

Problemas de Circuitos Eléctricos

Jacqueline Vidal Rosado
Miguel Ángel Bautista León

Problemas de Circuitos Eléctricos

Jacqueline Vidal Rosado
Miguel Ángel Bautista León

Libro de texto



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Rector General

Dra. Norma Rondero López

Secretaria General

Dra. Verónica Medina Bañuelos

Rector de la Unidad Iztapalapa

Dr. Juan José Ambriz García

Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Mtro. Federico Bañuelos Bárcena

Coordinador de Extensión Universitaria

Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas

Jefe de la Sección de Producción Editorial

Problemas de Circuitos Eléctricos

Primera edición: 2023

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, número 186, Col. Leyes de Reforma 1a Sección, Alcaldía

Iztapalapa, C. P. 09310 Ciudad de México.

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-2886-5

Impreso en México / Printed in Mexico

***PROBLEMAS
DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS***

Prefacio

El presente problemario fue elaborado para que sirva de apoyo a las unidades de enseñanza-aprendizaje de Circuitos Eléctricos y Circuitos Eléctricos I, de las licenciaturas en Ingeniería Biomédica y en Ingeniería Electrónica, respectivamente, pero en general es útil para cualquier curso introductorio de análisis de redes eléctricas. Su finalidad consiste en coadyuvar en la adquisición de las habilidades básicas de análisis que se debe lograr al final de estos cursos, promoviendo el desarrollo del trabajo autónomo del estudiante. Para ello, se desarrollaron una serie de ejemplos de diferentes grados de complejidad, que sirven de guía en cada uno de los temas estudiados, a través de su resolución paso a paso. Asimismo, al final de cada uno de los capítulos, se proponen ejercicios para que el estudiante los resuelva por sí mismo, y se indican los resultados correctos para que pueda verificarlos.

Al inicio de cada uno de los temas, se incluye una breve explicación de las herramientas de análisis a estudiar, seguida de ejemplos de circuitos que son resueltos aplicando dichas técnicas. En el análisis de estos ejemplos se han incluido las unidades correspondientes a los parámetros involucrados, con la finalidad de que el lector se familiarice con ellas. Este problemario contiene 62 ejemplos resueltos y 57 ejercicios propuestos, distribuidos en seis capítulos que a continuación se describen brevemente.

El capítulo 1 describe los parámetros fundamentales que se emplean en las redes eléctricas y que son utilizados en los capítulos subsecuentes.

En el capítulo 2 se describen las leyes de Ohm y de Kirchhoff, así como las conexiones serie y paralelo de circuitos resistivos.

Con base en los conceptos fundamentales de mallas y de nodos, en el capítulo 3 se estudia la forma de analizar los circuitos eléctricos, identificando en ellos estos elementos para establecer sistemas de ecuaciones que permitan su resolución.

El capítulo 4 se enfoca en las diversas herramientas que facilitan el análisis de circuitos lineales, como son la transformación de fuentes, el principio de la superposición y los teoremas de Thévenin y de Norton y de máxima transferencia de potencia. El denominador común de estas herramientas consiste en facilitar la reducción de redes eléctricas a equivalentes más sencillos de analizar.

El análisis transitorio de circuitos de primer orden, que se estudia en el capítulo 5, incluye la descripción de elementos que almacenan energía tales como el capacitor y el inductor, así como la respuesta natural y la respuesta forzada, las que invariablemente implican el uso de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, también se plantea el uso de otros métodos que facilitan al lector la resolución de este tipo de circuitos.

Finalmente se ha incluido, en el capítulo 6, el estudio de los circuitos con amplificadores operacionales ideales, con la finalidad de mostrar que el uso de las herramientas de análisis planteadas en los capítulos previos, también se aplican a los circuitos electrónicos lineales.

Índice

Capítulo 1. Conceptos fundamentales.....	1
1.1. Elemento eléctrico	1
1.2. Circuito eléctrico	1
1.3. Unidades de medición.....	1
1.4. Carga y corriente eléctricas.....	2
1.5. Voltaje	3
1.6. Potencia.....	4
1.7. Elementos pasivos y activos.....	9
1.8. Fuentes ideales de voltaje y de corriente	9
EJERCICIOS PROPUESTOS	13
Capítulo 2. Circuitos resistivos.....	15
2.1. Ley de Ohm	15
2.2. Leyes de Kirchhoff.....	15
2.2.1. Ley de corrientes (LCK).....	16
2.2.2. Ley de voltajes (LVK).....	18
2.3. Conexiones en serie	19
2.3.1. Resistores en serie.....	20
2.3.2. Divisor de voltaje.....	22
2.4. Conexiones en paralelo	25
2.4.1. Resistores en paralelo	25
2.4.2. Divisor de corriente.....	27
EJERCICIOS PROPUESTOS	36
Capítulo 3. Análisis de mallas y de nodos	41
3.1. Análisis de mallas	41
3.2. Análisis de nodos.....	55
EJERCICIOS PROPUESTOS	67

Capítulo 4. Otros métodos de análisis	73
4.1. Principio de superposición	73
4.2. Transformación de fuentes	79
4.3. Teoremas de Thévenin y de Norton.....	85
4.3.1 Equivalente de Thévenin.....	85
4.3.2 Equivalente de Norton.	97
4.4. Teorema de máxima transferencia de potencia	107
EJERCICIOS PROPUESTOS	114
Capítulo 5. Análisis transitorio de circuitos de primer orden.....	121
5.1. Capacitores e inductores.....	121
5.1.1. Capacitancia	121
5.1.1.1. Capacitores en serie	122
5.1.1.2. Capacitores en paralelo.....	123
5.1.2. Inductancia	124
5.1.2.1. Inductores en serie.....	125
5.1.2.2. Inductores en paralelo	126
5.2. Respuesta natural.....	126
5.2.1 Circuito RC.....	127
5.2.2 Circuito RL	136
5.3. Respuesta forzada	142
5.3.1. Respuesta escalón de un circuito RC.....	142
5.3.2 Respuesta escalón de un circuito RL	155
EJERCICIOS PROPUESTOS	166
Capítulo 6. Circuitos con amplificadores operacionales	171
6.1. Amplificador operacional ideal	171
6.2. Configuraciones básicas	172
6.2.1. Amplificador inversor	172
6.2.2. Amplificador no inversor	174
6.2.3. Amplificador sumador.....	175

6.2.4. Amplificador de diferencias	176
6.2.5. Derivador.....	179
6.2.6. Integrador.....	182
6.2.7. Amplificador de ganancia unitaria o seguidor de voltaje	184
6.2.8. Comparador de voltaje.....	186
6.3. Aplicaciones diversas	188
EJERCICIOS PROPUESTOS	203

Capítulo 1. Conceptos fundamentales

1.1. Elemento eléctrico

Un elemento eléctrico es un dispositivo físico que tiene, al menos, dos terminales libres para su conexión. Ejemplos de estos elementos son los resistores, capacitores e inductores, entre otros, los cuales están definidos por la relación existente entre las variables eléctricas de voltaje y de corriente en sus terminales. La forma general para representar los elementos eléctricos de dos terminales se muestra en la figura 1.1a.

1.2. Circuito eléctrico

Un circuito eléctrico está formado por un conjunto de elementos eléctricos conectados entre sí de una manera específica. En la figura 1.1b se esquematiza un ejemplo.

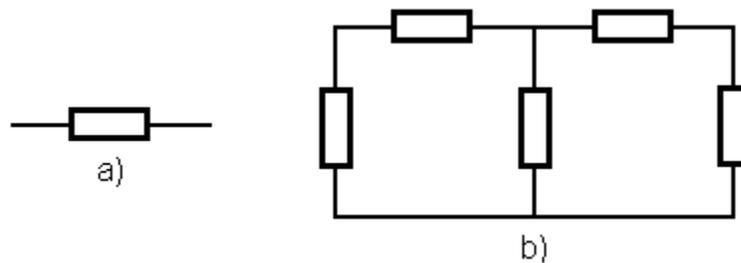


Figura 1.1. a) Elemento eléctrico de dos terminales. b) Circuito eléctrico.

1.3 Unidades de medición

El Sistema Internacional de Unidades (SI) considera siete magnitudes básicas, indicadas en la tabla 1.1, donde las cuatro primeras son utilizadas para derivar las magnitudes útiles en el análisis de circuitos eléctricos, y se indican en la tabla 1.2. Adicionalmente se consideran las unidades suplementarias de ángulo plano (ángulo de fase en circuitos eléctricos) y el ángulo sólido, donde sus unidades son, respectivamente, el radián (rad) y el estereorradián (sr).

Tabla 1.1. Unidades básicas del Sistema Internacional.

Magnitud	Símbolo	Unidad	Abreviatura
Longitud	l	metro	m
Masa	m	kilogramo	kg
Tiempo	t	segundo	s
Corriente eléctrica	I, i	ampere	A
Temperatura termodinámica	T	kelvin	K
Cantidad de sustancia	n	mol	mol
Intensidad luminosa	I_v	candela	cd

Tabla 1.2. Unidades derivadas.

Magnitud	Símbolo	Unidad	Abreviatura
Capacitancia	C	farad	F
Carga eléctrica	Q, q	coulomb	C
Conductancia	G	siemens	S
Densidad de flujo magnético	B	tesla	T
Energía, trabajo	W, w	joule	J
Flujo magnético	φ	weber	Wb
Frecuencia	f	hertz	Hz
Fuerza	F, f	newton	N
Inductancia	L	henry	H
Potencia	P, p	watt	W
Potencial eléctrico	V, v	volt	V
Resistencia	R	ohm	Ω

El SI incorpora el uso de prefijos de potencias de diez para la representación de valores mayores y menores en sus unidades (tabla 1.3).

Tabla 1.3. Prefijos del SI.

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	mili	m
10^3	Kilo	k
10^6	Mega	M
10^9	Giga	G
10^{12}	Tera	T
10^{15}	Peta	P
10^{18}	Exa	E

1.4. Carga y corriente eléctricas

Todos los fenómenos eléctricos se describen en términos de la separación o el movimiento de las cargas eléctricas, debido a que éstas tienen una polaridad (cargas positivas y cargas negativas) y existen en valores discretos (1.602×10^{-19} C, para el electrón).

La corriente eléctrica se puede definir de manera intuitiva como el movimiento de cargas y su unidad, el ampere, equivale a 1 coulomb de carga que pasa a través de una superficie en un segundo. Si consideramos que la magnitud cambia con el tiempo, se tiene que

$$i = \frac{dq}{dt}$$

donde

i = corriente en ampere

q = carga en coulomb

t = tiempo en segundos

Asimismo, la corriente que atraviesa un elemento se especifica con una flecha que establece la dirección en que ésta circula y un valor que indica su magnitud. La figura 1.2 muestra las formas en que esto se puede representar.

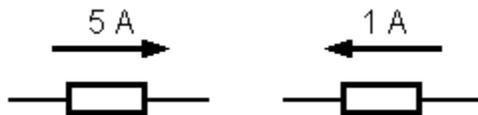


Figura 1.2. Representación de la corriente eléctrica en un elemento.

1.5. Voltaje

Es la energía que se requiere para mover una carga de 1 coulomb entre dos puntos, por lo que su expresión matemática queda

$$v = \frac{dw}{dq}$$

donde

v = voltaje en volt

w = energía en joule

q = carga en coulomb

El voltaje a través de un elemento se indica con los signos '+' y '-', los que establecen la dirección de referencia (polaridad) del voltaje, y un valor que indica su magnitud. En la figura 1.3 se puede observar las formas de representar el voltaje.



Figura 1.3. Representación del voltaje en un elemento.

Las asignaciones de polaridad para el voltaje y de dirección para la corriente, son arbitrarias. Sin embargo, una vez que han sido asignadas, todas las ecuaciones se tendrán que escribir de acuerdo con las referencias elegidas. A lo largo de este problemario se aplicará la convención de signo para elementos pasivos: "Si la dirección de referencia para la corriente

en un elemento sigue la dirección de la caída del voltaje de referencia a través del elemento, se asigna un signo positivo a la expresión que relaciona el voltaje con la corriente, y un signo negativo en caso contrario”.

1.6. Potencia

La potencia es la razón de cambio de la energía entregada o absorbida por unidad de tiempo, quedando expresada como

$$P = \frac{dw}{dt}$$

donde

P = potencia en watt

w = energía en joule

t = tiempo en segundos

De la ecuación anterior se deduce que la potencia es función del voltaje y de la corriente con la forma

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i$$

la que también es conocida como **potencia instantánea**. Cuando el voltaje y la corriente varían en el tiempo, la potencia puede ser positiva en un instante, y negativa en otro, por lo que es más útil obtener el valor promedio de la potencia instantánea en un período $T = t_2 - t_1$.

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

A partir de la convención de signo pasivo, el producto voltaje-corriente en un elemento eléctrico se considera positivo cuando la corriente fluye de un potencial mayor a uno menor, como se muestra en la figura 1.4a. Sí por el contrario, la corriente fluye de menor a mayor potencial, dicho producto se considera negativo como se indica en la figura 1.4b. Al sustituir los valores de voltaje y de corriente, si el producto resultante es positivo, se dice que el elemento absorbe potencia y, si es negativo, se dice que el elemento entrega potencia.

La potencia es un parámetro importante de verificar en la construcción de los circuitos, pues cada dispositivo físico tiene sus propias limitaciones en cuanto a disipación de energía, la cual se puede obtener a partir de la ecuación para la potencia instantánea.

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

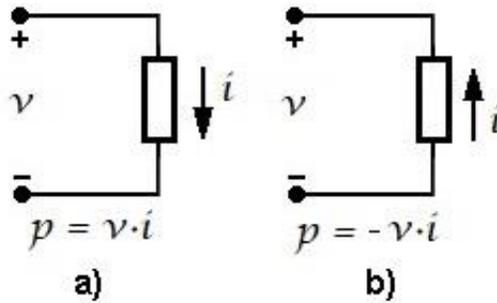


Figura 1.4. Convención de signo pasivo para determinar la potencia.

Ejemplo 1.1. Supóngase que la corriente que pasa por un elemento en un circuito eléctrico es de la forma $i(t) = 5 \text{sen } \omega t \text{ mA}$ y su voltaje es $v(t) = 50 \text{sen } \omega t \text{ V}$, siendo ω la frecuencia angular en rad/s. Determinar la energía total disipada en un período de la onda senoidal, así como la potencia promedio.

Solución.

A partir de la ecuación para la potencia instantánea tenemos

$$p(t) = i(t) \cdot v(t) = (5 \times 10^{-3} \text{sen } \omega t \text{ A})(50 \text{sen } \omega t \text{ V}) = 250 \text{sen}^2 \omega t \text{ mW}$$

Para calcular la energía, se considera el período de una onda senoidal, el cual es $T = 2\pi/\omega$ (recordar que $T = 1/f$ y $\omega = 2\pi f$).

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_0^{2\pi/\omega} 250 \text{sen}^2 \omega t dt = 250 \left[\int_0^{2\pi/\omega} \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} dt \right] = 250 \frac{\pi}{\omega} \text{ mJ}$$

Ahora, aplicando el resultado anterior en el cálculo de la potencia promedio, se obtiene

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{T} \cdot w = \frac{1}{2\pi/\omega} \left(250 \frac{\pi}{\omega} \text{ mJ} \right) = 125 \text{ mW}$$

Ejemplo 1.2. Los parámetros característicos de una batería son su voltaje y la capacidad para proporcionar una corriente, lo que se indica en unidades de ampere-hora (Ah). Así, una batería de 12V que tiene una capacidad de 50 Ah y se le demanda una corriente de 2 A, podrá funcionar durante 25 horas, considerando que el voltaje se mantiene constante. Determinar la potencia y energía que entrega una batería bajo estas condiciones.

Solución.

La potencia es

$$P = V \cdot I = (12 \text{ V})(2 \text{ A}) = \mathbf{24 \text{ W}} = \mathbf{24 \text{ J/s}}$$

Para determinar la energía, el período de integración es de 0 a 25 horas, el cual debe ser expresado en segundos debido a las unidades que emplea la potencia.

$$w = \int_0^{25} 24 \, dt = (24 \frac{\text{J}}{\text{s}})(25 \text{ h}) \left(3600 \frac{\text{s}}{\text{h}}\right) = \mathbf{2.16 \text{ MJ}}$$

Ejemplo 1.3. Determinar si la potencia en el elemento es entregada o absorbida.

1) En la figura 1.5a: a) $V = 5 \text{ V}$, $I = 1 \text{ A}$; b) $V = 3 \text{ V}$, $I = -2 \text{ A}$.

2) En la figura 1.5b: a) $V = 1 \text{ V}$, $I = 3 \text{ A}$; b) $V = -2 \text{ V}$, $I = 4 \text{ A}$.

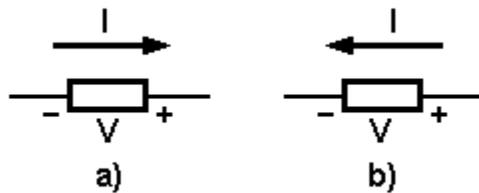


Figura 1.5. Esquemas para el ejemplo 1.3.

Solución.

1a) Dado que la corriente circula de un potencial negativo a uno positivo, la potencia queda expresada como $P = -V \cdot I = -(5 \text{ V})(1 \text{ A}) = -5 \text{ W}$, por lo tanto, al ser un resultado negativo, el elemento está suministrando potencia.

1b) De igual manera, $P = -V \cdot I = -(3 \text{ V})(-2 \text{ A}) = 6 \text{ W}$ que, al ser positivo, indica que el elemento está absorbiendo potencia.

2a) En este caso, la corriente circula de un potencial positivo a uno negativo, por lo que la potencia se calcula de la forma $P = V \cdot I = (1 \text{ V})(3 \text{ A}) = 3 \text{ W}$. En este caso el elemento absorbe potencia.

2b) Como en el inciso anterior, $P = V \cdot I = (-2 \text{ V})(4 \text{ A}) = -8 \text{ W}$, que indica que el elemento suministra potencia.

Ejemplo 1.4. Dos elementos de circuito, A y B, están conectados entre sí como se muestra en la figura 1.6, donde se indica además el voltaje V entre sus terminales, así como la corriente I que circula por ellos. Para cada uno de los casos indicados, calcule la potencia y determine cuál elemento suministra potencia y cuál la absorbe.

- a) $V = -2.5 \text{ V}$, $I = 4 \text{ mA}$
- b) $V = 1 \text{ V}$, $I = 20 \text{ mA}$
- c) $V = 6 \text{ V}$, $I = -1.5 \text{ mA}$
- d) $V = -3 \text{ V}$, $I = -2 \text{ mA}$

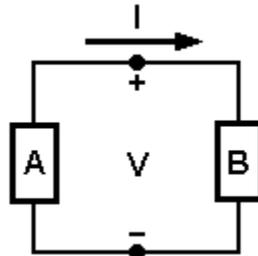


Figura 1.6. Circuito para el ejemplo 1.4.

Solución.

Dado que en el elemento A la corriente circula de un menor potencial a uno mayor, el producto de la potencia siempre se considerará negativo, según la convención del signo pasivo. Por el contrario, en el elemento B siempre se considerará positivo, debido a que la corriente circula de mayor a menor potencial.

a) Para el elemento A, $P = -V \cdot I = -(-2.5 \text{ V})(4 \text{ mA}) = 10 \text{ mW}$, absorbe potencia. Para el elemento B, $P = V \cdot I = (-2.5 \text{ V})(4 \text{ mA}) = -10 \text{ mW}$, suministra potencia.

b) Para el elemento A, $P = -(1 \text{ V})(20 \text{ mA}) = -20 \text{ mW}$, suministra potencia. Para el elemento B, $P = (1 \text{ V})(20 \text{ mA}) = 20 \text{ mW}$, absorbe potencia.

c) Para el elemento A, $P = -(6 \text{ V})(-1.5 \text{ mA}) = 9 \text{ mW}$, absorbe potencia. Para el elemento B, $P = (6 \text{ V})(-1.5 \text{ mA}) = -9 \text{ mW}$, suministra potencia.

d) Para el elemento A, $P = -(-3 \text{ V})(-2 \text{ mA}) = -6 \text{ mW}$, suministra potencia. Para el elemento B, $P = V \cdot I = (-3 \text{ V})(-2 \text{ mA}) = 6 \text{ mW}$, absorbe potencia.

Obsérvese que en todos los casos, la potencia suministrada por un elemento es igual a la potencia absorbida por el otro elemento. En general, en un circuito eléctrico, la suma algebraica de las potencias positivas P_j , es igual a la suma algebraica de las potencias negativas P_i , lo cual se expresa como

$$\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{i=1}^n P_i$$

Ejemplo 1.5. Para el circuito de la figura 1.7, determine la potencia total suministrada y la potencia total absorbida.

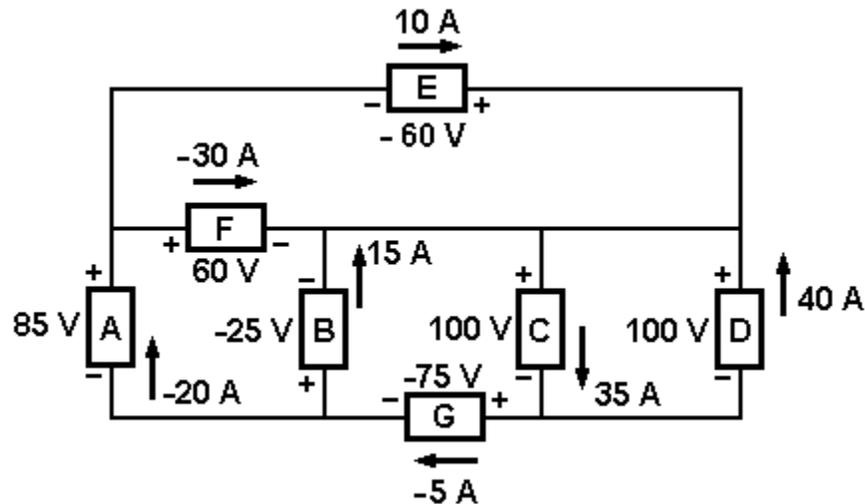


Figura 1.7. Circuito para el ejemplo 1.5.

Solución.

Para obtener ambas potencias, primero debe calcularse la potencia en cada uno de los elementos del circuito, aplicando la convención de signo pasivo.

$$P_A = -(85 \text{ V})(-20 \text{ A}) = 1700 \text{ W}$$

$$P_B = (-25 \text{ V})(15 \text{ A}) = -375 \text{ W}$$

$$P_C = (100 \text{ V})(35 \text{ A}) = 3500 \text{ W}$$

$$P_D = -(100 \text{ V})(40 \text{ A}) = -4000 \text{ W}$$

$$P_E = -(-60 \text{ V})(10 \text{ A}) = 600 \text{ W}$$

$$P_F = (60 \text{ V})(-30 \text{ A}) = -1800 \text{ W}$$

$$P_G = (-75 \text{ V})(-5 \text{ A}) = 375 \text{ W}$$

$$P_{total \text{ suministrada}} = P_B + P_D + P_F = -375 \text{ W} - 4000 \text{ W} - 1800 \text{ W} = -6175 \text{ W}$$

$$P_{total \text{ absorbida}} = P_A + P_C + P_E + P_G = 1700 \text{ W} + 3500 \text{ W} + 600 \text{ W} + 375 \text{ W}$$

$$P_{total \text{ absorbida}} = 6175 \text{ W}$$

Se observa el principio de conservación de la energía al obtener potencias totales, suministrada y absorbida, iguales

$$P_{total \text{ suministrada}} = P_{total \text{ absorbida}}$$

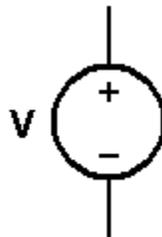
1.7. Elementos pasivos y activos

Los elementos de un circuito se clasifican en dos categorías: pasivos y activos. Se dice que un elemento es pasivo si éste es sólo capaz de recibir o absorber potencia. Ejemplos de éstos son los resistores, los inductores y los capacitores. Por el contrario, los elementos activos son capaces de suministrar potencia a otros elementos. Ejemplos de éstos son las baterías, fuentes de voltaje y de corriente, generadores y dispositivos electrónicos.

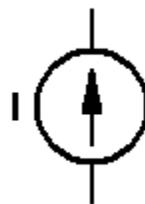
1.8. Fuentes ideales de voltaje y de corriente

Las fuentes ideales de voltaje y de corriente se pueden dividir en dos categorías: fuentes independientes y fuentes dependientes. En ambos casos, una característica importante es que pueden suministrar o absorber energía.

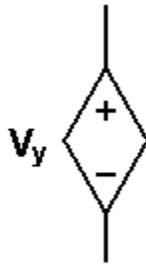
- Fuente de voltaje independiente: es un dispositivo que mantiene entre dos terminales un voltaje determinado, independientemente de la corriente que pasa a través de él. Su símbolo es



- Fuente de corriente independiente: es un dispositivo que mantiene entre sus terminales una corriente específica, independientemente del voltaje que exista entre ellas. Su símbolo es



- Fuente de voltaje dependiente o controlada: es una fuente cuyo voltaje entre sus terminales está controlado por otro voltaje o por una corriente dentro del mismo circuito. Su símbolo es

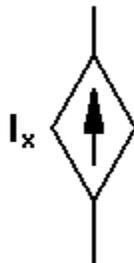


Las variables controladoras en cada caso son

$$V_y = \alpha V_x \quad \text{o} \quad V_y = \beta I_x$$

donde la constante multiplicadora α es adimensional y β tiene unidades de V/A.

- Fuente de corriente dependiente o controlada: es una fuente cuya corriente entre sus terminales está controlada por otra corriente o por un voltaje dentro del mismo circuito. Su símbolo es



Las variables controladoras en cada caso son

$$I_x = \gamma I_y \quad \text{o} \quad I_x = \delta V_y$$

donde la constante multiplicadora γ es adimensional y δ tiene unidades de A/V.

Ejemplo 1.6. Con base en la definición de fuente de voltaje ideal, determinar si la conexión que se muestra en la figura 1.8 es factible en los casos en que el elemento X es:

- Una fuente de voltaje de 5 V con su terminal positiva conectada a la positiva de V_1 .
- Una fuente de voltaje de 9 V con su terminal positiva conectada a la positiva de V_1 .
- Una fuente de voltaje de 5 V con su terminal positiva conectada a la negativa de V_1 .
- Una fuente de corriente de 3 A cuya dirección es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.
- Una fuente de voltaje controlada por voltaje de la forma $8V_{AB}$ y cuya terminal positiva se encuentra conectada a la positiva de V_1 .

f) Una fuente de corriente controlada por voltaje de la forma $3V_{AB}$ cuya dirección es contraria al sentido del giro de las manecillas del reloj.

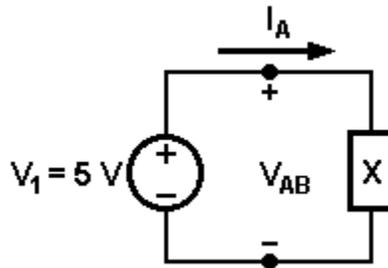


Figura 1.8. Circuito para el ejemplo 1.6.

Solución.

Es importante justificar la factibilidad en todos los casos, analizando las condiciones del circuito en cada uno de ellos.

a) La conexión es viable porque ambas fuentes de voltaje tienen la misma magnitud y polaridad, por lo que establecen la misma diferencia de potencial eléctrico entre los puntos A y B.

b) No es viable la forma en que están conectadas las fuentes, puesto que el potencial eléctrico que se establece entre los puntos A y B, no puede ser 5 V y 9 V de forma simultánea.

c) Aún cuando la magnitud del voltaje de ambas fuentes es la misma, la polaridad no, lo que hace que no se pueda establecer ninguna de las dos polaridades entre los puntos A y B.

d) Ésta es una conexión válida, pues, con base en la definición de fuente de voltaje ideal, el voltaje entre sus terminales es independiente de la corriente que circula a través de ella.

e) Ya que el voltaje entre los puntos A y B es establecido por la fuente de voltaje independiente de 5 V, la fuente controlada tendría un voltaje de 40 V ($= 8 \cdot 5 \text{ V}$) y, al estar también conectada entre los puntos A y B, se tiene una condición similar a la del inciso b).

f) La conexión es factible porque el voltaje entre los puntos A y B es establecido por la fuente de voltaje independiente y la corriente de la fuente controlada es de 15 A ($= 3 \frac{\text{A}}{\text{V}} \cdot 5 \text{ V}$), lo que resulta en una condición como la del inciso d).

Ejemplo 1.7. Con base en la definición de fuente de corriente ideal, determinar si la conexión que se muestra en la figura 1.9 es factible en los casos en que el elemento Y es:

- a) Una fuente de corriente de 7 A cuya dirección es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.
- b) Una fuente de corriente de 4 A cuya dirección es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.
- c) Una fuente de corriente de 7 A cuya dirección es contraria al sentido del giro de las manecillas del reloj.
- d) Una fuente de corriente controlada por corriente de la forma $6I_A$ cuya dirección es en el sentido del giro de las manecillas del reloj.
- e) Una fuente de voltaje controlada por corriente de la forma $2I_A$ cuya terminal positiva se encuentra conectada al punto A.

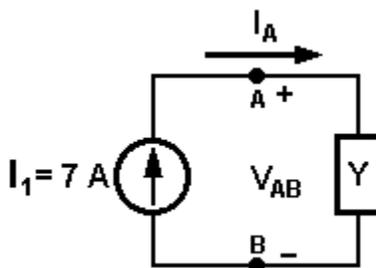


Figura 1.9. Circuito para el ejemplo 1.7.

Solución.

- a) Debido a que la corriente que circula por un conductor no cambia a lo largo de éste y puesto que la corriente de ambas fuentes es de igual magnitud y en la misma dirección, la conexión es válida.
- b) Dado que la corriente no puede cambiar su magnitud en ningún punto de los conductores entre las fuentes, la conexión no es válida, ya que la corriente no puede ser de 7 A y 4 A simultáneamente.
- c) En este caso, la corriente no puede cambiar de dirección a lo largo del conductor, de manera que la conexión no es factible.
- d) La corriente I_A es de 7 A y es establecida por la fuente de corriente independiente I_1 , por lo que la magnitud de la corriente de la fuente dependiente es de 42 A ($= 6 \cdot 7$ A), lo que hace inviable el circuito, como en el inciso b).
- e) El voltaje de la fuente dependiente es 14 V ($= 2 \frac{V}{A} \cdot 7$ A) y, con base en la definición de la fuente de corriente ideal, la corriente es independiente del voltaje entre sus terminales; por lo anterior, la conexión es válida.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Suponer que cada uno de los elementos A y B en la figura 1.6 representa una batería de automóvil de 12 V; la corriente medida en la dirección que se muestra es de -50 A. a) ¿Cuál de las baterías se encuentra descargada? Justificar su respuesta. b) Calcular la energía que se disipa si la conexión mostrada se mantiene durante 2 minutos.

Respuesta:

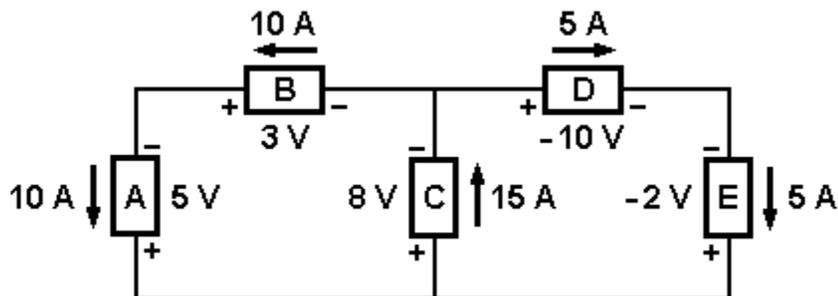
- a) La batería representada por el elemento A
 b) 72 kJ

1.2. La corriente y voltaje en las terminales de un elemento de circuito son respectivamente $i(t) = 15e^{-20t}$ A y $v(t) = 6e^{-20t}$ V. Determinar expresiones para la potencia y energía en el dispositivo.

Respuesta:

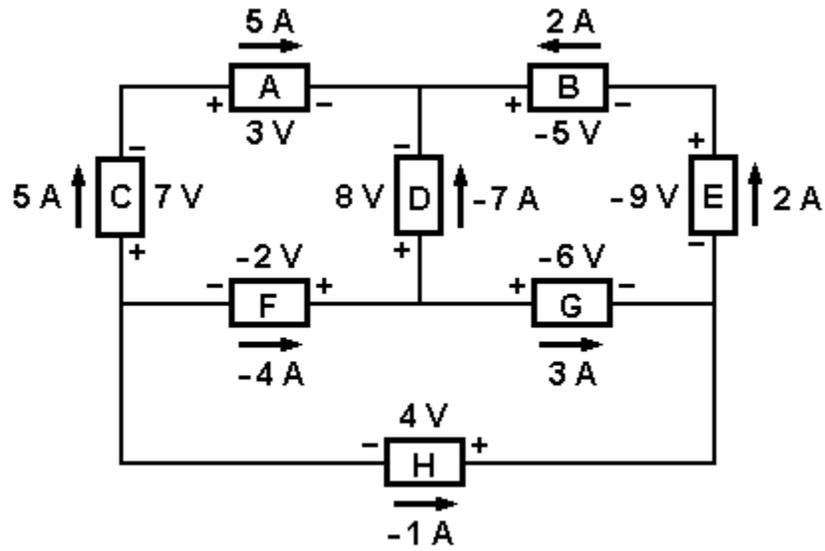
$$p(t) = 90e^{-40t} \text{ W y } w(t) = 2.25(1 - e^{-40t}) \text{ J}$$

1.3. Para los circuitos que se muestran en las siguientes figuras, calcular las potencias totales absorbidas y suministradas.



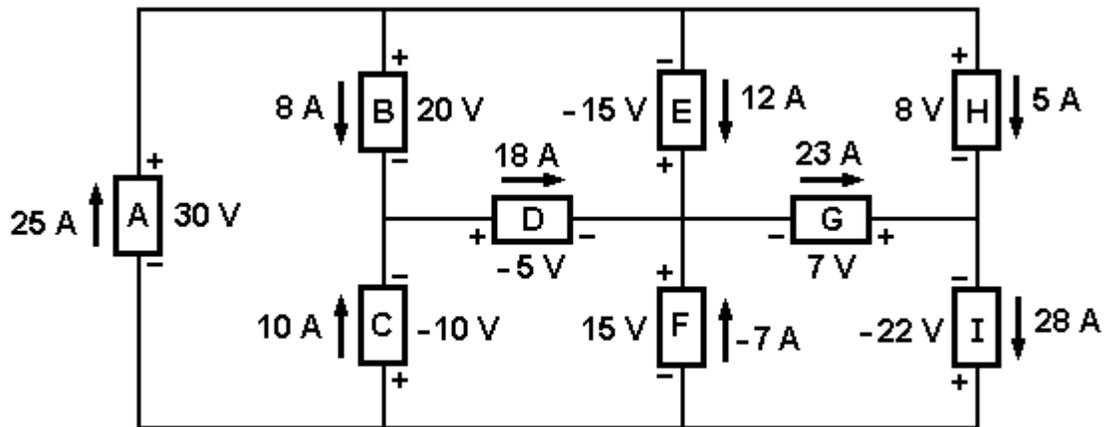
Respuesta:

$$P_{total\ suministrada} = -130 \text{ W, } P_{total\ absorbida} = 130 \text{ W}$$



Respuesta:

$$P_{total\ suministrada} = -82\ W, P_{total\ absorbida} = 82\ W$$



Respuesta:

$$P_{total\ suministrada} = -1101\ W, P_{total\ absorbida} = 1101\ W$$

Capítulo 2. Circuitos resistivos

2.1. Ley de Ohm

La ley de Ohm establece que el voltaje a través de diferentes materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que circula por el material. Matemáticamente, se expresa de la forma

$$v = R \cdot i$$

donde

v = voltaje en volt

R = resistencia en ohm

i = corriente en ampere

donde R es una constante de proporcionalidad, que se conoce como *resistencia*, y que es la propiedad que presenta un elemento pasivo puramente resistivo, llamado resistor, cuyo símbolo eléctrico se muestra en la figura 2.1.



Figura 2.1. Símbolo del resistor.

La ley de Ohm también puede expresarse como una corriente que es función del voltaje, a través de una constante de proporcionalidad G , llamada conductancia, y que es el inverso de la resistencia.

$$i = G \cdot v$$

donde

i = corriente en ampere

G = conductancia en siemen = $1/R$

v = voltaje en volt

2.2. Leyes de Kirchhoff

Para poder enunciar las leyes de Kirchhoff, es necesario definir previamente algunos conceptos de circuito.

- *Nodo*: es el punto de unión de dos o más elementos de un circuito.
- *Rama*: es un trayecto entre dos nodos formado por uno o más elementos eléctricos.

- *Camino cerrado*: es una trayectoria que inicia en un nodo cualquiera del circuito, pasa por un conjunto de elementos conectados, y regresa al nodo de inicio, sin pasar más de una vez por cualquier otro nodo.

2.2.1. Ley de corrientes (LCK)

La suma algebraica de todas las corrientes que entran a cualquier nodo de un circuito es igual a cero (figura 2.2a).

$$-I_a - I_b - I_c - I_d - I_e = 0$$

Otras formas de enunciar la ley de corrientes de Kirchhoff son:

La suma algebraica de todas las corrientes que salen de cualquier nodo de un circuito es igual a cero (figura 2.2b).

$$I_a + I_b + I_c + I_d + I_e = 0$$

La suma de todas las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de todas las corrientes que salen del mismo nodo (figura 2.2c).

$$I_a - I_b + I_c - I_d + I_e = 0$$

o

$$I_b + I_d = I_a + I_c + I_e$$

En todos los casos, dado que el voltaje de nodo se considera positivo, las corrientes salientes de él son positivas, y las entrantes son negativas.

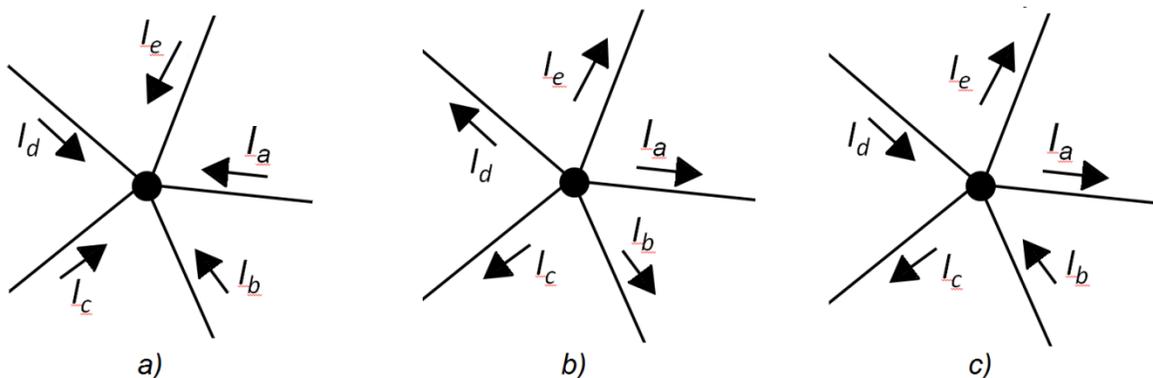


Figura 2.2. Esquemas eléctricos que ilustran la ley de corrientes de Kirchhoff.

En forma compacta y utilizando subíndices numéricos, la ley de corrientes de Kirchhoff puede expresarse como

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0$$

Ejemplo 2.1. Para el circuito de la figura 2.3, determinar los valores de las corrientes i_3 , i_5 e i_6 .

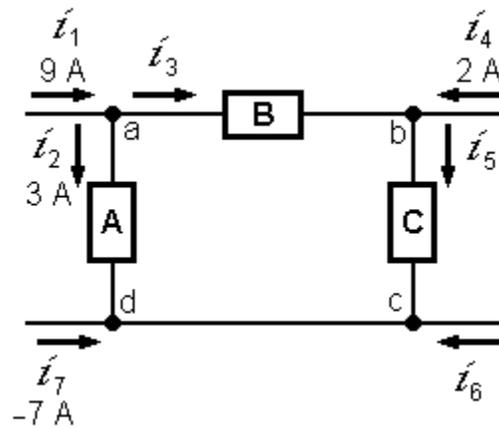


Figura 2.3. Circuito para el ejemplo 2.1.

Solución.

Observe que c y d hacen referencia a un mismo punto, por lo que son un mismo nodo, como se indica en la figura 2.4, y puede usarse la denominación c o d.

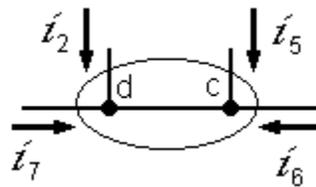


Figura 2.4. Esquema para la identificación de un mismo nodo.

Por lo anterior, se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff solamente a los nodos a, b y c indicados en la figura 2.3.

Nodo a: $i_1 = i_2 + i_3$ ó $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

Despejando i_3 y sustituyendo valores numéricos

$$i_3 = i_1 - i_2 = 9 \text{ A} - 3 \text{ A} = \mathbf{6 \text{ A}}$$

Nodo b: $i_5 = i_3 + i_4$ ó $-i_3 - i_4 + i_5 = 0$

Sustituyendo valores numéricos para la expresión de i_5

$$i_5 = 6 \text{ A} + 2 \text{ A} = \mathbf{8 \text{ A}}$$

Nodo c: $i_2 + i_5 + i_6 + i_7 = 0$ ó $-i_2 - i_5 - i_6 - i_7 = 0$

Despejando i_6 y sustituyendo valores numéricos

$$i_6 = -i_2 - i_5 - i_7 = -3 \text{ A} - 8 \text{ A} - (-7 \text{ A}) = \mathbf{-4 \text{ A}}$$

2.2.2. Ley de voltajes (LVK)

La ley de voltajes de Kirchhoff establece que la suma algebraica de todos los voltajes a lo largo de cualquier camino cerrado en un circuito es igual a cero.

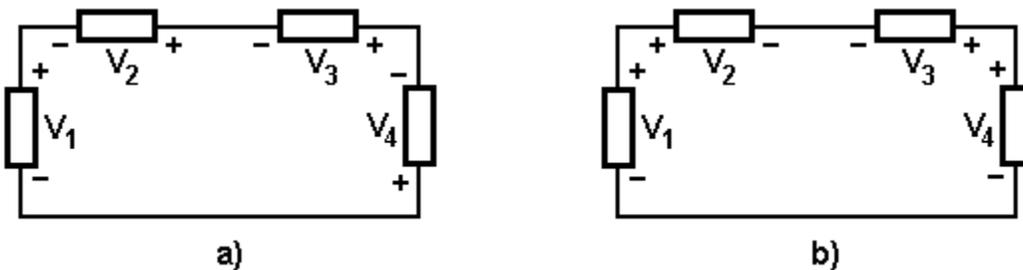


Figura 2.5. Esquemas eléctricos para ilustrar la ley de voltajes de Kirchhoff.

Para la figura 2.5a, recorriendo la trayectoria cerrada del circuito en el sentido del giro de las manecillas del reloj, y considerando la convención de signo pasivo, la ecuación para la ley de voltajes de Kirchhoff es

$$-V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0$$

Haciendo las mismas consideraciones de trayectoria para la figura 2.5b, se obtiene

$$-V_1 + V_2 - V_3 + V_4 = 0$$

Como en el caso de la ley de corrientes de Kirchhoff, la ley de voltajes se puede expresar de forma compacta como

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0$$

Ejemplo 2.2. Determinar los valores de los voltajes v_2 y v_4 del circuito de la figura 2.6.

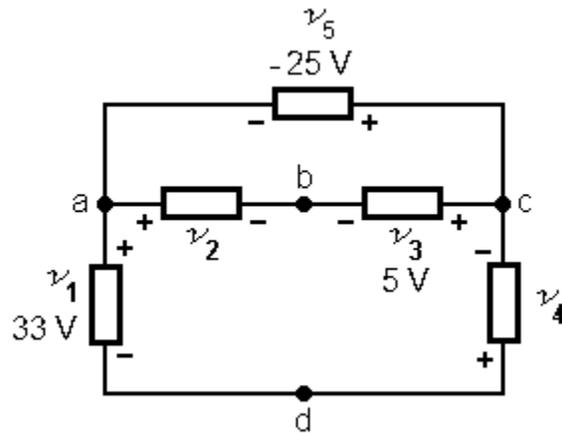


Figura 2.6. Circuito para el ejemplo 2.2.

Solución.

Aplicando la LVK en la trayectoria cerrada **acba** se obtiene

$$-v_5 + v_3 - v_2 = 0$$

Despejando v_2 y sustituyendo valores numéricos

$$v_2 = v_3 - v_5 = 5 \text{ V} - (-25 \text{ V}) = \mathbf{30 \text{ V}}$$

Y en la trayectoria cerrada **abcda** se tiene

$$-v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0$$

Despejando v_4 y sustituyendo valores numéricos

$$v_4 = -v_1 + v_2 - v_3 = -33 \text{ V} + 30 \text{ V} - 5 \text{ V} = \mathbf{-8 \text{ V}}$$

Obsérvese que el valor de v_4 también se puede obtener utilizando la trayectoria perimetral **acda**

$$-v_1 - v_5 - v_4 = 0$$

$$v_4 = -v_1 - v_5 = -33 \text{ V} - (-25 \text{ V}) = \mathbf{-8 \text{ V}}$$

2.3. Conexiones en serie

Si por los elementos de un circuito, circula la misma corriente, se dice que éstos están conectados en serie. Ambos circuitos en la figura 2.5 contienen cuatro elementos conectados de esta manera. Nótese que cada par de elementos contiguos tienen una sola

terminal en común formando un nodo, y en éste no está conectado ningún otro elemento por el que fluya una corriente.

2.3.1. Resistores en serie

Cuando los elementos resistivos de un circuito están conectados en serie, la resistencia equivalente es la suma de todas las resistencias, la cual se expresa como

$$R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{j=1}^n R_j$$

Ejemplo 2.3. Determinar los valores de los voltajes en cada uno de los resistores del circuito en la figura 2.7.

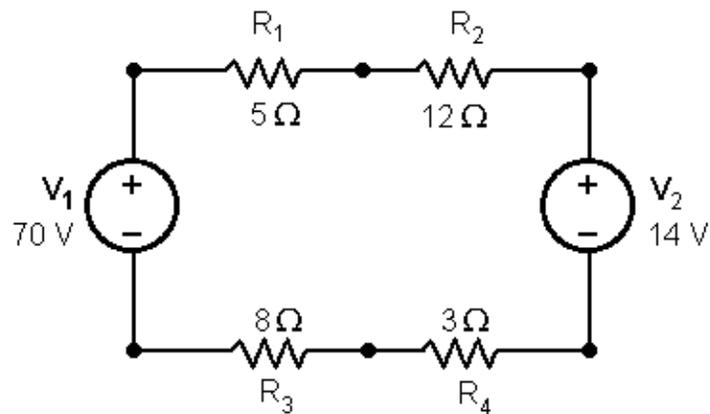


Figura 2.7. Circuito para el ejemplo 2.3.

Solución.

Para determinar los voltajes en los resistores, se debe conocer la corriente que circula en cada uno de ellos, pero en virtud de que los elementos del circuito se encuentran conectados en serie, la corriente es la misma en todos. Para hacer el análisis del circuito, se elige que la corriente circule en el sentido del giro de las manecillas del reloj, y se considera también la convención de signo pasivo (figura 2.8).

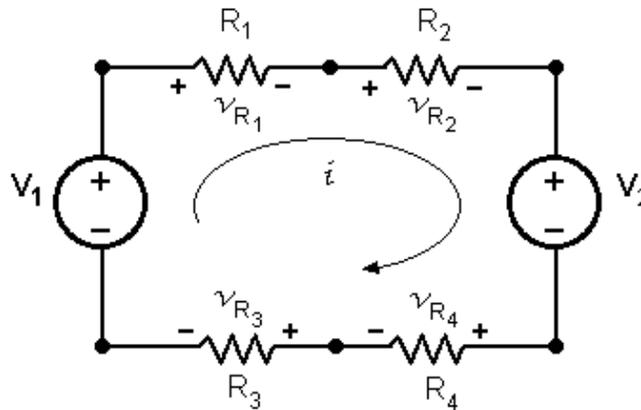


Figura 2.8. Circuito para la solución del ejemplo 2.3.

Aplicando la LVK alrededor de la trayectoria cerrada del circuito, se tiene

$$-V_1 + v_{R_1} + v_{R_2} + V_2 + v_{R_4} + v_{R_3} = 0$$

Aplicando la ley de Ohm y agrupando términos para determinar la corriente del circuito

$$i \cdot R_1 + i \cdot R_2 + i \cdot R_3 + i \cdot R_4 = V_1 - V_2$$

$$i \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = V_1 - V_2$$

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{56 \text{ V}}{28 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Sustituyendo el valor de la corriente para calcular los voltajes

$$v_{R_1} = i \cdot R_1 = (2 \text{ A})(5 \Omega) = 10 \text{ V} \quad v_{R_2} = i \cdot R_2 = (2 \text{ A})(12 \Omega) = 24 \text{ V}$$

$$v_{R_3} = i \cdot R_3 = (2 \text{ A})(8 \Omega) = 16 \text{ V} \quad v_{R_4} = i \cdot R_4 = (2 \text{ A})(3 \Omega) = 6 \text{ V}$$

Obsérvese además que, como se mencionó anteriormente, los resistores conectados en serie suman sus resistencias para obtener una resistencia equivalente (figura 2.9), por lo que en este circuito

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 28 \Omega$$

De igual manera, se puede obtener un voltaje equivalente para las fuentes conectadas en serie, aplicando la LVK. Con todo esto, se puede calcular de una manera más rápida y sencilla la corriente total del circuito.

$$V_{eq} = V_1 - V_2 = 70 \text{ V} - 14 \text{ V} = 56 \text{ V}$$

$$i = \frac{V_{eq}}{R_S} = \frac{56 \text{ V}}{28 \Omega} = 2 \text{ A}$$

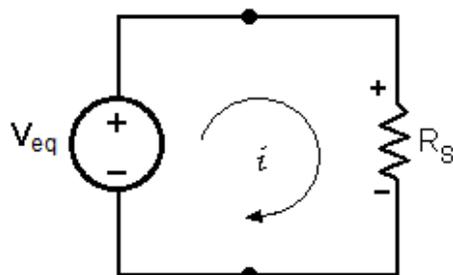


Figura 2.9. Circuito equivalente del ejemplo 2.3.

2.3.2. Divisor de voltaje

Permite determinar de forma rápida, y sin necesidad de calcular la corriente total, los voltajes en cada elemento resistivo de un circuito en serie. En la figura 2.10, se muestra la configuración básica que incluye una fuente de voltaje y dos resistores.

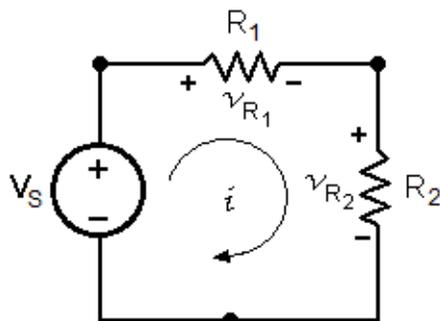


Figura 2.10. Circuito básico para la división de voltaje.

Se realiza entonces el análisis del circuito, para obtener resultados que puedan ser utilizados posteriormente de manera general. Aplicando la ley de Ohm en cada resistor

$$v_{R_1} = i \cdot R_1 \quad v_{R_2} = i \cdot R_2$$

La corriente total del circuito es $i = \frac{V_S}{R_S}$, donde $R_S = R_1 + R_2$. Al sustituir la corriente en cada una de las ecuaciones anteriores, los voltajes en los resistores quedan de la forma

$$v_{R_1} = \frac{R_1}{R_S} \cdot V_S \quad v_{R_2} = \frac{R_2}{R_S} \cdot V_S$$

Obsérvese que en estas expresiones el voltaje en cada resistor es directamente proporcional al valor de la resistencia y no se requiere conocer el valor de la corriente. Esto se puede generalizar como

$$v_{R_j} = \frac{R_j}{R_S} \cdot V_S$$

donde

v_{R_j} = voltaje del j-ésimo resistor en un arreglo en serie

R_j = j-ésimo resistor en un arreglo en serie

V_S = voltaje aplicado al arreglo en serie

R_S = resistencia equivalente en serie

Una aplicación práctica de los circuitos divisores de voltaje es obtener, a partir de un solo voltaje, dos o más niveles de voltaje menores.

Ejemplo 2.4. Para el circuito de la figura 2.11, determinar los voltajes v_a , v_b y v_c , así como la potencia suministrada o absorbida por cada uno de los elementos del circuito.

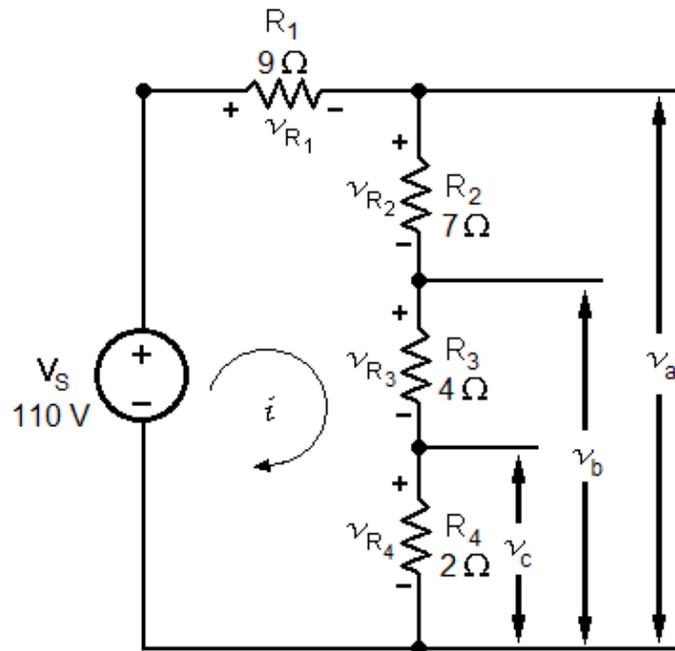


Figura 2.11. Circuito para el ejemplo 2.4.

Solución.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$v_c = v_{R_4}$$

$$v_b = v_{R_3} + v_{R_4}$$

$$v_a = v_{R_2} + v_{R_3} + v_{R_4}$$

Para calcular los voltajes en cada resistor, se debe conocer el valor de la resistencia total en serie, siendo éste

$$R_S = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 9 \Omega + 7 \Omega + 4 \Omega + 2 \Omega = 22 \Omega$$

El cual se usa en cada ecuación del divisor de voltaje

$$v_{R_1} = \frac{R_1}{R_S} \cdot V_S = \frac{9 \Omega}{22 \Omega} \cdot 110 \text{ V} = 45 \text{ V} \quad v_{R_2} = \frac{R_2}{R_S} \cdot V_S = \frac{7 \Omega}{22 \Omega} \cdot 110 \text{ V} = 35 \text{ V}$$

$$v_{R_3} = \frac{R_3}{R_S} \cdot V_S = \frac{4 \Omega}{22 \Omega} \cdot 110 \text{ V} = 20 \text{ V} \quad v_{R_4} = \frac{R_4}{R_S} \cdot V_S = \frac{2 \Omega}{22 \Omega} \cdot 110 \text{ V} = 10 \text{ V}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones para v_a , v_b y v_c , se tiene

$$v_c = \mathbf{10 \text{ V}} \quad v_b = 20 \text{ V} + 10 \text{ V} = \mathbf{30 \text{ V}} \quad v_a = 35 \text{ V} + 20 \text{ V} + 10 \text{ V} = \mathbf{65 \text{ V}}$$

Para calcular la potencia suministrada por la fuente, se calcula primero la corriente total del circuito, la cual es

$$i = \frac{V_S}{R_S} = \frac{110 \text{ V}}{22 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Por tanto, la potencia de la fuente de voltaje es

$$P_{V_S} = -V_S \cdot i = -(110 \text{ V})(5 \text{ A}) = -550 \text{ W}$$

La potencia absorbida por los resistores puede ser calculada sin necesidad de utilizar la corriente, sustituyendo la ley de Ohm en la ecuación de la potencia, por lo que

$$P = v \cdot i = v \cdot \left(\frac{v}{R}\right) = \frac{v^2}{R}$$

o, utilizando la corriente total del circuito

$$P = v \cdot i = (i \cdot R) \cdot i = i^2 \cdot R$$

En este caso, debido a que ya se calculó la corriente en el circuito y por simplicidad se utiliza la ecuación ya enunciada para la potencia.

$$P_{R_1} = v_{R_1} \cdot i = (45 \text{ V})(5 \text{ A}) = \mathbf{225 \text{ W}}$$

$$P_{R_2} = v_{R_2} \cdot i = (35 \text{ V})(5 \text{ A}) = \mathbf{175 \text{ W}}$$

$$P_{R_3} = v_{R_3} \cdot i = (20 \text{ V})(5 \text{ A}) = \mathbf{100 \text{ W}}$$

$$P_{R_4} = v_{R_4} \cdot i = (10 \text{ V})(5 \text{ A}) = \mathbf{50 \text{ W}}$$

2.4 Conexiones en paralelo

Si los elementos conectados en un circuito tienen el mismo voltaje en sus terminales, se dice que están conectados en paralelo. La figura 2.12 muestra un circuito con tres elementos conectados de esta manera. Nótese que todos los elementos están vinculados a un mismo par de nodos.

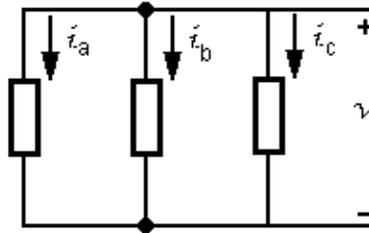


Figura 2.12. Diagrama de tres elementos conectados en paralelo.

