluirse que $A \Rightarrow B$. Para este fin, primero verificamos que

$$((A \wedge \neg B) \Rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \tag{1.23}$$

es tautología con las dos tablas siguientes

A	B	$P \wedge \neg P$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (P \wedge \neg P)$
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1

Tabla 1.11: Reducción al absurdo es tautología primera parte.

$(A \wedge \neg B) \Rightarrow (P \wedge \neg P)$	$A \Rightarrow B$	$((A \wedge \neg B) \Rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
1	1	1
0	0	1
1	1	1
1	1	1

Tabla 1.12: Reducción al absurdo es tautología conclusión.

Una vez que se obtiene que la proposición (1.23) que se encuentra en la última columna de la tabla 1.12 es tautología, se puede justificar la argumentación por reducción al absurdo con un *modus ponens*:

1. $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (P \wedge \neg P)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$, es válido por ser tautología.
2. $(A \wedge \neg B) \Rightarrow (P \wedge \neg P)$ (si se ha verificado su validez previamente).
3. $A \Rightarrow B$ *modus ponens* con los pasos 1 y 2 anteriores.

Ejemplo de demostración por reducción al absurdo

La reducción al absurdo se conoce y ha sido utilizada desde siglos antes de la invención de la lógica matemática[4], y fue usada extensamente por los matemáticos griegos. Un ejemplo particularmente interesante y que trascendió la época en la que fue descubierta es la proposición 9 del libro 10 de los Elementos de Euclides [8]. En notación moderna y con conceptos modernos, la proposición de Euclides puede escribirse como:

Proposición 1.6.2 Si x es un número tal que $x^2 = 2$ entonces no existen p, q números naturales tales que $x = \frac{p}{q}$.

Demostración. Supongamos que $x^2 = 2$ y que, contrariamente a lo que se quiere demostrar, existen números naturales tales que $x = \frac{p}{q}$. Se puede suponer además que la fracción $x = \frac{p}{q}$ está escrita de tal forma que p y q no tienen factores comunes, ya que en un cociente los factores comunes siempre pueden cancelarse entre sí. Se tiene entonces que $p^2 = 2q^2$, es decir, p^2 es par. Pero p^2 solo puede ser par si p lo es, y así p es de la forma $p = 2m$. Tenemos $p^2 = (2m)^2 = 2q^2$ y puede concluirse que $q^2 = 2m^2$, lo que quiere decir que q^2 y por lo tanto, q es par. Se concluye que p y q son pares, lo que contradice que no tienen factores en común. □

La trascendencia de la proposición anterior consiste en que, si existe raíz de dos, ésta no puede ser racional, lo cual rompe los esquemas del enfoque pitagórico de la naturaleza, que afirmaba que el universo estaría regido por los números enteros. Además, paradójicamente para los pitagóricos, raíz de dos existe, ya que es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con ambos catetos de medida uno, como lo puede comprobar el lector interesado ¡por medio del teorema de Pitágoras!

Al revisar la estructura del razonamiento en la demostración de la proposición anterior notamos que si A es la proposición "$x^2 = 2$" y B es la proposición "no existen p, q enteros tales que $x = \frac{p}{q}$

[3]Los *números primos* son los números naturales mayores que 1 que solo son divisibles por sí mismos y por 1.

[4]La invención de la lógica matemática se atribuye a George Boole en el siglo XIX a partir del libro de su autoría "An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities".

al suponer $A \wedge \neg B$ se llega a que p,q tienen factores comunes (P) y al mismo tiempo no tienen factores comunes ($\neg P$), lo cual es una contradicción ($P \wedge \neg P$). De esta forma se concluye que la implicación de la proposición es verdadera ($A \Rightarrow B$). Además dado que raíz de dos existe por el teorema de Pitágoras (se cumple A), se concluye B, es decir, x no es racional, mediante *modus ponens* aplicado a la proposición $A \Rightarrow B$.

El ejemplo muestra como la estructura lógica de la argumentación por reducción al absurdo es la columna vertebral de la demostración de Euclides del hecho de que raíz de dos no es racional, pero al mismo tiempo el ejemplo muestra que *por ningún motivo la demostración se puede reducir únicamente a la lógica*. La parte esencial es demostrar que el número x no es cociente de enteros lo cual está fuera de la mera estructura lógica de la demostración, es algo mucho más sutil que la mera lógica.

Similarmente, la demostración de que los primos son infinitos tiene como sostén el principio de contradicción, pero de ninguna manera la estructura lógica basta para obtener la demostración. La forma en la cual se obtiene una contradicción partiendo de la negación de la infinidad de los primos es independiente del puro formalismo lógico y de hecho es la parte primordial de la demostración.

1.7 Revisando las falacias

En esta sección estudiaremos algunas falacias en las que caen algunos principiantes durante el aprendizaje de las matemáticas, pero antes se requiere comprobar que, al igual que el silogismo disyuntivo, el *modus ponens* es tautología. Primero, escribimos en una sola línea la argumentación correspondiente al *modus ponens*:

$$((A \Rightarrow B) \wedge A) \quad \Rightarrow \quad B \tag{1.24}$$

Debemos mostrar que las tablas de verdad correspondientes a (1.24) tienen solamente valores “1”, independientemente de los valores de verdad de sus componentes

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Tabla 1.13: El silogismo *modus ponens* es tautología.

Falacia de afirmar el consecuente. Considere ahora la siguiente argumentación

$$A \quad \Rightarrow \quad B \tag{1.25}$$
$$B \tag{1.26}$$
$$\therefore A \tag{1.27}$$

Sustituyendo A por “x es un número par” y B por “x es un número”, entonces (1.25) en la estructura anterior puede traducirse como “si x es un número par entonces x es un número”, y (1.26) “x es un número”, y de allí concluir equivocadamente (1.27): “por lo tanto x es un número par”. Con tal sustitución como ejemplo debe ser claro que el argumento anterior no es válido, ya que si x es un número, x puede ser impar o ni par ni impar (por ejemplo, $\sqrt{2}$ no es par ni impar). Al escribir en forma de renglón el razonamiento (1.25) a (1.27) podemos verificar que efectivamente, a diferencia de, por ejemplo, el *modus ponens*, no es una tautología en absoluto: $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$. Para ello observamos que en el penúltimo renglón del tabla 1.14 aparece un cero en la columna correspondiente a $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$ con lo cual se muestra que tal proposición *no es tautología.* Pero el análisis de la tabla dice más, el tercer renglón dice que la argumentación es falsa en el caso de que A sea falsa y B verdadera, es decir, en el ejemplo, cuando no se cumple que x sea par, que como ya vimos, claramente evidencia la falsedad del razonamiento. De esta manera la tabla de verdad nos indica la forma de construir un ejemplo que evidencie la falsedad de la argumentación. Un ejemplo con estas características se llama *contraejemplo*.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge B$	$((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

Tabla 1.14: Falacia de afirmar el consecuente.

Petición de principio

Un tipo de falacia un poco mas elaborada se conoce como *petición de principio*. Esta falacia puede ilustrarse con una equivocada presentación del teorema de Pitágoras[5]. Sea A la proposición "Si X es rectángulo" y B: " $a^2+b^2=c^2$". Supongamos que alguien quiere demostrar que $A \Rightarrow B$ y para ello supone válida A y B. Pero si supone válido lo que desea demostrar, es decir B, en tal caso *no hay nada que demostrar*. Cuando se desea demostrar algo a partir de ciertas hipótesis, no puede considerarse el consecuente como hipótesis. ¡Sin embargo, si el autor de tal falacia desea demostrar la corrección de su razonamiento con una tabla de verdad lo logrará!. Efectivamente, observe la siguiente tabla

A	B	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$(A \wedge B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Tabla 1.15: Falacia de petición de principio.

La presunta demostración del teorema de Pitágoras con esta argumentación falaz dice así: Supongamos que X es triangulo rectángulo y $a^2+b^2=c^2$ entonces si X es triángulo rectángulo implica $a^2+b^2=c^2$. En este caso la palabra "tautología" adquiere el significado de "perogruyada", es decir, una afirmación vacía que no dice nada, aunque es totalmente verdadera. Este ejemplo muestra que, llevada al extremo, la lógica matemática no sirve para hacer matemáticas *si es usada de esta manera.* La validez de una afirmación como la del teorema de Pitágoras requiere de un contexto, una axiomática y de las relaciones sutiles entre las partes de un triángulo dentro de un contexto específico. Nunca puede reducirse la matemática a la pura lógica.

Una forma que debería ser más evidente de la petición de principio es ilustrada con un uso incorrecto de la siguiente proposición $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$, comprobemos primero que se trata de una tautología (vea la tabla 1.16):

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Tabla 1.16: Segunda forma envuelta en una petición de principio.

La forma en la que se usa la tautología $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ en la petición de principio es la siguiente. Se desea demostrar que $Q \Rightarrow P$, veamos paso a paso: 1) el sujeto falaz para tal fin ¡supone válida P! (suponer válido lo que se desea demostrar es lo que debe siempre evidenciar la petición de

[5]Claramente la proposición "Si X es triángulo rectángulo, entonces $a^2+b^2=c^2$" **no es el teorema de Pitágoras** (¿por qué?), esta proposición se usa como ejemplo de una argumentación sin validez, como debe constatarse.

principio) 2) luego, además supone Q (como lo muestra la tabla en este caso se puede suponer cualquier Q, ¡cualquiera sea verdadera o falsa!) 3) entonces se procede por *modus ponens*:

1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ tautología válida.
2) P ¡hipótesis equivocadamente añadida en la petición de principio!
3) $Q \Rightarrow P$ *modus ponens* con 1) y 2).
4) Q hipótesis adicional.
5) P *modus ponens* con 3) y 4).

El razonamiento anterior es lógicamente válido pero también totalmente inútil, si se tiene P, *ya se tiene* P, y por lo tanto, *no hay nada más que agregar.* El lector puede confirmar que efectivamente $P \Rightarrow P$ es una tautología y por lo tanto, una vez que se sabe verdadero P, se sabe verdadero, lo cual no es de ninguna utilidad para desarrollar proposiciones nuevas, como debería de ser evidente. Sin embargo, la petición de principio es algo que se les ocurre a los principiantes con frecuencia al intentar demostrar algo, por lo que se sugiere al lector en tales condiciones que esté siempre atento.

Para terminar esta discusión se puede insistir, como moraleja, que la matemática de ningún modo se reduce a la lógica simbólica. Si bien la lógica provee una estructura y un lenguaje adecuado para la matemática, toda implicación en matemáticas depende inseparablemente del contenido de las proposiciones y de las relaciones entre estas dentro de una axiomática determinada. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Si bien puede escribirse en la forma $P \Rightarrow Q$, la validez de la implicación depende irremisiblemente de las definiciones de triángulo rectángulo, catetos e hipotenusa y de la validez de los axiomas de la geometría euclidiana, pero nunca de la pura implicación lógica. Por estos motivos la petición de principio, en ninguna de sus formas, se acepta como un razonamiento válido en matemáticas, a pesar de estar erróneamente asociado con alguna tautología.

1.8 Uso del "⇔" en las definiciones matemáticas

Las definiciones son parte sustancial de las matemáticas formales. En una definición, a partir de conceptos o términos que no se definen, llamados *conceptos primitivos*, se elaboran nuevos conceptos (o bien, se elaboran a partir de conceptos ya definidos o dados). En general, se construye la estructura lógica de la mayoría de las definiciones en matemáticas con implicaciones lógicas e idealmente con el conectivo "si y solo si", aunque seguramente el lector podrá encontrar en la literatura definiciones que caen fuera de este lineamiento.

Para distinguir las definiciones de las consecuencias lógicas generadas a partir de axiomas, teoremas, etcétera, se usará, cuando sea pertinente, la representación simbólica:

$$A \overset{def}{\Leftrightarrow} B,$$

lo cual se lee "A si y solo si B, por definición".

■ **Ejemplo 1.3** Un número $x \in \mathbb{N}$ es un número par si y solo si $x = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Claramente la doble implicación "⇔" quiere decir que si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2m$, diremos que x es par y, recíprocamente, si se dice que x es par, necesariamente existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2m$. ■

Muchas definiciones en matemáticas han sido construidas solo después del trabajo de generaciones y no son en absoluto triviales y no se espera que el lector pueda concebirlas espontáneamente, por ejemplo, la definición de límite de una sucesión:

■ **Ejemplo 1.4** Un número ℓ es el límite de una sucesión $\{a_n\}$, cuando n tiende a infinito, si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $|a_n - \ell| < \varepsilon$. ■

N **Nota didáctica.** Para el ejemplo 1.4, *no hay simplificación didáctica posible del concepto que envuelve la definición*, toda simplificación de tal definición es una distorsión o falsificación. La existencia de conceptos complejos marca la diferencia entre la matemática elemental y la matemática superior que requiere de un saber especializado y nada trivial. No se requiere que en este momento que el posible lector comprenda cabalmente los ejemplos de definiciones que se han dado.

1.8.1 Demostraciones en lógica

Esta sección puede omitirse en un primer acercamiento a la lógica ya que el material subsecuente no depende en absoluto de lo aquí tratado. Sin embargo para quienes deseen seguir esta sección deben saber que puede ayudar a comprender lo que significa una demostración matemática, en general, a pesar de que las demostraciones que se verán son muy rudimentarias comparadas con cualquier demostración de matemáticas de cualquier otro capítulo de este libro. Una demostración, en lógica, es una lista donde aparecen como elementos de la lista, hipótesis, así como proposiciones obtenidas por *modus ponens*; en la lista pueden ser incorporadas tautologías y equivalencias lógicas en cualquier momento que se desee. Lo principal, es que la proposición que se desea demostrar, aparezca en el último renglón de la lista como consecuencia de todos los renglones anteriores usados, todos los cuales deben ser empleados en algún momento de la demostración (de otra forma deben ser omitidos). También debe justificarse cada paso de la demostración identificando el rol que juega cada renglón en la demostración. A tal lista, cuando es correcta suele llamársele *argumentación* o bien demostración formal. Pueden introducirse las demostraciones formales de lógica *a manera de un juego*, utilizando solo las siguientes reglas.

Reglas para demostraciones en lógica

Regla 1. Si en una demostración aparecen las proposiciones P y $P \Rightarrow Q$ en renglones distintos, puede escribirse Q en otro reglón.
Regla 2. Si en una demostración aparecen las proposiciones P y Q en renglones distintos, se puede añadir el renglón $P \wedge Q$ en la demostración.
Regla 3. Se puede introducir en cualquier momento, como nuevo renglón, cualquier tautología lógica.
Regla 4. Se puede sustituir cualquier renglón por una equivalencia lógica de tal renglón.
Regla 5. Se puede introducir en cualquier momento, como nuevo renglón, cualquier proposición, lema, corolario, etcétera, que se haya demostrado con anterioridad.

N **Nota.** La *regla 1* corresponde, por supuesto, al *modus ponens* como seguramente notó el lector. La *regla 2*, se llama *conjunción*

A continuación se muestran algunos ejemplos de demostraciones formales.

■ **Ejemplo 1.5** Con las hipótesis o premisas $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ y $P \wedge Q$ demuestre R. ■

Solución. Se presenta la argumentación del ejemplo 1.5 en la tabla 1.21.

Afirmaciones	**Razones**
1. $(P \wedge Q) \Rightarrow R$	1. Premisa.
2. $P \wedge Q$	2. Premisa.
3. R	3. Se concluye por la **regla 1**, con (1) y (2).

Tabla 1.17: Tabla correspondiente al ejemplo 1.5 .

■ **Ejemplo 1.6** Con las premisas $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ y A, demuestre C. ■

Solución. La solución se muestra en la tabla 1.18

Afirmaciones	**Razones**
1. $A \Rightarrow B$	1. Premisa.
2. $B \Rightarrow C$	2. Premisa.
3. A	3. Premisa.
4. B	4. **Regla 1**, con (1) y (3).
5. C	5. **Regla 1**, con (2) y (4).

Tabla 1.18: Tabla correspondiente al ejemplo 1.6 .

■ **Ejemplo 1.7** Demuestre el *modus tollendo tolllens*, es decir, mediante las premisas $P \vee Q$ y $\neg P$, demuestre Q ■

Solución. La solución se muestra en la tabla 1.19

Afirmaciones	**Razones**
1. $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$	1. Tautología, se añade por la **regla 3.**
2. $P \vee Q$	2. Premisa.
3. $\neg P$	3. Premisa.
4. $(P \vee Q) \wedge \neg P$	4. **Regla 2**, con (2) y (3).
5. Q	5. **Regla 1**, con (1) y (4).

Tabla 1.19: Demostración del *modus tollendo tollens* del ejercicio 1.7 .

■ **Ejemplo 1.8** Demuestre la regla de simplificación la cual dice que de $P \wedge Q$ se puede concluir P. Demuestre que también se puede concluir Q ■

Afirmaciones	**Razones**
1. $P \wedge Q$	1. Premisa.
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$	2. Tautología (**regla 3**).
3. P	3. Se concluye por la **regla 1**, con (1) y (2).

Tabla 1.20: Tabla correspondiente a la regla de simplificación del ejemplo 1.8 .

La segunda parte de la demostración se deja como ejercicio.

■ **Ejemplo 1.9** Demuestre que $P \Rightarrow \neg(\neg P)$. ■

Afirmaciones	**Razones**
1. $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$	1. Equivalencia lógica (**regla 4**).
2. $[P \Rightarrow \neg(\neg P)] \wedge [\neg(\neg P) \Rightarrow P]$	2. Equivalencia lógica en (1).
3. $P \Rightarrow \neg(\neg P)$	3. Simplificación en (2) (ej. 1.8, por la **regla 5**).

Tabla 1.21: Tabla correspondiente al ejemplo 1.9 .

1.9 Ejercicios del capítulo 1

Este libro tendrá tres niveles de ejercicios: a) básico, el cual solo requiere de conocimiento de las operaciones elementales con números y el uso de tablas de verdad; b) medio, el cual requiere que el lector trabaje los contenidos del texto; c) reto, el cual incluirá problemas que pueden ser un poco mas difíciles que los anteriores y también más interesantes.

1.9.1 Nivel básico

La demostración de que los primos son infinitos no tendrá sentido para quien no haya trabajado nunca con ellos, tampoco será comprendido a cabalidad que raíz de 2 sea irracional para quien no comprenda lo que esto implica.

1. Compruebe mediante tablas de verdad las equivalencias de las proposiciones (1.6) a (1.11) y además las siguientes proposiciones:

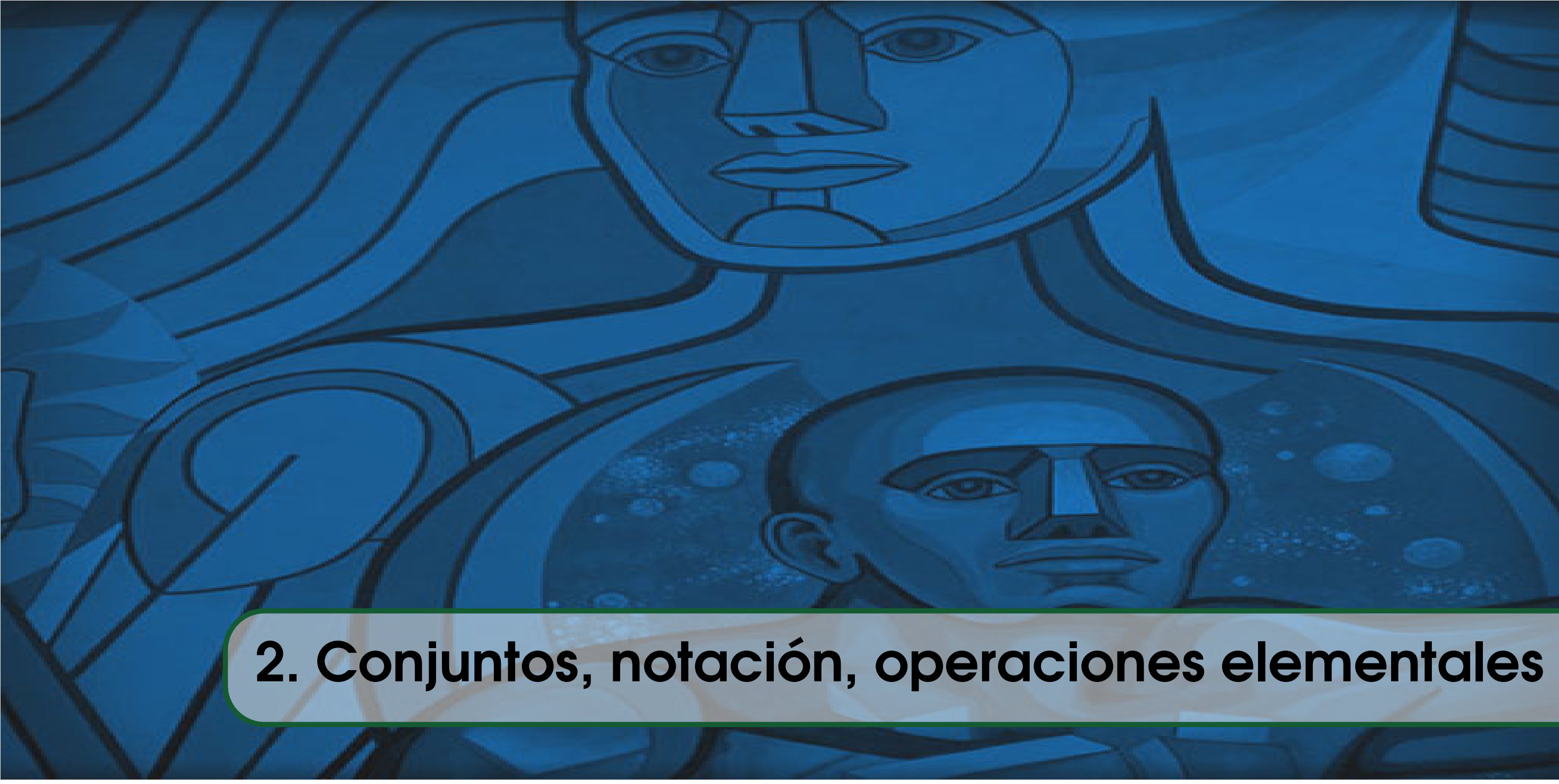
$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B. \tag{1.28}$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A. \tag{1.29}$$
$$A \vee B \equiv B \vee A. \tag{1.30}$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C. \tag{1.31}$$
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C. \tag{1.32}$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B. \tag{1.33}$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B. \tag{1.34}$$

Sin el aprendizaje de las tautologías de este ejercicio no será posible entender lo más básico de las operaciones de conjuntos.

2. Demuestre que son tautologías las implicaciones *principales* (denotadas por flechas largas "$\Longrightarrow$" a diferencia de las más cortas"$\Rightarrow$") siguientes
   a) $(P \wedge Q) \Longrightarrow P$.
   b) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$.
   c) $P \Longrightarrow (P \vee Q)$.
3. Haga una lista de los números primos entre 1 y 100.
4. Se demostró que $\sqrt{2}$ es irracional ¿qué puede deducirse de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$? ¿La irracionalidad de la raíz de dos se manifiesta en la expansión decimal del número?
5. Muestre que si n^2 es un número par necesariamente n es par. Muestre que si n es impar n^2 es impar.
   Indicación. Recuerde que un número impar necesariamente es de la forma $2m+1$ con m cualquier número natural.

1.9.2 Nivel intermedio

6. ¿Cuántos renglones tiene la tabla de verdad de una proposición con tres proposiciones distintas como componentes A, B y C? Muestre que las siguientes proposiciones son tautologías.
   a) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$.
   b) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$.
7. Demuestre las siguientes proposiciones:
   a) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$.
   b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$.
   c) Con la hipótesis $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (R \wedge \neg R)$ demuestre $P \Rightarrow Q$.
   Indicación: esta tautología es la base del principio de reducción al absurdo. Utilice la tautología $[S \Rightarrow (R \wedge \neg R)] \Rightarrow \neg S$, además de una sustitución adecuada para poder utilizar las hipótesis.
   d) Demuestre la equivalencia lógica $(P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$.
   e) Demuestre $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.
   f) Demuestre $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.



2. Conjuntos, notación, operaciones elementales

El tema de conjuntos fue desapareciendo de la enseñanza elemental a partir de los 80 del siglo XX, a pesar de haber sido incorporado fervorosamente al currículo oficial durante los 60 y 70. Este hecho ha provocado un desfase entre lo que los profesores esperan que sepan los estudiantes y lo que en realidad saben. Ante dicho panorama se optó aquí por introducir el tema de conjuntos suponiendo que el posible lector de este capítulo lo enfrente por primera vez. El objetivo de este capítulo es familiarizar al lector con las ideas más básicas de conjuntos y *no es objetivo de este libro introducir la teoría en su forma más general posible.*

2.1 Introducción

En este enfoque, no se definirán explícitamente los siguientes conceptos: *conjunto, pertenecer* o *estar en, elemento*, llamados conceptos *primitivos*. Sin embargo, la amplitud y significado de estos conceptos quedará determinada una vez que se enuncien formalmente los axiomas de la teoría de conjuntos que estudiaremos. Por el momento, serán aceptadas cualesquiera de las ideas intuitivas asociadas a los conceptos primitivos que quien lea el presente texto tenga, sin mayor detrimento. A continuación se presenta la notación que se utilizará a lo largo del libro.

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas del alfabeto griego o latino indistintamente $A, B, C, \ldots \Omega, \Sigma$, etcétera o con símbolos especiales como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. Los elementos de los conjuntos se denotarán con minúsculas $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta$, etcétera. El hecho de que un elemento, digamos a, esté o pertenezca a un conjunto A, será denotado con el símbolo $\in$ por medio de la fórmula

$$a \in A \tag{2.1}$$

La negación de la fórmula (2.1), es decir, el hecho de que *a no está* en A (o no pertenezca a A), o sea, la fórmula $\neg(a \in A)$ será simbolizada por

$$a \notin A \tag{2.2}$$

El símbolo $\in$ es una estilización de la letra *e* y de esta forma se abrevia la palabra latina *est* la cual significa “ser” o “estar” en latín, por lo que los hablantes de la lengua hispana pueden pensar el símbolo $\in$ como una abreviación de la palabra “está” y de esta forma leer la fórmula (2.1) como: *a* está en A. Aunque también se admite leer la fórmula como “*a* pertenece a A”, o bien, “*a* es elemento de A” y hasta la mínima frase “*a* en A”, es usada con frecuencia.

Un símbolo especial es $\emptyset$, el cual se utiliza para denotar un conjunto especial que no tiene elementos, llamado *conjunto vacío* el cual se estudiará con detalle más adelante.

Los conjuntos pueden definirse escribiendo la lista de los elementos que lo forman, por ejemplo $A = \{a,b,c\}$, es el conjunto cuyos elementos son a,b y c. Pero también, los conjuntos pueden definirse a partir de una propiedad $P(x)$ que satisfagan ciertos x. Por ejemplo, si S es el conjunto de los números naturales x de la forma $3x+1$, se tiene que $S = \{1,4,7,10,\dots\}$, donde los tres puntos suspensivos significan que la colección de números que forman el conjunto no termina y los elementos del conjunto se determinan sustituyendo $x = 0,1,2,\dots$ en la fórmula $3x+1$, sucesivamente.

2.2 Construcción de nuevos conjuntos a partir de un conjunto dado

Dado un conjunto se pueden construir nuevos conjuntos especificando una propiedad que deben cumplir los elementos del conjunto dado para formar el nuevo. El tipo de propiedades consideradas en este enfoque elemental son proposiciones del tipo "x es número par", es decir, proposiciones que describen características de objetos de un conjunto dado que pueden verificarse sin ambigüedad.

■ **Ejemplo 2.1** Dado el conjunto $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ se define el conjunto $P = \{2,4,6,\dots\}$ como el conjunto con los elementos de $\mathbb{N}$ que son múltiplos de 2. Es decir, el conjunto P, de números pares, puede definirse como el conjunto de elementos de $m \in \mathbb{N}$ tales que $m = 2n$ para $n \in \mathbb{N}$, lo cual se denota

$$P = \{m : m = 2n, n \in \mathbb{N}\} \tag{2.3}$$

En la fórmula que define al conjunto P en (2.3) con los dos puntos ":", se abrevia la frase "tal que" o la frase en plural, "tales que"; finalmente, se da la propiedad o fórmula que define el nuevo conjunto a partir del anterior, en el ejemplo, $m = 2n$ para toda n que está en $\mathbb{N}$. ■

Este ejemplo elemental da la pauta para introducir los cuantificadores existenciales $\exists$, el cual significa "existe", y $\forall$, el cual significa "para todo". En general, los conjuntos más simples que utilizaremos podrán ser formados utilizando los cuantificadores existenciales recién presentados de una forma rudimentaria, es decir sin profundizar en los detalles finos de la lógica simbólica. El símbolo $\exists$ es una "E" reflejada y abrevia la palabra "existe" y el símbolo $\forall$ es una A invertida que abrevia la palabra inglesa "all", que significa "todo"[1] . Partiendo de un conjunto dado A, se formarán conjuntos nuevos con las oraciones:

i) "toda $x \in A$, cumple $P(x)$", o en forma de proposición lógica "$\forall x(x \in A \Rightarrow P(x))$", lo cual se abrevia: "$\forall x \in A, P(x)$".
ii) "existe $x \in A$ que cumple $P(x)$", o en forma de proposición lógica "$\exists x(x \in A \wedge P(x))$", lo cual se abrevia: "$\exists x \in A, P(x)$".

N **Nota.** Varias observaciones son pertinentes en este momento. La forma abreviada es la que se usa en la teoría de conjuntos aún con sus inconvenientes (aunque son proposiciones lógicas diferentes, una es una implicación y otra una conjunción, se escriben similarmente en la forma abreviada).

En este enfoque elemental trataremos de evitar la notación abreviada y en su lugar usaremos, o bien las expresiones en español o bien la forma de proposición lógica. Esto es conveniente para quienes tienen poca experiencia en teoría de conjuntos. Por ejemplo para escribir la negación de las proposiciones conviene no escribirlas en forma abreviada, así la negación de i) y ii) son formal y respectivamente

$$\neg(\forall x(x \in A \Rightarrow P(x))) \equiv \exists x(x \in A \wedge \neg P(x)) \tag{2.4}$$

$$\neg(\exists x(x \in A \wedge P(x))) \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow \neg P(x)). \tag{2.5}$$

[1] Se debe tener en cuenta que la frase "para todo" a veces debe escribirse como "para cada", por ejemplo en la definición de límite: Para cada ε existe una δ, etcétera. "A cada ε le corresponde una δ" es ligera y sutilmente diferente a "Para todo ε existe una δ" (¿la misma δ para todo ε?).

Para la cabal comprensión de (2.4) y (2.5) se deben tener en cuenta las equivalencias $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ y $\neg(P \wedge Q) \equiv P \Rightarrow \neg Q$ (las cuales pueden ser verificadas con tablas de verdad) y las equivalencias entre los símbolos $\neg\exists \equiv \forall$ y $\neg\forall \equiv \exists$.

■ **Ejemplo 2.2** Partiendo de $\mathbb{N}$, sea S el conjunto de todos los $x \in \mathbb{N}$ tales que $x-1=0$. Se tiene que $S=\{1\}$, es decir el conjunto cuyo único elemento es el número 1. En símbolos, $S=\{x \in \mathbb{N} : x-1=0\}=\{1\}$. ■

■ **Ejemplo 2.3** En este ejemplo se ve como el conjunto vacío aparece de manera natural. Sea $L=\{x \in \mathbb{N} : x+1=0\}$. Claramente la relación $x+1=0$ se cumple si y solo si $x=-1$, pero $-1 \notin \mathbb{N}$. Por lo tanto dado que ningún elemento en $\mathbb{N}$ satisface la relación que define a L se concluye que $L=\emptyset$. ■

2.2.1 El universo del discurso

La teoría de conjuntos en general no requiere que sea especificado un conjunto en particular y puede desarrollarse con una gran generalidad y nivel de abstracción. Para el lector interesado en acercarse a tal enfoque, un poco más avanzado que el que se presenta aquí, se sugiere el libro de Halmos [11] el cual, a pesar de los años que han pasado desde su publicación, se mantiene como insuperable a nivel elemental. En el presente enfoque, dado que el lector se supone familiarizado con los números $0,1,2,3,\dots$ llamados *números naturales*, supondremos como un hecho la existencia del conjunto de los números naturales. La más básica idea asociada con el concepto de conjunto se produce mediante el proceso de abstracción realizado al pensar, por ejemplo, la multiplicidad de números naturales $0,1,2,\dots$ como una unidad, llamada conjunto, en este ejemplo $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$. Así es como presenta Cantor [4] (pag. 85) la idea intuitiva de conjunto o agregado: "Por un 'conjunto' (Menge) entenderemos cualquier colección en un todo"). Así al abstraer la colección de números naturales en un todo, podemos considerar como *existente* el conjunto $\mathbb{N}$. También se puede partir del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Los conjuntos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{N}$ pueden ser sustituidos en la teoría general por un conjunto que se presuponga existente, llamado *universo del discurso* y denotado por $\mathscr{U}$. El suponer prejuiciosamente que $\mathscr{U}$ puede abarcar todas las cosas existentes lleva a bien conocidas paradojas, las cuales trataremos al final de este capítulo. *No existe un conjunto universal* en el sentido de "un conjunto que contenga todo lo pensable", por lo que $\mathscr{U}$ debe tener ciertas limitaciones. Por otra parte, limitar el universo de discurso a $\mathbb{R}$, si se está interesado en los números, no llevará a ningún error, pero el lector interesado debe tener en mente que *no se usa* ninguna propiedad de los números (excepto el uso de los signos "$=,\neq$" en las proposiciones) para definir las operaciones con conjuntos que se presentarán, por lo que quien así lo desee puede sustituir $\mathbb{R}$ por $\mathscr{U}$ si eso satisface su sed de generalidad.

Dado el enfoque elemental de este libro se harán algunas concesiones y supondremos que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es conocido por el lector, aunque no se supondrá que es un experto. Basta por el momento que el lector sepa que los elementos de $\mathbb{R}$ son números x expresados con decimales, es decir, números de la forma

$$x=\pm\left(a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\cdots\right)$$

donde cada número $a_{\pm n}$ es un número natural entre cero y nueve. Además se requiere que el lector tenga alguna experiencia con las operaciones básicas de números reales[2], aunque no se supondrá que se comprende cabalmente el significado de una suma infinita (indicada con tres puntos suspensivos después del signo $+$ colocado al lado de los coeficientes de la forma a_{-n} con $n=1,2,\dots$).

■ **Ejemplo 2.4** $x=1.333333\dots$, $x=-3.1415926\dots$, $x=1.0000000\dots$. ■

Ahora es posible enunciar el primer axioma de teoría de conjuntos.

[2]En la teoría general de conjuntos $\mathbb{R}$ se construye, no se toma como existente. Una posible construcción se hace partiendo del conjunto vacío, se construyen primero los naturales a partir de ellos los racionales y etcétera. Es decir de la "nada" del conjunto vacío se construyen los números reales. Para una construcción teórica de los naturales se puede ver el libro de Halmos *op. cit.*, en este enfoque no construiremos los conjuntos de números.

Axioma 2.1 (axioma de especificación en $\mathbb{R}$). Para toda condición $P(x)$, existe un conjunto formado por todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $P(x)$. En símbolos, existe el conjunto $A = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge P(x)\}$.

N El carácter de una "condición" $P(x)$ en $\mathbb{R}$ se reduce a una relación numérica que tenga sentido. Una "condición" que no tiene sentido es por ejemplo $= x, y$ dado que no se establece una relación entre x y ningún otro elemento y de $\mathbb{R}$, es decir, no se establece una fórmula "bien formada".

Establecido el axioma 2.1 se puede enunciar el primer teorema de este enfoque.

Teorema 2.2.1 (existencia del conjunto vacío). Existe un conjunto, denotado $\emptyset$, el cual no tiene elementos.

Demostración. Considere la condición $P(x)$ dada por $x \neq x$. Entonces si se define $\emptyset = \{x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x \neq x)\}$, tal conjunto existe por el axioma de especificación. Además $x \in \emptyset$ implica $x \neq x$ y $x \in \mathbb{R}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, para toda x , $x \notin \emptyset$, (ya que de otra forma x tendría que satisfacer una condición contradictoria), se concluye que el conjunto vacío no tiene elementos. □

N **Nota.** Otros acercamientos a la teoría de conjuntos, por ejemplo el de Suppes [21], suponen primero la existencia del conjunto vacío[3] y a partir de este se construyen todos los demás conjuntos y los números naturales. En nuestra aproximación (un poco más cercana a la de Halmos *op. cit.*) no construiremos los números. En las axiomáticas que usan el axioma de especificación en realidad se requiere la existencia de al menos un conjunto y su existencia se presupone ya sea de manera informal (como por ejemplo lo hace Halmos *op. cit.*) o de manera formal (como lo hace Suppes *op. cit.*). En nuestro enfoque suponemos la existencia del conjunto de números reales, ya que nuestro objetivo es solamente introducir las operaciones básicas de conjuntos y presentar un primer acercamiento a la teoría.

2.3 Subconjuntos y extensión de conjuntos

Definición 2.3.1 (subconjunto). Dados dos conjuntos A y B, si $x \in A$ implica $x \in B$, se dice que A es *subconjunto*[a] de B, lo cual se denota $A \subset B$. Recíprocamente, cuando A es subconjunto de B se entiende que todo elemento de A está en B. La negación $\neg(A \subset B)$ es formalmente, $\neg(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$, lo cual se expresa (vea la sección de ejercicios del capítulo de lógica) con la fórmula
$$\neg(\forall x, (x \notin A) \vee (x \in B)) \equiv \exists x, (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

[a] Si $A \subset B$ también suele decirse que A está contenido en B.

■ **Ejemplo 2.5** Ejemplo de un subconjunto de los números naturales es el conjunto de números pares P, es decir, $P \subset \mathbb{N}$, ya que todo número par está en $\mathbb{N}$, necesariamente. ■

■ **Ejemplo 2.6** El conjunto de los números irracionales no está contenido en los racionales. Efectivamente, se demostró en el capítulo anterior que $\sqrt{2}$ no es racional y por lo tanto el conjunto de los irracionales no es subconjunto de los racionales ya que basta que un elemento de un conjunto no este en otro, para que el primero no sea subconjunto del segundo conjunto. ■

■ **Ejemplo 2.7** El conjunto de números naturales es subconjunto del conjunto de números reales, es decir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. En efecto, todo número natural es un número real. ■

Una consecuencia elemental de la definición de conjunto vacío es que está contenido en todos los demás conjuntos, lo cual se establece en el siguiente lema.

Lema 2.3.1 El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto. En símbolos, $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\emptyset \subset A$.

[3] Observe que el conjunto $\emptyset$ *no puede ser concebido* como una multiplicidad de objetos pensado como una unidad, es decir, no satisface la idea intuitiva de conjunto enunciada por Cantor *op. cit.*, sin embargo, dentro de nuestra axiomática (y muchas otras axiomáticas) existe necesariamente.

Demostración. Supongamos, siguiendo el principio de contradicción, que el vacío no es subconjunto de algún conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Entonces existe $x \in \emptyset$ y tal que $x \notin A$, lo cual es absurdo ya que el vacío no tiene elementos. Se concluye por el principio de contradicción que el vacío es subconjunto de todo conjunto. □

Nota. La argumentación en la demostración del lema 2.3.1 se denomina "*principio de vacuidad*" y se aplica siempre que se desea demostrar algo que involucre al conjunto vacío. En la demostración anterior se utilizó el principio de contradicción para demostrar una de tales propiedades, pero basta apelar a que la afirmación $x \in \emptyset$ es falsa, puesto que toda implicación en la que el antecedente es falso es necesariamente verdadera, como ya se mencionó en el capítulo dedicado a la lógica matemática. Si el lector siente alguna incomodidad para aceptar este tipo de razonamiento debe pensar que lo más trascendente que surge de este, es el dar lugar a fórmulas elegantes como que el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n, lo que incluye el caso de $n = 0$, pero, hasta donde sé, no hay ningún resultado matemático más *profundo* que involucre este tipo de argumentación[4].

Por el momento el símbolo "=" solo puede aplicarse a números pero extenderemos su uso a conjuntos mediante el axioma siguiente.

Axioma 2.2 (axioma de extensión). Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.

Con símbolos, se puede escribir el axioma de extensión como $(A = B) \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$. Es pertinente recordar aquí que el símbolo "$\Leftrightarrow$" es una doble implicación y que siempre que se use el axioma de extensión se tienen dos implicaciones:

1. $(A = B) \Rightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$.
2. $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow (A = B)$.

con lo que puede utilizarse el *modus ponens* con cualquiera de ellas. Así, por ejemplo, para demostrar que dos conjuntos son iguales basta demostrar que $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ con 2, mediante *modus ponens*. También, para demostrar que $A \neq B$, basta ver que o bien $A \not\subset B$ o bien $B \not\subset A$, donde $\neg(A \subset B)$ se ha denotado $A \not\subset B$. Otras notaciones que se utilizan con subconjuntos son $A \subseteq B$, lo cual quiere decir $(A \subset B) \vee (A = B)$ y también $A \subsetneq B$ lo cual significa $(A \subset B) \wedge (A \neq B)$, cuando A y B satisfacen esta última relación se dice que A es *subconjunto propio* de B.

Establecido lo anterior es posible establecer el primer teorema.

Teorema 2.3.2 (la inclusión es transitiva). Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Demostración. Sea $x \in A$, entonces $x \in B$ ya que por hipótesis $A \subset B$. Además, dado que $B \subset C$, también por hipótesis, entonces debe cumplirse $x \in C$. Por lo tanto $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$ y así $A \subset C$, por definición, como se desea demostrar. □

Dado que la demostración anterior es nuestra primera demostración formal que no utiliza el principio de vacuidad, al tomarla como ejemplo se puede aclarar lo que se entenderá por "demostración" oficialmente y lo que se espera que incluya una demostración matemática. Para este fin, es de utilidad presentar la demostración en forma tabular como se muestra en la tabla siguiente. Es importante recalcar que en una demostración matemática deben incluirse las razones de cada una de las afirmaciones que se hagan, sobre todo para quienes hacen demostraciones por primera vez. Al principio nada debe considerarse obvio. Las afirmaciones de cualquier demostración (por ejemplo las de la primera columna de la tabla siguiente) pueden ser hipótesis, axiomas, definiciones, teoremas, corolarios o consecuencias directas de cualquiera de los mencionados. También debe recordarse que **no puede ponerse como hipótesis** lo que se encuentra después de la flecha "$\Rightarrow$" ya que en caso contrario se cometería la falacia "petición de principio".

También pueden aparecer equivalencias lógicas o tautologías lo cual ocurrirá con frecuencia en este capítulo dado el carácter elemental de las demostraciones. En el ejemplo, en el renglón 5 de la tabla aparece la tautología

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

[4] Es decir, $\emptyset \subset \emptyset$ necesariamente por el principio de vacuidad.

Demostración tabular del teorema $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow (A \subset C)$

Afirmaciones	Razones
1. $A \subset B$	1. Hipótesis.
2. $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$	2. Definición de subconjunto en 1.
3. $B \subset C$	3. Hipótesis.
4. $(x \in B) \Rightarrow (x \in C)$.	4. Definición de subconjunto en 3.
5. $(((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B) \Rightarrow (x \in C))) \Rightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in C))$	5. Tautología
6. $(x \in A) \Rightarrow (x \in C)$	6. De 5 con *modus ponens* con 2 y 4.
7. $A \subset C$	7. Se concluye por la definición de subconjunto con 6.

Es decir, la transitividad de "$\Rightarrow$" es tautología, como debe verificar el lector, si no lo ha hecho todavía. El renglón 6 de la tabla se sigue con *modus ponens* en 5, de 2 y 4, como puede verificarse.

El hecho de que la hipótesis $(A \subset B) \wedge (B \subset C)$ pueda escribirse en forma de dos hipótesis separadas en la tabla, una en la línea 1 y otra en la línea 3, es consecuencia de las tautologías

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P$$
$$(P \wedge Q) \Rightarrow Q$$

Es decir, con las tautologías anteriores y *modus ponens* pueden concluirse las hipótesis 1 y 3, respectivamente. Recíprocamente, todo renglón en una argumentación tabular puede unirse con otro mediante la conjunción "$\wedge$".

Si el lector no tiene experiencia alguna en hacer demostraciones no hay herramienta didáctica más efectiva para aprender que tratar de escribirlas en forma tabular, aunque al principio puede ser difícil. Sin embargo acostumbrarse a dar razones de las propias afirmaciones es una buena disciplina para el aprendizaje del rigor matemático además de que ayuda a la memorización de las definiciones, teoremas, etcétera. Se recomienda comparar la demostración no tabular del teorema con la tabular y contrastarlas. En general se omiten una gran cantidad de detalles en las demostraciones regulares (no escritas en forma de tabla), detalles se consideran "obvios", aunque se sabe que nada es obvio para un principiante. Una vez que se han asimilado las tautologías lógicas puede omitirse mencionarlas pero por ahora es mejor hacerlo siempre que no sea demasiado engorroso o repetitivo.

2.3.1 Unión e intersección de conjuntos

En un acercamiento un poco más avanzado para la existencia de la unión de dos conjuntos se requiere el axioma de las uniones (vea por ejemplo la sección 4 del libro de Halmos *op. cit.*), pero en nuestro enfoque elemental al considerar $\mathbb{R}$ como dado, basta el axioma de especificación para definir tanto la unión como la intersección de conjuntos.

Definición 2.3.2 (unión e intersección de conjuntos). Dados dos conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ se define la *unión* $A \cup B$ como el conjunto

$$A \cup B \overset{def}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}. \tag{2.6}$$

La *intersección* $A \cap B$ se define como el conjunto

$$A \cap B \overset{def}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}. \tag{2.7}$$

N **Nota.** Se puede observar que en (2.6) la condición que define al conjunto, $P(x) : (x \in A) \vee (x \in B)$, está formada por dos proposiciones unidas con el conectivo lógico "$\vee$" lo cual está absolutamente permitido por el axioma de especificación. Además, debe recordarse que $(x \in A) \vee (x \in B)$ permite o bien $x \in A$ o bien $x \in B$ o bien que se cumplan ambas simultáneamente como corresponde a la "o" inclusiva de la lógica. Similarmente el uso de la condición $P(x) : (x \in A) \wedge (x \in B)$ está permitido por el axioma de especificación. La unicidad de los conjuntos unión e intersección definidos está dada por el axioma de extensión, como debe comprobarse.

Demostración tabular de $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$	
Afirmaciones	**Razones**
1. $x\in A\cup(B\cap C)$	1. Hipótesis.
2. $(x\in A)\vee((x\in B)\wedge(x\in C))$	2. Definición de $A\cup(B\cap C)$ y 1.
3. $(x\in(A\vee B))\wedge(x\in(A\vee C))$	3. Tautología $P\vee(Q\wedge R)\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$.
4. $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.	4. Definición de $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ y 3.
5. $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$	5. Definición de "$\subset$" con 1 y 4.

■ **Ejemplo 2.8** Si $A=\{1,2,3\},B=\{-1,3,4\}$ directamente de la definición se sigue que $A\cup B=\{-1,1,2,3,4\}$ y $A\cap B=\{3\}$. ■

■ **Ejemplo 2.9** Si $A=\{1,2,3\}$ y $C=\{4,5,6\}$, entonces $A\cap C=\emptyset$, mientras que $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$, como puede verificar el lector. ■

Una vez que se ha definido la unión e intersección de conjuntos se debe proceder a demostrar los siguientes hechos básicos los cuales enunciamos como un solo teorema.

Teorema 2.3.3 (propiedades de la unión e intersección). Dados $A\subseteq\mathbb{R}$ y $B\subseteq\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades
1. $A\cup\emptyset=A$ y $A\cap\emptyset=\emptyset$.
2. $A\cup B=B\cup A$ y $A\cap B=B\cap A$.
3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ y $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
4. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
5. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
6. Si $A\subset B$, $A\cup B=B$ y $A\cap B=A$. En particular, para todo $A\subseteq\mathbb{R}$, $\emptyset\cup A=A$ y $\emptyset\cap A=\emptyset$. Además, $A\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$, $A\cap\mathbb{R}=A$ y $A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

Las demostraciones de las propiedades anteriores son consecuencia inmediata de tautologías lógicas, ya presentadas, y se dejarán como ejercicio salvo algunas que, a continuación, se presentan para ilustrar los métodos de demostración. *Se debe recordar que en las demostraciones de igualdad de conjuntos debe usarse el axioma de extensión.*

Demostración de 2. Se tiene que $x\in A\cup B$ si y solo si $(x\in A)\vee(x\in B)$, por la definición (2.6), lo cual ocurre si y solo si $(x\in B)\vee(x\in A)$ (dado que $P\vee Q\equiv Q\vee P$ es tautología). Por lo tanto $x\in B\cup A$ si y solo si $x\in A\cup B$, es decir $A\cup B=B\cup A$, como se desea demostrar. La demostración de $A\cap B=B\cap A$ se sigue inmediatamente de la tautología $P\wedge Q\equiv Q\wedge P$. □

Demostración de 4. Se tiene que $x\in A\cup(B\cap C)$ si y solo si, por definición, $(x\in A)\vee((x\in B)\wedge(x\in C))$, lo cual es equivalente por tautología a $(x\in(A\vee B))\wedge(x\in(A\vee C))$, (verifique que es tautología si no lo ha hecho). Por lo tanto $x\in A\cup(B\cap C)$ si y solo si $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, es decir $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. □

Para demostrar $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ en forma tabular, mediante el axioma de extensión, falta demostrar (en forma tabular) que $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$ (¿por qué?) lo cual se obtiene fácilmente invirtiendo los pasos de la tabla anterior (y cambiando las razones) y se deja como ejercicio.

2.4 Diferencia y complemento de conjuntos

Definición 2.4.1 (diferencia y complemento de conjuntos). Dados dos conjuntos $A\subset\mathbb{R}$ y $B\subset\mathbb{R}$ se define la *diferencia* $A\setminus B$ como el conjunto

$$A\setminus B\overset{def}{=}\{x\in\mathbb{R}:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}. \tag{2.8}$$

El complemento de A denotado A^c se define como

$$A^c\overset{def}{=}\mathbb{R}\setminus A=\{x\in\mathbb{R}:x\notin A\} \tag{2.9}$$

■ **Ejemplo 2.10** Si $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{3,4,5\}$, entonces $A\setminus B=\{1,2\}$. Por otra parte, $B\setminus A=\{4,5\}$. ■

De la definición anterior son inmediatas las siguientes propiedades.

Teorema 2.4.1 (propiedades del complemento de conjuntos). Si $A\subset\mathbb{R}$ y $B\subset\mathbb{R}$ se cumple

1. $\emptyset^c=\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^c=\emptyset$.
2. $A\cap A^c=\emptyset$ y $A\cup A^c=\mathbb{R}$.
3. $A\subset B$ si y solo si $B^c\subset A^c$.
4. $(A^c)^c=A$.
5. Leyes de De Morgan $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ y $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

Demostración. (1) $\emptyset^c=\mathbb{R}\setminus\emptyset=\{x:(x\in\mathbb{R})\wedge(x\notin\emptyset)\}=\{x:(x\in\mathbb{R})\wedge(x\in\mathbb{R})\}$, pero $(x\in\mathbb{R})\wedge(x\in\mathbb{R})$ implica $x\in\mathbb{R}$ (tautología $(P\wedge P)\Rightarrow P$), por lo tanto $\emptyset^c=\{x:x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.
(2) Si $x\in A\cap A^c$ entonces $x\in A$ y $x\in A^c$, entonces $x\in A$ y $x\notin A$ lo cual no puede ser satisfecho por ningún x. Por lo tanto $A\cap A^c=\emptyset$.
(3) Si $A\subset B$, entonces $(x\in A)\Rightarrow(x\in B)$ (por definición de "$\subset$"). Dada la equivalencia lógica $P\Rightarrow Q\equiv\neg Q\Rightarrow\neg P$ (compruebe con una tabla de verdad) se tiene que $x\notin B$ implica $x\notin A$, lo que equivale a $B^c\subset A^c$. La implicación recíproca se muestra de manera análoga.
(4) Si $x\in(A^c)^c$ entonces de la definición de complemento se tiene $x\notin A^c$, es decir $\neg(x\in A^c)$ o sea $\neg(x\notin A)$ lo cual es equivalente a $\neg(\neg(x\in A))$, dada la equivalencia lógica $\neg(\neg P)\equiv P$ se concluye que $x\in A$. La implicación recíproca es similar.
(5) Si $x\in(A\cup B)^c$ entonces

$$x\notin(A\cup B)\equiv\neg(x\in A\cup B)\equiv\neg((x\in A)\vee(x\in B))$$

pero se tiene la equivalencia lógica $\neg(P\vee Q)\equiv\neg P\wedge\neg Q$, de donde se concluye $(x\notin A)\wedge(x\notin B)$ y por definición de intersección de conjuntos $x\in A^c\cap B^c$, con lo que $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$. La demostración $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$ es similar. La demostración $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ se deja como ejercicio muy recomendable. □

2.5 Conjunto potencia

Hasta el momento los elementos de conjuntos han sido números y no se ha considerado la posibilidad de que los elementos de un conjunto sean también conjuntos en sí mismos (aunque los números pueden verse como conjuntos, vea por ejemplo la construcción de Halmos *op. cit.*). La forma más natural de que un conjunto sea elemento de otro ocurre al considerar el conjunto potencia $\mathscr{P}$ el cual se definirá ahora.

Definición 2.5.1 (conjunto potencia). Dado un conjunto A, se define el *conjunto potencia* $\mathscr{P}(A)$ como el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, es decir

$$\mathscr{P}(A)\overset{def}{=}\{\Omega:\Omega\subset A\}. \tag{2.10}$$

■ **Ejemplo 2.11** El conjunto vacío tiene como único subconjunto el vacío mismo, así por la definición (2.10)

$$\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}.$$

■

N **Nota.** Es muy importante destacar el hecho de que $\emptyset\neq\{\emptyset\}$. El conjunto vacío no tiene elementos, mientras que el conjunto $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$ *tiene un elemento*, precisamente, su elemento es un conjunto, el conjunto vacío.

Ejercicio 2.1 Indique cuales son los elementos del conjunto $\mathscr{P}(\{1,3\})$.
Solución. Los subconjuntos de $\{1,3\}$ son $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,3\}$. ■

En general, entre los subconjuntos de un conjunto dado A siempre debe aparecer el vacío (¿por qué?) y el mismo conjunto A. Sirva como clave para encontrar todos los subconjuntos de un conjunto dado que todo conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos. Por ejemplo $n = 0$, es decir el conjunto vacío, tiene un subconjunto $2^0 = 1$, mientras que si A tiene dos elementos $\mathscr{P}(A)$ tiene $2^2 = 4$ elementos como se mostró en el ejemplo anterior.

Para conjuntos finitos el conjunto potencia queda perfectamente determinado y aún es perfectamente calculable cada uno de sus elementos. Para conjuntos infinitos no es tan obvio como concebir el conjunto potencia, el hecho de que existe el conjunto potencia de conjuntos infinitos se establece en forma de axioma.

Axioma 2.3 **(axioma de las potencias).** Para cada conjunto existe un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos del conjunto dado. En símbolos, si A es un conjunto, existe un conjunto $\mathscr{P}(A)$ tal que si $X \subset A$, entonces $X \in \mathscr{P}(A)$.

N **Nota.** Aquí es relevante ver que la definición de conjunto potencia para conjuntos finitos permite obtener en tiempo finito el conjunto potencia. La existencia del conjunto potencia *en el caso finito está sustentada con la posibilidad de expresar la totalidad de subconjuntos de un conjunto finito*, lo cual *no ocurre con los conjuntos infinitos*. No es posible calcular de manera explícita y actual todos los subconjuntos de un conjunto infinito. Por tal motivo es pertinente el axioma de las potencias el cual garantiza la existencia de tal conjunto.

Antes de seguir adelante el lector deben convencerse que puede distinguir entre las relaciones $\in$ y $\subset$ (en mi experiencia muchos principiantes los confunden), por ejemplo, en el conjunto $A = \{\{1\},\{1,3\}\}$ se tiene que el elemento $1 \notin A$, pero $\{1\} \in A$, para decirlo en palabras 1 no es elemento de A, pero el conjunto $\{1\}$ si lo es. Además observe que $\{\{1\}\} \subset A$, pero $\{1\} \not\subset A$ (¿por qué?, demuéstrelo). Si el lector es capaz de comprender la diferencia entre $\in$ y $\subset$ puede pasar a la siguiente sección, si no, se recomienda omitirla.

2.6 El conjunto potencia es mayor que el potenciado

Galileo en [10] observó que existe una correspondencia especial entre todos los números naturales $\mathbb{N}$ y los cuadrados de los mismos, conjunto al que llamaremos C:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & 4 \\ 3 & \leftrightarrow & 9 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

la flecha "$\leftrightarrow$" denota una correspondencia llamada *correspondencia biunívoca*, tal que a cada número en la izquierda le corresponde uno y solo un número en la derecha, lo cual denotaremos $T \leftrightarrow \mathbb{N}$. Por otra parte, C es *subconjunto propio* de C, es decir, $C \subset \mathbb{N}$ y $C \neq \mathbb{N}$, lo cual se denota $C \subsetneq \mathbb{N}$. Este hecho *aparentemente paradójico*, se utiliza para definir conjuntos infinitos. "Paradójico", ya que el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ "pareciera tener más" elementos que el conjunto $C = \{1,4,9,16,25,\dots\}$.

Definición 2.6.1 **(conjunto infinito).** Considere dos conjuntos A, B, tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, es decir A es subconjunto propio de B. Si existe una correspondencia biunívoca entre A y B, es decir, $A \leftrightarrow B$ entonces se dice que A y B *son infinitos.*

Claramente en conjuntos finitos tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, no es posible establecer una correspondencia biunívoca alguna entre los elementos de los conjuntos. De hecho existe una correspondencia biunívoca ente elementos de dos conjuntos finitos si y solo sí tales conjuntos tienen el mismo número de elementos, como el lector puede verificar por sí mismo. La intuición que sigue de que si $A \subsetneq B$ y $A \leftrightarrow B$ entonces B "tiene más elementos" que A puede formalizarse con el concepto de *cardinalidad*, pero baste por el momento establecer el teorema del gran matemático Georg Cantor.

Teorema 2.6.1 (teorema de Cantor). No es posible establecer una correspondencia biunívoca entre un conjunto A y su conjunto potencia $\mathscr{P}(A)$.

Demostración. Note que al menos existe una correspondencia entre los elementos de $A = \{a, b, c, \dots\}$ y los conjuntos $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots$ los cuales son elementos de $\mathscr{P}(A)$. Es decir, podemos poner en correspondencia $a \leftrightarrow \{a\}$, a $b \leftrightarrow \{b\}$, etcétera. Mostraremos que no todo elemento de $\mathscr{P}(A)$ puede ponerse en correspondencia con un elemento de A. Supongamos por el principio de contradicción que existe una correspondencia biunívoca f, entre A y $\mathscr{P}(A)$, en otras palabras, supongamos que a todo elemento de $\mathscr{P}(A)$ le corresponde biunívocamente un elemento de A. Entonces para todo $\Omega \in \mathscr{P}(A)$ existe $\omega \in A$ tal que $\Omega = f(\omega)$. Considere el conjunto $C \stackrel{def}{=} \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Por definición $C \subset A$, es decir, $C \in \mathscr{P}(A)$. Por hipótesis f es biunívoca y por lo tanto debe existir un elemento $c \in A$ tal que $f(c) = C$. Entonces o bien $c \in C$ o $c \notin C$, sin embargo ambas posibilidades llevan a una contradicción. Si $c \in C$ entonces por la definición de C, $c \notin f(c) = C$. Por otra parte si $c \notin C = f(c)$ entonces satisface la definición de C y por lo tanto $c \in C$. En todo caso $c \in C$ y $c \notin C$, lo cual es una patente contradicción. Con lo que concluye que no existe una correspondencia biunívoca entre un conjunto arbitrario y su conjunto potencia. De esta forma la intuición el conjunto potencia *tiene más elementos* que el conjunto potenciado se satisface para cualquier conjunto dentro de nuestra axiomática. □

2.7 Conjuntos numerables

Resumiendo, existen conjuntos, los conjuntos infinitos, cuyos elementos pueden ponerse en correspondencia con un subconjunto propio del conjunto infinito dado. Así puede pensarse que los conjuntos infinitos tienen la misma cantidad de elementos que alguno de sus subconjuntos propios, lo cual viola el principio aristotélico de que el todo es mayor que las partes[5]. Por otra parte, todo conjunto potencia tiene más elementos que el conjunto potenciado. De aquí que se pueden clasificar todos los conjuntos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales $\mathbb{N}$, a tales conjuntos se les llama *conjuntos numerables.* A los conjuntos infinitos que no pueden ponerse en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$ se les llama *no numerables*. Por lo pronto, dado un conjunto X, se tiene la sucesión

$$X, \mathscr{P}(X), \mathscr{P}(\mathscr{P}(X)), \dots$$

en donde cada conjunto tiene, de alguna forma, más elementos que el anterior en la sucesión. A partir de estas ideas de Cantor ¡hay infinitos de diferentes tamaños, infinitamente! Este tremendo resultado que separa las matemáticas anteriores a Cantor y las matemáticas modernas dio sustento a la ciencia del siglo XX y del actual.

■ **Ejemplo 2.12** Entonces sabemos que existe una correspondencia entre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $C = \{1, 4, 9, \dots\}$. De esta forma el conjunto de cuadrados de números naturales es numerable. Por otra parte, el conjunto potencia de $\mathbb{N}$, es decir $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, no es numerable. ■

Una vez que estudiemos los números reales, podremos demostrar que dicho conjunto $\mathbb{R}$, *no es numerable.* Por lo pronto con otra técnica descubierta por Cantor se puede demostrar que los números racionales son numerables.

En la figura 2.1, en el primer renglón están escritos sucesivamente todos los naturales divididos por 1. En el segundo renglón están todos los naturales divididos por 2, en el tercero todos divididos por 3, etcétera. Tomando en cuenta todos los renglones posibles, aparecerán todos los números racionales. Las flechas indican orden sucesivo en el que se se pondrán en correspondencia los racionales con los naturales. Según la figura, el primer racional es $\frac{1}{1}$, el segundo es $\frac{2}{1}$, el tercero $\frac{1}{2}$,

[5] La existencia de correspondencias biunívocas entre conjuntos infinitos y subconjuntos propios viola el principio aristotélico (y una de las nociones comunes de *Los elementos* de Euclides) de que "el todo es mayor que las partes".

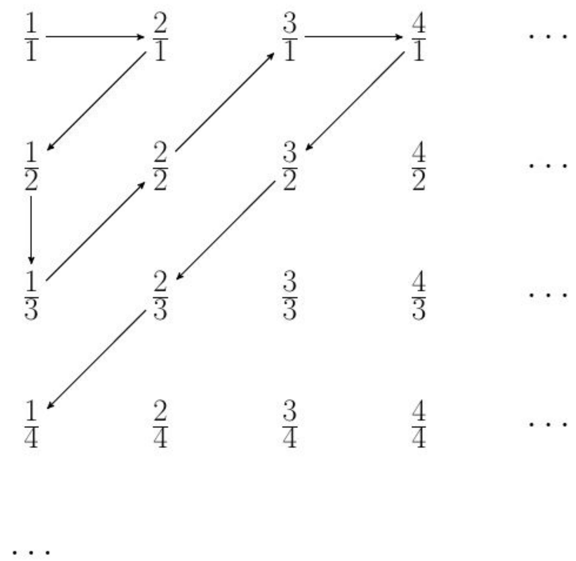


Figura 2.1: Los racionales son numerables

el cuarto $\frac{1}{3}$, el quinto $\frac{2}{2}$, el cual es igual a $\frac{1}{1}$, por lo que lo que se descarta (la correspondencia debe ser biunívoca) y se pasa al siguiente que es $\frac{3}{1}$, etcétera. Resumiendo, la correspondencia que se tiene es

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & 2 \\ 3 & \leftrightarrow & 1/2 \\ 4 & \leftrightarrow & 1/3 \\ 5 & \leftrightarrow & 3 \\ 6 & \leftrightarrow & 4 \\ 7 & \leftrightarrow & 3/2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

con la cual se muestra que los racionales positivos son numerables. Puede demostrarse que los racionales negativos son numerables y que la unión de dos conjuntos numerables es numerable. De hecho puede demostrarse que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable (vea la sección de ejercicios). Un hecho fascinante, que se demuestra en la sección 2.7, es que el conjunto $\mathbb{R}$ no es numerable.

2.8 Paradoja de Russell

Al llegar a esta sección se supondrá que el lector son conscientes de la diferencia entre las relaciones $A \in B$ y $A \subset B$ y dada la discusión del conjunto potencia se dará por sabido que es perfectamente posible que la relación $A \in B$ se de entre conjuntos. La paradoja de Russell establece que la construcción ingenua de la teoría de conjuntos lleva a contradicciones si se da por hecho que existe un conjunto que pueda contener todo lo que pueda pensarse o formularse como conjunto dentro de nuestra axiomática. En efecto sea $\mathscr{U}$, tal conjunto y constrúyase el conjunto

$$A = \{x \in \mathscr{U} : x \notin x\}.$$

Es natural preguntarse si $A \in A$ o $A \notin A$. Supongamos $A \in A$, entonces por la definición de A, si $A \in \mathscr{U}$ entonces debe cumplirse $A \notin A$, lo cual es una contradicción. Similarmente, si suponemos que $A \in \mathscr{U}$ y $A \notin A$, llegamos a que entonces $A \in A$, (por la definición de A). Por lo tanto, no puede suceder que $A \in \mathscr{U}$. Es decir, no puede formularse la existencia de un conjunto universal dentro de esta axiomática, como se mencionó antes.

2.9 Ejercicios del capítulo2

2.9.1 Nivel básico

1. Demuestre con tablas de verdad las equivalencias $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ y $\neg(P \wedge Q) \equiv P \Rightarrow \neg Q$
2. Demuestre que $\emptyset \subset \emptyset$.
3. Demuestre que el conjunto $\emptyset$ es único.
4. Demuestre las propiedades de unión e intersección 1, 3, 5 y 6.
5. Demuestre los recíprocos de la propiedad 6 del teorema de propiedades de uniones e intersecciones: a) si $A \cap B = A$ entonces $A \subset B$ y b) si $A \cup B = B$ entonces $A \subset B$.
6. Demuestre en forma tabular que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.
7. Demuestre en forma tabular el teorema de las propiedades de la diferencia de conjuntos.
8. Demuestre $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ en forma abreviada además de la forma tabular.
9. Encuentre el conjunto potencia de los siguientes conjuntos:
   a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.
   b) $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset))$
10. Demuestre que en el conjunto $A = \{\{1\}, \{1, 3\}\}$ se tiene que $1 \notin A$, pero $\{1\} \in A$. Además muestre que $\{\{1\}\} \subset A$, pero $\{1\} \not\subset A$
11. Demuestre que si $a \in A$, entonces $\{a\} \subset A$.

2.9.2 Nivel intermedio

12. Demuestre mediante el axioma de extensión que dado un conjunto A, $\mathscr{P}(A)$ es único.
13. Determine una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\{a, b, c, d\}$ y $\{1, 2, 3, 4\}$.
14. Determine una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\{x \in \mathbb{N} : x = 2n + 1\}$.

2.9.3 Nivel avanzado

15. Determine los primeros quince números naturales en el arreglo de la figura 2.1. ¿Existe una fórmula matemática para representar este arreglo? Argumente.
16. Demuestre que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
    Sugerencia: Utilice la técnica que se usó para demostrar que los racionales son numerables.

3. Números

Este capítulo está dirigido a personas que ya tienen saberes previos sobre los números naturales $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\dots\}$, así como de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ y de los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$. Se supondrá también que quienes este texto leen, han realizado operaciones con números escritos de la forma

$$a.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

llamados *decimales*, donde $a \in \mathbb{Z}$ y los números a_n, $n = 1,2,\dots$, son números entre cero y nueve.

También se supondrá que con anterioridad, se han completado los cursos de enseñanza elemental y que en tal enseñanza se ha llevado a cabo con los estándares mínimos y, consecuentemente, que por lo menos se tiene alguna experiencia con las operaciones suma, resta, multiplicación y división de números decimales con *expansión decimal finita.*

Sin embargo, se partirá de que *no se ha trabajado nunca formalmente* con sumas infinitas y que, por lo tanto, en realidad nunca se ha dado una explicación congruente y seria de lo que se quiere decir con los decimales escritos a la derecha de los siguientes números:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.3333333\cdots \\ \sqrt{2} &= 1.41426\cdots \\ \pi &= 3.1415926\cdots \end{aligned}$$

ni se ha recibido explicación formal de lo que significa realizar operaciones con tales sumas infinitas.

La siguiente sección puede servir como repaso de temas conocidos para quien los haya estudiado con anterioridad, antes de pasar al estudio de las sumas infinitas o bien, puede servir como breve introducción a algunos temas de aritmética básica requeridos.

3.1 Fundamentos de aritmética

Definición 3.1.1 (divisor entero). Se dice que un entero b divide un entero a si y sólo si existe un entero m tal que $a = bm$, lo cual se denota

$$b|a.$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{0.3} = & 3.333333\cdots \\
\frac{1}{0.33} = & 3.030303\cdots \\
\frac{1}{0.333} = & 3.0030030\cdots \\
\frac{1}{0.3333} = & 3.00030030\cdots \\
\frac{1}{0.33333} = & 3.0000300003\cdots \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Tabla 3.1: Expansión decimal de $1/3$.

Un número entero s el cual divide a dos enteros a y b se llama divisor común de a y b, es decir s es divisor común de a y b si y solo si $s|a$ y $s|b$. El mayor de todos los divisores comunes de a y b se llama *máximo común divisor* y se denota "$\text{mcd}\,(a,b)$". Si el máximo común divisor de a y b, es 1, se dice que a y b son *primos relativos*. Un número natural $p > 1$ se llama número primo si los únicos divisores de p, son 1 y el mismo número p.

■ **Ejemplo 3.1** El número 3 divide a 15, es decir, $3|15$ ya que $15 = 3 \cdot m$ con $m = 5$. Los divisores de 9 son $1,3,9$ y de 24 son $1,2,3,4,6,12,24$ por lo tanto $\text{mcd}\,(9,24) = 3$. Los divisores de 8 son $1,2,4,8$, los divisores de 15 son $1,3,5,15$, por lo tanto $\text{mcd}\,(8,15) = 1$, y consecuentemente, 8 y 15 son primos relativos. Los números primos entre 0 y 100 son $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73, 79,83,89$ y 97. ■

3.2 Notación y el infinito en las representaciones decimales

Comenzamos estableciendo que los puntos suspensivos en una expresión, por ejemplo

$$0.3333333\cdots$$

significa que, por supuesto, los 3 continúan al infinito, es decir, para tener la correspondencia exacta entre $\frac{1}{3}$ y $0.3333333\cdots$ los números 3 a la derecha del cero, no terminan nunca. Para quienes les parezca extraña esta afirmación ponemos a su disposición la tabla 3.1.

La información contenida en la tabla 3.1 es la siguiente: Si alguien afirma que $\frac{1}{3} = 0.3$, por ejemplo, lo que tiene que hacer es dividir el número 1 por 0.3 de donde obtendrá $3.333333\cdots$, el cual, claramente, no es 3, por lo tanto, $\frac{1}{3} \neq 0.3$. A partir de la tabla, el lector quizá no tenga dificultad en aceptar que *ninguna* expresión decimal finita de la forma $0.\underbrace{333\cdots3}_{n}$ donde n denota un número arbitrario de dígitos, puede ser igual a $\frac{1}{3}$, es decir, podemos afirmar que

$$\frac{1}{3} \neq 0.\underbrace{333\cdots3}_{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, se puede afirmar que

$$\frac{1}{0.\underbrace{333\cdots3}_{n}} = 3.\underbrace{000\cdots0}_{n-1}30\cdots$$

por lo que *ninguna expansión decimal finita puede representar al número* $\frac{1}{3}$.

N **Nota.** Aquí debe tenerse la precaución de *no pretender que lo que aparezca en la pantalla de una calculadora es la verdad absoluta*, ya que algunas calculadoras pueden, por un error de truncamiento, presentar que el inverso de digamos $0.\underbrace{333\cdots3}_{m}$ es 3, donde m es el número máximo de dígitos de la calculadora. Por ejemplo, la calculadora de *Microsoft Windows 10*, cuyo uso no se recomienda, indica que el si se toma $m = 35$, entonces $\dfrac{1}{0.\underbrace{333\cdots3}_{35}} = 3$, lo cual ¡es falso! (verifique por usted mismo). Así es, estimado lector o lectora, **¡las calculadoras mienten!**

La segunda afirmación es: *todo número con representación decimal tiene una expansión infinita.* Efectivamente, tome por ejemplo $\frac{1}{2} = 0.5$, este número tiene representación decimal infinita ya que

$$\frac{1}{2} = 0.500000\cdots,$$

es decir, la expansión decimal de $\frac{1}{2}$ tiene infinitos ceros después del 5.

A continuación se introducirá la notación de suma y se dará sentido formal a las sumas infinitas que han surgido en la representación decimal de los ejemplos vistos.

3.3 Notación de suma, sucesiones

La sucesión infinita $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ puede denotarse mediante la expresión

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

con lo cual se quiere decir que el *n-ésimo* término de la sucesión, es decir a_n, está dado por la fórmula $a_n = \frac{1}{2^n}$. Se puede abreviar la notación para la suma de términos de una sucesión introduciendo el símbolo de suma.

Notación 3.1. *Notación. La suma $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ de m términos de una sucesión $\{a_n\}$ se denota con el signo $\sum$ mediante la fórmula*

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \overset{def}{=} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m. \tag{3.1}$$

En la fórmula (3.1) el subíndice $k = 0$ bajo el signo $\sum$, indica que la suma comienza con el término a_0 y el superíndice m, sobre el signo $\sum$, indica que la suma debe terminar con el término a_m.

N **Nota.** En este libro se usará siempre la palabra *suma* para designar "$\sum$" y **nunca las palabras sumatoria o sumatorio**. La palabra "suma" basta para referirse al símbolo $\sum$ y a la operación que representa.

■ **Ejemplo 3.2** La suma de las primeras $m+1$ potencias de $1/2$ se puede representar como $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \cdots + \frac{1}{2^m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k}$. ■

■ **Ejemplo 3.3** La sucesión constante $a_n = 1, n = 0, 1, 2, \ldots$ es decir, la sucesión $\{1\}$, tiene suma $\sum_{k=0}^{5} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$. Por otra parte, la suma $\sum_{k=1}^{5} 1 = 1+1+1+1+1 = 5$. Finalmente $\sum_{k=1}^{6} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$. Note que los subíndices y superíndices en la suma son de mayor importancia. ■

N **Nota.** El ejemplo anterior muestra que debe estarse muy atento al subíndice y al superíndice de la suma dado que por supuesto da lugar a resultados diferentes. Además la letra utilizada para el subíndice es libre, de tal manera que $\sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{i=0}^{m} a_i$.

$$\begin{array}{ll} 1 & = 1 = \frac{1\cdot 2}{2} \\ 1+2 & = 3 = \frac{2\cdot 3}{2} \\ 1+2+3 & = 6 = \frac{3\cdot 4}{2} \\ 1+2+3+4 & = 10 = \frac{4\cdot 5}{2} \\ 1+2+3+4+5 & = 15 = \frac{5\cdot 6}{2} \\ \vdots & \quad \vdots \end{array}$$

Tabla 3.2: Comprobación de que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para $n = 0,1,2,3,4$.

Sucesión de sumas parciales

Si se denota $S_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k$, se puede definir recursivamente S_n como sigue:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_{k+1} &= S_k + a_{k+1}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0, \\ S_1 &= S_0 + a_1 = a_0 + a_1, \\ S_2 &= S_2 + a_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

La sucesión $\{S_n\} = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$, se llama *sucesión de sumas parciales* de la sucesión $\{a_n\}$.

Ejercicio 3.1 Encuentre los primeros tres términos de la sucesión de sumas parciales de la sucesión definida por $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Solución. Se tiene que $S_0 = a_0 = \frac{1}{2^0} = 1$, $S_1 = S_0 + \dfrac{1}{2^1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ y, finalmente, $S_2 = S_1 + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$. ■

3.3.1 Heurística vs. demostraciones y una suma especial

Algunas sumas de sucesiones pueden calcularse fácilmente mediante una fórmula, tal es el caso de la serie aritmética con $a_0 = 1$ y $c = 1$, para la cual se cumple

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.2}$$

el lector puede verificar que la fórmula se cumple, caso a caso, como se muestra en la tabla 3.2

Aquí hay que distinguir que no por que se pueda comprobar una fórmula en muchos casos, aún en millones de casos, la fórmula es necesariamente verdadera. Es decir, mostrar casos donde una fórmula se cumple, **no se considera una demostración matemática** en absoluto. Tampoco se considera una demostración formal presentar el proceso mediante el cual se descubrió una fórmula, o sea el evidenciar la técnica heurística que lleva a una fórmula. Para las series se considera como válido el proceso de demostración por *inducción matemática* el cual describiremos más adelante. Una técnica heurística que lleva a la fórmula (3.2) consiste en sumar la serie $S_n = 1+2+\cdots+n$ consigo misma pero sumando de tal manera que los términos de una serie queden invertidos respecto de la otra, es decir, si se colocan los términos de la serie como se muestra en el arreglo siguiente

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& 1 + \ 2 \qquad + 3 \qquad + \cdots + n \\ S_n &=& n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \end{array}$$

y se suma verticalmente término a término, en la presentación anterior. Al hacerlo se obtiene

$$2S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ veces}}$$

de donde

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Una tercera técnica para verificar que la formula (3.2) es válida es la llamada *inducción matemática* y la presentaremos a continuación. La inducción matemática es una técnica aceptada universalmente para demostrar formalmente fórmulas que contengan números naturales.