2.4.1. Resistores en paralelo

Cuando los elementos resistivos de un circuito están conectados en paralelo, la conductancia equivalente es la suma de todas las conductancias del circuito

$$G_p = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum_{j=1}^n G_j$$

y se expresa en términos de las resistencias como

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$$

Ejemplo 2.5. Para el circuito que se muestra en la figura 2.13 determinar las corrientes en cada uno de los resistores, así como la potencia suministrada y absorbida.

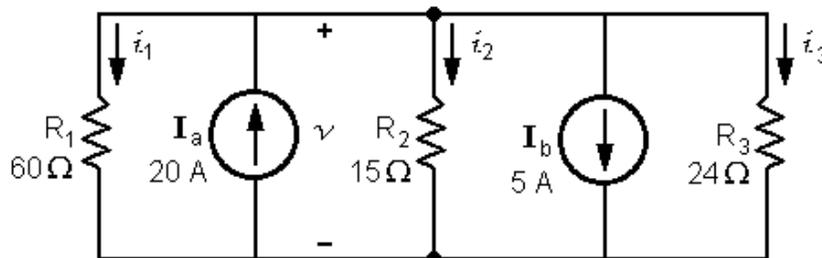


Figura 2.13. Circuito para el ejemplo 2.5.

Solución.

Para determinar la corriente en cada uno de los resistores, se debe calcular el voltaje entre el par de nodos del circuito. El circuito puede dibujarse como se muestra en la figura 2.14.

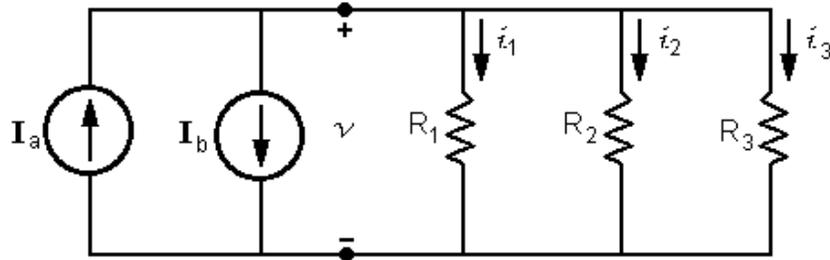


Figura 2.14. Circuito para la solución del ejemplo 2.5.

Aplicando la LCK en el nodo superior y sustituyendo la ley de Ohm en las corrientes desconocidas

$$-I_a + I_b + i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$I_a - I_b = i_1 + i_2 + i_3 = v \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = v \cdot \frac{1}{R_p}$$

Despejando de la ecuación anterior, se obtiene el voltaje v del circuito

$$v = R_p \cdot (I_a - I_b) = (8 \Omega)(20 \text{ A} - 5 \text{ A}) = 120 \text{ V}$$

A partir de este resultado se calculan las corrientes en los resistores

$$i_1 = \frac{120 \text{ V}}{60 \Omega} = 2 \text{ A} \quad i_2 = \frac{120 \text{ V}}{15 \Omega} = 8 \text{ A} \quad i_3 = \frac{120 \text{ V}}{24 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Las potencias en cada elemento son

$$P_{R_1} = (120 \text{ V})(2 \text{ A}) = 240 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = (120 \text{ V})(8 \text{ A}) = 960 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = (120 \text{ V})(5 \text{ A}) = 600 \text{ W}$$

$$P_{I_a} = -(120 \text{ V})(20 \text{ A}) = -2400 \text{ W}$$

$$P_{I_b} = (120 \text{ V})(5 \text{ A}) = 600 \text{ W}$$

$$P_{\text{total abs}} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{I_b} = 240 \text{ W} + 960 \text{ W} + 600 \text{ W} + 600 \text{ W} = \mathbf{2400 \text{ W}}$$

$$P_{\text{total sum}} = P_{I_a} = \mathbf{-2400 \text{ W}}$$

2.4.2. Divisor de corriente

La configuración básica se muestra en la figura 2.15. Consiste de dos resistores conectados en paralelo con una fuente de corriente I , la cual se divide entre R_1 y R_2 .

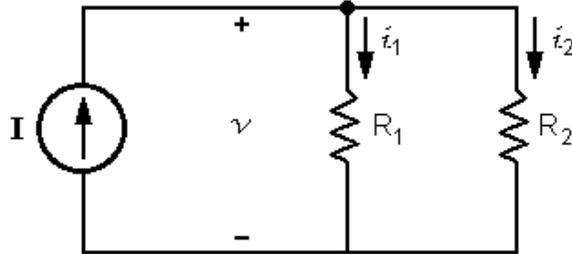


Figura 2.15. Circuito básico para la división de corriente.

Aplicando la ley de Ohm y la LCK se obtiene la corriente en cada uno de los resistores y su relación con la fuente de corriente I .

$$I = i_1 + i_2 = (G_1 + G_2)v$$

despejando v y sustituyendo en cada una de las corrientes

$$v = \frac{I}{G_1 + G_2} = \frac{I}{G_P}$$

$$i_1 = G_1 \cdot v = \frac{G_1}{G_P} \cdot I = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$i_2 = G_2 \cdot v = \frac{G_2}{G_P} \cdot I = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \cdot I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Se observa que la corriente que circula por cada resistor en paralelo, es directamente proporcional a su conductancia.

Ejemplo 2.6. Utilizando el método de divisor de corriente, verificar los resultados obtenidos para las corrientes de los elementos resistivos en el circuito de la figura 2.13.

Solución.

La corriente total que entra al arreglo resistivo es $I_t = I_a - I_b = 15$ A y usando el valor ya obtenido de $R_p = 8 \Omega$, se calculan las corrientes

$$i_1 = \frac{G_1}{G_P} \cdot I_t = \frac{1/R_1}{1/R_P} \cdot I_t = \frac{R_P}{R_1} \cdot I_t = \frac{8 \Omega}{60 \Omega} \cdot 15 \text{ A} = 2 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_P} \cdot I_t = \frac{1/R_2}{1/R_P} \cdot I_t = \frac{R_P}{R_2} \cdot I_t = \frac{8 \Omega}{15 \Omega} \cdot 15 \text{ A} = 8 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{G_3}{G_P} \cdot I_t = \frac{1/R_3}{1/R_P} \cdot I_t = \frac{R_P}{R_3} \cdot I_t = \frac{8 \Omega}{24 \Omega} \cdot 15 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

Nótese que con este método no es necesario calcular el voltaje en el circuito, y si se requiriera calcular la potencia en estos elementos, podría obtenerse a partir de $P = i^2 \cdot R$.

Para la solución de los siguientes ejemplos, se aplicarán las diversas herramientas de análisis vistas en este capítulo.

Ejemplo 2.7. Para el circuito que se muestra en la figura 2.16, determinar las potencias de la fuente de corriente I_2 y de la fuente de voltaje V_2 , e indicar si éstas son suministradas o absorbidas.

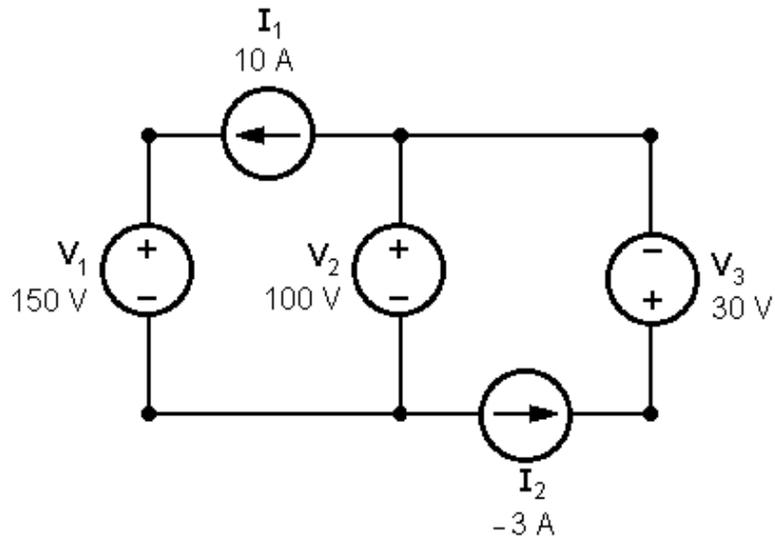


Figura 2.16. Circuito para el ejemplo 2.7.

Solución.

El cálculo de la potencia requiere determinar el voltaje en I_2 y la corriente en V_2 . Para ello, se etiquetan los nodos del circuito; se establecen voltajes en las fuentes de corriente, con polaridades arbitrarias, así como una corriente con dirección arbitraria en la fuente de voltaje V_2 (figura 2.17). Las trayectorias cerradas se recorren en el sentido del giro de las manecillas del reloj.

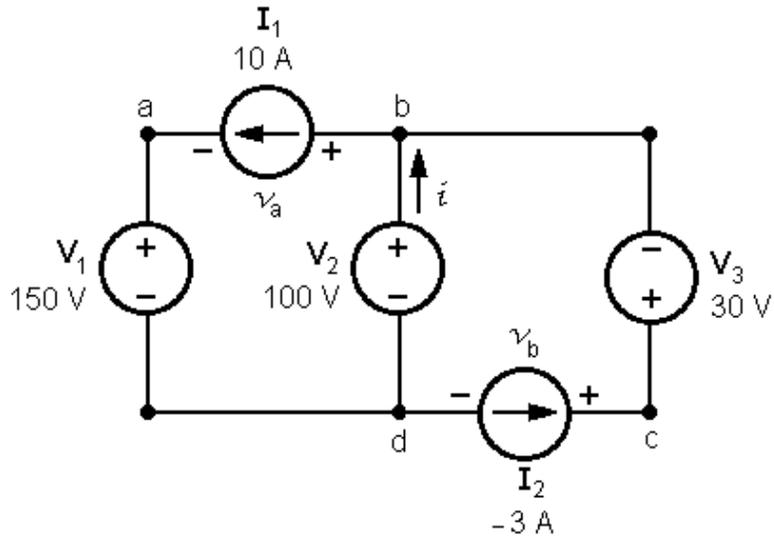


Figura 2.17. Circuito para la solución del ejemplo 2.7.

Aplicando la LCK en el nodo b, se tiene

$$I_1 - I_2 - i = 0 \qquad i = I_1 - I_2 = 10 \text{ A} - (-3 \text{ A}) = 13 \text{ A}$$

Es importante observar que, si la corriente i se hubiese establecido en el sentido de b a d , el resultado hubiese sido de -13 A , lo que es equivalente al valor que se obtuvo con el sentido propuesto en la solución. Esto se puede demostrar aplicando la LCK en el nodo de la figura 2.18.

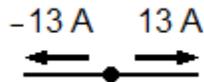


Figura 2.18. Esquema de los posibles sentidos de una misma corriente.

$$-13 \text{ A} + 13 \text{ A} = 0 \quad \therefore \quad 13 \text{ A} = 13 \text{ A}$$

La potencia en V_2 es

$$P_{V_2} = -V_2 \cdot i = -(100 \text{ V})(13 \text{ A}) = -\mathbf{1300 \text{ W}}$$
 (suministrada).

Aplicando la LVK en la trayectoria **bcdb**

$$-V_3 + v_b - V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_b = V_2 + V_3 = 100 \text{ V} + 30 \text{ V} = 130 \text{ V}$$

En el caso de que se hubiese elegido una polaridad opuesta para v_b , éste sería de -130 V , dando un voltaje total entre los nodos b y d de -100 V con la polaridad de v_b ; esto se esquematiza en la figura 2.19.

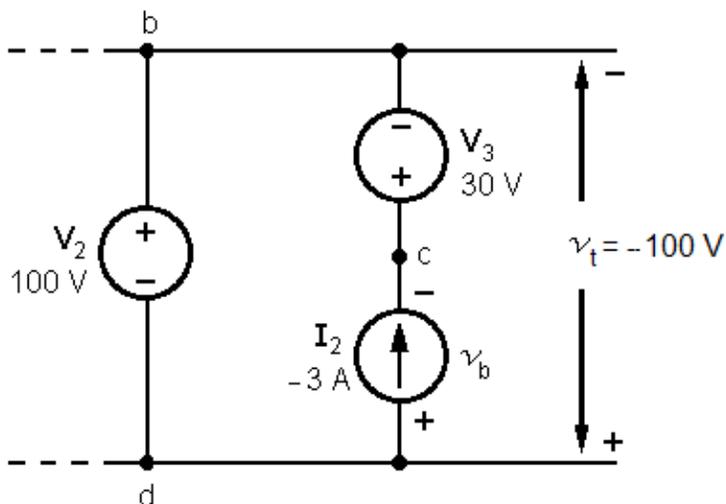


Figura 2.19. Circuito para la determinación del voltaje v_b con polaridad invertida.

Nótese que el voltaje entre los nodos b y d establecido por la fuente de voltaje V_2 es equivalente al señalado por v_t con la polaridad indicada, lo que puede demostrarse al aplicar la LVK

$$-V_2 - v_t = 0 \Rightarrow V_2 = -v_t \Rightarrow 100 \text{ V} = -(-100 \text{ V}) \therefore 100 \text{ V} = 100 \text{ V}$$

La potencia en I_2 es

$$P_{I_2} = -v_b \cdot I_2 = -(130 \text{ V})(-3 \text{ A}) = \mathbf{390 \text{ W}}$$
 (absorbida).

Ejemplo 2.8. Determinar la potencia total disipada en el circuito de la figura 2.20.

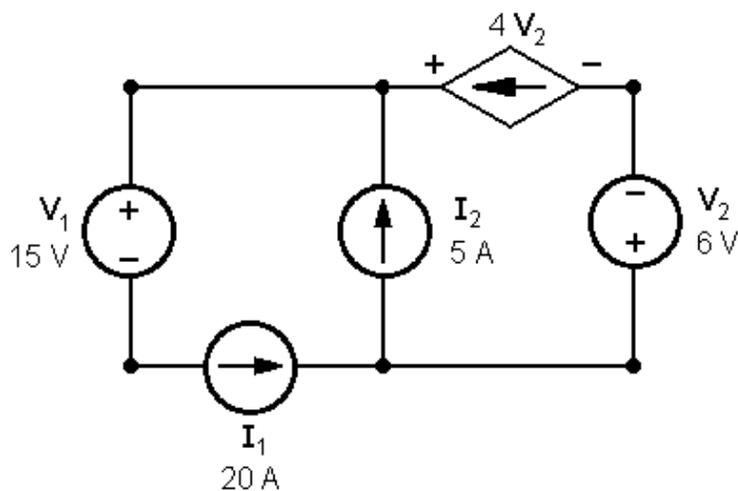


Figura 2.20. Circuito para el ejemplo 2.8.

Solución.

En virtud de que todas las corrientes en el circuito son conocidas, se debe verificar que se cumple la LCK en el circuito. En este caso, se analiza el nodo donde convergen I_2 y la fuente controlada por voltaje.

$$I_1 - I_2 - 4V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 20 \text{ A} - 5 \text{ A} - \left(4 \frac{\text{A}}{\text{V}}\right)(6 \text{ V}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -9 \text{ A} \neq 0$$

Con base en este resultado, se concluye que la LCK no se cumple y la construcción de este circuito no es posible, por lo que el cálculo de las potencias no tiene sentido.

Ejemplo 2.9. Determinar la potencia total disipada en el circuito de la figura 2.21.

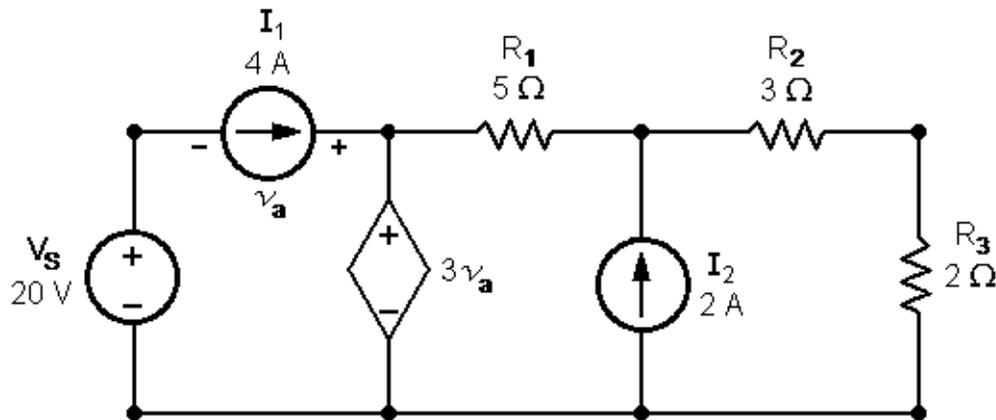


Figura 2.21. Circuito para el ejemplo 2.9.

Solución.

Se requiere determinar la corriente o voltaje, según corresponda, en cada uno de los elementos para determinar su potencia. Para ello, observamos primero que los resistores R_2 y R_3 están conectados en serie por lo que se sustituyen por un resistor equivalente ($R_{eq} = 5 \Omega$), como se muestra en la figura 2.22. En ésta se indican los nodos esenciales así como variables de voltaje y corriente, con su polaridad y sentido, elegidos de acuerdo a la convención de signo pasivo.

Obsérvese que las conexiones en la parte inferior del circuito forman un sólo nodo.

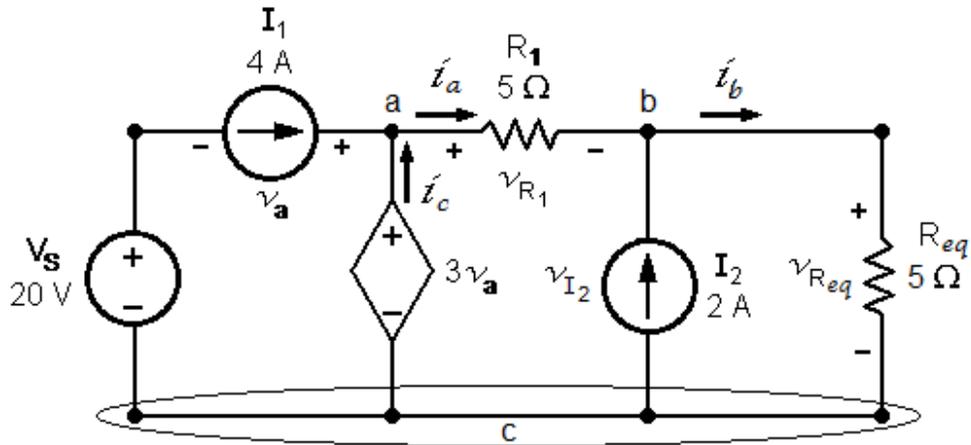


Figura 2.22. Circuito para la solución del ejemplo 2.9.

Aplicando la LCK en cada uno de los nodos indicados

Nodo a:
$$-I_1 - i_c + i_a = 0$$

Nodo b:
$$-i_a - I_2 + i_b = 0$$

Nodo c:
$$I_1 + I_2 - i_b + i_c = 0$$

Despejando i_a de las dos primeras ecuaciones e igualando, se obtiene

$$i_b - I_2 = I_1 + i_c$$

$$i_b - i_c = I_1 + I_2$$

lo que al sustituir en la ecuación del nodo c

$$I_1 + I_2 - (i_b - i_c) = I_1 + I_2 - (I_1 + I_2) = 0$$

elimina las variables i_b e i_c , por lo que se observa que en este caso no es conveniente este procedimiento.

Por el contrario, al aplicar la LVK a la trayectoria **abca**

$$v_{R_1} + v_{I_2} - 3v_a = 0$$

y sustituir la ley de Ohm, se tiene

$$i_a R_1 + i_b R_{eq} - 3v_a = 0$$

Nótese que esta ecuación se obtuvo partiendo del hecho de que la fuente de corriente I_2 está conectada en paralelo con el resistor R_{eq} , por lo que sus voltajes son iguales, es decir $v_{I_2} = v_{R_{eq}}$. Despejando i_b de la ecuación del nodo b, sustituyendo en la ecuación anterior y despejando ahora i_a , se tiene

$$i_a = \frac{3v_a - I_2 R_{eq}}{R_1 + R_{eq}}$$

Por otro lado, aplicando la LVK a la trayectoria **aca**, se obtiene v_a

$$3v_a - V_S - v_a = 0 \quad \Rightarrow \quad v_a = \frac{V_S}{2} = \frac{20 \text{ V}}{2} = 10 \text{ V}$$

Sustituyendo los valores en la expresión de i_a

$$i_a = \frac{3 \cdot (10 \text{ V}) - (2 \text{ A})(5 \Omega)}{5 \Omega + 5 \Omega} = 2 \text{ A}$$

y calculando las otras corrientes

$$i_c = i_a - I_1 = 2 \text{ A} - 4 \text{ A} = -2 \text{ A}$$

$$i_b = I_2 + i_a = 2 \text{ A} + 2 \text{ A} = 4 \text{ A}$$

Se obtienen los valores de las potencias en cada uno de los elementos

$$P_{V_S} = -(20 \text{ V})(4 \text{ A}) = -80 \text{ W}$$

$$P_{R_1} = (10 \text{ V})(2 \text{ A}) = 20 \text{ W}$$

$$P_{I_1} = -(10 \text{ V})(4 \text{ A}) = -40 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = (12 \text{ V})(4 \text{ A}) = 48 \text{ W}$$

$$P_{I_2} = -(20 \text{ V})(2 \text{ A}) = -40 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = (8 \text{ V})(4 \text{ A}) = 32 \text{ W}$$

$$P_{3v_a} = -(30 \text{ V})(-2 \text{ A}) = 60 \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia total disipada en el circuito es de **160 W**.

Ejemplo 2.10. Para el circuito de la figura 2.23, determinar la potencia de la fuente de corriente I .

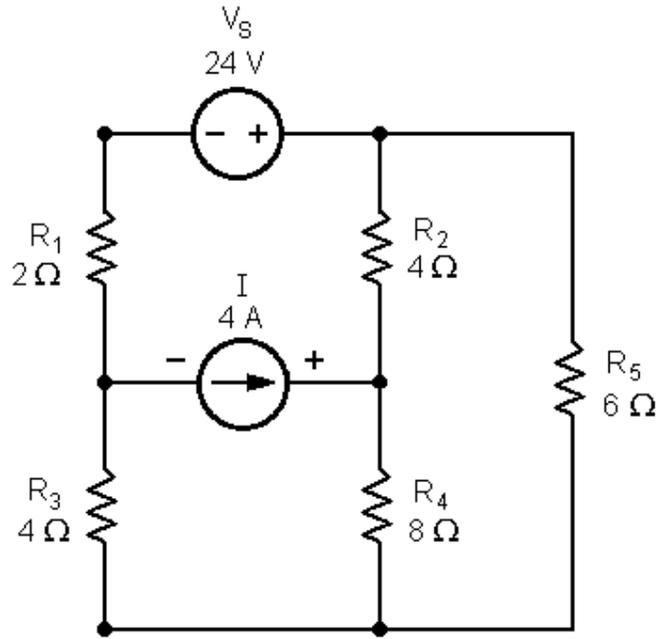


Figura 2.23. Circuito para el ejemplo 2.10.

Solución.

En la figura 2.24 se indican las corrientes de rama, así como las polaridades de los voltajes en los resistores, las cuales se establecen siguiendo la convención de signo pasivo.

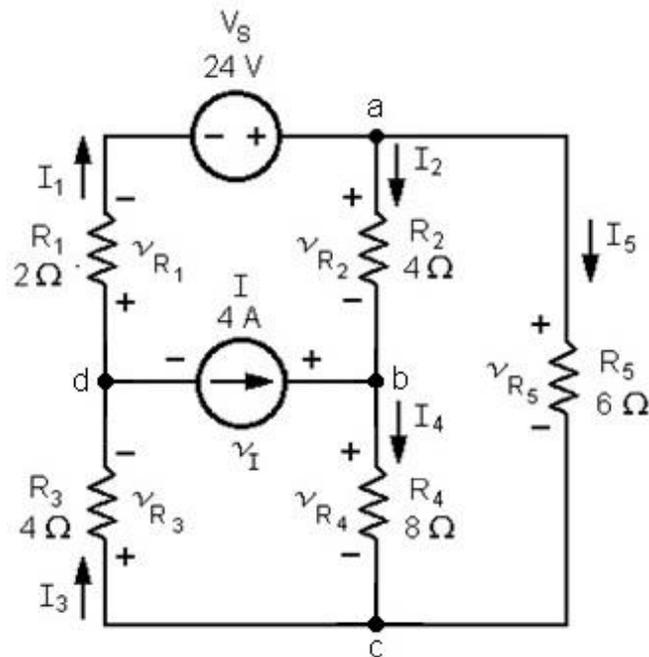


Figura 2.24. Circuito para la solución del ejemplo 2.10.

Aplicando la LK, recorriendo las mallas del circuito en el sentido del giro de las manecillas del reloj, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\text{trayectoria } \mathbf{abda}: \quad v_{R_2} + v_I + v_{R_1} - V_s = 0 \quad (2.50)$$

$$\text{trayectoria } \mathbf{bcdb}: \quad v_{R_4} + v_{R_3} - v_I = 0 \quad (2.51)$$

$$\text{trayectoria } \mathbf{acba}: \quad v_{R_5} - v_{R_4} - v_{R_2} = 0 \quad (2.52)$$

Sumando 2.50 y 2.51

$$v_{R_1} + v_{R_2} + v_{R_3} + v_{R_4} = V_s \quad (2.53)$$

Sustituyendo la ley de Ohm en 2.52 y 2.53

$$-I_2 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 = 0 \quad (2.54)$$

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = V_s \quad (2.55)$$

Aplicando la LCK a los nodos a, b y d, se obtiene

$$\text{Nodo a:} \quad I_5 = I_1 - I_2 \quad (2.56)$$

$$\text{Nodo b:} \quad I_4 = I_2 + I \quad (2.57)$$

$$\text{Nodo d:} \quad I_3 = I_1 + I \quad (2.58)$$

Sustituyendo las corrientes I_3 , I_4 e I_5 , en las ecuaciones 2.54 y 2.55, y agrupando términos

$$R_5 \cdot I_1 - (R_2 + R_4 + R_5) \cdot I_2 = R_4 \cdot I \quad (2.59)$$

$$(R_1 + R_3) \cdot I_1 + (R_2 + R_4) \cdot I_2 = V_s - (R_3 + R_4) \cdot I \quad (2.60)$$

Al sustituir los valores conocidos y resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene

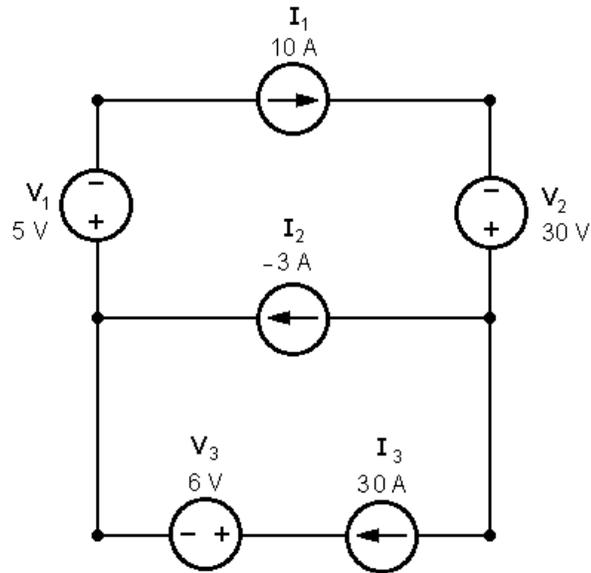
$$I_1 = -\frac{4}{15} \text{ A} \quad \text{e} \quad I_2 = -\frac{28}{15} \text{ A}$$

Despejando v_I de la ecuación 2.50 y sustituyendo valores

$$v_I = 32 \text{ V} \quad \therefore \quad \mathbf{P_I = -(32 \text{ V})(4 \text{ A}) = -128 \text{ W}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

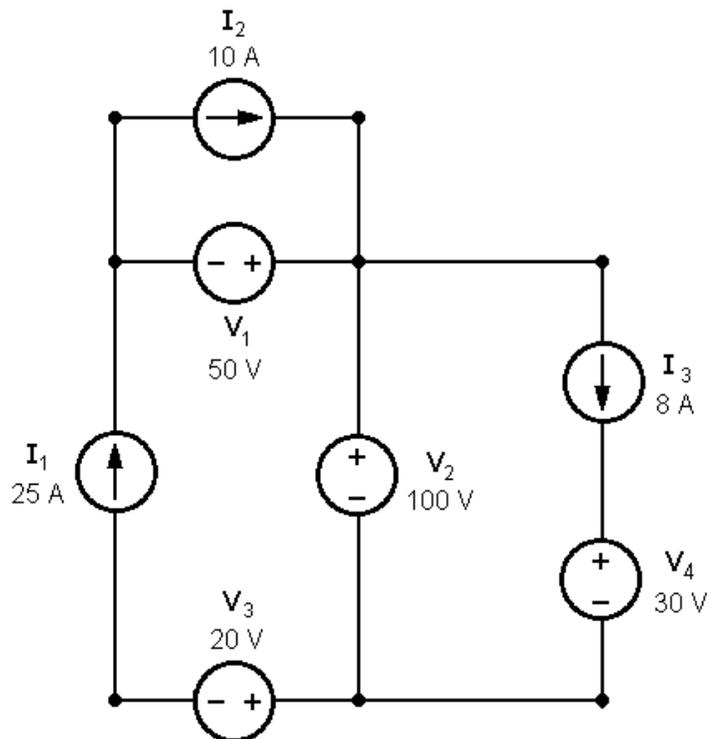
2.1. Determine la potencia total del circuito.



Respuesta:

Se viola la ley de corrientes de Kirchhoff, por lo que el circuito es inviable.

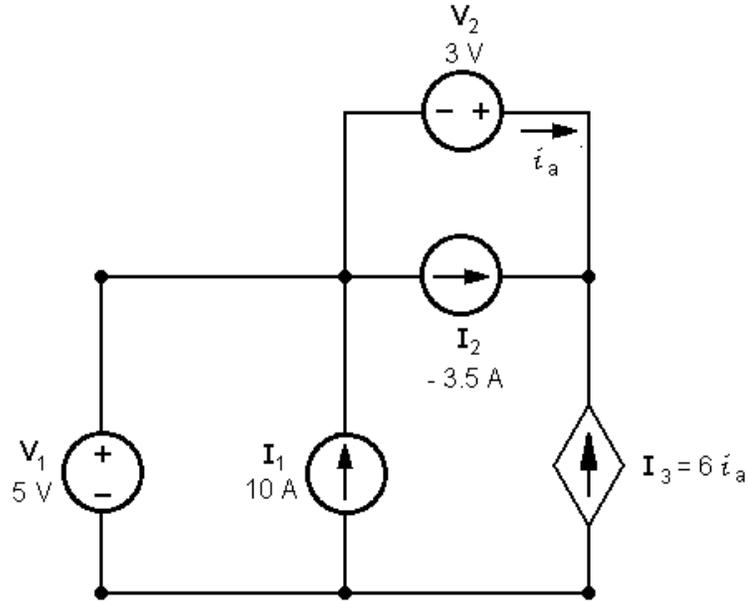
2.2. Calcule la potencia total disipada en el circuito.



Respuesta:

$$P_{total\ disipada} = 3000\ W$$

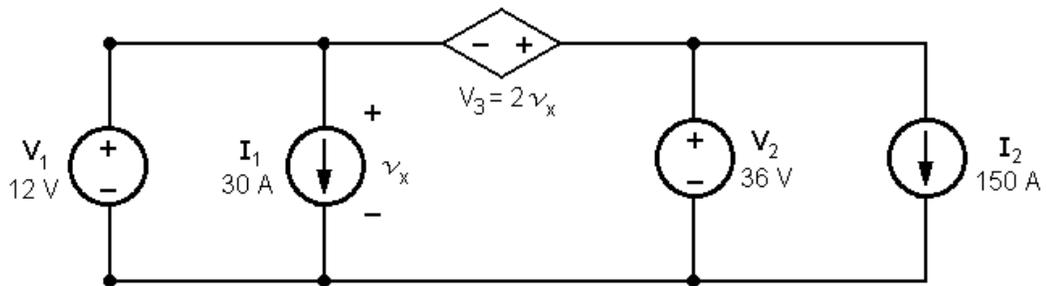
2.3. Determine la potencia total absorbida en el circuito, así como la potencia total suministrada.



Respuesta:

$$P_{total\ suministrada} = -75.5\ W$$

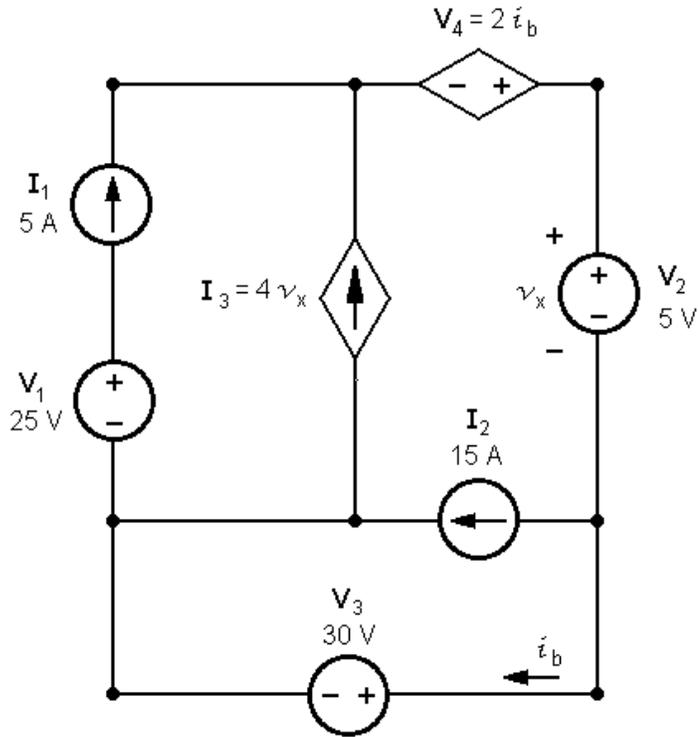
2.4. Calcule la potencia de la fuente V_2 .



Respuesta:

$$P_{V_2} = -3600\ W$$

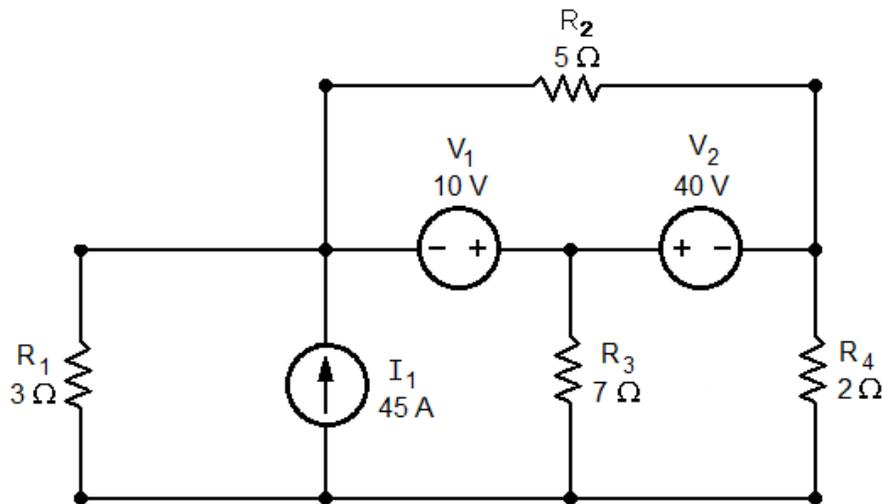
2.5. ¿Cuál es la potencia total suministrada en el siguiente circuito?



Respuesta:

$$P_{total\ suministrada} = 425\ W$$

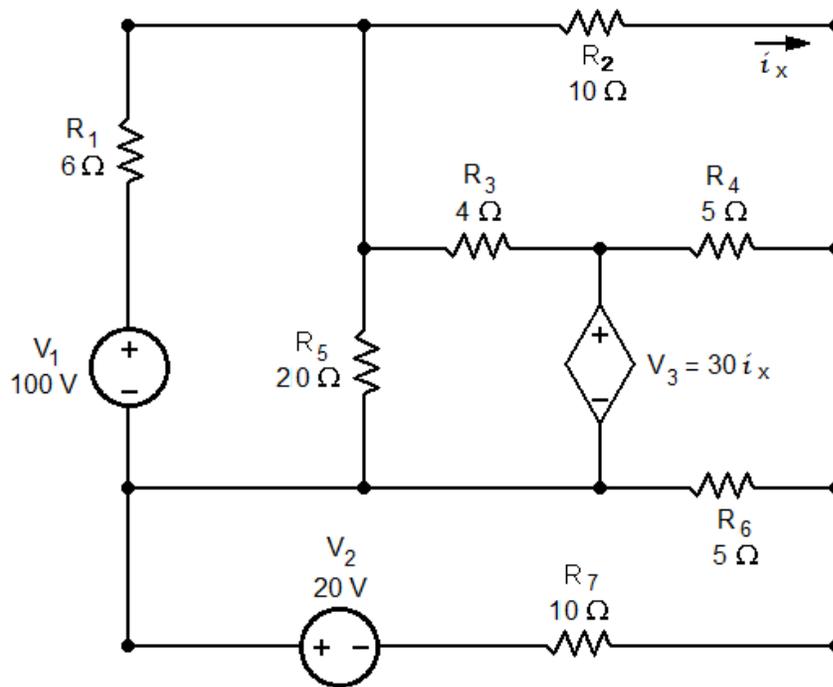
2.6. Calcule la potencia total absorbida en el circuito.



Respuesta:

$$P_{total\ absorbida} = 2890\ W$$

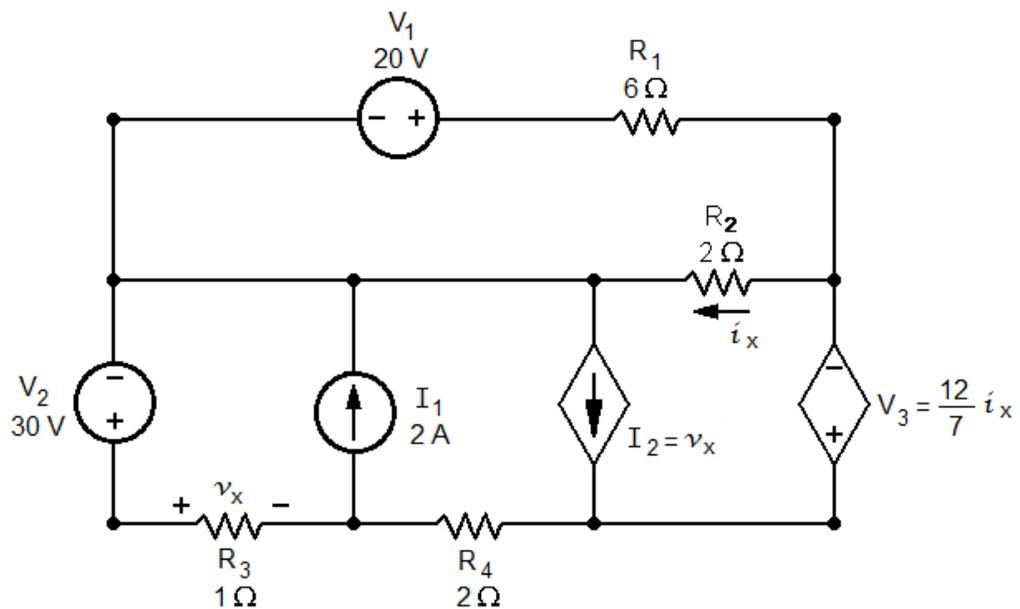
2.7. Determine la potencia de la fuente V_3 . Dicha fuente ¿suministra o absorbe potencia?



Respuesta:

$P_{V_3} = 60 \text{ W}$; la fuente V_3 absorbe potencia.

2.8. Calcule la potencia total suministrada y la potencia total absorbida en el circuito.

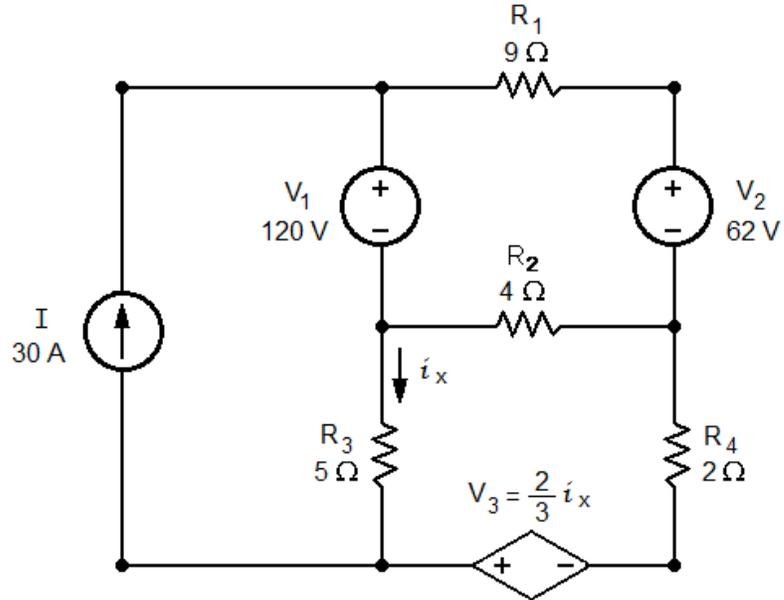


Respuesta:

$$P_{total\ suministrada} = -228\text{ W}$$

$$P_{total\ absorbida} = 228\text{ W}$$

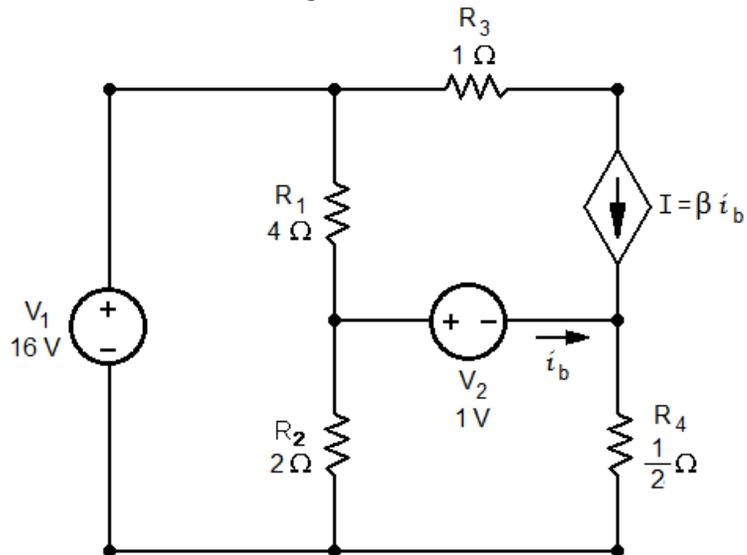
2.9. Determine la potencia en la fuente V_3 .



Respuesta:

$$P_{V_3} = -144\text{ W}$$

2.10. Determine la potencia en el resistor R_3 .



Respuesta:

$$P_{R_3} = 25\text{ W}$$

Capítulo 3. Análisis de mallas y de nodos

3.1. Análisis de mallas

Este método de análisis utiliza la ley de voltajes de Kirchhoff para determinar las corrientes en el circuito, y sólo puede ser aplicado en circuitos planos, es decir, aquellos que pueden dibujarse en una superficie plana, de forma que no se cruzan entre sí elementos eléctricos o cables de conexión (figura 3.1a). En un circuito no plano, aunque éste se intente dibujar de otra manera, no se puede evitar el cruce de los cables, tal como se indica con el óvalo en la figura 3.1b.

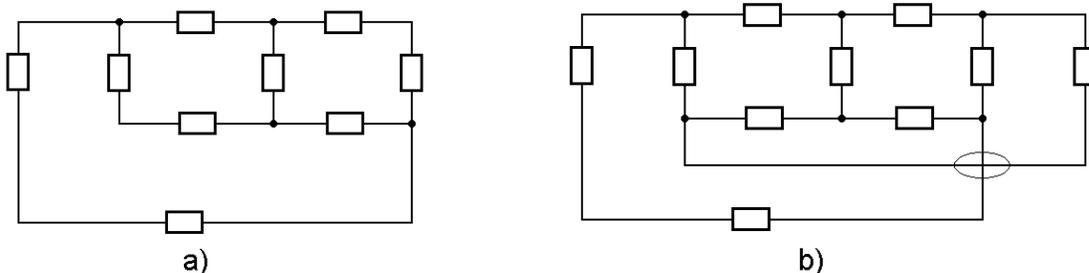


Figura 3.1. a) Circuito plano. b) Circuito no plano.

Para aplicar esta metodología, es necesario definir lo que es una **mall**a, la cual es un camino (o trayectoria) cerrado que no contiene otros caminos cerrados en su interior.

Los pasos a seguir para realizar el análisis de malla son:

1. Identificar las mallas del circuito.
2. Establecer en cada malla una corriente que circula a través de su perímetro, y que es conocida como *corriente de malla*, dibujándola como una flecha curva casi cerrada al interior de la malla correspondiente, e identificándola con la letra i y un subíndice que puede ser alfabético o numérico. Por simplicidad, todas las corrientes de malla del circuito se establecen en el sentido del giro de las manecillas del reloj.
3. Para establecer la ecuación de cada malla, se aplican la ley de voltajes de Kirchhoff y la ley de Ohm. Cuando un elemento forma parte de dos mallas, la corriente neta a través de él es la suma algebraica de las dos corrientes de malla respectivas. Cuando se establece una ecuación de malla, el voltaje en los elementos que no tengan indicada una polaridad, ésta se considera de manera que la corriente de malla cumpla con la convención del signo pasivo en la malla analizada, es decir, que circule de un potencial mayor a uno menor.

4. Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante, para obtener el valor de cada una de las corrientes de malla.

Ejemplo 3.1. Determinar las corrientes de malla del circuito de la figura 3.2.

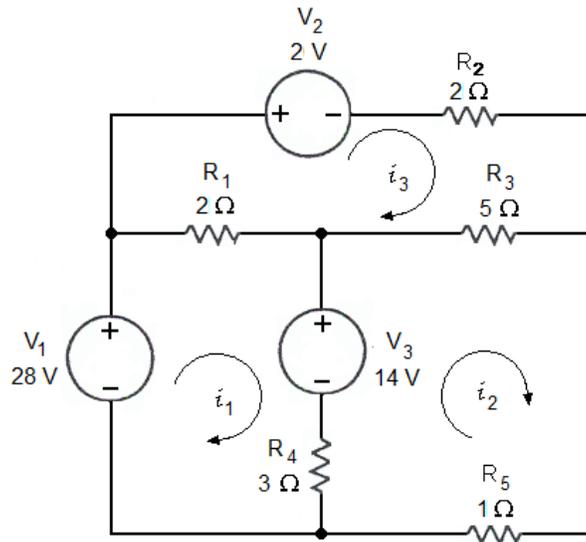


Figura 3.2. Circuito para el ejemplo 3.1.

Solución.

En la figura 3.2, ya se ha identificado que el circuito está formado por tres mallas, y se ha establecido en cada una de ellas su corriente de malla. Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en cada malla, se tiene

Malla 1:
$$-V_1 + v_{R_1} + V_3 + v_{R_4} = 0$$

Malla 2:
$$-V_3 + v_{R_3} + v_{R_5} + v_{R_4} = 0$$

Malla 3:
$$V_2 + v_{R_2} + v_{R_3} + v_{R_1} = 0$$

Aplicando la ley de Ohm para obtener los voltajes en los resistores

Malla 1:
$$-V_1 + R_1(i_1 - i_3) + V_3 + R_4(i_1 - i_2) = 0$$

Nótese que la corriente neta en R_1 es la contribución de dos corrientes de malla (i_1 e i_3) que, sobre dicho elemento, circulan en sentidos opuestos. Lo mismo sucede con las corrientes i_1 e i_2 para R_4 .

Malla 2:
$$-V_3 + R_3(i_2 - i_3) + R_5 i_2 + R_4(i_2 - i_1) = 0$$

Malla 3:
$$V_2 + R_2 i_3 + R_3(i_3 - i_2) + R_1(i_3 - i_1) = 0$$

Agrupando en función de las variables de corriente y reordenando los términos en cada una de las ecuaciones, se tiene

$$(R_1 + R_4)i_1 - R_4 i_2 - R_1 i_3 = V_1 - V_3 \quad (3.1)$$

$$-R_4 i_1 + (R_3 + R_4 + R_5)i_2 - R_3 i_3 = V_3 \quad (3.2)$$

$$-R_1 i_1 - R_3 i_2 + (R_1 + R_2 + R_3)i_3 = -V_2 \quad (3.3)$$

Al sustituir los valores numéricos, el sistema de ecuaciones es

$$5i_1 - 3i_2 - 2i_3 = 14$$

$$-3i_1 + 9i_2 - 5i_3 = 14$$

$$-2i_1 - 5i_2 + 9i_3 = -2$$

Resolviendo, se obtiene

$$i_1 = 12 \text{ A} \quad i_2 = 10 \text{ A} \quad i_3 = 8 \text{ A}$$

Nótese que las ecuaciones 3.1 a 3.3, pueden obtenerse por inspección del circuito. Por ejemplo, para la ecuación 3.1, se establecen los voltajes en los resistores de la malla por la ley de Ohm, como si no hubiera mallas adyacentes, de tal manera que los voltajes en los resistores serían $R_1 i_1 + R_4 i_1$, que puede expresarse como $(R_1 + R_4)i_1$. Sin embargo, al existir las mallas 2 y 3, cada una de sus corrientes de malla circula en sentido contrario a i_1 , por lo que producen voltajes opuestos sobre R_1 y R_4 , de forma $-R_4 i_2 - R_1 i_3$. Ambas contribuciones se suman, quedando $(R_1 + R_4)i_1 - R_4 i_2 - R_1 i_3$. Para completar la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla 1, se añade la suma algebraica de los voltajes que proporcionan las fuentes, respetando la polaridad de cada una de ellas cuando se recorren en el sentido de la corriente i_1 . Es importante mencionar que los voltajes de fuente se toman en cuenta una sola vez en la malla que se está inspeccionando. De esta manera, la ecuación 3.1 queda, por inspección

$$(R_1 + R_4)i_1 - R_4 i_2 - R_1 i_3 - V_1 + V_3 = 0$$

Para obtener las ecuaciones 3.2 y 3.3, se realiza el mismo procedimiento, con sus correspondientes corrientes de malla.

Ejemplo 3.2. Determinar las corrientes de malla del circuito de la figura 3.3.

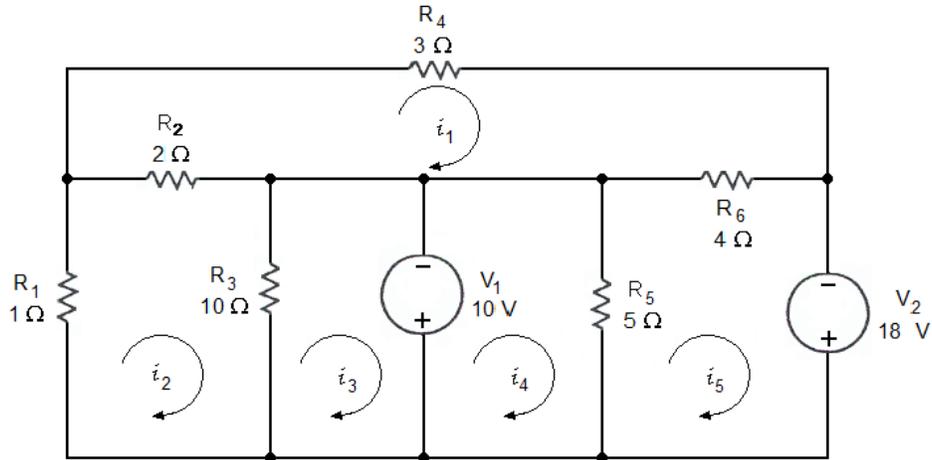


Figura 3.3. Circuito para el ejemplo 3.2.

Solución.

Por inspección se obtienen las siguientes ecuaciones.

Malla 1:
$$i_1(R_2 + R_4 + R_6) - i_2R_2 - i_5R_6 = 0 \quad (3.4)$$

Malla 2:
$$i_2(R_1 + R_2 + R_3) - i_1R_2 - i_3R_3 = 0 \quad (3.5)$$

Malla 3:
$$i_3R_3 - i_2R_3 - V_1 = 0 \quad (3.6)$$

Malla 4:
$$i_4R_5 - i_5R_5 + V_1 = 0 \quad (3.7)$$

Malla 5:
$$i_5(R_5 + R_6) - i_4R_5 - i_1R_6 - V_2 = 0 \quad (3.8)$$

Sumando 3.5 y 3.6

$$i_2(R_1 + R_2) - i_1R_2 - V_1 = 0 \quad (3.9)$$

Sumando 3.7 y 3.8

$$i_5R_6 - i_1R_6 + V_1 - V_2 = 0 \quad (3.10)$$

Sumando 3.4 y 3.10

$$i_1(R_2 + R_4) - i_2R_2 + V_1 - V_2 = 0 \quad (3.11)$$

Reordenando los términos en 3.9 y 3.11, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$-R_2i_1 + (R_1 + R_2)i_2 = V_1$$

$$(R_2 + R_4)i_1 - R_2i_2 = -V_1 + V_2$$

Nótese que las corrientes i_3 , i_4 e i_5 quedan eliminadas de este sistema, al igual que los resistores R_3 , R_5 y R_6 .

Un método para determinar el menor número de mallas con el que se puede resolver el circuito, es sustituir temporalmente las fuentes de voltaje por un corto circuito (figura 3.4), y observar si algún elemento queda anulado; si es así, tal elemento se elimina del circuito y se restituye la fuente de voltaje correspondiente.

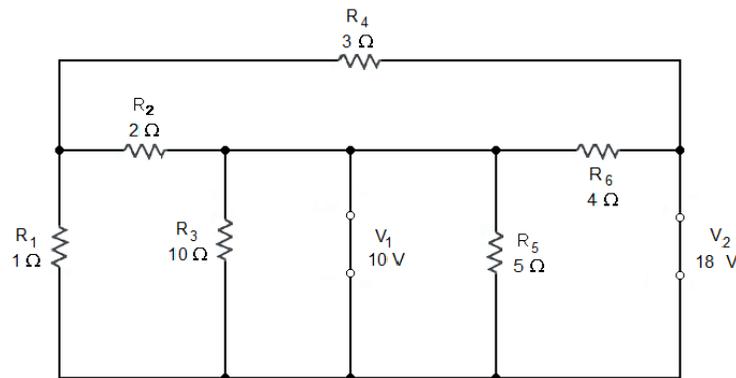


Figura 3.4. Diagrama para determinar el número mínimo de mallas del ejemplo 3.2.

Como se puede observar, los resistores R_3 , R_5 y R_6 se anulan con este corto circuito y, al restituir las fuentes V_1 y V_2 , el circuito queda como se muestra en la figura 3.5

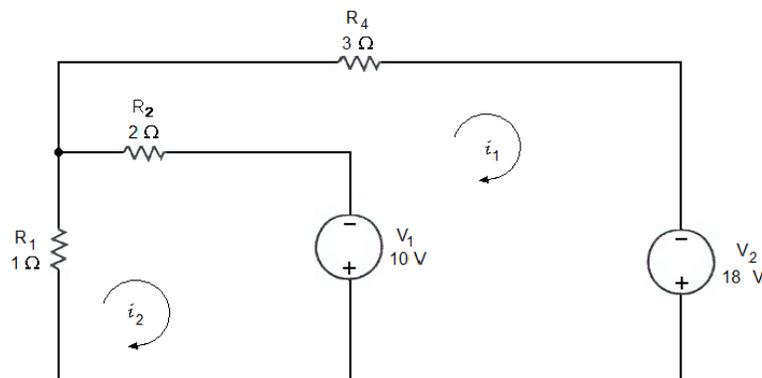


Figura 3.5. Diagrama en el que se muestran las mallas a analizar en el ejemplo 3.2.

Nótese que sólo hay que analizar dos mallas, cuyas ecuaciones son

$$-R_2i_1 + (R_1 + R_2)i_2 = V_1$$

$$(R_2 + R_4)i_1 - R_2i_2 = -V_1 + V_2$$

Las cuales corresponden a las obtenidas cuando se consideraron todas las mallas. Finalmente, al sustituir los valores numéricos y resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene

$$i_1 = 4 \text{ A} \qquad i_2 = 6 \text{ A}$$

Ejemplo 3.3. Determine las corrientes de malla indicadas en el circuito de la figura 3.6.

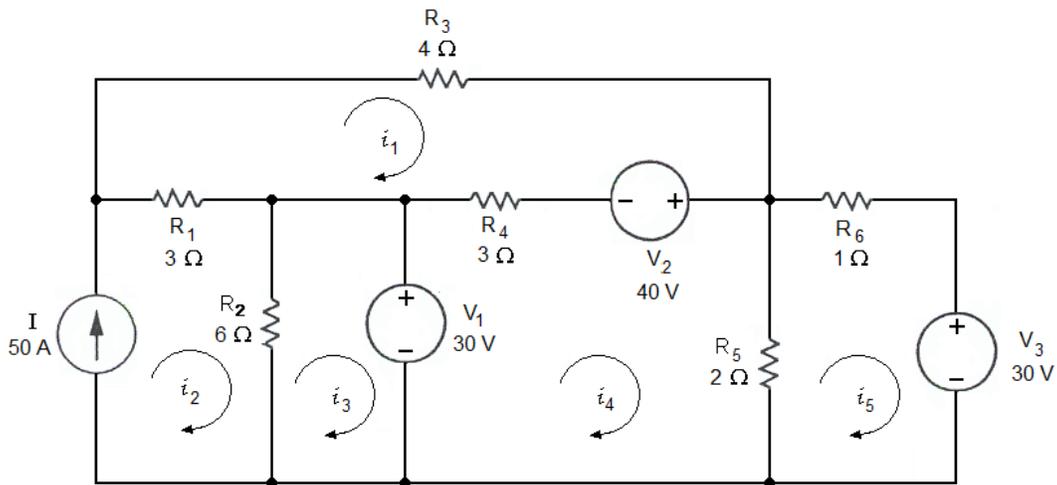


Figura 3.6. Circuito para el ejemplo 3.3.