3.4 Inducción matemática

Axioma 3.1 (principio de inducción matemática). Si una afirmación $I(n)$ es válida para $n=0$ y si al suponer valida la afirmación para un entero arbitrario k implica $I(k+1)$ es válida, es decir $I(k) \Rightarrow I(k+1)$, entonces $I(n)$ es válida para toda $n \in \mathbb{N}$. La hipótesis que resulta al suponer válida $I(k)$ se llama *hipótesis de inducción.*

Ejercicio 3.2 Verificaremos por inducción matemática la fórmula (3.2). En la tabla 3.2 se han verificado los casos $n = 0,1,2,3,4$, bastaba verificar el caso $n = 0$ para utilizar el principio de inducción matemática. Supongamos ahora que la fórmula (3.2) es válida para $n = k$, es decir,

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{3.3}$$

Se desea demostrar que la fórmula es válida para $k+1$, es decir se desea verificar que (3.3) implica

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{3.4}$$

Para verificar la fórmula (3.4), se procede algorítmicamente se parte de la *hipótesis de inducción* en la fórmula (3.3) y se suma en ambos miembros de la igualdad el término $k+1$, por medio del álgebra elemental se trabaja con el lado derecho de la fórmula que se obtenga para llegar al lado derecho de (3.4)

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Note que el lado derecho en el desarrollo anterior no hace sino utilizar álgebra elemental. En el segundo paso se usó que $k+1 = \dfrac{2(k+1)}{2}$. En el siguiente paso se factoriza $k+1$ ya que $k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2)$ con lo que se llega a la fórmula (3.4), como se desea demostrar. □ ■

Nota. El primer valor de n para el cual una fórmula dada tiene sentido no siempre es $n = 0$, sino que puede ser cualquier valor mayor que cero también. Demostrar una fórmula para el primer valor de n para el cual tiene sentido se llama *base de inducción.* Además, una variante extensamente usada del principio de inducción no supone solamente como hipótesis de inducción una fórmula válida para $n = k$, sino que supone válida una fórmula para todos los naturales a partir de la base de inducción hasta un entero k, en este libro se utilizarán ambas variantes de la inducción sin añadir mayor explicación cuando se utilicen.

n,	$f(n) = n^2 + n + 41$
0	41
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
$\vdots$	$\vdots$

Tabla 3.3: Algunos ejemplos verdaderos de la falsa fórmula de primos de Euler.

3.4.1 Invalidez de fórmula general que se cumple para múltiples casos.

El ejemplo más famoso en matemáticas de una fórmula que se cumple para muchos casos pero que no es verdadera en general, es la famosa y misteriosa fórmula para números primos de Euler.

Afirmación. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 + n + 41$ es un número primo.

La afirmación anterior es falsa, en general (¿por qué?), pero es válida para un número sorprendente de casos, de hecho ¡es válida para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, hasta 88 números consecutivos! Pero, curiosamente, también es verdadera para otros muchos casos más.

Este ejemplo sirva para tener siempre presente que no porque una afirmación sea verdadera para un número ingente de casos, la afirmación es verdadera en general. Curiosamente, para los principiantes, la inducción matemática parece no dejarles ninguna sensación de convencimiento, mientras que si se muestra un procedimiento heurístico o algunos casos verdaderos suelen quedar convencidos casi por completo. La ventaja del principio de inducción sobre otras técnicas de demostración es que puede implementarse de manera casi algorítmica, mecánica, mientras que la heurística requiere de inventar, descubrir a veces de genio, lo cual no puede implementarse hasta ahora con algoritmos y quizá nunca pueda hacerse.

La inducción matemática es un instrumento poderoso que puede utilizarse para demostrar teoremas esenciales de la matemática, como es el caso del siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 (teorema fundamental de la aritmética). Todo número natural mayor que uno o bien es un número primo[a] o bien puede ser escrito como producto de números primos de manera única, salvo el orden de los factores.

[a]Un número $p > 1$ se llama número primo si los únicos divisores de p son 1 y el mismo número p.

Demostración. Dado que 2 es primo, la base de inducción está demostrada. Suponga, por inducción, que la afirmación es válida para todos los números enteros mayores que 1 y menores o iguales a k. Se desea demostrar que $k+1$ es primo o producto de primos. Si $k+1$ es primo no hay nada que demostrar. Si $k+1$ no es primo entonces existen a y b tales que $k+1 = ab$ con $1 < a \leq b \leq k$. Por la hipótesis de inducción a y b son producto de primos, por lo tanto $k+1$ también lo es.

Para demostrar la unicidad de la descomposición en primos suponga que existe k con dos descomposiciones diferentes como producto de primos y suponga que o bien k es el único con esta característica o bien es el menor de todos los que existen. Sea

$$k = p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 q_2 \ldots q_n, \tag{3.5}$$

con $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$ y $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n$. Dado que k es el mínimo número que puede escribirse como (3.5) se debe cumplir que $p_1 \neq q_1$ ya que si fueran iguales habría un número menor que k con dos descomposiciones diferentes. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $p_1 < q_1$.

Entonces el número
$$k' = k - p_1q_2\cdots q_n = (q_1 - p_1)q_2\cdots q_n,$$
así k' es menor que k y por lo tanto tiene una descomposición única como producto de primos. pero k' tiene otra descomposición
$$k' = p_1(p_2\cdots p_m - q_2\cdots q_n).$$
Por lo que p_1 es factor de k' y así debe ser factor de $q_1 - p_1$, por la descomposición única en primos de k', ya que no es factor de ninguno de los primos $q_2,\dots,q_n$, dado que $p_1 < q_1 \leq q_2\cdots \leq q_n$. Por lo tanto existe s tal que $p_1 s = q_1 - p_1$. Entonces $p_1(s+1) = q_1$, es decir p_1 divide a q_1, lo cual es una contradicción ya que q_1 es primo y $1 < p_1$, ya que p_1 también es primo. Con lo que queda demostrada la unicidad de la representación de naturales como producto de números primos. □

■ **Ejemplo 3.4** $360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$, $144 = 2^4\cdot 3^2$. ■

3.4.2 Propiedades del operador suma

Por el momento no demostraremos formalmente ninguna de las siguientes propiedades, aunque pueden demostrarse por inducción, pero se darán argumentos para que sean consideradas factibles, sin llegar a una demostración formal[1].

Proposición 3.4.2 (propiedades del operador suma). Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de números reales y c una constante entonces se cumple

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n}a_k + \sum_{k=0}^{n}b_k, \tag{3.6}$$
$$\sum_{k=0}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{n}a_k. \tag{3.7}$$

*Demostración.*La factibilidad de las propiedades (3.6) y (3.7) se siguen de las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de los números reales que se estudian formalmente en el siguiente capítulo. Por lo pronto, puede verse que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_0+a_1+\cdots+a_n)+(b_0+b_1+\cdots+b_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}a_k+\sum_{k=0}^{n}b_k,\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la propiedad asociativa y conmutativa de los números reales repetidamente.

Por otra parte, por la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(ca_k) &= ca_0+ca_1+\cdots+ca_n\\ &= c(a_0+a_1+\cdots+a_n)\\ &= c\sum_{k=0}^{n}a_k.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.3 Encuentre una fórmula para la suma $\sum_{k=1}^{m} c$.
Solución. Por la fórmula (3.7) y dado que $c = c\cdot 1$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{m}c = \sum_{k=1}^{m}c\cdot 1 = c\sum_{k=1}^{m}1 = cm,$$

[1] Para estudiar las demostraciones formales de las propiedades de la suma rigurosamente se requieren las propiedades de campo de los números reales, las cuales se presentan al final de este libro, por el momento solo se mencionan y se suponen conocidas.

donde la última igualdad se sigue de $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, fórmula vista en un ejemplo anterior. ■

3.5 Sucesiones aritméticas

Entre todas las posibles sucesiones hay dos que se caracterizan por ser sucesiones cuya n-ésima suma parcial puede evaluarse mediante una fórmula simple. Tales sucesiones son las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas a las cuales describiremos a continuación.

Definición 3.5.1 (sucesiones aritméticas). Una *sucesión aritmética* es una sucesión tal que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera es constante. Así $\{a_n\}$ es aritmética si $a_{k+1} - a_k = c$ para toda $k = 0, 1, 2, \ldots$ donde c es una constante, llamada *diferencia común* de la sucesión aritmética.

Ejercicio 3.4 Muestre que la sucesión $\{2n\}$ es aritmética.
Solución. Para la sucesión $\{2n\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ se cumple para toda k que

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= 2(k+1) - 2k \\ &= 2k + 2 - 2k \\ &= 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión es aritmética con constante $c = 2$ como diferencia común. ■

3.5.1 Fórmula recursiva para sucesiones aritméticas

Dado que basta sumar a cualquier a_k la diferencia común c de una sucesión aritmética para obtener a_{k+1} se tiene la siguiente fórmula

$$a_{k+1} = a_k + d \tag{3.8}$$

así, partiendo de a_0 se obtiene la sucesión completa mediante el procedimiento siguiente determinado por la fórmula (3.8), la cual se conoce como *fórmula recursiva para las sucesiones aritméticas*

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + c \\ a_2 &= a_1 + c = a_0 + 2c \\ &\vdots \\ a_n &= a_0 + nc. \end{aligned} \tag{3.9}$$

La fórmula (3.9) determina completamente la sucesiones aritméticas.

N **Nota.** Debe tenerse cuidado de con cuál término comienza la serie aritmética, ya que si la serie comienza con a_1 la fórmula recursiva (3.9) se convierte en

$$a_n = a_1 + (n-1)c$$

como el lector puede comprobar por sí mismo. La formula anterior tiene la conveniencia de que el décimo término por ejemplo corresponde a a_{10} mientras que el décimo término para (3.9) corresponde a a_9.

Ejercicio 3.5 Si en una sucesión aritmética $a_3 = 6$ y $a_8 = 18$ encuentre el décimo término.
Solución. Se tiene por la fórmula (3.9) que

$$\begin{aligned} 6 &= a_0 + 3c \\ 18 &= a_0 + 8c \end{aligned}$$

el cual es un sistema que puede resolverse por cualquiera de los métodos conocidos: sustitución, suma y resta, determinantes, etcétera. Por ejemplo restando a la segunda ecuación la primera se tiene $5c = 12$, es decir $c = 12/5$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación se obtiene $a_0 = 6 - 3c = 6 - 3(12/5) = -6/5$. Por lo que el término general de la sucesión es

$$a_n = -\frac{6}{5} + n\frac{12}{5},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se pide el décimo término, por lo que desea calcular a_9 (¿por qué?) así

$$a_9 = a_0 + 9c = -\frac{6}{5} + 9\frac{12}{5} = \frac{102}{5}.$$

■

Dada la fórmula de recurrencia (3.9) es fácil obtener una fórmula para la n-ésima suma parcial de las sucesiones aritméticas, lo cual se establece en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.1 **(suma de sucesiones aritméticas).** Si $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es una sucesión aritmética con diferencia común c, entonces $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ es

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n). \tag{3.10}$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\
&= a_0 + (a_0 + 1c) + (a_0 + 2c) + \cdots + (a_0 + nc) \\
&= (n+1)a_0 + (1 + 2 + \cdots + n)c \\
&= (n+1)a_0 + c\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\left(\frac{2a_0 + nc}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n).
\end{aligned}$$

donde $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ debido a la fórmula (3.2), como recordará el lector. □

N **Nota.** Si la sucesión $\{a_n\}$ comienza con $n = 1$ la fórmula (3.10) debe modificarse por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_0 + a_n). \tag{3.11}$$

Ejercicio 3.6 Encuentre la suma de todos los enteros impares de 0 a 50.
Solución. Los números impares pueden formar la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Claramente la sucesión es aritmética (demuéstrelo) con $c = 2$. El impar número 50 corresponde a $n = 49$, (¿por qué?) así mediante la fórmula (3.11) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{49}(2k+1) = \frac{50}{2}(1 + (2(49) + 1)) = 50^2 = 2500.$$

■

3.6 Sucesiones geométricas

Otro tipo básico importante de sucesiones por sus innumerables aplicaciones son las sucesiones geométricas las cuales se describen a continuación.

Definición 3.6.1 (sucesiones geométricas). Una sucesión $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se llama *geométrica* si para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple que el cociente

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = r, \tag{3.12}$$

donde $r \neq 0$ es una constante. Al número r en la fórmula (3.12), se le llama *razón común* de la sucesión geométrica $\{a_n\}$.

■ **Ejemplo 3.5** La sucesión $\{2^n\} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$ es geométrica. Efectivamente, $\dfrac{2^{k+1}}{2^k} = 2$, por lo que la sucesión $\{2^n\}$ es geométrica con razón comun $r = 2$. ■

3.6.1 Fórmula recursiva para sucesiones geométricas

Dada la fórmula (3.12) se tiene la fórmula recursiva

$$a_{k+1} = ra_k \tag{3.13}$$

de donde puede obtenerse una fórmula general para las sucesiones geométricas en términos de a_0 y de r como se muestra:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 r \\ a_2 &= a_1 r = a_0 r^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_0 r^n. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ejercicio 3.7 Encuentre el sexto término de una sucesión geométrica que tiene como primer término $a_0 = 1$ y como razón común $r = -1/2$.
Solución. Los primeros términos son $a_0 = 1$, $a_1 = 1(-1/2) = -1/2$, $a_2 = (-1/2)(-1/2) = 1/4$. Así el sexto término dado por la fórmula (3.14) es $a_6 = (-1/2)^6 = 1/64$. ■

N **Nota.** La conveniencia de la fórmula (3.14) es que solo aparece n en ella, la inconveniencia ocurre cuando la sucesión comienza en a_1 y no en a_0, en tal caso debe modificarse la fórmula (3.14) y usar la fórmula

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \tag{3.15}$$

como el lector puede comprobar y demostrar por inducción.

Con la fórmula (3.14) es posible obtener la suma de cualesquiera términos de una sucesión geométrica.

Teorema 3.6.1 (suma de sucesiones geométricas). . Si $\{a_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común $r \neq 1$, entonces $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ es

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \tag{3.16}$$

Demostración. La forma de obtener la fórmula (3.16) es como sigue. Dada la fórmula (3.14) se tiene

$$S_n = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n. \tag{3.17}$$

Al multiplicar ambos miembros de (3.17) por $r \neq 1$, se llega a

$$rS_n = a_0 r + \cdots + a_0 r^{n+1}. \tag{3.18}$$

Al restar (3.18) de (3.17) se obtiene

$$S_n - rS_n = a_0(1 - r^{n+1})$$

de donde

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

ya que $r \neq 1$, como se desea demostrar. □

N **Nota.** Otra demostración formal puede hacerse por inducción sobre n y se deja como ejercicio. Además cabe recalcar que si la sucesión comienza en a_1 y no en a_0, la fórmula (3.16) debe ser substituida por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Ejercicio 3.8 Una persona desea colocar en un tablero de ajedrez un grano en el primer tabla, dos granos en el segundo, cuatro en el tercero y así hasta 64 cuadros que forman el tablero de ajedrez, duplicando cada vez la cantidad del tabla anterior ¿cuántos granos deberá poner en total?

Solución. El problema trata de una serie geométrica con $a_0 = 1$ y $r = 2$ por lo tanto

$$S_{64} = \frac{1 - 2^{65}}{1 - 2} = 2^{65} - 1 = 36,893,488,147,419,103,231$$

Observe que si un grano pesa 2×10^{-3}kg al convertir a toneladas se deberían tener

$$36,893,488,147,419.1\text{t}$$

lo cual sobrepasa por muchísimo la producción anual, por ejemplo, de nuestro país que es de 27 millones de toneladas métricas (dato de 2021). ■

3.7 Representación decimal de los números reales

Con la notación estudiada hasta ahora se llega a que ciertos decimales entre 0 y 1 están formados por una serie geométrica . Por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}.$$

Observe que la suma infinita, no ha sido definida hasta el momento en este libro y que debe ser definida, ya que no se trata de un concepto trivial. Por lo pronto, para las series geométricas, entre las que se encuentra la suma del ejemplo anterior $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$, dada la fórmula (3.16) se puede argumentar que dado para que la suma finita se cumple

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} &= \frac{1}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{1}{10} \frac{10}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} 0.\underbrace{333\cdots 3}_{n} &= \frac{3}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

La igualdad (3.20) es muy interesante, indica que para cualquier número finito n de dígitos en $0.\underbrace{333\cdots 3}_{n}$ ese número nunca será igual a $\frac{1}{3}$, justo como se indicó al principio de este capítulo. En efecto, la igualdad (3.20) indica exactamente el error de truncamiento de las calculadoras

$$0.\underbrace{333\cdots 3}_{n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 10^n}. \tag{3.21}$$

Por ejemplo poniendo $n = 35$ en (3.21) se obtiene el error de *Microsoft Windows 10* ya que, según los cálculos realizados, el valor exacto es

$$0.\underbrace{333\cdots 3}_{35} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 10^{35}}.$$

El error es pequeño ciertamente $\frac{1}{3\cdot 10^{35}} \approx 0.\underbrace{000\ldots 0}_{35}3$, pero es un error. Así este primer acercamiento al infinito nos dice que *ninguna suma finita* $S_n = 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}$ *puede ser igual a* $\frac{1}{3}$ y por lo tanto toda serie truncada es solo una aproximación. En particular, toda computadora o calculadora que trunca arroja errores, en particular *Microsoft Windows 10*.

Sin embargo el asunto del truncamiento no es tan grave cuando se conoce exactamente el tamaño del error, y cuando éste puede reducirse simplemente aumentando el número de dígitos, lo cual nos lleva a la noción de límite. Si se calcula la diferencia entre el valor exacto y el valor truncado en valor absoluto[2] se tiene

$$\left|\frac{1}{3} - 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}\right| = \frac{1}{3\cdot 10^n} < \frac{1}{10^n}. \tag{3.22}$$

La desigualdad (3.22) nos permite aproximar $\frac{1}{3}$ con una suma finita con una precisión arbitraria en términos de n. Por ejemplo, si se desea que la diferencia sea menor que $1/10^{50}$ basta tomar $n = 50$, así

$$\left|\frac{1}{3} - 0.\underbrace{333\cdots 3}_{50}\right| < \frac{1}{10^{50}}.$$

La posibilidad de tal aproximación nos permite escribir

$$\frac{1}{3} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k},$$

con infinito en el límite superior de la suma, pero más aún, nos permite definir el límite de sucesiones de manera formal como sigue.

Definición 3.7.1 (límite de sucesiones). Dada una sucesión $\{a_n\}$ se dice que la sucesión converge a un límite ℓ, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$|a_n - \ell| < \varepsilon,$$

[2]El valor absoluto de la diferencia de x con y, lo cual se escribe $|x-y|$, proporciona la distancia entre x, y. El valor absoluto de un número real a se define mediante $|a| = \sqrt{a^2}$.

lo cual se denota

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

y se dice que la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite ℓ. En particular, para sucesiones de sumas parciales $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ si $\{S_n\}$ converge a un límite ℓ se escribe

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell.$$

■ **Ejemplo 3.6** Nuestro primer ejemplo es por supuesto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{1}{3}$. ■

3.7.1 Operaciones con sucesiones

La suma de dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ se define mediante

$$\{a_n\} + \{b_n\} \stackrel{def}{=} \{a_n + b_n\}$$

y si $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria

$$c\{a_n\} \stackrel{def}{=} \{c\,a_n\}.$$

Los límites de sucesiones tienen muchas propiedades, pero en este enfoque básico nos reduciremos a las enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.7.1 **(propiedades de límites de sucesiones).** Si $\{a_n\}, \{b_n\}$ son dos sucesiones y c una constante cualquiera, se cumple que

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = m$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \ell + m.$$

ii) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = c\ell.$$

N **Nota.** Las demostraciones de las propiedades del límite de sucesiones son elementales, pero no se recomienda estudiarlas en un primer acercamiento. El lector interesado puede consultar el libro de Courant y John [6], por ejemplo.

3.7.2 Sumas que convergen y series que no convergen

Si bien es verdad que la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge si $-1 < r < 1$, como veremos, también puede verse que si $1 < r$ o si $r < -1$, entonces la serie diverge.

Teorema 3.7.2 **(convergencia de series geométricas).** La serie geométrica definida por la sucesión de sumas parciales en (3.16) converge si $-1 < r < 1$ y no converge si $1 \leq r$ o $r \leq -1$.

Idea de la demostración. La sucesión de sumas parciales en (3.16) tiene límite si $-1 < r < 1$, ya que en tal caso $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a_0}{1-r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}\right) = \frac{a_0}{1-r},$$

es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = \frac{a_0}{1-r}.$$

El caso cuando $r \geq 1$ claramente, no existe el límite $\lim_{n\to\infty} r^{n+1}$ con lo cual se puede decir que la serie no converge, o equivalentemente, se puede decir que *la serie diverge.* Similarmente, diverge para $r \geq 1$.

El lector interesado puede consultar la demostración formal que $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$, si $0 < r < 1$ en el libro de Courant (*op. cit.*)

Otra serie que no converge es la llamada *serie armónica*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

Que la serie no converge puede verse mediante el siguiente arreglo.

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

N **Nota.** Una serie armónica se define como toda serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ tal que la serie $\dfrac{1}{a_n}$, es una sucesión aritmética. La serie armónica estudiada arriba, claramente satisface este criterio al ser aritmética la sucesión $\{n\}$.

3.8 Decimales periódicos

Todo número racional x (es decir todo elemento de $\mathbb{Q}$) puede escribirse de la forma $x = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$. En esta sección se muestra como todo decimal periódico es necesariamente un número racional.

Definición 3.8.1 (decimal periódico). Se llama *decimal* a un número x de la forma

$$x = n.a_1a_2a_3\cdots = n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots,$$

donde $n \in \mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ se llama parte entera de x y se denota

$$[x] \stackrel{def}{=} n,$$

los números a_n son números naturales tales que $0 \leq a_n \leq 9$ y el número $0.a_1a_2a_3\cdots$ se llama *parte fraccionaria* de x.

El número x se llama *decimal periódico* si existen m, r tales que $a_n = a_{n+m}$ para toda $n > r$.

Con la definición anterior puede decirse que todo decimal periódico puede escribirse de la forma

$$x = n.b_1b_2\ldots b_r\overline{a_1a_2\cdots a_m}\cdots, \tag{3.23}$$

donde $b_1,\ldots b_r$ son dígitos arbitrarios (es decir números entre cero y nueve arbitrarios) y los dígitos bajo la línea, es decir, $\overline{a_1a_2\cdots a_m}$ se repiten infinitamente a partir de su primera aparición.

El menor número m para el cual se repiten los dígitos en un decimal periódico se denomina *tamaño del periodo* y los dígitos $a_1a_2\ldots a_m$ se llaman el periodo del decimal. Se llama decimal finito a un decimal con periodo 0. Si para un número x, se tiene que $r = 0$ y que x es finito, entonces $x \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.8.1 (racionales periódicos). Todo decimal periódico es un número racional y, recíprocamente, todo número racional tiene representación decimal periódica.

Demostración. Considere el decimal periódico x de la forma (3.23). Sea r el número de dígitos antes del periodo y sea m tamaño del periodo del decimal. Multiplique x por 10^{r+m}, entonces

$$10^{r+m}x = 10^{r+m}\cdot n + b_1b_2\dots b_ra_1a_2\cdots a_m.\overline{a_1a_2\cdots a_m}\cdots$$

Multiplique nuevamente por 10^m para obtener

$$10^{r+2m}x = 10^{r+2m}\cdot n + b_1b_2\dots b_ra_1a_2\cdots a_ma_1a_2\cdots a_m.\overline{a_1a_2\cdots a_m}\cdots$$

Al restar se obtiene

$$10^{r+2m}x - 10^{r+m}x = 10^{r+m}(10^m-1)x = y.\overline{0} = y \in \mathbb{Z}. \tag{3.24}$$

Es decir, se obtiene un número y sin parte decimal. Por lo tanto

$$x = \frac{y}{10^{r+m}(10^m-1)} \in \mathbb{Q},$$

dado que x es cociente de enteros.

Recíprocamente supongamos que x es un número racional, digamos $x = \dfrac{h}{k}$, con $k > 0$. Las partes fraccionarias del conjunto infinito

$$\{x, 10x, 10^2x, \dots\}$$

toman sus valores en el conjunto finito

$$\left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \cdots, \frac{k-1}{k}\right\} \tag{3.25}$$

y por lo tanto, existen números s, r tales que10^sx y $10^{s+r}x$ tienen la misma parte fraccionaria dado que el conjunto en (3.25) es finito. Defina n restando las partes enteras de los números anteriores, es decir,

$$n \overset{def}{=} [10^{s+r}x] - [10^sx].$$

Se tiene así que al ser iguales las partes fraccionarias de 10^sx y $10^{s+r}x$

$$\begin{aligned} 10^{s+r}x - [10^{s+r}x] &= 10^sx - [10^sx] \\ 10^sx(10^r-1) &= n \\ 10^sx &= \frac{n}{10^r-1} \end{aligned}$$

La última línea en el desarrollo anterior puede ser escrita como

$$10^sx = \frac{n}{10^r-1} = n_1 + \frac{n_2}{10^r-1} \tag{3.26}$$

donde $0 \le n_2 < 10^r - 1$. La ecuación (3.26) puede ser reescrita en la forma

$$\begin{aligned} 10^sx - n_1 &= \frac{n_2}{10^r}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^r}} \\ &= \frac{n_2}{10^r}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^r}\right)^k \\ &= \frac{n_2}{10^r} + \frac{n_2}{10^{2r}} + \frac{n_2}{10^{3r}} + \cdots, \end{aligned}$$

La expresión anterior es evidentemente periódica, de donde se concluye que

$$x = \frac{1}{10^s}\left(n_1 + \frac{n_2}{10^r} + \frac{n_2}{10^{2r}} + \frac{n_2}{10^{3r}} + \cdots\right),$$

es un decimal periódico. $\square$

Corolario 3.8.2 Si la expansión decimal de un número x no es periódica, entonces x no es racional.

■ **Ejemplo 3.7** Números como $\sqrt{2}$, π, e no tienen expansión decimal periódica y por lo tanto no son racionales. De hecho puede demostrarse que la mayoría de los números no son racionales, lo cual se hará en el capítulo dedicado a los conjuntos. ■

N **Nota.** Recuerde que un número con expansión finita, según la definición dada, tiene expansión periódica.

Ejercicio 3.9 Escriba $0.\overline{618}$ como un número de la forma p/q con $p,q \in \mathbb{Z}$.
Solución. Sea $x = 0.\overline{618}$, entonces $r = 0$ y x tiene periodo de tamaño 3, así que multiplicamos x por 10^3 y

$$\begin{aligned} 10^3x - x &= 618.\overline{618} - 0.\overline{618} \\ (10^3 - 1)x &= 618 \\ x &= \frac{618}{999} = \frac{203}{333}. \end{aligned}$$

■

Ejercicio 3.10 Muestre que $1 = 0.999\cdots$.
Solución. Sea $x = 0.999\cdots$ entonces $10x = 9.999\cdots$ de tal forma que

$$\begin{aligned} 10x - x &= 9 \\ 9x &= 9 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

■

N **Nota.** El ejercicio anterior muestra que todo decimal finito tiene dos representaciones válidas, por ejemplo $0.5 = 0.4999\cdots$, etcétera.

3.8.1 ¿Por qué son convergentes los decimales?

Hemos visto que la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$, no converge, lo cual debe provocar la pregunta: ¿cuales series convergen?, en particular, ¿por qué la serie

$$0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{N},\ 0 \le a_k \le 9,\ k = 0,1,\ldots$$

realmente representa a un número real? Esta pregunta constituye un verdadero punto álgido del saber matemático elemental y la falta de respuesta es una enorme laguna de conocimientos en la enseñanza elemental. En general se evade responder a este asunto con la promesa al estudiante curioso, que se enseñará más adelante, algún día... Pues bien, estimado lector, llegados a este punto, es donde se dará respuesta a tan relevante asunto. Pero antes se requieren algunas definiciones.

Definición 3.8.2 (sucesiones no decrecientes). Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales es *creciente*, si y solo si $a_{n+1} \ge a_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.8.3 (sucesiones acotadas). Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales es *acotada* si y solo si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \le M$, para toda $n = 0,1,2,\ldots$.

Teorema 3.8.3 (principio de Weierstrass). Si una sucesión creciente de números reales está acotada superiormente, entonces converge.

■ **Ejemplo 3.8** La sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, no esta acotada, ya que $S_n > \frac{L(n)}{2}$, donde $L(n)$ depende del número n de términos que se consideren. ■

N La sucesión de sumas parciales S_n no esta acotada ya que

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

.

Todas las sucesiones $0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathbb{N},\ 0 \le a_k \le 9,\ k = 0,1,\ldots$ están acotadas por el número 1. Efectivamente,

$$0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1.$$

Más generalmente, para todo número decimal $z.a_1a_2\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ con $z \in \mathbb{Z}$ se tiene $|z.a_1a_2\cdots| \le |z+1|$, por lo que, de acuerdo al principio de Weiertrass, **todo número decimal es una serie convergente.**

N **Nota.** En este punto se puede aceptar el principio de Weierstrass como un postulado de los números reales o bien se puede enunciar el axioma del supremo y demostrar que el principio de Weierstrass es consecuencia del axioma del supremo[3]. El lector interesado puede consultar el libro de Apostol [2].

El principio de Weierstrass implica el principio de Arquímedes, el cual se enuncia a continuación.

Teorema 3.8.4 (Principio de Arquímedes). Dados dos números reales $a > 0$ y b cualesquiera, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

N **Nota.** Observe que el principio de Arquímedes implica que la sucesión b/n converge a cero para toda $b \in \mathbb{R}$.

Demostración del principio de Arquímedes. Suponga que se cumple el principio de Weierstrass, pero no el principio de Arquímedes. Entonces existe $a > 0$ tal que la sucesión definida por $x_n = na$ está acotada. Note que además la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Por lo tanto, por el principio de Weierstrass la sucesión $\{x_n\}$ converge, digamos $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. De esta forma, para cada $\varepsilon > 0$ existe N_ε tal que si $n > N_\varepsilon$, entonces

$$-\varepsilon < x_n - \ell < \varepsilon. \tag{3.27}$$

Tome $\varepsilon = \frac{a}{2}$ y substituya en (3.27), entonces

$$\ell - \frac{a}{2} < x_n < \ell + \frac{a}{2} \tag{3.28}$$

si $n > N_\varepsilon$. Sumando a en (3.28) con la desigualdad del lado izquierdo se tiene,

$$\ell + \frac{a}{2} < a(n+1) \tag{3.29}$$

[3] El axioma del supremo dice que todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente tiene una cota superior mínima.

pero si $n > N_\varepsilon$, ciertamente se debe satisfacer $n+1 > N_\varepsilon$, por lo que se debería tener por (3.27) y la definición de límite

$$a(n+1) < \ell + \frac{a}{2}$$

en contradicción con (3.29). Por lo tanto, el principio de Weierstrass implica el principio de Arquímedes. □

Los principios de Weierstrass y Arquímedes son la esencia del concepto de continuidad en Geometría y en el Cálculo Diferencial e Integral. Por *continuidad* dos rectas que se cruzan tienen un punto común en geometría analítica. También la continuidad implica que si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$ y se cumple $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$ con $x_1 < x_2$ entonces necesariamente existe una raíz ξ, $x_1 < \xi < x_2$ para la cual se cumple $f(\xi) = 0$. Solo se mostraron dos ejemplos de donde se aplica la *continuidad*, pero las consecuencias son muchas, muchísimas más, en particular son innumerables las aplicaciones en física e ingeniería.

3.9 Números irracionales, algebraicos y trascendentes

Llamaremos irracionales elementales a aquellos cuya irracionalidad pueda ser demostrada por medio del siguiente teorema tomado del libro de Niven [16], por ejemplo $\sqrt{2}$.

Teorema 3.9.1 (irracionales elementales). Si un número real x satisface una ecuación de la forma

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0, \quad n > 1,$$

con coeficientes $c_1, c_2, \ldots c_n$ que sean números enteros, entonces o bien x es un número entero o bien es un número irracional.

Demostración. Supongamos que $x = \dfrac{a}{b}$, con 1 como máximo común divisor de a y b. Entonces

$$a^n = -b(c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} b + \cdots + c_n b^{n-1}).$$

Si $b > 1$, entonces todo divisor primo p de b debe dividir a^n por el teorema fundamental de la aritmética[4]. Pero esto contradice la condición de que el máximo común divisor de a y b es 1. Se concluye que $b = 1$, lo que establece que x si es racional es un número entero. □

■ **Ejemplo 3.9** Con el teorema anterior, dado que $\sqrt{2}$ satisface a ecuación $x^2 - 2 = 0$, se concluye $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ es decir, se concluye que es un número irracional, ya que $1 < \sqrt{2} < 2$ (¿por qué?) y así $\sqrt{2}$ no puede ser entero. Pero hay muchos ejemplos que con la misma argumentación puede demostrarse que son irracionales, por ejemplo $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$, etcétera. Pero no solo números primos, por ejemplo, dado que $\sqrt{6}$ satisface la ecuación $x^2 - 6 = 0$, se concluye que $x = \sqrt{6}$ es irracional puesto que x no es entero (¿por qué?). Se deja como ejercicio demostrar que todo número primo p tiene raíz cuadrada irracional y con este resultado se obtiene un número infinito de irracionales. ■

En la sección anterior se demostró que todo número con expansión decimal no periódica es necesariamente irracional, es decir, no racional. Sin embargo, la forma de demostrar si un número es racional o no, no utiliza en general la expansión decimal. Por ejemplo, el siguiente teorema.

Teorema 3.9.2 (*e* es irracional). El número e cuya expresión en series es

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots, \tag{3.30}$$

donde $n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, es irracional.

[4] El teorema fundamental de la aritmética (teorema 3.4.1) dice que todo entero positivo mayor que 1 puede ser escrito como producto de números primos de manera única exceptuando el orden de los factores.

Demostración. Primero, observe que la serie $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$ converge, dado que como sucesión de sumas parciales de términos positivos es creciente y en segundo lugar, dado que la serie es acotada

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots &< 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) \\ &\leq 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 3, \end{aligned}$$

con lo que se concluye que la sucesión de sumas parciales es acotada y, por el principio de Weierstrss, por lo tanto convergente, así que tiene sentido definir[5]

$$e \stackrel{def}{=} 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

Suponga que e es racional y $e=\dfrac{h}{k}$, $h,k>0$, entonces

$$0 \leq k!\left(e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)\right) \tag{3.31}$$

es un entero. Al substituir en (3.31) la serie de e en (3.30) se tiene

$$\begin{aligned} k!\left(e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)\right) &= \\ &= \frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\cdots \\ &< \frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^3}+\cdots \\ &= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{k+1}}=\frac{1}{k}\leq 1. \end{aligned}$$

Lo cual contradice que la expresión en (3.31) sea un entero, ya que no hay enteros entre cero y uno, con lo cual se concluye que e es irracional. □

Una peculiaridad del número e, además de ser irracional, es que es trascendente pero antes de entrar en detalles, se requiere la definición de lo que es un número algebraico.

Definición 3.9.1 (número algebraico). Un número x que satisface una ecuación de la forma

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0, \tag{3.32}$$

con $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números racionales, se llama *número algebraico*.

Un polinomio como el de la ecuación en (3.32) cuyo coeficiente de la mayor potencia de x es 1, se llama *polinomio mónico*. El polinomio mónico de menor grado que satisface un número algebraico x se llama *polinomio mínimo* de x y el grado del polinomio mínimo se llama *grado del número algebraico x*.

■ **Ejemplo 3.10** Todo número racional es número algebraico de grado 1. El número $\sqrt{2}$, es algebraico de grado 2 cuyo polinomio mínimo es x^2-2. ■

Definición 3.9.2 (número trascendente). Un número que no es algebraico se llama *número trascendente*.

[5]Que la serie sea convergente da derecho a ponerle nombre, el nombre que se le da en este momento es e. Que e, interpretado como base del logaritmo natural pueda escribirse como la serie $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$ se estudia en los libros de Cálculo serios como el libro "Calculus" de Spivak [20].

■ **Ejemplo 3.11** Basta mencionar por el momento e y π como ejemplos de números trascendentes, aunque la demostración de estos hechos está fuera de los objetivos de este libro. Un conjunto infinito de números trascendentes está dado por los números de Liouville, los cuales se definen a continuación. ■

Definición 3.9.3 Definición (números de Liouville). Un número x se dice que es un número de Liouville si y solo si para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un número racional h_m/k_m con $k_m > 1$ tal que

$$\left| x - \frac{h_m}{k_m} \right| < \frac{1}{k_m^m} \tag{3.33}$$

Proposición 3.9.3 Todo número de Liouville es trascendente.

Demostración. La demostración está fuera del alcance de los objetivos de este libro, pero el lector interesado puede encontrarla en [16, thm. 7.9].

Con el teorema anterior se puede obtener un número infinito de números trascendentes:

■ **Ejemplo 3.12** Los números ξ de la forma

$$\xi = \frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots + \frac{a_n}{10^{n!}} + \cdots,$$

donde a_i es ya sea 1 o 2, puede demostrarse que satisfacen la definición 3.33 y por lo tanto son trascendentes. ■

3.9.1 $\mathbb{R}$ no es numerable

En la sección 2.7 se definió el concepto de conjunto numerable. En esta sección, una vez que se está más familiarizado con la expansión decimal de los números reales, puede demostrarse que el conjunto de los números reales *no es numerable.*

Teorema 3.9.4 ($\mathbb{R}$ no es numerable). No existe correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$.

Demostración. Basta demostrar que no existe correspondencia biunívoca entre $\mathbb{N}$ y los números reales entre 0 y 1. Se procede por reducción al absurdo. Suponga que existe la correspondencia biunívoca $\mathbb{N} \leftrightarrow [0,1]$, dada por el siguiente arreglo

$$\begin{array}{ccl}
1 & \leftrightarrow & 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
2 & \leftrightarrow & 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
3 & \leftrightarrow & 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
\vdots & & \vdots \\
n & \leftrightarrow & 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\ldots \\
\vdots & & \vdots,
\end{array}$$

como por hipótesis la correspondencia es biunívoca a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un y solo un número real entre 0 y 1 y, además, para todo $x \in [0,1]$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leftrightarrow x$. Sea $b = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$, donde b_j es cualquier dígito distinto de a_{jj} para $j = 1,2,3,\ldots$. Observe que b es un número entre 0 y 1, pero que no aparece en el listado ya que $b \neq 0.a_{j1}a_{j2}\cdots a_{jj}$ para toda $j = 1,2,3,\ldots$ ya que $b_j \neq a_{jj}$, para toda j. Con lo cual se tiene una contradicción ya que por hipótesis la correspondencia $\mathbb{N} \leftrightarrow [0,1]$ es biunívoca. Por lo tanto $\mathbb{R}$ no es numerable. □

Números no computables

Si bien el lector puede pensar que el hecho de que un número sea trascendente lo convierte inmediatamente en un ente muy complicado, casi inalcanzable, las cosas pueden ser mucho peores. Turing [22] reveló el hecho de que existen números que no son computables, lo que básicamente significa que tales números *no pueden ser obtenidos por computadoras* ya que no existe algoritmo alguno para producirlos. Un ejemplo de un número no computable está dado en el citado artículo de Turing: el número δ (pag. 253), aunque en la actualidad se conocen muchos más que el lector interesado podrá encontrar seguramente. Sin embargo, los números algebraicos son computables, así como los números e y π, pero, ¡la vasta mayoría de los números no son computables! Esto es así, dado que el conjunto de los números computables es numerable, mientras que el conjunto de los números reales no, como se demostró en un capítulo anterior.

3.10 Ejercicios del capítulo 3

3.10.1 Nivel básico

1. Escriba en forma de suma las siguientes series
   a) $1+3+5+7+9+11$.
   b) $2-4+8-16+32$.
   c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.
   d) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(2n)}$,
   donde $0!=1$ y $k!=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

3.10.2 Nivel intermedio

2. Demuestre mediante inducción matemática las fórmulas (3.6) y (3.7)
3. Demuestre mediante inducción matemática las fórmulas:
   a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
   c) $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a}, a\neq 1$.
   d) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
   e) $n<2^n$.
   f) $1+2n\leq 3^n$.
4. Demuestre que si $a\neq 0$ y $a>-1$ entonces se cumple $(1+a)^n>1+na$ para todo $n\geq 2$.
5. Demuestre la fórmula (3.11).
6. Calcule la suma de los primeros 100 números pares.
7. ¿Cuántos números naturales divisibles por 6 hay entre 32 y 395? Calcule la suma de todos ellos.
8. Obtenga la fórmula (3.15) y demuéstrela por inducción matemática.
9. Demuestre la fórmula (3.16) por inducción matemática.
10. Calcule las siguientes sumas
    a) $\sum_{k=1}^{10}(\sqrt{2})^k$.
    b) $\sum_{k=0}^{7}(\sqrt{2})^{-k}$.
    c) $\sum_{k=0}^{11}(-1/5)^k$.
11. Encuentre los valores de k para los cuales los términos consecutivos $3k+1, k-3$ y $2k+9$ forman una sucesión geométrica.
12. Encuentre el noveno término de una sucesión geométrica que tiene como segundo término a 5 y como tercer término $-\sqrt{2}$.
13. El número de virus en un cultivo aumenta 30 % cada hora. Si el número inicial era de un millón, encuentre una fórmula para el número de virus en t horas. Cuántos virus hay en el cultivo después de un día.
14. Escriba los siguientes decimales como números de la forma p/q con $p,q\in\mathbb{Z}$.
    a) $412.35\overline{1372}$.
    b) $0.\overline{999999}$
    c) $3.1415\overline{0}$

3.10.3 Nivel avanzado

15. Demuestre por inducción sobre n que para todo $m,n\in\mathbb{N}$ y todo número real x, $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$ y que $(x^m)^n=x^{mn}$.
16. Demuestre que si p es un número primo entonces $\sqrt{p}$ es irracional.
    Indicación. Use el teorema Irracionales elementales.

4. Rudimentos del álgebra de los números reales

En este capítulo se estudian las propiedades algebraicas de los números reales desde una perspectiva axiomática. El lector encontrará que las reglas que ha usado para manipular los números pueden estudiarse sistemáticamente y pueden ser comprendidas y demostradas partiendo de ciertos axiomas. Uno de los principales objetivos de este libro es precisamente estudiar la matemática desde la perspectiva axiomática deductiva, lo cual es indispensable para comprender la matemática actual.

4.1 Introducción

Una vez que se ha trabajado un poco con las representaciones de los enteros, racionales y etcétera es conveniente introducir las estructuras algebraicas que dan razón a las propiedades más utilizadas que surgen en la práctica al trabajar con números reales.

Primeramente, en $\mathbb{R}$ están definidas dos operaciones que satisfacen el siguiente principio:

A0 (cerradura). En $\mathbb{R}$ están definidas dos operaciones, suma y producto tales que si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces $x+y \in \mathbb{R}$ y $x \cdot y = xy \in \mathbb{R}$.
PS (principio de sustitución). Las operaciones suma y producto satisfacen el *principio de sustitución*, es decir si a cosas iguales se suman cosas iguales, resultan cosas iguales y si a cosas iguales se les multiplican cosas iguales, resultan cosas iguales. El nombre “principio de sustitución” está justificado debido a que si $a = b$ y $c = d$ y “$*$” es una operación *bien definida* se entiende que es válido escribir $a * c = b * d$ por ser solo nombres diferentes de las mismas cosas.

La mayor diferencia desde un punto de vista del álgebra de $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ es la existencia de inversos multiplicativos de la cual carece $\mathbb{Z}$. La existencia de inversos multiplicativos caracteriza a las estructuras llamadas *campos*. Ejemplos de campos son $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. A continuación se enumera la lista completa de propiedades que deben satisfacer los elementos de un campo.

4.2 Propiedades de campo de $\mathbb{R}$

Axioma 4.1 En $\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

A1. **Leyes conmutativas.** La suma y el producto son conmutativas, es decir, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $x+y = y+x$, $xy = yx$.

A2. **Leyes asociativas.** Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(xy)z = x(yz)$.

Demostración tabular de la ley de cancelación	
Afirmaciones	**Razones**
1. $x,y,z \in \mathbb{R}$	1. Hipótesis.
2. $x+y=x+z$	2. Hipótesis.
3. $\exists -x \in \mathbb{R} : (-x)+x=0$	3. A4 (elemento inverso), ya que por 1, $x \in \mathbb{R}$.
4. $(-x)+(x+y)=(-x)+(x+z)$.	4. Sumando (-x) en ambos miembros de 2.
5. $((-x)+x)+y=((-x)+)x+z$,	5. A2 (ley asociativa) en 4.
6. $0+y=0+z$.	6. A4 en 5.
7. $y=z$	7. Se concluye de 6 por A3 (neutro aditivo).

Tabla 4.1: Demostración tabular de la ley de cancelación.

A3. **Elementos neutros.** Existe el elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x+0=0+x=x$. Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $1x=x1=x$.

A4. **Elementos inversos.** Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$. Para toda $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$ existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x(x^{-1})=1$.

A5. **Ley distributiva** Para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$x(y+z)=xy+xz.$$

Todo conjunto no vacío de números donde se hayan definido dos operaciones suma y producto cualesquiera que satisfagan las propiedades A1 a A5 anteriores, se llama *campo*. El número 0 se llama *neutro aditivo* y el número 1 se llama *neutro multiplicativo*. El número $-x$ se llama *inverso aditivo* de x y el número x^{-1} se llama *inverso multiplicativo* de x. Partiendo de las propiedades A1 a A5 se pueden demostrar muchas propiedades familiares para el lector, pero que quizá aprendió de una manera informal, es decir, sin demostraciones, propiedades las cuales deberán satisfacer los elementos de un campo cualquiera, en general.

Proposición 4.2.1 (ley de la cancelación). Para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$ si $x+y=x+z$, entonces $y=z$.

Demostración. Sean x,y,z números reales. Suponga que $x+y=x+z$. Por el axioma A4 existe $-x$ tal que $(-x)+x=0$. Entonces

$$(-x)+(x+y)=(-x)+(x+z).$$

Ahora por la propiedad asociativa (axioma A2)

$$((-x)+x)+y=((-x)+x)+z,$$

así

$$0+y=0+z.$$

Se concluye por el axioma A3 que $y=z$. □

Para el lector aprendiz se recomienda, al igual que con los conjuntos, utilizar tablas para realizar las demostraciones lo cual lo ayudará a distinguir las hipótesis, memorizar los axiomas y darse cuenta si desconoce la validez de alguna razón o razonamiento. A continuación, se repite la demostración anterior pero en forma tabular en la tabla 4.1.

N **Nota.** Como puede observar el lector, en la demostración tabular en la tabla 4.1 se evidencia algunos pasos que se dieron por obvios en la demostración no tabular de la ley de la cancelación, como es el caso del paso 4. El paso 4 corresponde a PS y suele enunciarse como “si a cosas iguales se suman cosas iguales los resultados son iguales” lo cual no es un axioma para los campos, sino una propiedad de las operaciones bien definidas, en este caso, la operación suma, operación que se da por conocida. En un enfoque axiomático si algo no es un axioma o proposición ya demostrada a partir de los axiomas, su validez debe justificarse. Cuando se utilice esta propiedad se mencionará como “principio de sustitución”. Tampoco se ha definido el signo “=” el cual también se da por conocido. Cabe aclarar que, por el mismo principio de sustitución, también se da por válida la siguiente ley: Si $x=y$, entonces $zx=zy$, la cual se mencionará también como “principio de sustitución”, cuando se requiera o bien se obviará mencionar el nombre dado.

Proposición 4.2.2 Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x0 = 0$.

Demostración. Dado que $0 = 0+0$, por A3, se puede escribir

$$x0 = x(0+0)$$

y por la ley distributiva A5,

$$x0 = x0 + x0.$$

También por la propiedad del elemento neutro A3, $x0 = x0 + 0$. Entonces

$$\begin{aligned} x0 + x0 &= x0 \\ &= x0 + 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la ley de la cancelación (proposición 1), $x0 = 0$. □

Proposición 4.2.3 Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ si $x+y=0$, entonces $y = -x$. Además si $xy = 1$, entonces $x = y^{-1}$.

Demostración. Si $x+y=0$, sumando $-x$ en ambos lados de la ecuación, (lo que es válido por A0)

$$-x + (x+y) = -x + 0.$$

Tenemos para el lado derecho de la anterior expresión

$$-x + (x+y) = (-x+x) + y,$$

por la ley asociativa. Por las propiedades del elemento inverso $(-x+x)+y = 0+y$ y por la ley del elemento neutro para la suma $0+y=y$. Como también por las propiedades del elemento neutro $-x+0=-x$, se concluye $y=-x$.

Supongamos ahora que $xy = 1$, entonces $x \neq 0$, ya que si $x = 0$, entonces $0 = xy = 1$, lo cual es absurdo. Como $x \neq 0$ por la propiedad del neutro A3, existe x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. De esta forma

$$\begin{aligned} x^{-1}(xy) &= x^{-1}1 \text{ (por A0)}, \\ (x^{-1}x)y &= x^{-1} \text{ (por A2)}, \\ 1y &= x^{-1} \text{ (por A4)}, \\ y &= x^{-1} \text{ (por A3)}. \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la propiedad 3. □

Corolario 4.2.4 Para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$-(-a) = a,$$

si $a \neq 0$, entonces

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Demostración. Por A4, $(-a)+a = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Por la proposición 3, tomando $x = -a$ y $y = a$ se obtiene $a = -(-a)$. La demostración de que $(a^{-1})^{-1} = a$ es similar y se deja como ejercicio. □

Proposición 4.2.5 Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x)y = -(xy)$ y $x(-y) = -(xy)$.

Demostración. Se desea demostrar que $xy + (-x)y = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} xy + (-x)y &= (x+(-x))y \text{ (ley distributiva A5)}, \\ &= 0 \cdot y \text{ (elemento inverso A4)}, \\ &= 0 \text{ (proposición 2)}. \end{aligned}$$

Ahora dado que $xy + (-x)y = 0$, por la definición de inverso aditivo, $(-x)y = -xy$. La demostración de que $x(-y) = -(xy)$ es similar a la anterior partiendo de la ley conmutativa y los detalles se dejan como ejercicio. □

Corolario 4.2.6 Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x)(-y) = xy$.
Demostración. Tenemos que, por la proposición 4

$$\begin{aligned}(-x)(-y) &= -(x(-y)) \\ &= -(-(xy)), \text{ (nuevamente por la proposición 4),} \\ &= xy, \text{ (por el corolario 1).}\end{aligned}$$

Nota. En particular, por el corolario 2, se cumple que

$$(-1)(-1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

También, dado que $1 \cdot x = x$

$$(-1)x = -x,$$

lo que permite introducir la siguiente definición.

Definición 4.2.1 (definición de sustracción). Si $x, y \in \mathbb{R}$, se define

$$x - y \stackrel{def}{=} x + (-y) \tag{4.1}$$

También es oportuno definir la división de números reales.

Definición 4.2.2 (definición de división). Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $y \neq 0$, se define

$$\frac{x}{y} \stackrel{def}{=} xy^{-1}. \tag{4.2}$$

Para referirse al símbolo $\frac{x}{y}$ suele decirse "división de x por y" o bien "el *cociente* de x y y" o bien la "fracción de x sobre y". En el cociente de x por y el número "x" se llama *numerador* y al número "y" se le llama *denominador*.

Nota. En la matemática elemental el símbolo $\frac{x}{y}$ suele ser sustituido por $x \div y$. Por otra parte, observe que

$$y^{-1} = 1 \cdot y^{-1} = \frac{1}{y},$$

de donde tiene sentido escribir

$$\frac{x}{y} = xy^{-1} = x\frac{1}{y}.$$

El siguiente teorema muestra como sumar y multiplicar fracciones.

Proposición 4.2.7 (suma y producto de fracciones). Para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ si $y \neq 0$ y $w \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} + \frac{z}{w} &= \frac{xw + zy}{yw}, \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} &= \frac{xz}{yw}.\end{aligned}$$

La demostración de la ley del producto se deja como ejercicio. □

Directamente de la definición y con las propiedades hasta ahora demostradas, el lector no debe tener problema en demostrar el siguiente corolario el cual es de mucha utilidad en la práctica, cuya demostración también se deja como ejercicio.

Corolario 4.2.8 Para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ si $y \neq 0$, $z \neq 0, w \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{xw}{yw} &= \frac{x}{y}, \\ -\frac{x}{y} &= \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}, \\ \frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} &= \frac{xw}{yz}.\end{aligned}$$

Demostración de la ley de suma de fracciones	
Afirmaciones	**Razones**
1. $x,y,z,w \in \mathbb{R}$	1. Hipótesis.
2. $\frac{x}{y}+\frac{z}{w} = xy^{-1}+zw^{-1}z$	2. Definición de fracciones.
3. $= x(1)y^{-1}+z(1)w^{-1}$	3. A3 elemento neutro,
4. $= x(ww^{-1})y^{-1}+z(yy^{-1})w^{-1}$,	4. A4 elemento inverso,
5. $= (xw)(w^{-1}y^{-1})+(zy)(y^{-1}w^{-1})$,	5. A2 (ley asociativa) en 4.
6. $= (xw+zy)(w^{-1}y^{-1})$	6. A1 y A5.
7. $= \frac{xw+zy}{yw}$,	7. Se concluye de 6 por la definición de cociente.

La siguiente proposición fue usada en forma de paradigma en el capítulo dedicado a la lógica matemática.

Proposición 4.2.9 Para todo $x,y \in \mathbb{R}$ si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.

Demostración. Sean x,y números reales. Suponga que $xy = 0$. Si $x = 0$ no hay nada que demostrar. Si $x \neq 0$. Entonces por la propiedad A4, existe x^{-1} tal que $x^{-1}(xy) = x^{-1}0$. Así $(x^{-1}x)y = x^{-1}0$, por la propiedad asociativa A2 aplicada del lado izquierdo, además, $x^{-1}0 = 0$ por la proposición 2. Ahora por A4, $(x^{-1}x)y = 1y$, dado que $x^{-1}x = 1$. Por lo tanto $1y = y = 0$, por A3. □

4.3 Expresiones algebraicas, notación

En esta sección se formalizarán varias expresiones algebraicas que se suponen conocidas por el lector. También se harán algunas demostraciones de teoremas que son usados en la enseñanza preuniversitaria sin justificación.

4.3.1 Exponentes enteros

A continuación se define la notación para el producto de un número real consigo mismo.

Definición 4.3.1 Sea $x \in \mathbb{R}$ se define x^n, $n \in \mathbb{N}$ mediante el producto de x consigo mismo n veces, es decir,

$$x^n \overset{def}{=} \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}.$$

Si $x \neq 0$, se define $x^0 \overset{def}{=} 1$. El número n se llama *exponente* de x y la expresión x^n se lee "x a la n-ésima potencia" o simplemente: "x a la n".

■ **Ejemplo 4.1** Se tiene por definición que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$
$$(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

No debe olvidarse que $x \cdot x = x^2$. ■

N **Nota.** Debe observarse que la expresión ax^n significa $a(x^n)$ y **no** $(ax)^n$. La definición $x^0 = 1$ cobrará sentido cuando se definan los exponentes negativos y se extiendan los resultados del siguiente teorema de $\mathbb{N}$ a los números en $\mathbb{Z}$.

Proposición 4.3.1 **(leyes de los exponentes).** Para todo $x,y \in \mathbb{R}$ y $m,n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes propiedades:

e1. $x^m x^n = x^{m+n}$,
e2. $(x^m)^n = x^{mn}$,
e3. $(xy)^n = x^n y^n$.

Demostración. Para demostrar e1 se procede por inducción sobre n. Para $n=1$ se tiene

$$x^m x^1 = x^m x = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m \text{ veces}} \cdot x = \underbrace{x \cdot x \cdots x \cdot x}_{m+1 \text{ veces}} = x^{m+1}.$$

Por lo tanto e1 se cumple para $n=1$. Supongamos que e1 se cumple para $n=k$, es decir, supongamos que

$$x^m x^k = x^{m+k}. \tag{4.3}$$

entonces se desea demostrar que e1 es válido para $n=k+1$, partiendo de la hipótesis (4.3), es decir, se desea demostrar que $x^m x^{k+1} = x^{m+k+1}$. Al multiplicar (4.3) por x se tiene

$$x^m x^k \cdot x = x^{m+k} \cdot x, \tag{4.4}$$

del lado izquierdo de (4.4) se obtiene

$$x^m x^k \cdot x \quad = \quad x^m \cdot x^{k+1}$$

dado que $x^k \cdot x = x^{k+1}$, al sustituir $m=k$ en la demostración para $n=1$. Similarmente, del lado derecho de (4.4) se tiene

$$x^{m+k} \cdot x = x^{m+k+1},$$

al sustituir m por $m+k$ en la demostración para $n=1$. Por lo tanto, se obtiene lo que se desea demostrar.

Para demostrar e2, también se procede por inducción sobre n. Por definición, $(x^m)^1 = x^m$ por otra parte $x^m = x^{m \cdot 1}$, por lo tanto e2 es válida para $n=1$. Suponga que e2 es válida para $n=k$, entonces

$$(x^m)^k = x^{mk}, \tag{4.5}$$

es la hipótesis de inducción. Al multiplicar ambos lados de (4.5) por x^m se tiene

$$(x^m)^k \cdot x^m = x^{mk} \cdot x^m. \tag{4.6}$$

Ahora, mediante e1 en (4.6), se tiene del lado izquierdo $(x^m)^k \cdot x^m = (x^m)^{(k+1)}$. También mediante e1 se tiene en el lado derecho de (4.6), $x^{mk+m} = x^{m(k+1)}$, por lo tanto si (4.5) es válida, entonces e2 es cálida para $n=k+1$ por lo que e2 es válida para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar e3 se procede por inducción sobre n. Para $n=1$ se tiene

$$(xy)^1 = xy = x^1 y^1,$$

por lo tanto e3 es válido para $n=1$. Supongamos que

$$(xy)^k = x^k y^k, \tag{4.7}$$

Al multiplicar (4.7) por xy se tiene,

$$(xy)^k (xy) = (x^k y^k)(xy). \tag{4.8}$$

Por e1, el lado izquierdo de (4.8) se convierte en $(xy)^k(xy) = (xy)^{k+1}$. Por otra parte, el lado derecho puede escribirse como $(x^k y^k)(xy) = (x^k x)(y^k y)$ al usar las leyes conmutativas, A1, y asociativas, A2, varias veces (se recomienda que el lector haga los detalles). Finalmente, $x^k x = x^{k+1}$ y $y^k y = y^{k+1}$, por e1, por lo tanto

$$(xy)^{k+1} = x^{k+1} y^{k+1},$$

de donde se concluye por inducción matemática que e3 es válida para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 4.3.2 (exponentes negativos). Sea $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$, se define

$$x^{-n} \stackrel{def}{=} \frac{1}{x^n}.$$

Nota. Con la definición anterior es claro que la definición de x^0 es coherente y que tiene pleno sentido ya que $x^0 = x^{1-1} = x \cdot x^{-1} = \frac{x}{x} = 1$, si $x \neq 0$. Se puede demostrar fácilmente que **e1, e2 y e3 de la proposición 4.3.1 se cumplen también para exponentes negativos** y la demostración se deja como ejercicio.

Corolario 4.3.2 Sea $y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$, entonces $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$. Si $x \neq 0$, entonces $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

Demostración. Se tiene que si $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^n &= (xy^{-1})^n \\
&= x^n(y^{-1})^n \\
&= x^n y^{-n} \\
&= \frac{x^n}{y^n}.
\end{aligned}$$

queda como ejercicio útil para el lector dar las razones de cada paso de la argumentación anterior.

Si $x \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{x^n}{x^m} &= x^n x^{-m} \\
&= x^{n-m}.
\end{aligned}$$

Queda como ejercicio justificar la argumentación anterior. □

Ejercicio 4.1 Elimine los exponentes negativos y simplifique lo máximo posible, las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$,
2. $\left(\dfrac{3x^3}{z^{-2}}\right)^{-1}\left(\dfrac{2x^{-1}}{z^3}\right)^3$,
3. $\dfrac{x^{-1}}{y^{-1}}+\dfrac{x}{y}$.

Solución. Para resolver 1, se usa la definición de exponentes negativos para reescribir la expresión algebraica de manera que no aparezcan exponentes negativos:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x+y}}.$$

El segundo paso es sumar las fracciones en el numerador, mediante la proposición 5:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}.$$

Finalmente se usa el corolario 3 para obtener:

$$\frac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{1}{x+y}} = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

De esta forma se logra la mayor simplificación de la expresión que es:

$$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}} = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

Hay múltiples caminos para simplificar el ejercicio 2, si el lector ha pensado una simplificación alternativa a la que se realizará, se recomienda enérgicamente que lo haga para su mejor provecho.

Primero se usa la generalización de la proposición 4.3.1 para exponentes negativos (la cual se encuentra en los ejercicios):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3x^3}{z^{-2}}\right)^{-1}\left(\frac{2x^{-1}}{z^3}\right)^3 &= \left(\frac{3^{-1}(x^3)^{-1}}{(z^{-2})^{-1}}\right)\left(\frac{2^3(x^{-1})^3}{(z^3)^3}\right)\\
&= \frac{2^3}{3}\left(\frac{x^{-3}}{z^2}\right)\left(\frac{x^{-3}}{z^9}\right)\\
&= \frac{8}{3}\cdot\frac{x^{-3-3}}{z^{2+9}}\\
&= \frac{8}{3}\cdot\frac{x^{-6}}{z^{11}}\\
&= \frac{8}{3x^6z^{11}}.
\end{aligned}$$

Para simplificar 3, primero se eliminan las potencias negativas mediante la definición:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{-1}}{y^{-1}}+\frac{x}{y} &= \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}+\frac{x}{y}\\
&= \frac{y}{x}+\frac{x}{y}\\
&= \frac{y^2+x^2}{xy}.
\end{aligned}$$

El lector debe ser capaz de justificar cada paso de las argumentaciones anteriores. ■

4.4 Raíces y exponentes fraccionarios

Ahora se establece formalmente lo que se entiende por una raíz n-ésima y su expresión como exponente fraccionario.

Definición 4.4.1 Si x,y son números reales no negativos y si $n\in\mathbb{N}$, $n>0$, o bien, si x,y son negativos y $n=2m+1$, donde $m\in\mathbb{N}$, se define

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \overset{def}{=} y \text{ si y solo si } y^n = x.$$

El número y se llama *raíz n-ésima* de x. Si $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ y $x>0$ se define

$$x^{m/n} \overset{def}{=} (x^{1/n})^m = (x^m)^{1/n}.$$

N **Nota.** La igualdad $x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$ establece que cualquiera de los dos símbolos serán usados indistintamente para denotar de la raíz n-ésima. Observe que no se ha definido $x^{1/n}$ cuando x es un número negativo y n es un número par (es decir, de la forma $n=2m$, donde $m\in\mathbb{N}$), dado que para todo número real y, y^n es positivo si n es par. También es importante recalcar que si $x>0$, entonces $(x^{1/n})^n=(x^n)^{1/n}=x$, lo que no ocurre si $x<0$, por ejemplo, $(\sqrt{-2})^2$ no existe, ya que ningún número real p multiplicado por sí mismo es igual a -2, es decir, si

$p \in \mathbb{R}$, $p^2 \neq -2$ (¿por qué?) y por lo tanto $\sqrt{-2}$ no existe. En este caso

$$(\sqrt{-2})^2 \neq \sqrt{(-2)^2} = 2.$$

Sin embargo cabe mencionar que si existe un campo $\mathbb{C}$, el llamado campo de los números complejos, donde sí está definida la raíz cuadrada de -2 y también la raíz cuadrada de todos los reales negativos.

■ **Ejemplo 4.2** Se tiene que $(81)^{1/4} = 3$ ya que $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Por definición $(-32)^{1/5} = -2$ dado que $(-2)^5 = -32$. ■

Las leyes de los exponentes de la proposición 4.3.1 se cumplen también para las raíces, es decir, se cumple la siguiente proposición:

Proposición (leyes de los exponentes fraccionarios). Sean $n,m \in \mathbb{N}$, $n,m > 0$ y sean $x,y \in \mathbb{R}$, con $x,y > 0$, entonces
r1. $x^{1/n}x^{1/m} = x^{1/n+1/m}$.
r2. $(x^{1/n})^{1/m} = x^{1/(nm)}$.
r3. $x^{1/n} \cdot y^{1/n} = (xy)^{1/n}$.

Demostración. Para demostrar r2, sea $u \in \mathbb{R}$ tal que $x^{1/n} = u^m$, entonces $x = (u^m)^n = u^{mn}$, de donde, por definición $u = (x^{1/n})^{1/m} = x^{1/(nm)}$.

A continuación se demuestra r3. Sean $u^n = x$ y $v^n = y$, entonces por definición,

$$xy = u^n v^n = (uv)^n,$$

así, por definición, $(xy)^{1/n} = uv$. Además, se tiene que $uv = x^{1/n}y^{1/n}$. Por lo tanto, se concluye r3.

A continuación se demuestra r1. Sea u tal que $u^n = x$ y sea z tal que $z^m = u^m u^n = u^{n+m}$. Así, por definición,

$$z = (u^{n+m})^{1/m} = u^{(n+m)/m}.$$

Al sustituir $u = x^{1/n}$ se obtiene

$$z = (x^{1/n})^{(n+m)/m}.$$

Al aplicar r2 nuevamente, se obtiene $z = x^{(n+m)/(nm)}$. Por otra parte, $z^m = u^m u^n$ implica, por r2 y r3 que

$$\begin{aligned} z = (u^m u^n)^{1/m} &= u^{m/m}u^{m/n} \\ &= uu^{n/m} \\ &= x^{1/n}x^{1/m}, \end{aligned}$$

ya que $u^{n/m} = (u^n)^{1/m} = x^{1/m}$. Por lo tanto

$$x^{1/n}x^{1/m} = z = x^{(n+m)/(nm)} = x^{1/n+1/m},$$

como se desea demostrar. □

Partiendo de la demostración anterior se puede extender la proposición 4.3.1 para exponentes racionales.

Proposición 4.4.1 **(leyes de los exponentes racionales).** Sean $p = \frac{m}{n}, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, y sean $x,y \in \mathbb{R}$, con $x,y > 0$ entonces
e1'. $x^p x^q = x^{p+q}$.
e2'. $(x^p)^q = x^{pq}$.
e3'. $x^p \cdot y^p = (xy)^p$.

La demostración del anterior teorema es la aplicación de la proposición anterior junto con la proposición 4.3.1 y se deja como ejercicio.

4.4.1 Exponentes reales

En este momento quizá el lector sospeche que la ley de los exponentes también se cumple para exponentes $\alpha \in \mathbb{R}$ y no solo para exponentes racionales. Esto es un hecho, aunque la definición de x^α para $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ requiere técnicas que están fuera de los objetivos de este curso. Para que el lector perciba la dificultad observe que, si bien es claro que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}$, no es inmediato lo que significa $x^{\sqrt{2}}$, por ejemplo. A pesar de todo, expresiones como la anterior pueden definirse mediante límites y el lector interesado puede consultar el libro de Spivak [20], donde se demuestra la ley general para los exponentes reales

Proposición 4.4.2 (leyes de los exponentes). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x, y > 0$ entonces

er1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
er2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
er3. $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$.

Ejercicio 4.2 Simplifique las siguientes expresiones:

1. $\left(\dfrac{x^{4/3}}{y^{1/2}}\right)^3 \left(\dfrac{y^{-7/5}}{x^{-2/3}}\right)^{1/3}$.
2. $\sqrt[3]{xy^6}\sqrt[5]{x^3y}$,

Solución. Para resolver el ejercicio 1, usamos primero e3' de la proposición 4.4.1, en cada uno de los factores, seguidamente se usa e1' de la misma proposición para eliminar paréntesis y finalmente se simplifican las sumas de exponentes, para obtener los exponentes en la forma más simple posible.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^{4/3}}{y^{1/2}}\right)^3 \left(\frac{y^{-7/5}}{x^{-2/3}}\right)^{1/3} &= \left(\frac{x^4}{y^{3/2}}\right)\left(\frac{y^{-7/15}}{x^{-2/9}}\right) \\
&= x^4 x^{2/9} y^{3/2} y^{-7/15} \\
&= x^{38/9} y^{31/30}.
\end{aligned}$$

Para resolver el ejercicio 2, primero, los radicales se escriben en forma de potencias fraccionarias, seguidamente se siguen los pasos como en el ejercicio 1.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{xy^6}\sqrt[5]{x^3y} &= (xy^6)^{1/3}(x^3y)^{1/5} \\
&= x^{1/3}y^2x^{3/5}y^{1/5} \\
&= x^{14/15}y^{11/5}.
\end{aligned}$$

Se sugiere al lector justificar los detalles omitidos en los desarrollos anteriores. ■

4.4.2 Valor absoluto

Aunque se ha utilizado ya (dado que es tema obligado de la enseñanza preuniversitaria) el valor absoluto de los números reales puede definirse a partir de la definición de exponentes fraccionarios como sigue:

Definición 4.4.2 (valor absoluto). Sea $x \in \mathbb{R}$, el *valor absoluto* de x, denotado $|x|$, está definido por la relación $|x| \overset{def}{=} (\sqrt{x})^2$, si $x \geq 0$ y si $x < 0$, entonces $|x| \overset{def}{=} (\sqrt{-x})^2 = -x$.

N **Nota.** Es necesario volver a repetir que en general no se cumple que $\sqrt{x^2}$ sea lo mismo que $(\sqrt{x})^2$ ya que la raíz cuadrada no está definida para números negativos. Sin embargo, si $x \geq 0$, si se cumple que $(x^{1/2})^2 = (x^2)^{1/2} = x$.

Ejercicio 4.3 Calcule $|-3|$, $|-8+3|$, $|2|$.
Solución. Por definición $|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. Por otra parte, $|-8+3| = |-5| = \sqrt{(-5)^2} = 5$. Finalmente, $|2| = \sqrt{2^2} = 2$. ■

Proposición 4.4.3 (equivalencia del valor absoluto). Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demostración. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = \sqrt{x^2} = x$. Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y por lo tanto, $|x| = (\sqrt{-x})^2 = (-x)^{2/2} = (-x)^1 = -x$. □

Proposición 4.4.4 (productos notables). Sean $x, y, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes igualdades:

p1. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
p2. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$.
p3. $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.
p4. $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

Demostración. La demostración es una mera aplicación de las leyes distributivas, conmutativas, etcétera y se deja como ejercicio.

Ejercicio 4.4 Encuentre los factores de las siguientes expresiones:
a) $9x^4 - y$, si $y \geq 0$.
b) $x + y$.

Solución. La expresión en a) puede verse como diferencia de cuadrados dado que $y \geq 0$:

$$9x^4 - y = (3x^2 - \sqrt{y})(3x^2 + \sqrt{y}).$$

La expresión en b) puede verse como una suma de cubos de raíces cúbicas, si se desea factorizar:

$$x + y = (x^{1/3} + y^{1/3})(x^{2/3} - (xy)^{1/3} + y^{2/3}) \tag{4.9}$$

El lector debe comprobar que las factorizaciones son correctas aplicando las reglas de la proposición 4.4.4. ■

N **Nota.** Los productos en la proposición 4.4.4, junto con las potencias de binomios del teorema del binomio (que se presenta a continuación), son los mínimos indispensables para llevar a buen término los cursos básicos de cálculo diferencial e integral, esto por que todo profesor usará las fórmulas sin mayor explicación y quien no las sepa corre el riesgo de quedar rezagado. En todo caso, el lector encontrará que si no recuerda las fórmulas para desarrollar los productos, de cualquier forma podrá calcularlos usando las leyes distributivas, conmutativas, etcétera. Cosa diferente es factorizar, lo cual requiere, sin duda, saber reconocer las expresiones de la proposición 4.4.4 en toda forma posible y, por ende, haber memorizado las fórmulas de dicha proposición. Una de las mayores distorsiones didácticas en la historia de la enseñanza de las matemáticas consiste en poner a trabajar a los estudiantes en las miles de variantes que se le puedan ocurrir a un autor, libros llenos con tales contenidos abundan en las escuelas. Hacer un énfasis desmedido en el aprendizaje de todas las variantes de los productos notables es absurdo. No puede ser considerado de ninguna forma una enseñanza de las matemáticas la mera aplicación de las leyes distributivas de los números reales.

4.5 Teorema del binomio

Uno de los teoremas más importantes de la matemática elemental es el teorema del binomio que se enuncia y se demuestra por inducción matemática después de ciertos preliminares ilustres, como el teorema de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&1&&&& \\
&&&1&&2&&1&&& \\
&&1&&3&&3&&1&& \\
&1&&4&&6&&4&&1& \\
1&&5&&10&&10&&5&&1
\end{array}
$$

Figura 4.1: Primeros seis renglones del triángulo de Pascal.

Definición 4.5.1 (factorial de un número natural). Sea $n \in \mathbb{N}$ se define *el factorial de n*, denotado $n!$, mediante el producto de todos los números naturales menores o iguales que n y mayores que 0 si $n > 0$ y de define $0! = 1$, es decir,

$$n! \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n, & \text{si } n > 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Definición 4.5.2 (coeficientes binomiales). Para $n, r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r \leq n$, se definen los llamados *coeficientes binomiales* mediante la fórmula

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Teorema 4.5.1 (triángulo de Pascal). Sean $n, r \in \mathbb{N}$ con $1 \leq r < n$ y $n \geq 2$, entonces

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}. \tag{4.10}$$

Demostración. En efecto para toda $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $1 \leq r < n$ se cumple que

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n+1-r)!(r-1)!} \\
&= \frac{n!(n+1-r) + n!r}{(n+1-r)!r!} \\
&= \frac{n!(n+1-r+r)}{(n+1-r)!r!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-r)!r!} \\
&= \binom{n+1}{r},
\end{aligned}
$$

por lo tanto, la fórmula (4.10) es válida para toda $n \geq 2$, como se desea demostrar. □

El lector debe ser capaz de dar la razón de cada paso de la argumentación anterior y se deja como ejercicio.

Se muestra en la figura 4.1 el triángulo que se forma en el renglón correspondiente a $n = 2, 3, 4, 5$ dado por el teorema anterior (renglones 3,4,5 y 6, respectivamente). Observe que en cualquier diagonal distinta de las que contienen 1 el término del renglón inferior se obtiene sumando los dos términos inmediatos en el renglón superior.

Teorema 4.5.2 (teorema del binomio). Sean $x,y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$
$$= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n. \quad (4.11)$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n=1$ se tiene, por una parte $(x+y)^1 = x+y$. Por otra parte, se tiene que los coeficientes binomiales $\binom{1}{0} = \frac{1!}{(1-0)!0!} = \frac{1}{1} = 1$ y $\binom{1}{1} = \frac{1!}{(1-1)!1!} = \frac{1}{1} = 1$, por lo tanto el lado derecho de (4.11) es $1x^1y^0 + 1x^0y^1 = x+y$ por lo tanto el teorema del binomio se cumple para $n=1$. Suponga que (4.11) es válida para $n=k$, es decir

$$(x+y)^k = \binom{k}{0} x^k y^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} y + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 + \cdots + \binom{k}{k} x^0 y^k, \quad (4.12)$$

es la hipótesis de inducción. Se desea demostrar que

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} y^0 + \binom{k+1}{1} x^k y + \binom{k+1}{2} x^{k-1} y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k+1} x^0 y^{k+1}, \quad (4.13)$$

partiendo de (4.12). En efecto, multiplique ambos lados de (4.12) por $x+y$ para obtener

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= x\left(\binom{k}{0} x^k y^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} y + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 + \cdots + \binom{k}{k} x^0 y^k\right) + \\ &\quad \cdots + y\left(\binom{k}{0} x^k y^0 + \binom{k}{1} x^{k-1} y + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 + \cdots + \binom{k}{k} x^0 y^k\right)\end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= \binom{k}{0} x^{k+1} y^0 + \left(\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right) x^k y + \left(\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right) x^{k-1} y^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \left(\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right) x y^k + \binom{k}{k} x^0 y^{k+1}.\end{aligned}$$

Ahora por medio del teorema del triángulo de Pascal se obtiene

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= \binom{k}{0} x^{k+1} y^0 + \binom{k+1}{1} x^k y + \binom{k+1}{2} x^{k-1} y^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \binom{k+1}{k} x y^k + \binom{k}{k} x^0 y^{k+1}.\end{aligned}$$

Finalmente, dado que $1 = \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ y $1 = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, de la fórmula anterior se obtiene la fórmula (4.13). Por lo tanto por el principio de inducción matemática la fórmula (4.11) es válida para toda $n \in \mathbb{N}$. □

■ **Ejemplo 4.3** El siguiente arreglo muestra la expansión de $(x+y)^n$ para $n = 0,1,2,3,4,5$.