Solución.

Al sustituir cada una de las fuentes de voltaje por un corto circuito, se observa que el resistor R_2 se anula. En el caso de la fuente de corriente, ésta se sustituye por un circuito abierto, lo que permite observar que para resolver el circuito sólo se requiere establecer tres ecuaciones de malla para determinar i_1 , i_4 e i_5 , tal como se muestra en la figura 3.7.

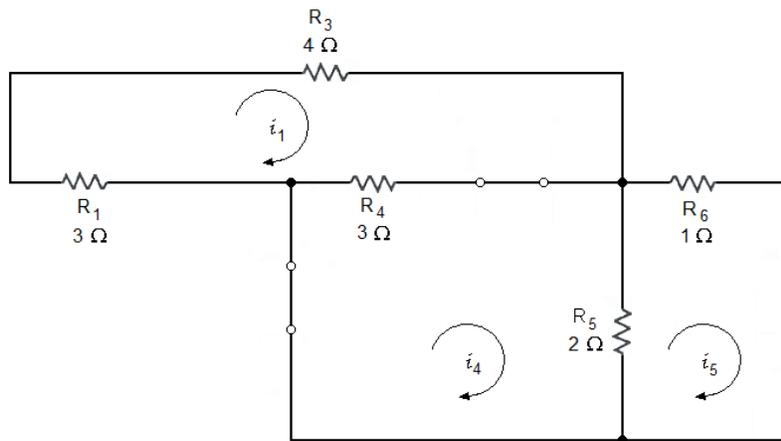


Figura 3.7. Diagrama para determinar el número mínimo de mallas del ejemplo 3.3.

Al restituir las fuentes del circuito, se observa también que la corriente de malla i_2 , es la única corriente que circula por la rama donde está la fuente de corriente I , por lo tanto se tiene que $i_2 = I = 50\text{A}$, y el circuito a resolver es el que se muestra en la figura 3.8.

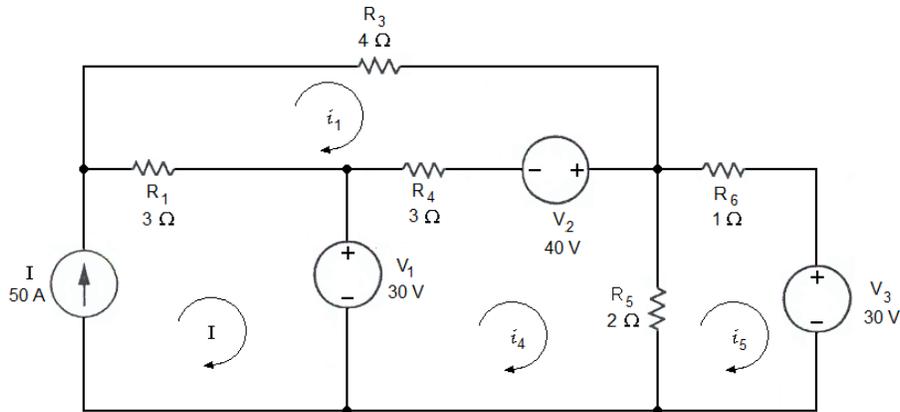


Figura 3.8. Diagrama en el que se muestran las mallas a analizar en el ejemplo 3.3.

Malla 1: $i_1(R_3 + R_4 + R_1) - i_4R_4 - IR_1 + V_2 = 0$

Malla 4: $i_4(R_4 + R_5) - i_1R_4 - i_5R_5 - V_2 - V_1 = 0$

Malla 5: $i_5(R_6 + R_5) - i_4R_5 + V_3 = 0$

Sustituyendo los valores de los elementos del circuito y ordenando términos

$$10i_1 - 3i_4 = 110$$

$$-3i_1 + 5i_4 - 2i_5 = 70$$

$$-2i_4 + 3i_5 = -30$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$i_1 = 20\text{ A} \quad i_4 = 30\text{ A} \quad i_5 = 10\text{ A}$$

La corriente i_3 de la figura 3.6, se determina tomando en cuenta que el resistor R_2 tiene el mismo voltaje que la fuente V_1 , debido a que están conectadas en paralelo; por lo tanto

$$v_{R_2} = (I - i_3)R_2 = V_1$$

despejando i_3 de la ecuación anterior y sustituyendo valores numéricos se tiene

$$i_3 = I - \frac{V_1}{R_2} = 50\text{ A} - \frac{30\text{ V}}{6\ \Omega} = 45\text{ A}$$

Ejemplo 3.4. Determine la potencia en el resistor R_5 de la figura 3.9.

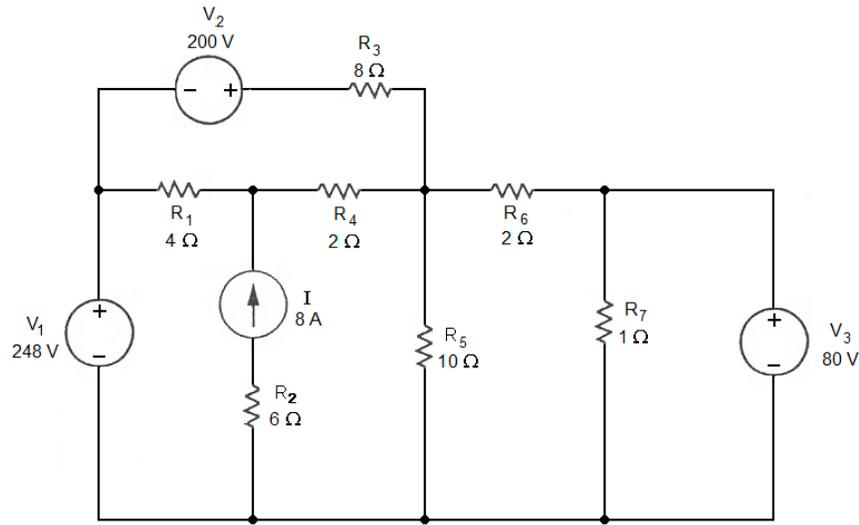


Figura 3.9. Circuito para el ejemplo 3.4.

Solución.

Para determinar la potencia en R_5 , es necesario calcular ya sea la corriente o el voltaje a través de este elemento. En este caso, el análisis de mallas puede realizarse de dos maneras distintas, que se describen a continuación.

Método 1. Asignación de un voltaje auxiliar en las fuentes independientes de corriente.

Se identifican las mallas, se asignan las corrientes de malla y un voltaje en las terminales de la fuente de corriente, como se muestra en la figura 3.10.

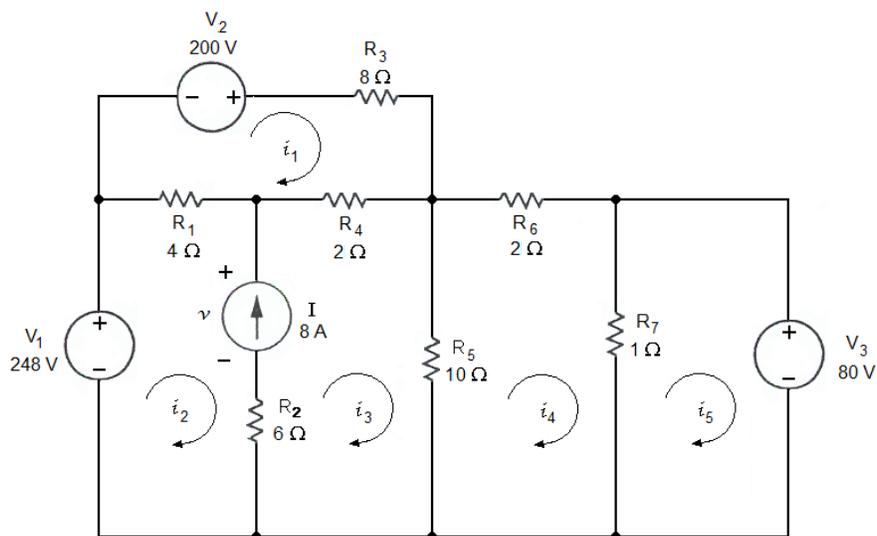


Figura 3.10. Circuito para la solución del ejemplo 3.4.

Es importante aclarar que el análisis en este momento se enfocará en la parte del circuito que contiene la fuente de corriente.

$$\text{Malla 2:} \quad i_2(R_1 + R_2) - i_1R_1 - i_3R_2 + v - V_1 = 0$$

$$\text{Malla 3:} \quad i_3(R_2 + R_4 + R_5) - i_1R_4 - i_2R_2 - i_4R_5 - v = 0$$

Sumando ambas ecuaciones, se obtiene una sola ecuación de malla de la forma

$$i_2R_1 + i_3(R_4 + R_5) - i_1R_1 - i_1R_4 - i_4R_5 - V_1 = 0$$

en donde se observa que esta ecuación ya no contiene la variable de voltaje v de la fuente de corriente, ni el resistor R_2 .

Por otro lado, en la rama que contiene la fuente I , la corriente neta es la suma algebraica de las corrientes de malla i_2 e i_3 , teniéndose

$$i_3 - i_2 = I$$

que, en conjunto con las ecuaciones de las mallas 1, 4 y 5, completan el sistema de ecuaciones para la solución del circuito. Nótese que la corriente i_3 se considera positiva debido a que circula en el mismo sentido que la corriente de la fuente I .

Así, en el caso de que haya fuentes de corriente en un circuito eléctrico y sea resuelto por análisis de mallas, siempre se asignará una variable de voltaje a cada una de estas fuentes.

Método 2. Uso del concepto de supermalla.

El circuito se puede resolver sin tener que introducir una variable de voltaje en la fuente de corriente (ya sea independiente o dependiente), si se emplea una *supermalla*, la cual consiste en eliminar mentalmente la fuente de corriente del circuito, y considerar únicamente el perímetro de las dos mallas que contienen a dicha fuente. Para establecer la ecuación de la supermalla se consideran las corrientes de las dos mallas implicadas (figura 3.11).

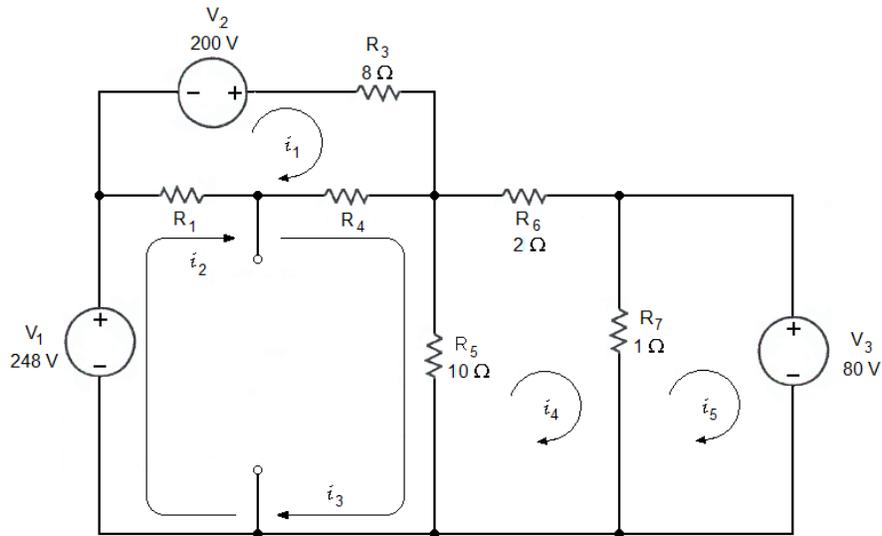


Figura 3.11. Circuito que esquematiza el concepto de supermalla.

Supermalla:

$$\underbrace{-V_1 + i_2 R_1 - i_1 R_1 + i_3 (R_4 + R_5)}_{\text{Malla 2}} - \underbrace{i_1 R_4 - i_4 R_5}_{\text{Malla 3}} = 0$$

Nótese que los primeros tres términos de esta ecuación corresponden al lado izquierdo de la supermalla, originalmente malla 2, y los tres últimos corresponden al lado derecho de la supermalla, que originalmente es la malla 3. Y, como en el método 1, el sistema de ecuaciones se completa con la relación de corrientes en la rama de la fuente I

$$i_3 - i_2 = I$$

Por otro lado

Malla 1 : $i_1 (R_3 + R_4 + R_1) - i_2 R_1 - i_3 R_4 - V_2 = 0$

En el caso de las mallas 4 y 5, éstas se reducen utilizando la metodología explicada en el ejemplo 3.2, quedando

Malla 4: $i_4 (R_5 + R_6) - i_3 R_5 + V_3 = 0$

Sustituyendo los valores numéricos de los elementos del circuito

Supermalla: $-3i_1 + 2i_2 + 6i_3 - 5i_4 = 124$

Relación de corrientes de la supermalla: $-i_2 + i_3 = 8$

Malla 1: $7i_1 - 2i_2 - i_3 = 100$

Malla 4:

$$-5i_3 + 6i_4 = -40$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$i_1 = 36 \text{ A}$$

$$i_2 = 48 \text{ A}$$

$$i_3 = 56 \text{ A}$$

$$i_4 = 40 \text{ A}$$

La potencia en R_5 es

$$P_{R_5} = (i_3 - i_4)^2 \cdot R_5 = (56 \text{ A} - 40 \text{ A})^2 (10 \Omega) = \mathbf{2560 \text{ W}}$$

Ejemplo 3.5. Calcular el voltaje en las terminales de la fuente de corriente del circuito mostrado en la figura 3.12.

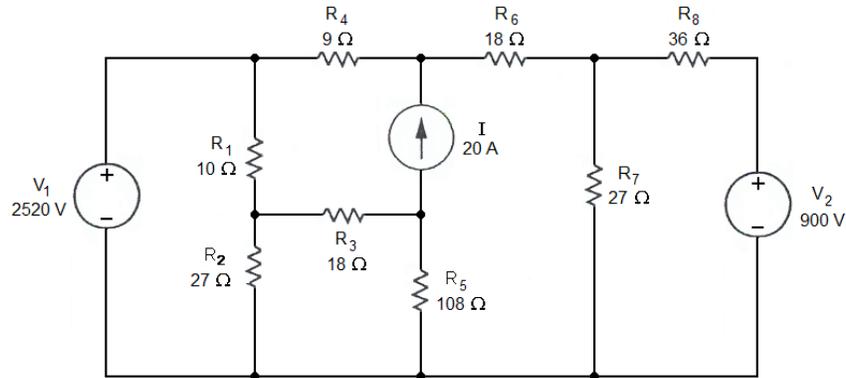


Figura 3.12. Circuito para el ejemplo 3.5.

Solución.

El circuito puede ser resuelto por el método de supermalla, la cual se muestra en la figura 3.13.

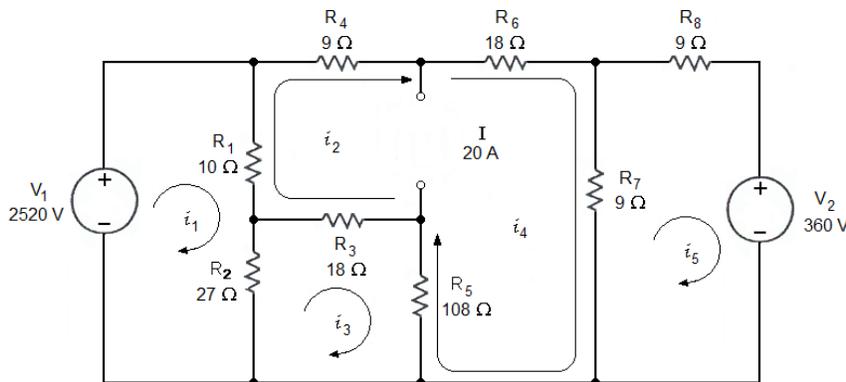


Figura 3.13. Circuito para la solución del ejemplo 3.5.

Malla 1:
$$i_1(R_1 + R_2) - i_2R_1 - i_3R_2 - V_1 = 0$$

Supermalla:
$$\underbrace{i_2(R_3 + R_1 + R_4) - i_3R_3 - i_1R_1}_{\text{Malla 2}} + \underbrace{i_4(R_6 + R_7 + R_5) - i_5R_7 - i_3R_5}_{\text{Malla 4}} = 0$$

Relación de corrientes en la supermalla:
$$i_4 - i_2 = I$$

Malla 3:
$$i_3(R_2 + R_3 + R_5) - i_1R_2 - i_2R_3 - i_4R_5 = 0$$

Malla 5:
$$i_5(R_7 + R_8) - i_4R_7 + V_2 = 0$$

Sustituyendo los valores de los elementos del circuito

Malla 1:
$$37i_1 - 10i_2 - 27i_3 = 2520$$

Supermalla:
$$-10i_1 + 37i_2 - 126i_3 + 135i_4 - 9i_5 = 0 \quad \text{y} \quad -i_2 + i_4 = 20$$

Malla 3:
$$-3i_1 - 2i_2 + 17i_3 - 12i_4 = 0$$

Malla 5:
$$-i_4 + 2i_5 = -40$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene

$$i_1 = 150 \text{ A} \quad i_2 = 60 \text{ A} \quad i_3 = 90 \text{ A} \quad i_4 = 80 \text{ A} \quad i_5 = 20 \text{ A}$$

Aplicando la LVK a la trayectoria cerrada formada por los elementos R_1 , R_4 , V_I y R_3 de la figura 3.12, se tiene

$$v_{R_3} + v_{R_1} + v_{R_4} + v_I = 0$$

Aplicando la ley de Ohm a la ecuación anterior

$$R_3(i_2 - i_3) + R_1(i_2 - i_1) + R_4i_2 + v_I = 0$$

despejando V_I y sustituyendo valores numéricos se obtiene

$$v_I = (18 \Omega)(90 \text{ A} - 60 \text{ A}) + (10 \Omega)(150 \text{ A} - 60 \text{ A}) - (9 \Omega)(60 \text{ A}) = \mathbf{900 \text{ V}}$$

Ejemplo 3.6. Calcule las potencias totales absorbida y suministrada en el circuito de la figura 3.14.

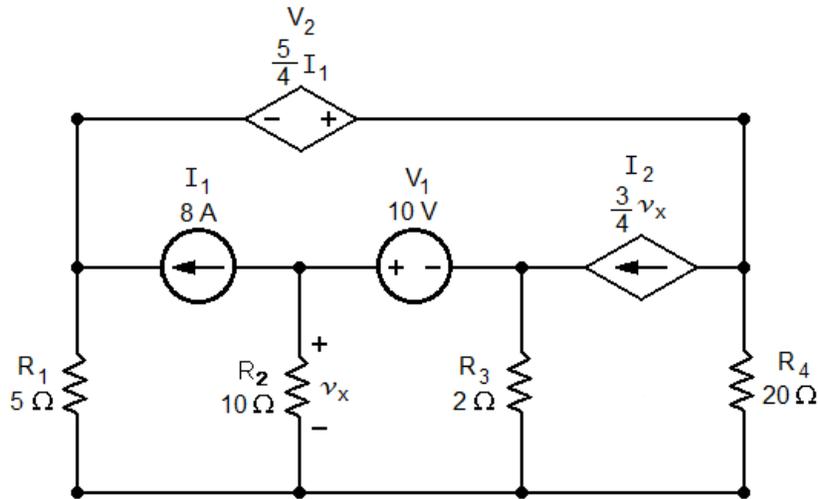


Figura 3.14. Circuito para el ejemplo 3.6.

Solución.

Para resolver el circuito, se aplica el concepto de supermalla como se muestra en la figura 3.15.

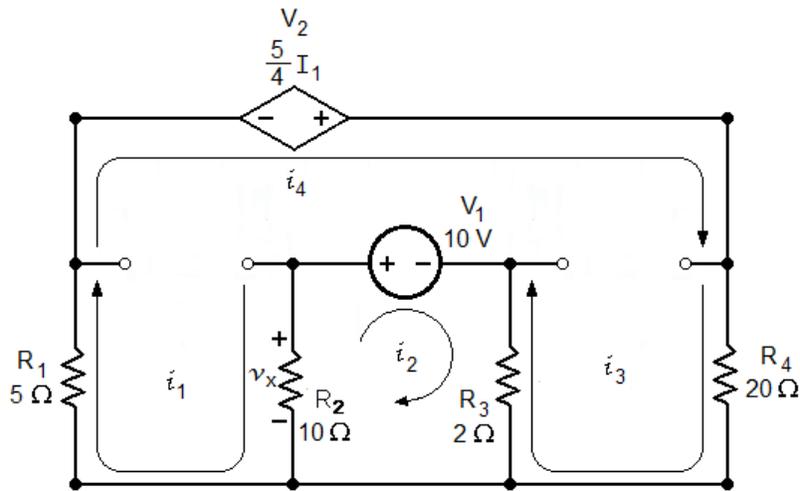


Figura 3.15. Circuito para la solución del ejemplo 3.6.

$$\text{Supermalla: } i_1(R_1 + R_2) - i_2R_2 + i_3(R_3 + R_4) - i_2R_3 - V_2 - V_1 = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{Relaciones de corrientes en la supermalla: } i_4 - i_1 = I_1 \quad (3.13)$$

$$i_4 - i_3 = I_2 \quad (3.14)$$

$$\text{Malla 2: } i_2(R_2 + R_3) - i_1R_2 - i_3R_3 + V_1 = 0 \quad (3.15)$$

la fuente dependiente de corriente es entonces

$$I_2 = \frac{3}{4}v_x = \frac{3}{4}(i_1 - i_2)R_2 = \frac{15}{2}(i_1 - i_2) \quad (3.16)$$

Sustituyendo 3.16 en 3.14

$$i_4 - i_3 = \frac{15}{2}(i_1 - i_2)$$

y reordenando los términos

$$-\frac{15}{2}i_1 + \frac{15}{2}i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

Ahora multiplicando por 2 la ecuación anterior

$$-15i_1 + 15i_2 - 2i_3 + 2i_4 = 0 \quad (3.17)$$

Después de sustituir valores numéricos en las ecuaciones 3.12, 3.13 y 3.15, se tiene

$$15i_1 - 12i_2 + 22i_3 = 20$$

$$-i_1 + i_4 = 8$$

$$-10i_1 + 12i_2 - 2i_3 = -10$$

Estas tres últimas ecuaciones y la ecuación 3.17, forman el sistema de ecuaciones que proporciona los siguientes resultados

$$i_1 = 6 \text{ A} \quad i_2 = 4 \text{ A} \quad i_3 = -1 \text{ A} \quad i_4 = 14 \text{ A}$$

Con estos valores se puede determinar la corriente de la fuente dependiente I_2

$$I_2 = \frac{3}{4}v_x = \frac{3}{4}(i_1 - i_2)R_2 = \left(\frac{3}{4} \frac{\text{A}}{\text{V}}\right)(2 \text{ A})(10 \Omega) = 15 \text{ A}$$

Para calcular la potencia en ambas fuentes de corriente, se calcula el voltaje en sus terminales aplicando la LVK.

Para I_1

$$v_{I_1} + v_{R_2} + v_{R_1} = 0$$

despejando v_{I_1} de la ecuación anterior y sustituyendo valores

$$v_{I_1} = -v_{R_1} - v_{R_2} = -i_1R_1 - (i_1 - i_2)R_2 = -30 \text{ V} - 20 \text{ V} = -50 \text{ V}$$

y para I_2

$$v_{I_2} + v_{R_4} - v_{R_3} = 0$$

despejando v_{I_2} de la ecuación anterior y sustituyendo valores

$$v_{I_2} = v_{R_3} - v_{R_4} = R_3(i_2 - i_3) - i_3 R_4 = 10 \text{ V} + 20 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

Conociendo ya los parámetros necesarios en cada uno de los elementos del circuito, se calculan las potencias individuales

$$P_{R_1} = i_1^2 R_1 = (36 \text{ A})^2 (5 \Omega) = 180 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = (i_1 - i_2)^2 R_2 = (4 \text{ A})^2 (10 \Omega) = 40 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = (i_2 - i_3)^2 R_3 = (25 \text{ A})^2 (2 \Omega) = 50 \text{ W}$$

$$P_{R_4} = i_3^2 R_4 = (1 \text{ A})^2 (20 \Omega) = 20 \text{ W}$$

$$P_{V_1} = V_1(i_2 - i_4) = (10 \text{ V})(-10 \text{ A}) = -100 \text{ W}$$

$$P_{V_2} = -V_2 i_4 = -(10 \text{ V})(14 \text{ A}) = -140 \text{ W}$$

$$P_{I_1} = -v_{I_1} I_1 = -(-50 \text{ V})(8 \text{ A}) = 400 \text{ W}$$

$$P_{I_2} = -v_{I_2} I_2 = -(30 \text{ V})(15 \text{ A}) = -450 \text{ W}$$

$$P_{abs} = 180 \text{ W} + 40 \text{ W} + 50 \text{ W} + 20 \text{ W} + 400 \text{ W} = \mathbf{690 \text{ W}}$$

$$P_{sum} = -100 \text{ W} - 140 \text{ W} - 450 \text{ W} = \mathbf{-690 \text{ W}}$$

3.2. Análisis de nodos

En el análisis de nodos, se utiliza la ley de corrientes de Kirchhoff para determinar los voltajes que hay en los nodos de un circuito. Es importante mencionar que este método puede aplicarse tanto en circuitos planos como no planos.

En virtud de que el voltaje siempre se mide entre dos puntos, uno de los nodos del circuito se selecciona como *referencia* y los voltajes en los demás nodos se definen con respecto a éste, y se denominan *voltajes de nodo*. Es común llamar *tierra* al nodo de referencia, asignándole un potencial de 0 volt. Si este nodo no está indicado en el circuito, su selección es arbitraria. Sin embargo, un criterio utilizado con frecuencia es elegirlo con base en el mayor número de ramas conectadas a él.

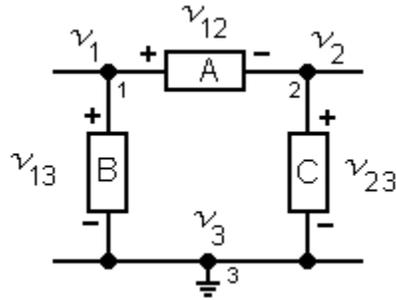


Figura 3.16. Diagrama en el que se esquematizan voltajes de nodo y de rama.

En la figura 3.16, se muestra una porción de un circuito eléctrico, en la que se tienen tres elementos interconectados por los nodos 1, 2 y 3, donde el nodo 3 ha sido seleccionado como referencia o tierra, lo que se identifica con el símbolo que se muestra. En los nodos 1 y 2 se han establecido sus correspondientes voltajes de nodo. Para obtener los voltajes en cada uno de los elementos, se considera la diferencia entre los voltajes de nodo en sus terminales, tomando en cuenta la polaridad establecida en el elemento, de tal forma que

para A:
$$v_{12} = v_1 - v_2$$

para B:
$$v_{13} = v_1 - v_3 = v_1 - 0 = v_1$$

para C:
$$v_{23} = v_2 - v_3 = v_2 - 0 = v_2$$

Los pasos a seguir para el análisis de nodos son:

1. Identificar los nodos del circuito.
2. Seleccionar el nodo de referencia e indicarlo mediante el símbolo de tierra.
3. Establecer en los nodos restantes los voltajes de nodo, considerando aquellos que tienen tres o más ramas conectadas (nodos esenciales).
4. Para determinar la ecuación de cada nodo, se establecen las corrientes en las ramas conectadas a él, indicando sus direcciones, y se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff. La corriente que circula en cada resistor conectado a un nodo, se determina aplicando la ley de Ohm. Por otro lado, si la corriente de la rama está establecida por una fuente de corriente, simplemente se incluye en la ecuación de Kirchhoff con signo positivo o negativo, según salga o entre al nodo, respectivamente.
5. Se encuentra el sistema de ecuaciones, cuyas variables son los voltajes de nodo del circuito, y se resuelve.

Ejemplo 3.7. Determinar los voltajes de nodo del circuito que se muestra en la figura 3.17.

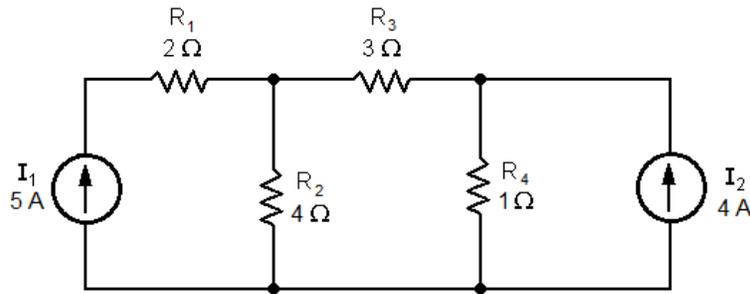


Figura 3.17. Circuito para el ejemplo 3.7.

Solución.

El nodo inferior se selecciona como referencia y se asignan las variables de voltaje en los nodos esenciales restantes, como se indica en la figura 3.18.

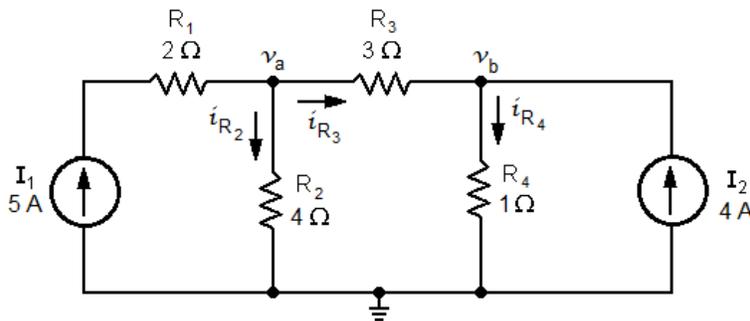


Figura 3.18. Circuito para la solución del ejemplo 3.7.

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en los nodos a y b, se tiene

$$\text{Nodo a:} \quad -I_1 + i_{R_2} + i_{R_3} = 0$$

$$\text{Nodo b:} \quad -i_{R_3} + i_{R_4} - I_2 = 0$$

Aplicando ahora la ley de Ohm para determinar las corrientes en los resistores

$$\text{Nodo a:} \quad -I_1 + \frac{v_a - 0}{R_2} + \frac{v_a - v_b}{R_3} = 0$$

$$\text{Nodo b:} \quad -\frac{(v_a - v_b)}{R_3} + \frac{v_b - 0}{R_4} - I_2 = 0$$

Agrupando en función de las variables de voltaje y reordenando los términos en cada una de las ecuaciones, se tiene

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_b}{R_3} = I_1 \quad (3.18)$$

Nodo b:
$$-\frac{v_a}{R_3} + v_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) = I_2 \quad (3.19)$$

Multiplicando 3.18 por R_2R_3

$$(R_2 + R_3)v_a - R_2v_b = I_1R_2R_3$$

Multiplicando 3.19 por R_3R_4

$$-R_4v_a + (R_3 + R_4)v_b = I_2R_3R_4$$

Sustituyendo valores y reordenando términos, el sistema de ecuaciones queda

$$7v_a - 4v_b = 60$$

$$-v_a + 4v_b = 12$$

cuya solución es

$$v_a = 12 \text{ V}$$

$$v_b = 6 \text{ V}$$

Las ecuaciones 3.18 y 3.19, pueden obtenerse de manera directa por inspección del circuito. Por ejemplo, para la ecuación 3.18, por un momento se considera como si el voltaje v_a fuese el único que está actuando y las corrientes que salen de éste fuesen positivas. Para determinar estas corrientes se consideran todos los elementos pasivos conectados al nodo por lo que, en este caso, las corrientes serían v_a/R_2 y v_a/R_3 ; la suma de estas dos corrientes corresponde al primer término de la ecuación 3.18.

Obsérvese que la corriente en el resistor R_1 está dada por la fuente I_1 , por lo que en la ecuación no se utiliza el valor de este resistor. Los voltajes en los otros extremos de los elementos conectados al nodo analizado generan corrientes que entran a éste, las cuales por tanto se consideran negativas. Éste es el caso del término $-\frac{v_b}{R_3}$.

Para completar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo analizado, se consideran las fuentes de corriente que hubiese conectadas a él, respetando el sentido de cada una de ellas (si entra o sale). La ecuación 3.19, puede obtenerse aplicando este procedimiento.

Los siguientes ejemplos del capítulo son resueltos de esta manera, dada la rapidez y sencillez con las que se obtienen las ecuaciones de nodo. Por otra parte, debido a que el análisis de nodos implica coeficientes fraccionarios, en adelante los ejemplos serán resueltos de manera que los coeficientes en el sistema de ecuaciones sean enteros.

Ejemplo 3.8. Determinar el voltaje en el resistor R_3 del circuito que se muestra en la figura 3.19.

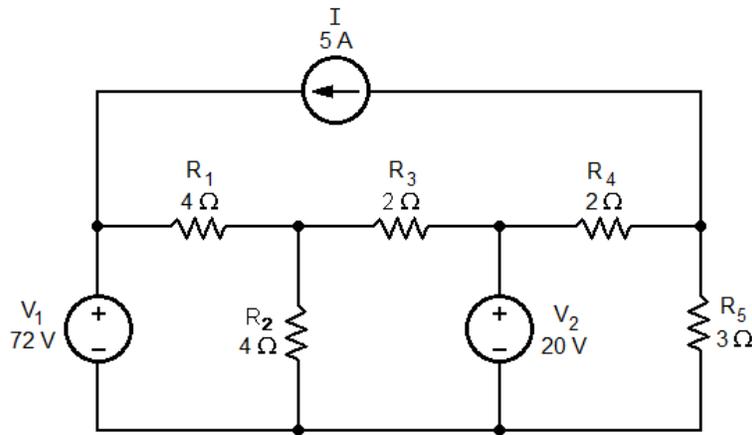


Figura 3.19. Circuito para el ejemplo 3.8.

Solución.

Se identifican los nodos esenciales y se elige el nodo inferior como referencia. Esto último permite observar que los voltajes en los nodos donde están conectadas las terminales positivas de las fuentes de voltaje, están dados por los respectivos valores de las mismas, como se muestra en la figura 3.20, por tanto no es necesario establecerlos como incógnitas.

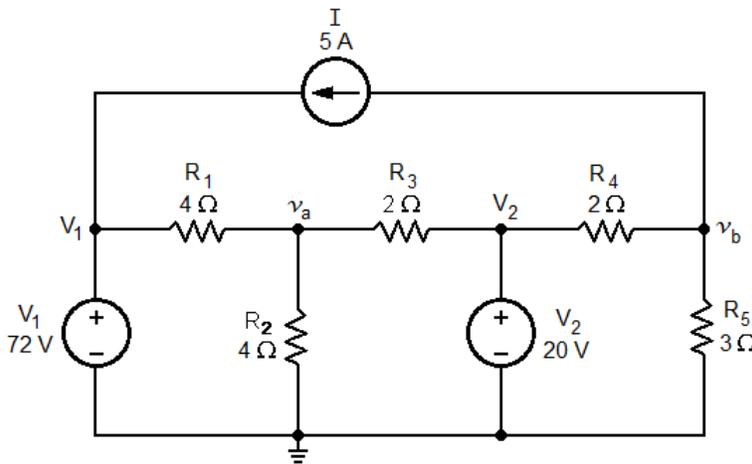


Figura 3.20. Circuito para la solución del ejemplo 3.8.

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_3} = 0 \quad (3.20)$$

Nodo b:
$$v_b \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_2}{R_4} + I = 0 \quad (3.21)$$

Sustituyendo valores en 3.20 y 3.21, y despejando se obtiene

$$v_a = 28 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_b = 6 \text{ V}$$

El valor buscado está dado como

$$v_{R_3} = v_a - V_2 = 28 \text{ V} - 20 \text{ V} = 8 \text{ V}$$

Ejemplo 3.9. Determine la potencia en la fuente V_2 del circuito de la figura 3.21.

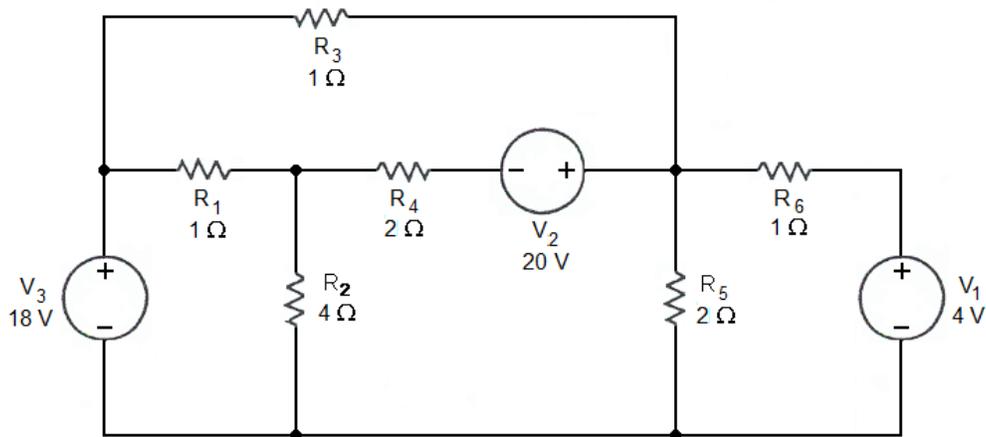


Figura 3.21. Circuito para el ejemplo 3.9.

Solución.

La figura 3.22 muestra la identificación de los nodos a, b y c del circuito, a los cuales se les ha asignado sus correspondientes voltajes; de igual manera, se muestra la elección del nodo de referencia. El problema puede ser resuelto por dos métodos distintos.

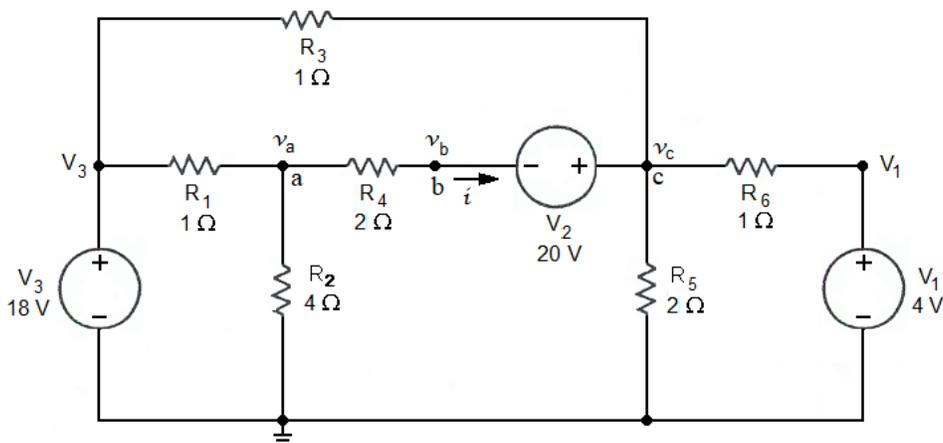


Figura 3.22. Circuito para la solución del ejemplo 3.9.

Método 1. Asignación de una corriente auxiliar en las fuentes independientes de voltaje.

Como en los nodos b y c no se puede establecer una expresión para la corriente que circula por la fuente V_2 , entonces se asigna una corriente i , que será considerada en la ecuación de cada uno de estos nodos. Así, las ecuaciones quedan de la siguiente forma

$$\text{Nodo a:} \quad v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_3}{R_1} - \frac{v_b}{R_4} = 0 \quad (3.22)$$

$$\text{Nodo b:} \quad v_b \left(\frac{1}{R_4} \right) - \frac{v_a}{R_4} + i = 0 \quad (3.23)$$

$$\text{Nodo c:} \quad v_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{V_3}{R_3} - \frac{V_1}{R_6} - i = 0 \quad (3.24)$$

Sumando las ecuaciones 3.23 y 3.24

$$v_b \left(\frac{1}{R_4} \right) - \frac{v_a}{R_4} + v_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{V_3}{R_3} - \frac{V_1}{R_6} = 0 \quad (3.25)$$

se obtiene una sola ecuación en la que se ha eliminado la variable de corriente i . Al tenerse ahora sólo dos ecuaciones con tres incógnitas, es necesario encontrar una ecuación más para completar el sistema; ésta se obtiene observando que v_b y v_c se relacionan a través de V_2 de la forma

$$v_c - v_b = V_2 \quad (3.26)$$

Sustituyendo valores en 3.22, 3.25 y 3.26, y ordenando los términos, el sistema de ecuaciones es

$$7v_a - 2v_b = 72$$

$$-v_a + v_b + 5v_c = 44$$

$$-v_b + v_c = 20$$

Resolviendo este sistema, se obtiene

$$v_a = 8 \text{ V} \quad v_b = -8 \text{ V} \quad v_c = 12 \text{ V}$$

Para determinar la potencia en la fuente V_2 , es necesario conocer el valor de la corriente que fluye a través de ella, que es la misma que circula a través de R_4 , la cual se determina de la forma

$$i_{R_4} = \frac{v_a - v_b}{R_4} = \frac{8 \text{ V} - (-8 \text{ V})}{2 \Omega} = 8 \text{ A}$$

Por lo tanto

$$P_{V_2} = -(V_2)(i_{R_4}) = -(20 \text{ V})(8 \text{ A}) = -160 \text{ W}$$

Método 2. Uso del concepto de supernodo.

Esta técnica elimina la necesidad de establecer una corriente a través de la fuente de voltaje. Consiste en establecer una superficie cerrada imaginaria alrededor de una fuente de voltaje que se encuentra entre dos nodos que no son referencia (figura 3.23). Para escribir la ecuación del supernodo, se considera la suma algebraica de las corrientes en ambos nodos, tal como se establece en la siguiente ecuación.

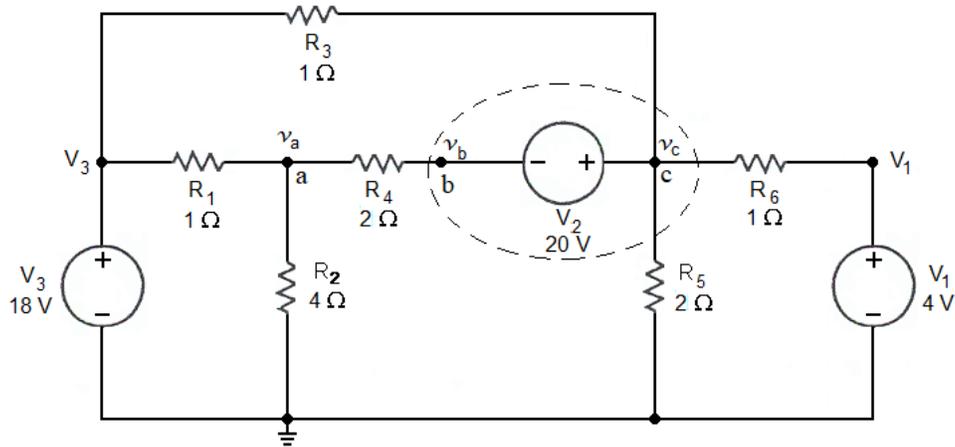


Figura 3.23. Circuito en el que se esquematiza el concepto de supernodo.

Supernodo:

$$\underbrace{v_b \left(\frac{1}{R_4} \right) - \frac{v_a}{R_4}}_{\text{Nodo b}} + \underbrace{v_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{V_3}{R_3} - \frac{V_1}{R_6}}_{\text{Nodo c}} = 0$$

Como se puede observar, la ecuación obtenida es igual a la 3.25, por lo que también es necesario complementarla con la relación de los voltajes de nodo y de fuente de voltaje involucrados, como se establece en la ecuación 3.26. La ecuación del nodo a, se obtiene por el método general de análisis de nodos.

Ejemplo 3.10. Determinar la corriente en la fuente de voltaje V_1 del circuito de la figura 3.24.

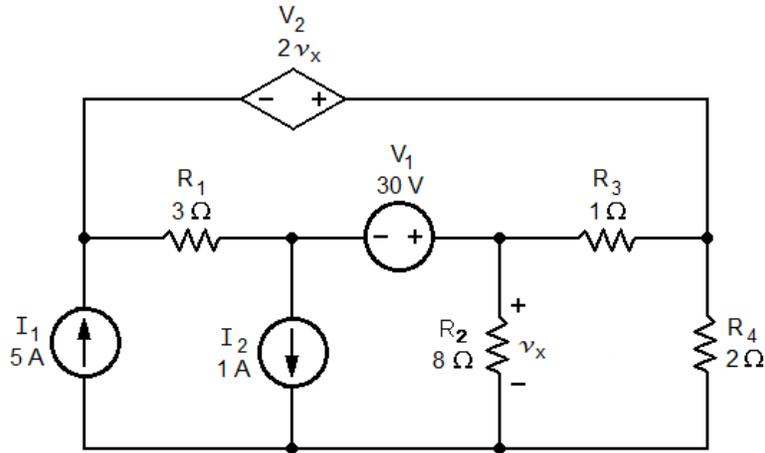


Figura 3.24. Circuito para el ejemplo 3.10.

Solución.

En el circuito se pueden observar dos supernodos, los cuales están formados por v_a y v_d , así como v_b y v_c , como se indica en la figura 3.25.

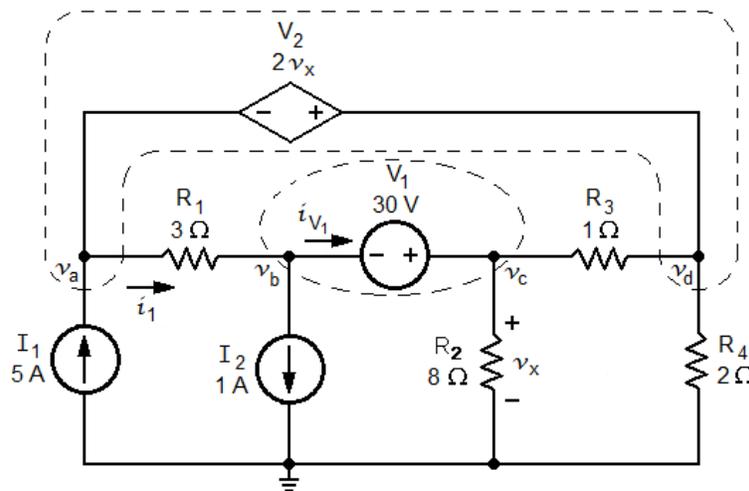


Figura 3.25. Circuito para la solución del ejemplo 3.10.

Supernodo formado por v_a y v_d :
$$\frac{v_a}{R_1} - \frac{v_b}{R_1} - \frac{v_c}{R_3} + v_d \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - I_1 = 0$$

Relación de voltajes en este supernodo:
$$v_d - v_a = V_2 = 2v_x = 2v_c$$

Supernodo formado por v_b y v_c :
$$-\frac{v_a}{R_1} + \frac{v_b}{R_1} + v_c \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_d}{R_3} + I_2 = 0$$

Relación de voltajes en este supernodo:
$$v_c - v_b = V_1$$

Sustituyendo valores, el sistema de ecuaciones es

$$2v_a - 2v_b - 6v_c + 9v_d = 30$$

$$-v_a - 2v_c + v_d = 0$$

$$-8v_a + 8v_b + 27v_c - 24v_d = -24$$

$$-v_b + v_c = 30$$

Cuya solución es

$$v_a = -10 \text{ V}$$

$$v_b = -22 \text{ V}$$

$$v_c = 8 \text{ V}$$

$$v_d = 6 \text{ V}$$

Para determinar la corriente que circula por la fuente de voltaje V_1 , se escribe la ecuación de la LCK en el nodo b, tal como se indica en la figura 3.25, quedando

$$-i_1 + I_2 + i_{V_1} = 0$$

de donde

$$i_{V_1} = i_1 - I_2 = \frac{v_a - v_b}{R_1} - I_2 = \frac{-10 \text{ V} - (-22 \text{ V})}{3 \Omega} - 1 \text{ A} = 3 \text{ A}$$

Ejemplo 3.11. Calcule la potencia en la fuente de corriente I_1 del circuito en la figura 3.26.

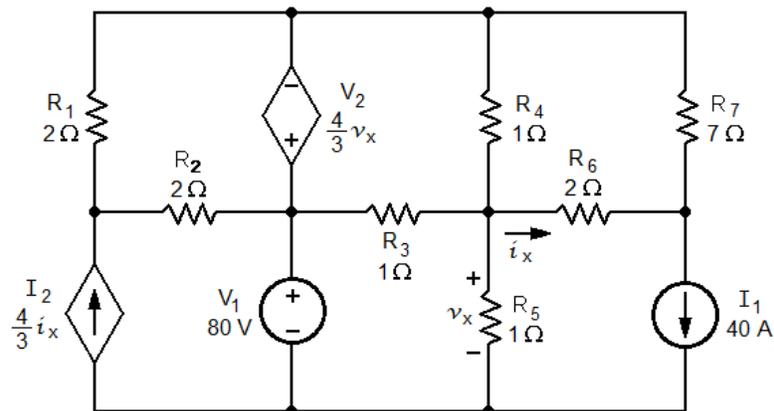


Figura 3.26. Circuito para el ejemplo 3.11.

Solución.

Se identifican los nodos como se muestra en la figura 3.27a. Obsérvese que no es necesario utilizar el método de supernodo entre V_1 y v_d , puesto que v_d , al estar referenciado respecto a tierra, como se muestra en la figura 3.27b, se puede determinar siguiendo la trayectoria formada por las ramas de V_1 y V_2 , que corresponde a la suma algebraica de dichos voltajes

$$v_d = V_1 - V_2 \quad (3.27)$$

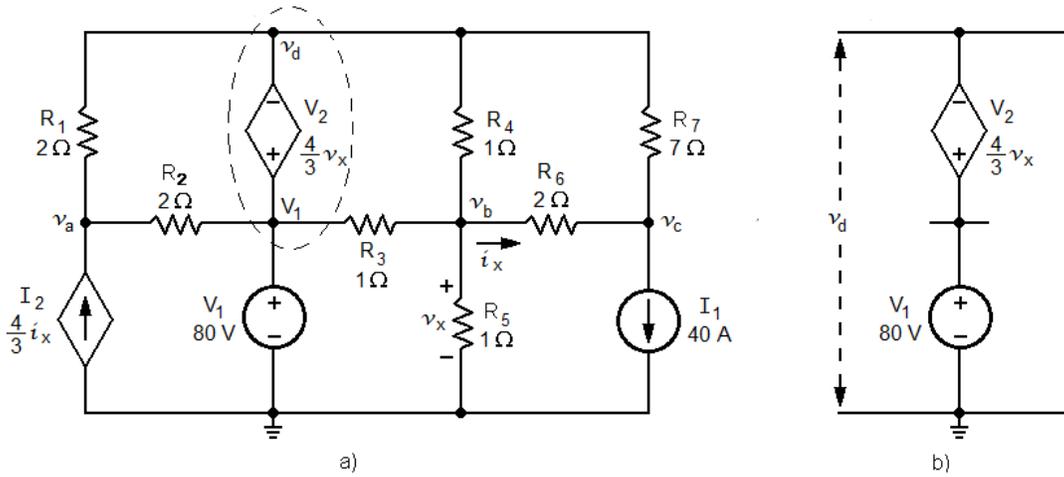


Figura 3.27. a) Identificación de nodos y supernodo. b) Determinación del voltaje v_d .

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - I_2 - \frac{V_1}{R_2} - \frac{v_d}{R_1} = 0 \quad (3.28)$$

Nodo b:
$$v_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{V_1}{R_3} - \frac{v_c}{R_6} - \frac{v_d}{R_4} = 0 \quad (3.29)$$

Nodo c:
$$v_c \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) - \frac{v_b}{R_6} - \frac{v_d}{R_7} + I_1 = 0 \quad (3.30)$$

Las expresiones para las fuentes dependientes quedan

$$I_2 = \frac{4}{3} i_x = \frac{4}{3} \left(\frac{v_b - v_c}{R_6} \right) \quad (3.31)$$

$$V_2 = \frac{4}{3} v_x = \frac{4}{3} v_b \quad (3.32)$$

Sustituyendo 3.32 en 3.27

$$v_d = V_1 - \frac{4}{3} v_b \quad (3.33)$$

Sustituyendo ahora 3.31 y 3.33 en las ecuaciones 3.28 a 3.30, así como los valores de cada uno de los elementos, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$6v_a + 4v_c = 480$$

$$29v_b - 3v_c = 960$$

$$-13v_b + 27v_c = -1200$$

Cuyos resultados son

$$v_a = 100 \text{ V} \quad v_b = 30 \text{ V} \quad v_c = -30 \text{ V}$$

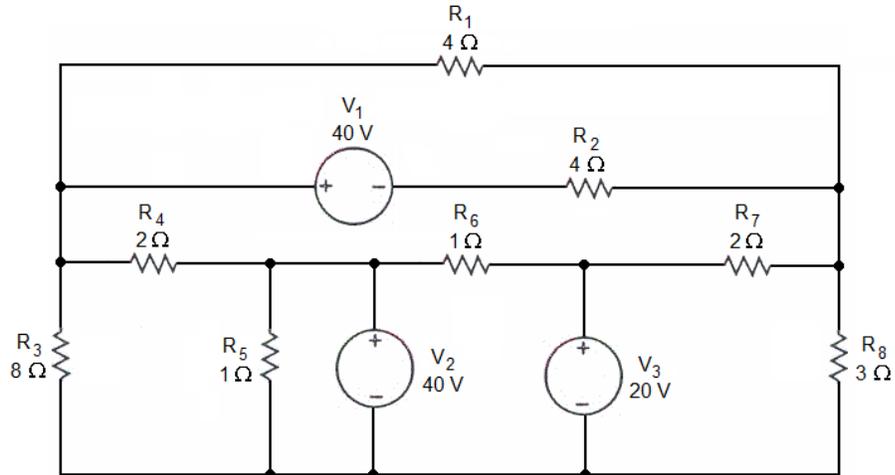
Para calcular la potencia en I_1

$$\mathbf{P_{I_1} = v_c \cdot I_1 = (-30 \text{ V})(40 \text{ A}) = -1200 \text{ W}}$$

Aunque en los ejemplos resueltos por análisis de nodos, se indicó el nodo de referencia mediante el símbolo de tierra, este último frecuentemente se suele omitir en el circuito cuando el nodo inferior del mismo es considerado como la referencia, asignándole un potencial de 0 V, como se menciona al inicio de la sección 3.2. Esto se aplicará en los subsecuentes capítulos cuando se utilice análisis de nodos en la solución de los ejemplos.

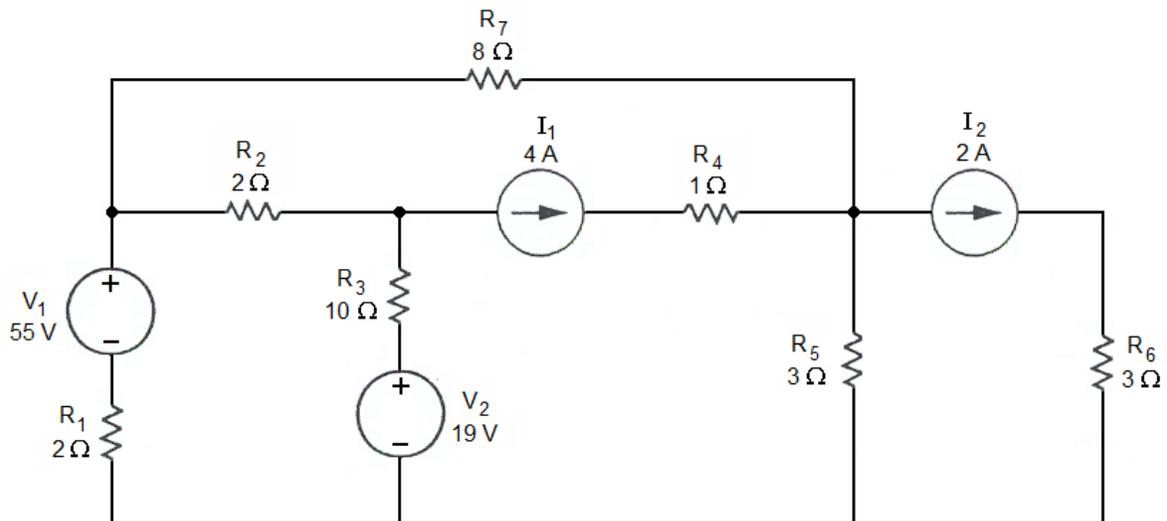
EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Aplicando análisis de mallas, calcule la potencia disipada por el resistor R_2 en el siguiente circuito.



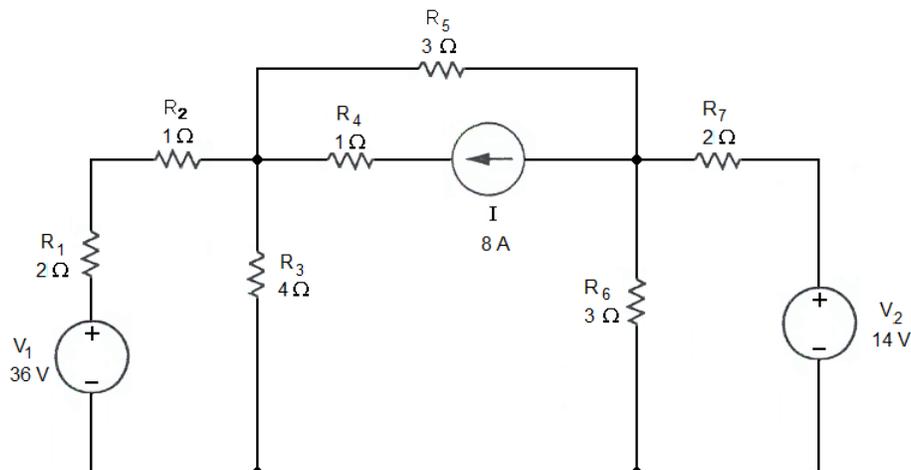
Respuesta:
100 W

3.2. Calcule la corriente que fluye a través del resistor R_3 en el circuito de la figura, utilizando análisis de mallas.



Respuesta:
1 A

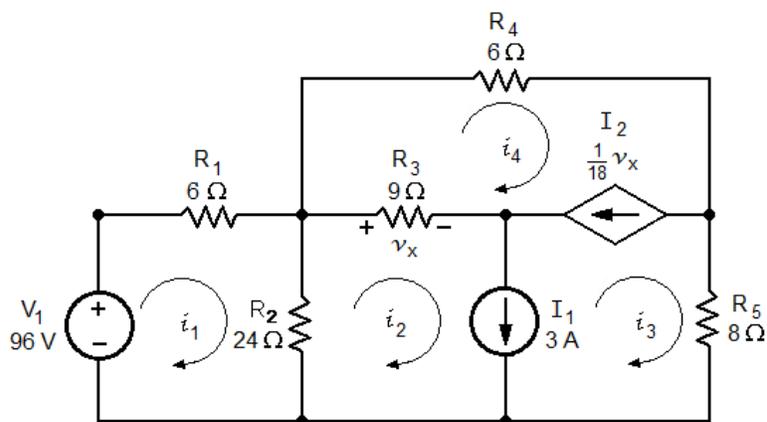
3.3. Realice el análisis de mallas del circuito de la figura, para determinar la potencia en la fuente de corriente I .



Respuesta:

208 W

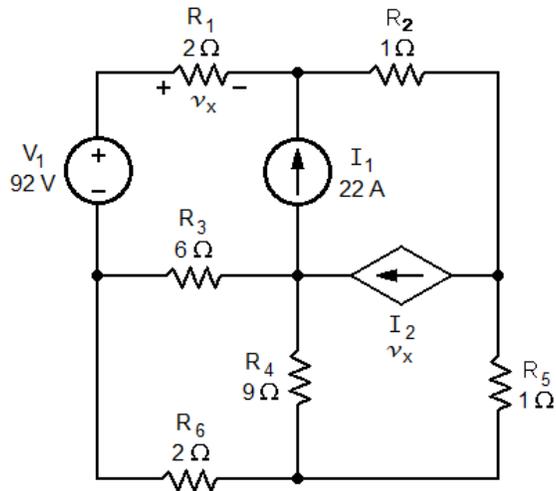
3.4. Determine las corrientes de malla indicadas en el siguiente circuito.



Respuesta:

$i_1 = 8 \text{ A}$, $i_2 = 6 \text{ A}$, $i_3 = 3 \text{ A}$, $i_4 = 4 \text{ A}$

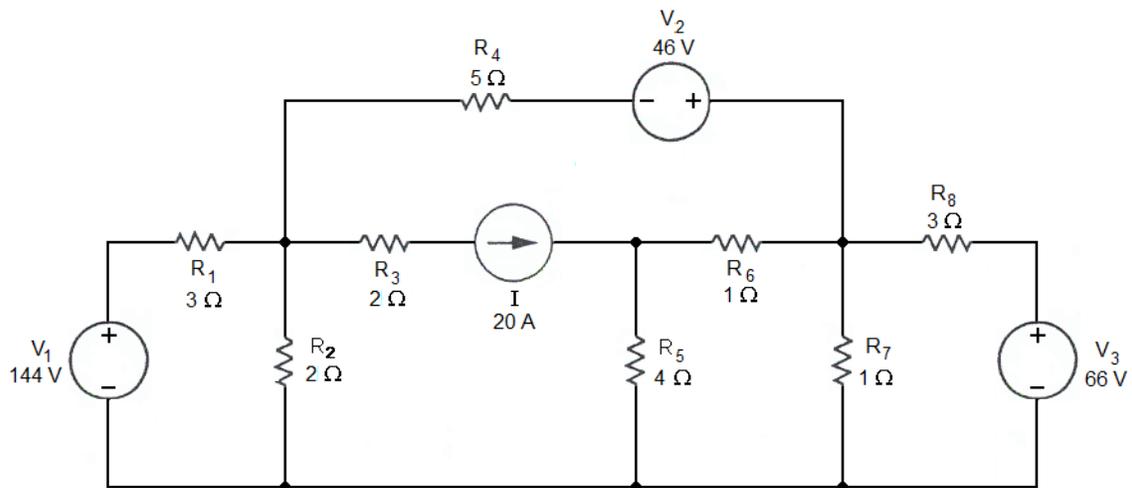
3.5. Utilice análisis de mallas para determinar la corriente que entrega la fuente dependiente I_2 del circuito mostrado.



Respuesta:

30 A

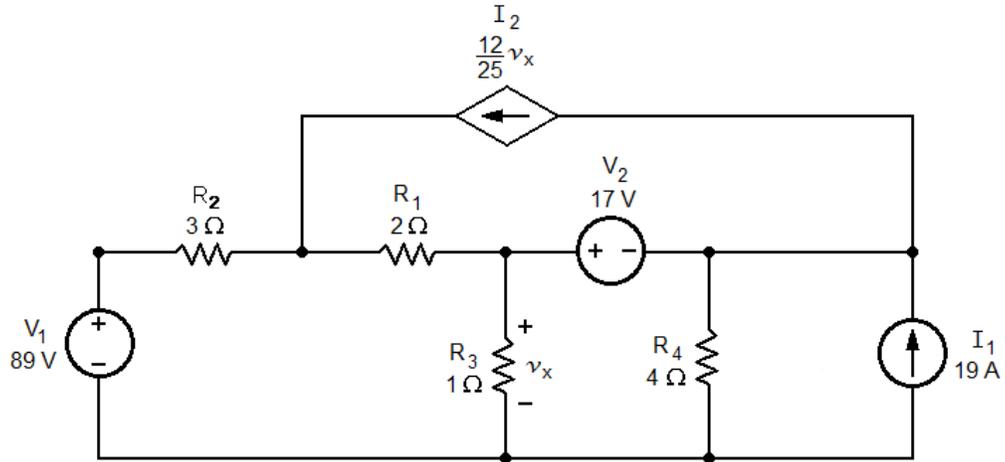
3.6. Determine la potencia en la fuente de corriente I del siguiente circuito, aplicando análisis de nodos.



Respuesta:

1120 W

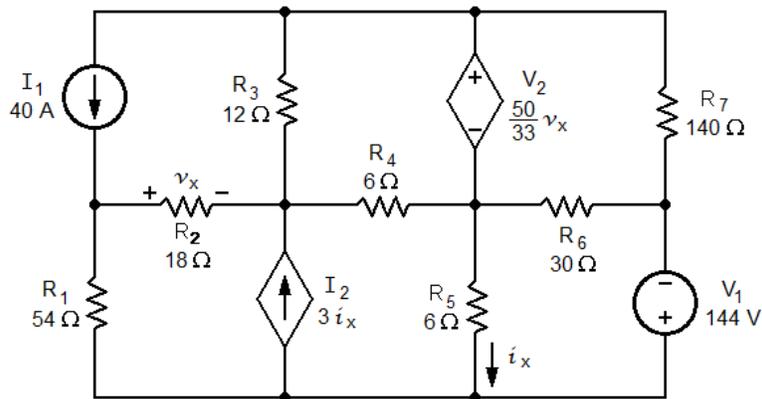
3.7. Utilice análisis de nodos para calcular la potencia en la fuente de corriente dependiente I_2 del circuito mostrado.



Respuesta:

– 684 W

3.8. Obtenga el voltaje de la fuente dependiente V_2 , mediante análisis de nodos, en el siguiente circuito.



Respuesta:

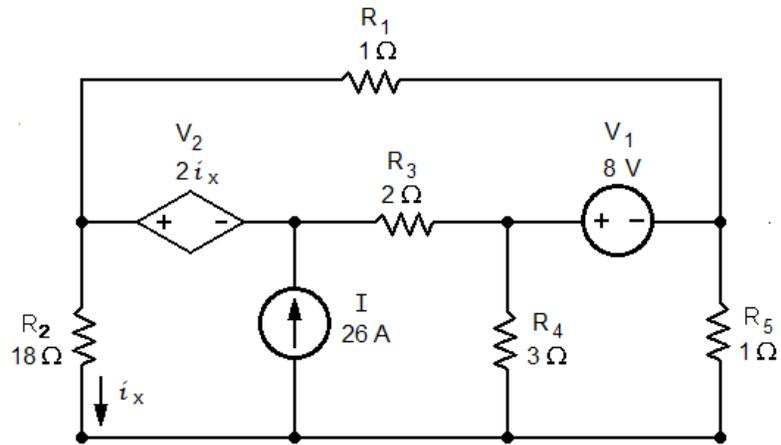
600 V

3.9. Analizando por nodos, determine la potencia del resistor R_7 en el circuito del ejercicio 3.2.

Respuesta:

72 W

3.10. Calcule la corriente que fluye a través del resistor R_3 en el circuito mostrado, aplicando análisis de nodos.



Respuesta:
4 A

Nota: Se sugiere al lector comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios propuestos aplicando el método alternativo, es decir, análisis de mallas o de nodos según corresponda.

Capítulo 4. Otros métodos de análisis

4.1. Principio de superposición

En los circuitos lineales que contienen dos o más fuentes independientes, los voltajes y corrientes en la red eléctrica, pueden calcularse encontrando las contribuciones de cada una de las fuentes cuando actúan solas, para posteriormente realizar su suma algebraica. Para aplicar este método, las fuentes de voltaje independientes se suprimen sustituyéndolas por un corto circuito, y las de corriente independientes por un circuito abierto, siempre manteniendo una sola fuente activa a la vez.

Ejemplo 4.1. Para el circuito mostrado en la figura 4.1, determine el voltaje en R_3 .

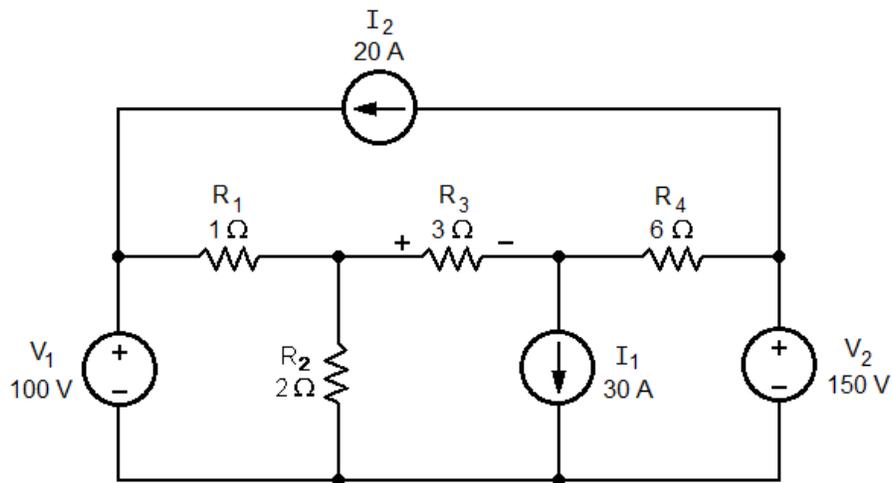


Figura 4.1. Circuito para el ejemplo 4.1.

Solución.

El orden en el que se seleccionan las fuentes para determinar su contribución, es arbitrario; iniciando con la contribución de I_1 .

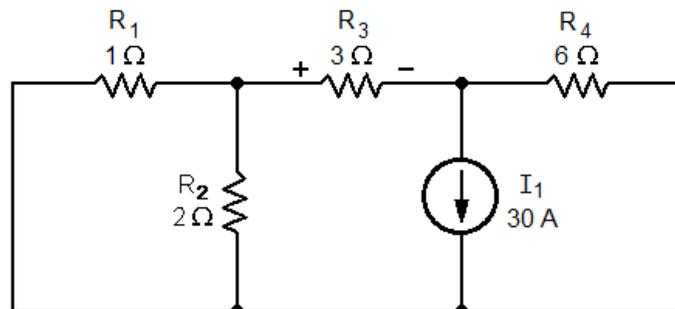


Figura 4.2. Contribución de la fuente de corriente independiente I_1 .

Para obtener el voltaje en el resistor R_3 , se calcula primero la corriente en éste; de la figura 4.2 se puede observar que R_1 y R_2 están conectados en paralelo, y que la corriente en el resistor resultante es la misma que fluye a través de R_3 , por lo que la corriente puede determinarse aplicando el divisor de corriente correspondiente

$$i_{R_3} = \frac{R_4}{(R_1 || R_2 + R_3) + R_4} I_1 = \frac{6 \Omega}{\frac{2}{3} \Omega + 3 \Omega + 6 \Omega} \cdot 30 \text{ A} = \frac{540}{29} \text{ A}$$

Aplicando la ley de Ohm

$$v'_{R_3} = i_{R_3} R_3 = \left(\frac{540}{29} \text{ A} \right) (3 \Omega) = \frac{1620}{29} \text{ V}$$

Contribución de V_2

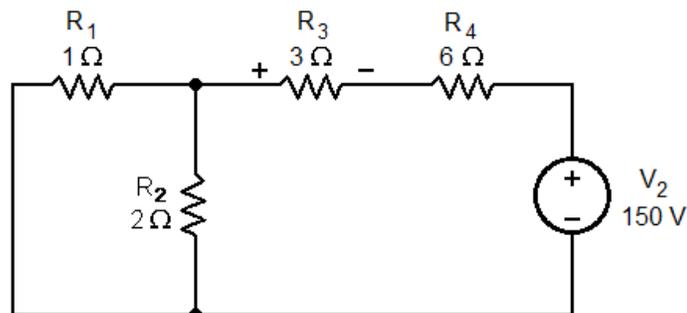


Figura 4.3. Contribución de la fuente de voltaje independiente V_2 .

En este caso se aplica de manera directa el divisor de voltaje a R_3 , pero respetando la polaridad original de ese voltaje

$$v''_{R_3} = -\frac{R_3}{R_1 || R_2 + R_3 + R_4} V_2 = -\frac{3 \Omega}{\frac{2}{3} \Omega + 3 \Omega + 6 \Omega} \cdot 150 \text{ V} = -\frac{1350}{29} \text{ V}$$

Contribución de V_1

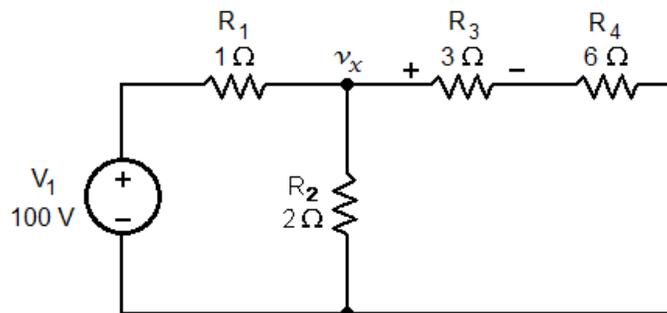


Figura 4.4. Contribución de la fuente de voltaje independiente V_1 .

Para calcular el voltaje en R_3 , se aplicarán dos divisores de voltaje; el primero para determinar v_x , y el segundo para obtener v_{R_3}' .

$$v_x = \frac{R_2 || (R_3 + R_4)}{R_1 + [R_2 || (R_3 + R_4)]} V_1 = \frac{2 \Omega || (3 \Omega + 6 \Omega)}{1 \Omega + [2 \Omega || (3 \Omega + 6 \Omega)]} \cdot 100 \text{ V} = \frac{1800}{29} \text{ V}$$

Entonces

$$v_{R_3}''' = \frac{R_3}{R_3 + R_4} v_x = \frac{3 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} \cdot \frac{1800}{29} \text{ V} = \frac{600}{29} \text{ V}$$

Finalmente, la contribución de I_2

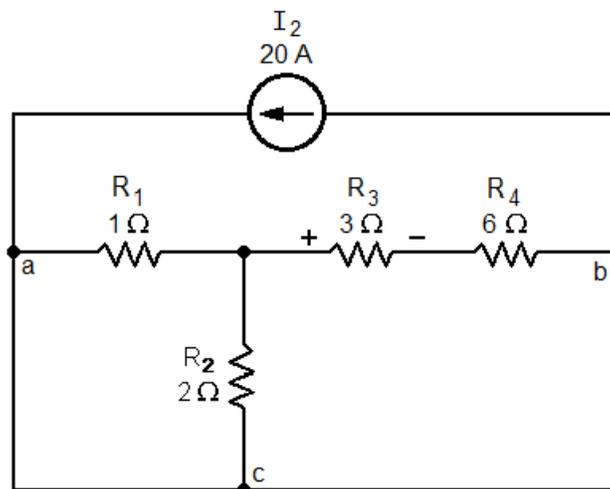


Figura 4.5. Contribución de la fuente de corriente independiente I_2 .

Obsérvese que los nodos a, b y c indicados en la figura anterior realmente son el mismo nodo, por lo que R_1 está conectado en paralelo con R_2 , y éstos a su vez están en serie con R_3 y R_4 , obteniéndose así un resistor equivalente que permite ver el circuito de la siguiente forma.

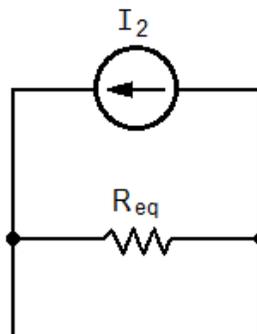


Figura 4.6. Circuito equivalente.

Al estar este resistor equivalente en corto circuito, el voltaje a través de él es cero, por lo que

$$v_{R_3}'''' = 0 \text{ V}$$

Finalmente

$$v_{R_3} = v_{R_3}' + v_{R_3}'' + v_{R_3}''' + v_{R_3}'''' = \frac{1620}{29} \text{ V} - \frac{1350}{29} \text{ V} + \frac{600}{29} \text{ V} + 0 \text{ V} = \mathbf{30 \text{ V}}$$

Cuando en el circuito se encuentran fuentes de voltaje o de corriente dependientes, éstas no se desactivan, a menos que la variable de control se haga cero cuando se desactiva alguna fuente independiente.

Ejemplo 4.2. Determine los voltajes de nodo v_a , v_b y v_c del circuito de la figura 4.7.

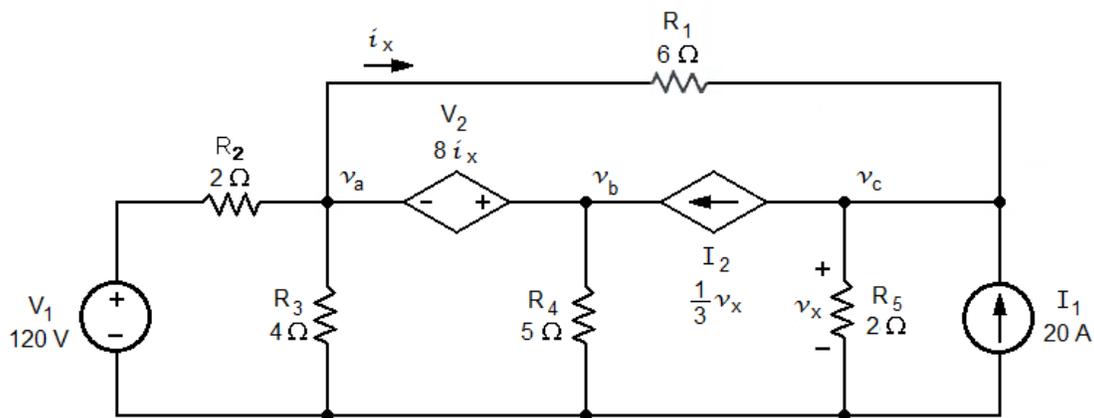


Figura 4.7. Circuito para el ejemplo 4.2.

Solución.

Para determinar las contribuciones a los voltajes debido a la fuente de voltaje independiente V_1 , la fuente de corriente independiente I_1 se desactiva, quedando el circuito como se observa en la figura 4.8.

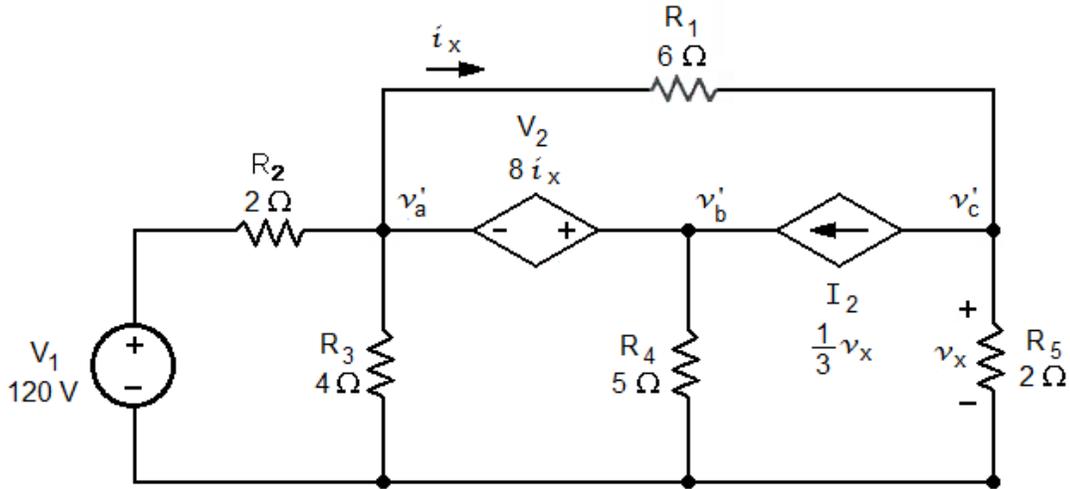


Figura 4.8. Contribución de la fuente de voltaje independiente V_1 .

Se puede resolver aplicando análisis de nodos, como se muestra a continuación.

$$\text{Supernodo a-b: } v'_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V_1}{R_2} - \frac{v'_c}{R_1} + \frac{v'_b}{R_4} - I_2 = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{Relación de voltajes en el supernodo: } V_2 = v'_b - v'_a \quad (4.2)$$

$$\text{Nodo c: } v'_c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{v'_a}{R_1} + I_2 = 0 \quad (4.3)$$

Sustituyendo la expresión $I_2 = \frac{1}{3}v_x = \frac{1}{3}v'_c$ en 4.1, así como los valores conocidos

$$55v'_a + 12v'_b - 30v'_c = 3600 \quad (4.4)$$

Dado que $V_2 = 8i_x$ e $i_x = \frac{v'_a - v'_c}{R_1}$, y sustituyendo valores en 4.2

$$14v'_a - 6v'_b - 8v'_c = 0 \quad (4.5)$$

Y, finalmente, sustituyendo I_2 , así como los valores de los resistores en 4.3

$$-v'_a + 6v'_c = 0 \quad (4.6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por 4.4 a 4.6, se obtiene

$$v'_a = \frac{5400}{113} \text{ V} \quad v'_b = \frac{11400}{113} \text{ V} \quad v'_c = \frac{900}{113} \text{ V}$$

Para determinar ahora la contribución debida a la fuente de corriente independiente I_1 , el circuito queda como

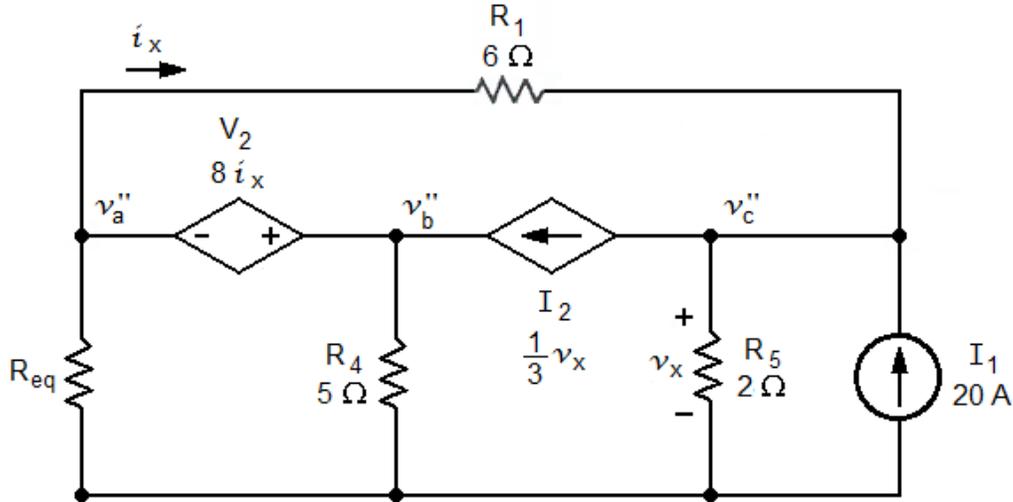


Figura 4.9. Contribución de la fuente de corriente independiente I_1 .

Donde $R_{eq} = R_2 || R_3 = \frac{2\Omega \cdot 4\Omega}{2\Omega + 4\Omega} = \frac{4}{3} \Omega$

El circuito se puede resolver nuevamente por análisis de nodos.

Supernodo a-b:
$$v_a'' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{eq}} \right) - \frac{v_c''}{R_1} + \frac{v_b''}{R_4} - I_2 = 0 \quad (4.7)$$

Relación de voltajes en el supernodo:
$$V_2 = v_b'' - v_a'' \quad (4.8)$$

Nodo c:
$$v_c'' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{v_a''}{R_1} + I_2 - I_1 = 0 \quad (4.9)$$

Sustituyendo los valores de los resistores y fuentes, de 4.7 se obtiene

$$55v_a'' + 12v_b'' - 30v_c'' = 0$$

de 4.8

$$14v_a'' - 6v_b'' - 8v_c'' = 0$$

y de 4.9

$$-v_a'' + 6v_c'' = 120$$

La solución del sistema es

$$v_a'' = \frac{1380}{113} \text{ V} \quad v_b'' = -\frac{100}{113} \text{ V} \quad v_c'' = \frac{2490}{113} \text{ V}$$

Por tanto los voltajes totales son

$$v_a = v_a' + v_a'' = \frac{5400}{113} \text{ V} + \frac{1380}{113} \text{ V} = \mathbf{60 \text{ V}}$$

$$v_b = v'_b + v''_b = \frac{11400}{113} \text{ V} - \frac{100}{113} \text{ V} = \mathbf{100 \text{ V}}$$

$$v_c = v'_c + v''_c = \frac{900}{113} \text{ V} + \frac{2490}{113} \text{ V} = \mathbf{30 \text{ V}}$$

4.2. Transformación de fuentes

Es una herramienta que sirve para simplificar los circuitos eléctricos, permitiendo substituir una fuente de voltaje en serie con un resistor por una fuente de corriente en paralelo con el mismo resistor (figura 4.10), o a la inversa (figura 4.11). La configuración de estos circuitos corresponde a las fuentes de voltaje y de corriente no ideales, por lo que también puede aplicárseles esta transformación.

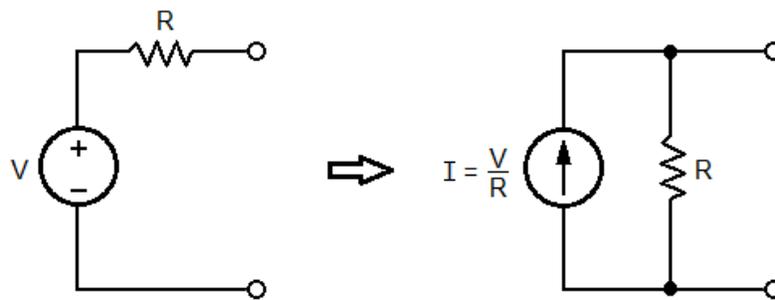


Figura 4.10. Transformación de fuente de voltaje a fuente de corriente.

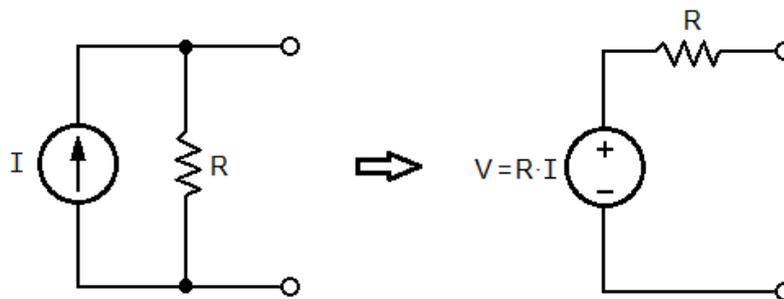


Figura 4.11. Transformación de fuente de corriente a fuente de voltaje.

Ejemplo 4.3. Determine la corriente en el resistor R_1 del circuito de la figura 4.12.

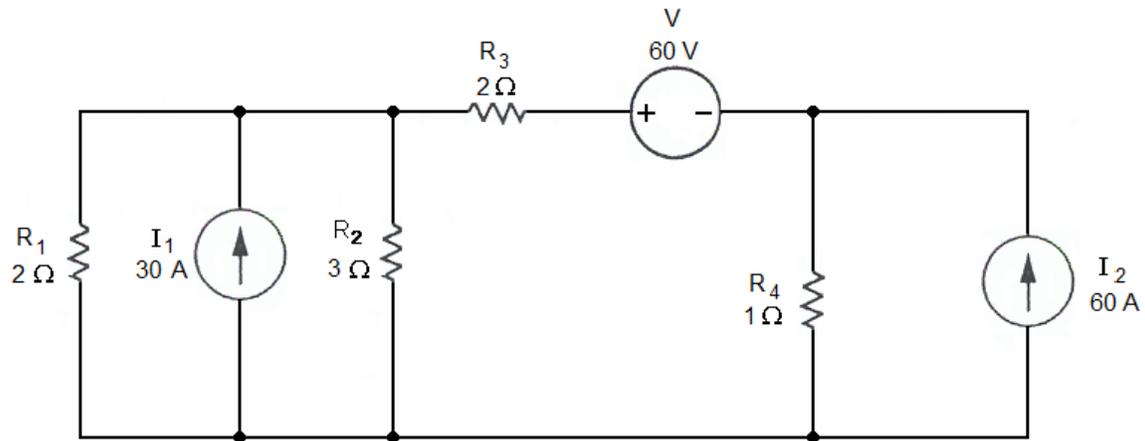


Figura 4.12. Circuito para el ejemplo 4.3.

Solución.

Las fuentes de corriente se pueden transformar en fuentes de voltaje para ir reduciendo el circuito. Es importante notar que debe permanecer R_1 , ya que se requiere conocer la corriente a través de éste. El circuito queda como se ilustra en la figura 4.13.

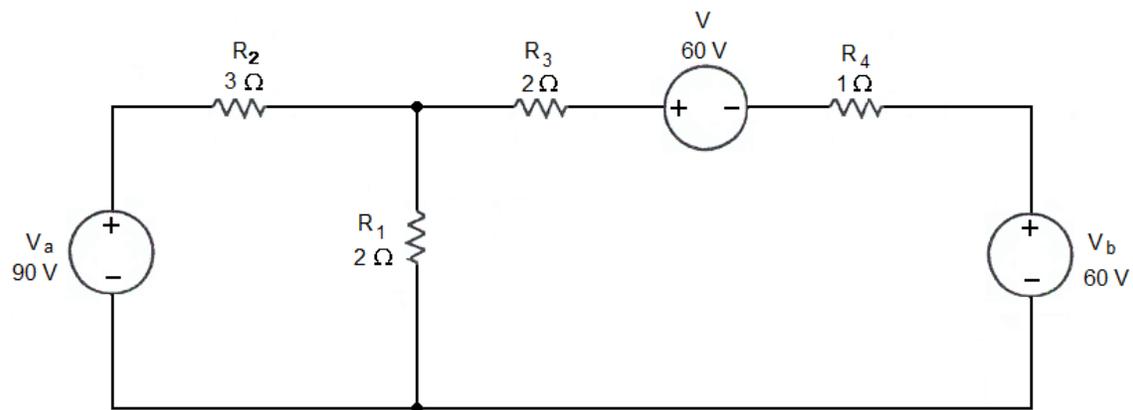


Figura 4.13. Transformación de las fuentes de corriente a fuentes de voltaje.

$$V_a = I_1 R_2 = 30 \text{ A} \cdot 3 \Omega = 90 \text{ V}$$

$$V_b = I_2 R_4 = 60 \text{ A} \cdot 1 \Omega = 60 \text{ V}$$

Se observa que las fuentes de voltaje V y V_b , al igual que los resistores R_3 y R_4 , están conectadas en serie, por lo que el circuito puede simplificarse como se indica en la figura 4.14.

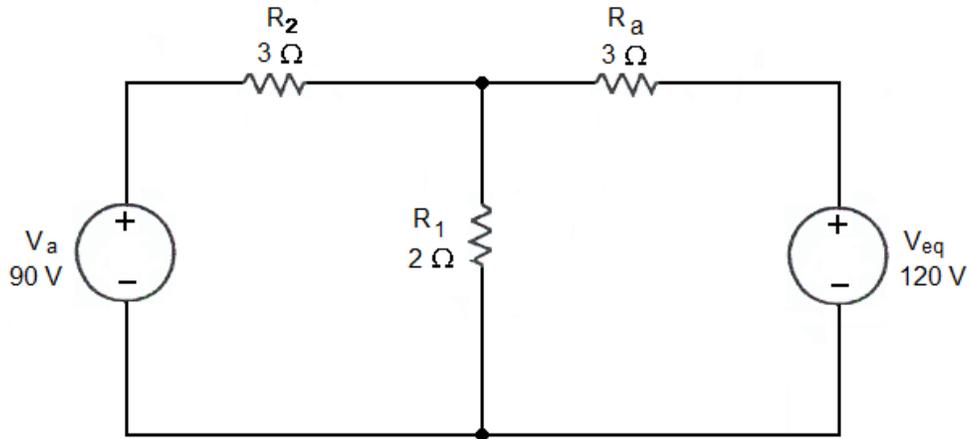


Figura 4.14. Circuito equivalente.

$$V_{eq} = V_b + V = 60 \text{ V} + 60 \text{ V} = 120 \text{ V}$$

$$R_a = R_3 + R_4 = 2 \Omega + 1 \Omega = 3 \Omega$$

Ahora las fuentes de voltaje se transforman en fuentes de corriente (figura 4.15).

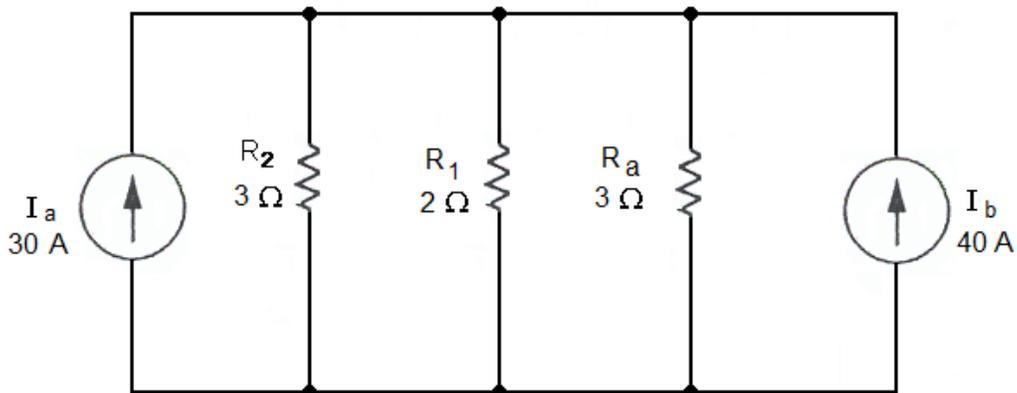


Figura 4.15. Transformación a fuentes de corriente.

$$I_a = \frac{V_a}{R_2} = \frac{90 \text{ V}}{3 \Omega} = 30 \text{ A}$$

$$I_b = \frac{V_{eq}}{R_a} = \frac{120 \text{ V}}{3 \Omega} = 40 \text{ A}$$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchoff y obteniendo el equivalente paralelo de los resistores R_2 y R_a en el circuito anterior, se obtiene el divisor de corriente que se muestra en la figura 4.16.

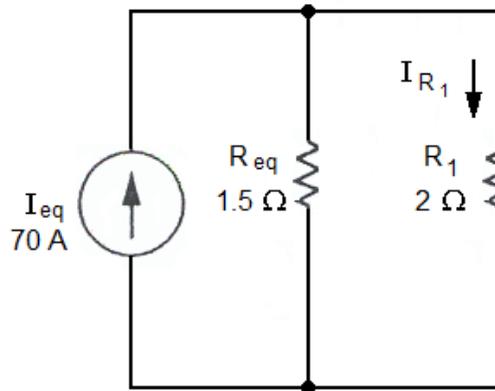


Figura 4.16. Divisor de corriente resultante.

$$I_{eq} = I_a + I_b = 30 \text{ A} + 40 \text{ A} = 70 \text{ A}$$

$$R_{eq} = R_2 || R_a = \frac{3 \Omega \cdot 3 \Omega}{3 \Omega + 3 \Omega} = 1.5 \Omega$$

Finalmente

$$I_{R_1} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_1} I_{eq} = \frac{1.5 \Omega}{1.5 \Omega + 2 \Omega} \cdot 70 \text{ A} = 30 \text{ A}$$

Cuando en el circuito eléctrico existen fuentes dependientes de voltaje o de corriente, la transformación entre fuentes sigue siendo válida, siempre y cuando las variables de control permanezcan explícitas en el circuito durante los procesos de transformación. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4. Determine la corriente i_x indicada en el circuito de la figura 4.17.

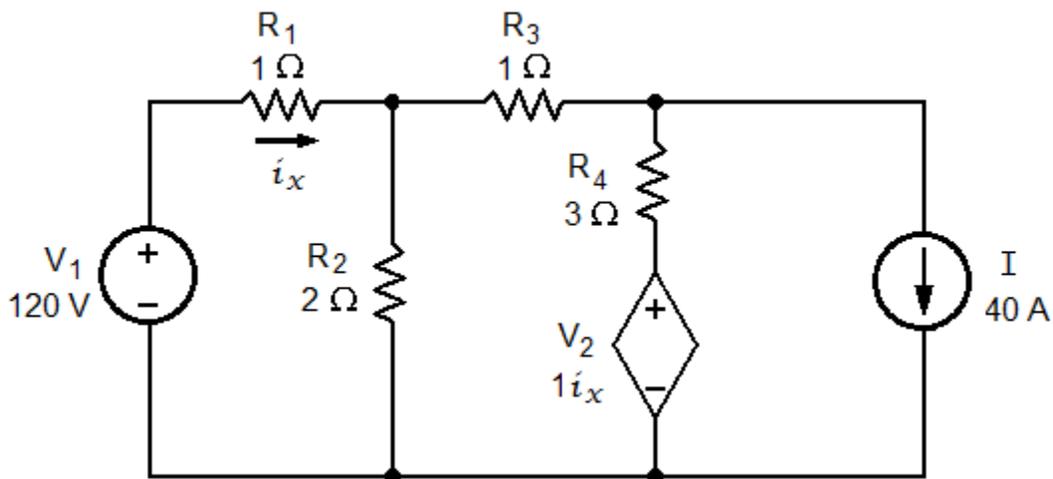


Figura 4.17. Circuito para el ejemplo 4.4.

Solución.

En la simplificación del circuito no se debe eliminar la variable que se busca. Por lo tanto, la fuente dependiente se transforma en fuente de corriente, como muestra la figura 4.18.

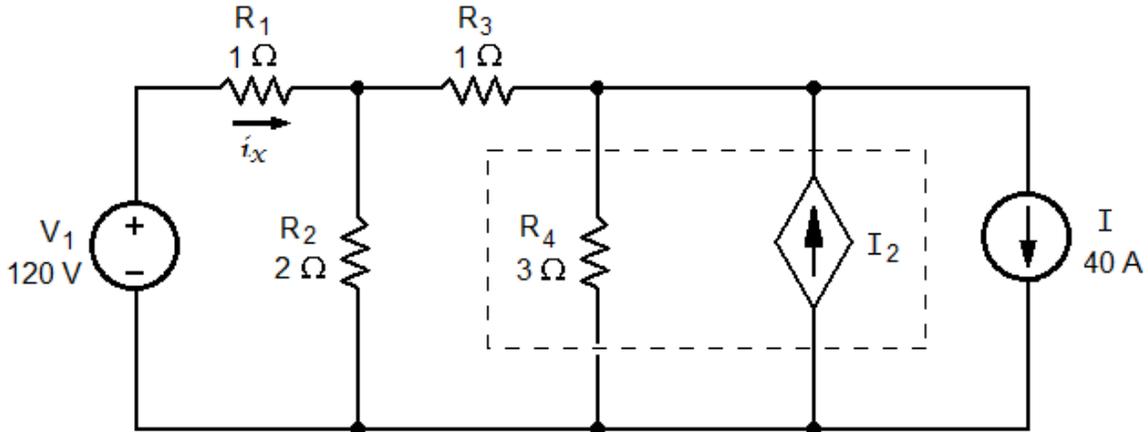


Figura 4.18. Transformación de la fuente dependiente de voltaje a dependiente de corriente.

$$I_2 = \frac{V_2}{R_4} = \frac{1i_x}{R_4}$$

Puesto que el circuito se va a ir reduciendo con base en transformaciones de fuentes y a los resistores en configuración serie y paralelo que se van a ir obteniendo, en las siguientes figuras sólo se mostrará el segmento del circuito donde se van haciendo las simplificaciones, por lo anterior, en la figura 4.19a, se muestra el circuito resultante de aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a las fuentes de corriente del circuito de la figura 4.18.

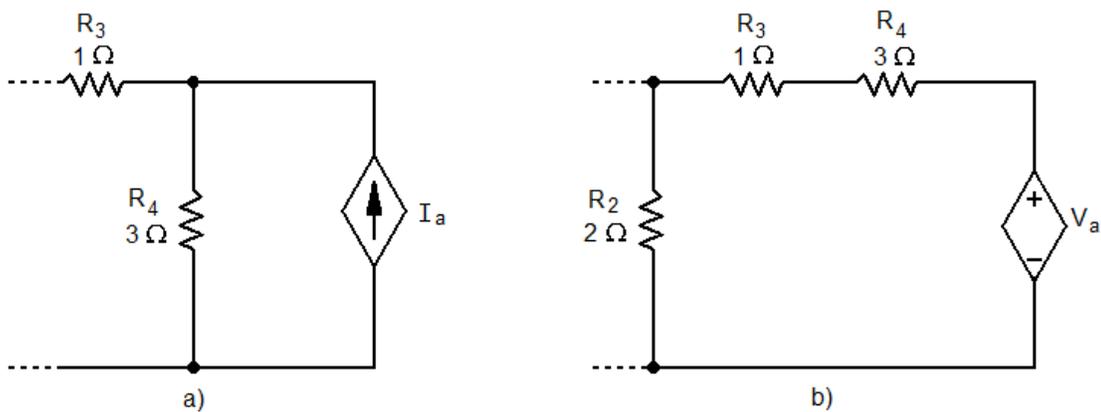


Figura 4.19 Transformación de la fuente de corriente a fuente de voltaje.

$$I_a = I_2 - I = \frac{1i_x}{R_4} - I = \frac{1i_x}{3} - 40 \text{ A}$$

Ahora se transforma la fuente de corriente I_a a una de voltaje, obteniéndose el circuito de la figura 4.19b, donde

$$V_a = R_4 I_a = 3 \Omega \cdot \left(\frac{1i_x}{3} - 40 \text{ A} \right) = 1i_x - 120 \text{ V}$$

Se observa que la conexión de R_3 y R_4 es en serie, por lo que se obtiene su resistencia equivalente, mostrada en la figura 4.20a y una vez más se hace la transformación de la fuente de voltaje a corriente como se indica en la figura 4.20b.

$$R_{eq1} = R_3 + R_4 = 1 \Omega + 3 \Omega = 4 \Omega$$

$$I_b = \frac{V_a}{R_{eq1}} = \frac{1i_x - 120 \text{ V}}{4 \Omega}$$

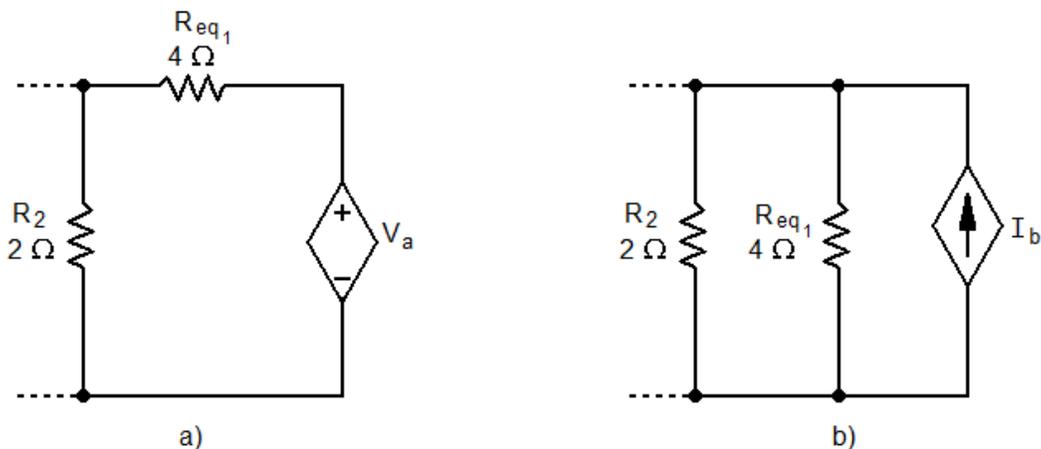


Figura 4.20. Transformación de la fuente de voltaje a fuente de corriente.

Asimismo, se obtiene el equivalente paralelo de los resistores R_2 y R_{eq1} quedando el circuito como se indica en la figura 4.21a.

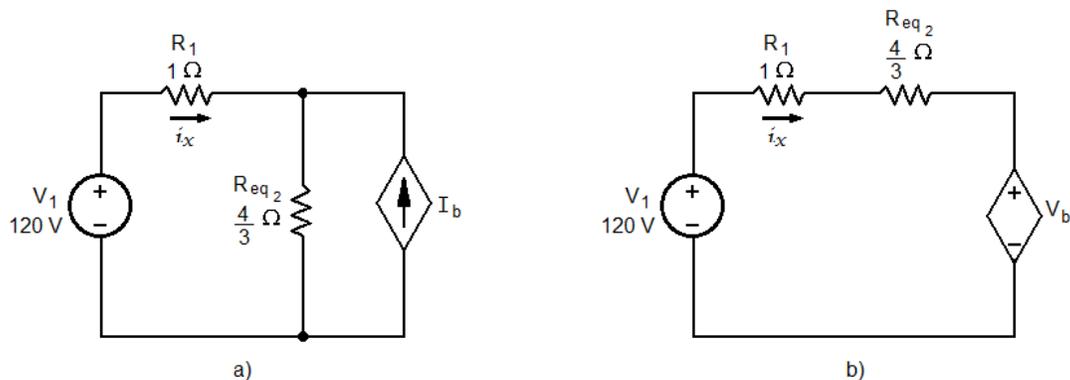


Figura 4.21. Transformación para obtener la corriente i_x .

$$R_{eq2} = R_2 || R_{eq1} = \frac{2 \Omega \cdot 4 \Omega}{2 \Omega + 4 \Omega} = \frac{4}{3} \Omega$$

$$V_b = R_{eq2} I_b = \frac{4}{3} \Omega \cdot \left(\frac{1i_x - 120 \text{ V}}{4 \Omega} \right) = \frac{1i_x - 120 \text{ V}}{3}$$

Para finalizar se lleva a cabo la transformación de la fuente de corriente I_b a fuente de voltaje, como se muestra en el circuito de la figura 4.21b. A partir de éste, se determina la corriente i_x .

$$i_x = \frac{V_1 - V_b}{R_1 + R_{eq2}} = \frac{120 \text{ V} - \frac{1i_x - 120 \text{ V}}{3}}{1 \Omega + \frac{4}{3} \Omega} = \frac{360 \text{ V} - 1i_x + 120 \text{ V}}{7 \Omega} \text{ A}$$

$$i_x = 60 \text{ A}$$

4.3. Teoremas de Thévenin y de Norton

Cuando en un circuito lineal formado por resistores y una o más fuentes de voltaje y/o de corriente, la variable de interés es un voltaje o una corriente a través de una carga, dicho circuito puede substituirse por otro equivalente que contenga una sola fuente de voltaje y un resistor en serie, el cual se conoce como equivalente de Thévenin. Por el contrario, si se substituye por una fuente de corriente y un resistor en paralelo, se denomina equivalente de Norton.

4.3.1 Equivalente de Thévenin.

Para determinar el equivalente de Thévenin, se llevan a cabo los siguientes pasos:

- 1) Se elimina la carga, o porción de red, a través de la cual se desea encontrar el circuito equivalente y se identifican las terminales de conexión de la red restante.
- 2) Se calcula el voltaje a circuito abierto, v_{oc} , entre las terminales identificadas, el cual corresponderá al voltaje Thévenin, V_{Th} .
- 3) Se determina la resistencia Thévenin entre las dos terminales identificadas, desactivando primero las fuentes de voltaje (sustituyéndolas por un corto circuito) y las de corriente (sustituyéndolas por un circuito abierto), y encontrando la resistencia equivalente en la red resistiva que queda. Es importante mencionar que este método para determinar la resistencia Thévenin, se puede aplicar si el circuito contiene únicamente fuentes independientes.

Ejemplo 4.5. Para el circuito que se muestra en la figura 4.22, calcule el voltaje en el resistor de carga R_L , para el valor que se indica en éste y para un valor de 6Ω .

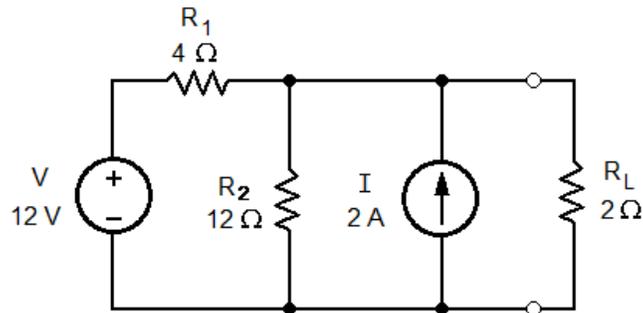


Figura 4.22. Circuito para el ejemplo 4.5.

Solución.

En la figura 4.23, se ha eliminado temporalmente el resistor de carga y se indica con línea punteada la red eléctrica de elementos lineales a reducir; a y b identifican las terminales entre las cuales se determinará el voltaje a circuito abierto.

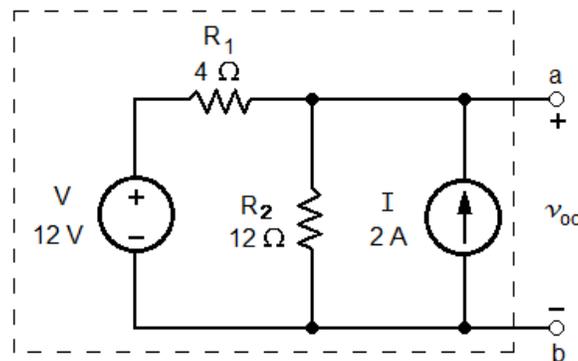


Figura 4.23. Red de elementos lineales a reducir.

Aplicando análisis de nodos, se tiene

$$v_{oc} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V}{R_1} - I = 0$$

Sustituyendo valores y despejando

$$v_{oc} = \left(I + \frac{V}{R_1} \right) \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = \left(2 \text{ A} + \frac{12 \text{ V}}{4 \Omega} \right) \left(\frac{4 \Omega \cdot 12 \Omega}{4 \Omega + 12 \Omega} \right) = 15 \text{ V}$$

Para determinar la resistencia Thévenin, se desactivan temporalmente las fuentes independientes, quedando R_1 y R_2 conectados en paralelo, como se observa en la figura 4.24.

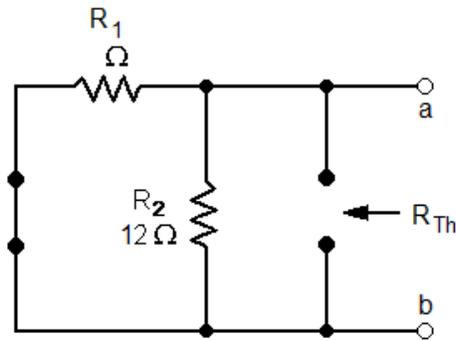


Figura 4.24. Red resistiva resultante.

$$R_{Th} = R_1 || R_2 = \frac{4 \Omega \cdot 12 \Omega}{4 \Omega + 12 \Omega} = 3 \Omega$$

El circuito equivalente de Thévenin, con el resistor de carga conectado, queda como se indica en la figura 4.25.

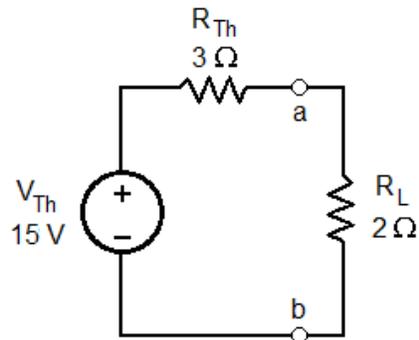


Figura 4.25. Circuito equivalente de Thévenin.

Para determinar el voltaje en el resistor de carga a partir del circuito equivalente, se aplica un divisor de voltaje

$$v_{R_L} = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} V_{Th} = \frac{2 \Omega}{3 \Omega + 2 \Omega} \cdot 15 \text{ V} = \mathbf{6 \text{ V}}$$

Para un valor de 6 Ohms en el resistor de carga, el circuito equivalente de Thévenin es el mismo puesto que la red a reducir no cambia, por lo que se tiene

$$v_{R_L} = \frac{R_L}{R_{Th} + R_L} V_{Th} = \frac{6 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} \cdot 15 \text{ V} = \mathbf{10 \text{ V}}$$

Obsérvese que este método simplifica la obtención de los diferentes parámetros eléctricos en el resistor de carga cuando éste cambia su valor.

Otra forma de determinar la resistencia Thévenin, es aplicar un corto circuito en las terminales a y b, y encontrar la corriente que circula a través de él, llamada corriente de corto circuito, i_{sc} , cuyo sentido es desde a hacia b, como se indica en la figura 4.26.

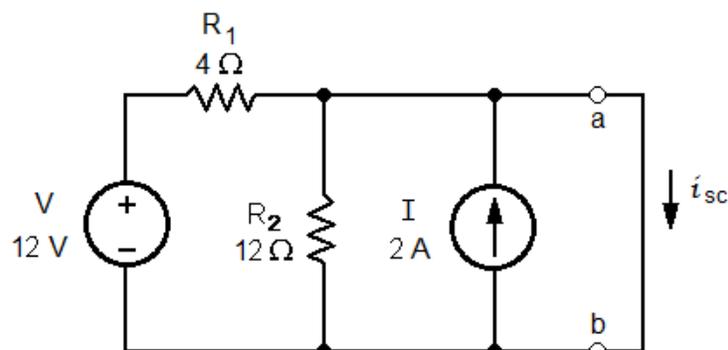


Figura 4.26. Circuito para determinar i_{sc} .

La corriente de corto circuito puede obtenerse aplicando diferentes metodologías. Si se realiza transformación a la fuente de voltaje, el circuito queda como se muestra a continuación.

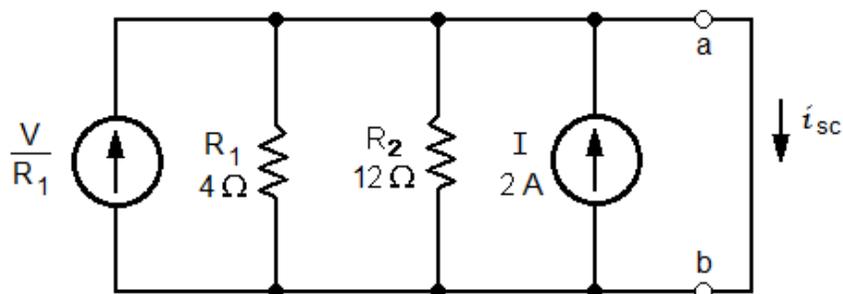


Figura 4.27. Transformación de la fuente de voltaje.

En la figura 4.27 se observa que todos los elementos están en paralelo, obteniéndose la reducción del circuito de la forma

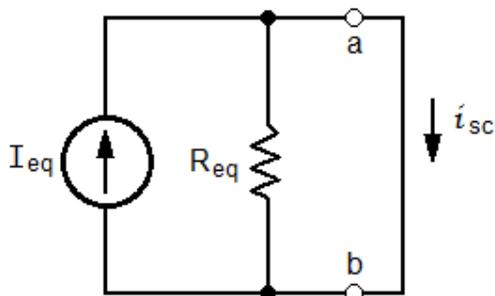


Figura 4.28. Circuito reducido.

donde

$$I_{eq} = \frac{V}{R_1} + I = \frac{12 \text{ V}}{4 \Omega} + 2 \text{ A} = 5 \text{ A}$$

y

$$R_{eq} = R_1 || R_2 = \frac{4 \Omega \cdot 12 \Omega}{4 \Omega + 12 \Omega} = 3 \Omega$$

Al quedar R_{eq} en paralelo con el corto circuito, la resistencia resultante es cero y toda la corriente I_{eq} circula por el corto circuito, teniéndose que

$$i_{sc} = I_{eq} = 5 \text{ A}$$

Es importante hacer notar que la corriente i_{sc} obtenida es la misma que proporciona el circuito de Thévenin en condición de corto circuito entre las terminales de la resistencia de carga, por lo que

$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R_{Th}} \quad (4.10)$$

de donde

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{15 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 3 \Omega$$

que es igual al valor obtenido anteriormente.

En ocasiones, los circuitos eléctricos complejos pueden fraccionarse para ir aplicando el teorema de Thévenin de manera parcial y así obtener de manera sencilla el circuito equivalente total. Por tanto, en cada fracción de circuito se debe determinar el voltaje a circuito abierto y la resistencia Thévenin.

Ejemplo 4.6. Determinar V_0 en el circuito de la figura 4.29.