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1\cdot x^0y^0 \\ (x+y)^1 &= 1\cdot x^1y^0 + 1\cdot x^0y^1 \\ (x+y)^2 &= 1\cdot x^2y^0 + 2\cdot xy + 1\cdot x^0y^2 \\ (x+y)^3 &= 1\cdot x^3y^0 + 3\cdot x^2y + 3\cdot xy^2 + 1\cdot x^0y^3 \\ (x+y)^4 &= 1\cdot x^4y^0 + 4\cdot x^3y + 6\cdot x^2y^2 + 4\cdot xy^3 + 1\cdot x^0y^4 \\ (x+y)^5 &= 1\cdot x^5y^0 + 15\cdot x^4y + 10\cdot x^3y^2 + 10\cdot x^2y^3 + 5\cdot xy^4 + 1\cdot x^0y^5\end{aligned}$$

Observe que los coeficientes de $x^{n-r}y^r$ corresponden a los números en el renglón n triángulo de Pascal de la figura 4.1. ■

Corolario 4.5.3 Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}(x-y)^n &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \\ &= \binom{n}{0} x^n y^0 - \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x^0 y^n. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ejercicio 4.5 Encuentre el desarrollo binomial de $(a-b^3)^3$.
Solución. Mediante el corolario 4.5.3 con $x = a$ y $y = b^3$ se tiene

$$\begin{aligned}(a-b^3)^3 = \binom{3}{0} a^3(-b^3)^0 + \binom{3}{1} a^2(-b^3)^1 + \binom{3}{2} a^1(-b^3)^2 + \binom{3}{3} a^0 - (b^3)^3 \\ = a^3 - 3a^2b^3 + 3ab^6 - b^9.\end{aligned}$$

como puede comprobar el lector, al simplificar mediante las leyes de los exponentes. ■

Ejercicio 4.6 Desarrolle el binomio $\left(\sqrt{y} + \frac{1}{y}\right)^4$.
Solución. Escribimos la raíz de y en forma de exponente

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{y} + \frac{1}{y}\right)^4 &= (y^{1/2} + y^{-1})^4 \\ &= \binom{4}{0} (y^{1/2})^4 (y^{-1})^0 + \binom{4}{1} (y^{1/2})^3 (y^{-1})^1 + \\ &\quad + \binom{4}{2} (y^{1/2})^2 (y^{-1})^2 + \binom{4}{3} (y^{1/2})^1 (y^{-1})^3 + \binom{4}{4} (y^{1/2})^0 (y^{-1})^4 \\ &= y^2 + 4y^{3/2}y^{-1} + 6yy^{-2} + 4y^{1/2}y^{-3} + y^{-4} \\ &= y^2 + 4y^{1/2} + 6y^{-1} + 4y^{-5/2} + y^{-4}.\end{aligned}$$

como puede comprobar el lector mediante las leyes de los exponentes. ■

Ejercicio 4.7 Factorice la expresión $a + 6 + \frac{9}{a}$.
Solución. Si se requiere factorizar la expresión, esta puede reconocerse como un binomio al cuadrado:

$$a + 6 + \frac{9}{a} = \left(\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt{a}}\right)^2$$

como el lector puede comprobar al desarrollar el lado derecho de la igualdad anterior, mediante el teorema del binomio para $n = 2$. ■

4.6 La fórmula cuadrática

De alguna manera, desarrollar un producto de la proposición 4.4.2 o desarrollar un binomio elevado a una potencia n es, partir del lado izquierdo de las fórmulas y aplicando las leyes distributivas conmutativas y demás, obtener la expresión del lado derecho. Factorizar, por el contrario, es comenzar de lado derecho de las fórmulas en la proposición 4.4.2 o del teorema del binomio (teorema 4.5.2) y obtener el lado izquierdo de las mismas. Es posible, además factorizar un polinomio de grado dos con coeficientes en $\mathbb{R}$ utilizando el teorema 4.5.2, mediante el siguiente teorema:

Teorema 4.6.1 Considere el polinomio ax^2+bx+c, con $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$, entonces es posible factorizar

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

donde

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{4.15}$$

y en la fórmula (4.15) $x_{1,2}\in\mathbb{R}$, si y solo si $b^2-4ac\geq 0$.

Demostración. Si $a\neq 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).
\end{aligned}$$

Al definir $x_1\overset{def}{=}\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x_2\overset{def}{=}\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, se obtiene $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, como se desea demostrar. Observe que si $b^2-4ac\geq 0$, entonces $\sqrt{b^2-4ac}\in\mathbb{R}$. Si $b^2-4ac<0$, entonces $\sqrt{b^2-4ac}\notin\mathbb{R}$ como se especificó cuando se definió la raíz cuadrada de un número real en la definición 4.4.1. □

El lector debe ser capaz de dar la razón de cada paso de la demostración anterior utilizando el teorema del binomio y la proposición 4.4.4 y tal argumentación se deja como ejercicio.

Ejercicio 4.8 Factorice x^2+x-1.
Solución. En este ejemplo para utilizar la fórmula del teorema 4.6.1 se observa que $a=b=1$ y $c=-1$, por lo tanto $b^2-4ac=5>0$ y así

$$x^2+x-1=\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

■

Ejercicio 4.9 Factorice x^2-1 mediante la fórmula (4.15).
Solución. En este caso, $a=1$, $b=0$, $c=-1$ y así por la fórmula (4.15)

$$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\pm 1,$$

por lo que

$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Note que por supuesto se obtiene lo mismo que en la fórmula de los productos notables. ■

Ejercicio 4.10 Factorice x^2+1.

Solución. En este caso $b^2 - 4ac = -4 < 0$ por lo que $x_{1,2} \notin \mathbb{R}$. Sin embargo se puede factorizar

$$x^2 + 1 = (x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1}),$$

(¿por qué?, haga los detalles), pero $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$. ■

N **Nota.** Si bien, $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, existe un campo de números que sí contiene a $\sqrt{-1}$ llamado el *campo de los números complejos*. Una introducción al estudio del campo de los números complejos puede estudiarse, por ejemplo, en el libro *Fundamentos de Geometría* [14].

4.7 Solución de ecuaciones

Con el teorema 4.5.2 es posible resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Efectivamente, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 4.7.1 Si $b^2 - 4ac \geq 0$, los números $x_{1,2}$ dados en (4.15) satisfacen la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Demostración. Por el teorema 4.5.2 se tiene que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Por la proposición 4.2.9, se tiene que $x - x_1 = 0$ o $x - x_2 = 0$ por lo que $x = x_1$ o $x = x_2$, satisfacen la ecuación $ax_{1,2}^2 + bx_{1,2} + c = 0$. □

Solución de ecuaciones lineales

En el caso $a = 0$, $b \neq 0$, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se reduce a $bx + c = 0$, la cual, como seguramente el lector conoce, puede resolverse como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad bx + c + (-c) = 0 + (-c), \text{ por el principio de sustitución,} \\
&\Leftrightarrow \quad bx = -c, \text{ por A3 y A4} \\
&\Leftrightarrow \quad b^{-1}bx = b^{-1}(-c), \text{ por el principio de sustitución y la existencia de } b^{-1}, \text{A3 y A4,} \\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{c}{b}, \text{ por la definición de } 1/b \text{ y simplificando.}
\end{aligned}$$

Una colección más amplia de ecuaciones puede resolverse mediante el principio de sustitución PS extendido a todo tipo de expresiones algebraicas, es decir expresiones que incluyen números reales indeterminados denotados por x combinados con números reales dados mediante operaciones suma, producto, potencia y extracción de raíces, por ejemplo $p(x) = -2x + 3$, $Q(x) = (3x + 2)(7x^3 + 2x^2)^{1/2}$.

Corolario 4.7.2 Si $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son expresiones algebraicas tales que se cumple $P(x) = Q(x)$, entonces también se cumple

$$P(x) + R(x) = Q(x) + R(x),$$

y si $R(x) \neq 0$ para toda x, entonces

$$P(x) \cdot R(x) = Q(x) \cdot R(x).$$

N **Nota.** La diferencia del corolario 4.7.2 con el principio de sustitución, es que la ecuación $P(x) = Q(x)$ puede ser válida para solo ciertos valores de x por lo que para los valores $y \in \mathbb{R}$ para los cuales $P(y) \neq Q(y)$ no necesariamente se cumple $P(y) + R(y) = Q(y) + R(y)$ ni $P(y) \cdot R(y) = Q(y) \cdot R(y)$.

Una aplicación importante de una ocasión en la que no puede aplicarse el corolario 4.7.2 es la siguiente.

Ejercicio 4.11 Determine las causas por las cuales la siguiente argumentación *no es válida*:

$$x^2-1 = x^2-x \tag{4.16}$$
$$(x-1)(x+1) = x(x-1) \tag{4.17}$$
$$x+1 = x \tag{4.18}$$
$$1 = 0. \tag{4.19}$$

Solución. El paso (4.18) solo es válido cuando $x-1\neq 0$ por lo que si $x=1$ no puede aplicarse el corolario 4.7.2. Enfatizando, no puede multiplicar ambos lados de (4.17) por $(x-1)^{-1}$ ya que tal inverso no existe si $x=1$. Dividir por $x-1$ cuando $x=1$, lleva al absurdo $0=1$. O, más claramente, dividir por cero no es posible en $\mathbb{R}$. ■

Para terminar este capítulo enunciamos en forma de teorema la imposibilidad de dividir por cero en el campo $\mathbb{R}$.

Teorema 4.7.3 En $\mathbb{R}$ el cero no tiene inverso multiplicativo.

Demostración. Supongamos que existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $x\cdot 0=1$. Entonces por la proposición 4.2.2 se tiene
$$0=x\cdot 0=1$$
lo cual es absurdo. Por lo tanto, el cero no tiene inverso multiplicativo. □

4.8 Orden en los números reales

El poder establecer que un número real sea mayor que otro está dado por el axioma de ordenamiento de $\mathbb{R}$, el cual se enuncia a continuación.

Axioma 4.2 **(axioma de orden).** Existe un subconjunto $\mathscr{P}$ del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(o1) Si $x,y\in\mathscr{P}$, entonces $x+y\in\mathscr{P}$ y $xy\in\mathscr{P}$.

(o2) Si $x\in\mathbb{R}$, entonces una y solo una de las siguientes proposiciones es cierta: $x=0$, $x\in\mathscr{P}$, $-x\in\mathscr{P}$.

El conjunto $\mathscr{P}$ se llama conjunto de números reales *positivos*. Los números distintos de cero que no están en $\mathscr{P}$, es decir, el conjunto $\mathscr{P}^c\setminus\{0\}$, se llama conjunto de *números reales negativos*.

Se establece el siguiente teorema de donde se concluye que $\mathscr{P}\neq\emptyset$.

Teorema 4.8.1 Si $x\in\mathbb{R}$ y $x\neq 0$, entonces $x^2\in\mathscr{P}$.

Demostración. Si $x\in\mathscr{P}$ entonces por (o1) del axioma 4.2, $x\cdot x=x^2\in\mathscr{P}$. Si $x\notin\mathscr{P}$, entonces, por (o2) del axioma 4.2, $-x\in\mathscr{P}$. Entonces, como $(-x)\cdot(-x)=x^2$, por el corolario 4.2.6, se tiene por lo tanto, $x^2\in\mathscr{P}$ por (o1) del axioma 4.2. □

Corolario 4.8.2 $1\in\mathscr{P}$ y $-1\in\mathscr{P}^c\setminus\{0\}$.

Demostración. Como $1=1\cdot 1$ entonces por el teorema 4.8.1, se concluye que $1\in\mathscr{P}$. Por otra parte, por el axioma 4.2, $-1\notin\mathscr{P}$, (ya que $1\in\mathscr{P}$), por lo tanto, -1 está en el complemento de $\mathscr{P}$ menos el conjunto $\{0\}$, como se desea demostrar. □

Definición 4.8.1 **(“mayor que”).** Si $x,y\in\mathbb{R}$ y $x-y\in\mathscr{P}$ se dice que *x es mayor que y* lo cual se denota $x>y$. También puede escribirse $y<x$ lo que se lee “*y menor que x*”.

N **Nota.** Las definiciones, teoremas y corolarios de esta sección pueden parecer triviales o innecesarios. Sin embargo, debe recordarse que este libro está dedicado en parte a la formalización de los conceptos matemáticos más elementales.

Por otra parte, si $x,y\in\mathbb{R}$ entonces $x-y\in\mathscr{P}$ o bien $-(x-y)\in\mathscr{P}$ o bien $x-y=0$ de acuerdo al axioma 4.2, lo cual puede reescribirse como:

o2'. Si $x,y \in \mathbb{R}$, entonces una y solo una de las siguientes proposiciones es cierta
$$x > y, \qquad x < y, \qquad x = y.$$

Teorema 4.8.3 Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \in \mathscr{P}$ si y solo si $x > 0$ y $-x \in \mathscr{P}$ si y solo si $x < 0$.

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces, dado que $-0 = (-1)\cdot 0 = 0$ y por la propiedad del neutro aditivo
$$x = x + 0 = x + (-0) = x - 0.$$
Por lo tanto, $x \in \mathscr{P}$ si y solo si $x > 0$. La demostración de la segunda parte del teorema es similar y se deja como ejercicio. □

El siguiente teorema es fundamental para poder resolver desigualdades, lo cual es tema obligado de los cursos de cálculo en la UAMI.

Teorema 4.8.4 Sean $x,y,z \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:
(i) Si $x > y$ y $y > z$, entonces $x > z$.
(ii) Si $x > y$, entonces $x + z > y + z$.
(iii) Si $x > y$ y $z > 0$, entonces $xz > yz$.
(iv) Si $x > y$ y $z < 0$, entonces $xz < yz$.

N **Nota didáctica.** Parece ser que hay pocas cosas tan difíciles de asimilar por los principiantes que la propiedad (iv) del teorema 4.8.4. Observe que es una de las mayores diferencias para operar con desigualdades comparadas con igualdades (o sea ecuaciones). Probablemente tal propiedad, mal asimilada y menos entendida, es una de las principales dificultades que enfrenta el principiante al aprender a resolver desigualdades, por lo que se recomienda tener cuidado en no tratar de automatizar este saber, sin razonar profundamente el teorema.

Demostración. (i) Por definición $x > y$ y $y > z$ implica $x - y \in \mathscr{P}$ y $y - z \in \mathscr{P}$, por lo tanto por (o1) del axioma 4.2:
$$(x-y) + (y-z) \in \mathscr{P}$$
pero $(x-y)+(y-z) = x - z$ (¿por qué?, justifique) y así se concluye que $x - z \in \mathscr{P}$.

(ii) Si $x - y \in \mathscr{P}$ entonces $x - y + 0 \in \mathscr{P}$, entonces
$$\begin{aligned} x - y + 0 &= x - y + (z - z) \\ &= (x - z) - (y - z). \end{aligned}$$
Se concluye que $(x-z)-(y-z) \in \mathscr{P}$ y por definición $x + z > y + z$.

(iii) Como $x - y \in \mathscr{P}$ y $z \in \mathscr{P}$ por (o1) del axioma 4.2 se tiene $(x-y)\cdot z \in \mathscr{P}$, es decir , $xz - yz \in \mathscr{P}$. Por lo tanto, $xz > yz$.

(iv) Esta parte es similar a la anterior, simplemente note que si $z < 0$, entonces $-z \in \mathscr{P}$ y proceda como en (iii). Los detalles se dejan como ejercicio muy importante. □

Notación. La notación $x \geq y$ significa que o bien $x > y$ o bien $x = y$. Similarmente, $x \leq y$ significa que o bien $x < y$ o bien $x = y$.

4.8.1 Intervalos

Con las relaciones de orden pueden definirse ahora subconjuntos de números reales llamados intervalos.

Definición 4.8.2 (intervalos). Se denota con el símbolo (a,b), llamado *intervalo abierto*, al conjunto de todos los números $x \in \mathbb{R}$ los cuales satisfacen $a < x < b$, es decir:
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$
El intervalo (a,∞) denota al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Se llama *intervalo cerrado* $[a,b]$ al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Las definiciones de los demás intervalos existentes, $[a,\infty)$,

$(-\infty, a)$, etcétera, se dejan como ejercicio.

■ **Ejemplo 4.4** Resuelva la desigualdad $3x+2 < 5x-5$, argumente cada paso.
*Solución.*Si $3x+2 < 5x-5$, entonces $-3x+(3x+2) < -3x+(5x-5)$ por (ii) del teorema 4.8.4; $(-3x+3x)+2 < (-3x+5x)-5$, ley asociativa para $\mathbb{R}$; $2 < 2x-5$, simplificando y dado que $-3x+3x=0$ se puede usar la ley del elemento neutro; $7=2+5 < 2x$, por (ii) del teorema 4.8.4; $7/2 < x$. Por lo tanto, la solución de la desigualdad es el intervalo $(7/2, \infty)$. ■

N **Nota didáctica.** No es objetivo de este curso la resolución de desigualdades, tal tema está incluido en el curso del tronco común de Cálculo Diferencial en la UAMI. Dentro de los objetivos del curso está que el lector aprenda la manera correcta de argumentar, objetivo que se excluye de la enseñanza preuniversitaria, por lo que es conveniente dedicar tiempo, más que a resolver desigualdades, dedicarlo a dar razones del procedimiento que por cierto, al proceder de esta manera se reduce la posibilidad de cometer errores en la solución cuando la argumentación es correcta.

Teorema 4.8.5 **(leyes de los signos).** Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x \cdot y > 0$, si x y y son ambos positivos, o si x y y son ambos negativos. Además $x \cdot y < 0$, si $x > 0$ y $y < 0$, o si $x < 0$ y $y > 0$.

Demostración. Si $x > 0$ y $y > 0$, por el axioma 4.2 $x \cdot y > 0$. Si $x < 0$ y $y < 0$ entonces $-x > 0$ y $-y > 0$, entonces $(-x)(-y) > 0$ y por lo tanto $x \cdot y > 0$ (argumente por qué). Si $x > 0$ y $y < 0$, entonces $-y > 0$ y por lo tanto $x(-y) > 0$, así $-xy > 0$ (argumente) y por lo tanto $xy < 0$. La demostración del caso $x < 0$ $y > 0$ es similar a la anterior y se deja como ejercicio. □

N **Nota.** El teorema anterior, como seguro sabe el lector, suele escribirse en forma esquemática y fácil de recordar como

$$\begin{aligned} + \cdot + &= + \\ - \cdot - &= + \\ + \cdot - &= - \\ - \cdot + &= - \end{aligned}$$

Valor absoluto y desigualdades

Los siguientes resultados son de utilidad en varias áreas de la matemática.

Teorema 4.8.6 Si $x \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, entonces
(va1) $-|x| \leq x \leq |x|$.
(va2) $|x| \leq b$ si y solo si $-b \leq x \leq b$.
(va3) $|x| \geq b$ si y solo si $x \geq b$ o $x \leq -b$.

Demostración. (va1) Dado que $|x| \geq 0$ se tiene que $x \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que si $x \geq 0$, $|x| = x$, y si, $x < 0$, trivialmente $x \leq |x|$. Para demostrar que $-|x| \leq x$, se tiene que $-|x| \leq 0$ y así, si $x \geq 0$ se cumple necesariamente; por otra parte, si $x < 0$, se tiene que $-|x| = -(-x) = x$. Por lo tanto, $-|x| \leq x \leq |x|$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

(va2) Supóngase que $|x| \leq b$, entonces por (va1), $x \leq |x|$ y, así, $x \leq b$; además, $-|x| \leq x$ y $-b \leq -|x|$ implican $-b \leq x$. Por lo tanto, $-b \leq x \leq b$. Para la proposición recíproca, supongamos que $-b \leq x \leq b$, con $b > 0$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y por lo tanto $|x| \leq b$; si $x < 0$ entonces $|x| = -x$, al multiplicar por -1 la desigualdad en la hipótesis, se obtiene $b \geq -x \geq -b$, entonces $-b \leq -x = |x| \leq b$. Queda demostrado que para toda x, $|x| \leq b$.

(va3) Suponga que $|x| \geq b$, con $b > 0$. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$, por lo tanto, $x \geq b$; si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y así $-x \geq b$ y al multiplicar tal desigualdad por -1 se obtiene $x \leq -b$, como se desea demostrar. La demostración de la proposición recíproca se deja como ejercicio. □

4.9 Axioma del supremo

Para estar completo, el sistema axiomático de los números reales requiere de un axioma más, llamado el *axioma del supremo*.. Antes de enunciar tan importante axioma se requieren algunas definiciones.

Definición 4.9.1 Sea A un conjunto no vacío de números reales.

(i) Un número real s es una *cota superior* de A si y solo si $x \leq s$ para toda $x \in A$.

(ii) Un número real i es una *cota inferior* de A si y solo si $i \leq x$ para toda $x \in A$.

■ **Ejemplo 4.5** Sea $A = \{-3, -1/2, 0, 1\}$, entonces cualquier número mayor o igual que 1 es cota superior de A y cualquier número menor o igual que -3 es cota inferior de A.

Sea $A = (-\sqrt{3}, \infty)$, entonces cualquier número menor o igual que $-\sqrt{3}$ es cota inferior de A, pero A no tiene cotas superiores.

Sea $B = (-\infty, 5]$, entonces B no tiene cota inferior y todo número mayor o igual que 5 es cota superior de B.

■

Para los conjuntos para los cuales existen las cotas superiores e inferiores es posible estudiar entre ellas la cota que sea óptima, óptima en el sentido que se define a continuación.

Definición 4.9.2 (supremos e ínfimos). Sea A un conjunto no vacío de números reales.

Un número real s' es la *menor cota superior* de A, también llamado *supremo* de A, si y solo si s' es cota superior de A y si $s < s'$, entonces s no es cota superior de A. Si s' es el supremo de A se denota $s' = \sup A$.

(ii) Un número i' es la *mayor cota inferior* de A, llamada también *ínfimo* de A,si y solo si i' es cota inferior de A y si $i' < i$, entonces i no es cota inferior de A. Si i' es el ínfimo de A, se denota $i' = \inf A$.

■ **Ejemplo 4.6** Si $A = \{-3, -1/2, 0, 1\}$, entonces $-3 = \inf A$ y $1 = \sup A$. Claramente, ningún número menor que 1 es cota superior de A en $\mathbb{R}$ y ningún número mayor que -3 es cota inferior del conjunto A.

Si $A = (-\sqrt{3}, \infty)$, entonces A no tiene supremo y $-\sqrt{3} = \inf A$. ■

Lema 4.9.1 Si dado un conjunto $A \neq \emptyset$, existe el supremo de A, entonces es único. También, si existe el ínfimo de A, este es único.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Supongamos que A está acotado superiormente y sea $s = \sup A$. Si $w \in \mathbb{R}$ es también supremo de A, entonces $w \leq s$, por definición, pero también $s \leq w$, por ser $s = \sup A$. Por lo tanto,$s = w$ (enuncie la propiedad que garantiza esto). La demostración para el ínfimo es similar. □

Ahora es posible establecer el postulado que completa la lista de axiomas de $\mathbb{R}$.

Axioma 4.3 (axioma del supremo e ínfimo). Para todo conjunto no vacío de números reales A, si A tiene una cota superior, entonces existe el supremo de A. Si A tiene una cota inferior, entonces existe el ínfimo de A.

Un campo que satisface el axioma de orden 4.2 y el axioma 4.3 se llama *campo ordenado completo*, de esta forma $\mathbb{R}$ es un campo ordenado completo y en enfoques superiores a los de este libro puede demostrarse que “de alguna forma” es el único campo completo que existe, quien esté interesado puede consultar el libro de Spivak [20].

Lema 4.9.2 El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Demostración. Por contradicción, suponga que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente, entonces tiene supremo por el axioma 4.3. Sea $N = \sup \mathbb{N}$, entonces si $n \in \mathbb{N}$ se tiene $n \leq N$. Además se debe tener $n + 1 \in \mathbb{N}$ y así $n + 1 \leq N$, por lo que, $n \leq N - 1 < N$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $N - 1$ también es cota superior de $\mathbb{N}$ y es menor que N lo que contradice que $N = \sup \mathbb{N}$. □

Consecuencia del lema 4.9.2 es el principio de Arquímedes ya mencionado en otro capítulo, pero más aun, el axioma 4.3 implica el principio de Weierstrass el cual, como ya se estudió, garantiza la existencia de límites para sucesiones acotadas y por lo tanto garantiza que los decimales infinitos sean números realmente. El axioma del supremo e ínfimo también garantiza la existencia de raíces cuadradas, cúbicas y etcétera.

Para demostrar el principio de Weierstrass se requiere una equivalencia del axioma del supremo, enunciada a continuación.

Lema 4.9.3 Sea $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$. El número $s = \sup A$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $s - x < \varepsilon$.

Demostración. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $s - x < \varepsilon$. se tiene que $s - \varepsilon < x$ por lo que ningún número menor que s es cota superior de A, por lo tanto $s = \sup A$. Recíprocamente si $s = \sup A$ y existe $\varepsilon_o > 0$ tal que $s - \varepsilon_o \geq x$ para todo $x \in A$ entonces $s - \varepsilon_o < s$ y $s - \varepsilon_o$ es cota superior de A contradiciendo $s = \sup A$. $\square$

Teorema 4.9.4 El axioma del supremo implica al principio de Weierstrass.

Demostración. Sea $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ una sucesión creciente y acotada superiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, entonces, por definición, A está acotado superiormente. Por lo tanto, por el axioma 4.3, existe $s = \sup A$. Se afirma que $s = \lim_{n\to\infty} a_n$. Claramente, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s - x_N < \varepsilon$, por el lema 4.9.3 y, además, si $n > N$ se cumple necesariamente que $s - x_n < \varepsilon$, ya que si $n > N$, $x_n > x_N$, (por ser $\{a_n\}$ una sucesión creciente), lo que implica que $-x_n < -x_N$ y así $s - x_n < s - x_N < \varepsilon$. Finalmente, $s - x_n \geq 0$ ya que s es cota superior de A y dado que $\varepsilon > 0$, entonces $-\varepsilon < 0 \leq s - a_n$. Por lo tanto, $|s - a_n| = |a_n - s| < \varepsilon$, si $n > N$, lo cual demuestra que $s = \lim_{n\to\infty} a_n$. $\square$

N **Nota.** Existen criterios equivalentes al principio de Weierstrass, por ejemplo, el principio de Dedekind o el principio de Cantor, de hecho el principio de Dedekind implica al axioma del supremo, por lo que el axioma del supremo *es equivalente* al principio de Weierstrass. El lector interesado en este tema puede consultar [1, p. 815-p. 817]. Para los objetivos de este libro, entre ellos dar sentido a las sumas infinitas de decimales, es suficiente lo que se ha demostrado hasta este momento.

Para terminar este capítulo se demuestra como ejemplo la existencia de raíz de 2.

■ **Ejemplo 4.7** Demuestre que existe un número real r tal que $r = \sqrt{2}$.
Solución. Al conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$, es acotado superiormente ya que 2 es una cota superior, además, A no es vacío, ya que $1 \in A$. Por lo tanto A, tiene un supremo, se define $r \stackrel{def}{=} \sup A$. El lector debe comprobar por sí mismo que $r^2 = 2$, lo cual se deja como ejercicio. ■

4.10 Ejercicios del capítulo 4

La dificultad de la mayoría de los siguientes ejercicios es de nivel básico e intermedio, pero es imprescindible que sea realizada la mayor cantidad posible de estos problemas antes de abordar otros cursos de la licenciatura.

4.10.1 Nivel básico

1. Simplifique las siguientes expresiones:
   a) $\left(\dfrac{5x^{-3}y^6z^{-4}}{7^5x^{-2}y^7z^2}\right)^0$.
   b) $\dfrac{(x^{2n+3})^2}{x^{n-3}}\cdot\dfrac{x^{5-2n}}{(x^2)^n}$.
   c) $\dfrac{x^{-3}-y^{-3}}{x^3-y^3}$.
   d) $4^5\dfrac{32^{-5}}{16^{-2}}\cdot\dfrac{8^{-3}}{64}$.
2. Demuestre que $(xyz)^p = x^py^pz^p$ para todo $p\in\mathbb{Z}$.
3. Demuestre la proposición 4.4.1.
4. Simplifique las expresiones en los siguientes ejercicios:
   a) $x^{1/2}x^{2/3}x^{1/5}$.
   b) $(x^{1/2}-y^{1/2})(x^{1/2}+y^{1/2})$.
   c) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}\sqrt[5]{x^3}}$.
   d) $\left(\dfrac{x^{-5/2}y^3}{y^{-3/2}}\right)^3$
   e) $\sqrt{72}$.
5. Muestre con ejemplos que las siguientes igualdades **no son ciertas en general.**
   a) $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}$,
   b) $\frac{x+z}{y+z}=\frac{x}{y}$.
6. Complete los primeros 10 renglones del triángulo de Pascal.
7. Encuentre los desarrollos de las siguientes expresiones algebraicas:
   a) $(x+y-z)(x+y+z)$.
   b) $(a+1)^5$.
   c) $(7y+5)(3y-2)$.
   d) $(a+b-c)^3$.
   e) $(x^{1/4}+y^{1/4})(x^{1/2}-(xy)^{1/4}+y^{1/2})$.
8. Factorice:
   a) $8a^6-27b^9$.
   b) $4x^2-12xy+16y^2$.
   c) $(a+b)^3-27$.
   d) a^64-1.
   e) a^2+16.
9. Resuelva las siguientes desigualdades y argumente cada paso de la solución.
   a) $-x+3\leq 0$.
   b) $-7x+3\geq -8x-\sqrt{2}$.
   c) $x+3<x+1$.
10. Para $a,b\in\mathbb{R}$ se definen los intervalos: abierto $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$; cerrado $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$; semiabierto $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a<x\}$; semicerrado $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\}$, etcétera. Demuestre que
    a) $(a,b)=(a,\infty)\cap(-\infty,b)$ si $a<b$, por otra parte $(a,b)=\emptyset$ si $b<a$.
    b) $[a,b]=[a,\infty)\cap(-\infty,b]$ si $a<b$, por otra parte $[a,b]=\{a\}$, si $a=b$.
    c) $(a,b)^c=(-\infty,a]\cup[b,\infty)$.
    d) $\mathbb{R}\setminus(a,\infty)=(-\infty,a]$.

4.10.2 Nivel intermedio

11. Demuestre la ley distributiva por la derecha: si $x,y,z \in \mathbb{R}$ entonces $(x+y)z = xz+yz$. No olvide justificar cada paso de su demostración con las leyes de campo o con propiedades ya demostradas.
12. Si $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, demuestre mediante las propiedades de campo y justificando cada paso, las siguientes propiedades:
    a) $(a+b)+(c+d) = (a+d)+(c+b)$.
    b) $(a+b)+(-a) = b$.
    c) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$.
    d) $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.
13. Demuestre que si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
14. Escriba una demostración tabular de que para todo $x,y \in \mathbb{R}$, $x(-y) = -(xy)$.
15. Demuestre que para todo $x,y,z \in \mathbb{R}$, $x(y-z) = xy-xz$.
16. Demuestre que si $x,y,z,w \in \mathbb{R}$, entonces $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$. Justifique cada paso de su demostración.
17. Demuestre el corolario 3 en forma de tabla sin olvidar dar razones para cada paso.
18. Suponga que $x,y,z,w \in \mathbb{R}$, demuestre las siguientes propiedades:
    a) $\dfrac{x}{y} = 0$ si y solo si $x = 0$.
    b) Si $y \neq 0$, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{y} = \dfrac{x+z}{y}$.
    c) Si $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
19. Demuestre la *ley de cancelación para la multiplicación* Si $x,y,z \in \mathbb{R}$ y $z \neq 0$, entonces $xz = yz$ implica $x = y$.
20. Demuestre que si $xyz = 0$ entonces o bien $x = 0$, o bien $y = 0$, o bien $z = 0$.
21. Demuestre la proposición 4.4.4.
22. Argumente cada paso de la demostración del teorema del triángulo de Pascal.
23. Escriba las razones de cada paso de la demostración del teorema 4.6.1.
24. En el ejercicio 4.10 explique por qué $x^2+1 = (x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})$ y por qué $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.
25. Encuentre el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones:
    a) $\dfrac{4}{5}x + \dfrac{1}{2} = 3x + \dfrac{2}{3}$.
    b) $7 - \dfrac{2y+7}{4} = \dfrac{3y-1}{6}$.
    c) $\dfrac{6}{2+z} - \dfrac{1}{4-z^2} = \dfrac{5}{4-2z}$.
    d) $\dfrac{1}{x^2+1}$.
    e) $x^2+1 = 0$.
26. Demuestre formalmente la segunda parte del teorema 4.8.3.
27. Demuestre con todo detalle la parte (iv) del teorema 4.8.4.
28. Demuestre que si $x,y,z \in \mathbb{R}$, entonces: (i) Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$. (ii) Si $x < y$ entonces $x+z < y+z$. (iii) Si $x < y$y $z > 0$, entonces $xz < yz$. (iv) Si $x < y$ y $z < 0$, entonces $xz > yz$.
29. Defina los siguientes intervalos $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$ y $(-\infty,b]$ en términos de complementos de intervalos dados en la definición 4.8.2.
30. Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, demuestre las siguientes proposiciones:
    a) Si $a \geq b$ y $c \geq d$, entonces $a+c \geq b+d$.
    b) $a \leq b$ si y solo si $-a \geq -b$.
    c) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
31. Demuestre que si $b,d > 0$, entonces $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ si y solo si $ad < bc$.
32. Si $a,b > 0$, entonces $a > b$ si y solo si $a^2 > b^2$.
33. Demuestre que si $x \geq b$ o $x < -b$ con $b > 0$ entonces $|x| \geq b$ (recíproco del teorema 4.8.6 (va3)).

34. Demuestre que si $a,b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$. Use este hecho para demostrar que entre dos números racionales diferentes siempre existe otro número racional.
35. Demuestre que $|x-\ell| < \varepsilon$ si y solo si $-\varepsilon+\ell < x < \varepsilon+\ell$.

4.10.3 Nivel avanzado

36. Demuestre la desigualdad del triángulo: para todo $x,y \in \mathbb{R}$ $|x+y| \leq |x|+|y|$. **Sugerencia:** $-|x| \leq x \leq |x|$ y $-|y| \leq y \leq |y|$, por el teorema 4.8.6.
37. Compruebe que r del ejercicio 4.7 efectivamente satisface $r^2 = 2$. **Sugerencia.** ¿Que pasa si $r^2 > 2$ o $r^2 < 2$?

5. Construcciones geométricas

En este capítulo se estudia una introducción a ciertos conceptos básicos de la geometría euclidiana plana. En la actualidad, existe una diversa serie de acercamientos con diferentes axiomáticas [13],[23]. Un curso completo [14] con los axiomas de Birkhoff está disponible en la página:

https://libroscbi.izt.uam.mx/index.php/lcbi/catalog/book/43

En el enfoque de este libro no se partirá de una axiomática definitiva dada sino que se construirán diversas conexiones entre proposiciones elementales y se construirán los conceptos básicos para que el lector interesado pueda acceder sin mayor contratiempo a los enfoques de cualquiera de los libros de Geometría citados, teniendo en cuenta que son enfoques diferentes a los aquí planteados y, además, diferentes entre sí.

Se estudiarán los fundamentos de los siguientes conceptos:

- Puntos, segmentos y rectas en el plano.
- Ángulos, medida de ángulos, segmentos y medida de segmentos. Congruencia y semejanza.
- Paralelas, bisector perpendicular.

5.1 Preliminares geométricos, construcciones con regla y compás virtuales

A lo largo de este capítulo utilizaremos el programa *GeoGebra*, el cual es un programa de código abierto, uso libre y gratuito para instituciones no lucrativas como es el caso de la UAM y la editorial de CBI. Por ende, se incluye este libro entre los objetos no comerciales que incluye la licencia de *GeoGebra*, ya que no pretende ni está diseñado para obtener ninguna ganancia comercial. La página de *GeoGebra* donde el lector interesado encontrará ayudas, ligas, etcétera, es

https://www.geogebra.org/

Una ventaja más de *GeoGebra* es que puede instalarse en los sistemas operativos comerciales más usados así como en cualquier sistema operativo de LINUX con instrucciones y ayudas en español. También puede usarse la versión en línea sin necesidad de instalar en una computadora o teléfono. Al instalar una versión **clásica** de *GeoGebra* aparecerá en la parte alta de la ventana una serie de íconos como los de la figura 5.1.

Es necesario mencionar que la versión en línea, a diferencia de versiones clásicas, desplegará los íconos en una ventana vertical al oprimir el botón derecho del ratón sobre la palabra “tools”. En la versión clásica, el primer ícono de izquierda a derecha es una flecha el cual representa un cursor que sirve para mover los objetos que se seleccionen una vez dibujados, por ejemplo puntos, segmentos, etcétera. El segundo ícono, el cual es una minúscula circunferencia con una letra “A”, representa un punto, por default, *GeoGebra* pone etiquetas a los diferentes puntos: A, B, etcétera.

Figura 5.1: Íconos de *GeoGebra*.

El tercer ícono el cual es un par de círculos pequeños (representaciones de puntos) atravesados por una línea, despliega las opciones para dibujar segmentos, rectas, rayos o semirectas y aun, vectores. El cuarto ícono, el cual representa dos líneas atravesadas, una azul y una roja que se cortan en un punto azul, se utiliza para desplegar las opciones para dibujar paralelas y rectas perpendiculares. Las siguientes opciones del menú se utilizan para dibujar polígonos, circunferencias, cónicas y el antepenúltimo ícono sirve para reflejar puntos con respecto a una recta. El lector no debe perder la oportunidad de explorar todos los íconos y las posibilidades del *GeoGebra*, por sí mismo.

5.1.1 Exploraciones con *GeoGebra*

Como se ha mencionado, los objetos creados en *GeoGebra* son representaciones de objetos matemáticos ideales y por lo tanto una mera aproximación, tan buena o mala como cualquier otra, por ejemplo, la que se obtiene al dibujar con un marcador en un pizarrón o con lápiz en una hoja de papel.

Usemos primero el tercer ícono a partir de la izquierda de la figura 5.1. Con tal opción se podrán dibujar rectas a partir de dos puntos. Pero antes quitemos la cuadrícula de la pantalla y los ejes coordenados, lo cual se logra oprimiendo el botón derecho del ratón sobre el cursor sobre la ventana desplegada por *GeoGebra* con lo que aparecerá un menú en el que están representados los ejes y la cuadrícula, oprimiendo el ratón sobre ellos desaparecerán los ejes y la cuadrícula.

Con el tercer ícono mencionado podrá dibujar una recta como la de la figura 5.2. Observe que en el recuadro izquierdo, llamado "Vista Algebraica", aparecerán los datos correspondientes a este ejemplo $A = (-0.52, 0.84)$, $B = (4.18, 3.42)$ y $f : -2.58x + 4.7y = 5.29$ los cuales son, respectivamente, las coordenadas de los puntos A, B y la ecuación de la recta que *GeoGebra* nombró por defecto f. Estos datos no nos conciernen ya que no estudiaremos geometría analítica en este libro y por lo tanto el lector puede cerrar la "Vista Algebráica", sin ninguna preocupación.

Ahora podemos desaparecer las representaciones de los puntos A y B poniendo el cursor sobre cada uno de ellos y con el botón derecho del ratón se desplegará el menú "objeto visible" con el cual apretando el botón derecho nuevamente desaparecerán los puntos. Al regresar el recuadro "vista algebraica", mediante el menú en la parte superior de la pantalla, se observa que los puntos que aparecen están desmarcados, es decir, sin color. Pueden volver a aparecer colocando el cursor sobre ellos y oprimiendo el botón derecho del ratón.