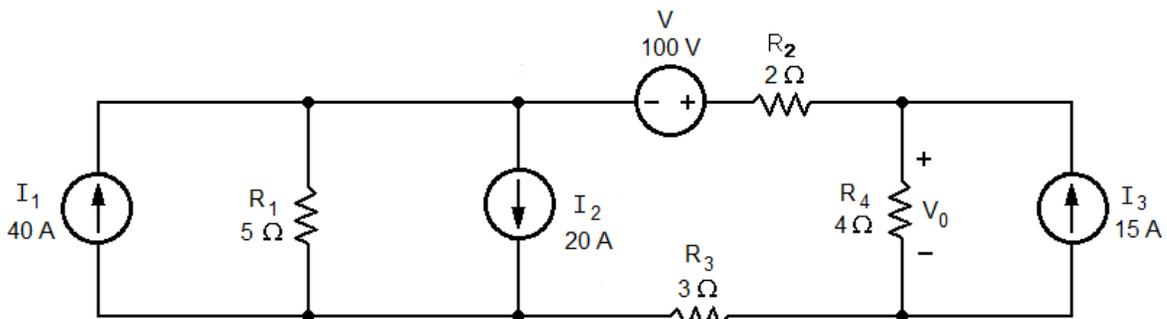


Figura 4.29. Circuito para el ejemplo 4.6.

Solución.

La primera parte del circuito que se considera para reducir es la que contiene las fuentes de corriente y que se muestra en la figura 4.30a. A partir de este circuito, se obtiene una fuente de corriente equivalente, mostrada en la figura 4.30b, cuyo valor es

$$I_{eq_1} = I_1 - I_2 = 40 \text{ A} - 20 \text{ A} = 20 \text{ A}$$

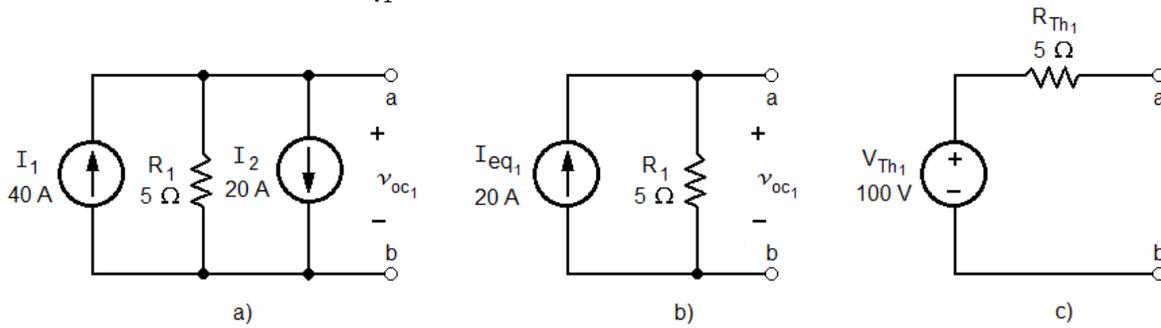


Figura 4.30. Primer equivalente de Thévenin.

Se observa que la resistencia Thévenin en las terminales a y b es igual al valor de la resistencia de R_1 . Asimismo, el voltaje a circuito abierto es

$$v_{oc_1} = R_1 I_{eq_1} = 5 \Omega \cdot 20 \text{ A} = 100 \text{ V} = V_{Th_1}$$

Debido a que los circuitos de las figuras 4.30b y 4.30c son equivalentes entre las terminales a y b, deben tener el mismo voltaje en ellas. Al estar a circuito abierto, en el resistor R_{Th_1} no circula corriente y, por tanto, no hay caída de potencial, lo que hace que el voltaje en las terminales a y b sea igual a V_{Th_1} .

En el circuito de la figura 4.31 se ha sustituido el equivalente de Thévenin anterior y se analiza una nueva porción del circuito a partir de las terminales c y d indicadas.

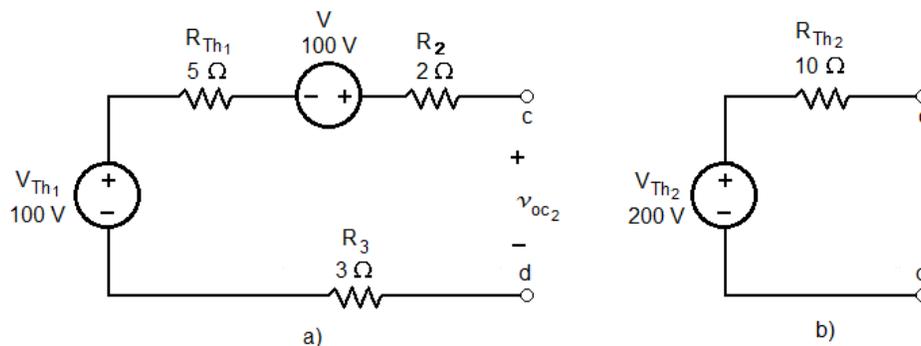


Figura 4.31. Segundo equivalente de Thévenin.

El voltaje a circuito abierto en este caso es

$$v_{oc_2} = V_{Th_1} + V = 100 \text{ V} + 100 \text{ V} = 200 \text{ V} = V_{Th_2}$$

y la resistencia Thévenin

$$R_{Th_2} = R_{Th_1} + R_2 + R_3 = 5 \Omega + 2 \Omega + 3 \Omega = 10 \Omega$$

Con lo cual, el circuito equivalente queda como se indica en la figura 4.31b. Transformando este circuito a fuente de corriente, se tiene

$$I_{eq_2} = \frac{V_{Th_2}}{R_{Th_2}} = \frac{200 \text{ V}}{10 \Omega} = 20 \text{ A}$$

En la última porción de circuito, se elimina el resistor R_4 , por estar en el voltaje de interés, así que se puede considerar como un resistor de carga. Conectando esta porción al circuito transformado, la red eléctrica queda como se muestra en la figura 4.32a, la cual se reduce como se indica en la figura 4.32b.

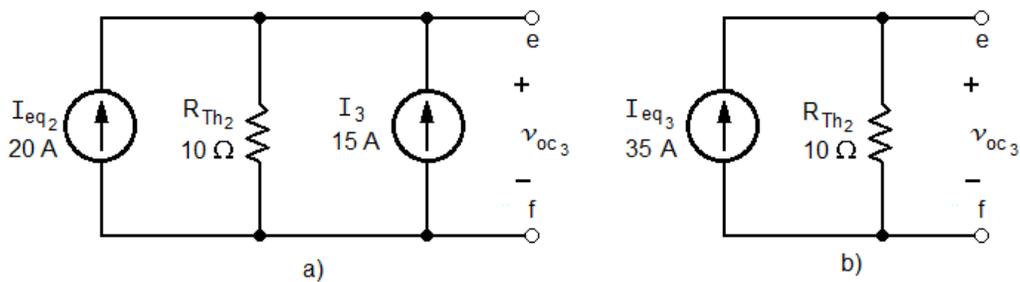


Figura 4.32. Circuito para obtener el tercer equivalente de Thévenin.

$$I_{eq_3} = I_{eq_2} + I_3 = 20 \text{ A} + 15 \text{ A} = 35 \text{ A}$$

$$v_{oc_3} = R_{Th_2} I_{eq_3} = 10 \Omega \cdot 35 \text{ A} = 350 \text{ V} = V_{Th}$$

Obsérvese que la resistencia Thévenin total, R_{Th} , es igual a R_{Th_2} . Transformando el circuito de la figura 4.32b a una fuente de voltaje, y conectando el resistor R_4 , se obtiene el circuito de la figura 4.33.

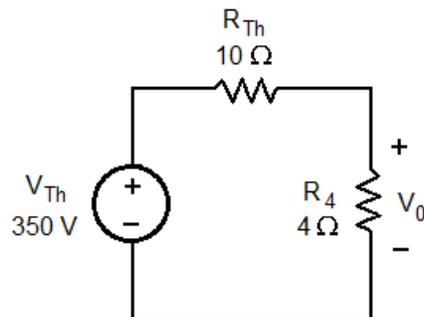


Figura 4.33. Circuito equivalente de Thévenin final.

A partir de este circuito, el voltaje de salida se obtiene aplicando un divisor de voltaje

$$V_o = \frac{R_4}{R_{Th} + R_4} V_{Th} = \frac{4 \Omega}{10 \Omega + 4 \Omega} \cdot 350 \text{ V} = \mathbf{100 \text{ V}}$$

Cuando un circuito eléctrico tiene fuentes dependientes e independientes, y se desea encontrar el equivalente de Thévenin, hay dos formas de calcular la resistencia Thévenin. La primera es encontrar la corriente de corto circuito y el voltaje a circuito abierto, y sustituirlos en la ecuación 4.10. La segunda es desactivar las fuentes independientes y aplicar una fuente de prueba en las terminales de interés del circuito, ya sea de corriente o de voltaje, a la que se le puede dar un valor arbitrario o dejarla indicada sólo como I_T o V_T , según sea el caso. En general, por simplicidad, se asigna un valor unitario a la fuente.

Ejemplo 4.7. Calcular el V_0 en el circuito de la figura 4.34.

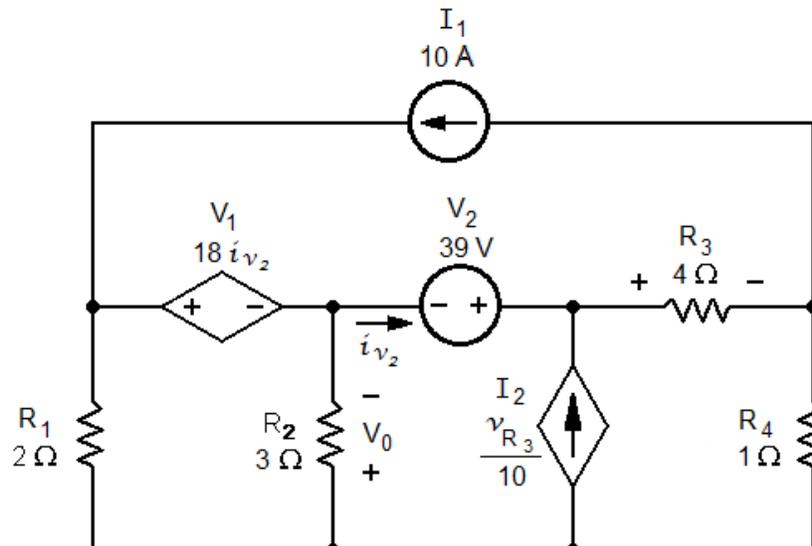


Figura 4.34. Circuito para el ejemplo 4.7.

Solución.

Para determinar V_0 se elimina temporalmente R_2 y se obtiene el voltaje a circuito abierto en las terminales A y B, como se observa en la figura 4.35. Nótese que existe un supernodo formado por las fuentes V_1 y V_2 y que la polaridad del voltaje a circuito abierto se ha propuesto como se indica en dicha figura.

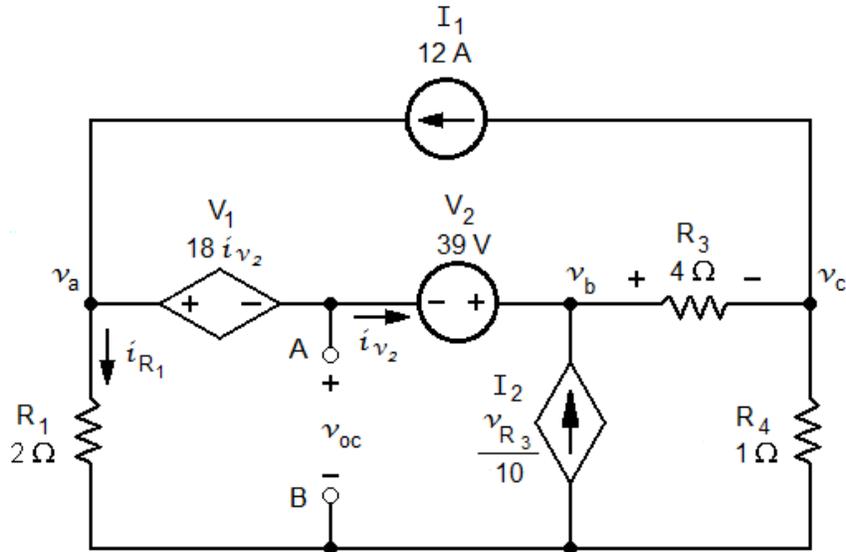


Figura 4.35. Circuito para determinar el voltaje a circuito abierto.

Supernodo:
$$\frac{v_a}{R_1} + \frac{v_b}{R_3} - \frac{v_c}{R_3} - I_1 - I_2 = 0 \quad (4.11)$$

Relación de voltajes en el supernodo:
$$V_1 - V_2 + v_b - v_a = 0 \quad (4.12)$$

Nodo c:
$$v_c \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{v_b}{R_3} + I_1 = 0 \quad (4.13)$$

Sustituyendo los valores de los resistores y fuentes, de 4.11 se obtiene

$$10v_a + 3v_b - 3v_c = 200 \quad (4.14)$$

Para reescribir la ecuación 4.12, es necesario determinar V_1 , en donde

$$V_1 = 18 \Omega \cdot i_{V_2} = 18 \Omega \cdot (I_1 - i_{R_1}) = 18 \Omega \cdot \left(I_1 - \frac{v_a}{R_1} \right) \quad (4.15)$$

Sustituyendo 4.15 en 4.12, así como los valores de los elementos

$$-10v_a + v_b = -141 \quad (4.16)$$

y de 4.13

$$-v_b + 5v_c = -40 \quad (4.17)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por 4.14, 4.16 y 4.17

$$v_a = \frac{1286}{85} \text{ V} \quad v_b = \frac{175}{17} \text{ V} \quad v_c = -\frac{101}{17} \text{ V}$$

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff para encontrar v_{oc}

$$v_{oc} = v_a - V_1 = v_a - (180 \text{ V} - 9v_a) = -\frac{488}{17} \text{ V} \quad (4.18)$$

Para determinar la resistencia Thévenin, es necesario calcular la corriente de corto circuito, lo que se hace a partir del circuito de la figura 4.36.

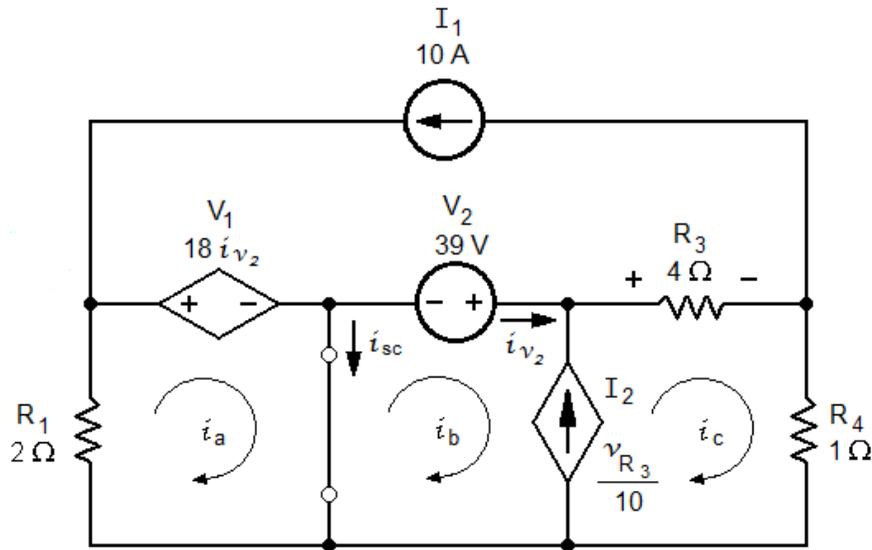


Figura 4.36. Circuito para determinar la corriente de corto circuito.

Malla a: $i_a R_1 + V_1 = 0 \quad (4.19)$

Supermalla b-c: $i_c (R_3 + R_4) + I_1 R_3 - V_2 = 0 \quad (4.20)$

Relación de corrientes en la supermalla: $I_2 = i_c - i_b \quad (4.21)$

Determinando V_1

$$V_1 = 18 \Omega \cdot i_{v_2} = 18 \Omega \cdot (i_b + I_1) \quad (4.22)$$

Sustituyendo 4.22 en 4.19 y los valores correspondientes

$$i_a + 9i_b = -90 \text{ A} \quad (4.23)$$

A partir de la sustitución de los valores en la ecuación 4.20 se puede conocer i_c

$$i_c = -\frac{1}{5} \text{ A}$$

y de 4.21 se obtiene i_b . Para ello primero se determina I_2

$$I_2 = \frac{v_{R_3}}{10 \Omega} = \frac{(i_c + I_1)R_3}{10 \Omega} = \frac{98}{25} \text{ A}$$

de donde

$$i_b = i_c - I_2 = -\frac{103}{25} \text{ A}$$

Ahora despejando i_a de la ecuación 4.23 y sustituyendo los valores encontrados

$$i_a = -90 \text{ A} - 9i_b = -\frac{1323}{25} \text{ A}$$

Por tanto la corriente de corto circuito es

$$i_{sc} = i_a - i_b = -\frac{244}{5} \text{ A}$$

y

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{-\frac{488}{17} \text{ V}}{-\frac{244}{5} \text{ A}} = \frac{10}{17} \Omega$$

El circuito equivalente de Thévenin queda como se muestra en la figura 4.37.

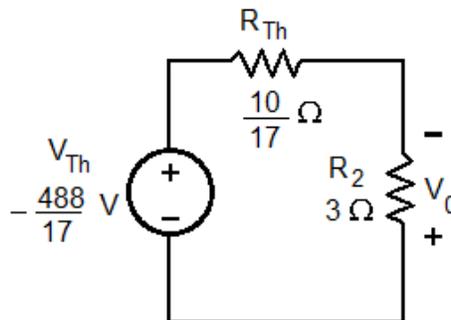


Figura 4.37. Equivalente de Thévenin para determinar V_0 .

Finalmente

$$V_0 = -\frac{R_2}{R_{Th} + R_2} V_{Th} = -\frac{3 \Omega}{\frac{10}{17} \Omega + 3 \Omega} \cdot \frac{-488}{17} \text{ V} = 24 \text{ V}$$

Ejemplo 4.8. Encontrar la resistencia Thévenin entre las terminales a y b del circuito de la figura 4.38.

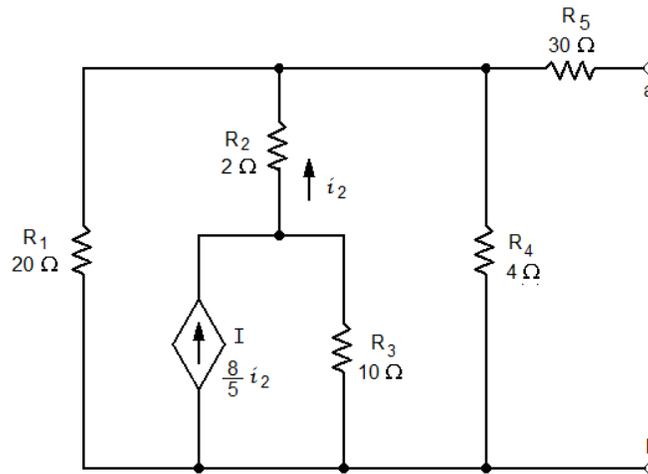


Figura 4.38. Circuito para el ejemplo 4.8.

Solución.

Se propone aplicar una fuente de voltaje de prueba V_T de 1 V entre las terminales a y b del circuito, y determinar la corriente I_T , para calcular la resistencia Thévenin, siendo ésta $R_{Th} = \frac{V_T}{I_T}$.

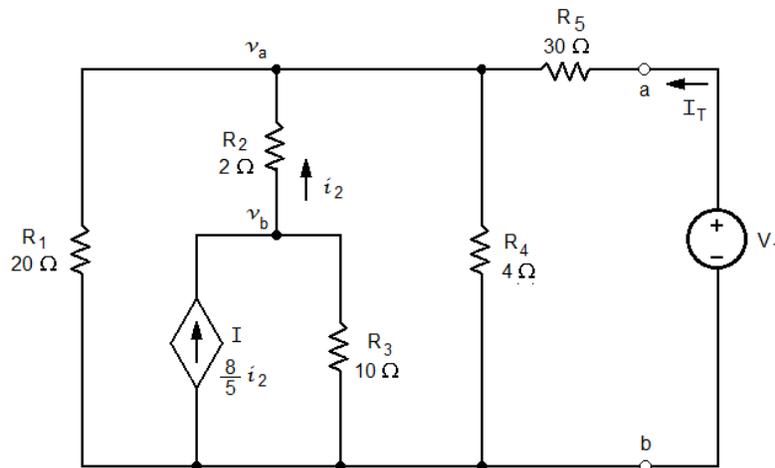


Figura 4.39. Circuito con fuente de prueba de voltaje.

Aplicando análisis de nodos al circuito de la figura 4.39.

$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{v_b}{R_2} - \frac{V_T}{R_5} = 0 \quad (4.24)$$

$$v_b \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_a}{R_2} - I = 0 \quad (4.25)$$

Y puesto que $I = \frac{8}{5}i_2$, se tiene

$$I = \frac{8}{5} \left(\frac{v_b - v_a}{R_2} \right) = \frac{4}{5\Omega} (v_b - v_a) \quad (4.26)$$

Sustituyendo valores en la ecuación 4.24

$$50v_a - 30v_b = 2 \quad (4.27)$$

Ahora sustituyendo 4.26 en 4.25, así como los valores de los elementos

$$3v_a - 2v_b = 0 \quad (4.28)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por 4.27 y 4.28

$$v_a = \frac{2}{5} \text{ V} \quad \text{y} \quad v_b = \frac{3}{5} \text{ V}$$

I_T se determina como

$$I_T = \frac{V_T - v_a}{R_5} = \frac{1 \text{ V} - \frac{2}{5} \text{ V}}{30 \Omega} = \frac{1}{50} \text{ A}$$

Finalmente la resistencia Thévenin es

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = \frac{1 \text{ V}}{\frac{1}{50} \text{ A}} = 50 \Omega$$

Puede comprobarse que si a V_T se le asigna un valor de 50 V en lugar de 1 V, el valor de R_{Th} sigue siendo 50 Ω .

4.3.2 Equivalente de Norton.

Para determinar el equivalente de Norton, se llevan a cabo los siguientes pasos:

- 1) Se elimina la carga, o porción de red, a través de la cual se desea encontrar el circuito equivalente y se identifican las terminales de conexión de la red restante.
- 2) Se determina la corriente de corto circuito i_{sc} entre las terminales identificadas, la cual corresponderá a la corriente Norton, I_N .
- 3) Se calcula la resistencia Thévenin entre las dos terminales identificadas, desactivando primero las fuentes de voltaje (sustituyéndolas por un corto circuito)

y las de corriente (sustituyéndolas por un circuito abierto), y encontrando la resistencia equivalente en la red resistiva que queda. Es importante mencionar que este método para determinar la resistencia Thévenin se puede aplicar si el circuito contiene únicamente fuentes independientes.

Ejemplo 4.9. Para el circuito que se muestra en la figura 4.40, determine el equivalente de Norton en las terminales a y b.

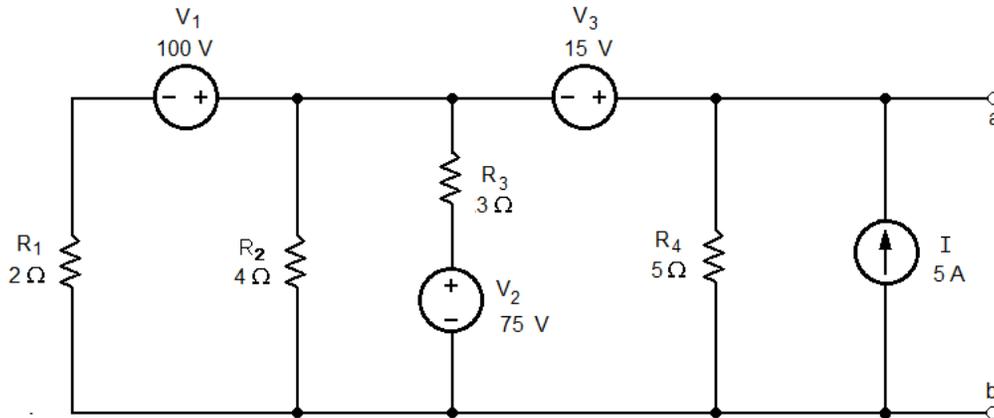


Figura 4.40. Circuito para el ejemplo 4.9.

Solución.

En este caso ya está indicada la red eléctrica a reducir, por lo que ya no es necesario eliminar el resistor de carga o una porción de red. Por lo anterior, se pone un corto circuito entre las terminales a y b, como se muestra en la figura 4.41. En ésta, se han indicado las corrientes de rama cuyo sentido se estableció con base en la polaridad de las fuentes.

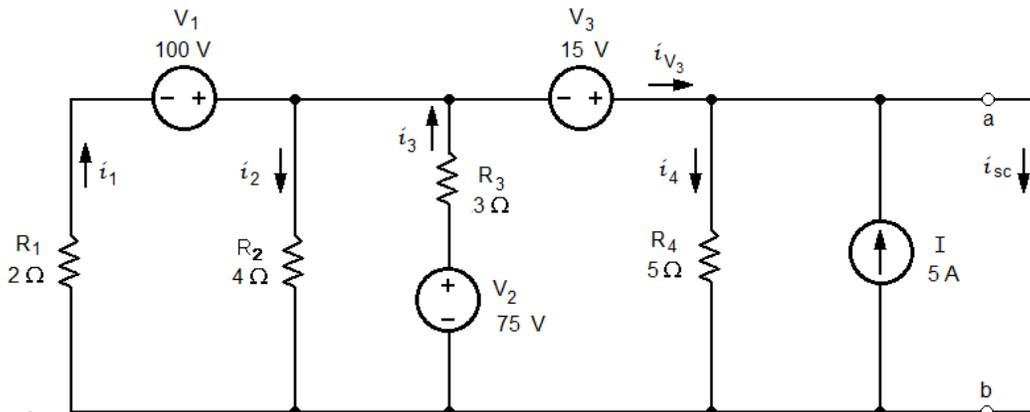


Figura 4.41. Circuito para determinar la corriente de corto circuito.

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff para obtener i_{sc}

$$i_{sc} = I + i_{V_3} - i_4 \quad (4.29)$$

Para encontrar i_{V_3} , se observa del circuito

$$i_{V_3} = i_1 - i_2 + i_3 \quad (4.30)$$

Debido al corto circuito entre a y b, se puede observar que la terminal positiva de la fuente V_3 queda conectada al nodo inferior del circuito, como se muestra en el segmento de circuito de la figura 4.42 y, por tanto, en paralelo con R_2 .

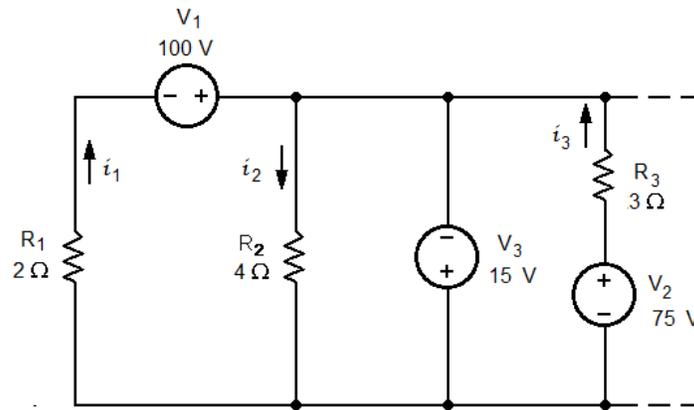


Figura 4.42. Segmento reordenado del circuito anterior.

Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff en la malla del lado izquierdo del circuito, se obtiene

$$R_1 i_1 - V_1 - V_3 = 0$$

de donde

$$i_1 = \frac{V_1 + V_3}{R_1}$$

Las corrientes i_2 e i_3 se obtienen de manera similar y se sustituyen en la ecuación 4.30

$$i_{V_3} = \frac{V_1 + V_3}{R_1} - \left(-\frac{V_3}{R_2}\right) + \frac{V_2 + V_3}{R_3}$$

Sustituyendo los valores de los elementos en la ecuación anterior

$$i_{V_3} = \frac{365}{4} \text{ A}$$

El corto circuito en las terminales a y b hace que el voltaje en R_4 sea cero y, por tanto i_4 también. Sustituyendo los valores de las corrientes en la ecuación 4.29, se tiene

$$i_{sc} = 5 \text{ A} + \frac{365}{4} \text{ A} - 0 \text{ A} = \frac{385}{4} \text{ A} = I_N$$

lo que corresponde a la corriente Norton.

El circuito de la figura 4.43 permite obtener la resistencia Thévenin.

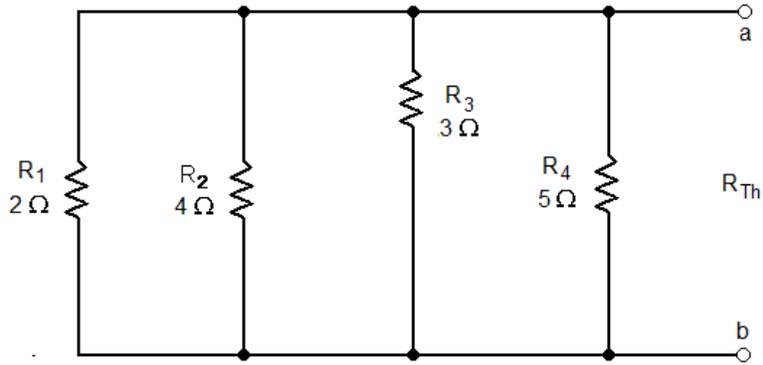


Figura 4.43. Red resistiva para calcular la resistencia Thévenin.

$$R_{Th} = R_1 || R_2 || R_3 || R_4 = \frac{60}{77} \Omega$$

Finalmente, el circuito equivalente de Norton queda

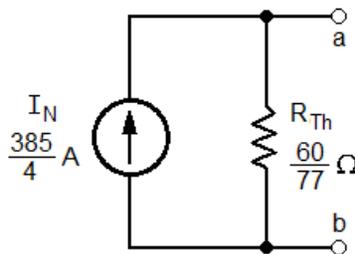


Figura 4.44. Circuito equivalente de Norton.

Obsérvese que si se aplica una transformación de fuente al circuito de la figura 4.44, se obtiene directamente el equivalente de Thévenin y, a su vez, éste puede ser transformado para obtener el de Norton.

Ejemplo 4.10. Para el circuito que se muestra en la figura 4.45, calcule la corriente en el resistor R_5 .

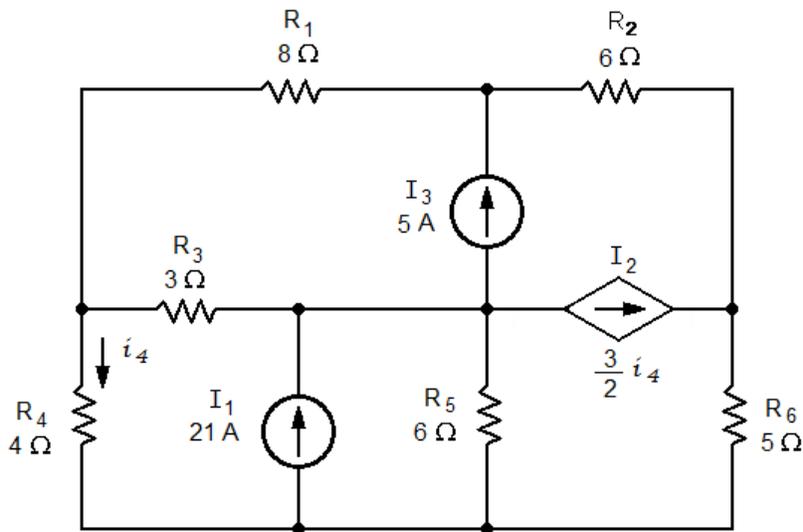


Figura 4.45. Circuito para el ejemplo 4.10.

Solución.

Debido a que se desea calcular la corriente en el resistor R_5 , éste puede considerarse como un resistor de carga y ser eliminado para determinar el equivalente de Norton. Como el circuito contiene una fuente dependiente, la resistencia Thévenin no puede obtenerse de manera directa, por lo que se puede aplicar una fuente de prueba o usar la relación 4.10, siendo ésta última la elegida para resolver este problema. Para ello se requiere determinar el voltaje a circuito abierto y la corriente de corto circuito. El circuito de la figura 4.46 se emplea para calcular el voltaje a circuito abierto.

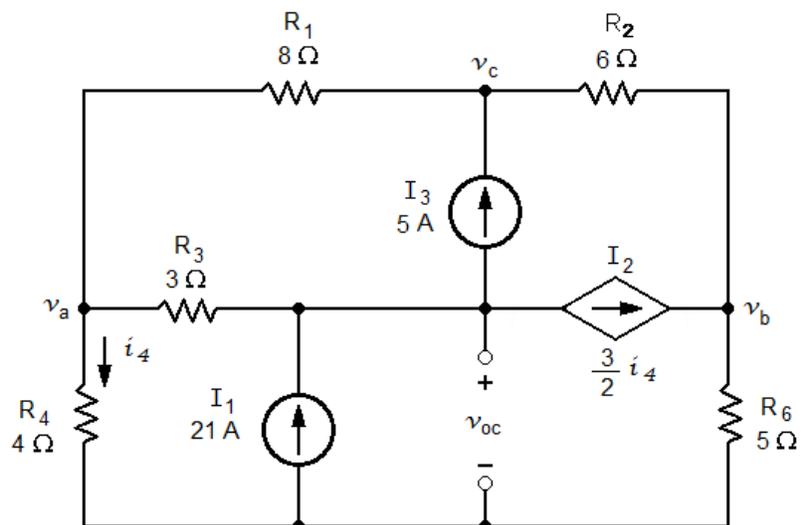


Figura 4.46. Circuito para determinar el voltaje a circuito abierto.

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{v_c}{R_1} - \frac{v_{oc}}{R_3} = 0 \quad (4.31)$$

Nodo b:
$$v_b \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_c}{R_2} - I_2 = 0 \quad (4.32)$$

Nodo c:
$$v_c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_a}{R_1} - \frac{v_b}{R_2} - I_3 = 0 \quad (4.33)$$

Nodo v_{oc} :
$$v_{oc} \left(\frac{1}{R_3} \right) - I_1 + I_2 + I_3 - \frac{v_a}{R_3} = 0 \quad (4.34)$$

I_2 está dada por

$$I_2 = \frac{3}{2} i_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_a}{R_4} \quad (4.35)$$

Sustituyendo valores en 4.31

$$17v_a - 3v_c - 8v_{oc} = 0 \quad (4.36)$$

Sustituyendo 4.35 en 4.32, así como los valores

$$-45v_a + 44v_b - 20v_c = 0 \quad (4.37)$$

De 4.33

$$-3v_a - 4v_b + 7v_c = 120 \quad (4.38)$$

Y de 4.34

$$v_a + 8v_{oc} = 384 \quad (4.39)$$

La solución del sistema de ecuaciones formado por 4.36 a 4.39 es

$$v_a = \frac{359}{11} \text{ V} \quad v_b = \frac{2825}{44} \text{ V} \quad v_c = \frac{746}{11} \text{ V} \quad v_{oc} = \frac{3865}{88} \text{ V}$$

En la figura 4.47 se muestra el circuito para calcular la corriente de corto circuito.

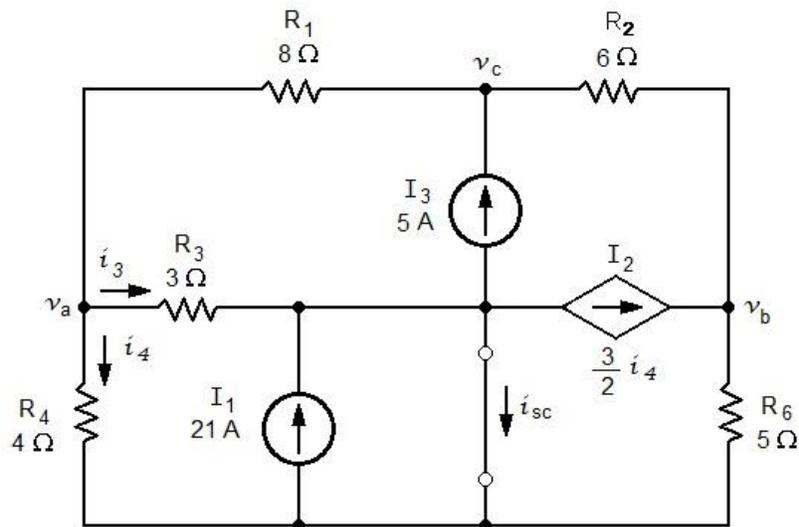


Figura 4.47. Circuito para determinar la corriente de corto circuito.

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{v_c}{R_1} = 0 \quad (4.40)$$

Nodo b:
$$v_b \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} \right) - \frac{v_c}{R_2} - I_2 = 0 \quad (4.41)$$

Nodo c:
$$v_c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_a}{R_1} - \frac{v_b}{R_2} - I_3 = 0 \quad (4.42)$$

Sustituyendo valores en 4.40

$$17v_a - 3v_c = 0 \quad (4.43)$$

Sustituyendo 4.35 en 4.41, así como los valores

$$-45v_a + 44v_b - 20v_c = 0 \quad (4.44)$$

De 4.42

$$-3v_a - 4v_b + 7v_c = 120 \quad (4.45)$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$v_a = \frac{264}{49} \text{ V} \quad v_b = \frac{950}{49} \text{ V} \quad v_c = \frac{1496}{49} \text{ V}$$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff para encontrar i_{sc}

$$i_{sc} = I_1 + i_3 - I_3 - I_2 = 21 \text{ A} + \frac{v_a}{3 \Omega} - 5 \text{ A} - \frac{3}{2} \cdot \frac{v_a}{4 \Omega} = \frac{773}{49} \text{ A}$$

De donde

$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{\frac{3865}{88} \text{ V}}{\frac{773}{49} \text{ A}} = \frac{245}{88} \Omega$$

El equivalente de Norton queda de la forma

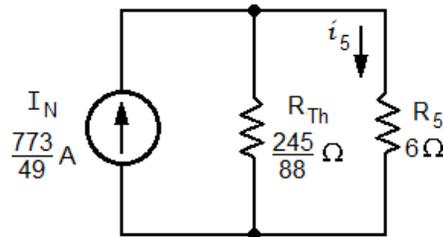


Figura 4.48. Equivalente de Norton.

Finalmente i_5 se obtiene a través de un divisor de corriente

$$i_5 = \frac{R_{Th}}{R_{Th} + R_5} I_N = \frac{\frac{245}{88} \Omega}{\frac{245}{88} \Omega + 6 \Omega} \cdot \frac{773}{49} \text{ A} = 5 \text{ A}$$

Ejemplo 4.11. Para el circuito de la figura 4.49 determinar la corriente que circula por el resistor R_6 .

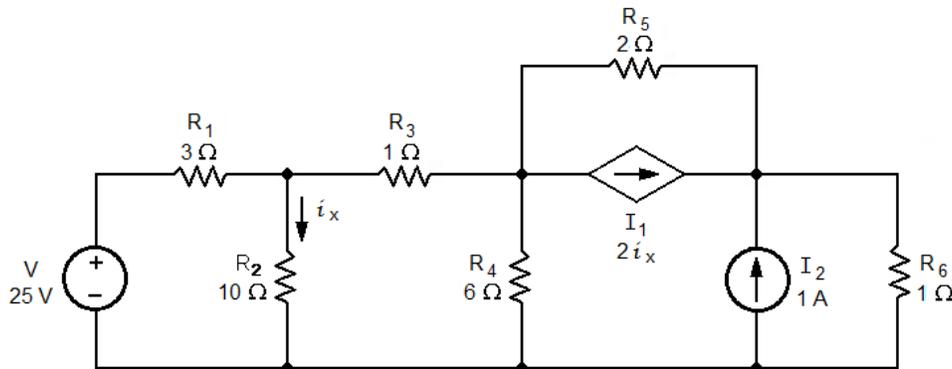


Figura 4.49. Circuito para el ejemplo 4.11.

Solución.

El resistor R_6 se puede ver como un elemento de carga, por lo tanto se quita temporalmente para obtener el equivalente de Norton. Inicialmente se obtendrá la corriente de corto circuito como se muestra en la figura 4.50.

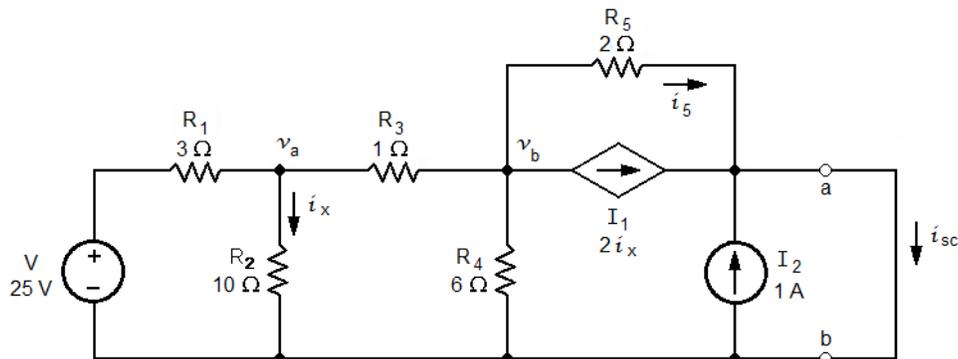


Figura 4.50. Circuito para determinar la corriente a corto circuito.

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{V}{R_1} - \frac{v_b}{R_3} = 0 \quad (4.46)$$

Nodo b:
$$v_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{v_a}{R_3} + I_1 = 0 \quad (4.47)$$

I_1 es
$$I_1 = 2i_x = 2 \cdot \frac{v_a}{R_2} = \frac{1}{5 \Omega} v_a \quad (4.48)$$

Sustituyendo valores en 4.46

$$43v_a - 30v_b = 250 \quad (4.49)$$

Sustituyendo 4.48 en 4.47, así como los valores

$$-24v_a + 50v_b = 0 \quad (4.50)$$

La solución del sistema de ecuaciones formado por 4.49 y 4.50 es

$$v_a = \frac{1250}{143} \text{ V} \quad v_b = \frac{600}{143} \text{ V}$$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff

$$i_{sc} = i_5 + I_1 + I_2$$

$$i_{sc} = \frac{v_b}{R_5} + \frac{v_a}{5 \Omega} + I_2 = \frac{600}{143} \text{ V} + \frac{1250}{143} \text{ V} + 1 \text{ A} = \frac{693}{143} \text{ A}$$

Para obtener la resistencia Thévenin se aplica una fuente de corriente de prueba de 1 A, por lo que es necesario desactivar exclusivamente las fuentes independientes, como se indica en la figura 4.51.

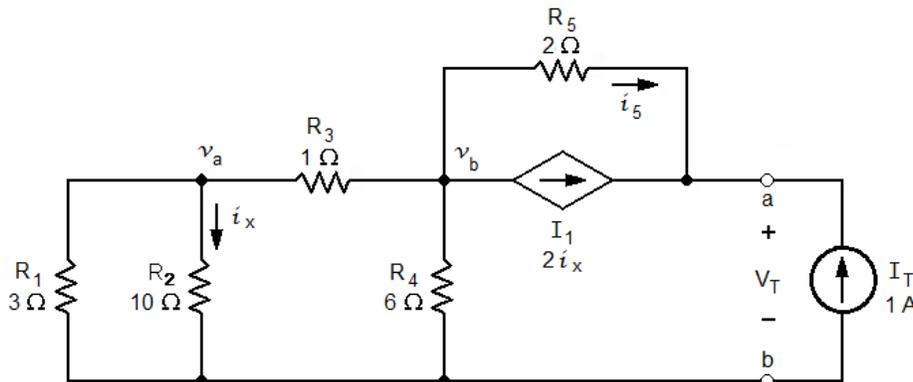


Figura 4.51. Circuito para determinar la resistencia Thévenin.

Nodo a:
$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_b}{R_3} = 0 \quad (4.51)$$

Nodo b:
$$v_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{v_a}{R_3} - \frac{V_T}{R_5} + I_1 = 0 \quad (4.52)$$

En el nodo superior de la fuente de prueba

$$\frac{V_T}{R_5} - \frac{v_b}{R_5} - I_1 - I_T = 0 \quad (4.53)$$

Sustituyendo valores en 4.51

$$43v_a - 30v_b = 0 \quad (4.54)$$

Sustituyendo 4.48 en 4.52 y 4.53, así como los valores, se obtiene, respectivamente

$$-24v_a + 50v_b - 15V_T = 0 \quad (4.55)$$

$$-2v_a - 5v_b + 5V_T = 10I_T \quad (4.56)$$

La solución del sistema de ecuaciones formado por 4.54 a 4.56 es

$$v_a = \frac{180}{121} \text{ V} \quad v_b = \frac{258}{121} \text{ V} \quad V_T = \frac{52}{11} \text{ V}$$

Sustituyendo estos valores

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = \frac{\frac{52}{11} \text{ V}}{1 \text{ A}} = \frac{52}{11} \Omega$$

El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 4.52.

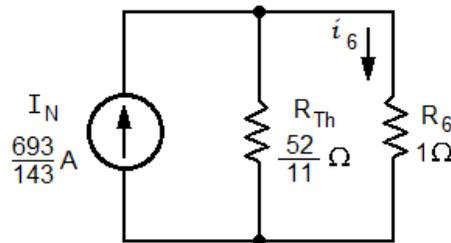


Figura 4.52. Circuito equivalente de Norton.

Ahora aplicando un divisor de corriente

$$i_6 = \frac{R_{Th}}{R_{Th} + R_6} I_N = \frac{\frac{52}{11} \Omega}{\frac{52}{11} \Omega + 1 \Omega} \cdot \frac{693}{143} \text{ A} = 4 \text{ A}$$

4.4. Teorema de máxima transferencia de potencia

En el análisis de los circuitos eléctricos lineales, en ocasiones interesa determinar la máxima potencia que puede ser entregada a una carga, así como la forma en la que se puede ajustar la carga para que se efectúe la máxima transferencia de potencia. Este análisis se puede simplificar si se aplica el teorema de Thévenin.

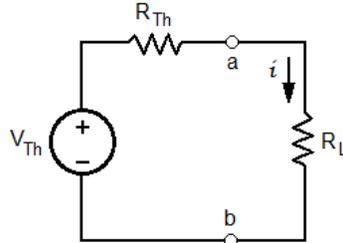


Figura 4.53. Circuito para obtener máxima transferencia de potencia.

Considérese el circuito de la figura 4.53. La potencia entregada al resistor de carga R_L es

$$P_{R_L} = i^2 R_L = \left(\frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L \quad (4.57)$$

De esta ecuación se observa que cuando $R_L = 0$ la potencia disipada es cero, y cuando $R_L \rightarrow \infty$ la potencia disipada tiende a cero. Por lo anterior, debe existir un valor de R_L que haga que la potencia transferida a éste sea máxima.

Para determinar el valor de R_L que maximiza la potencia, la ecuación 4.57 se deriva con respecto a R_L y se iguala a cero

$$\frac{dP_{R_L}}{dR_L} = \frac{(R_{Th} + R_L)^2 V_{Th}^2 - 2V_{Th}^2 R_L (R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} = 0$$

Desarrollando operaciones algebraicas se obtiene que

$$R_L = R_{Th}$$

Por tanto, la máxima transferencia de potencia ocurre cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia Thévenin. Al sustituir R_L por R_{Th} en la ecuación 4.57 se tiene que la potencia máxima entregada a la carga es

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$

Ejemplo 4.12. Determinar la máxima potencia que el circuito de la figura 4.53 transfiere al resistor de carga R_L .

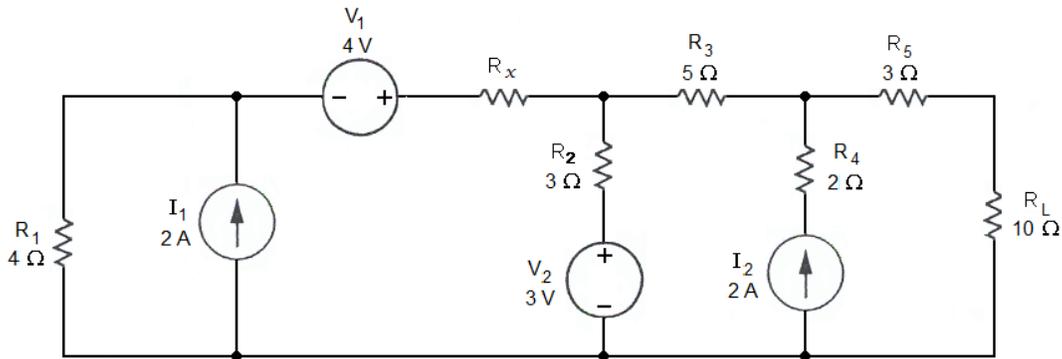


Figura 4.53. Circuito para el ejemplo 4.12.

Solución.

El valor del resistor R_x se obtiene a partir de la resistencia Thévenin, ya que el valor de éste es igual a la resistencia de carga, cuando se requiere que el circuito transfiera la máxima potencia. En la figura 4.54 se observa la red resistiva resultante para obtener la resistencia Thévenin.

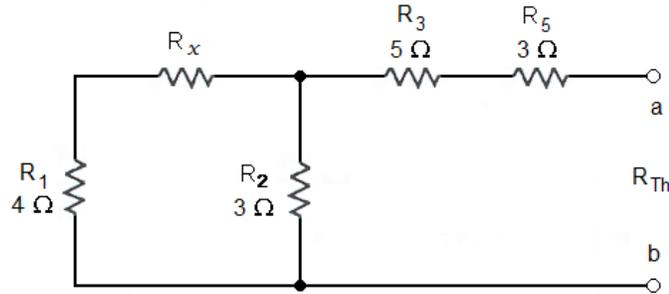


Figura 4.54 Circuito para determinar la resistencia Thévenin.

A partir de este circuito, se tiene que

$$R_{Th} = [(R_1 + R_x) || R_2] + R_3 + R_5 = \frac{(R_1 + R_x) \cdot R_2}{R_1 + R_x + R_2} + R_3 + R_5$$

Ya que $R_L = R_{Th} = 10 \Omega$, y después de sustituir valores en la expresión anterior, se tiene

$$10 \Omega = \frac{(4 \Omega + R_x) \cdot 3 \Omega}{4 \Omega + R_x + 3 \Omega} + 5 \Omega + 3 \Omega$$

Despejando R_x , se llega a que

$$R_x = 2 \Omega$$

A partir de la figura 4.55 se determina el voltaje a circuito abierto.

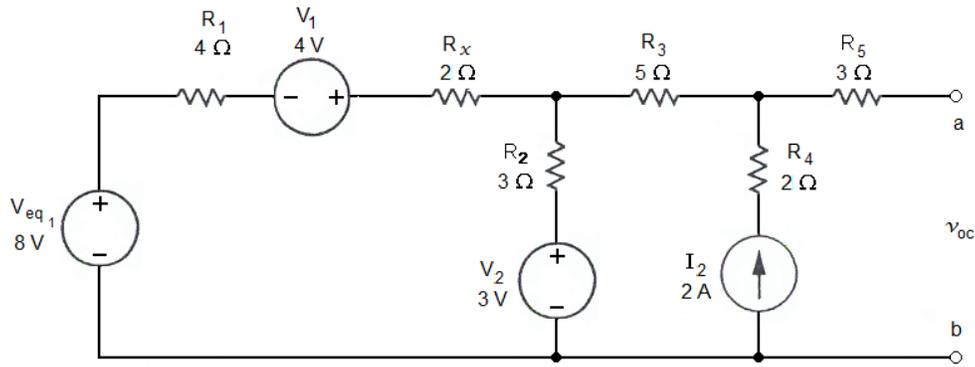


Figura 4.55. Circuito para calcular el voltaje a circuito abierto.

En este circuito, la fuente de corriente I_1 se transforma en una de voltaje, tal que

$$V_{eq1} = R_1 I_1 = 4 \Omega \cdot 2 A = 8 V$$

Haciendo las respectivas sumas algebraicas de las fuentes de voltaje y de los resistores que están en serie, el circuito queda como se indica en la figura 4.56.

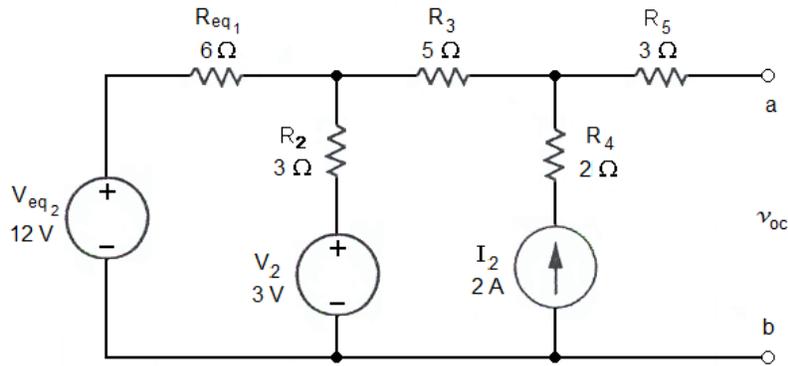


Figura 4.56. Reducción de fuentes de voltaje.

De donde

$$V_{eq2} = V_{eq1} + V_1 = 8 V + 4 V = 12 V$$

$$R_{eq1} = R_1 + R_x = 4 \Omega + 2 \Omega = 6 \Omega$$

A continuación se hace la transformación de las fuentes V_{eq2} y V_2 a fuentes de corriente. El circuito queda como se observa en la figura 4.57.

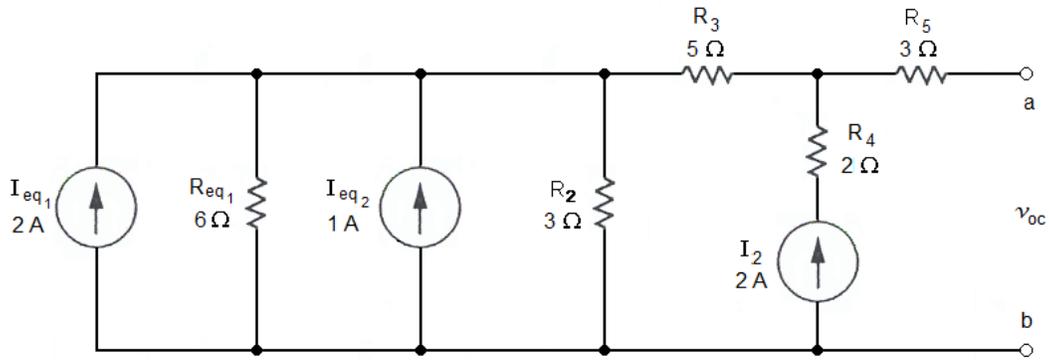


Figura 4.57. Transformación a fuentes de corriente.

En donde

$$I_{eq1} = \frac{V_{eq2}}{R_{eq1}} = \frac{12 \text{ V}}{6 \Omega} = 2 \text{ A}$$

$$I_{eq2} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{3 \text{ V}}{3 \Omega} = 1 \text{ A}$$

Del circuito anterior se obtiene el que se muestra en la figura 4.58, cuando se realiza la suma algebraica de las fuentes de corriente y el equivalente paralelo de los resistores

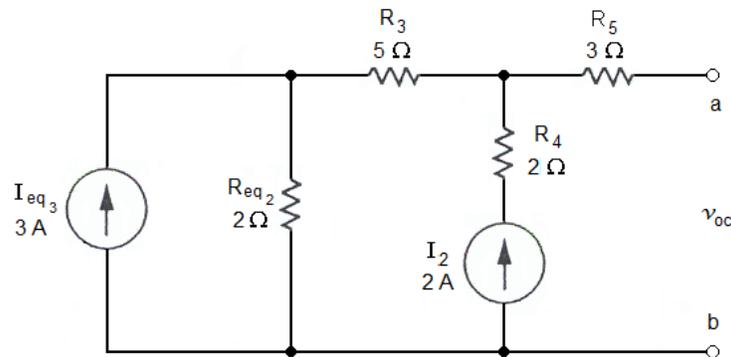


Figura 4.58. Reducción de fuentes de corriente.

Donde

$$I_{eq3} = I_{eq1} + I_{eq2} = 2 \text{ A} + 1 \text{ A} = 3 \text{ A}$$

$$R_{eq2} = R_{eq1} || R_2 = \frac{6 \Omega \cdot 3 \Omega}{6 \Omega + 3 \Omega} = 2 \Omega$$

Finalmente se hace una última transformación de la fuente de corriente I_{eq3} a una fuente de voltaje, como se indica en el circuito de la figura 4.59, siendo en éste donde se obtiene el voltaje a circuito abierto.

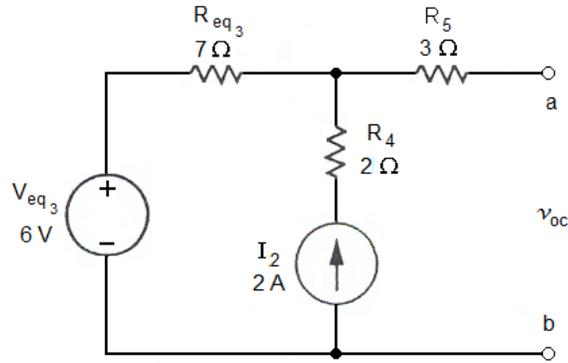


Figura 4.59. Circuito equivalente final.

Por tanto

$$V_{eq3} = R_{eq2} I_{eq3} = 2 \Omega \cdot 3 \text{ A} = 6 \text{ V}$$

$$R_{eq3} = R_{eq2} + R_3 = 2 \Omega + 5 \Omega = 7 \Omega$$

Dado que no hay flujo de corriente a través de R_5 , el voltaje entre las terminales a y b es

$$v_{oc} = V_{eq3} + R_{eq3} I_2 = 6 \text{ V} + (7 \Omega \cdot 2 \text{ A}) = 20 \text{ V} = V_{Th}$$

Por tanto

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(20 \text{ V})^2}{4 \cdot 10 \Omega} = 10 \text{ W}$$

Ejemplo 4.13. Calcular la máxima potencia que el circuito de la figura 4.60 podría transferir a una carga que se conecta entre las terminales a y b.

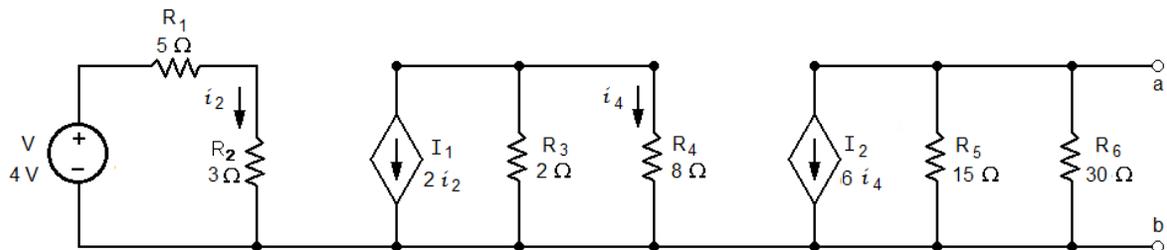


Figura 4.60. Circuito para el ejemplo 4.13.

Solución:

En este tipo de circuitos se sugiere resolver de derecha a izquierda, debido a que las variables que controlan las fuentes dependientes se encuentran en etapas previas.

Al no existir carga en la red eléctrica, el voltaje a circuito abierto se obtiene directamente en las terminales a y b, siendo éste

$$v_{oc} = -(R_5 || R_6) I_2 = -(R_5 || R_6) \cdot 6i_4 \quad (4.58)$$

La corriente i_4 se calcula aplicando un divisor de corriente

$$i_4 = -\frac{R_3}{R_3+R_4} I_1 = -\frac{R_3}{R_3+R_4} (2i_2) \quad (4.59)$$

e i_2 por la ley de Ohm

$$i_2 = \frac{V}{R_1+R_2} = \frac{4 \text{ V}}{5 \Omega + 3 \Omega} = \frac{1}{2} \text{ A} \quad (4.60)$$

Sustituyendo 4.60 en 4.59

$$i_4 = -\frac{2 \Omega}{2 \Omega + 8 \Omega} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \text{ A} \right) = -\frac{1}{5} \text{ A} \quad (4.61)$$

y 4.61 en 4.58, se tiene que

$$v_{oc} = -\frac{15 \Omega \cdot 30 \Omega}{15 \Omega + 30 \Omega} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{5} \text{ A} \right) = 12 \text{ V}$$

Para determinar la resistencia Thévenin se calcula la corriente de corto circuito, debido a que el circuito contiene fuentes dependientes.

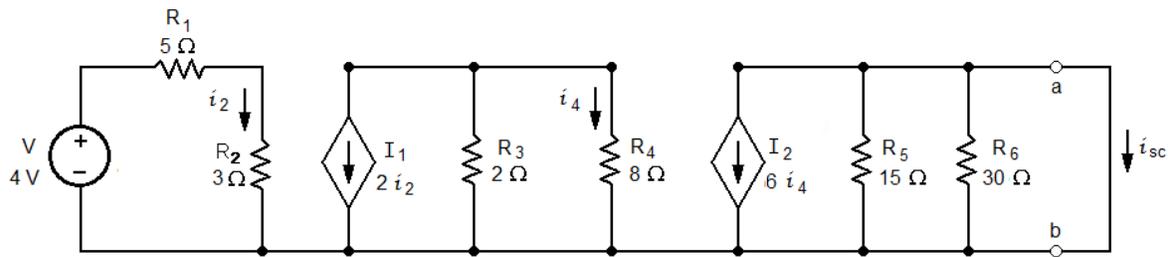


Figura 4.61. Circuito para determinar la corriente de corto circuito.

La corriente que circula por el corto circuito es $-I_2$, y los resistores R_5 y R_6 quedan anulados por éste.

$$i_{sc} = -I_2 = -6i_4 = -6 \cdot \left(-\frac{1}{5} \text{ A} \right) = \frac{6}{5} \text{ A}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de v_{oc} e i_{sc}

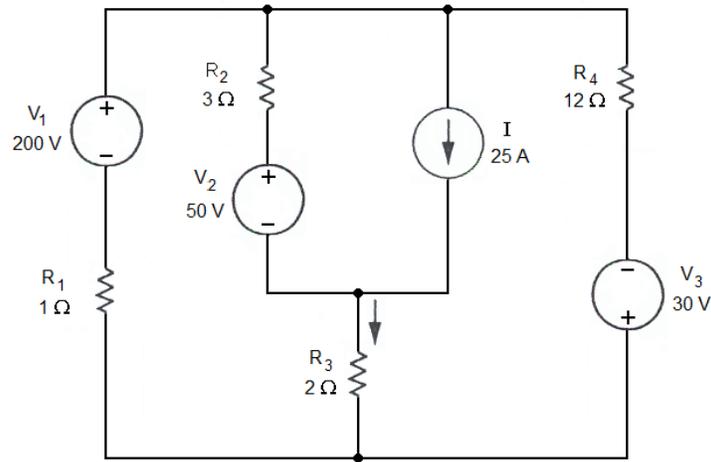
$$R_{Th} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{12 \text{ V}}{\frac{6}{5} \text{ A}} = 10 \Omega$$

Finalmente

$$P_{max} = \frac{v_{oc}^2}{4R_{Th}} = \frac{(12 \text{ V})^2}{4 \cdot 10 \Omega} = \frac{144 \text{ V}^2}{40 \Omega} = \frac{18}{5} \text{ W}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

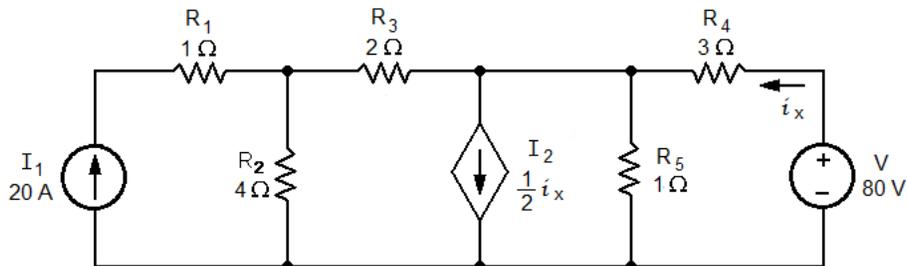
4.1. Aplicando el principio de superposición, determine la corriente en el resistor R_3 .



Respuesta:

$$i_{R_3} = 35 \text{ A}$$

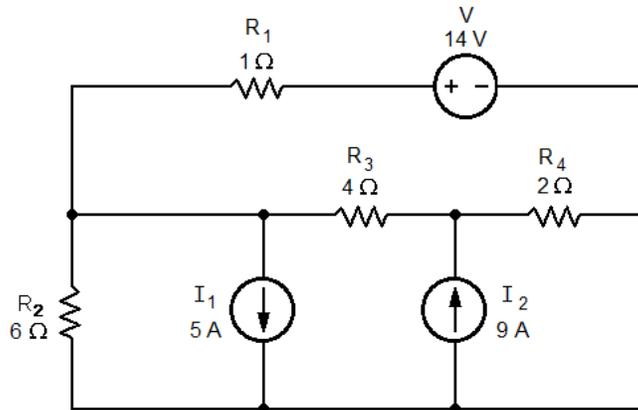
4.2. Determinar la potencia de la fuente de corriente I_2 .



Respuesta:

$$P_{I_2} = 200 \text{ W}$$

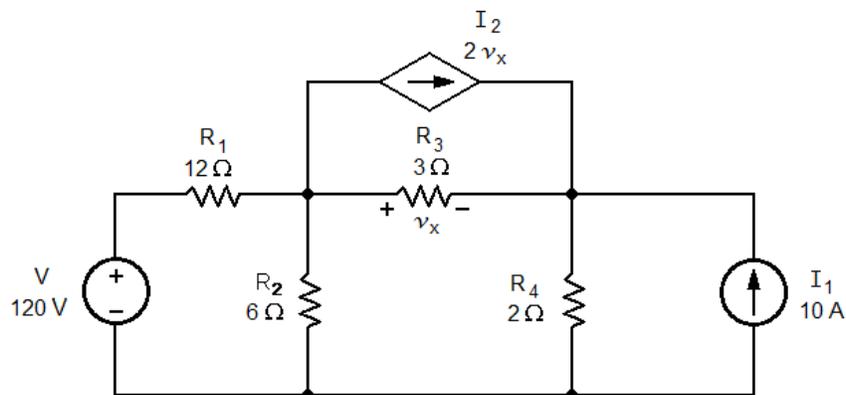
4.3. Calcular la corriente en el resistor R_1 , aplicando transformación de fuentes.



Respuesta:

$$i_{R_1} = 9 \text{ A}$$

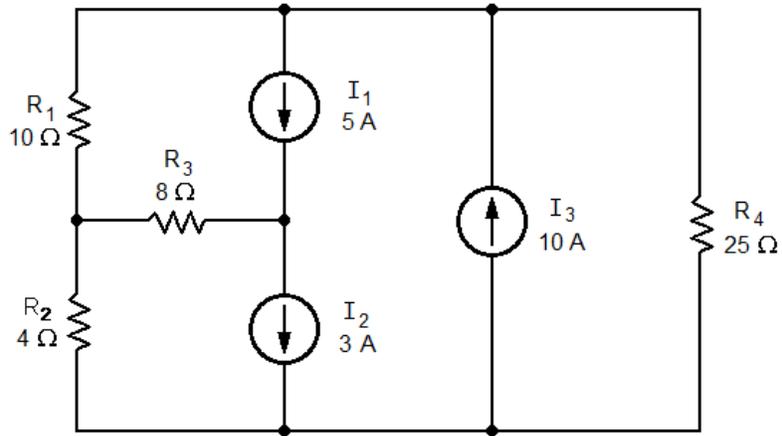
4.4. Aplicando transformación de fuentes, determinar la potencia en la fuente dependiente I_2 .



Respuesta:

$$P_{I_2} = 8 \text{ W}$$

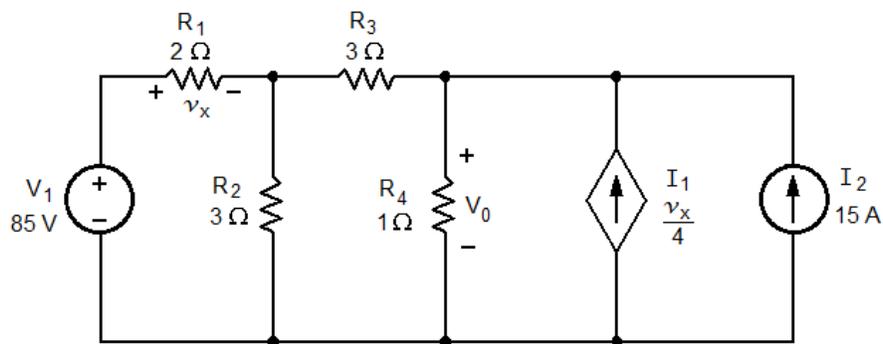
4.5. Utilizando el teorema de Thévenin, determinar el voltaje en el resistor R_4 .



Respuesta:

$$V_{R_4} = 50 \text{ V}$$

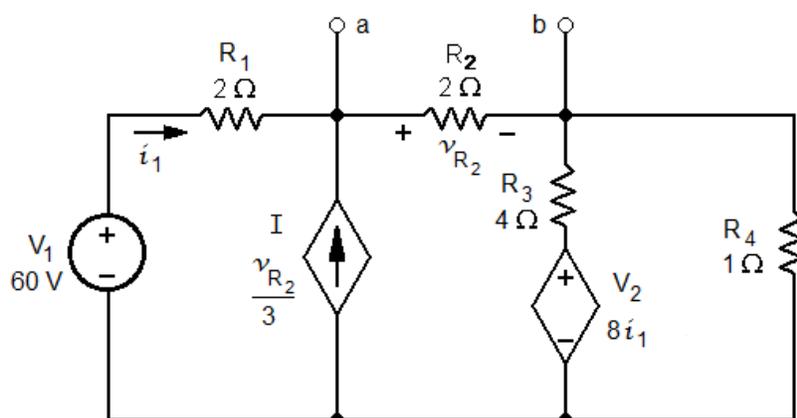
4.6. Aplicando el teorema de Thévenin, determinar el voltaje V_0 .



Respuesta:

$$V_0 = 30 \text{ V}$$

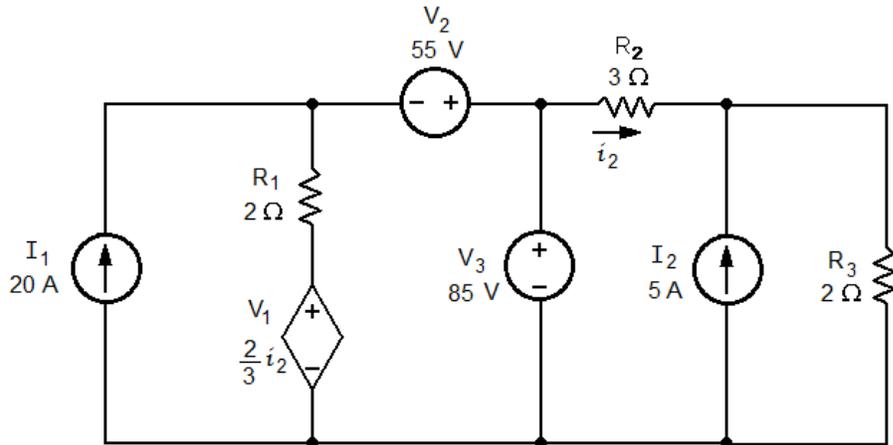
4.7. Calcular el voltaje entre las terminales a y b, aplicando el teorema de Thévenin.



Respuesta:

$$v_{ab} = 30 \text{ V}$$

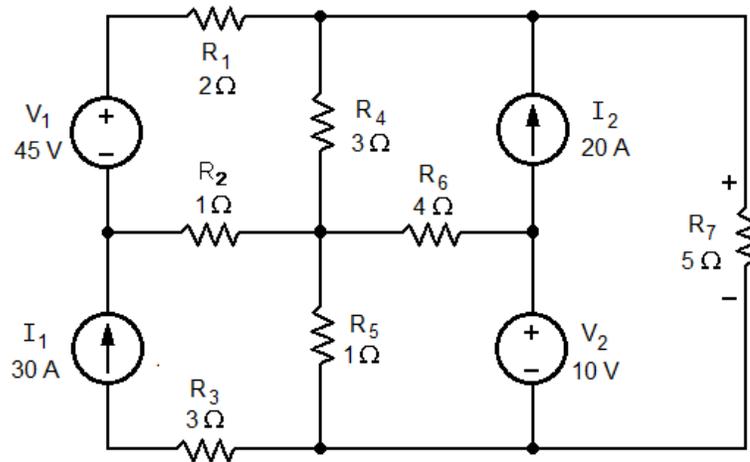
4.8. Aplicando el teorema de Norton, determinar la corriente en el resistor R_3 .



Respuesta:

$$i_{R_3} = 20 \text{ A}$$

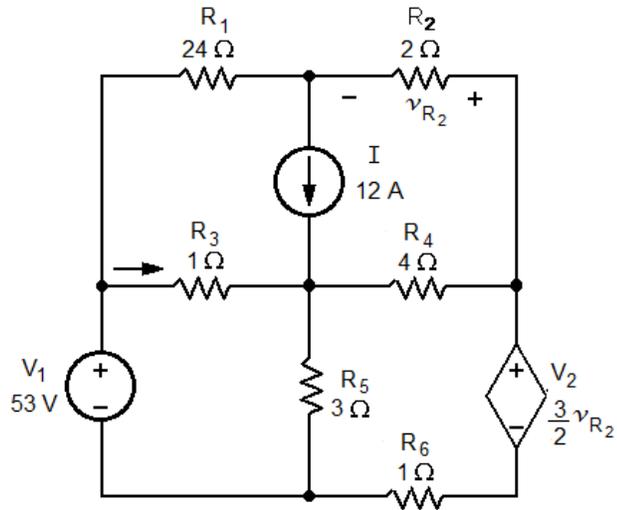
4.9. Calcular el voltaje en el resistor R_7 , utilizando el teorema de Norton.



Respuesta:

$$V_{R_7} = 75 \text{ V}$$

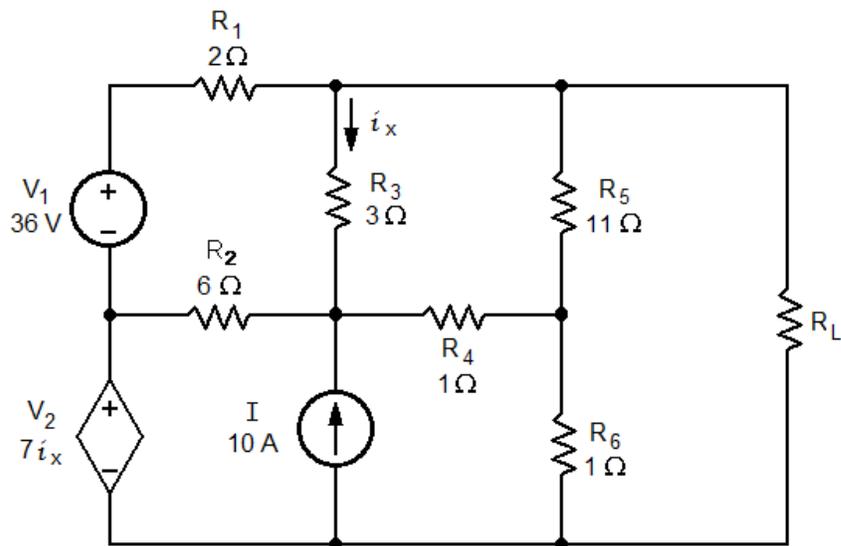
4.10. Calcular la corriente en el resistor R_3 , aplicando el teorema de Norton.



Respuesta:

$$i_{R_3} = 8 \text{ A}$$

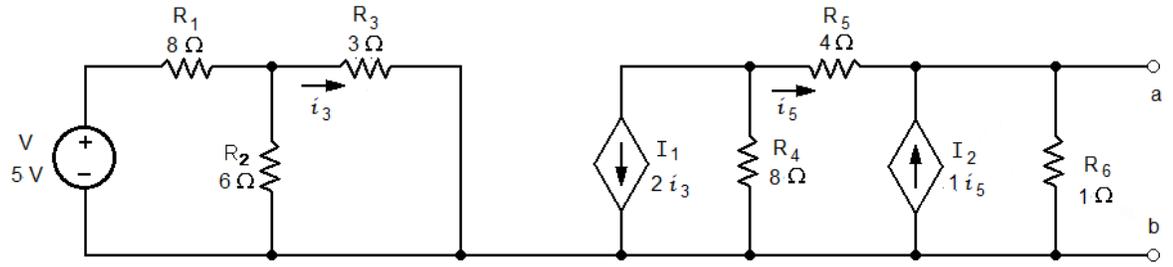
4.11. Determinar el valor del resistor de carga R_L , para que el circuito le transfiera la máxima potencia.



Respuesta:

$$R_L = \frac{1168}{213} \Omega$$

4.12. Determinar la máxima potencia que el circuito podría transferir a una carga conectada entre las terminales a y b.



Respuesta:

$$P_{\max} = \frac{32}{189} \text{ W}$$

Capítulo 5. Análisis transitorio de circuitos de primer orden

5.1. Capacitores e inductores

5.1.1. Capacitancia

Es una medida de la cantidad de carga eléctrica que se puede almacenar en un elemento eléctrico (capacitor) para una diferencia de potencial determinada. Esta relación está dada como

$$C = \frac{q}{v}$$

donde

C = capacitancia en farad

q = carga en coulomb

v = voltaje en volt

El símbolo de circuito para este elemento eléctrico es

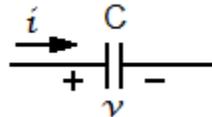


Figura 5.1. Símbolo de circuito para el capacitor.

Ya que la corriente es la razón de cambio de la carga con respecto al tiempo, y la capacitancia es constante para un dispositivo dado, se tiene que la corriente en las terminales del capacitor es

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (5.1)$$

y su voltaje

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (5.2)$$

A partir de estas dos expresiones, se puede obtener la potencia y la energía en un capacitor

$$P = v \cdot i = v \cdot C \frac{dv}{dt} \quad (5.3)$$

$$w = \int_{t_0}^t P dt = \frac{1}{2} C [v(t)^2 - v(t_0)^2] \quad (5.4)$$

De la ecuación 5.1 se infieren dos consideraciones importantes:

- 1) Si el voltaje en el capacitor es constante su corriente es cero, por lo que el capacitor se comporta como un circuito abierto.
- 2) El voltaje no puede cambiar en forma instantánea en las terminales del capacitor, pues esto generaría una corriente infinita que, físicamente, es imposible.

5.1.1.1. Capacitores en serie

La figura 5.2 muestra una conexión en serie de N capacitores con una fuente de voltaje.

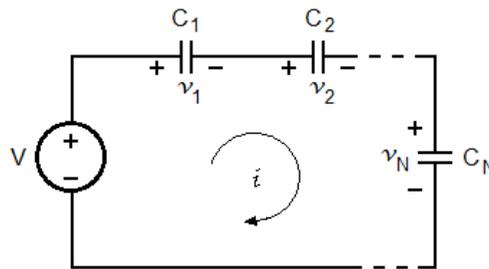


Figura 5.2. Capacitores conectados en serie.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$V = v_1 + v_2 + \dots + v_N \quad (5.5)$$

Por los capacitores fluye la misma corriente y considerando que cada uno de ellos tiene un voltaje inicial, la ecuación 5.2 se sustituye en la 5.5 para cada uno de ellos de manera que

$$V = \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_2(t_0) + \dots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_N(t_0)$$

$$V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_N(t_0)$$

$$V = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (5.6)$$

donde

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (5.7)$$

y

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \dots + v_N(t_0) \quad (5.8)$$

De la ecuación 5.7 se puede observar que el inverso de la capacitancia equivalente de los capacitores conectados en serie es la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Así, el circuito equivalente al de la figura 5.2 es el que se muestra en la figura 5.3.

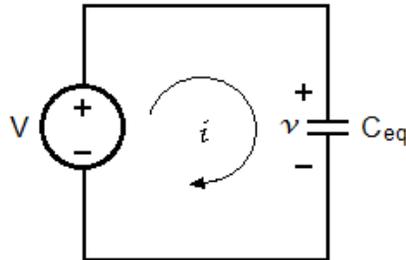


Figura 5.3. Circuito equivalente de los capacitores en serie.

5.1.1.2. Capacitores en paralelo

La figura 5.4 muestra una conexión en paralelo de N capacitores con una fuente de corriente.

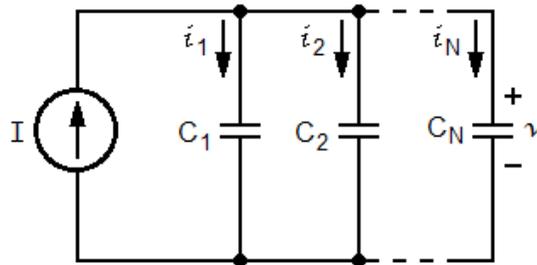


Figura 5.4. Capacitores conectados en paralelo.

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior del circuito

$$I = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

Sustituyendo la ecuación 5.1 para cada capacitor, y tomando en cuenta que el voltaje es el mismo para todos

$$I = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt}$$

$$I = (C_1 + C_2 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt}$$

$$I = C_{eq} \frac{dv}{dt} \tag{5.9}$$

donde

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (5.10)$$

De la ecuación 5.10 se puede observar que la capacitancia equivalente de los capacitores conectados en paralelo es la suma de las capacitancias individuales.

5.1.2. Inductancia

Es la propiedad de un conductor eléctrico a oponerse al cambio en la corriente que fluye a través de él. Si este conductor es enrollado (bobina o inductor), se incrementa su efecto inductivo y permite almacenar energía en su campo magnético.

El símbolo de circuito para este elemento eléctrico es

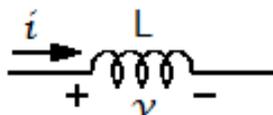


Figura 5.5. Símbolo de circuito para el inductor.

Si una corriente fluye a través de un inductor, el voltaje en éste es directamente proporcional a la derivada de la corriente con respecto al tiempo

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (5.11)$$

donde

L = inductancia en henry

i = corriente en ampere

t = tiempo en segundos

de la ecuación 5.11 podemos obtener la corriente del inductor, siendo ésta

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0) \quad (5.12)$$

A partir de estas dos expresiones, la potencia y la energía del inductor están dadas por

$$P = v \cdot i = Li \cdot \frac{di}{dt} \quad (5.13)$$

$$w = \int_{t_0}^t P d\tau = \frac{1}{2} L [i(t)^2 - i(t_0)^2] \quad (5.14)$$

De la ecuación 5.11 se infieren dos consideraciones importantes:

- 1) Si la corriente en el inductor es constante su voltaje es cero, por lo que el inductor se comporta como un corto circuito.
- 2) La corriente no puede cambiar en forma instantánea en las terminales del inductor pues esto generaría un voltaje infinito que, físicamente, es imposible.

5.1.2.1. Inductores en serie

La figura 5.6 muestra una conexión en serie de N inductores con una fuente de voltaje.

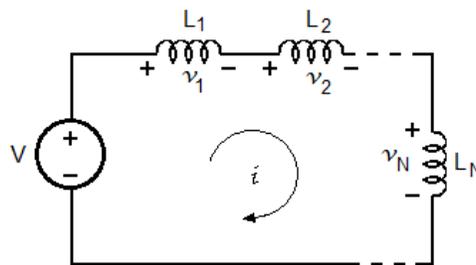


Figura 5.6. Capacitores conectados en serie.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$V = v_1 + v_2 + \dots + v_N \quad (5.15)$$

A través de los inductores fluye la misma corriente. Si se sustituye la ecuación 5.11 en 5.15 se tiene

$$V = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt}$$

$$V = (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt}$$

$$V = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad (5.16)$$

donde

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (5.17)$$

De la ecuación 5.17 se puede observar que la inductancia equivalente de los inductores conectados en serie es la suma de las inductancias individuales.

5.1.2.2. Inductores en paralelo

La figura 5.7 muestra una conexión en paralelo de N inductores con una fuente de corriente.

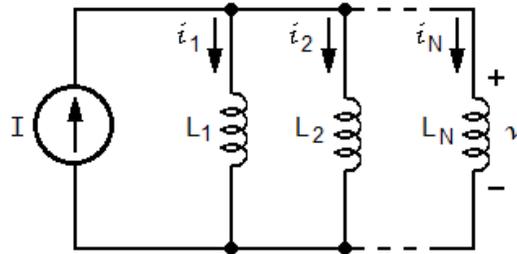


Figura 5.7. Inductores conectados en paralelo.

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior del circuito

$$I = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

Sustituyendo la ecuación 5.12 para cada inductor y considerando que cada uno de ellos tiene una corriente inicial

$$I = \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_2(t_0) + \dots + \frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_N(t_0)$$

$$I = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0)$$

$$I = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$$

donde

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (5.18)$$

y

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \dots + i_N(t_0) \quad (5.19)$$

De la ecuación 5.18 se puede observar que el inverso de la inductancia equivalente de los inductores conectados en paralelo es la suma de los recíprocos de las inductancias individuales.

5.2. Respuesta natural

Consiste en la liberación de la energía almacenada en un capacitor o en un inductor a una red eléctrica, cuando no hay fuentes independientes en el circuito. Estas fuentes se usan

previamente para entregar la energía a los elementos que la almacenan, y después se desconectan mediante un interruptor.

El análisis de estos circuitos, se hace tomando como referencia el instante en el que la red eléctrica es modificada por la conmutación de un interruptor, mismo que se considera como $t_0 = 0$. Previo a esto es necesario dejar que el circuito llegue a un estado estable, por lo que la red debe permanecer sin cambios durante un largo tiempo. En estas condiciones se determinan los valores de los parámetros de interés en los elementos del circuito, un instante antes de la conmutación, $t = 0^-$. Dichos valores serán ahora las condiciones iniciales en los elementos que almacenan energía para el análisis del circuito inmediatamente después de la conmutación del interruptor, $t = 0^+$. La respuesta de estos circuitos, como se verá a continuación, corresponde a la solución de una ecuación diferencial de primer orden homogénea.

5.2.1 Circuito RC

Ejemplo 5.1. El interruptor de la figura 5.8 ha estado cerrado por mucho tiempo, en el instante $t = 0$, se abre. Determinar el voltaje en el resistor R_3 para $t > 0$, así como la energía total disipada en el mismo.

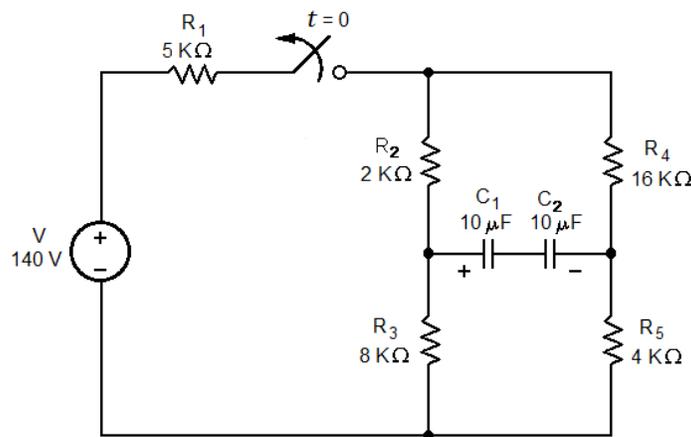


Figura 5.8. Circuito para el ejemplo 5.1.

Solución.

Dado que el interruptor ha estado cerrado por mucho tiempo, los capacitores C_1 y C_2 se han cargado a un voltaje determinado y ya no circula corriente a través de ellos. Esto último se muestra en la figura 5.9, con el circuito abierto que sustituye a los capacitores. En estas condiciones se requiere entonces calcular el voltaje almacenado en los capacitores, el cual será transferido a la red resistiva cuando el interruptor se abra.

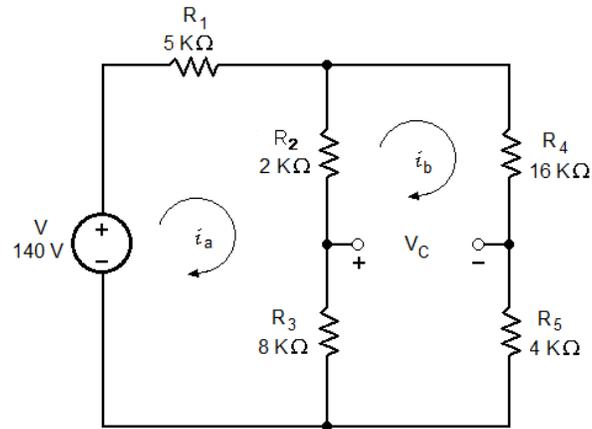


Figura 5.9. Circuito en el estado estable.

Aplicando análisis de mallas al circuito

$$i_a(R_1 + R_2 + R_3) - i_b(R_2 + R_3) = V \quad (5.20)$$

$$i_b(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - i_a(R_2 + R_3) = 0 \quad (5.21)$$

Sustituyendo valores en 5.20

$$15000i_a - 10000i_b = 140$$

Para simplificar esta ecuación, se divide por 1000, quedando

$$15i_a - 10i_b = \frac{140}{1000} = \frac{7}{50}$$

Para la ecuación 5.21 se procede de forma similar, obteniéndose

$$-10i_a + 30i_b = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$i_a = 12 \text{ mA} \quad i_b = 4 \text{ mA}$$

Esta forma de simplificar las ecuaciones se aplicará en lo subsecuente cuando se requiera.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff para determinar el voltaje en los capacitores y sustituyendo valores

$$V_C = v_{R_3} - v_{R_5} = (i_a - i_b)R_3 - i_bR_5$$

$$V_C = (12 \text{ mA} - 4 \text{ mA}) \cdot 8 \text{ k}\Omega - 4 \text{ mA} \cdot 4 \text{ k}\Omega = 48 \text{ V}$$

Este voltaje de estado estable es el que está presente justo antes de la conmutación del interruptor, esto es, $V_C(0^-) = V_C$. Debido a que este voltaje no puede cambiar instantáneamente, será el mismo inmediatamente después de la conmutación, es decir $V_C(0^-) = V_C(0^+)$, que corresponde al voltaje inicial de los capacitores V_0 .

Cuando el interruptor se abre en el instante $t = 0$, la energía almacenada en el capacitor se libera a través de los resistores, que la disipan en forma de calor. El circuito eléctrico correspondiente se muestra en la figura 5.10.

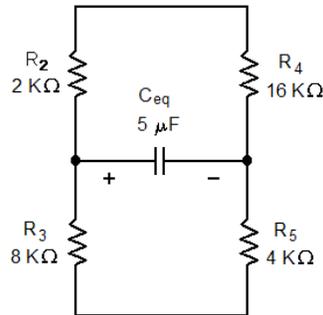


Figura.5.10. Circuito después de abrir el interruptor.

donde

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{10 \mu\text{F} \cdot 10 \mu\text{F}}{10 \mu\text{F} + 10 \mu\text{F}} = 5 \mu\text{F}$$

Los resistores R_3 y R_5 están en serie al igual que R_2 y R_4 , y a su vez ambos están en paralelo, por lo que el circuito queda como el que se indica en la figura 5.11. La resistencia equivalente es

$$R_{eq} = (R_3 + R_5) || (R_2 + R_4) = (8 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) || (2 \text{ k}\Omega + 16 \text{ k}\Omega) = \frac{36}{5} \text{ k}\Omega$$

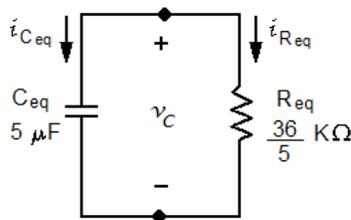


Figura.5.11. Circuito RC equivalente.

Al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo superior del circuito anterior

$$i_{C_{eq}} + i_{R_{eq}} = 0 \tag{5.22}$$

Sustituyendo la ecuación 5.1 en 5.22 se obtiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$C_{eq} \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R_{eq}} = 0 \quad (5.23)$$

Reordenando términos de la ecuación 5.23 e integrando ambos miembros de la ecuación se tiene

$$\int_{V_0}^{v_c(t)} \frac{dv_c}{v_c} = -\frac{1}{R_{eq}C_{eq}} \int_0^t dt$$

cuya solución es

$$v_c(t) = V_0 e^{-t/R_{eq}C_{eq}} \quad (5.24)$$

La ecuación 5.24 corresponde a la respuesta natural del circuito RC para $t > 0$ y, como se puede observar, la energía almacenada inicialmente decae de manera exponencial a una razón de cambio τ , denominada constante de tiempo, que es el producto $R_{eq}C_{eq}$.

$$\tau = R_{eq}C_{eq} = \frac{36}{5} \text{ k}\Omega \cdot 5 \text{ }\mu\text{F} = 36 \text{ ms}$$

Sustituyendo valores en la ecuación 5.24, se tiene que

$$v_c(t) = 48e^{-t/36 \text{ ms}} \text{ V}$$

el voltaje en el resistor R_3 se calcula utilizando un divisor de voltaje

$$v_{R_3} = \frac{R_3}{R_3 + R_5} v_c(t) = \frac{8 \text{ k}\Omega}{8 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega} \cdot 48e^{-t/36 \text{ ms}} \text{ V} = 32e^{-t/36 \text{ ms}} \text{ V}$$

Finalmente, la energía total disipada se obtiene a partir de integrar la potencia de R_3

$$P(t) = \frac{v_{R_3}^2}{R_3} = \frac{(32e^{-t/36 \text{ ms}} \text{ V})^2}{8 \text{ k}\Omega} = 128e^{-t/18 \text{ ms}} \text{ mW}$$

$$w_{R_3} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} (128e^{-t/18 \text{ ms}} \text{ mW}) dt = 2304 \text{ }\mu\text{J}$$

Ejemplo 5.2. Después de haber estado cerrado por un largo período, el interruptor de la figura 5.12 se abre en el instante $t = 0$. Determinar el voltaje de salida $v_o(t)$ para $t > 0$.

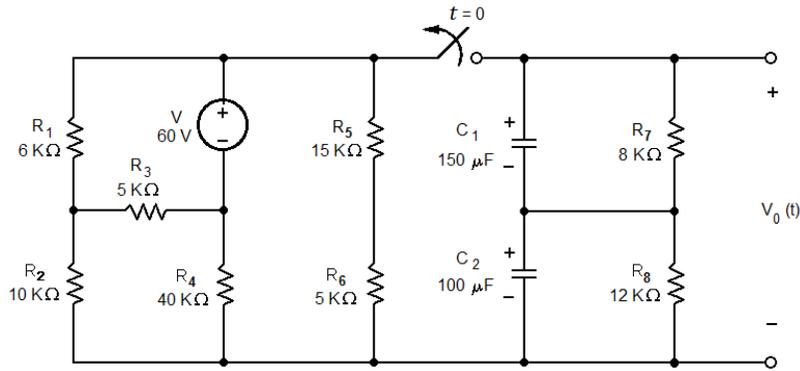


Figura 5.12. Circuito para el ejemplo 5.2.

Solución.

Para determinar el voltaje de salida después de la conmutación del interruptor, es necesario encontrar el voltaje que queda almacenado en los capacitores cuando se alcanza el estado estable, y ya que en éste los capacitores se comportan como circuitos abiertos, los resistores R_7 y R_8 quedan conectados en serie y, su equivalente, en paralelo con la conexión en serie formada por R_5 y R_6 . Esto se muestra en la figura 5.13.

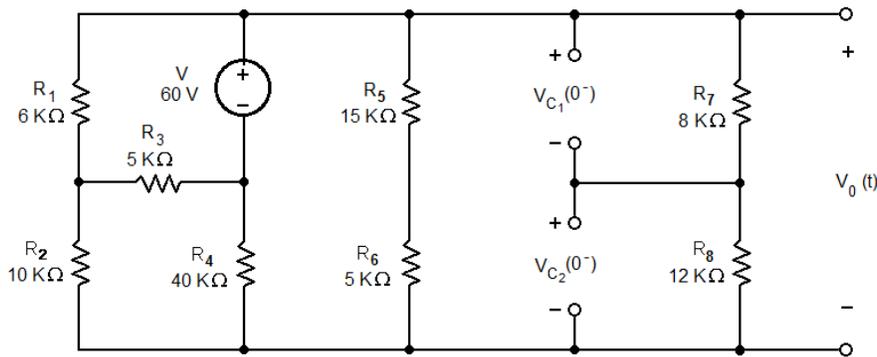


Figura 5.13. Circuito en el estado estable.

Este circuito se reduce, como se indica en la figura 5.14, para determinar por análisis de mallas el voltaje de salida en el estado estable $V_0(0^-)$,

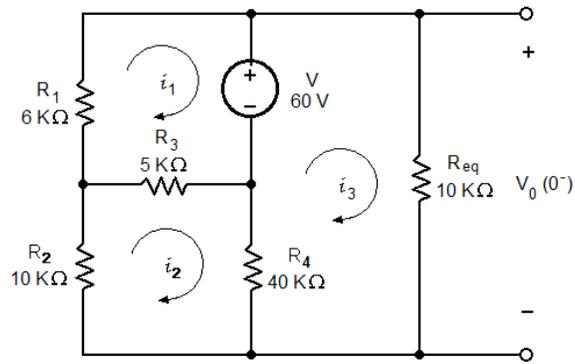


Figura 5.14. Circuito para determinar $V_O(0^-)$ en el estado estable.

donde

$$R_{eq} = (R_5 + R_6) || (R_7 + R_8) = (15 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega) || (8 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega) = 10 \text{ k}\Omega$$

Ecuaciones de malla

$$i_1(R_1 + R_3) - i_2R_3 = 0 \quad (5.25)$$

$$-i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3 + R_4) - i_3R_4 = 0 \quad (5.26)$$

$$-i_2R_4 + i_3(R_4 + R_{eq}) = 0 \quad (5.27)$$

Después de sustituir valores en las ecuaciones 5.25 a 5.27, se llega a

$$11i_1 - 5i_2 = -\frac{3}{50} \quad (5.28)$$

$$-5i_1 + 55i_2 - 40i_3 = 0 \quad (5.29)$$

$$-40i_2 + 50i_3 = \frac{3}{50} \quad (5.30)$$

La solución al sistema de ecuaciones formado por 5.28 a 5.30 es

$$i_1 = -5 \text{ mA} \quad i_2 = 1 \text{ mA} \quad i_3 = 2 \text{ mA}$$

Ahora se aplica la ley de Ohm para determinar el voltaje de salida

$$V_O(0^-) = i_3R_{eq} = 2 \text{ mA} \cdot 10 \text{ k}\Omega = 20 \text{ V}$$

Dado que los voltajes de los capacitores C_1 y C_2 son los mismos que los de R_7 y R_8 , respectivamente por estar en paralelo (figura 5.13), éstos se determinan a partir de divisores de voltaje

$$V_{C_1}(0^-) = \frac{R_7}{R_7 + R_8} V_O(0^-) = \frac{8 \text{ k}\Omega}{8 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} \cdot 20 \text{ V} = 8 \text{ V}$$

$$V_{C_2}(0^-) = \frac{R_8}{R_7 + R_8} V_O(0^-) = \frac{12 \text{ k}\Omega}{8 \text{ k}\Omega + 12 \text{ k}\Omega} \cdot 20 \text{ V} = 12 \text{ V}$$

Cuando el interruptor se abre, instante que corresponde a $t = 0^+$, el voltaje inicial en cada capacitor es: $V_{C_1}(0^+) = V_{C_1}(0^-) = V_{0_1}$ y $V_{C_2}(0^+) = V_{C_2}(0^-) = V_{0_2}$.

La figura 5.15 muestra el circuito para calcular el voltaje de salida para $t > 0$, en donde se observa que hay dos circuitos RC que pueden ser resueltos planteando para cada uno de ellos su ecuación diferencial. Sin embargo, el resultado de cualquier circuito RC sin fuentes siempre es de la forma $v_C(t) = V_0 e^{-t/RC}$ (ecuación 5.24), por lo que se puede aplicar directamente esta solución adecuándola a los parámetros del circuito.

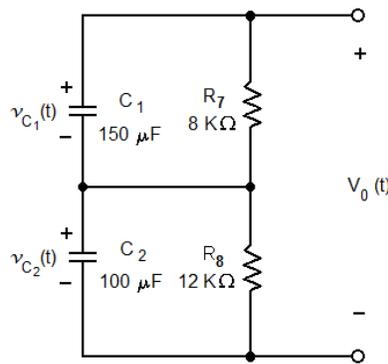


Figura 5.15. Circuito RC para $t > 0$.

donde

$$V_O(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t) = V_{0_1} e^{-t/R_7 C_1} + V_{0_2} e^{-t/R_8 C_2}$$

Finalmente, después de sustituir los valores correspondientes

$$V_O(t) = 8e^{-t/1.2 \text{ s}} \text{ V} + 12e^{-t/1.2 \text{ s}} \text{ V} = 20e^{-t/1.2 \text{ s}} \text{ V}$$

Ejemplo 5.3. Después de haber estado cerrado por un largo período, el interruptor de la figura 5.16 se abre en el instante $t = 0$. Determinar el voltaje de la fuente dependiente V_2 para $t > 0$.

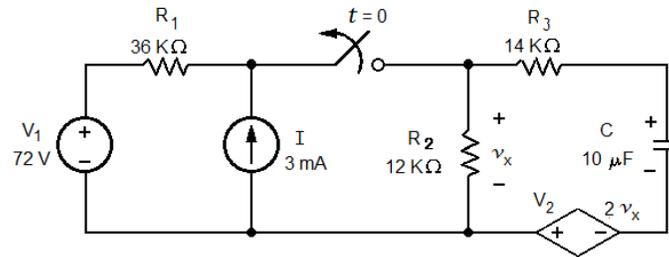


Figura 5.16. Circuito para el ejemplo 5.3.

Solución.

El circuito se reduce aplicando una transformación de fuentes, como se observa en la figura 5.17, donde el capacitor se ha sustituido por un circuito abierto en el estado estable.

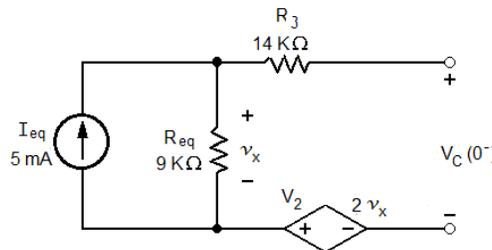


Figura.5.17. Circuito en el estado estable.

Tenemos que

$$I_{eq} = \frac{V_1}{R_1} + I = \frac{72 \text{ V}}{36 \text{ k}\Omega} + 3 \text{ mA} = 5 \text{ mA}$$

y

$$R_{eq} = R_1 || R_2 = 36 \text{ k}\Omega || 12 \text{ k}\Omega = 9 \text{ k}\Omega$$

por tanto

$$v_x = I_{eq} R_{eq} = 5 \text{ mA} \cdot 9 \text{ k}\Omega = 45 \text{ V}$$

Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff para determinar $V_C(0^-)$, se tiene

$$V_C(0^-) = V_2 + v_x = 2v_x + v_x = 3v_x = 3 \cdot 45 \text{ V} = 135 \text{ V}$$

Obsérvese que, al comportarse el capacitor como un circuito abierto, por el resistor R_3 no hay flujo de corriente y por lo tanto no entra en los cálculos para el estado estable.

El circuito en el instante que el interruptor se abre y que corresponde a $t = 0^+$ se muestra en la figura 5.18. Asimismo, el voltaje inicial del capacitor es $V_C(0^+) = V_C(0^-) = V_0 = 135 \text{ V}$.

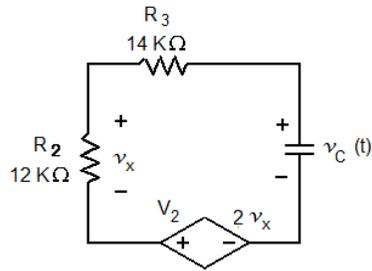


Figura 5.18. Circuito después de la conmutación.

Para determinar V_2 es necesario conocer v_x y, para ello, encontrar $v_C(t)$. Este último se puede encontrar si el circuito de la figura 5.18 se transforma en un circuito RC, lo que requiere que la red eléctrica a la izquierda del capacitor se reduzca a una resistencia Thévenin. Esto se puede llevar a cabo empleando una fuente de voltaje de prueba como se muestra en la figura 5.19.

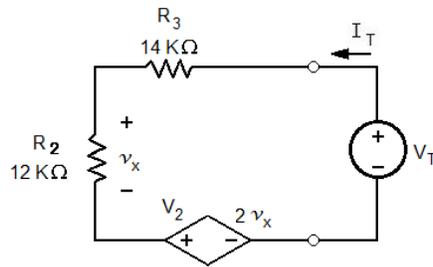


Figura 5.19. Circuito para determinar la resistencia Thévenin.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff

$$V_T = I_T(R_2 + R_3) + V_2 = I_T(12 \text{ k}\Omega + 14 \text{ k}\Omega) + 2v_x$$

$$V_T = I_T \cdot 26 \text{ k}\Omega + 2(R_2 I_T) = I_T(26 \text{ k}\Omega + 2 \cdot 12 \text{ k}\Omega) = I_T \cdot 50 \text{ k}\Omega$$

donde

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = 50 \text{ k}\Omega$$

El circuito se reduce al que se muestra en la figura 5.20. y se aplica de forma directa la solución de la ecuación diferencial 5.24.

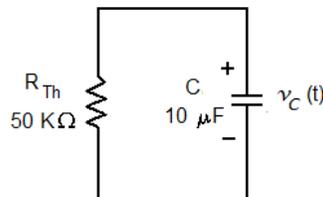


Figura 5.20. Circuito RC equivalente.

La constante de tiempo es

$$\tau = R_{Th}C = 50 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ }\mu\text{F} = 0.5 \text{ s}$$

por lo que

$$v_C(t) = 135e^{-2t} \text{ V}$$

De la figura 5.18 se observa que al estar conectados en serie los dispositivos, la corriente que circula por la malla es la misma y puesto que se conoce el voltaje del capacitor, se puede calcular su corriente

$$i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} = 10 \text{ }\mu\text{F} \frac{d(135e^{-2t} \text{ V})}{dt} = -2.7e^{-2t} \text{ mA}$$

Por tanto

$$v_x = R_2 i_C(t) = 12 \text{ k}\Omega (-2.7e^{-2t} \text{ mA}) = -32.4e^{-2t} \text{ V}$$

Finalmente

$$V_2 = 2v_x = -64.8e^{-2t} \text{ V}$$

5.2.2 Circuito RL

Ejemplo 5.4. Después de haber estado cerrado por mucho tiempo el interruptor del circuito mostrado en la figura 5.21, se abre en el instante $t = 0$. Determinar el voltaje de salida $v_0(t)$ para $t > 0$.

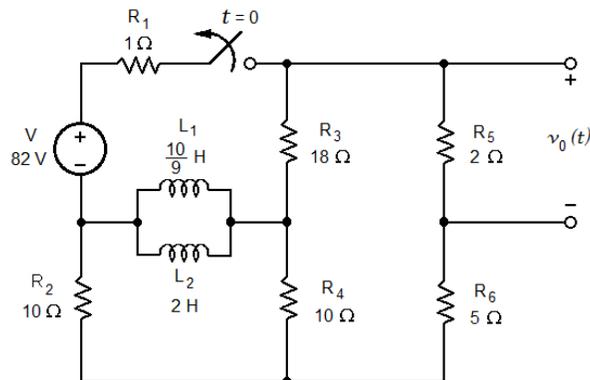


Figura 5.21. Circuito para el ejemplo 5.4.

Solución.

Dado que el interruptor ha estado cerrado por mucho tiempo, los inductores L_1 y L_2 han alcanzado el estado estable y se comportan como un corto circuito, como se muestra en la figura 5.22. En estas condiciones, los inductores almacenan energía en forma de corriente, cuyo valor antes de la conmutación es $I_L(0^-)$ y debe ser determinado.

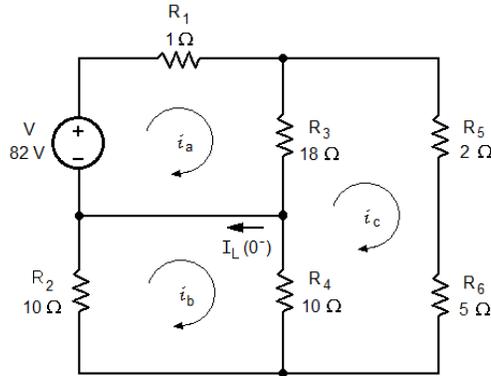


Figura 5.22. Circuito en el estado estable.

Aplicando análisis de mallas para determinar $I_L(0^-)$.

$$i_a(R_1 + R_3) - i_c R_3 - V = 0 \quad (5.31)$$

$$i_b(R_2 + R_4) - i_c R_4 = 0 \quad (5.32)$$

$$i_c(R_3 + R_4 + R_5 + R_6) - i_a R_3 - i_b R_4 = 0 \quad (5.33)$$

Sustituyendo valores en las ecuaciones 5.31 a 5.33, se tiene, respectivamente

$$19i_a - 18i_c = 82 \quad (5.34)$$

$$20i_b - 10i_c = 0 \quad (5.35)$$

$$-18i_a - 10i_b + 35i_c = 0 \quad (5.36)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones 5.34 a 5.36, se tiene

$$i_a = 10 \text{ A} \quad i_b = 3 \text{ A} \quad i_c = 6 \text{ A}$$

Del circuito de la figura 5.22 se observa que

$$I_L(0^-) = i_a - i_b = 10 \text{ A} - 3 \text{ A} = 7 \text{ A}$$

En el instante en que el interruptor se abre $I_L(0^-) = I_L(0) = I_L(0^+) = I_0$ que corresponde a la corriente inicial de los inductores L_1 y L_2 . El circuito después de la conmutación queda como se muestra en la figura 5.23, donde

$$L_{eq} = L_1 || L_2 = \frac{\frac{10}{9} \cdot 2}{\frac{10}{9} + 2} \text{ H} = \frac{5}{7} \text{ H}$$

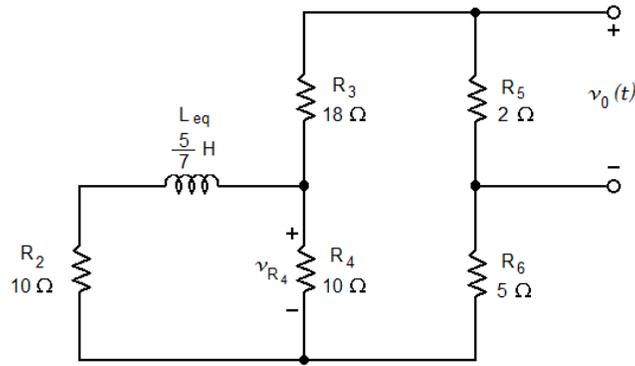


Figura 5.23. Circuito después de la conmutación.

El circuito de la figura anterior se puede reducir al que se muestra en la figura 5.24.

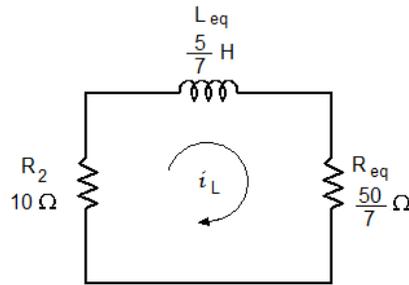


Figura 5.24. Circuito RL equivalente.

donde

$$R_{eq} = R_4 || (R_3 + R_5 + R_6) = 10 \Omega || 25 \Omega = \frac{50}{7} \Omega$$

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito equivalente, se tiene

$$v_{Leq} + v_{Req} + v_{R_2} = 0 \quad (5.37)$$

Sustituyendo las expresiones de los voltajes en la ecuación 5.37

$$L_{eq} \frac{di_L}{dt} + (R_{eq} + R_2)i_L = 0$$

$$L_{eq} \frac{di_L}{dt} + R_{eq_1} i_L = 0 \quad (5.38)$$

donde

$$R_{eq_1} = R_{eq} + R_2 = \frac{50}{7} \Omega + 10 \Omega = \frac{120}{7} \Omega$$

Reordenando los términos de la ecuación 5.38 e integrando ambos miembros se tiene

$$\int_{I_0}^{i_L(t)} \frac{di_L}{i_L} = -\frac{R_{eq1}}{L_{eq}} \int_0^t dt$$

cuya solución es

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R_{eq1}}{L_{eq}} t} \quad (5.39)$$

La ecuación 5.39 corresponde a la respuesta natural del circuito RL para $t > 0$ y, como se puede observar, la energía almacenada inicialmente decae de manera exponencial con una razón de cambio $\frac{R_{eq1}}{L_{eq}}$. El inverso de esta razón es la constante de tiempo τ

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq1}} = \frac{5}{7} \text{ H} = \frac{1}{24} \text{ s}$$

Sustituyendo valores en la ecuación 5.39

$$i_L(t) = -7e^{-24t} \text{ A}$$

Nótese que esta expresión es negativa porque al sustituir la corriente inicial del inductor se debe tomar en cuenta que ésta va en sentido opuesto al que se estableció para $i_L(t)$, como se indica en las figuras 5.22 y 5.24.

De la figura 5.23 se observa que, para determinar v_0 , es necesario encontrar el voltaje en R_4 que, a su vez, es el mismo que en R_{eq} . Por tanto

$$v_{R_4} = R_{eq} i_L(t) = \frac{50}{7} \Omega \cdot (-7e^{-24t} \text{ A}) = -50e^{-24t} \text{ V}$$

Aplicando un divisor de voltaje

$$v_0(t) = \frac{R_5}{R_3 + R_5 + R_6} v_{R_4} = \frac{2 \Omega}{25 \Omega} \cdot (-50e^{-24t} \text{ V}) = -4e^{-24t} \text{ V}$$

Ejemplo 5.5. El interruptor de la figura 5.25 ha estado en la posición 'a' por mucho tiempo. En el instante $t = 0$, cambia a la posición 'b'. Determinar el voltaje de salida para $t > 0$.

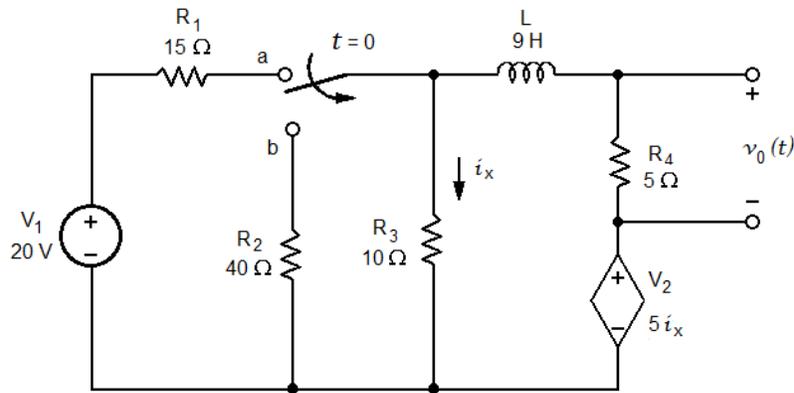


Figura 5.25. Circuito para el ejemplo 5.5.

Solución.

Para encontrar el voltaje de salida, se requiere determinar la corriente a través de R_4 cuando el interruptor se encuentra en la posición 'b', y que es la misma que circula por el inductor, por lo que esta última se obtiene a partir de un circuito RL equivalente.