Ejercicio 5.1 Genere un par de puntos en la pantalla de *GeoGebra* y haga pasar por ellos varios arcos de circunferencias, y elipses además de la recta que se genera con el tercer ícono. ¿Cuántas circunferencias pueden pasar por dos puntos dados en la representaciones de *GeoGebra*?
Solución. Use el sexto ícono a partir de la izquierda del menú de *GeoGebra* para generar un dibujo como el de la figura 5.3. Observe que un número no determinado de curvas puede pasar por dos puntos dados, sin embargo solo una recta puede trazarse por dos puntos dados. ■

El siguiente axioma resultaba tan evidente para Euclides que no es considerado en absoluto en su texto. Recuerde el lector que debe olvidar todas las ideas que tiene asociadas con puntos, rectas y planos para considerar solamente lo que está establecido en los axiomas y nada más, para construir la teoría de manera correcta.

Axioma 5.1 *Existe al menos un plano y en el plano existen al menos tres puntos que no están en una misma recta.*

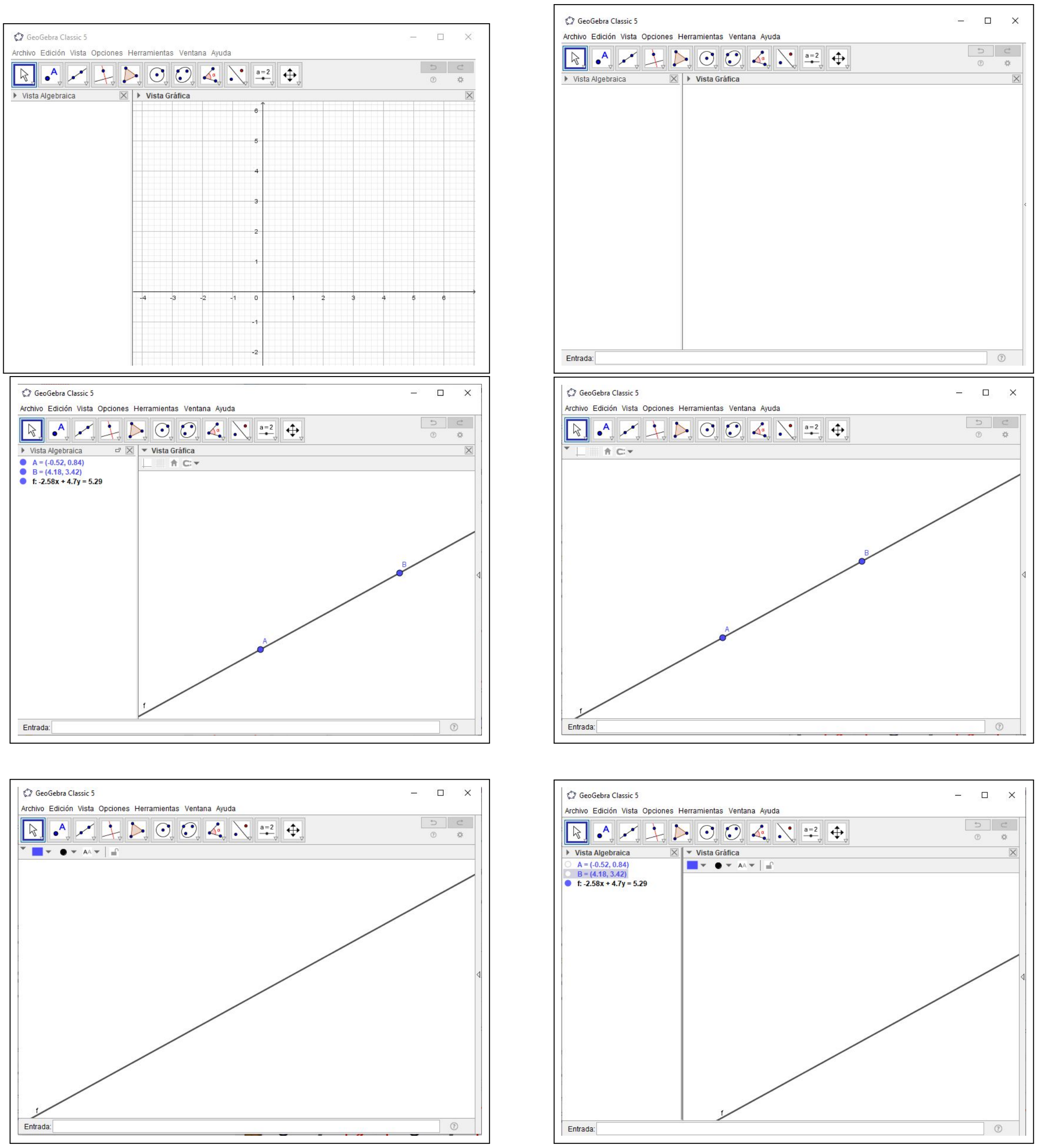


Figura 5.2: Uso de la pantalla de *GeoGebra*. 1) Por default se produce una cuadrícula y ejes coordenados. 2) Se puede obtener un plano sin coordenadas ni ejes con el botón derecho del ratón. 3) Presionando sobre el ícono que representa una recta por dos puntos se pueden generar rectas. 4) Es posible cerrar la vista algebraica, ya que no se trabajará con coordenadas cartesianas. 5) También es posible borrar las representaciones de puntos. 6) Cuando se borran las representaciones de puntos los círculos junto a las coordenadas en la “Vista Algebraica” aparecen sin color.

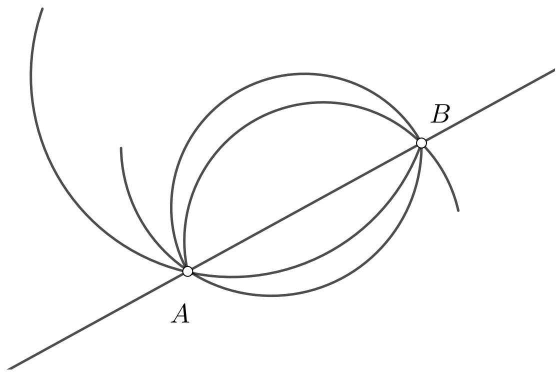


Figura 5.3: Representación con *GeoGebra* de la posibilidad de que un *infinito número* de curvas pasen por dos puntos dados del plano, pero solo una recta.

La representación producida con *GeoGebra* en la figura 5.3 nos da una buena aproximación de lo que se postula en el siguiente axioma 5.2.

Axioma 5.2 *Por dos puntos distintos dados de un plano pasa una y solo una línea recta. Además, si dos puntos A y B están sobre una recta ℓ, A y C, con $C \neq B$ está sobre la misma recta ℓ, entonces B y C están sobre la misma recta ℓ.*

Nota. En enfoques como el de Hilbert en [13], el axioma 5.2 dice: Dos puntos "determinan" completamente una línea recta. Otras expresiones también son usadas en otros enfoques. Se prefirió el del axioma 5.2 por ser el más simple. Observe que las palabras "punto" y "recta", no se han definido, sino que se espera que su significado quede totalmente determinado por los axiomas, independientemente de cualquier representación posible.

Notación. Los puntos del plano se denotan con mayúsculas: P, Q, etcétera; mientras que para las rectas se usan minúsculas: ℓ, m, etcétera.

El primer teorema que se obtiene del axioma 5.2 es:

Teorema 5.1.1 Dos rectas distintas o bien *no tienen ningún punto en común* o bien, tienen en común a lo más un punto.

Demostración. Si dos rectas no tienen un punto en común no hay nada que demostrar. Supongamos que las rectas tienen puntos en común. Si las rectas tienen dos puntos en común necesariamente coinciden por el axioma 5.2, pero por hipótesis, las rectas son distintas. De esta forma rectas distintas tienen a lo más un punto en común. □

Definición 5.1.1 Dos rectas distintas situadas en un plano tales que no tienen puntos en común se llaman *rectas paralelas*. Se establece que toda recta es paralela a sí misma.

Nota. Es muy importante que cuando se realice el estudio de la geometría en una actividad grupal se discuta sobre lo que implican el axioma 5.2 y el teorema 5.1.1. No se dice nada en absoluto acerca de que *dos rectas no paralelas tengan un punto en común*. Solo dice que dos rectas no paralelas tienen como máximo un punto en común. **No se garantiza la existencia de tal punto.** Es muy importante en un primer acercamiento al aprendizaje de la axiomática de una geometría que se diferencie claramente lo que dicen realmente los axiomas y teoremas, de los prejuicios que se han formado a lo largo de la experiencia. La existencia de puntos en común de curvas o rectas que se corten solo puede garantizarse incluyendo en los axiomas la continuidad de tales objetos o bien, demostrando la continuidad a partir de los axiomas. Enfoques clásicos como los de Euclides o los de Wenworth [23] **no lo garantizan**, por lo que en un curso moderno debe tratarse con mucho cuidado estos temas. Por ejemplo, en la axiomática de Euclides [8] así como en la de Hilbert [13], debe incluirse el axioma de Pasch (vea por ejemplo [12], [14]) adicionalmente a los axiomas dados por Euclides.

Ejercicio 5.2 **Modelos de axiomáticas.** Un *modelo de una axiomática* es un conjunto de objetos con los cuales se satisfacen los axiomas de un sistema. Como ejemplo, se define un plano como el conjunto $\mathscr{P} = \{A,B,C\}$, donde A, B y C son los únicos puntos del plano, los cuales por hipótesis son distintos. Las rectas del sistema se definen como todos los subconjuntos de $\mathscr{P}$ que contienen exactamente dos puntos. Entonces hay solo tres rectas en el plano a saber: $\ell = \{A,B\}$, $m = \{B,C\}$ y $n = \{C,A\}$. Muestre que el plano $\mathscr{P}$ satisface los axiomas 5.1 y 5.2.
Solución. La verificación de los axiomas se hace analizando todos los casos posibles. En efecto, para verificar el axioma 5.1 se constata que solo hay tres puntos y dadas las tres rectas posibles se verifica que $C \notin \ell$, $A \notin m$ y $B \notin n$.

Para verificar el axioma 5.2 se constata que cada dos puntos distintos existe una recta que los contiene. Dado que ninguna recta contiene tres puntos, la segunda parte del axioma se satisface por *vacuidad.* ■

5.2 Axiomas de orden

La palabra "entre" no se define en la presente axiomática, sin embargo su significado determina una propiedad de las rectas en los siguientes axiomas.

Axioma 5.3 *Si A, B y C son puntos sobre una recta y B está entre A y C, entonces B está entre los puntos C y A.*

Notación. Si B está entre A y C se denota $A - B - C$.

Axioma 5.4 *Si A y C son puntos sobre una recta, entonces existe al menos un punto B que está entre A y C, y al menos un punto D situado de tal forma que C está entre A y D.*

■ **Ejemplo 5.1** Demuestre que el axioma 5.4 garantiza la existencia de un número infinito de puntos en cualquier recta. Sin embargo el conjunto de puntos generado de esta forma es numerable.
Solución. Es indispensable que el lector pueda realizar una demostración de este hecho por sí mismos, ¿por qué el conjunto generado de esta manera, a partir de dos puntos, es numerable? ■

Axioma 5.5 *De cualesquiera tres puntos sobre una recta uno y solo uno de ellos está entre los otros dos.*

El lector debe notar que el axioma 5.3 no se cumple para ciertos objetos los cuales se definen en el siguiente ejercicio, como se muestra en la figura 5.4

Ejercicio 5.3 Se define un plano $\mathscr{P} = \{A,B,C,D\}$ y se definen las *c-rectas* como conjuntos de solo tres puntos de $\mathscr{P}$ que se encuentran sobre cualquiera de las circunferencias de la figura 5.4. Para las *c-rectas* si X, Y y Z son puntos sobre una de ellas, se define $X - Y - Z$ si y solo si al moverse sobre la circunferencia en el sentido contrario a las manecillas del reloj (*sentido contra reloj*) partiendo de X, entonces aparece Y antes que Z. Compruebe que el sistema formado por $\mathscr{P}$ y los puntos A,B,C,D satisfacen los axiomas 5.1 y 5.2, pero no el axioma 5.3.
Solución. La verificación de los axiomas 5.1 y 5.2 se deja como ejercicio. Para verificar el axioma 5.3 considere la *c-recta* que contiene los puntos A,B y C, en la figura 5.4. Al moverse en el sentido contra reloj de A a C se tiene que $A - B - C$ pero al moverse en el mismo sentido contra reloj de C a A, B no está entre C y A, de acuerdo a como se definió "estar en", en este ejercicio. ■

Definición 5.2.1 **(segmento de recta).** Dados dos puntos A y B, distintos, sobre una recta, el conjunto de todos los puntos entre A y B sobre la recta se llama *segmento AB.* Los puntos A y B se llaman *extremos* del segmento.

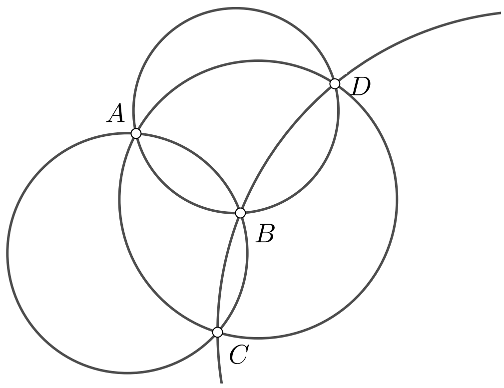


Figura 5.4: El axioma 5.3 no se cumple, por supuesto, en ciertos objetos.

N **Nota.** Observe que el axioma 5.4 garantiza que un segmento de recta no sea el conjunto vacío.

Se obtiene fácilmente de los axiomas de orden el siguiente lema, el cual no se cumple para los objetos en la figura 5.4, si el orden queda definido con un movimiento contra reloj entre puntos.

Lema 5.2.1 El segmento AB es el mismo conjunto de puntos que el segmento BA.

Demostración. Se sigue inmediatamente de los axiomas 5.3 y 5.5. Los detalles se dejan como ejercicio.

Ejercicio 5.4 Compruebe que si se define sobre una circunferencia la relación $A-X-C$ mediante un movimiento contra reloj de A a C y también se define $C-X-A$ como un movimiento el sentido de las manecillas del reloj, entonces si se cumple el axioma 5.3 para las *c-rectas* y por lo tanto el segmento AC sería lo mismo que el segmento CA aún sobre una circunferencia. Sin embargo, los otros axiomas de orden no se cumplen en este caso. Indique cuales axiomas de orden no se cumplen, argumente.
Solución. El axioma 5.5 no se cumple ya que si $A-B-C$, tal axioma no permite $C-A-B$, lo cual ocurriría en todo caso. La argumentación detallada se deja como ejercicio. ■

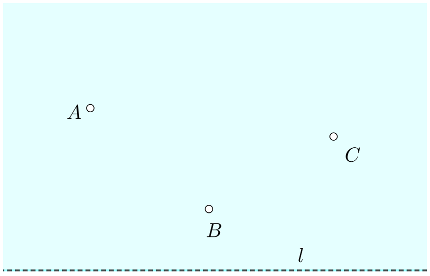
5.3 Otras geometrías

Hasta este momento se han dado una serie de axiomas con los que, de ser satisfechos, puede construirse, con ciertos axiomas adicionales, la geometría euclidiana. Pero también existen otras geometrías que satisfacen los axiomas hasta ahora estudiados. Una geometría alternativa, para la cual se satisfacen los axiomas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 es la geometría hiperbólica para la cual construiremos un modelo en esta sección.

5.3.1 Modelo de la geometría hiperbólica

Considere el semiplano construido sobre una recta l, como en la figura 5.5, este plano se llamará *h-plano* o bien, *plano hiperbólico*, y es solo uno de los modelos posibles de un tal plano. En este conjunto, los puntos A, B, etcétera, son los puntos del h-plano sin contar la recta l que lo determina y las *h-rectas* o *rectas del plano hiperbólico*, son las semicircunferencias en el semiplano con centro sobre la recta l junto con las semirectas perpendiculares a la misma l.

Es un ejercicio de Geometría Analítica verificar que por cada dos puntos distintos del *h-plano* que se usa como modelo de la geometría hiperbólica, pasa una y solo una recta. Claramente existen al menos tres puntos (de hecho existen infinitos puntos) sobre este plano. Los axiomas de orden 5.3, 5.4 y 5.5 se satisfacen, como puede constatar por sí mismo el lector, ya que no se consideran las



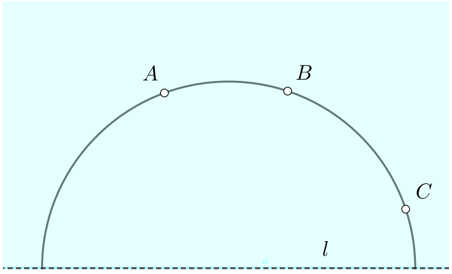


Figura 5.5: Un modelo de la geometría hiperbólica se construye considerando como espacio hiperbólico formado solamente por el semiplano sobre una recta l. Las *h-rectas* son semicircunferencias sobre el plano o semirrectas perpendiculares a l, sobre dicho plano. En la figura de la izquierda se muestran tres puntos cualquiera A, B, C. En la figura de la derecha se muestran tres puntos sobre una *h-recta*.

circunferencias completas, al contrario de lo que se hizo en los ejercicios 5.3 y 5.4, sino solo se toman semicircunferencias.

Ejercicio 5.5 Muestre que por cada dos puntos en el *h-plano* pasa una y solo una *h-recta*. **Advertencia.** Se requiere conocer ciertos temas de Geometría Analítica para comprender la solución que se dará a este ejercicio y puede ser omitido sin perjuicio para el aprendizaje posterior.

Solución. Consideraremos el semiplano $y > 0$, como modelo del plano hiperbólico. Dados dos puntos que no estén en rectas paralelas al eje y existe una y solo una semicircunferencia con centro en el eje x que pasa por tales puntos. Se muestra con un ejemplo el procedimiento para encontrar la ecuación de tal circunferencia. El procedimiento general se deja como ejercicio así como la verificación de que tal *h-recta* es única.

A manera de ejemplo, sean $P_1 = (1,6)$ y $P_2 = (5,2)$, se desea encontrar una circunferencia tal que pase por ambos puntos y tenga centro C sobre el eje x, de esta manera se debe tener que el centro es de la forma $C = (x_0, 0)$ (¿por qué?). La ecuación de la circunferencia buscada debe ser de la forma:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = r^2,$$

donde (x, y), es cualquier punto sobre la circunferencia y r es el radio de la circunferencia por el momento desconocido. Dado que P_1 y P_2 están sobre la circunferencia se debe tener:

$$\begin{aligned} (1 - x_0)^2 + 6^2 &= r^2 \\ (5 - x_0)^2 + 2^2 &= r^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x_0^2 - 2x_0 + 37 &= r^2 \\ x_0^2 - 10x_0 + 29 &= r^2. \end{aligned}$$

Al restar las dos ecuaciones anteriores se obtiene $8x_0 = -8$ y así $x_0 = -1$. Por lo tanto la circunferencia buscada tiene centro en $C = (-1, 0)$. Con la herramienta compás de *GeoGebra* se puede encontrar la circunferencia que pasa por P_1 y P_2 sin necesidad de calcular r explícitamente. No obstante, r puede ser calculada sustituyendo x_0, por ejemplo, en la ecuación $x_0^2 - 10x_0 + 29 = r^2$, así $(-1)^2 - 10(-1) + 29 = r^2$ y por lo tanto $r = \sqrt{40}$. El lector no tendrá dificultad en corroborar mediante *GeoGebra* que la circunferencia con centro en $C = (-1, 0)$ y radio $r = \sqrt{40}$, efectivamente pasa por P_1 y P_2. La semicircunferencia de la figura 5.5 fue generada con estos datos y conminamos al lector para que lo compruebe. ■

Segmentos hiperbólicos

Con la herramienta *GeoGebra* es posible construir segmentos en el modelo del semiplano planteado en esta sección. Se recomienda el siguiente ejercicio para una actividad en clase.

Ejercicio 5.6 Para construir un segmento hiperbólico debe seguir las siguientes instrucciones (vea la figura 5.6).
Paso 1. A partir de dos puntos cualesquiera, utilice el ícono para construir rectas y segmentos (tercer ícono), construya un segmento euclidiano (puede usar la opción de línea punteada para enfatizar que esta línea no aparecerá en la construcción final).
Paso 2. Encuentre el punto medio del segmento, el cual se encuentra en el menú del ícono "punto" (segundo ícono).
Paso 3. Despliegue el menú del cuarto ícono y busque la opción "perpendicular" para construir la recta perpendicular al segmento rectilíneo AB que pasa por el punto medio de dicho segmento el cual fue construido en el paso 2.
Paso 4. Encuentre la intersección de la recta perpendicular a AB del paso 3 con la recta l, la cual es el límite del plano del modelo, llámese C tal punto. Para tal fin, use la opción "intersección" que se despliega en el segundo ícono. Debe seleccionar la recta l y después la recta perpendicular a AB (puede seleccionar en la pantalla "Vista Algebraica") .
Paso 5. Construya el arco de la circunferencia con centro en C que pasa por A y B. Para este fin despliegue con el ícono "circunferencia" (sexto ícono) la opción "Arco de Circunferencia". Recuerde construirlo de derecha a izquierda.
Paso 6. Puede borrar todos los trazos auxiliares y dejar solamente al segmento hiperbólico AB. ■

N **Nota didáctica.** Observe que la justificación formal de la construcción del ejercicio anterior requiere de conocer propiedades de la circunferencia que no se estudian en el presente enfoque. Para un acercamiento formal se sugiere el texto [14]. El objetivo del ejercicio 5.6 es, meramente, acercar al lector a los objetos de la geometría hiperbólica de una manera lúdica, como una primera aproximación.

5.4 Existencia de paralelas

De enorme importancia en la historia del desarrollo de ideas en las matemáticas es el axioma V de Euclides, el cual es equivalente a postular[1] la existencia de una paralela única a una recta dada por un punto fuera de la recta. Se debe mencionar que las paralelas únicas no existen en geometría hiperbólica y que, además, existen otras geometrías. De hecho, son relevantes al menos dos sistemas geométricos los cuales satisfacen los axiomas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5 y, además, satisfacen uno y solo uno de los siguientes axiomas, llamados *axiomas de paralelismo*.

Axioma 5.6 **(existencia y unicidad de paralelas en geometría euclidiana).** Por un punto que se encuentra fuera de una recta dada pasa una y solo una paralela a la misma recta.

Axioma 5.7 **(existencia y multiplicidad de paralelas en geometría hiperbólica).** Por un punto que se encuentra fuera de una recta pasan infinitas paralelas a la misma recta.

N **Nota.** Dado que los axiomas 5.6 y 5.7 son negaciones unos de otros, claramente en un sistema donde se satisfagan además los axiomas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5, solo puede verificarse uno y solo uno de los axiomas de paralelismo.

Paralelas en geometría hiperbólica

Se recuerda que dos rectas distintas son paralelas si no tienen puntos en común. Para el modelo del plano hiperbólico *h-rectas* son paralelas aún si coinciden en el eje x, ya que este eje no se

[1] El postulado a la letra dice: En un par de rectas cortadas por una transversal los ángulos colaterales internos suman las medidas de dos ángulos rectos si y solo si las rectas son paralelas. El lector interesado puede consultar directamente el libro de Euclides [8].

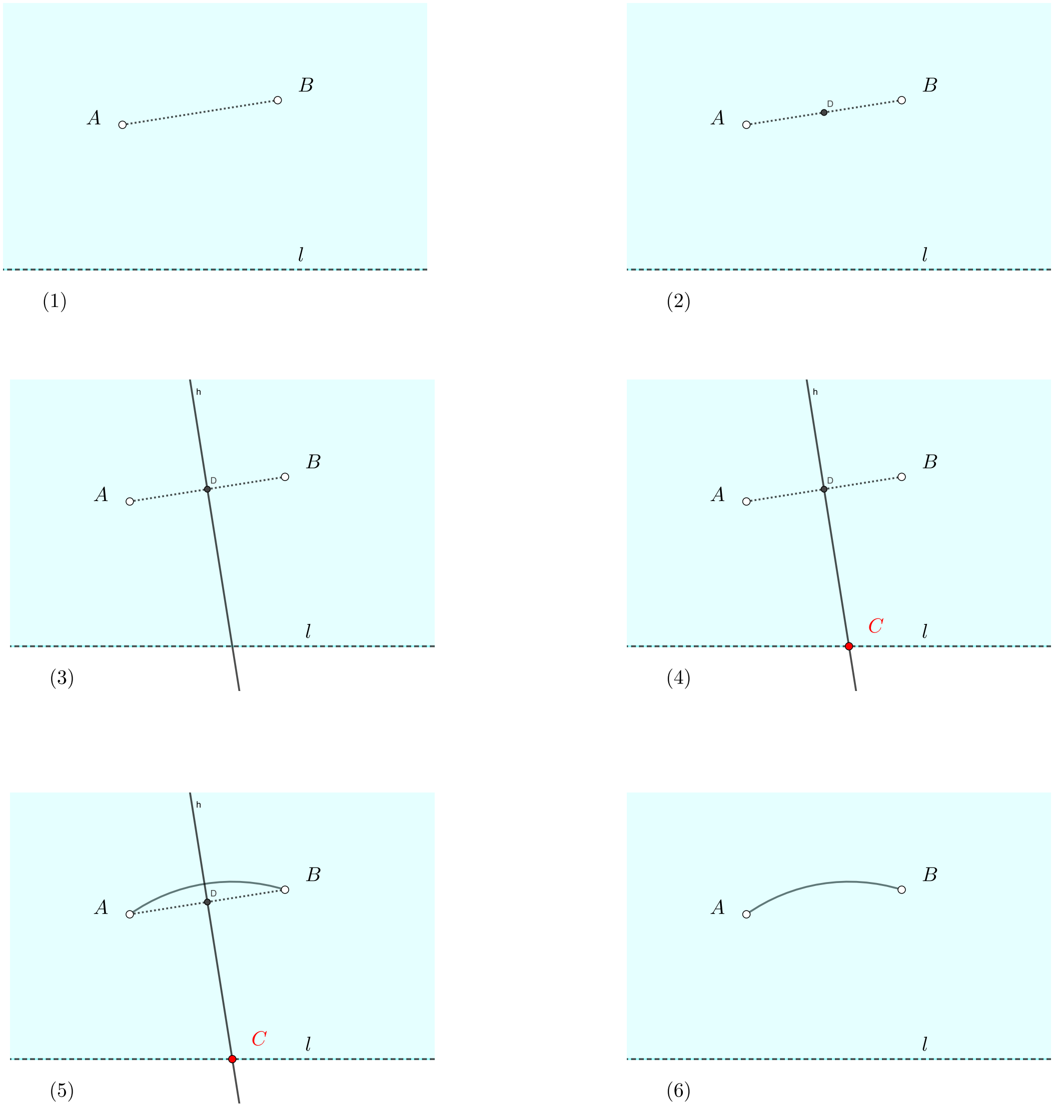


Figura 5.6: Construcción de un segmento hiperbólico. Se muestran los pasos (1) a (6) del ejercicio 5.6, donde se construye un segmento hiperbólico con la herramienta *GeoGebra*.

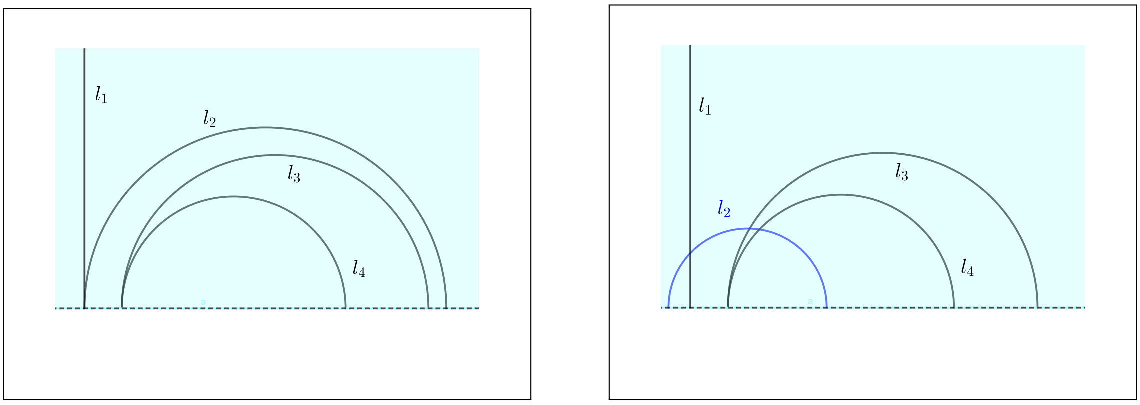


Figura 5.7: Ejemplos de paralelas en el modelo de geometría hiperbólica. En el recuadro del lado izquierdo, las *h-rectas* l_1, l_2, l_3 y l_4 son paralelas en el modelo del semiplano de la geometría hiperbólica. En el recuadro del lado derecho la *h-recta* l_2 corta a las demás rectas en diferentes puntos. Note que al satisfacer los axiomas, necesariamente las *h-rectas* se cortan en a lo más un punto.

considera parte del plano hiperbólico. En la figura 5.7 del lado izquierdo las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4, todas son paralelas entre sí mismas. A pesar de que l_1 y l_2 se cortan sobre el eje que limita el *h-plano* este eje no pertenece al plano hiperbólico. Las rectas l_3 y l_4 también son paralelas por el mismo motivo. En el recuadro derecho la recta l_2 interseca a las otras rectas y por el teorema 5.1.1 ese punto es el único punto de intersección.

N **Nota.** El lector que experimente algún conflicto por el hecho de que las *h-rectas* satisfagan los mismos axiomas que las rectas de la geometría euclidiana, debe recordar que desde el punto de vista de la coherencia lógica no hay ninguna contradicción, se trata solo de dos representaciones (modelos) diferentes del sistema formado solamente con los axiomas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5, exclusivamente. Si se desea que en el sistema de axiomas las rectas “se parezcan” más a las tradicionales rectas, deben adicionarse mas postulados o axiomas, lo cual se hará más adelante. La geometría hiperbólica no es ni mas ni menos “real” que la geometría euclidiana y el lector debe acostumbrarse a poder moverse entre diferentes geometrías evitando prejuicios.

5.4.1 Modelo de la geometría elíptica

Un modelo de una geometría donde no se cumplen todos los axiomas de orden ni existen las rectas paralelas se llama *geometría elíptica*. Un modelo de tal geometría se logra considerando como lugar donde se encuentran los puntos, la superficie de una esfera llamado *e-plano*. Las rectas en este espacio geométrico que llamaremos *e-rectas* son los círculos máximos sobre la esfera, los cuales se obtienen intersecando planos que pasen por el centro de la esfera con la esfera misma. En la figura 5.8 se muestra una representación de un punto P sobre una *e-recta* etiquetada l_1 en la misma figura se ilustra la imposibilidad de existencia de paralelas en la geometría elíptica como se enuncia en el siguiente axioma, no existe *e-recta* paralela a l_2 que pase por P.

Axioma 5.8 (inexistencia de paralelas en geometría elíptica). Por un punto que se encuentra fuera de una recta dada, no pasan rectas paralelas a tal recta.

Se ha visto en este mismo capítulo la imposibilidad de que sobre una circunferencia se cumplan los axiomas de orden 5.3, 5.4 y 5.5, por este motivo en el modelo de la geometría elíptica, tal como la hemos presentado, no se cumplirían tales axiomas. Sin embargo el lector puede verificar que el axioma 5.1 sí se cumple para las *e-rectas* definidas anteriormente, al menos construyendo ejemplos con *GeoGebra*. El axioma 5.2 se cumple si se identifican puntos antípodas sobre la esfera, pero este tema esta fuera de los objetivos de este curso.

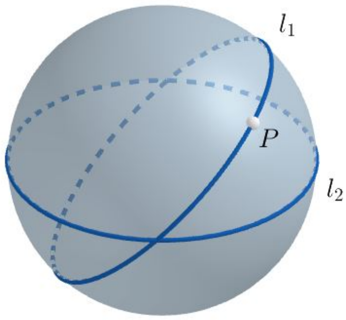


Figura 5.8: En la figura se muestra la imposibilidad de existencia de rectas paralelas, distintas de una recta dada, en un modelo de la geometría elíptica.

5.5 Congruencia en geometría euclidiana

Parte muy importante de la geometría euclidiana es la posibilidad de establecer relaciones de congruencia y semejanza entre objetos. Existen dos enfoques, al menos, de como proceder para tal estudio. Uno, basado en las transformaciones rígidas (por ejemplo en [12]) y otro, basado en la introducción de medidas (vea por ejemplo [15]). En este enfoque se procede con la introducción de medidas por ser más cercano al trabajo de la enseñanza elemental y por ser más sencillo de construir.

Axioma 5.9 (medida de segmentos). *Es posible asignar de manera única a todo segmento AB un número real x no negativo denotado $x = m(AB)$, de tal forma que si C está entre A y C, entonces $m(AC) = m(AB) + m(BC)$. Recíprocamente, dado un punto A, para todo número real $x > 0$, existe un único punto B sobre cualquier recta que pase por A, tal que $m(AB) = x$. El conjunto formado por un solo punto P se le llama segmento vacío, se denota tal segmento con PP y se le asigna $m(PP) = 0$, por definición.*

Definición 5.5.1 (congruencia de segmentos). Los segmentos AB y CD se llaman *congruentes*, lo cual se denota $AB \cong CD$ si y solo si $m(AB) = m(CD)$.

Lema 5.5.1 Sean AB, CD y EF segmentos de recta cualquiera, entonces

1. $AB \cong AB$.
2. $AB \cong BA$.
3. Si $AB \cong BC$ y $BC \cong EF$, entonces $AB \cong EF$.

Demostración. La demostración es inmediata de la definición y se deja como ejercicio.

Definición 5.5.2 (ángulo). Dos segmentos con un mismo punto extremo se dice que forman un *ángulo*. El conjunto de puntos de dos segmentos que forman un ángulo, se llama *ángulo*. Los segmentos que forman un ángulo se llaman *lados del ángulo*. El punto común de los segmentos que forman un ángulo se llama *vértice del ángulo*. Un ángulo formado por los segmentos AB y BC, es decir, con vértice B, se denota $\angle ABC$.

Axioma 5.10 (medida de ángulos). *Es posible asignar de manera única a todo ángulo $\angle ABC$ un número real entre 0 y π, denotado $m(\angle ABC)$. Si los lados de un ángulo $\angle ABC$ están sobre una recta se, asigna $m(\angle ABC) = 0$, si uno de los extremos de cualquiera de los lados del ángulo, además del vértice, está en el otro lado del ángulo. Si los lados de un ángulo están sobre la misma recta, pero solo tienen en común el vértice B, se le asigna $m(\angle ABC) = \pi$.*

Recíprocamente, para todo número real $x \in [0, \pi]$ es posible construir un ángulo $\angle ABC$ con $m(\angle ABC) = x$ tal que las medidas $m(AB) > 0$ y $m(BC) > 0$ sean arbitrarias. Para cualesquiera dos ángulos $\angle ABC$ y $\angle CBD$, con vértice común B y lado común CB, se tiene $m(\angle ABD) = m(\angle ABC) + m(\angle CBD)$.

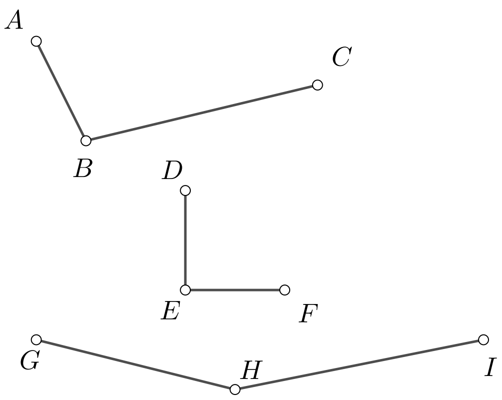


Figura 5.9: Ejemplos de ángulos. Los ángulos definidos en este enfoque están formados por segmentos con un solo punto en común llamado vértice del ángulo. Por ejemplo, el ángulo ABC, tiene como vértice el punto B.

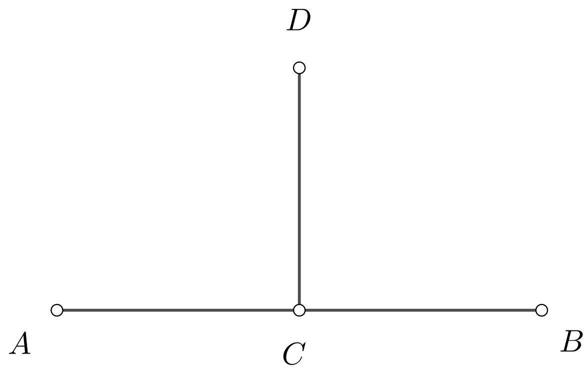


Figura 5.10: Figura que corresponde al ejercicio 5.7. Los puntos A y B están sobre una recta y $m(\angle ACD) = m(\angle DCB)$.

N **Nota didáctica.** El lector experto encontrará que los axiomas 5.9 y 5.10 no están incluidos en los enfoques como los de Moise [15], [14] que utilizan "medidas" en los axiomas. Lo que se hace comúnmente es establecer una correspondencia entre los números reales y los objetos que se van a medir: segmentos, arcos de circunferencias. En este enfoque *no se establecerá tal correspondencia* ya que bastan los axiomas postulados para desarrollar la geometría que se tratará dentro de los objetivos de este libro. La axiomática aquí presentada es la más natural para estudiantes que tienen experiencia en medir segmentos y ángulos. Sin embargo no se utilizará la medida en grados como la medida principal para los ángulos, sino la medida en radianes, como seguramente ya notó el lector.

Definición 5.5.3 (Tipos de ángulos). Un ángulo $\angle ABC$ se llama ángulo *recto*, si y solo si $m(\angle ABC) = \pi/2$, se llama *agudo* si y solo si $m(\angle ABC) < \pi/2$ y se llama *obtuso*, si y solo si $m(\angle ABC) > \pi/2$. Dos ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se llaman *suplementarios* si y solo si $m\angle A + m\angle B = \pi$. Dos ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se llaman *complementarios* si y solo si $m\angle A + m\angle B = \pi/2$. Dos ángulos son *adyacentes* si y solo si tienen un vértice y un lado común.

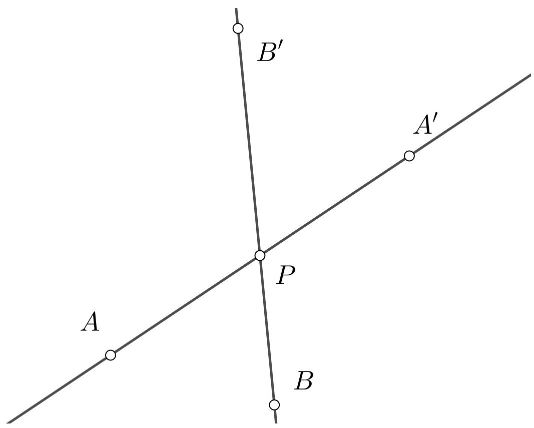


Figura 5.11: Ángulos opuestos por el vértice. Los ángulos $\angle APB$ y $\angle B'PA'$ son opuestos por el vértice. De la misma manera, los ángulos $\angle APB'$ y $\angle BPA'$, también son opuestos por el vértice.