Para lo anterior es necesario determinar la corriente inicial en el inductor cuando el circuito ha alcanzado el estado estable con el interruptor en la posición 'a'. En esta condición, el inductor se comporta como un corto circuito, estableciéndose en él una corriente $I_L(0^-)$ como se indica en la figura 5.26.

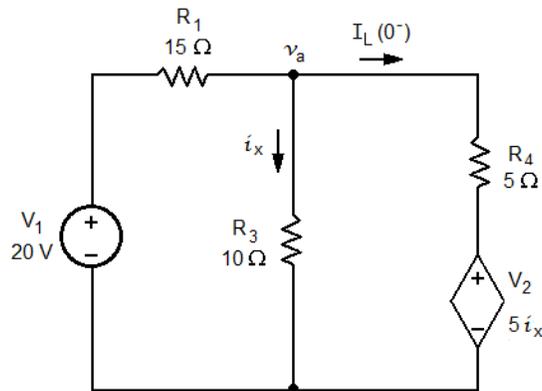


Figura 5.26. Circuito en el estado estable.

La ecuación para el nodo a, es

$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_1}{R_1} - \frac{5i_x}{R_4} = 0$$

Ya que $i_x = \frac{v_a}{R_3}$, al sustituirla en la ecuación anterior y agrupar términos, se tiene

$$v_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} - \frac{5\Omega}{R_3 R_4} \right) = \frac{V_1}{R_1}$$

Despejando v_a y sustituyendo valores numéricos en esta última ecuación

$$v_a = \frac{V_1}{1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_4} - \frac{5\Omega \cdot R_1}{R_3 R_4}} = \frac{20\text{ V}}{1 + \frac{15\Omega}{10\Omega} + \frac{15\Omega}{5\Omega} - \frac{5\Omega \cdot 15\Omega}{10\Omega \cdot 5\Omega}} = 5\text{ V}$$

De la figura 5.26 se tiene que

$$I_L(0^-) = \frac{v_a - V_2}{R_4} = \frac{v_a - 5\Omega \cdot \frac{v_a}{R_3}}{R_4} = \frac{5\text{ V} - 5\Omega \cdot \frac{5\text{ V}}{10\Omega}}{5\Omega} = \frac{1}{2}\text{ A}$$

Para calcular la resistencia equivalente en las terminales del inductor, es necesario aplicar una fuente de prueba como se muestra en la figura 5.27.

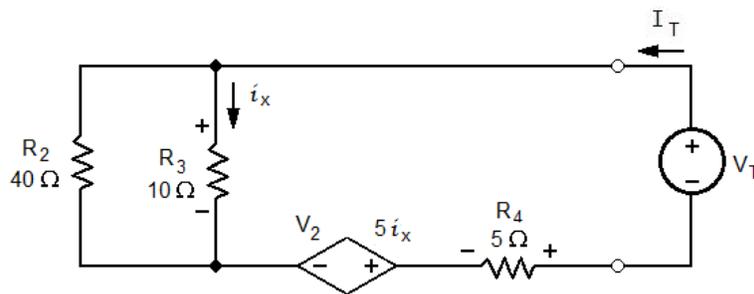


Figura 5.27. Circuito para determinar la resistencia Thévenin.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en el circuito anterior, se tiene

$$v_{R_3} - V_T - v_{R_4} - 5\Omega \cdot i_x = 0 \quad (5.40)$$

donde i_x se obtiene mediante un divisor de corriente

$$i_x = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_T$$

Despejando V_T de 5.40, y sustituyendo las expresiones correspondientes

$$V_T = v_{R_3} - v_{R_4} - 5\Omega \cdot i_x = (R_2 || R_3) I_T - (-R_4 I_T) - 5\Omega \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_T$$

Después de factorizar I_T , despejar la relación $\frac{V_T}{I_T}$ y sustituir los valores de los elementos, se tiene que

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = (40 \Omega || 10 \Omega) + 5 \Omega - 5 \Omega \cdot \frac{40 \Omega}{40 \Omega + 10 \Omega} = 9 \Omega$$

El circuito RL equivalente queda como se muestra en la figura 5.28, y en él se puede aplicar directamente la solución de la ecuación diferencial de la forma obtenida en la ecuación 5.39. Asimismo, inmediatamente después de la conmutación $I_L(0^-) = I_L(0) = I_L(0^+) = I_0$

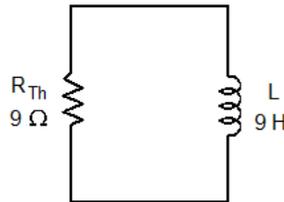


Figura 5.28. Circuito RL equivalente.

Sustituyendo valores tenemos

$$i_L(t) = I_L(0^-) e^{-t \frac{R_{Th}}{L}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{9 \Omega}{9 H} t} \text{ A} = \frac{1}{2} e^{-t} \text{ A}$$

finalmente

$$v_o(t) = R_4 i_L(t) = 5 \Omega \cdot \frac{1}{2} e^{-t} \text{ A} = \frac{5}{2} e^{-t} \text{ V}$$

5.3. Respuesta forzada

Es parte del comportamiento que presenta un circuito eléctrico que contiene elementos que almacenan energía, cuando éste se excita de forma súbita con fuentes de voltaje o de corriente. La respuesta forzada tiene características de la función de excitación y, matemáticamente, es la solución particular de la ecuación diferencial.

La aplicación repentina de energía al circuito puede realizarse mediante el uso de un interruptor, designándose el instante de la conmutación como $t = 0$. Si la función de excitación es constante, entonces tendrá una discontinuidad en el instante en que se cierra el interruptor, generándose con ello una función escalón.

5.3.1. Respuesta escalón de un circuito RC

Se tiene el circuito de la figura 5.29, donde el interruptor ha permanecido en la posición 1 por mucho tiempo; en el instante $t = 0$ el interruptor cambia a la posición 2. Se requiere determinar $v_C(t)$, para $t > 0$.

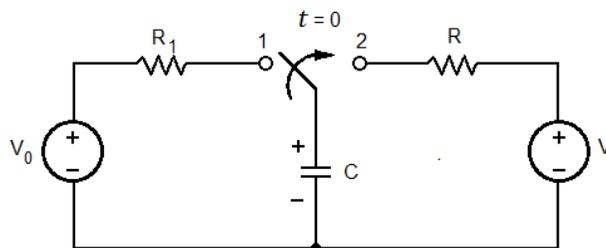


Figura 5.29 Circuito RC con excitación escalón.

Se puede observar que, cuando se ha llegado al estado estable en la posición 1, el voltaje en el capacitor tiene el mismo valor que la fuente de voltaje, por lo que $V_C(0^-) = V_0 = 40 \text{ V}$. Cuando el interruptor pasa a la posición 2, el circuito a analizar es el que se muestra en la figura 5.30

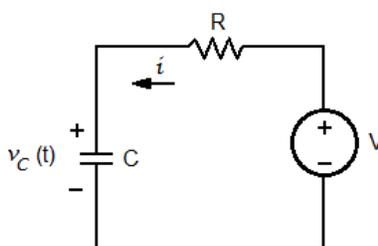


Figura 5.30. Circuito para $t > 0$.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito

$$V = v_R + v_C = iR + v_C \quad (5.41)$$

Sustituyendo 5.1 en 5.41

$$V = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad (5.42)$$

La ecuación 5.42 se puede expresar como

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{V}{RC} \quad (5.43)$$

que corresponde a una ecuación diferencial de primer grado no homogénea y que puede resolverse por alguno de los siguientes métodos.

Método 1. Separación de variables.

Reacomodando los términos en la ecuación 5.43 e integrando entre los límites correspondientes

$$\int_{V_0}^{v_C(t)} \frac{dv_C}{v_C - V} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad (5.44)$$

Resolviendo 5.44, se encuentra el voltaje en el capacitor para $t > 0$, siendo éste

$$v_C(t) = V + (V_0 - V) e^{-t/RC} \quad (5.45)$$

La ecuación anterior está formada por dos términos: uno exponencial que tiene la forma de la respuesta natural, y cuya amplitud depende de la función de excitación, y otro constante V , debido a la función de excitación y al que se le denomina respuesta forzada; esta última permanece después de que el interruptor se ha cerrado. Nótese que si la función de excitación es igual a cero, la ecuación 5.45 se reduce a la respuesta natural de un circuito RC sin fuentes.

Método 2. Factor de integración e^{Pt} .

Retomando la ecuación 5.43, si esta se multiplica por el factor de integración e^{Pt} , se tiene

$$e^{Pt} \frac{dv_C}{dt} + e^{Pt} \frac{v_C}{RC} = e^{Pt} \frac{V}{RC} \quad (5.46)$$

Sean las constantes

$$P = \frac{1}{RC} \quad \text{y} \quad Q = \frac{V}{RC} \quad (5.47)$$

Sustituyéndolas en 5.46 se tiene que

$$e^{Pt} \frac{dv_C}{dt} + P v_C e^{Pt} = Q e^{Pt} \quad (5.48)$$

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación 5.48 corresponde a la derivada del producto $v_C e^{Pt}$ por lo que

$$\frac{d}{dt} (v_C e^{Pt}) = Q e^{Pt} \quad (5.49)$$

Si se integra la ecuación 5.49, se obtiene la respuesta total del voltaje en el capacitor para $t > 0$

$$v_C(t) = e^{-Pt} \int Q e^{Pt} dt + A e^{-Pt} \quad (5.50)$$

donde

P = inverso de la constante de tiempo τ

Q = función de excitación

A = constante de integración

Dado que Q es constante, al realizar la integral en 5.50 se tiene

$$v_C(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} = v_F + v_n \quad (5.51)$$

donde $v_F = \frac{Q}{P}$ la respuesta forzada y $v_n = Ae^{-Pt}$ la respuesta natural.

Sustituyendo las constantes Q y P , definidas en 5.47, en la ecuación 5.51, se tiene

$$v_C(t) = V + Ae^{-t/RC} \quad (5.52)$$

La constante de integración se obtiene evaluando la ecuación 5.52 justo después de que el interruptor conmuta a la posición 2, es decir, en $t = 0^+$. Ya que el voltaje en las terminales del capacitor no puede cambiar en forma instantánea $v_C(0^+) = v_C(0) = v_C(0^-) = V_0$, por lo que

$$v_C(0) = V_0 = V + A$$

Despejando

$$A = V_0 - V$$

Sustituyendo la constante de integración en la ecuación 5.51 el voltaje en el capacitor para $t > 0$ es

$$v_C(t) = V + (V_0 - V)e^{-t/RC} \quad (5.53)$$

Nótese que la ecuación 5.53 es igual a 5.45 que fue obtenida en el método 1.

En conclusión, para resolver la ecuación diferencial no homogénea resultante de un circuito RC (ecuación 5.43) utilizando este método, se deben identificar las constantes P y Q y expresar la ecuación en la forma

$$\frac{dv_C}{dt} + Pv_C = Q \quad (5.54)$$

y aplicar la solución 5.51 a esta última.

Método 3. Condiciones iniciales y finales.

Si la función de excitación Q es constante, la ecuación 5.50 se puede expresar como

$$v_C(t) = k_1 + k_2e^{-Pt} \quad (5.55)$$

Evaluando 5.55 para los tiempos

$$t \rightarrow \infty \quad v_C(\infty) = k_1$$

$$t = 0 \quad v_C(0) = k_1 + k_2$$

Sustituyendo estos resultados en 5.55, se tiene

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-Pt} \quad (5.56)$$

La ecuación 5.56 se evalúa de la siguiente manera:

- 1) Se supone que el circuito eléctrico ha alcanzado el estado estable antes de que el interruptor conmute en $t = 0$. En estas condiciones el capacitor se reemplaza por un circuito abierto con voltaje $v_C(0^-)$. Si se tratase de un circuito RL, el inductor se sustituye por un corto circuito con una corriente $i_L(0^-)$.
- 2) Cuando el interruptor ha cambiado a su nueva posición, el capacitor se reemplaza por una fuente de voltaje con valor $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. En el caso de un circuito RL, el inductor se reemplaza por una fuente de corriente con valor $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- 3) Suponiendo que se ha alcanzado el estado estable con el interruptor en su nueva posición, el capacitor se reemplaza por un circuito abierto. En el caso de un circuito RL, el inductor se reemplaza por un cortocircuito.
- 4) Para determinar la constante de tiempo, se obtiene una resistencia equivalente del circuito vista desde las terminales del elemento que almacena energía.

Evaluando los términos de la ecuación 5.56 en los tiempos $t = 0$ y $t \rightarrow \infty$, se obtiene respectivamente

$$v_C(0) = v_C(0^-) = V_0$$

$$v_C(\infty) = V$$

Dado que P es el inverso de la constante de tiempo y que la resistencia equivalente del circuito, vista desde las terminales del capacitor es R , el voltaje en el capacitor para $t > 0$, es

$$v_C(t) = V + (V_0 - V)e^{-t/RC} \quad (5.57)$$

que es igual a las respuestas obtenidas con los métodos 1 y 2.

Ejemplo 5.6. Después de haber estado abierto por un largo período, el interruptor de la figura 5.31 se cierra en el instante $t = 0$. Determinar el voltaje del capacitor para $t > 0$.

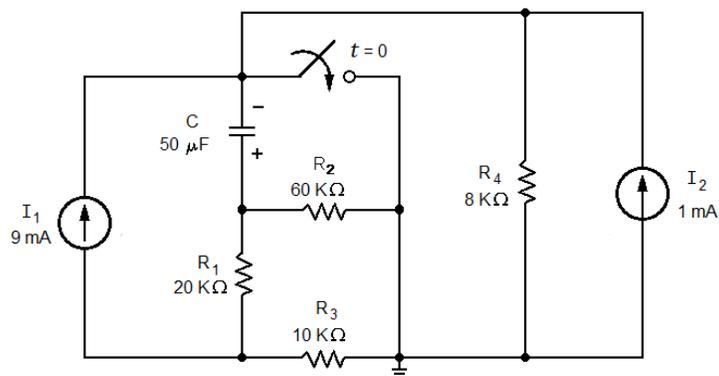


Figura 5.31. Circuito para el ejemplo 5.6.

Solución

La determinación del voltaje en el capacitor se va a realizar empleando cada uno de los tres métodos descritos anteriormente. Es necesario en cualquiera de ellos encontrar el voltaje del capacitor en el estado estable, es decir, $V_C(0^-)$. Para ello se aplica el método de los voltajes de nodos al circuito de la figura 5.32.

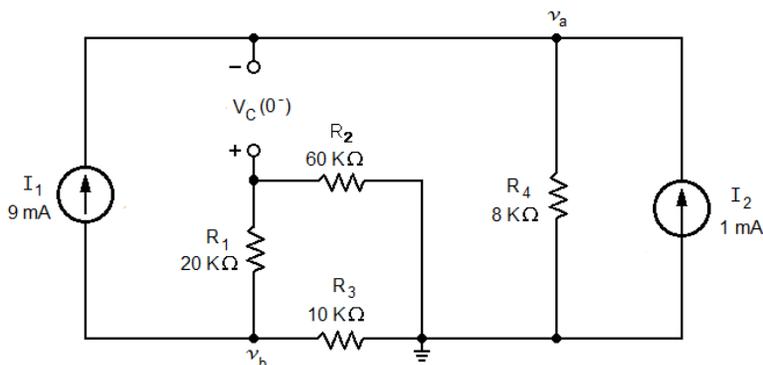


Figura 5.32. Circuito en el estado estable.

Nodo a:

$$\frac{v_a}{R_4} - I_1 - I_2 = 0$$

$$v_a = R_4(I_1 + I_2) = 8 \text{ k}\Omega \cdot (9 \text{ mA} + 1 \text{ mA}) = 80 \text{ V}$$

Nodo b:

$$v_b \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} \right) + I_1 = 0$$

$$v_b = -\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} I_1 = -\frac{10 \text{ k}\Omega \cdot (20 \text{ k}\Omega + 60 \text{ k}\Omega)}{20 \text{ k}\Omega + 60 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} \cdot 9 \text{ mA} = -80 \text{ V}$$

Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff para determinar $V_C(0^-)$, se tiene

$$-v_{R_2} + V_C(0^-) + v_a = 0 \quad (5.58)$$

en donde v_{R_2} se obtiene por un divisor de voltaje

$$v_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_b = \frac{60 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 60 \text{ k}\Omega} \cdot (-80 \text{ V}) = -60 \text{ V}$$

Despejando y sustituyendo valores en la ecuación 5.58

$$V_C(0^-) = v_{R_2} - v_a = -60 \text{ V} - 80 \text{ V} = -140 \text{ V}$$

Cuando el interruptor se cierra en el instante $t = 0$, la fuente de corriente I_2 y el resistor R_4 quedan en corto circuito por lo que se anulan, como se muestra en la figura 5.33.

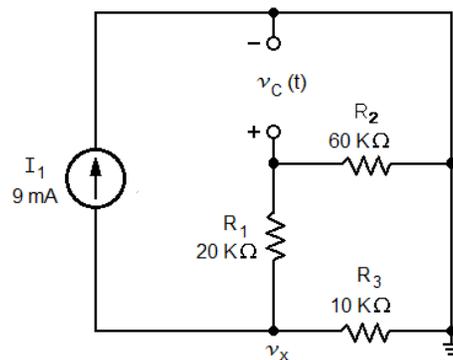


Figura 5.33. Circuito después de la conmutación.

Método de la ecuación diferencial.

El circuito de la figura 5.33 se puede reacomodar como se muestra en la figura 5.34.

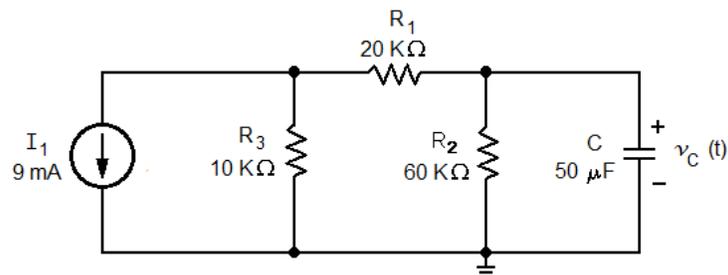


Figura 5.34. Circuito para determinar $v_C(t)$.

A partir de esta red se obtendrá un circuito RC equivalente, aplicando el teorema de Norton, para calcular $v_C(t)$. La corriente de corto circuito se obtiene, a partir de la figura 5.35, aplicando un divisor de corriente de la forma

$$i_{sc} = -\frac{R_3}{R_3 + R_1} I_1 = -\frac{10 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 20 \text{ k}\Omega} \cdot 9 \text{ mA} = -3 \text{ mA}$$

debido a que i_{sc} es la misma corriente que circula por R_1 .

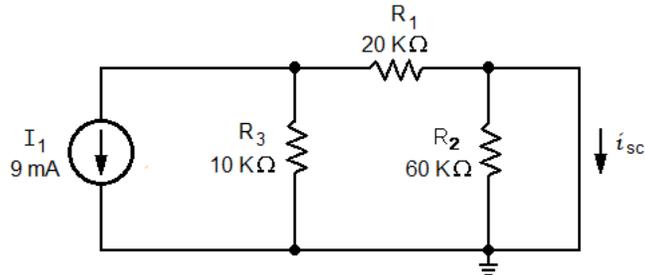


Figura 5.35. Circuito para determinar la corriente de corto circuito.

La resistencia Thévenin se obtiene a partir de la figura 5.36.

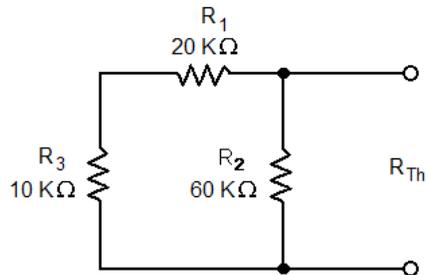


Figura 5.36. Red resistiva para obtener R_{Th} .

$$R_{Th} = R_2 || (R_1 + R_3) = \frac{60 \text{ k}\Omega \cdot 30 \text{ k}\Omega}{60 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} = 20 \text{ k}\Omega$$

Recordando que $i_{sc} = I_N$, el circuito RC equivalente es

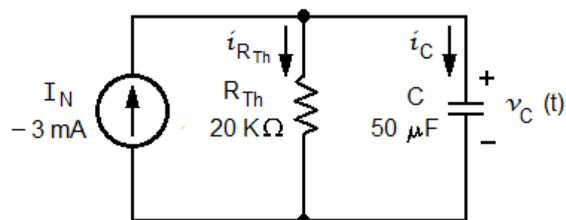


Figura 5.37. Circuito RC equivalente.

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff al circuito de la figura 5.37

$$-I_N + i_{R_{Th}} + i_C = 0 \tag{5.59}$$

Después de sustituir las expresiones de las corrientes en la ecuación 5.59 y reacomodar términos

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_{Th}C} = \frac{I_N}{C} \quad (5.60)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 5.60 por el método de separación de variables

$$\int_{V_0}^{v(t)} \frac{dv_C}{v_C - R_{Th}I_N} = - \int_0^t \frac{dt}{R_{Th}C}$$

$$v_C(t) = R_{Th}I_N + (V_0 - R_{Th}I_N)e^{-t/R_{Th}C} \quad (5.61)$$

Se sabe que

$$V_C(0^-) = V_0 = -140 \text{ V}$$

Sustituyendo valores en 5.61, se tiene que

$$v_C(t) = -20 \text{ k}\Omega \cdot 3 \text{ mA} + (-140 \text{ V} + 20 \text{ k}\Omega \cdot 3 \text{ mA})e^{-t/(20 \text{ k}\Omega \cdot 50 \text{ }\mu\text{F})}$$

$$v_C(t) = -(60 + 80e^{-t}) \text{ V}$$

Factor de integración.

A partir de la ecuación diferencial 5.60, identificamos los términos P y Q

$$\frac{dv_C}{dt} + v_C \frac{1}{R_{Th}C} = \frac{I_N}{C}$$

$$P = \frac{1}{R_{Th}C} \quad Q = \frac{I_N}{C}$$

Aplicando la solución 5.51 obtenida con anterioridad para determinar $v_C(t)$ y sustituyendo las constantes P y Q, se tiene

$$v_C(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt} = \frac{I_N/C}{1/R_{Th}C} + Ae^{-\frac{t}{R_{Th}C}}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación anterior

$$v_C(t) = -20 \text{ k}\Omega \cdot 3 \text{ mA} + Ae^{-t/(20 \text{ k}\Omega \cdot 50 \text{ }\mu\text{F})} = -60 \text{ V} + Ae^{-t} \quad (5.62)$$

la constante de integración de la ecuación 5.62 se determina en $t = 0$, y puesto que $V_C(0^-) = V_C(0^+) = v_C(0) = -140 \text{ V}$, valor obtenido en el estado estable antes de la conmutación, se tiene

$$-140 \text{ V} = -60 \text{ V} + A$$

$$A = -80 \text{ V}$$

Y, finalmente

$$v_C(t) = -(60 + 80e^{-t}) \text{ V}$$

Condiciones iniciales y finales.

- Determinación de $v_C(0)$

El voltaje del capacitor en $t = 0$, es

$$v_C(0^+) = v_C(0) = v_C(0^-) = -140 \text{ V}$$

valor que fue obtenido en el estado estable al inicio del problema.

- Determinación de $v_C(\infty)$

Se obtiene considerando al capacitor como un elemento abierto en el circuito de la figura 5.37, teniéndose ahora el siguiente circuito.

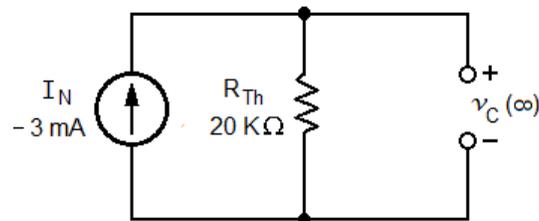


Figura 5.38. Circuito para determinar $v_C(\infty)$.

El voltaje del capacitor cuando $t \rightarrow \infty$, es

$$v_C(\infty) = I_N R_{Th} = -3 \text{ mA} \cdot 20 \text{ k}\Omega = -60 \text{ V}$$

La resistencia vista desde las terminales del capacitor es R_{Th} . Por tanto la constante de tiempo es

$$\tau = \frac{1}{p} = R_{Th} C = 20 \text{ k}\Omega \cdot 50 \text{ }\mu\text{F} = 1 \text{ s}$$

Ahora se aplica la ecuación 5.56 para determinar $v_C(t)$

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-Pt}$$

Sustituyendo los valores se llega a

$$v_C(t) = -60 \text{ V} + [-140 \text{ V} - (-60 \text{ V})]e^{-t}$$

$$v_C(t) = -(60 + 80e^{-t}) \text{ V}$$

Como puede observarse, se obtiene el mismo resultado aplicando cualquiera de los métodos descritos anteriormente. Asimismo, para determinar el voltaje de un capacitor para $t > 0$, es conveniente reducir el circuito eléctrico a un RC con fuente.

Ejemplo 5.7. Después de haber estado abierto por un largo período, el interruptor del circuito mostrado en la figura 5.39 se cierra en el instante $t = 0$. Determinar el voltaje en el resistor R_4 para $t > 0$.

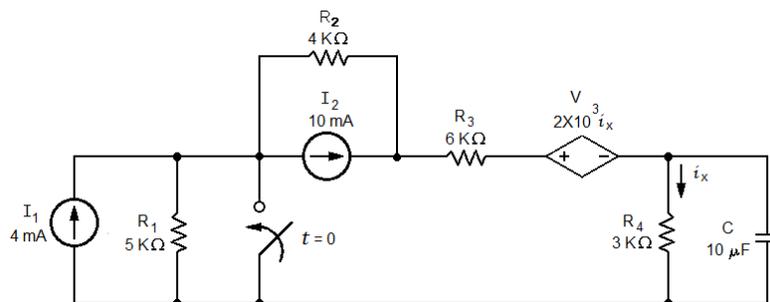


Figura 5.39. Circuito para el ejemplo 5.7.

Solución.

El voltaje en el resistor es el mismo que tiene el capacitor por estar ambos dispositivos en paralelo. El voltaje en el capacitor se va a calcular empleando el método de condiciones iniciales y finales.

- Determinación de $v_C(0^-)$

Las fuentes de corriente se pueden transformar a fuentes de voltaje y el capacitor se comporta como un circuito abierto como se muestra en la figura 5.40.

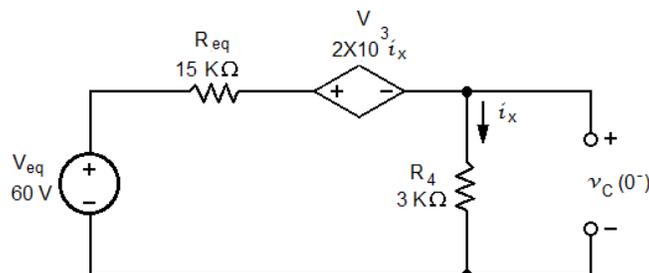


Figura 5.40. Circuito en el estado estable.

donde

$$V_{eq} = I_1 R_1 + I_2 R_2 = 20 \text{ V} + 40 \text{ V} = 60 \text{ V}$$

y

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 5 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega = 15 \text{ k}\Omega$$

el voltaje en el resistor R_4 se determina por medio de un divisor de voltaje

$$v_{R_4} = v_C(0^-) = \frac{R_4}{R_{eq} + R_4} (V_{eq} - 2000i_x) \quad (5.63)$$

Además

$$i_x = \frac{v_C(0^-)}{R_4} \quad (5.64)$$

Sustituyendo 5.64 en la ecuación 5.63 y reacomodando términos, se tiene

$$v_C(0^-) = \frac{R_4}{R_{eq} + R_4 + 2K\Omega} V_{eq} = \frac{3 \text{ k}\Omega}{15 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} \cdot 60 \text{ V} = 9 \text{ V}$$

Asimismo, debido a que el voltaje en el capacitor no cambia instantáneamente, se tiene

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0)$$

- Determinación de $v_C(\infty)$

Con el interruptor en su nueva posición se alcanza el estado estable y el capacitor se sustituye por un circuito abierto, lo que se muestra en el circuito de la figura 5.41.

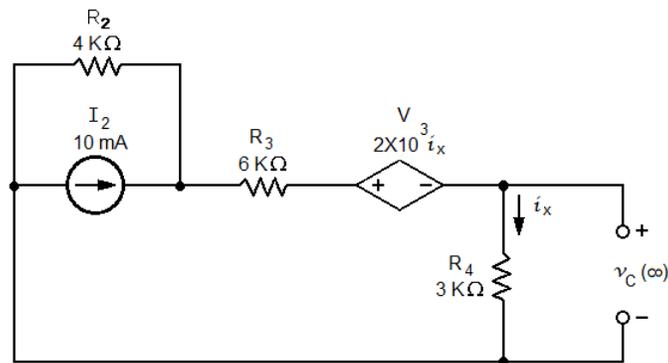


Figura 5.41. Circuito después de la conmutación del interruptor.

El voltaje en el resistor R_4 se determina por medio de un divisor de voltaje

$$v_{R_4} = v_C(\infty) = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} (I_2 R_2 - 2000i_x) \quad (5.65)$$

Sustituyendo 5.64 en la ecuación 5.65 y reacomodando términos, se tiene

$$v_c(\infty) = \frac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4 + 2k\Omega} I_2 R_2 = \frac{3 \text{ k}\Omega}{4 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} (10 \text{ mA})(4 \text{ k}\Omega) = 8 \text{ V}$$

Para calcular la constante de tiempo, se debe conocer la resistencia del circuito, la cual se obtiene a partir de las terminales del capacitor mediante un equivalente Thévenin. Para ello se aplica una fuente de corriente de prueba como se muestra en la figura 5.42.

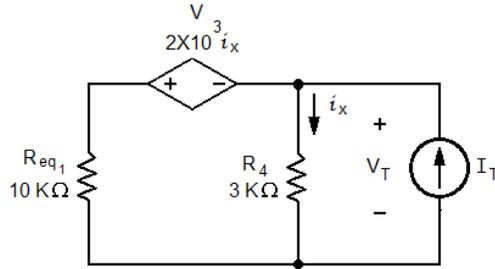


Figura 5.42. Circuito para calcular la resistencia Thévenin.

donde

$$R_{eq1} = R_2 + R_3 = 10 \text{ k}\Omega$$

Y

$$i_x = \frac{V_T}{R_4} \quad (5.66)$$

Aplicando el análisis de nodos al circuito anterior

$$V_T \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{eq1}} \right) + \frac{2000i_x}{R_{eq1}} - I_T = 0 \quad (5.67)$$

Sustituyendo 5.66 en la ecuación 5.67 y reordenando términos se tiene

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = \frac{R_{eq1}}{1 + \frac{R_{eq1} + 2000 \text{ k}\Omega}{R_4}} = \frac{10 \text{ k}\Omega \cdot 3 \text{ k}\Omega}{15 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ k}\Omega$$

La constante de tiempo es entonces

$$\tau = \frac{1}{P} = R_{Th} C = 2 \text{ k}\Omega \cdot 10 \mu\text{F} = 0.02 \text{ s}$$

Finalmente, de 5.56

$$v_c(t) = v_c(\infty) + [v_c(0) - v_c(\infty)]e^{-Pt}$$

Sustituyendo valores se tiene que

$$v_{R_4} = v_C(t) = 8 \text{ V} + [9 \text{ V} - 8 \text{ V}]e^{-50t} = (8 + e^{-50t}) \text{ V}$$

5.3.2 Respuesta escalón de un circuito RL

Ejemplo 5.8. El interruptor de la figura 5.43 ha estado abierto por mucho tiempo; en el instante $t = 0$ se cierra. Determinar la corriente a través de R_5 para $t > 0$.

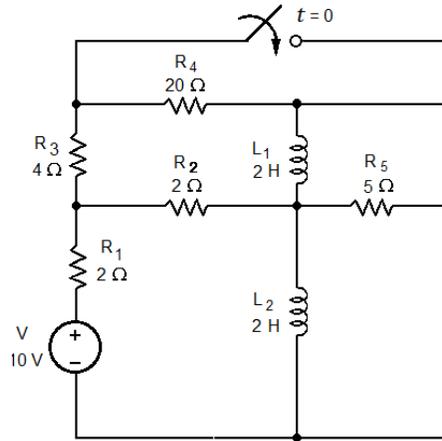


Figura 5.43. Circuito para el ejemplo 5.8.

Solución

La corriente en R_5 se determinará encontrando el voltaje en los inductores, debido a que ambos se encuentran conectados en paralelo con este resistor. En el estado estable, los inductores se comportan como corto circuito, y los elementos de la red eléctrica se pueden acomodar como se indica en la figura 5.44.

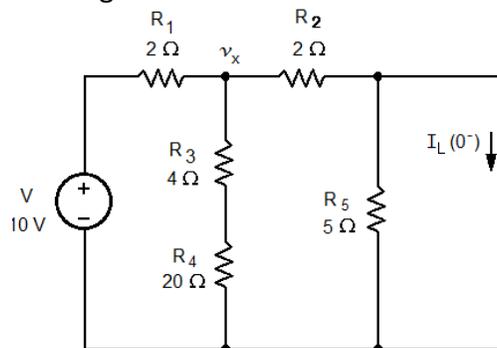


Figura 5.44. Circuito en el estado estable.

Obsérvese que el corto circuito anula el efecto de R_5 , por lo que la corriente de los inductores, $I_L(0^-)$ es la misma que circula por R_2 , siendo ésta

$$I_L(0^-) = \frac{v_x}{R_2} \quad (5.68)$$

Además, los resistores R_3 y R_4 pueden ser sustituidos por su equivalente en serie

$$R_{eq} = R_3 + R_4 = 4 \Omega + 20 \Omega = 24 \Omega$$

Aplicando un divisor de voltaje para determinar v_x , se tiene

$$v_x = \frac{R_{eq} \parallel R_2}{R_1 + R_{eq} \parallel R_2} V \quad (5.69)$$

Sustituyendo 5.69 en 5.68, así como los valores de los elementos

$$I_L(0^-) = \frac{R_{eq}}{R_1(R_{eq} + R_2) + R_{eq}R_2} V = \frac{24 \Omega}{52 \Omega^2 + 48 \Omega^2} \cdot 10 V = \frac{24}{10} A$$

Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, el circuito queda como se muestra en la figura 5.45a. Para calcular el voltaje en los inductores es necesario obtener el circuito RL equivalente, lo que se hace mediante un equivalente de Thévenin. Para ello, el voltaje de este equivalente se determina por medio del circuito de la figura 5.45b.

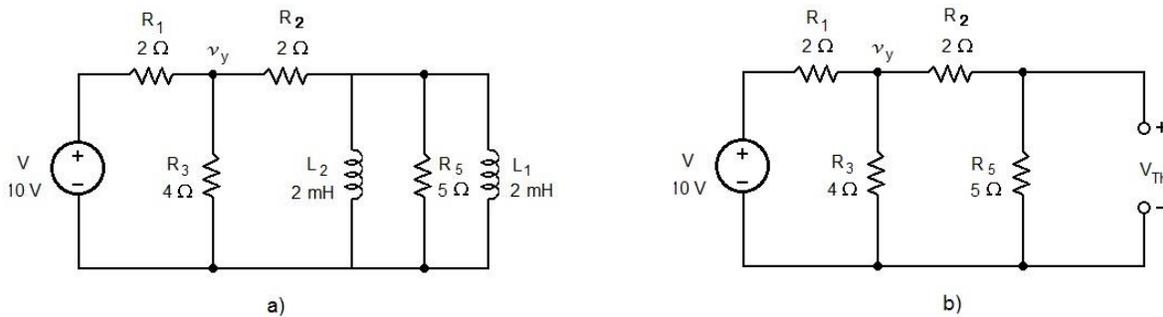


Figura 5.45. a) Circuito en $t = 0^+$, b) Circuito para determinar el voltaje Thévenin.

Haciendo

$$R_{eq1} = R_2 + R_5 = 2 \Omega + 5 \Omega = 7 \Omega$$

y aplicando divisores de voltaje, se tiene

$$v_y = \frac{R_3 \parallel R_{eq1}}{R_1 + R_3 \parallel R_{eq1}} V \quad (5.70)$$

$$V_{Th} = \frac{R_5}{R_2 + R_5} v_y \quad (5.71)$$

Sustituyendo 5.70 en 5.71, así como los valores de los elementos

$$V_{Th} = \frac{R_5(R_3 \parallel R_{eq1})}{R_{eq1}(R_1 + R_3 \parallel R_{eq1})} V = \frac{5 \Omega \cdot (4 \Omega \parallel 7 \Omega)}{7 \Omega \cdot (2 \Omega + 4 \Omega \parallel 7 \Omega)} \cdot 10 V = 4 V$$

La resistencia Thévenin se determina a partir de las terminales de los inductores, como se indica en la figura 5.46.

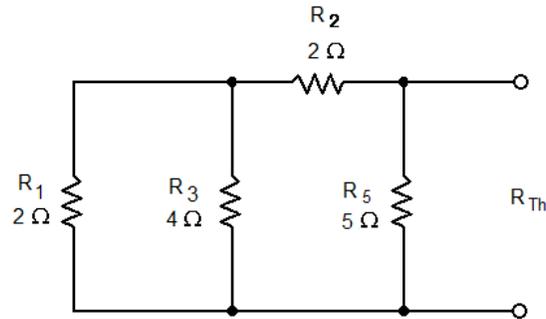


Figura 5.46 Circuito para determinar la resistencia Thévenin.

$$R_{Th} = (R_1 || R_3 + R_2) || R_5 = (2 \Omega || 4 \Omega + 2 \Omega) || 5 \Omega = 2 \Omega$$

Del circuito de la figura 5.45a se tiene que la inductancia equivalente es

$$L_{eq} = L_1 || L_2 = 2 \text{ H} || 2 \text{ H} = 1 \text{ H}$$

Por tanto el circuito RL equivalente es

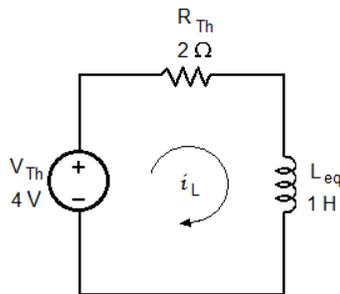


Figura 5.47. Circuito RL equivalente.

La ecuación diferencial del circuito RL es

$$L_{eq} \frac{di_L}{dt} + R_{Th} i_L = V_{Th} \quad (5.72)$$

que puede escribirse como

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{Th}}{L_{eq}} i_L = \frac{V_{Th}}{L_{eq}}$$

Como en el caso de los circuitos RC, esta ecuación puede ser resuelta por cualquiera de los tres métodos antes mencionados. Resolviendo primero por factor de integración, se establecen las siguientes equivalencias

$$P = \frac{R_{Th}}{L_{eq}} \quad Q = \frac{V_{Th}}{L_{eq}}$$

De manera análoga a la ecuación 5.51, se tiene

$$i_L(t) = \frac{Q}{P} + Ke^{-Pt} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} + Ke^{-\frac{R_{Th}t}{L_{eq}}} \quad (5.73)$$

Sustituyendo valores

$$i_L(t) = \frac{4V}{2\Omega} + Ke^{-\frac{2\Omega}{1H}t} = (2 + Ke^{-2t}) A$$

La constante de integración K de la ecuación anterior se determina en $t = 0$, y puesto que la corriente en el inductor no cambia de manera instantánea, $I_L(0^-) = I_L(0^+) = i_L(0) = \frac{24}{10}$ A, se tiene

$$\frac{24}{10} A = 2 A + K$$

por tanto

$$K = \frac{2}{5} A$$

Sustituyendo este valor en $i_L(t)$

$$i_L(t) = (2 + \frac{2}{5}e^{-2t}) A \quad (5.74)$$

De esta última expresión, el voltaje en los inductores es

$$v_L(t) = L_{eq} \frac{di_L(t)}{dt} = -1 H \cdot \frac{4}{5} e^{-2t} A = -\frac{4}{5} e^{-2t} V$$

Finalmente

$$i_{R_5} = \frac{v_L(t)}{R_5} = \frac{-\frac{4}{5} e^{-2t} V}{5 \Omega} = -\frac{4}{25} e^{-2t} A$$

Ahora se resolverá la ecuación diferencial 5.72 por el método de separación de variables para determinar $i_L(t)$. En este caso se tiene

$$\int_{I_0}^{i_L(t)} \frac{di_L}{i_L - \frac{V_{Th}}{R_{Th}}} = -\frac{R_{Th}}{L_{eq}} \int_0^t dt$$

cuya solución es

$$i_L(t) = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} + \left(I_0 - \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \right) e^{-\frac{R_{Th}t}{L_{eq}}} \quad (5.75)$$

Sustituyendo valores en 5.75, tenemos

$$i_L(t) = \frac{4 \text{ V}}{2 \Omega} + \left(\frac{24}{10} \text{ A} - \frac{4 \text{ V}}{2 \Omega} \right) e^{-2t} = \left(2 + \frac{2}{5} e^{-2t} \right) \text{ A}$$

que corresponde al mismo resultado obtenido en 5.74.

Por el método de condiciones iniciales y finales, primero se determina $i_L(0)$, considerando que esta corriente es igual a la obtenida en el estado estable antes de la conmutación, es decir

$$i_L(0) = I_L(0^-) = \frac{24}{10} \text{ A}$$

Para calcular ahora $i_L(\infty)$, se sustituye a los inductores por un corto circuito, tal como se muestra en la figura 5.48.

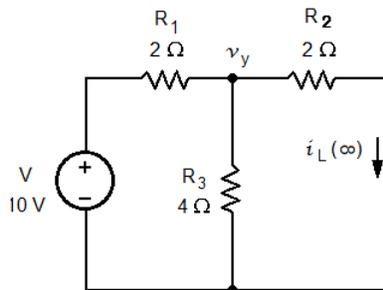


Figura 5.48. Circuito para determinar $i_L(\infty)$.

Aplicando un divisor de voltaje para determinar v_y y sustituyendo valores

$$v_y = \frac{R_2 || R_3}{R_1 + R_2 || R_3} V = \frac{2 \Omega || 4 \Omega}{2 \Omega + 2 \Omega || 4 \Omega} \cdot 10 \text{ V} = 4 \text{ V}$$

La corriente de los inductores cuando $t \rightarrow \infty$, es

$$i_L(\infty) = \frac{v_y}{R_2} = \frac{4 \text{ V}}{2 \Omega} = 2 \text{ A}$$

Por otra parte, la constante de tiempo se obtiene a partir de los valores de R_{Th} y L_{eq} , indicados en el circuito de la figura 5.47

$$\tau = \frac{1}{P} = \frac{L_{eq}}{R_{Th}} = \frac{1 \text{ H}}{2 \Omega} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

Aplicando de forma análoga la ecuación 5.56, pero ahora en términos de la corriente para determinar $i_L(t)$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-Pt} \quad (5.76)$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior tenemos

$$i_L(t) = 2 \text{ A} + \left[\frac{24}{10} \text{ A} - 2 \text{ A} \right] e^{-2t} = \left(2 + \frac{2}{5} e^{-2t} \right) \text{ A}$$

que una vez más concuerda con el resultado obtenido en la ecuación 5.74.

Ejemplo 5.9. Después de haber estado abierto por un largo periodo, el interruptor del circuito mostrado en la figura 5.49, se cierra en el instante $t = 0$. Determinar el voltaje en el resistor R_5 para $t > 0$.

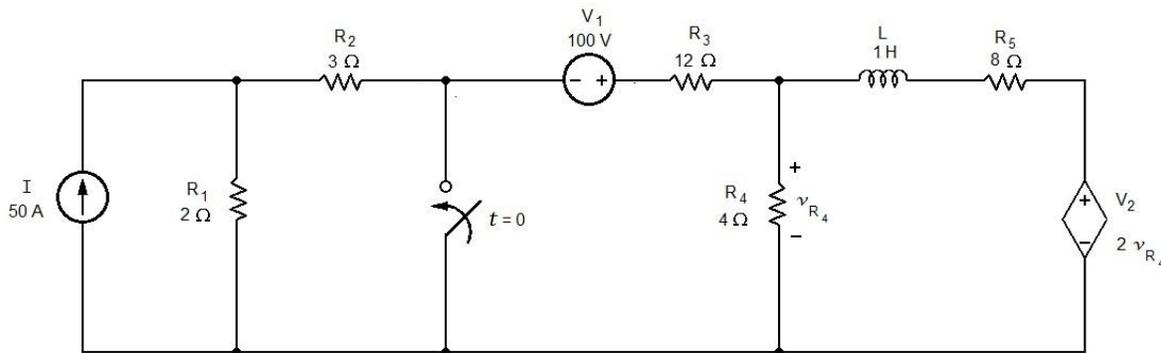


Figura 5.49. Circuito para el ejemplo 5.9.

Solución.

Antes de la conmutación el circuito ha alcanzado el estado estable, por lo que el inductor almacena energía en forma de corriente, denominada $I_L(0^-)$, y se comporta como corto circuito. Esto se indica en la figura 5.50 donde, además, la red eléctrica a la izquierda del resistor R_4 ha sido reducida a un circuito equivalente formado por

$$V_{eq} = R_1 I + V_1 = 2 \Omega \cdot 50 \text{ A} + 100 \text{ V} = 200 \text{ V}$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 2 \Omega + 3 \Omega + 12 \Omega = 17 \Omega$$

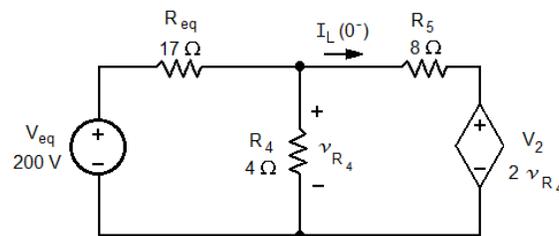


Figura 5.50. Circuito en el estado estable.

Aplicando el análisis de nodos para determinar v_{R_4}

$$v_{R_4} \left(\frac{1}{R_{eq}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_{eq}}{R_{eq}} - \frac{V_2}{R_5} = 0$$

Despejando y sustituyendo valores de los elementos

$$v_{R_4} = \frac{R_4 R_5 (R_1 I + V_1)}{R_5 (R_4 + R_{eq}) - R_{eq} R_4} = \frac{(4 \Omega)(8 \Omega)(2 \Omega \cdot 50 \text{ A} + 100 \text{ V})}{(8 \Omega)(4 \Omega + 17 \Omega) - (17 \Omega)(4 \Omega)} = 64 \text{ V}$$

Aplicando la ley de Ohm para determinar $I_L(0^-)$

$$I_L(0^-) = \frac{v_{R_4} - V_2}{R_5} = \frac{v_{R_4} - 2v_{R_4}}{R_5} = -\frac{64 \text{ V}}{8 \text{ A}} = -8 \text{ A}$$

Inmediatamente después de la conmutación, el circuito eléctrico queda como se muestra en la figura 5.51.

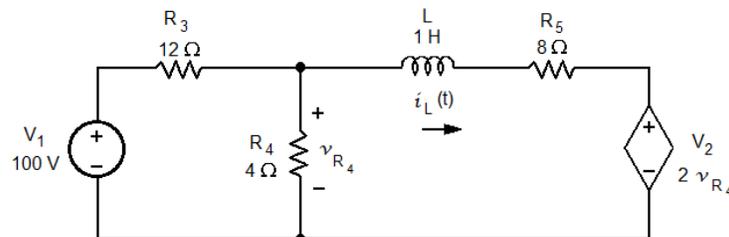


Figura 5.51. Circuito después de la conmutación.

Para simplificar el análisis de este circuito y determinar $i_L(t)$, se requiere reducirlo a un circuito RL equivalente y para ello es necesario encontrar los valores de R_{Th} y v_{oc} .

La resistencia Thévenin se obtiene a partir de las terminales del inductor, aplicando una fuente de corriente de prueba I_T , como se indica en la figura 5.52.

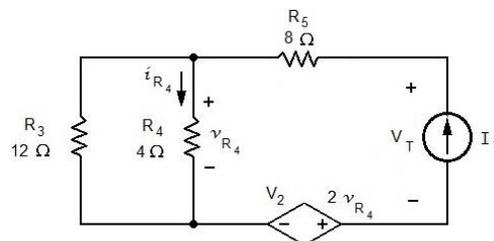


Figura 5.52. Circuito para determinar la resistencia Thévenin.

El voltaje V_T se obtiene por medio de la ley de voltajes de Kirchhoff

$$-V_T + v_{R_5} + v_{R_4} - V_2 = 0$$

La corriente i_{R_4} se calcula aplicando un divisor de corriente

$$i_{R_4} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} I_T = \frac{12\Omega}{12\Omega + 4\Omega} I_T = \frac{3}{4} I_T$$

Despejando V_T y sustituyendo i_{R_4} así como los valores numéricos, se tiene

$$V_T = v_{R_5} + v_{R_4} - 2v_{R_4} = R_5 I_T - R_4 \left(\frac{3}{4} I_T \right) = (5\Omega) I_T$$

donde

$$R_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = 5\Omega$$

Asimismo, el voltaje a circuito abierto se determina a partir de la figura 5.53.

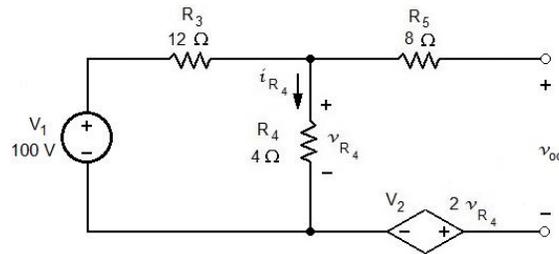


Figura 5.53. Circuito para determinar el voltaje a circuito abierto.

Aplicando un divisor de voltaje en R_4 se tiene

$$v_{R_4} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_1 = \frac{4\Omega}{12\Omega + 4\Omega} \cdot 100\text{ V} = 25\text{ V}$$

De la figura 5.53 se observa que el voltaje a circuito abierto está dado como

$$v_{oc} = v_{R_4} - V_2 = v_{R_4} - 2v_{R_4} = -v_{R_4} = -25\text{ V} = V_{Th}$$

El circuito RL equivalente se muestra en la figura 5.54.

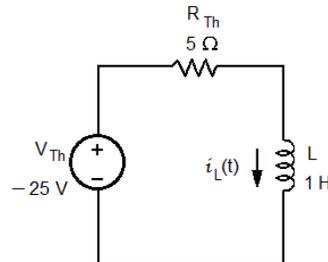


Figura 5.54. Circuito RL equivalente.

La corriente $i_L(t)$ se puede obtener aplicando de manera directa la solución de la ecuación diferencial obtenida en 5.75.

$$i_L(t) = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} + \left(I_0 - \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \right) e^{-\frac{R_{Th}}{L_{eq}}t}$$

A partir de la corriente $I_L(0^-)$ obtenida en el estado estable antes de la conmutación, y considerando que la corriente en el inductor no cambia instantáneamente, se tiene que

$$I_L(0^-) = I_L(0^+) = I_L(0) = I_0 = -8 \text{ A}$$

Sustituyendo valores numéricos en $i_L(t)$

$$i_L(t) = \frac{-25 \text{ V}}{5 \Omega} + \left[-8 \text{ A} - \left(\frac{-25 \text{ V}}{5 \Omega} \right) \right] e^{-5t} \text{ A}$$

$$i_L(t) = (-5 - 3e^{-5t}) \text{ A}$$

Finalmente

$$v_{R_5} = R_5 i_L(t) = 8 \Omega \cdot (-5 - 3e^{-5t}) \text{ A} = (-40 - 24e^{-5t}) \text{ V}$$

La corriente $i_L(t)$ también se puede determinar usando el factor de integración. Aplicando la ecuación 5.73

$$i_L(t) = \frac{Q}{P} + K e^{-Pt} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} + K e^{-\frac{R_{Th}}{L_{eq}}t}$$

Sustituyendo valores

$$i_L(t) = \frac{-25 \text{ V}}{5 \Omega} + K e^{-\frac{5 \Omega}{1 \text{ H}}t} = (-5 + K e^{-5t}) \text{ A}$$

La constante de integración K de la ecuación anterior se determina en $t = 0$. Puesto que $I_L(0^-) = I_L(0^+) = i_L(0) = -8 \text{ A}$, valor que fue obtenido en el estado estable antes de la conmutación, se tiene

$$-8 \text{ A} = -5 \text{ A} + K$$

por lo que

$$K = -3 \text{ A}$$

Sustituyendo este valor, se tiene que

$$i_L(t) = (-5 - 3e^{-5t}) \text{ A}$$

lo que corresponde al resultado obtenido al aplicar la solución de la ecuación diferencial.

Finalmente, para obtener $i_L(t)$ por medio del método de condiciones iniciales y finales, se determina primero el valor de $i_L(0)$, sabiendo que

$$I_L(0^-) = i_L(0) = -8 \text{ A}$$

Para calcular $i_L(\infty)$, se considera que el inductor ha alcanzado el estado estable después de la conmutación y se comporta como un corto circuito, como se muestra en la figura 5.55.

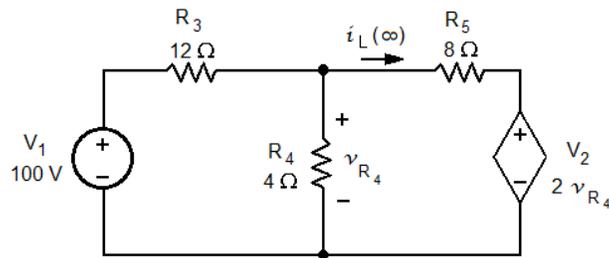


Figura 5.55. Circuito para determinar $i_L(\infty)$.

El voltaje en R_4 se determina por medio del análisis de nodos, teniéndose

$$v_{R_4} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - \frac{V_1}{R_3} - \frac{V_2}{R_5} = 0$$

Despejando y sustituyendo valores numéricos en la ecuación anterior, se tiene

$$v_{R_4} = \frac{V_1}{R_3 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_5} \right)} = \frac{100 \text{ V}}{12 \Omega \cdot \left(\frac{1}{12 \Omega} + \frac{1}{4 \Omega} - \frac{1}{8 \Omega} \right)} = 40 \text{ V}$$

De la figura 5.55, se observa que

$$i_L(\infty) = \frac{v_{R_4} - V_2}{R_5} = \frac{v_{R_4} - 2v_{R_4}}{R_5} = -\frac{v_{R_4}}{R_5} = -\frac{40 \text{ V}}{8 \Omega} = -5 \text{ A}$$

Por otra parte, la constante de tiempo se obtiene a partir de los valores de R_{Th} y L , indicados en el circuito de la figura 5.54

$$\tau = \frac{1}{P} = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{1 \text{ H}}{5 \Omega} = \frac{1}{5} \text{ s}$$

Aplicando la ecuación 5.76

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-Pt}$$

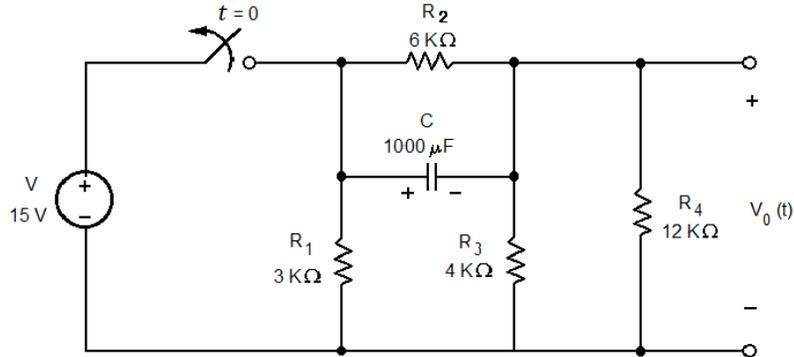
Sustituyendo valores en la expresión anterior, se tiene

$$i_L(t) = -5 \text{ A} + [-8 \text{ A} + 5 \text{ A}]e^{-5t} = (-5 - 3e^{-5t}) \text{ A}$$

que, una vez más, concuerda con el resultado para $i_L(t)$ obtenido aplicando los otros métodos de solución.

EJERCICIOS PROPUESTOS

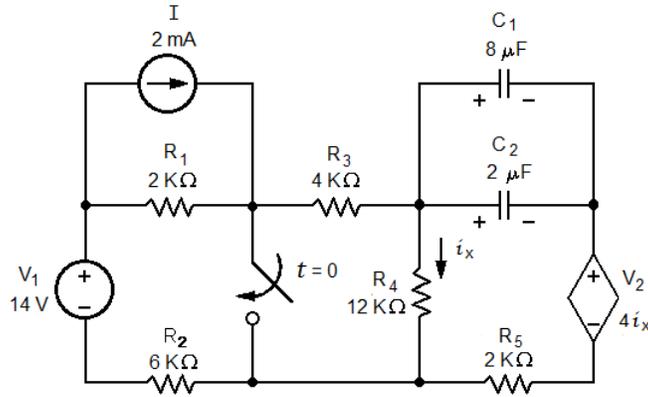
5.1. El interruptor de la figura ha estado cerrado por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, se abre. Determinar $v_0(t)$ para $t > 0$.



Respuesta:

$$v_0(t) = -5e^{-\frac{t}{3}} \text{ V}$$

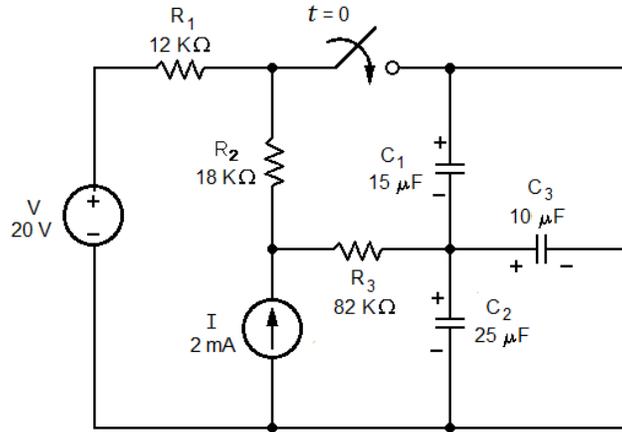
5.2 El interruptor de la figura ha estado abierto por mucho tiempo y se cierra en el instante $t = 0$. Determinar la corriente a través del resistor R_5 para $t > 0$.