Ejercicio 5.7 En la figura 5.10 los puntos A, B y C están sobre una recta. Si se sabe que $m(\angle ACD) = m(\angle DCB)$, muestre que $\angle ACD$ y $\angle DCB$ son rectos.
Solución. Dado que A, B y C están sobre una recta se tiene $m(\angle ACB) = \pi$, por el axioma 5.10. Por el mismo axioma se tiene que

$$m(\angle ACB) = m(\angle ACD) + m(\angle DCB).$$

Al sustituir en la ecuación anterior $m(\angle ACD) = m(\angle DCB)$ (hipótesis) y $m(\angle ACB) = \pi$ se obtiene

$$\begin{aligned} \pi &= m(\angle ACD) + m(\angle DCB) \\ &= 2m(\angle ACD), \end{aligned}$$

por lo que $m(\angle ACD) = \pi/2$, y por la definición 5.5.3 $\angle ACD$ es recto. Por lo tanto también $\angle DCB$ es recto. ■

La importancia del ejercicio 5.7 está en la forma de deducir a partir de los axiomas y las definiciones un hecho, más que en el hecho mismo que, por otra parte, debe ser intuitivamente claro. Observe que se le llamó “ejercicio” y no “teorema”, aunque esta forma de proceder no sea la más ortodoxa.

Dadas dos rectas que se cortan en un plano es posible colocar puntos en ellas para formar ángulos, estos ángulos tienen nombres especiales. En la figura 5.11 los ángulos $\angle APB$ y $\angle B'PA'$ son opuestos por el vértice. De la misma manera, los ángulos $\angle APB'$ y $\angle BPA'$ también son opuestos por el vértice.

La definición formal de “ángulos opuestos por el vértice” se deja como ejercicio recomendable por su carácter formativo. Sin embargo, se enuncia como lema el siguiente hecho.

Lema 5.5.2 Ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Demostración. En la figura 5.11 los puntos A y A', se encuentran sobre una misma recta y los puntos B y B', se encuentran sobre otra recta. Las rectas se cortan en un punto P. Se tiene entonces $m(\angle APA') = m(\angle B'PB) = \pi$, por el axioma 5.10. Por otra parte $m(\angle APA') = m(\angle APB') + m(\angle B'PA')$ y $m(\angle B'PB) = m(\angle B'PA) + m(\angle APB)$ de donde,

$$\begin{aligned} m(\angle APB') + m(\angle B'PA') &= m(\angle B'PA) + m(\angle APB) \\ m(\angle B'PA') &= m(\angle APB) \end{aligned}$$

Observe que el ángulo $\angle APB'$ es el mismo conjunto de puntos que el ángulo $\angle B'PA$ y por lo tanto

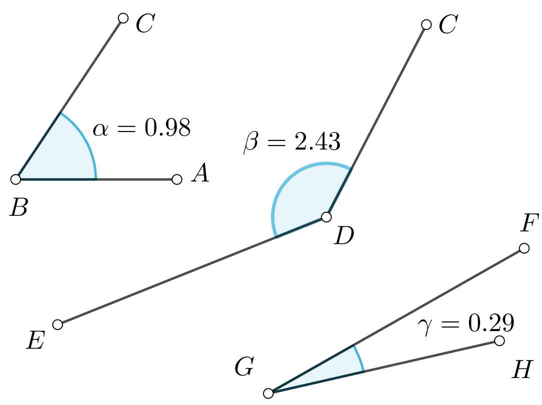


Figura 5.12: Medidas de algunos ángulos dadas en radianes .

tienen la misma medida por el axioma 5.10 que asigna un número real único a cada ángulo. Por lo tanto ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

5.5.1 Medidas con *GeoGebra*

Una buena representación aproximada de la axiomática para la geometría euclidiana presentada hasta el momento, se logra con *GeoGebra*. Observe que los axiomas 5.9 y 5.10 indican que es posible asignar una medida a los segmentos y a los ángulos, pero no dicen cómo, lo cual es típico de los enfoques axiomáticos. Con *GeoGebra* se puede tener *un modelo aproximado de la geometría euclidiana* que incluya los axiomas mencionados ya que el programa cuenta con opciones para asignar medidas a segmentos y ángulos. A continuación se dan una explicaciones y ejemplos de cómo medir con *GeoGebra*.

Para medir ángulos se debe ir al ícono de la barra de menú de *GeoGebra* donde se representa la figura de un ángulo denotado con la letra griega “α”. La primera opción en este ícono asigna una medida a un ángulo dados tres puntos. Se debe proceder en el sentido contra reloj, ya que de otra manera, *GeoGebra* mide el ángulo externo, el cual no está incluido en el axioma 5.10. Por “default” las medidas de los ángulos en *GeoGebra* se dan en grados, pero existe la posibilidad de cambiar a radianes que es la medida que interesa en este enfoque. En la figura 5.12 se muestran algunos ejemplos donde $\alpha = m(\angle ABC) = 0.98$ radianes; $\beta = m(\angle CDE) = 2.43$ radianes; $\gamma = m(\angle HGF) = 0.29$ radianes.

N **Nota.** No es obvio como el programa *GeoGebra* asigna medidas a los ángulos y, como se ha dicho, es solo una “buena” aproximación (de hecho con solo dos dígitos), a la medida real de un ángulo cualquiera en radianes. Lo que se puede decir es que tal medida es una aproximación a la longitud de arco de la circunferencia de radio uno con centro en el vértice del ángulo medido, circunferencia que pasa por los lados de los ángulos o por prolongaciones de ellos.

■ **Ejemplo 5.2** Se recuerda que para convertir x° grados a y radianes, se puede usar la siguiente multiplicación

$$x^\circ \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{180^\circ} = y \text{ radianes.}$$

De manera recíproca se puede convertir x radianes a y grados mediante una multiplicación:

$$x \text{ radianes} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ radianes}} = y^\circ.$$

Por ejemplo, la medida α del ángulo $\angle ABC$ es

$$m(\angle ABC) = 0.98 \text{ radianes} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ radianes}} = 56.14^\circ$$

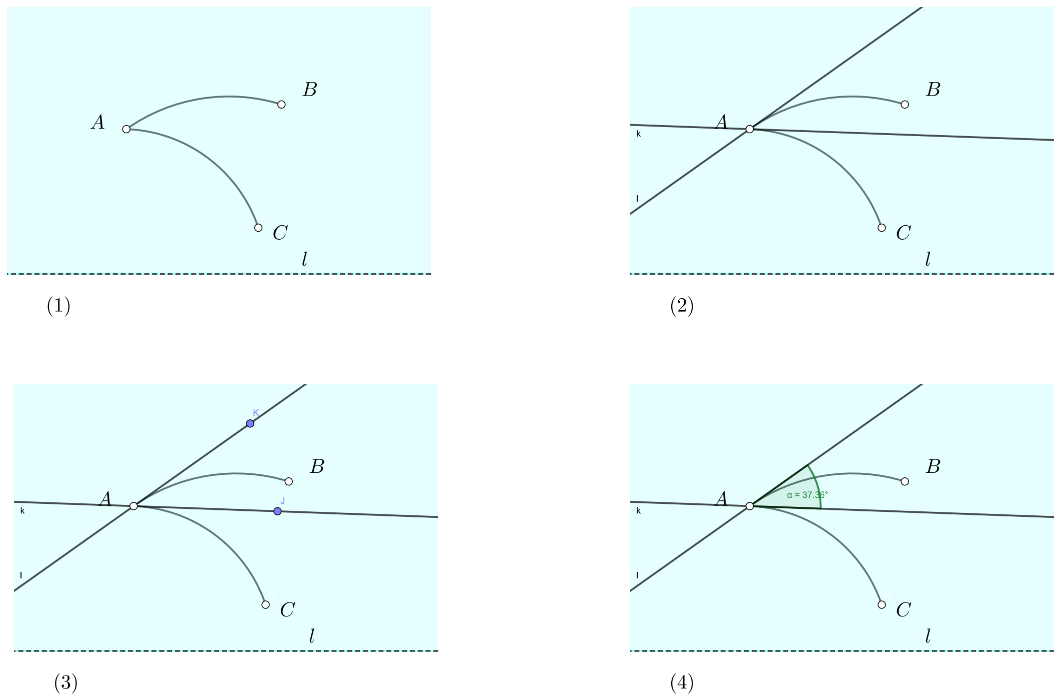


Figura 5.13: Medida de un ángulo hiperbólico. Se muestran los pasos (1) a (4) del ejercicio 5.8, donde se mide un ángulo hiperbólico con la herramienta *GeoGebra*.

Note que los decimales del ángulo $\angle ABC$ en grados no corresponden a la notación sexagesimal que antiguamente se asignaba a los ángulos medidos en grados. ■

Si recordamos que el axioma 5.10 también sostiene que dado cualquier número real entre 0 y π es posible construir un ángulo con tal medida, *GeoGebra* también tiene la opción: "ángulo dada su amplitud", la cual es la segunda opción del ícono "ángulo". Se recomienda al lector que realice algunos experimentos por sí mismo para que se familiarice con esta herramienta y en la sección de ejercicios podrá encontrar algunos problemas como apoyo.

Se cierra esta sección haciendo mención de que *GeoGebra* asigna medidas por "default" a cualquier segmento que se construya con la segunda opción del tercer ícono "segmentos". Por otra parte, la tercera opción de este mismo ícono permite construir segmentos dada una longitud, por lo que con *GeoGebra* se cumple el axioma 5.9 al menos de manera aproximada.

Ángulos hiperbólicos

Una vez que se ha aprendido a trazar segmentos hiperbólicos como en el ejercicio 5.6, es posible, con la ayuda de *Geogebra*, asignar medidas a los ángulos hiperbólicos del modelo del semiplano estudiado en la sección 5.3. Para ello se requiere construir (por ejemplo también con *GeoGebra*) tangentes a circunferencias en puntos dados y después medir los ángulos entre tangentes con las opciones dadas por *GeoGebra*. Nuevamente este es un ejercicio para familiarizar al posible lector con los objetos de la geometría hiperbólica y no se pretende formalizar en esta etapa del aprendizaje los conceptos involucrados. la construcción se muestra en la figura 5.13.

Ejercicio 5.8 Es posible asignar una medida también en geometría hiperbólica (como indica el axioma 5.10), si se define el ángulo entre segmentos hiperbólicos como el ángulo entre las tangentes a los arcos que forman el ángulo hiperbólico (vea la figura 5.13), para ello se deben seguir las siguientes instrucciones.

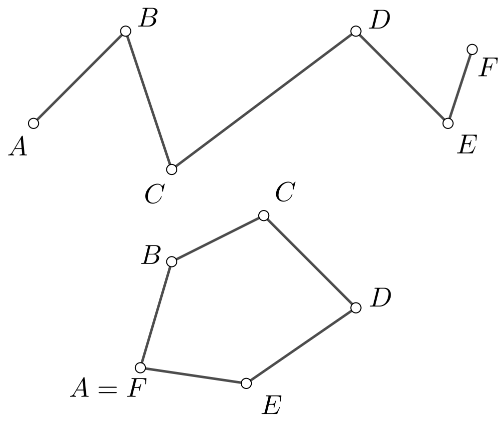


Figura 5.14: Línea quebrada y polígono. Note que en un polígono coinciden los puntos A y F, a diferencia de una línea quebrada.

Paso 1. Construya un ángulo hiperbólico cualquiera $\angle BAC$. Para ello se requiere construir segmentos hiperbólicos como en el ejercicio 5.6.
Paso 2. Construya las tangentes a los arcos AC y AB en el punto A, con la opción "Tangentes" que se despliega en el cuarto ícono de *GeoGebra*.
Paso 3. Para poder medir el ángulo entre las tangentes, construya puntos auxiliares sobre cada una de las tangentes (corresponde a (3) en la figura 5.13).
Paso 4. Mida el ángulo entre las tangentes con la opción "Ángulo" que se despliega en el menú del octavo ícono. En el ejemplo de la figura 5.13 se muestra $\alpha = 37.36°$

■

Triángulos y otros polígonos

Definición 5.5.4 Una colección de segmentos AB, BC, CD, ...KL se llama *línea quebrada* que une A con L. Si el punto A es el mismo que L, en la sucesión AB, BC, CD, ...KL, y tales puntos en los segmentos son los únicos para los que ocurre que son iguales para todos los puntos en los segmentos de la sucesión, a la línea quebrada se le llama *polígono*. Los segmentos en el polígono se llaman *lados del polígono* y los puntos extremos de los segmentos se llaman *vértices del polígono*. Un polígono con tres lados se llama *triángulo*. Los polígonos de 4, 5, 6, lados se llaman, respectivamente, *cuadrado, pentágono, hexágono*. En general un polígono de n lados se llama *n-ágono*, lo cual se lee "eneágono". Un polígono se dice regular si todos sus lados son congruentes entre sí. Para denotar a un polígono, se ponen juntas las letras de los vértices que lo forman, por ejemplo, en la figura 5.14, el pentágono se denota "*ABCDE*". Una *correspondencia entre polígonos* es una correspondencia biunívoca entre los vértices y los lados de los polígonos.

5.5.2 Congruencia entre triángulos en geometría euclidiana

Solo se esbozará el tema de congruencia de triángulos en geometría euclidiana y no se tratará el tema en otras geometrías ya que la definición de medida de segmentos, por ejemplo, en geometría hiperbólica excede los objetivos de este curso. Para un estudio a mayor profundidad de este tema se recomienda [14], por ejemplo.

Definición 5.5.5 (congruencia entre triángulos). Dados los triángulos ABC y DEF se dice que son congruentes si y solo si, existe una correspondencia entre ellos tal que lados en correspondencia son congruentes y la medida de los ángulos formados por lados en correspondencia es la misma.

N **Nota.** De acuerdo con la definición 5.5.5 dos triángulos ABC y DEF son congruentes si y solo si, existe una correspondencia, por ejemplo, $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow F$, tal que:

1. $m(AB) = m(DE)$ y $m(BC) = m(EF)$ y $m(CA) = m(FD)$.
2. $m(\angle AB) = m(\angle DE)$ y $m(\angle BC) = m(\angle EF)$ y $m(\angle CA) = m(\angle FD)$.

Así, estrictamente de la definición, para verificar que dos triángulos sean congruentes *se deben considerar la coincidencia de tres medidas de lados y tres medidas de ángulos*, en principio. Basta que una medida falle para considerar que dos triángulos *no son congruentes.* Pero como se verá, es posible tomar "atajos", mediante axiomas apropiados.

Ejercicio 5.9 **(actividad de exploración de triángulos).** Este ejercicio consta de actividades de exploración relacionadas con congruencias de triángulos.
(i) Construya tres segmentos de longitud arbitraria. ¿Es posible construir un triángulo con cualesquiera tres segmentos?
(ii) Dados los segmentos AB, CD y EF con medidas $m(AB) = 2$, $m(CD) = 3$ y $m(EF) = 4$ construya un triángulo con segmentos que tengan tales medidas.
(iii) ¿Es posible construir un triángulo cuyos lados tengan las mismas medidas que los del inciso (ii), pero que tengan ángulos con distintas medidas? Experimente construyendo distintos triángulos. No olvide argumentar su respuesta.
(iv) Escriba los hallazgos de (iii) en forma de proposición matemática que comience como "Dos triángulos son congruentes si...". Esta proposición se llamará *(LLL).*
(v) Construya un ángulo agudo con dos segmentos de longitud arbitraria. Construya un segundo ángulo congruente con el primero. ¿Es posible construir dos triángulos diferentes con tales ángulos?
(vi) Experimente con varios pares de ángulos congruentes. Enuncie sus hallazgos en forma de proposición matemática de la forma: "Dos triángulos son congruentes si...". Esta proposición se llamará *(LAL).*
(vii) ¿Es posible demostrar (LAL) a partir de (LLL) o recíprocamente, demostrar (LLL) a partir de (LAL)? Esboce sus ideas, no se espera en este momento una demostración formal de ninguna de sus conjeturas, solo haga una lista de lo que considere a favor o en contra de las afirmaciones que elabore. ■

Solución del ejercicio 5.9. Se darán enseguida algunas pautas para la solución de algunas partes del ejercicio.
(ii). Se puede dar solución a este inciso usando regla y compás tradicionales, sin embargo se dará la solución mediante el uso de *GeoGebra.*

a) Construya el segmento EF cuya medida es $m(EF) = 4$. Etiquete los extremos del segmento con las letras E y F (ir al penúltimo ícono y desplegar la opción "Texto").
b) Construya una circunferencia sobre cada uno de los puntos E y F, una de radio 2 y otra de radio 4, para ello utilice el sexto ícono en la opción "Circunferencia: centro y radio".
c) Localice uno de los puntos de intersección de las circunferencias, puede ayudarse con la opción "Intersección", que se despliga en segundo ícono.
d) Construya un triangulo que pase por los puntos E, F y el punto de intersección de las circunferencias que se etiqueta con I, por ejemplo.
e) Etiquete con I' el segundo punto de intersección de las circunferencias y construya otro triángulo que pase por E, F e I'.
f) ¿Cuáles son los ángulos en correspondencia de los triángulos $\triangle EFI$ y $\triangle EI'F$? Mida los ángulos con *GeoGebra* ¿son congruentes los ángulos en correspondencia?

N **Nota.** El ejercicio 5.9, puede dar una idea de que existen diferentes equivalencias entre proposiciones que solo requieren la medición de tres parámetros en cada triángulo para determinar si los triángulos en cuestión son congruentes o no, y no se requiere, en realidad, tomar seis medidas como requiere la definición 5.5.5. En ciertos enfoques de la axiomática de la geometría euclidiana se presenta *(LLL)* como axioma y se demuestran las demás equivalencias a partir de este axioma. A continuación se presenta una versión del axioma *(LLL)*, para contestar el inciso (vi) del ejercicio 5.9. Para un estudio de equivalencias entre

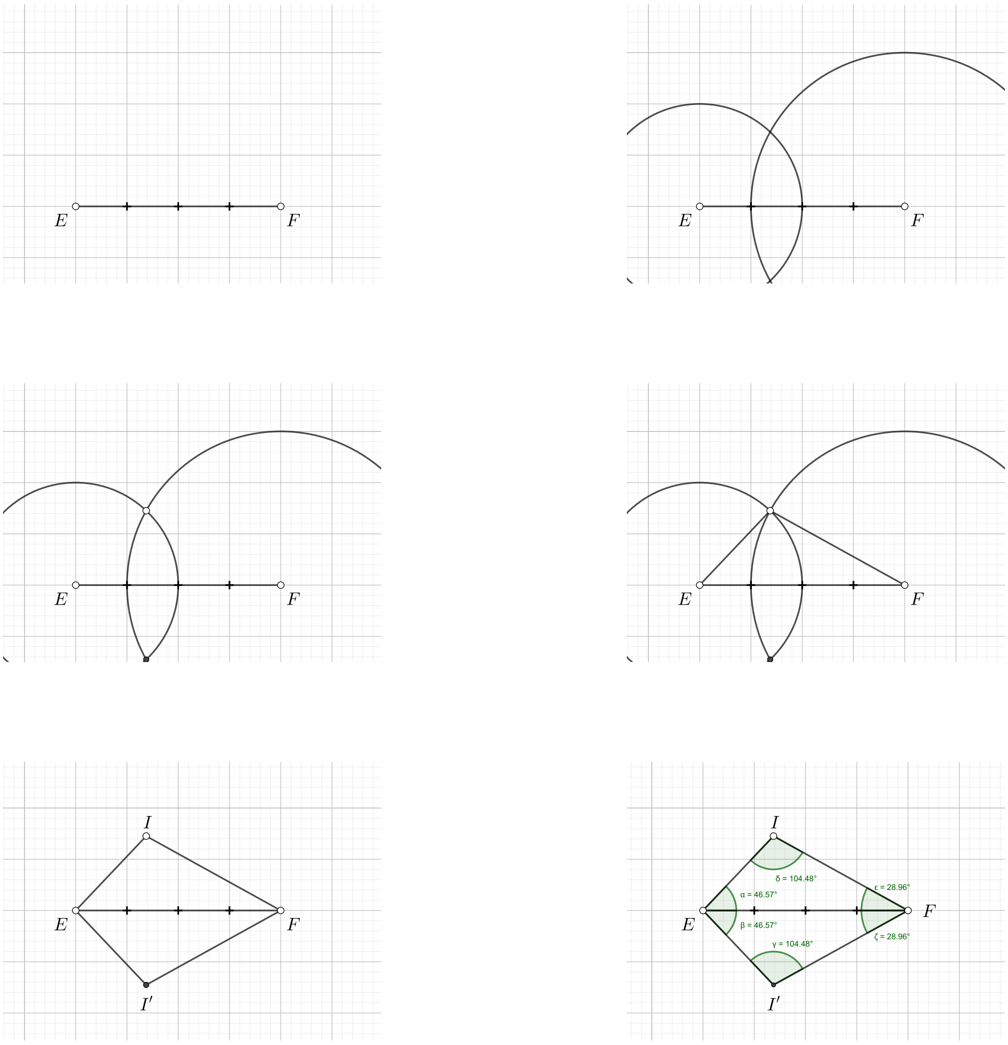


Figura 5.15: Solución del ejercicio 5.9. Se ilustran los pasos (a) a (f) del ejercicio 5.9, donde se muestra como construir un triángulo dadas las medidas de los segmentos. También se muestra como es posible construir un triángulo congruente con el primero y las medidas de los ángulos de ambos triángulos dadas por *GeoGebra*.

teoremas de congruencias de triángulos se recomienda consultar por ejemplo [14], [15] o bien, a un nivel más elemental, el libro de Serra [17].

Axioma 5.11 **(LAL).** Considérese dos lados AB y AC de un triángulo ABC y el ángulo formado por ellos $\angle BAC$. Si existe una correspondencia entre el triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$ tal que dos lados de un triángulo son congruentes con dos lados en correspondencia del otro triángulo y el ángulo $\angle BAC$ mide lo mismo que el ángulo formado por los lados en correspondencia del otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

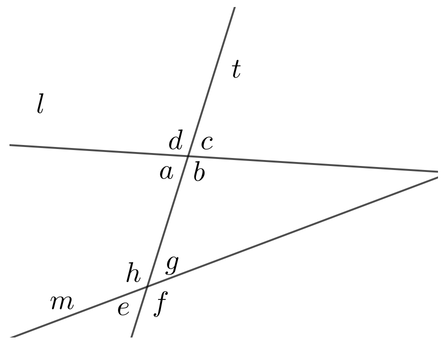


Figura 5.16: La recta t es transversal a las rectas l, m.

5.6 Ejercicios del capítulo 5

5.6.1 Nivel básico

1. **Definición (transversales).** Una recta t que corta a un par de rectas l, m simultáneamente en puntos diferentes, se llama transversal.
   De especial interés son las transversales a rectas paralelas. En las trasversales, a partir de la figura 5.16, están indicados los nombres de ciertos ángulos.
   Definición (ángulos en transversales). En la figura 5.16, ciertos pares de ángulos formados por transversales tienen los siguientes nombres:
   (1) a y c, d y b, h y f, e y g, se llaman *opuestos por el vértice*.
   (2) a, b, h, g, se llaman *internos.*
   (3) d, e, c, f, se llaman *externos.*
   (4) a y g, h y b, se llaman *alternos internos.*
   (5) d y f, c y e, se llaman *alternos externos.*
   (6) a y e, d y h, c y g, b y f se llaman *correspondientes.*
   (7) a y h, b y g, se llaman *colaterales internos.*
   (8) d y e, c y f, se llaman *colaterales externos.* Demuestre que para rectas paralelas en geometría euclidiana se cumple que:
   a) Ángulos alternos internos son congruentes.
   b) Ángulos alternos externos son congruentes.
   c) Ángulos correspondientes son congruentes.
   d) Las medidas ángulos colaterales externos suman π.
2. Con las reglas para conversión de medidas de ángulos del ejemplo 5.2 realice las siguientes conversiones
   a) Convierta π, $\pi/2$ y $\pi/4$ radianes a grados.
   b) Convierta 2π a grados.
3. Demuestre el lema 5.5.1.
4. Defina ángulos opuestos por el vértice (vea la figura 5.16).

5.6.2 Nivel intermedio

5. Con los axiomas 5.1 y 5.2 demuestre que existen al menos tres rectas. A partir de lo anterior y con el axioma 5.4 demuestre que hay un número infinito de rectas distintas.
6. Verifique que se cumplen los axiomas 5.1 y 5.2 en el sistema formado por el plano $\mathscr{P}$ y los puntos A,B,C,D junto con las c-rectas definidas en el ejercicio 5.3.
7. Un *plano proyectivo* es un conjunto de puntos y subconjuntos llamados líneas los cuales satisfacen los siguientes axiomas:
   P1. Cualesquiera dos puntos distintos están en una única recta.
   P2. Cualesquiera dos rectas se encuentran en un punto.
   P3. Toda línea contiene al menos tres puntos.

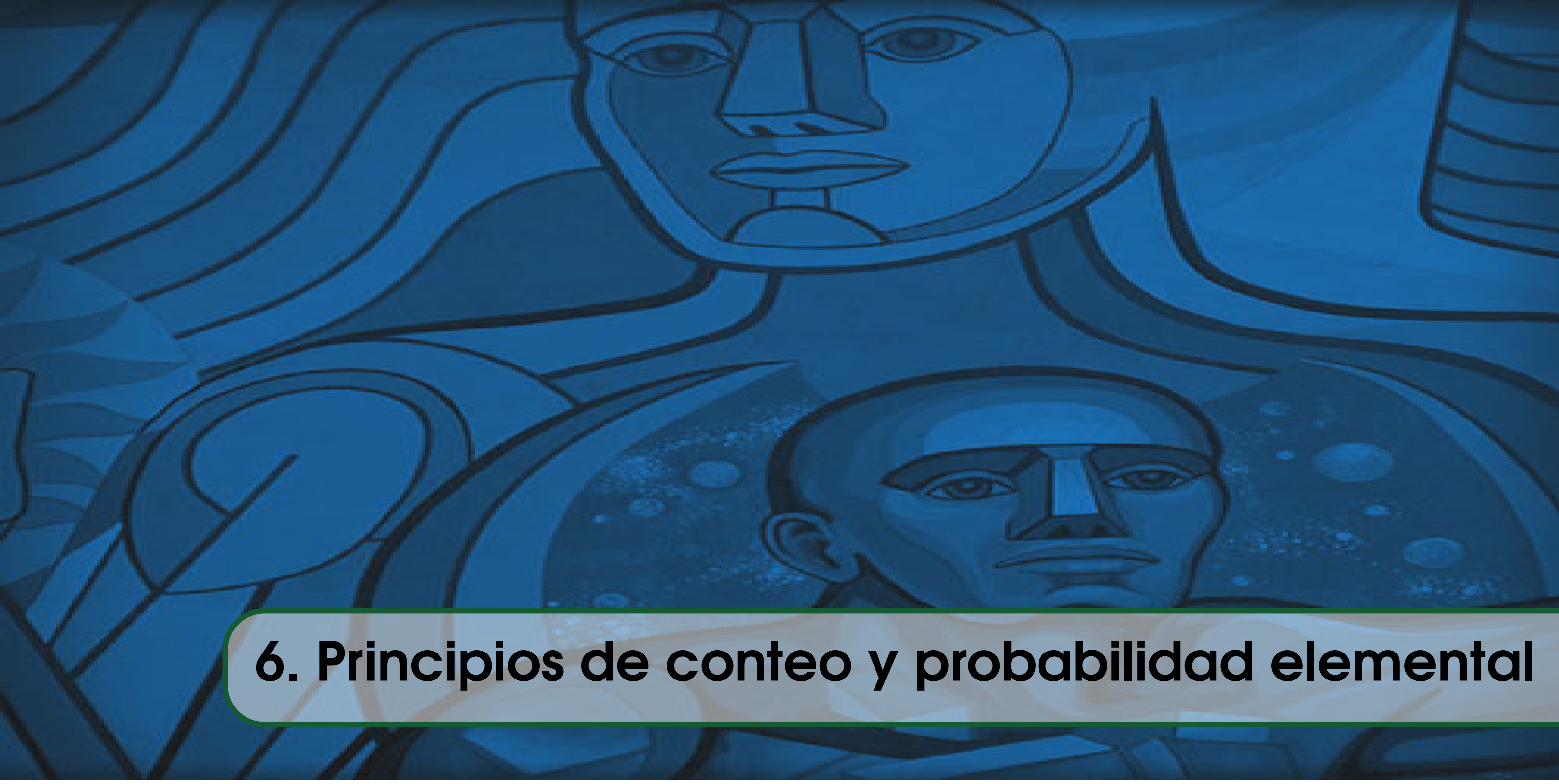
P4. Existen tres puntos no colineales.

Demuestre que todo plano proyectivo tienen al menos siete puntos. Construya modelos para mostrar que los axiomas son independientes, es decir, encuentre modelos donde se cumplan algunos de los axiomas, pero no todos.

8. Dado un segmento AB demuestre que no existen puntos C, D en AB tales que $C - A - D$. Por lo tanto los extremos de un intervalo están determinados de manera única.

5.6.3 Nivel avanzado

9. Considere el semiplano $y > 0$ del plano cartesiano. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), con $y_0, y_1 > 0$ muestre que existe una y solo una circunferencia con centro en el eje x que pasa por tales puntos.
   Sugerencia. Requiere el conocimiento de ciertos temas de Geometría Analítica.
10. Utilice el ejercicio 5.6 para construir tres distintos triángulos hiperbólicos.
11. Construya y mida con *GeoGebra* al menos tres ángulos hiperbólicos diferentes.
    Sugerencia: apóyese en el ejercicio 5.8.
12. Construya varios triángulos hiperbólicos y compruebe con *GeoGebra* que sus ángulos internos no suman 180°.
13. Suponga que en la geometría euclidiana se cumple el axioma:
    Axioma. *En rectas paralelas cortadas por una transversal la suma de la medida de ángulos colaterales internos es π.*
    Sugerencia: requerirá el lema 5.5.2.
14. Ponga por escrito las soluciones que dio al ejercicio 5.9.



6. Principios de conteo y probabilidad elemental

Curiosamente, contar objetos de una colección es una actividad *no tan simple* como alguien no experimentado podría pensar y, una vez establecidos los principios de conteo básicos, se podrán establecer los fundamentos de una de las ramas más importantes de las matemáticas por su extenso número de aplicaciones, me refiero a la probabilidad. Se podrá además entender la heurística detrás de la fórmula del binomio de Newton que se ha demostrado por inducción en un capítulo anterior, pero que quizá no ha sido claro como es que se llegó a descubrir tal fórmula, en este capítulo se dará una respuesta a este y otros temas. Una vez que se ha aprendido lo más básico de conteo se tendrán ejemplos básicos para entender la nociones elementales de probabilidad. Finalmente, se han añadido elementos básicos de la axiomática de la probabilidad.

El programa oficial del curso Introducción al pensamiento matemático en la UAM Iztapalapa incluye los diferentes temas de Probabilidad como opcionales. Desde mi perspectiva, un novicio en Matemáticas debe dominar los temas de las secciónes 6.1 (conteo) y 6.2 (nociones de probabilidad con conjuntos finitos) antes de abordar las demás secciones de este capítulo, por lo que en un primer acercamiento quizá es suficiente estudiar solo las mencionadas primeras secciones. Quién por primera vez afronte la axiomática de la probabilidad no debe tener problemas para hacer las demostraciones formales elementales de los tres primeros capítulos de este libro, de otra forma, probablemente será más apropiado posponer su estudio.

6.1 Multiplicación de números, interpretaciones varias

Una de las más básicas interpretaciones de la multiplicación de dos números, como es sabido, es el área $A = a \times b$ asociada a un objeto rectangular cuyas medidas de los lados son a y b. Una extensión natural del área, es el volumen de un paralelepípedo rectángulo que se obtiene multiplicando tres números. Tal interpretación geométrica del producto es extremadamente limitada y restrictiva, pues en principio se limita a la multiplicación de dos o tres números. Un sentido más extenso de la multiplicación de números y que no se limita al producto de dos o tres cantidades, es la interpretación de los productos de números como casos posibles de diferentes eventos.

Axioma 6.1 **(principio fundamental del conteo).** Dada una colección $E_1, E_2, \dots, E_k$ de k eventos tales que cada E_i, con $i = 1, 2, \dots, k$, puede ocurrir de m_i maneras, entonces el número total de maneras en que los eventos pueden realizarse es el producto $m_1 m_2 \cdots m_k$.

■ **Ejemplo 6.1** Un político pobre piensa ganar la quiniela de futbol, para este fin primero quiere saber cual es el número total de posibilidades para llenar las casillas si una quiniela consta de

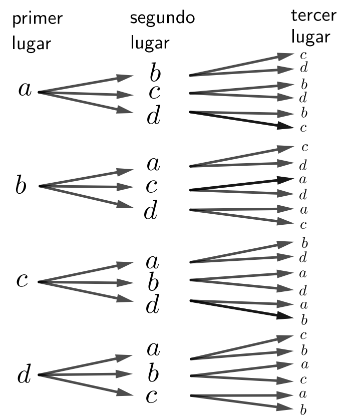


Figura 6.1: Posibiidades de primer, segundo y tercer lugares. Se muestran todas las posibilidades de cuatro equipos a,b,c,d para ser distribuidos sin repetición en tres posibles lugares.

15 partidos de futbol y cada partido tiene tres posibilidades: gana visitante, empate y gana local. ¿Podría usted ayudar al pobre político?
Solución. En este caso cada evento E_i corresponde a un partido de fútbol y entonces, hay un total de 15 eventos, es decir $i = 1,2,\ldots,15$. Cada evento m_i, puede ocurrir de 3 maneras por lo que el principio fundamental del conteo da un total de $\underbrace{3\cdot 3\cdots 3}_{15 \text{ veces}} = 3^{15} = 14\,348\,907$ maneras diferentes de llenar una quiniela. ■

■ **Ejemplo 6.2** Un político desilusionado por no ganar las quinielas de futbol decide jugar a la lotería. El muy suertudo[1] se gana la lotería nacional dos veces consecutivas ¿cuántas posibilidades de combinaciones de números ganadores del primer premio hay para dos sorteos diferentes, si para cada sorteo se elaboran 60 mil boletos?
Solución. Si se considera ganar el primer premio de cada sorteo como un evento, cada evento tiene 60 mil maneras, por lo que el total de posibilidades de ganar dos sorteos diferentes es $(60\,000)^2 = 3\,600\,000\,000$. ■

■ **Ejemplo 6.3** En una escuela se convoca a un torneo de basquetbol para el cual se inscribieron cuatro equipos. Encuentre todos los posibles casos en los que pueden quedar los equipos en primero, segundo y tercer lugar.
Solución. Designamos para efectos de este ejemplo a los equipos con las letras a,b,c,d. Entonces hay $m_1 = 4$ posibilidades para ganar el primer lugar. Una vez que ha quedado determinado el primer lugar, hay $m_2 = 3$ posibilidades para el segundo lugar y $m_3 = 2$ posibilidades para el tercer lugar. Entonces, por el principio fundamental de conteo, el número total de maneras en las que pueden ocurrir los primeros tres lugares es $4\cdot 3\cdot 2 = 24$. ■

Una forma de convencerse de que el procedimiento anterior es correcto consiste en escribir explícitamente todos los casos posibles, cuando es posible, como se muestra en la figura 6.1.

6.1.1 Permutaciones

El ejemplo 6.3 se diferencia de los dos anteriores en que no se repiten elementos en eventos consecutivos, a tal tipo de eventos se les llama *arreglos sin repeticiones* o *permutaciones*.. Se tiene la siguiente definición.

[1] De acuerdo con la historia reciente de México, este evento ocurrió a dos gobernadores diferentes de Veracruz, con mucha suerte. ¡Si, cada uno de ellos ganó la lotería dos veces! ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

Definición 6.1.1 (permutaciones). Dado un conjunto A con n elementos y $n \in \mathbb{N}$ si r es un número natural tal que $1 \leq r \leq n$, una *permutación* es un arreglo sin repeticiones de r elementos de A, el cual se denota mediante el símbolo ${}_nP_r$, lo cual se lee: "permutaciones de n elementos tomados de r en r". Las permutaciones ${}_nP_r$ están determinadas por la fórmula:

$$ {}_nP_r = n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \tag{6.1}$$

en particular, ${}_nP_n$ es el factorial de n, es decir,

$$ {}_nP_n = n \cdot (n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

■ **Ejemplo 6.4** Calcule ${}_6P_2$, ${}_5P_3$ y ${}_3P_3$.
Solución. Dada la fórmula (6.1), para ${}_6P_2$, dado que $n=6$, $r=2$ y $n-r+1 = 6-2+1 = 5$, así

$$ {}_6P_2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Similarmente, mediante la fórmula (6.1), se obtiene ${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ y ${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$. ■

■ **Ejemplo 6.5** Se sabe que la selección mexicana de futbol en la situación de tener que tirar penales para definir penales todos los jugadores desean tirar, de cuantas maneras se pueden seleccionar los jugadores para que tiren la primera ronda de 5 penales, si se considera también que el portero debe tirar también.
Solución. Un equipo de futbol tiene 11 jugadores contando al portero, de tal forma que el director técnico del equipo tiene ${}_{11}P_5 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$ maneras de escoger jugadores para tirar la primera ronda de 5 penales. ■

Para cerrar esta sección se destaca una forma conveniente de expresar ${}_nP_r$ en términos de los factoriales de n y r. Dada la fórmula (6.1) es inmediato que

$$ {}_nP_r = n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{6.2}$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-r)!} &= \frac{n \cdot (n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2 \cdot 1}{(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1} \\ &= n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1) = {}_nP_r \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 6.6** Compruebe con la fórmula (6.2) que ${}_nP_n = n!$.
Solución. Con la fórmula (6.2) se tiene que

$$ {}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!,$$

ya que por definición, $0! = 1$. ■

■ **Ejemplo 6.7** Encuentre n, si ${}_nP_4 = 72\,({}_nP_2)$.
Solución. Se tiene que $\dfrac{{}_nP_4}{{}_nP_2} = 72 = 9 \cdot 8$, entonces

$$\begin{aligned} 9 \cdot 8 &= \frac{{}_nP_4}{{}_nP_2} \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{n!}{(n-2)!}} \\ &= \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \\ &= (n-2)(n-3). \end{aligned}$$

Se obtiene así la ecuación en enteros $(n-2)(n-3) = 9 \cdot 8$, de donde $n-2 = 9$ y por lo tanto $n = 11$. Observe que también se puede resolver el problema mediante la ecuación cuadrática $(n-2)(n-3) = n^2 - 5n + 6 = 72$. ■

6.1.2 Permutaciones indistinguibles

Para ciertos problemas se requiere encontrar arreglos de objetos, algunos de los cuales son indistinguibles entre sí. Por ejemplo, dadas cinco pelotas, todas del mismo tamaño tres de ellas azules, una blanca y una roja. Si los arreglos fueran de objetos diferentes se tendían ${}_5P_5 = 5!$ diferentes arreglos, por la fórmula (6.1.1). Si denotamos con A las pelotas de color azul, con B la pelota de color blanco y con R la pelota de color rojo, se observa que el arreglo

$$AAABR$$

es decir, el arreglo donde las tres primeras bolas son azules la cuarta es blanca y la quinta roja, tiene $3!$ formas de colocar las tres bolas azules, pero estos arreglos son indistinguibles entre sí. De la misma manera, para el arreglo

$$ABARA$$

hay $3!$, permutaciones de las bolas azules, pero estas son indistinguibles. Si n denota el número de total de permutaciones distinguibles se debe tener $3!n = 5!$, de donde $n = 5 \cdot 4 = 20$, por el principio fundamental del conteo. De hecho, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.1.1 Dada una colección de n objetos divididos en k clases distintas de tal forma que $n = n_1 + n_2 + \cdot + n_k$, entonces el número de permutaciones distinguibles, P_{dist}, es

$$P_{\text{dist}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} \tag{6.3}$$

■ **Ejemplo 6.8** Encuentre el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "ABRACADABRA".

Solución. En la palabra "ABRACADABRA" hay 5 letras diferentes, de las cuales 5 son A, 2 son B, 2 son R, 1 es C y 1 es D, para un total de 11 letras, por lo tanto el número de permutaciones distinguibles de tales letras es $\dfrac{11!}{5!2!2!1!1!} = 83\,160$. ■

6.1.3 Combinaciones

Ahora se podrá calcular el número de subconjuntos de un conjunto dado usando los principios básicos de conteo. A diferencia de los problemas anteriores, los subconjuntos no distinguen el orden como están colocados los elementos que le pertenecen, como recordarán quienes hayan estudiado conjuntos. Por ejemplo, el conjunto $\{a,b,c\}$ es el mismo que $\{c,a,b\}$ y asimismo, para cualquier orden en el que puedan colocarse los elementos de un conjunto dado. Se establece la siguiente definición.

Definición 6.1.2 (combinaciones). Una *combinación* de r elementos de un conjunto A es un subconjunto de A que tiene r elementos distintos. Para un conjunto de n elementos el número de combinaciones de r elementos, con $r \leq n$. Se denota ${}_nC_r$ al número total de combinaciones de r elementos del conjunto A.

Lema 6.1.2 El número ${}_nC_r$ de combinaciones de r elementos de un conjunto de n elementos con $r \leq n$, está dado por la fórmula

$${}_nC_r = \binom{n}{r} \tag{6.4}$$

Demostración. Un subconjunto S de r elementos de un conjunto de n elementos A, es de la forma $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ donde todas las x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ son diferentes. Por lo tanto el número total de permutaciones de los r elementos de S es $r!$. Por lo tanto el número total de subconjuntos de r elementos de A es $r!{}_nC_r$. Pero el número total de permutaciones de r elementos de un conjunto de n

elementos está dado por la fórmula (6.1). Por lo tanto, por el principio fundamental de conteo

$$\begin{aligned} r!\,{}_nC_r &= {}_nP_r \\ {}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \binom{n}{r}. \end{aligned}$$

como se desea demostrar. □

Ejercicio 6.1 Encuentre el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos.
Solución. El número total de subconjuntos de un conjunto dado está dado por la suma del número de subconjuntos con cero elementos, más el número de subconjuntos con un elemento, y así, se suma sucesivamente hasta llegar al número de subconjuntos de n elementos del conjunto dado. Tal suma puede escribirse como:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n,$$

la primera igualdad anterior es cierta por el teorema del binomio, teorema 4.5.2, ya estudiado. ■

N Con el ejercicio 6.1, se resuelven una serie de preguntas que habían quedado abiertas desde que se estudió el tema de subconjuntos. Otro tema es el acercamiento heurístico al teorema del binomio al que con el lema 6.4 se llega a una explicación más intuitiva que solo con la demostración ya dada por inducción, como se muestra en el siguiente lema.

Corolario 6.1.3 (teorema del binomio). Sean $a,b\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}a^{n-n}b^n.$$

Demostración. El producto $(a+b)^n$ consiste en la suma de números de la forma $a\cdots a\cdot b\cdots b$, donde aparecen l letras "a" y m letras "", de tal forma que $l+m=n$ (argumente). La fórmula del binomio se sigue entonces, si se conoce la forma de escoger el número de l letras "a" en cada producto. Claramente tal número esta dado por $\binom{n}{l}$. Por lo tanto, en la fórmula del binomio deben aparecer todos los sumandos de la forma

$$\binom{n}{l}\underbrace{a\cdots a}_{l\text{ veces}}\cdot\underbrace{b\cdots b}_{n-l\text{ veces}},$$

donde $0\le l\le n$. □

6.2 Nociones de probabilidad

La más elemental noción de probabilidad aparece en los juegos de azar y se obtiene al conocer todas las posibilidades de un evento que, como ejemplo, puede ocurrir con un número finito de casos distintos. Por ejemplo, al lanzar una moneda se obtienen dos posibilidades si la moneda tiene dos caras distintas (hay monedas hechas para hacer trampa con dos caras iguales); al lanzar un dado cúbico, es decir, con seis caras, si cada cara es marcada con un número diferente, hay un total de seis posibilidades. De esta manera si alguien predice que caerá una cara de una moneda, estará escogiendo una posibilidad de dos posibles por lo que el grado de certeza de que su predicción es correcta está dada por $1/2$. Similarmente, si alguien escoge un número escrito en la cara de un dado cúbico y apuesta a que tal numero caerá, tendrá $1/6=0.1\overline{6}$ de posibilidades de que su predicción será correcta, si el dado está perfectamente balanceado desde su fabricación. Otro ejemplo, mencionado en la sección de conteo, es la Lotería Nacional, en la cual se elaboran 60 000 boletos diferentes. Si alguien compra un boleto, sus posibilidades de ganar el primer premio son $1/60\,000 = 0.00001\overline{6}$, si no se hace trampa en el sorteo.

En general se denota con Ω el conjunto que contiene la totalidad de posibilidades de un evento y se le llama *espacio de muestras*, en los ejemplos anteriores Ω es, por ejemplo, las dos caras distintas de una moneda; en otro ejemplo, las seis caras con números distintos de un dado cúbico, o bien, el total de boletos impresos para un sorteo de la lotería. En los anteriores casos se supone que cada evento individual tiene la misma probabilidad de ocurrir que otro, por ejemplo, la cara de un dado debe tener la misma probabilidad que la de cualquier otro, para que el juego sea considerado justo, en este caso se dice que el espacio de muestras es *equiprobable*. Si el número de elementos del conjunto finito A se denota $|A|$, para el caso de Ω finito, se obtiene una medida de probabilidad al comparar el número de los casos favorables, por ejemplo los casos escogidos en una apuesta dados por un conjunto A, con la totalidad de casos posibles Ω. Para espacios equiprobables, se define $P(A)$, mediante la fórmula

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{6.5}$$

■ **Ejemplo 6.9** Si con un dado equiprobable se apuesta a que salga el 4 o el 5, por ejemplo, las posibilidades de ganar son $2/6 = 1/3 = 0.\overline{3}$, con lo cual al comparar con las posibilidades al escoger solamente un número se ve que las posibilidades de ganar aumentan dado que $0.\overline{3} > 0.1\overline{6}$, claramente. ■

El lector debe conservar para sí mismo, el hecho de que no por que las posibilidades de un evento sean mayores que el de otro, se puede tener absoluta certeza de que tal evento ocurrirá ni al contrario. Por ejemplo, no por que la posibilidad de ganar la lotería sea casi cero, no significa que alguien pueda ganar, sin hacer trampa, sin embargo se debe ser consciente de la casi nula posibilidad.

6.2.1 Medida de probabilidad

Los espacios de muestra pueden ser infinitos e infinitos no numerables y es fundamental establecer una medida para tales conjuntos y para sus subconjuntos (en el caso finito la medida es solo el número de elementos del conjunto). De manera intuitiva podemos establecer que la medida de probabilidad P, asignada a un evento A, de un espacio de muestras Ω, debe satisfacer ciertas propiedades enunciadas a continuación:

(i) Para los subconjuntos $A \subset \Omega$ para los cuales se desee medir la probabilidad, se debe cumplir que $P(A) \geq 0$.

(ii) Si $A, B \subset \Omega$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(iii) $P(\Omega) = 1$.

Las razones que sustentan las propiedades (i), (ii) y (iii) son directas. En general, tales "medidas" deben ser positivas o cero, similarmente a lo que ocurre en geometría elemental, donde no existen áreas negativas lo cual explica la propiedad (i). Para la propiedad (iii), en los ejemplos donde Ω es finito se ha construido una medida de probabilidad al dividir el número de los casos favorables de un evento entre el número total de eventos, en tal caso, si el número de casos favorables es igual al número total de eventos entonces $P(\Omega) = \dfrac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$. Para tener una definición general de medida de probabilidad esta cualidad debe ser extendida a conjuntos infinitos no numerables. La segunda propiedad (ii) puede derivarse del hecho de que dado que si $\Omega = A \cup A^C$, entonces $|\Omega| = |A| + |A^c|$, por lo tanto, $1 = \dfrac{|A|}{|\Omega|} + \dfrac{|A^c|}{|\Omega|} = P(A) + P(A^c)$. La propiedad (ii) generaliza de cierta forma esta característica deseable.

■ **Ejemplo 6.10** Ahora se establece la medida de probabilidad (6.5) para conjuntos finitos. Sea $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Se define $P(A)$, para $A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}\} \subset \Omega$, mediante el cociente

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}.$$

Observe que $P(\emptyset) = 0$, y $P(\Omega) = 1$. Así la medida P satisface las propiedades i y iii. La verificación de la propiedad (ii) se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 6.2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par si se lanza un dado cúbico?
Solución. En este caso $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, el evento "obtener un número par", está dado por el conjunto $A = \{2,4,6\}$. Por lo tanto, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. ■

Ejercicio 6.3 En una baraja de 52 cartas hay cuatro emblemas o palos: tréboles, diamantes, picas y corazones. Cada emblema tiene 13 cartas diferentes, nueve numeradas del 2 al 10 y un "joker", una "reina", un "rey" y un "as", diremos que cada carta tiene asociado un número aun si tiene asociada una figura o un as. Arbitrariamente se le asigna mayor valor a las cartas como fueron enumeradas, es decir, la de menor valor es el "2" y la de mayor valor es el "as". Si una "mano" consta de 5 cartas y cada mano se le asigna un valor mayor si es menos probable que otra, (a) ¿cuál mano vale más: una donde todas las cartas son distintas, sus números no son consecutivos y nunca 5 de ellas tienen el mismo emblema o una donde ocurren dos y solo dos cartas con números iguales? (b) ¿cual es la probabilidad de una mano donde aparecen 3 cartas con el mismo número?
Solución. El total de manos de 5 cartas en una baraja de 52 cartas es $\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = 2\,598\,960$. En este caso $|\Omega| = \binom{52}{5}$, es decir, nuestro espacio de muestras consiste en el total de posibilidades de escoger 5 cartas de 52 posibles.

Para resolver (a) Sea A el evento escoger 5 cartas distintas entre sí y que no sean consecutivas. Primero se escogen 5 de 13 posibles, pero se resta el número de manos consecutivas posibles que son 10 (¿por qué?). Segundo, una vez que se han escogido los números se escoge un emblema de 4 para cada una de las cartas sin olvidar quitar 4 donde tiene el mismo emblema, de esta forma se tiene

$$P(A) = \frac{\left(\binom{13}{5} - 10\right) \cdot \left(\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} - 4\right)}{2\,598\,960} = 0.501177.$$

Por otra parte si B es el evento obtener dos y solo dos cartas con el mismo número, se tiene para la probabilidad de B se debe escoger 1 número de 13 posibles y multiplicar por las posibilidades de escoger dos emblemas entre 4 posibles, de esta forma se ha escogido el par. Para finalizar se requiere escoger otras tres cartas las cuales deben ser distintas entre si y distintas del par, para ello se escogen 3 números de 12 que quedan y para cada número distinto hay 4 posibilidades para escoger el emblema, por lo tanto

$$P(B) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3} \cdot \left(\binom{4}{1}\right)^3}{2\,598\,960} = 0.422569$$

Por lo tanto "vale más" el evento B que el A al tener el segundo una probabilidad menor.

Para resolver (b) el conjunto A consta de las "manos" donde aparecen tres cartas del mismo número, entonces se deben escoger un número de 13 posibles y, segundo, 3 emblemas de 4 posibles, ya que hay cuatro emblemas. Finalmente dado que hay que escoger dos cartas mas, pero evitando que el número pueda ser igual al de las 3 que ya se escogieron. De esta manera, hay que escoger dos números de 12 posibles que quedan. Finalmente hay que escoger para cada una de las dos cartas restantes un emblema de 4 posibles La probabilidad de A es

$$P(A) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \left(\binom{4}{1}\right)^2}{2\,598\,960} = 0.0211285$$

Observe que obtener una mano con tres cartas con el mismo número "vale más" que obtener las manos del inciso (a). ■

6.3 σ-álgebras

Hasta ahora los ejemplos que hemos visto utilizan espacios finitos. Pero en una enorme cantidad de aplicaciones, para no mencionar la teoría general de la probabilidad, se requieren conjuntos infinitos y más aun, infinitos no numerables. También, en los ejemplos se han considerado los eventos como subconjuntos de un conjunto Ω lo que podría hacer pensar erróneamente que el espacio de eventos es el conjunto potencia $\mathscr{P}(\Omega)$, lo cual, no es lo más apropiado para la teoría general. Para una construcción lo más general posible de la probabilidad, se utiliza un conjunto que no es tan grande como el conjunto potencia de un conjunto dado, sino uno que contiene el mínimo de subconjuntos de Ω que satisfacen ciertas propiedades, tal conjunto es llamado σ-álgebra. Pero antes de estudiar el concepto de σ-álgebra, se requiere extender la unión e intersección de conjuntos a familias infinitas.

Definición 6.3.1 (uniones e intersecciones infinitas). Sea A_n, $n = 1,2,\ldots$ una colección infinita de subconjuntos de un conjunto dado Ω. Se definen los conjuntos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ como

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ para algún } n\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ para toda } n\}.$$

Con la definición anterior es posible determinar los conjuntos sobre los cuales se construye la teoría de la probabilidad.

Definición 6.3.2 (σ-álgebra). Una σ-álgebra en un conjunto Ω es una familia de subconjuntos $\mathscr{F}$ de Ω para la cual se cumplen las siguientes propiedades
(i) $\Omega \in \mathscr{F}$.
(ii) Si $A \in \mathscr{F}$, entonces $A^c \in \mathscr{F}$.
(iii) Si A_n, $n = 1,2,\ldots$ una colección infinita de subconjuntos en $\mathscr{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.
Los conjuntos en $\mathscr{F}$ se llaman $\mathscr{F}$-eventos (o simplemente eventos) o conjuntos $\mathscr{F}$-medibles (dado que a tales conjuntos se les podrá asignar una medida de probabilidad).

■ **Ejemplo 6.11** Dado un conjunto $\Omega \neq \emptyset$ demuestre que $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ es una σ-álgebra.
Solución. La propiedad (i) de la definición 6.3.2 es inmediata. Además dado que $\Omega^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \Omega$ la propiedad (ii) también se cumple. Finalmente dado que $\emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \cdots = \emptyset$, $\Omega \cup \Omega \cup \cdots \cup \Omega \cdots = \Omega$ y ademas $\emptyset \cup \Omega = \Omega$ se sigue (los detalles se dejan como ejercicio) que si A_n, $n = 1,2,\ldots$ una colección infinita de subconjuntos en $\mathscr{F}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ con lo que $\mathscr{F}$ es σ-álgebra. ■

■ **Ejemplo 6.12** Dado un conjunto Ω, el conjunto potencia $\mathscr{P}(\Omega)$ es σ-álgebra. La demostración se deja como ejercicio. En el caso en el que Ω es finito, digamos con n elementos, se ha demostrado que el conjunto potencia tiene 2^n elementos. El conjunto vacío tiene cero elementos y se le llama ”evento imposible”, dado que $P(\emptyset) = 0$, como se demostrará más adelante con toda generalidad. El evento Ω, se llama “evento cierto” o “seguro” ya que $P(\Omega) = 1$, este hecho que puede verificarse fácilmente en conjuntos finitos será uno de los axiomas de la teoría general. ■

Ejercicio 6.4 Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $\mathscr{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}, \Omega\}$ muestre que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra.
Solución. Como $\Omega \in \mathscr{F}$ la propiedad (i) de la definición 6.3.2, se cumple, trivialmente. También (ii) se cumple trivialmente ya que $\emptyset^c = \Omega$ y $\{1,2\}^c = \{3,4,5,6\}$ y recíprocamente $\Omega^c = \emptyset$ y etcétera. Finalmente, sea A_n, $n = 1,2,\ldots$ una colección infinita de subconjuntos en $\mathscr{F}$. Se tiene que $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$, donde $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : A_n = \emptyset\}$, $N_2 = \{n \in \mathbb{N} : A_n = \{1,2\}\}$, $N_3 = \{n \in \mathbb{N} : A_n = \{3,4,5,6\}\}$ y $N_4 = \{n \in \mathbb{N} : A_n = \Omega\}$, por lo tanto (los detalles se dejan como ejercicio)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in N_1} A_n \cup \bigcup_{n\in N_2} A_n \cup \bigcup_{n\in N_3} A_n \cup \bigcup_{n\in N_4} A_n$$

con lo que se demuestra que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra. ■

6.3.1 Sistema de axiomas para la teoría de probabilidad

Dada una σ-álgebra $\mathscr{F}$ de un conjunto Ω, es posible construir una teoría general partiendo de los siguientes axiomas.

Axioma 6.2 A cada evento $A \in \mathscr{F}$ le corresponde un número real, llamado *probabilidad* de A el cual satisface

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Axioma 6.3 La probabilidad del evento seguro $\Omega \in \mathscr{F}$ es

$$P(\Omega) = 1.$$

Axioma 6.4 Para una colección de eventos A_n, $n = 1, 2, \ldots$ en $\mathscr{F}$, tales que cualesquiera dos de ellos son disjuntos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda i, j, entonces se cumple

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

Nota. Observe que el axioma 6.4 es la primera diferencia destacada con la teoría de probabilidad para conjuntos finitos.

Un resultado que pudo calcularse directamente para el caso finito ahora puede demostrarse en general para eventos en una σ-álgebra.

Teorema 6.3.1 La suma de probabilidades de cualquier evento $A \in \mathscr{F}$ y su complemento A^c es uno.

Demostración. Se tiene que $A \cup A^c = \Omega \in \mathscr{F}$, asi por el axioma 6.3 $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$. Por otra parte, $A \cap A^c = \emptyset$ por lo que por el axioma 6.4, se cumple que $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$. Se concluye que $P(A) + P(A^c) = 1$, como se desea demostrar. □

Teorema 6.3.2 La probabilidad del evento imposible es cero.

Demostración. Dado que $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ y dado que $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, entonces por el axioma 6.4

$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$$

de donde $P(\emptyset) = 0$. □

Definición 6.3.3 (espacio de probabilidad). Un *espacio de probabilidad* está formado por un conjunto Ω, una σ-álgebra $\mathscr{F}$ sobre Ω y una correspondencia P que asocia a los elementos de $\mathscr{F}$ un número real en el intervalo $[0,1]$, tales que Ω, $\mathscr{F}$ y P satisfacen los axiomas 6.2, 6.3 y 6.4. El espacio de probabilidad formado por Ω, $\mathscr{F}$ y P, se denota por una terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

6.4 Independencia de eventos

Hasta ahora se han estudiado eventos que no están relacionados, es decir, eventos que de ninguna manera dependen uno de otro, lo cual es conveniente ya que su formulación matemática es más simple. Ejemplos de eventos independientes ocurren por ejemplo si se considera el evento del lanzamiento de una moneda y un dado, en un espacio de probabilidad apropiado. Claramente, el resultado de lanzar una moneda es independiente de lo que se obtenga al lanzar un dado. Se tiene enseguida la definición matemática.

Definición 6.4.1 (eventos independientes). Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $A, B \in \mathscr{F}$ y $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se dice que A y B son *eventos independientes*. También se dice que A *es independiente de* B. Dado que $A \cap B = B \cap A$ se tiene también que B es independiente de A, si A y B son independientes.

■ **Ejemplo 6.13** Suponga que se tira un dado cúbico cuyas caras son igualmente probables. En este caso $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ y para todo evento $A \in \mathscr{F}$, se tiene que $P(A) = |A|/|\Omega| = |A|/6$. Sea $A = \{2,3\}$, $B = \{2,5,6\}$, entonces $A \cap B = \{2\}$ y así $P(A \cap B) = 1/6$. Por otra parte, $P(A) = 2/6 = 1/3$ y $P(B) = 3/6 = 1/2$, por lo tanto $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ y de esta manera A y B son independientes, dada la definición 6.4.1. Si se considera el conjunto $C = \{2,4,6\}$, entonces $B \cap C = \{2,6\}$ y $P(B \cap C) = 2/6 = 1/3$ por otra parte $P(C) = 1/2$ y por lo tanto $P(B)P(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \neq P(B \cap C)$. ■

Para llegar a la representación matemática de la idea intuitiva de "independencia", dada la definición 6.4.1 se requiere el concepto de *probabilidad condicional* el cual se define a continuación.

Definición 6.4.2 (probabilidad condicional). Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathscr{F}$. Suponga que $P(A) > 0$. Se define la *probabilidad condicional* de B dado A, en símbolos $P(B|A)$, mediante la fórmula

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

N **Nota.** De acuerdo con Dineen [7], la idea intuitiva de la probabilidad condicional está implícita en lo siguiente: considere un experimento que se repite k veces y sea n el número de veces que A ocurre y m el número de veces que A y B ocurren ambos. Entonces $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \approx \dfrac{(m/k)}{n/k} = \dfrac{m}{n}$. Dado que $\dfrac{m}{n}$ es asimismo la proporción de veces que ocurre B cuando se consideran solo resultados en los cuales ha ocurrido A, se puede considerar $P(B|A)$ la probabilidad de que B ocurra cuando se sabe que A ha ocurrido. Por tal motivo se llama a $P(B|A)$ "probabilidad condicional" de B dado A.

Se tiene el siguiente teorema el cual relaciona probabilidad condicional con el concepto de independencia.

Teorema 6.4.1 Sea $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathscr{F}$. Si $P(A) > 0$, entonces A y B son independientes si y solo si $P(B|A) = P(B)$.

Demostración. Si A y B son independientes, entonces

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Recíprocamente, si $P(B|A) = P(B)$, entonces $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$ y $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Por lo que, por definición, A y B son independientes. □

6.5 Variables aleatorias

Si se considera un dado cúbico "justo", es decir, donde cada cara puede caer con la misma probabilidad que cualquier otra y suponemos que alguien desea hacer una y solo una de las siguientes apuestas

a) Apuesta \$0 a que caen los números $1,2,3$.
b) Apuesta \$10 a que caen los números $4,5$.
c) Apuesta \$100 a que cae el número 6.

Se tiene entonces una correspondencia entre algunos subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6\}$ y los números $0, 10, 100$. Si se le llama X a tal correspondencia, ésta se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X(\{1,2,3\}) &= 0 \\ X(\{4,5\}) &= 10 \\ X(\{6\}) &= 100 \end{aligned}$$

Aquí podría ser de interés saber la probabilidad de que X tome cada uno de los valores $0, 10, 100$, lo cual se denota abreviadamente por $P(X = 0)$, $P(X = 10)$ y $P(X = 100)$, respectivamente. Dado que conocemos que $P(\{1,2,3\}) = 1/2$, $P(\{4,5\}) = 1/3$ y $P(\{6\}) = 1/6$, se tiene la siguiente distribución para X la cual se denota f_X y la cual depende de los valores $y = 0, 10, 100$:

$$f_X(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } y = 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } y = 10, \\ \frac{1}{6}, & \text{si } y = 100. \end{cases}$$

A la correspondencia X se le llama *variable aleatoria* y a la función f_X , se le llama *función discreta de distribución de probabilidad* de X.

N **Nota.** Mas generalmente, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ se le llama variable aleatoria a una clase de funciones muy amplia para las cuales se da una definición a continuación, aunque este tema no se desarrollará más, por estar fuera de los objetivos de este libro.

Definición 6.5.1 Una correspondencia X de Ω a los números reales $\mathbb{R}$, se llama *variable aleatoria* si y solo si el conjunto $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega)\}$ pertenece a $\mathscr{F}$ para toda $a \in \mathbb{R}$.

Distribución binomial

Extendemos el ejemplo anterior de un dado con seis caras $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ que ahora será lanzado un número n de veces (se estudió el caso $n = 1$). Para este ejemplo, solo será de interés el caso cuando cae el número 6, a tal evento lo denotamos $S = \{6\}$. Aunque en un dado “justo”, la probabilidad de S es $1/6$, denotaremos la probabilidad de tal evento con p, lo cual permite extender este ejemplo a casos más generales. De esta forma, si p es la probabilidad de que caiga un 6 la probabilidad del otro evento posible $S^c = \{1,2,3,4,5\}$ será $1 - p$. Se denota con $X = r$ la variable aleatoria que asigna el número de veces r que cae 6 en n lanzamientos.

Ejercicio 6.5 Determine la probabilidad de en n veces que se tire un dado caigan 2 veces 6, si la probabilidad de que caiga un 6 en un lanzamiento es p.
Solución. Sea $S = \{6\}$, entonces $P(S) = p$ y $P(S^c) = 1 - p$. Para comenzar se estudia el caso $n = 2$, en este caso puede ocurrir, S,S o S,S^c o S^c,S o bien S^c,S^c. Para $n = 2$ si el número de veces r que cae el 6 puede ser 0, 1 o 2 veces. Se pide calcular la probabilidad de que caiga 6 dos veces en dos lanzamientos lo cual es

$$P(X = 2) = p \cdot p = p^2,$$

es decir, la probabilidad de que caiga 6 dos veces seguidas la cual es la probabilidad del evento S,S. Similarmente se puede calcular

$$P(X = 1) = 2p(1 - p)$$

ya que hay dos casos en los que puede caer un seis, una: en el primer lanzamiento cae 6 y cualquier otra cara en el segundo lanzamiento; y otra cuando: cae 6 en el segundo lanzamiento cuando en el primer lanzamiento cayó cualquier otro número. Finalmente, la probabilidad de que no caiga 6 en ninguno de los dos lanzamientos es $(1 - p)^2$ ■

Del ejercicio anterior puede intuirse la plausibilidad de la fórmula general para la distribución binomial:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1 - p)^{n-r}. \tag{6.6}$$

De la fórmula (6.6) es inmediato que

$$\sum_{r=0}^{n} P(X=r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = (p+(1-p))^n = 1^n = 1,$$

donde la fórmula $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = (p+(1-p))^n$ es claramente la fórmula del binomio del corolario 6.1.3. Además, observe que el hecho de que $\sum_{r=0}^{n} P(X=r) = 1$, no es una casualidad, esto ocurre para las variables aleatorias discretas X, para las cuales siempre existe un conjunto numerable $C \subset \mathbb{R}$ tal que $P(\{X \in C\}) = 1$, pero este tema está fuera de los objetivos de este libro.

6.6 Ejercicios del capítulo 6

6.6.1 Nivel básico

1. ¿Cuántos números de cinco dígitos pueden formarse con los dígitos $1,2,3,4$ y 5, si:
   a) No se permiten repeticiones de dígitos.
   b) Se permiten repeticiones de dígitos.
2. Una persona tiene 4 pantalones, 5 camisas y tres pares de calzado, de cuántas maneras diferentes puede vestirse.
3. Un examen de opción múltiple para la admisión de cierta universidad contiene 120 preguntas. Si cada pregunta contiene 4 respuestas. De cuántas maneras posibles puede contestarse.
4. Un par de dados son tirados uno después del otro. ¿De cuántas maneras posibles pueden caer? Haga una lista de las formas diferentes en las que la suma de los puntos sea siete o nueve.
5. Simplifique las siguientes expresiones
   a) $\dfrac{9!}{13!}$.
   b) $\dfrac{4!6!}{24!}$.
   c) $\dfrac{5!+6!}{10!}$.
6. Encuentre n, si ${}_nP_2 = 240$, mediante la fórmula cuadrática.
7. ¿Cuántas líneas diferentes determinan ocho puntos en un plano si entre ellos no hay tres que sean colineales? ¿cuántos triángulos pueden formarse?
8. ¿Cuántos números de teléfono distintos de 8 dígitos pueden formarse si los dos primeros dígitos deben ser 55?
9. Encuentre el número n, si ${}_nC_3 = 6\,{}_nC_2$.
10. El juego de dominó tiene 28 fichas, si a cada jugador se le dan 7 fichas en una mano ¿de cuántas formas se puede escoger una mano? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una mano donde uno de los lados del dominó tenga solo ceros?
11. La baraja inglesa tiene 52 cartas si a un jugador se le dan 5 cartas en una mano ¿cuántas manos diferentes hay?
12. Se llama “color” o “flush” a una mano de la baraja inglesa en la que aparecen 5 cartas del mismo palo (tréboles, diamantes, picas y corazones) ¿cuántos “flush” diferentes pueden formarse? **Solución:** 5108.
13. Una mano de baraja inglesa en la que aparecen cuatro cartas de un mismo valor (hay trece valores) se llama “poker” ¿cuantos “poker” diferentes hay, si en una mano se dan cinco cartas? **Solución:** 624.
14. ¿Cuál es la probabilidad (vea el ejercicio 6.3) de una mano donde aparecen 3 cartas del mismo “número” y dos de otro número? **Solución:** 0.0211
15. Se llama “corrida” a una “mano” donde los números son consecutivos (a) ¿cuál es la posibilidad de obtener una “corrida” donde a lo más cuatro emblemas sean iguales? (b) ¿cual es la probabilidad de obtener una “corrida” donde aparezca un solo emblema en todas las cartas? **Solución:** 0.0039.
16. Se llama “full” a una mano donde aparecen tres cartas de un número y dos de otro, ¿cuál es la probabilidad de obtener un “full”? **Solución:** 0.0014.
17. Se llama “dos pares” a una mano donde aparecen dos cartas con un mismo número y dos cartas con otro distinto. Determine la probabilidad de obtener “dos pares”. **Solución:** 0.47.

6.6.2 Nivel intermedio

18. Demuestre que dado un conjunto Ω, el conjunto potencia $\mathscr{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra.
19. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:
   a) A y B son independientes,
   b) $\Omega\setminus A$ y B son independientes.
   c) $\Omega\setminus A$ y $\Omega\setminus B$ son independientes.
20. Sean $\Omega = \{1,2,3,4\}$ y $A = \{1,2\}$, encuentre todos los subconjuntos de Ω que son indepen-

dientes de A.

21. Proceda como en ejercicio 6.5 para encontrar todas las probabilidades de lanzar un dado $n=3$ veces y que caiga 6 r veces, con $r=0,1,2,3$, es decir, exprese todas las probabilidades $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ y $P(X=3)$ describiendo explícitamente todos los caso y sus correspondientes probabilidades.

6.6.3 Nivel avanzado

22. Demuestre que si $A=B$ y A y B son independientes, entonces $P(A)=0$ o $P(A)=1$.
23. Suponga que $P(A)>0$ y $P(B)>0$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:
    a) $P(A)=P(A|B)$.
    b) $P(A)=P(B|A)$.
    c) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.
24. Demuestre las siguientes afirmaciones:
    a) $P(A|\Omega)=P(A)$.
    b) Si $P(B)>0$ y $B\subset A$, entonces $P(A|B)=1$.
    c) Si $A\cap B=\emptyset$ y $P(B)>0$, entonces $P(A|B)=0$.

Bibliografía

[1] Alexandrov, A. D., Kolmogorov, A. N., Laurentiev M. A., *La Matemática su contenido, métodos y significado.* Alianza editorial. 2016.

[2] Apostol, T. M. , *Análisis matemático.* Editorial Reverté S. A. 1972.

[3] Blech, I. A., Shechtman, D., *The microstructure of rapidly solidified Al6Mn.*, Trans. A 16:1005-12. 1985.

[4] Cantor, G., *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Dover Publications, Inc. New York. 2007.

[5] Copi, I. M., Cohen C. *Introducción a la lógica.* Limusa. 2013.

[6] Courant, R. y John, F. , *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 1* . Editorial Limusa S. A. de C. V. 1999.

[7] Dineen, S., *Probability Theory in Finance, a mathematical guide to Black-Scholes Formula.* American Mathematical Society. 2005.

[8] Euclides, traducción Heibert J. L., *Euclid's Elements of Geometry.* ISBN 978-0-6151-7984-1 2007.

[9] Ferrigno, S., Huang, Y. y Cantlon, J. S., *Reasoning Through the Disjunctive Syllogism in Monkeys.*, Psychol Sci. 2021 Feb;32(2):292-300. 2021.

[10] Galileo Galilei, *Dialogues concerning two new sciences. Transl. Crew and de Salvio.*, Dover Publications, Inc. New York. 1954.

[11] Halmos, P. R., *Naive Set Theory.* Dover Publications, Inc. 2017 .

[12] Hartshorne, R., *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer-Verlag New York. 2000.

[13] Hilbert, D., *Foundations of Geometry.*, Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971. Second edition.

[14] López Garza, G., *Fundamentos de Geometría.* Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa 2022. https://libroscbi.izt.uam.mx/index.php/lcbi/catalog/view/43/19/282

[15] Moise, E., *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Addison-Wesley . 1974.

[16] Niven, I., *Irrational Numbers.* The Mathematical Association of America, 1956.

[17] Serra, M., *Discovering Geometry, An Investigative Approach.* Key Curriculum Press. 2008.

[18] Shechtman, Blech, Gratias, and Cahn, *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry.* Phys. Rev. Lett. 53:1951-4. 1985.

[19] Shechtman, D., *Quasi-Crystal, Not Quasi-Scientist*, Front. Young Minds 8:22. 2021.

[20] Spivak M., *Calculus.* Ed. Reverté 3a edición 2014.

[21] Suppes, P., *Axiomatic Set Theory.* Dover Publications, Inc. New York. 1972.

[22] Turing, A., M., *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.* Proceedings of the London Mathematical Society. 2. 42 (1): 230–65. 1936.

[23] Wentworth, W. y Smith, D., *Geometría Plana y del espacio.* Editorial Porrúa. México. 1984.

Índice

ángulos alternos internos, 106
ángulos colaterales internos, 106
ángulos complementarios, 98
ángulos en transversales, 106
ángulos suplementarios, 98

ángulo, 97

absurdo, 18
antecedente, 15
argumentación, 24
argumentación por reducción al absurdo, 19
Arquimedes, principio, 57
arreglos, 110
Axioma de especificación, 30
axioma de extensión, 31
axioma de las potencias, 35
axioma de orden, 79
axioma del supremo, 81
axioma del supremo e ínfimo, 82
axiomas de paralelismo, 94

base de inducción, 45
bicondicional, 16

campo, 64
campo ordenado completo, 82
coeficientes binomiales, 74
combinaciones, 112
conceptos primitivos, 23, 27
condicional, probabilidad, 118
congruencia de segmentos, 97
congruencia entre triángulos, 102
conjunción., 24
conjunto infinito, definición, 35
conjunto potencia, 34
conjunto vacío, 28
conjuntos numerables, 36
consecuente, 15
contraejemplo, 21
contrapositiva, 17
convergencia de series geométricas, teorema, 53
correspondencia biunívoca, 35
cota inferior, 82
cota superior, 82
cuantificadores existenciales, 28

decimal periódico, definición, 54
decimales periódicos, 54
denominador, 66
diferencia común, 48
diferencia de conjuntos, 33
división, definición, 66
divisor entero, definición, 41
doble negación, 17

equiprobable, espacio de muestras, 114
equivalencia lógica, 17
Equivalencias lógicas en español, 16
espacio de muestras, 114
espacio de probabilidad, 117
existencia de paralelas, 94
existencia del conjunto vacío, 30
exponente, 67
exponentes negativos, 69

extremos de un segmento, 91

factorial, 74
fórmula para primos de Euler, 46
fórmula recursiva para las sucesiones aritméticas, 48
fórmula recursiva para sucesiones aritméticas, 48

grado del número algebraico, 59

h-plano, 92
hipótesis de inducción, 45

implicación lógica, 15
imposible, evento, 116
inducción matemática, 45
intersección de conjuntos, 32
intervalos, 80
inverso aditivo, 64
inverso multiplicativo, 64
irracionales elementales, teorema, 58

lados de un polígono, 102
lados de un ángulo., 97
ley de cancelación para la multiplicación, 85
ley de los exponentes racionales, 71
ley de los exponentes reales, 72
leyes de De Morgan, 17
leyes de los exponentes, 67
leyes de los signos, teorema, 81
límite de sucesiones, definición, 52
línea quebrada, 102

medida de segmentos, 97
modelos de axiomáticas, 91
modus ponens, 17
máximo común divisor, 42

n-ágono, 102
negación lógica, 14
negativos, números, 79
neutro aditivo, 64
neutro multiplicativo, 64
notación de suma, 43
numerador, 66
número algebraico, 59
número decimal, 54
número primo, 42
número trascendente, 59
números de Liouville, 60
números de Liouville son trascendentes, teorema, 60
números decimales, 41
números naturales, 29
números primos, 19

o inclusiva, 14

parte fraccionaria, 54
permutación, 111
petición de principio, 22
plano hiperbólico, 92
plano proyectivo, 106
polinomio mínimo de un número algebraico, 59
polinomio mónico, 59
polígono, 102
positivos, números reales, 79
primos relativos, 42
principio de inducción matemática, 45
principio de sustitución, 63
principio de Weierstrass, 57
principio fundamental de conteo, 109
probabilidad, 117
productos notables, 73
propiedades de la unión e intersección de conjuntos, 33
propiedades de límites de sucesiones, teorema, 53
propiedades del operador suma, teorema, 47

racionales periódicos, teorema, 54
razón común de una sucesión geométrica, 50
raíz n-ésima, 70
rectas paralelas, 90

segmento de recta, 91
segmentos hiperbólicos, 94
serie armónica, 54
sigma álgebra, 116
silogismo disyuntivo, 14
subconjunto propio, 31, 35
subconjunto, definición, 30
sucesiones acotadas, 56
sucesiones aritméticas, definición, 48
sucesiones crecientes, 56
sucesiones geométricas, 50
sucesiones geométricas, definición, 50
suma de series geométricas, teorema, 50
suma de sucesiones aritméticas, teorema, 49
suma y producto de fracciones, 66
suma, propiedades, 47
supremo e ínfimo, 82
sustracción, definición, 66
símbolo “por lo tanto”, 14

tautología, 18
teorema e es irracional, 58
Teorema (inclusión es transitiva)., 31
teorema del binomio, 75
teorema fundamental de la aritmética, 46

transversales, 106

universo del discurso, 29
unión de conjuntos, 32
unión e intersección de conjuntos, 32

vacuidad, principio de, 31
valor absoluto, 72
variable aleatoria, 119
vértices de un polígono, 102

ángulo agudo, 98
ángulo obtuso, 98
ángulo recto, 98
ángulos adyacentes, 98
ángulos hiperbólicos, 101