Respuesta:

$$i_{R_5}(t) = -1.5e^{-25t} \text{ mA}$$

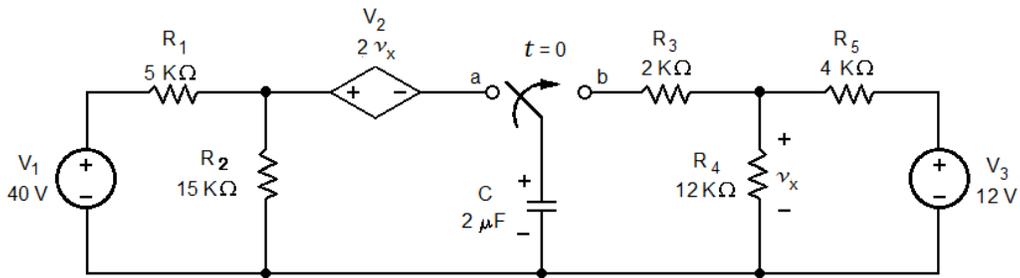
5.3. El interruptor de la figura ha estado abierto por mucho tiempo y se cierra en el instante $t = 0$. Determinar la energía total disipada en el resistor R_3 para $t > 0$.



Respuesta:

$$\omega_{R_3} = -39.68 \mu\text{J}$$

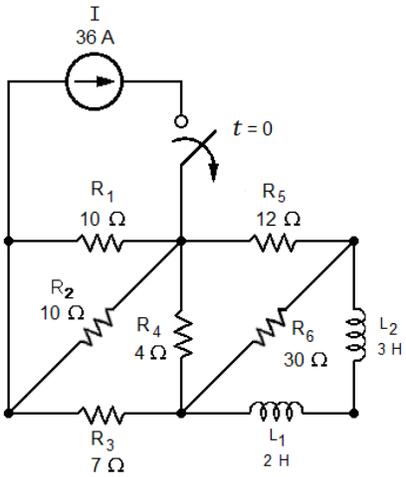
5.4. El interruptor de la figura ha estado en la posición 'a' por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, cambia a la posición 'b'. Determinar la potencia disipada en el resistor R_4 para $t > 0$.



Respuesta:

$$p_{R_4}(t) = 150 \cdot (5 + e^{-100t})^2 \mu\text{W}$$

5.5. El interruptor de la figura ha estado cerrado por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, se abre. Determinar la potencia en cada uno de los inductores para $t > 0$.

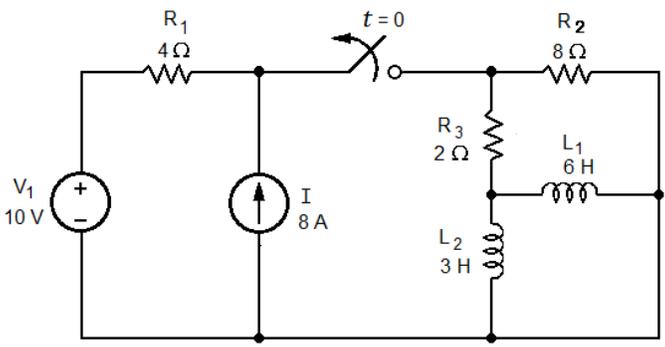


Respuesta:

$$p_{L_1}(t) = -36e^{-4t} \text{ W}$$

$$p_{L_2}(t) = -54e^{-4t} \text{ W}$$

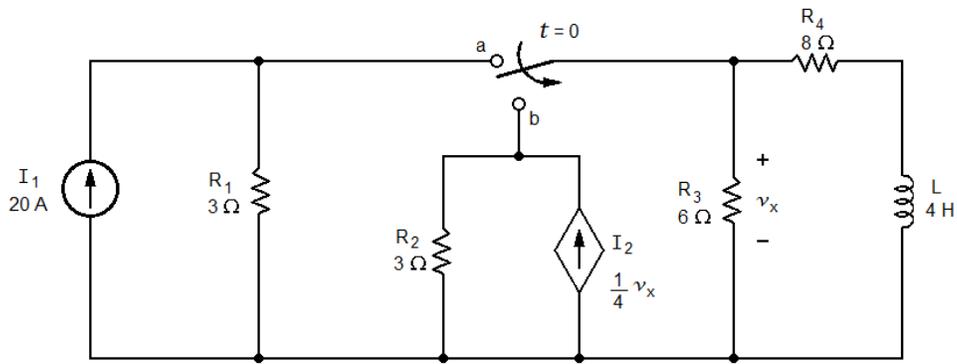
5.6. El interruptor de la figura ha estado cerrado por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, se abre. Determinar la energía total disipada en el resistor R_2 .



Respuesta:

$$\omega_{R_2} = 28.8 \text{ J}$$

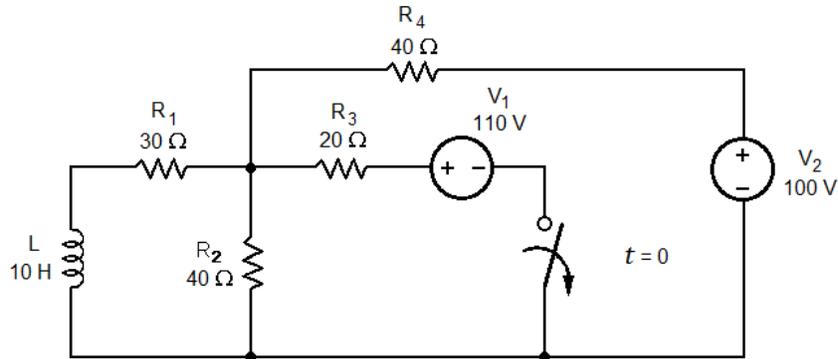
5.7. El interruptor de la figura ha estado en la posición 'a' por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, cambia a la posición 'b'. Determinar el voltaje en el inductor para $t > 0$.



Respuesta:

$$v_L(t) = -48e^{-3t} \text{ V}$$

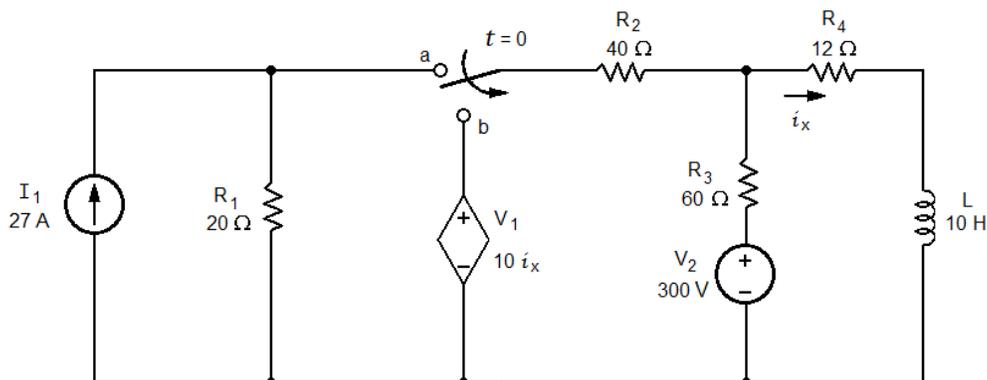
5.8. El interruptor de la figura ha estado cerrado por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, se abre. Determinar el voltaje en el resistor R_2 .



Respuesta:

$$v_{R_2}(t) = (30 - 20e^{-5t}) \text{ V}$$

5.9. El interruptor de la figura ha estado en la posición 'a' por mucho tiempo y en el instante $t = 0$, cambia a la posición 'b'. Determinar la potencia total de la fuente de voltaje dependiente, para $t > 0$.



Respuesta:

$$v_{R_2}(t) = (30 - 20e^{-5t}) \text{ V}$$

Capítulo 6. Circuitos con amplificadores operacionales

6.1. Amplificador operacional ideal

Un amplificador operacional es un dispositivo que aumenta el valor de una señal. El elemento principal del amplificador es una fuente de voltaje controlada por la señal de entrada. Un modelo simplificado del amplificador es el que se muestra en la figura 6.1, donde R_i y R_o son las resistencias de entrada y de salida del amplificador, respectivamente.

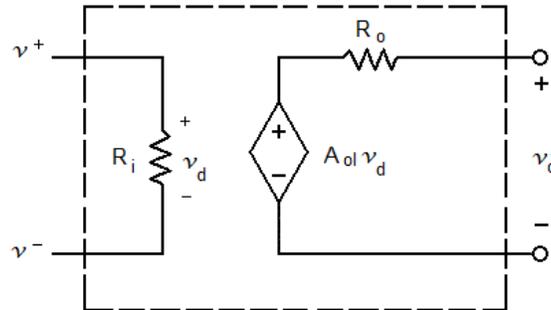


Figura 6.1. Amplificador de voltaje ideal.

El voltaje de salida del circuito tiene la forma $v_o = A_{ol} v_d$, donde A_{ol} es un factor de multiplicación llamado ganancia a lazo abierto, la cual, idealmente, es infinita, y $v_d = v^+ - v^-$, que es el voltaje diferencial en la entrada del circuito. Asimismo, es deseable que R_i sea infinita y R_o igual a cero, lo que evita que tanto la señal de entrada como la de salida se vean afectadas.

El símbolo del amplificador operacional es el que se muestra en la figura 6.2; tiene dos terminales de entrada, una inversora (v^-) y una no inversora (v^+), así como una de salida (v_o) y dos para polarización ($+V_{CC}$ y $-V_{CC}$). Por lo general, estas dos últimas se omiten en el análisis de los circuitos con amplificadores operacionales.

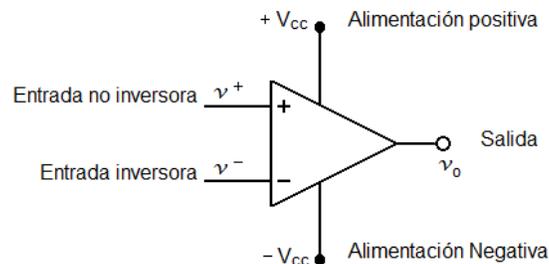


Figura 6.2. Símbolo de circuito para el amplificador operacional.

Sus aplicaciones no se limitan a las de amplificación, pues también se emplean para realizar operaciones matemáticas, lógicas, de control, filtrado y fuentes de corriente entre otros, por lo que sus entradas pueden ser tanto constantes como variables en el tiempo.

Al depender de A_{ol} , el voltaje de salida en teoría sería infinito. La forma de limitarlo es estableciendo una vía de retroalimentación negativa, conectando un elemento entre la salida y la entrada inversora del amplificador, obteniéndose con ello una ganancia de circuito, denominada a lazo cerrado, A_{cl} .

6.2. Configuraciones básicas

6.2.1. Amplificador inversor

En la figura 6.3 se muestra esta configuración. Las terminales correspondientes a la alimentación se han omitido puesto que no son necesarias para el análisis del circuito. Éste se lleva a cabo considerando que el circuito funciona en la región lineal, es decir, donde la salida nunca es mayor que los voltajes de alimentación del amplificador operacional. Asimismo, se indican las corrientes en el nodo v^- , las cuales van a ser útiles para obtener v_o .

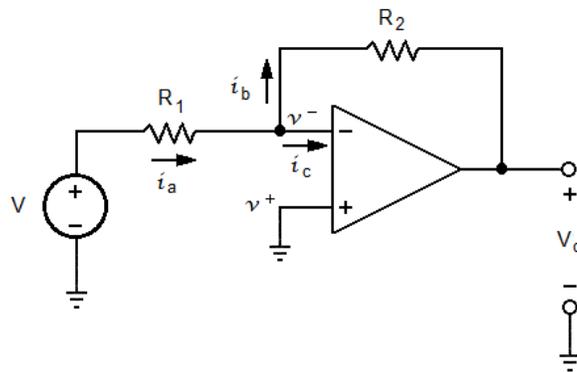


Figura 6.3. Amplificador Inversor.

Aplicando la LCK en v^-

$$i_a = i_b + i_c$$

Sustituyendo en esta ecuación cada una de las corrientes en términos de voltaje y resistencias se tiene

$$\frac{v - v^-}{R_1} = \frac{v^- - V_o}{R_2} + i_c \quad (6.1)$$

donde i_c está dada como

$$i_c = \frac{v^- - v^+}{R_i}$$

y ya que R_i es idealmente infinita, i_c es prácticamente cero, por lo que $v^- = v^+$. Para fines prácticos se considera que no entran corrientes al amplificador operacional ideal y que los

voltajes en la terminal inversora y no inversora son iguales, características que se aplicarán a lo largo de este capítulo.

Por lo anterior, $v^- = 0$, y despejando V_o de la ecuación 6.1 tenemos

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}V \quad (6.2)$$

Analizando la ecuación 6.2, se infiere que la resistencia R_2 debe ser mayor que R_1 para que el circuito pueda amplificar. Por otra parte, si el voltaje de entrada es positivo la salida es negativa y viceversa.

Finalmente, el cociente $\frac{V_o}{V}$ es la ganancia del circuito y se denomina ganancia de lazo cerrado, A_{cl} , siendo ésta

$$A_{cl} = \frac{V_o}{V} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (6.3)$$

La ecuación 6.2 puede obtenerse de una forma más directa, haciendo el análisis de nodos esenciales, como se vio en el capítulo 3 sección 3.2, teniéndose en este caso

$$v^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V}{R_1} - \frac{V_o}{R_2} = 0$$

Nótese que en esta ecuación ya se ha hecho la consideración de que no hay corrientes de entrada al amplificador operacional y, ya que $v^- = 0$, se obtiene el mismo resultado que en el análisis anterior

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}V$$

El único nodo en el que no puede aplicarse la ley de corrientes de Kirchhoff es el de salida, ya que la corriente de salida del amplificador operacional ideal siempre es desconocida.

Ejemplo 6.1. Supóngase que el voltaje de entrada al circuito inversor es de 100 mV y se quiere obtener un voltaje de salida de -3 V. Determinar los valores de los resistores del circuito.

Solución.

En general, para que se conserven las características ideales de los amplificadores operacionales, las resistencias se utilizan en el orden de $k\Omega$ y los valores se escogen en función de la ecuación de la ganancia de lazo cerrado obtenida. Aplicando 6.3 y omitiendo por el momento el signo tenemos

$$\frac{V_o}{V} = \frac{3 \text{ V}}{0.1 \text{ V}} = 30$$

Este resultado nos indica que se requiere una ganancia de 30 para obtener el voltaje deseado. También, se observa que puede haber diferentes valores de resistencias que proporcionen esta misma ganancia. En este caso, se selecciona $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$ y $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, pero otros valores también podrían ser $R_2 = 180 \text{ k}\Omega$ y $R_1 = 6 \text{ k}\Omega$, etc.

6.2.2. Amplificador no inversor

Esta configuración se muestra en la figura 6.4 en donde, además, se han indicado las corrientes en el nodo v^- , para el análisis.

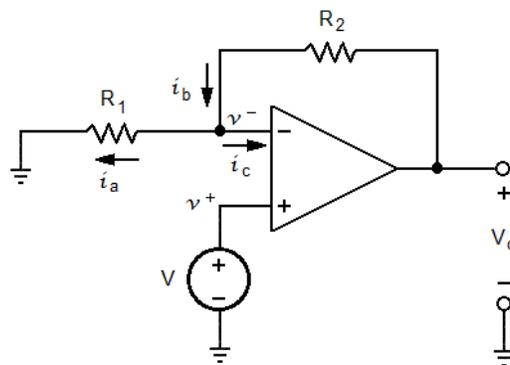


Figura 6.4. Amplificador no inversor.

Aplicando la LCK en v^-

$$i_b = i_a + i_c$$

Sustituyendo sus expresiones en términos de voltajes y resistencias, y sabiendo que $i_c = 0$ puesto que no hay corrientes de entrada al amplificador operacional ideal, se tiene

$$\frac{V_o - v^-}{R_2} = \frac{v^-}{R_1}$$

Dado que $v^- = v^+ = V$, y despejando el voltaje de salida de la ecuación anterior

$$V_o = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) V \quad (6.4)$$

Donde la ganancia de lazo cerrado queda de la forma

$$A_{cl} = \frac{V_o}{V} = \frac{R_2}{R_1} + 1 \quad (6.5)$$

Como se puede observar en la ecuación 6.5, la ganancia del circuito es positiva y está dada por el cociente de resistencias, además de que siempre es mayor que la unidad.

6.2.3. Amplificador sumador

Este circuito realiza la suma algebraica de dos o más señales de entrada. La figura 6.5 muestra un amplificador que suma tres voltajes de entrada.

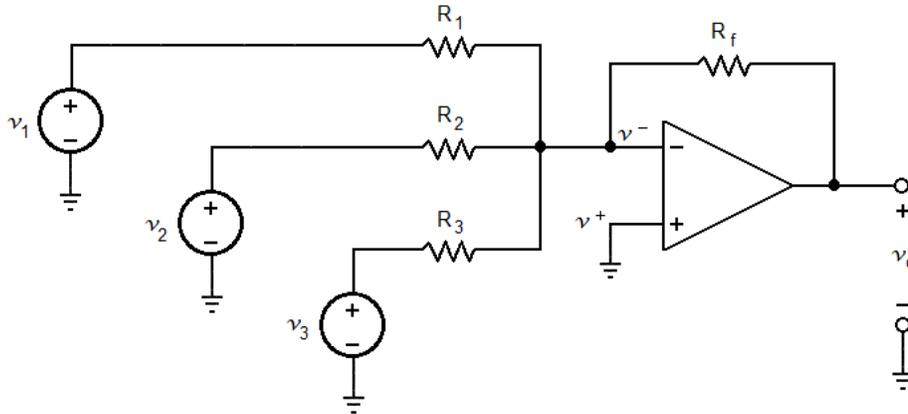


Figura 6.5. Amplificador sumador.

La ecuación de nodo para v^- es

$$v^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_f} \right) - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} - \frac{v_o}{R_f} = 0$$

Ya que $v^- = v^+ = 0$, y despejando v_o de la ecuación anterior, se obtiene

$$v_o = - \left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3 \right) \quad (6.6)$$

De la ecuación 6.6 se observa que el voltaje de salida es la suma de los voltajes de entrada, cada uno de ellos con una determinada ganancia que, en general, está expresada por el cociente $\frac{R_f}{R_i}$, donde el subíndice i hace referencia al i -ésimo resistor. El signo negativo que invierte esta suma se debe a la configuración inversora en la que se encuentra cada uno de los voltajes de entrada. Lo anterior puede comprobarse analizando el circuito mediante superposición, como se muestra a continuación.

Para v_1 , el circuito queda como indica la figura 6.6.

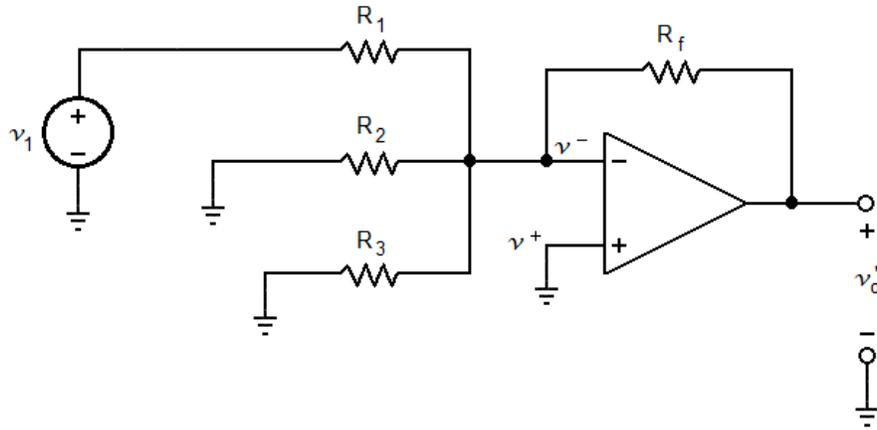


Figura 6.6. Circuito para analizar contribución de v_1 .

La ecuación de nodo para v^- , en este caso, es

$$v^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_f} \right) - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_o'}{R_f} = 0$$

Y puesto que $v^- = v^+ = 0$,

$$v_o' = -\frac{R_f}{R_1} v_1$$

De manera similar, las contribuciones de v_2 y v_3 son, respectivamente

$$v_o'' = -\frac{R_f}{R_2} v_2 \quad \text{y} \quad v_o''' = -\frac{R_f}{R_3} v_3$$

Por lo que

$$v_o = v_o' + v_o'' + v_o''' = -\left(\frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \frac{R_f}{R_3} v_3 \right)$$

Finalmente, cabe mencionar que la solución de circuitos con amplificadores operacionales puede encontrarse aplicando cualquiera de las herramientas de análisis revisadas en los capítulos anteriores.

6.2.4. Amplificador de diferencias

Realiza la diferencia de dos voltajes. Su configuración se muestra en la figura 6.7.

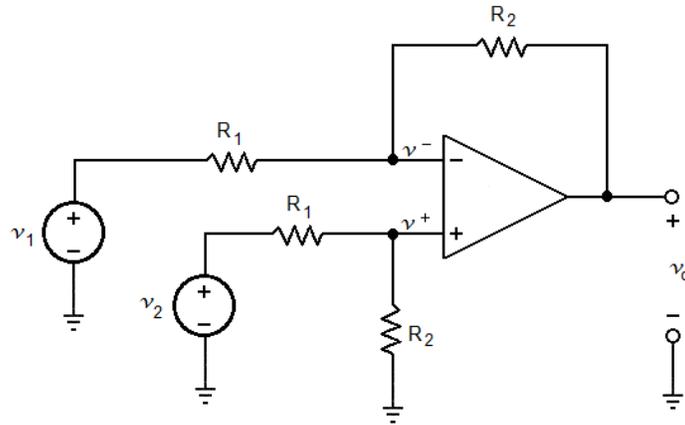


Figura 6.7. Amplificador de diferencias.

Para calcular el voltaje de salida se hará el análisis en los nodos v^+ y v^- .

Al no haber corrientes de entrada al amplificador operacional, el voltaje en el nodo v^+ está dado por un divisor de voltaje de la forma

$$v^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_2$$

La ecuación de nodo en v^- es

$$v^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_o}{R_2} = 0$$

Ya que $v^+ = v^-$, se obtiene

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1) \quad (6.7)$$

La ecuación 6.7 indica que el circuito amplifica, a razón de $\frac{R_2}{R_1}$, la diferencia de los dos voltajes de entrada.

Nótese que el circuito también puede ser resuelto aplicando superposición e identificando configuraciones básicas, como se describe a continuación.

Al considerar la contribución de la fuente v_1 , el circuito queda como se ve en la figura 6.8.

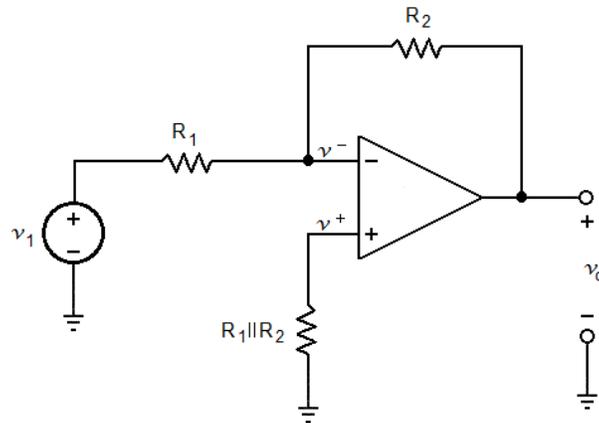


Figura 6.8. Contribución de v_1 .

El circuito de la figura corresponde a un amplificador inversor, por lo que se aplica de forma directa el resultado de esta configuración (ecuación 6.2)

$$v'_o = -\frac{R_2}{R_1} v_1$$

Nótese que esto es posible debido a que al no haber corriente de entrada en la terminal no inversora del amplificador operacional, la caída de potencial en el equivalente $R_1 || R_2$ es cero, por lo que $v^+ = 0$.

Por otra parte, el circuito de la figura 6.9 muestra la contribución de v_2 .

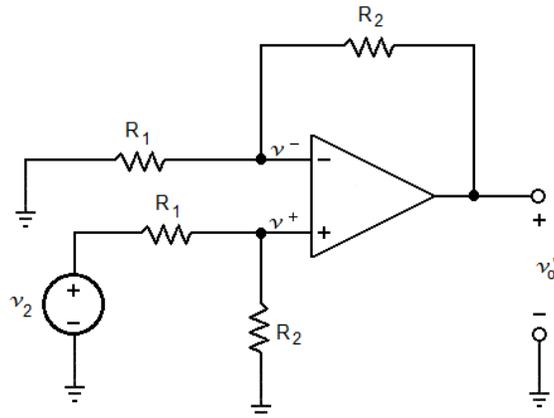


Figura 6.9. Contribución de v_2 .

Se observa que este circuito corresponde a un amplificador no inversor, en donde el voltaje de entrada en la terminal no inversora corresponde al divisor de voltaje

$$v^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_2$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 6.4, que corresponde al voltaje de salida de la configuración no inversora, se tiene

$$v_o'' = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_2\right) = \frac{R_2}{R_1} v_2$$

Finalmente

$$v_o = v_o' + v_o'' = \frac{R_2}{R_1} (v_2 - v_1)$$

que corresponde a la ecuación 6.7 obtenida anteriormente.

6.2.5. Derivador

El circuito obtiene la primera derivada del voltaje de entrada. Su configuración se muestra en la figura 6.10.

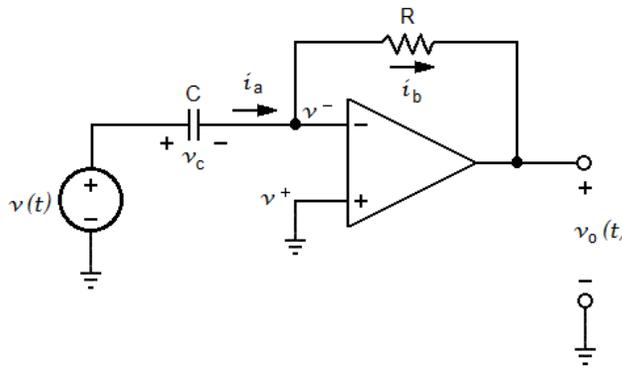


Figura 6.10. Derivador.

Dado que las corrientes de entrada al amplificador operacional son cero, $i_a = i_b$

$$i_a = C \frac{dv_c}{dt} = C \frac{d(v(t) - v^-)}{dt} \quad \text{e} \quad i_b = \frac{v^- - v_o(t)}{R}$$

Igualando las corrientes, y puesto que $v^- = v^+ = 0$, se obtiene

$$v_o(t) = -RC \frac{dv(t)}{dt} \quad (6.8)$$

donde la derivada del voltaje de entrada queda multiplicada por la constante de tiempo RC .

Ejemplo 6.2. Determinar el voltaje de salida del circuito derivador de la figura 6.10, considerando que el capacitor tiene un valor de $0.01 \mu\text{F}$, el resistor es de $100 \text{ k}\Omega$, y el voltaje

de entrada es una señal que cambia en el tiempo, como se muestra en la figura 6.11, definida de la siguiente forma

$$v(t) = \begin{cases} 4000t & 0 < t < 1 \text{ mS} \\ 8 - 4000t & 1 < t < 2 \text{ mS} \end{cases}$$

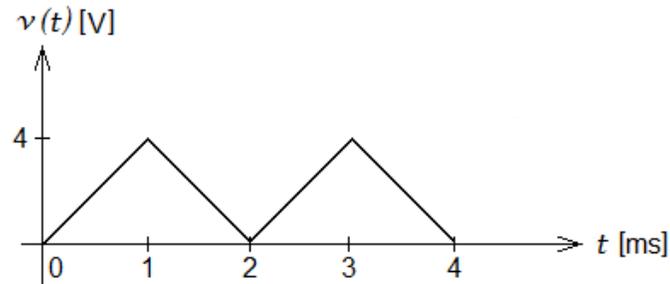


Figura 6.11. Voltaje de entrada.

Solución.

Debido a que la señal de entrada está definida por segmentos, el voltaje de salida dado por la ecuación 6.8 se obtiene por separado en los segmentos indicados en la definición de $v(t)$. Asimismo, al ser una función periódica, el resultado obtenido a la salida del circuito se repite con la misma periodicidad que la señal de entrada.

La constante de tiempo obtenida con los valores indicados, es

$$RC = 1 \text{ ms} = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$$

En el segmento 0 a 1 ms

$$v_o(t) = -(1 \times 10^{-3} \text{ s}) \frac{d(4000t) \text{ V}}{dt} = -4 \text{ V}$$

En el segmento de 1 a 2 ms

$$v_o(t) = -(1 \times 10^{-3} \text{ s}) \frac{d(8 - 4000t) \text{ V}}{dt} = 4 \text{ V}$$

Con base en estos resultados, el voltaje de salida se expresa de la siguiente forma

$$v_o(t) = \begin{cases} -4 \text{ V} & 0 < t < 1 \text{ ms} \\ 4 \text{ V} & 1 < t < 2 \text{ ms} \end{cases}$$

Este resultado se muestra de manera gráfica en la figura 6.12, donde se observa que la derivada de una onda triangular es una onda cuadrada.

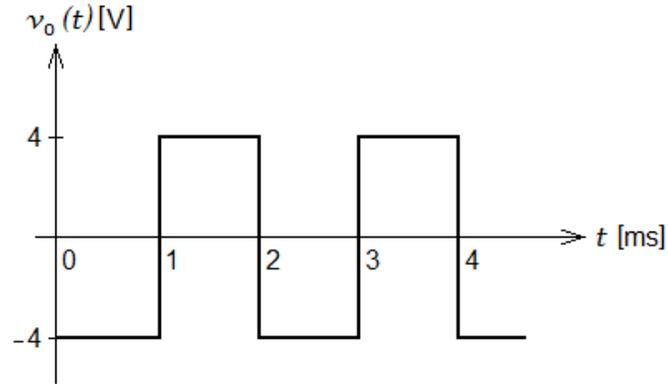


Figura 6.12. Voltaje de salida.

Ejemplo 6.3. Determinar el voltaje de salida de un circuito derivador, cuando se aplica a la entrada una señal como la que se indica en la figura 6.13. Considere $R = 10 \text{ k}\Omega$ y $C = 0.1 \text{ }\mu\text{F}$

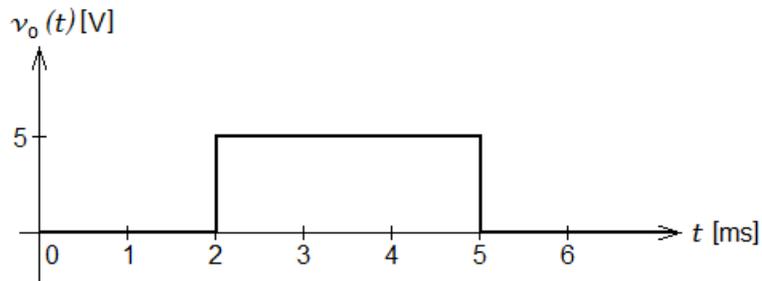


Figura 6.13. Pulso de entrada.

Solución.

Esta señal de entrada se puede expresar usando una combinación de funciones escalón

$$v(t) = 5u(t - 2) \text{ V} - 5u(t - 5) \text{ V} = 5[u(t - 2) - u(t - 5)] \text{ V}$$

Derivando esta función con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{dv(t)}{dt} = 5[\delta(t - 2) - \delta(t - 5)] \frac{\text{V}}{\text{s}} \quad (6.9)$$

que corresponde a funciones impulso.

Por otra parte, la constante de tiempo es

$$RC = 1 \text{ ms} = 1 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Sustituyendo la constante de tiempo y la derivada del voltaje de entrada en la ecuación 6.8, se obtiene lo siguiente

$$v_o = -(1 \times 10^{-3} \text{ s}) 5[\delta(t - 2) - \delta(t - 5)] \frac{\text{V}}{\text{s}} = -5[\delta(t - 2) - \delta(t - 5)] \text{ mV}$$

Este voltaje se muestra gráficamente en la figura 6.14.

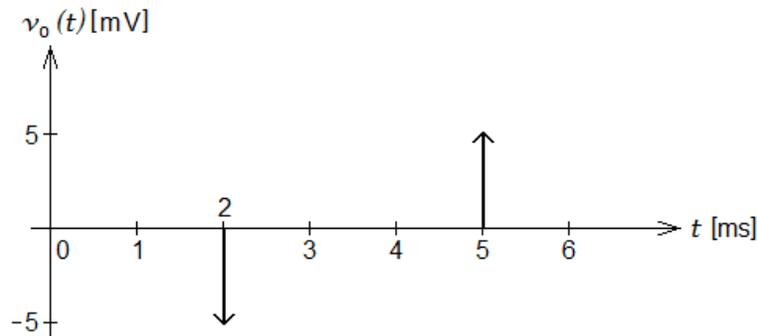


Figura 6.14. Impulsos de salida.

6.2.6. Integrador

Este circuito obtiene el área bajo la curva de la función que define el voltaje de entrada, y se muestra en la figura 6.15.

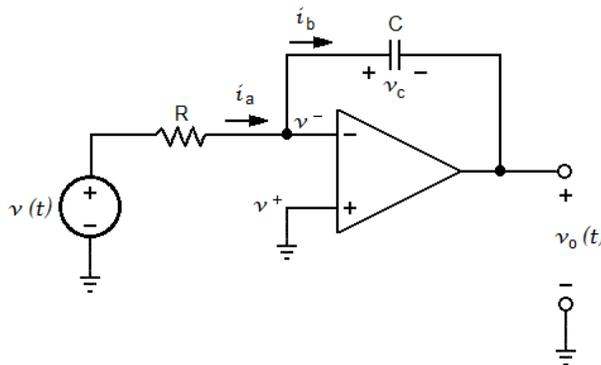


Figura 6.15. Integrador.

Nuevamente, dado que las corrientes de entrada al amplificador operacional son cero, $i_a = i_b$, donde

$$i_a = \frac{v(t) - v^-}{R} \quad \text{e} \quad i_b = C \frac{dv_c}{dt} = C \frac{d[v^- - v_o(t)]}{dt}$$

Igualando las corrientes, y ya que $v^- = v^+ = 0$, se tiene

$$\frac{v(t)}{R} = -C \frac{dv_o(t)}{dt}$$

Para obtener $v_o(t)$, se integra la ecuación anterior, quedando

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v(y) dy + v_o(t_0) \quad (6.9)$$

Donde $v_o(t_0)$ es el voltaje inicial a la salida del circuito. Si no hay energía almacenada en el capacitor antes de aplicar un voltaje a la entrada, la ecuación se reduce a

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v(y) dy \quad (6.10)$$

Ejemplo 6.4. Determinar $v_o(t)$ en el circuito de la figura 6.15, cuando el voltaje de entrada es una señal como la que se muestra en la figura 6.16. Considere $R = 5 \text{ k}\Omega$ y $C = 0.2 \text{ }\mu\text{F}$, y que el capacitor se encuentra descargado inicialmente.

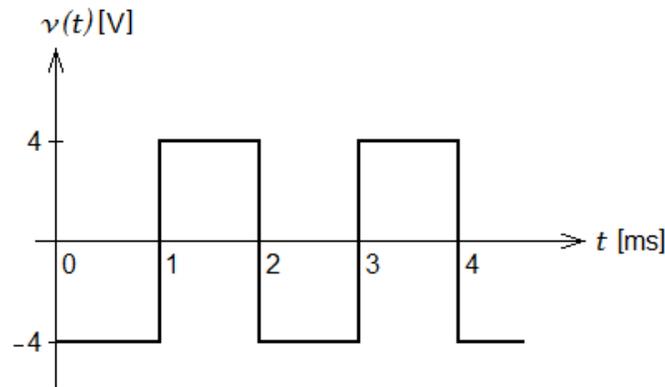


Figura 6.16. Onda cuadrada de entrada.

Solución.

De la figura 6.16, se observa que la señal de entrada es periódica y se repite cada 2 ms, teniendo un valor de -4 V en la primera mitad del período, y 4 V para la segunda. Por lo anterior, el análisis se realiza para estos dos intervalos por separado.

Para el intervalo de 0 a 1 ms, $t_0 = 0$ y, debido a que el voltaje inicial del capacitor es cero, se aplica la ecuación 6.10

$$v_o(t) = -\frac{1}{(100 \text{ k}\Omega)(0.01 \text{ }\mu\text{F})} \int_0^t (-4 \text{ V}) dy = \frac{4 \text{ V}}{1 \text{ ms}} t \quad (6.11)$$

Para el intervalo de 1 a 2 ms, se aplica la ecuación 6.9, puesto que ahora el capacitor ya tiene una carga almacenada del intervalo anterior

$$v_o(t) = -\frac{1}{(100 \text{ k}\Omega)(0.01 \text{ }\mu\text{F})} \int_{t_0}^t (4 \text{ V}) dy + v_o(t_0)$$

donde ahora $t_0 = 1 \text{ ms}$, por lo que

$$v_o(t_0) = v_o(1 \text{ ms}) = \frac{4 \text{ V}}{1 \text{ ms}} \cdot 1 \text{ ms} = 4 \text{ V}$$

Sustituyendo

$$v_o(t) = -\frac{1}{1 \text{ ms}} \int_{1 \text{ ms}}^t (4 \text{ V}) dy + 4 \text{ V} = \left(-\frac{4}{1 \text{ ms}} t + 8\right) \text{ V} \quad (6.12)$$

Las expresiones 6.11 y 6.12 definen el voltaje de salida en un período de la señal de entrada

$$v_o(t) = \begin{cases} 4000t & 0 < t < 1 \text{ ms} \\ 8 - 4000t & 1 < t < 2 \text{ ms} \end{cases}$$

Nótese que este voltaje de salida es igual al voltaje de entrada del circuito derivador analizado en el ejemplo 6.2. Esto se debe a que las funciones de integración y derivación son inversas entre sí, además de que las constantes de tiempo de ambos circuitos son iguales.

6.2.7. Amplificador de ganancia unitaria o seguidor de voltaje

Tiene una ganancia en voltaje igual a 1, por lo que no genera amplificación, sin embargo, su importancia radica en el hecho de que tiene una resistencia de entrada muy alta, lo que hace que el voltaje de entrada no se vea afectado. Su configuración se muestra en la figura 6.17.

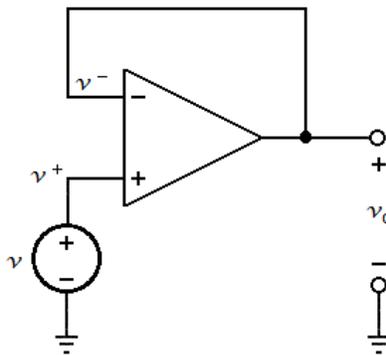


Figura 6.17. Amplificador de ganancia unitaria.

Puesto que $v_o = v^- = v^+ = v$, se tiene que

$$v_o = v \quad (6.13)$$

Es por esto que se dice que el voltaje de salida sigue al de entrada.

Ejemplo 6.5. Supóngase que a la salida del divisor de voltaje mostrado en la figura 6.18, se conecta una carga de $1\text{ k}\Omega$. Determinar el voltaje suministrado a esta última.

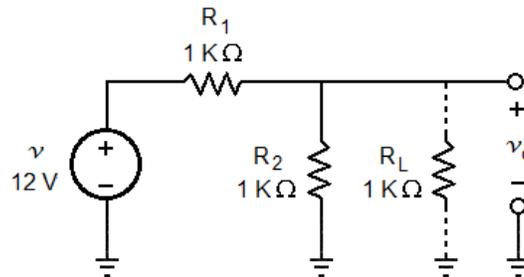


Figura 6.18. Divisor de voltaje.

Solución.

El voltaje de salida antes de conectar la carga es

$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v = \frac{1\text{ k}\Omega}{1\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega} \cdot 12\text{ V} = 6\text{ V}$$

El voltaje de salida con la carga conectada al circuito es

$$v_o = \frac{R_2 || R_L}{R_1 + R_2 || R_L} v = \frac{1\text{ k}\Omega || 1\text{ k}\Omega}{1\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega || 1\text{ k}\Omega} \cdot 12\text{ V} = 4\text{ V}$$

Nótese que el voltaje de salida del divisor cambia debido a que el resistor de carga modifica el circuito original y, con ello, la proporción en la división de voltaje.

La figura 6.19 muestra la forma de conectar un seguidor de voltaje, para evitar que la resistencia de carga afecte el voltaje de salida del divisor.

Al tener el circuito seguidor de voltaje una resistencia de entrada muy alta, no hay corriente de entrada a él, por lo que

$$v^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v = \frac{1\text{ k}\Omega}{1\text{ k}\Omega + 1\text{ k}\Omega} \cdot 12\text{ V} = 6\text{ V}$$

que corresponde al voltaje de entrada de esta configuración y, de la ecuación 6.13,

$$v_o = v^+ = 6\text{ V}$$

Nótese que de esta forma, el voltaje de salida del circuito divisor no se ve alterado por el resistor de carga. Es por esto que se dice que el amplificador funciona como un circuito de acoplamiento.

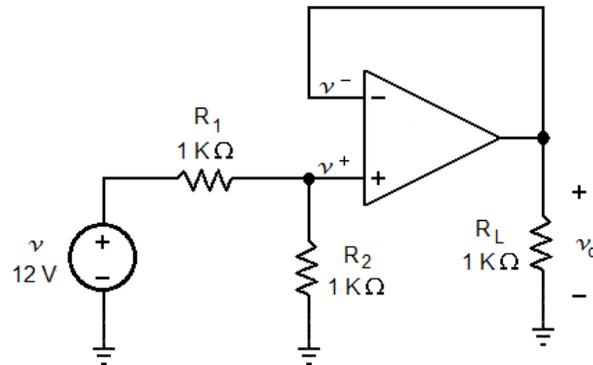


Figura 6.19. Divisor de voltaje con amplificador de ganancia unitaria.

6.2.8. Comparador de voltaje

Como su nombre lo indica, se emplea para comparar dos voltajes de entrada. La figura 6.20 muestra su configuración.

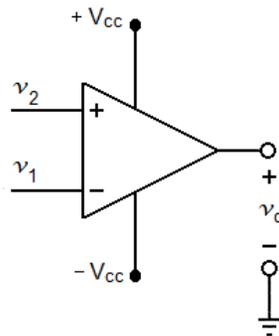


Figura 6.20. Comparador de voltaje.

El voltaje de salida está dado como $v_o = A_{ol}v_d$, donde $v_d = v_2 - v_1$ y A_{ol} es la ganancia de lazo abierto, mencionada al inicio de este capítulo. Al ser esta última teóricamente infinita, el voltaje de salida también lo sería, sin embargo, éste se ve limitado por los niveles de alimentación positiva y negativa; a éstos se les denomina voltajes de saturación y se representan como V_{sat}^+ y V_{sat}^- , respectivamente. En la tabla 6.1 se describe su funcionamiento.

Tabla 6.1. Voltajes de salida del comparador.

Entrada	Salida
$v_1 > v_2$	$-V_{cc}$ ó V_{sat}^-
$v_1 = v_2$	0
$v_1 < v_2$	$+V_{cc}$ ó V_{sat}^+

Ejemplo 6.6. En el circuito de la figura 6.21, determinar el voltaje de salida de cada uno de los comparadores, cuando se aplican los voltajes de entrada indicados. Supóngase que los amplificadores operacionales están polarizados únicamente con un voltaje positivo de 12 V (la terminal de alimentación negativa está conectada a tierra).

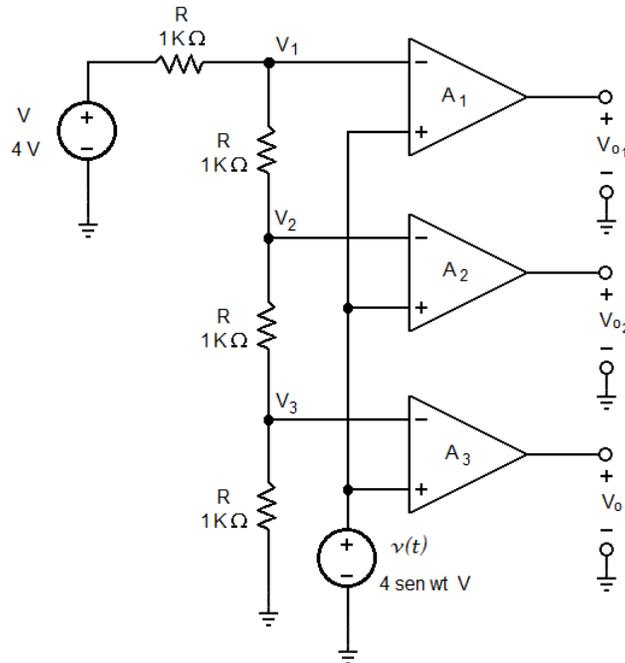


Figura 6.21. Circuito con tres niveles de comparación.

Solución.

Los niveles de voltaje V_1 , V_2 y V_3 se obtienen mediante división de voltaje. Dado que no hay corrientes de entrada a los amplificadores operacionales, se tiene lo siguiente

$$V_1 = \frac{3R}{4R} \cdot 4 \text{ V} = 3 \text{ V} \qquad V_2 = \frac{2R}{4R} \cdot 4 \text{ V} = 2 \text{ V} \qquad V_3 = \frac{R}{4R} \cdot 4 \text{ V} = 1 \text{ V}$$

Asimismo, los voltajes de salida V_{01} , V_{02} y V_{03} se determinan aplicando la tabla 6.1 a cada uno de los comparadores del circuito, considerando sus correspondientes entradas. La figura 6.22 muestra gráficamente las salidas de cada uno de los comparadores.

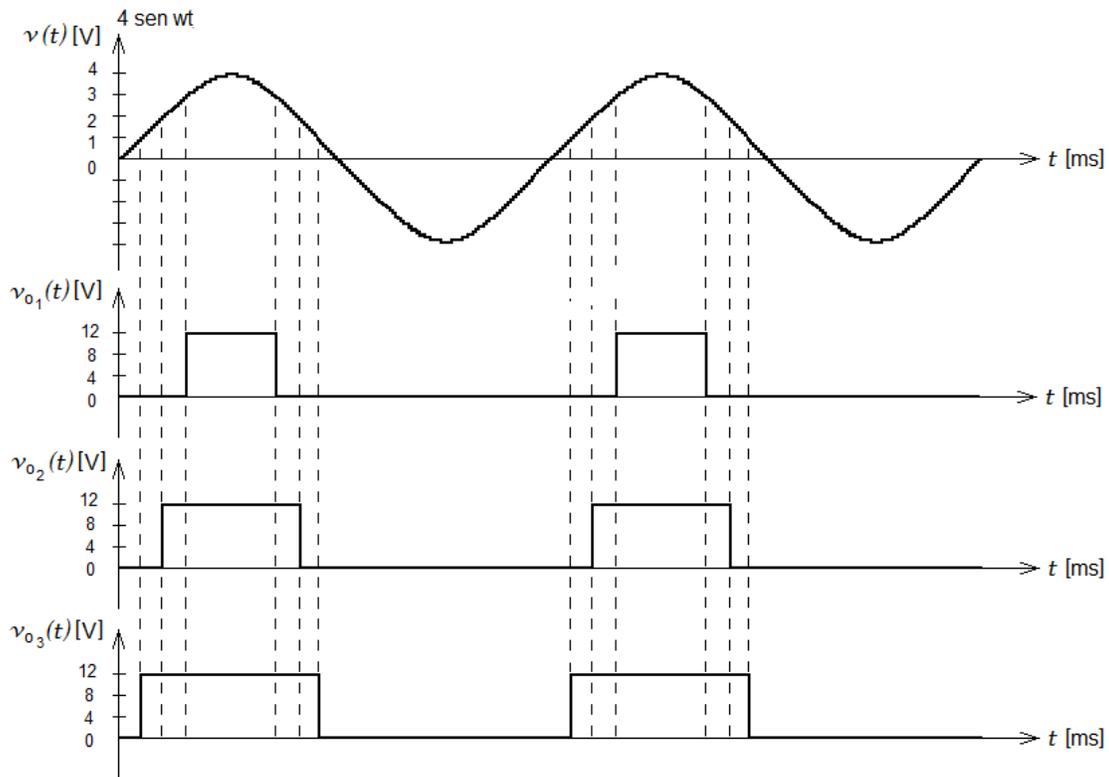


Figura 6.22. Gráficas de salida de los comparadores de voltaje.

6.3. Aplicaciones diversas

En los siguientes ejemplos ya se han indicado en los circuitos los nodos o corrientes que serán utilizados para su análisis.

Ejemplo 6.7. Determinar v_o en el circuito de la figura 6.23.

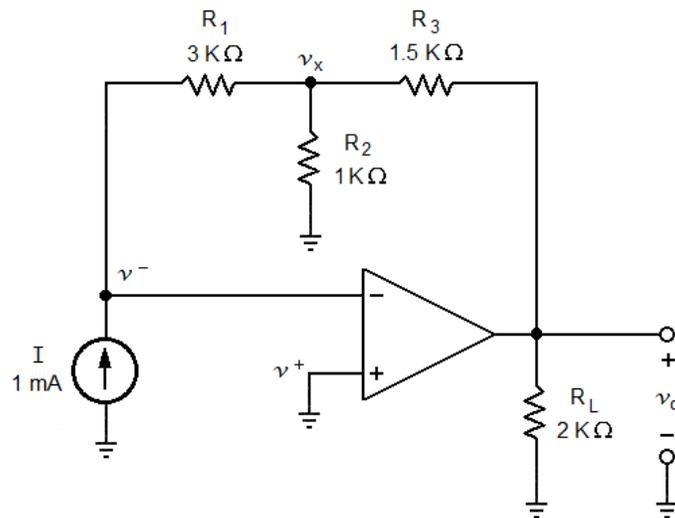


Figura 6.23. Circuito para el ejemplo 6.7.

Solución.

Puesto que no es posible establecer una ecuación de nodo en la salida del amplificador operacional, se utiliza el nodo de v_x para obtener una ecuación que relacione a v_o , quedando ésta

$$v_x \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_o}{R_3} - I = 0 \quad (6.14)$$

Para determinar v_x , se aplica la ley de corrientes de Kirchoff en el nodo v^- , y ya que la corriente de entrada al amplificador operacional es cero, se tiene

$$I = \frac{v^- - v_x}{R_1} = -\frac{v_x}{R_1}$$

Despejando v_x de la ecuación anterior

$$v_x = -R_1 I$$

Sustituyendo v_x en 6.14 y despejando v_o , se tiene

$$v_o = - \left[\left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) R_1 + R_3 \right] I = - \left[\left(1 + \frac{1.5 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega} \right) \cdot 3 \text{ k}\Omega + 1.5 \text{ k}\Omega \right] \cdot 1 \text{ mA} = -9 \text{ V}$$

Nótese que el resultado obtenido no depende del resistor de carga, y que se obtiene un voltaje a partir de una corriente de entrada, razón por la que el circuito se conoce como convertidor de corriente a voltaje.

Ejemplo 6.8. Determinar el voltaje de salida del circuito mostrado en la figura 6.24.

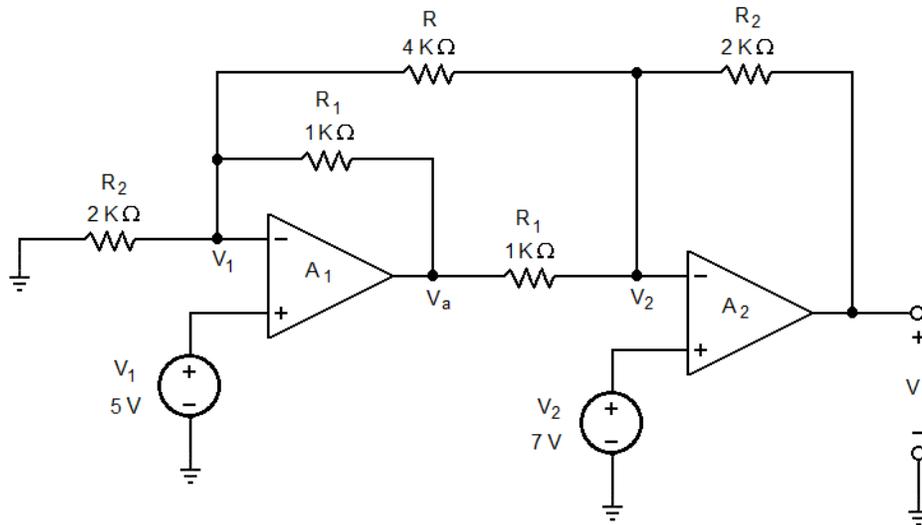


Figura 6.24. Circuito para el ejemplo 6.8.

Solución.

Se obtienen las ecuaciones a partir de los nodos esenciales, los cuales ya están indicados en el diagrama.

Para el amplificador A_1 , la ecuación en el nodo V_1 es

$$V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} \right) - \frac{V_a}{R_1} - \frac{V_2}{R} = 0$$

Despejando V_a , se tiene

$$V_a = V_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R} \right) - \frac{R_1}{R} V_2$$

Para el amplificador A_2 , la ecuación en el nodo V_2 es

$$V_2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_1}{R} - \frac{V_a}{R_1} - \frac{V_o}{R_2} = 0$$

Despejando V_o de la ecuación anterior, se obtiene

$$V_o = V_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R} \right) - \frac{R_2}{R} V_1 - \frac{R_2}{R_1} V_a$$

Sustituyendo V_a en V_o , y factorizando, el resultado final es

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R} \right) (V_2 - V_1) = \left(1 + \frac{2 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{2 \cdot 2 \text{ k}\Omega}{4 \text{ k}\Omega} \right) \cdot (7 \text{ V} - 5 \text{ V}) = \mathbf{8 \text{ V}}$$

Otra forma de resolver el circuito es identificar las configuraciones básicas que lo conforman y analizar éstas por separado como se hace a continuación. Es importante hacer notar que se deben respetar en todo momento los voltajes o corrientes presentes en el circuito original.

La parte correspondiente al amplificador A_2 , se indica en la figura 6.25.

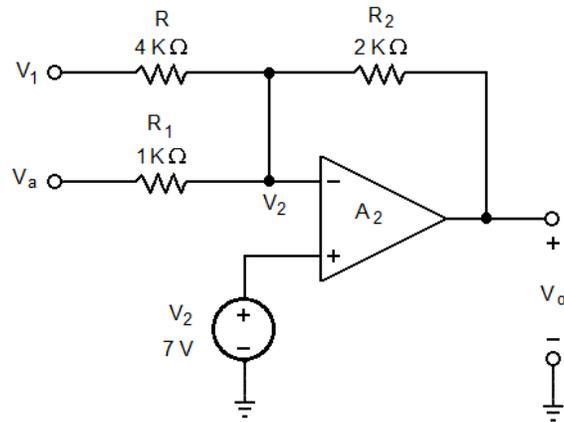


Figura 6.25. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_2 .

Se puede observar que al aplicar la superposición al circuito de la figura 6.25, se identifican dos configuraciones básicas, las que se muestran en la figura 6.26

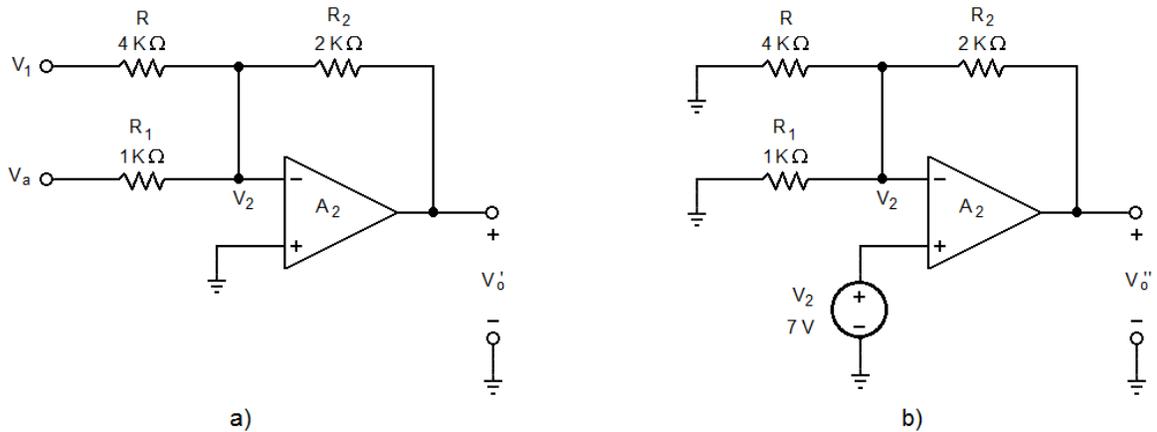


Figura 6.26. Configuraciones básicas identificadas en el amplificador A_2 .

El voltaje de salida total del amplificador A_2 , es

$$V_o = V_o' + V_o'' \quad (6.15)$$

El circuito de la figura 6.26a corresponde a un amplificador sumador cuyo voltaje de salida está dado por

$$V_o' = -\frac{R_2}{R} V_1 - \frac{R_2}{R_1} V_a = -\left(\frac{R_2}{R} V_1 + \frac{R_2}{R_1} V_a\right)$$

mientras que el circuito de la figura 6.26b es un amplificador no inversor con voltaje de salida

$$V_o'' = \left(1 + \frac{R_2}{R \parallel R_1}\right) V_2$$

Sustituyendo ambas ecuaciones en 6.15, se tiene que el voltaje de salida total para A_2 es

$$V_o = -\left(\frac{R_2}{R}V_1 + \frac{R_2}{R_1}V_a\right) + \left(1 + \frac{R_2}{R||R_1}\right)V_2 \quad (6.16)$$

La única incógnita presente en la ecuación es V_a . Ésta se determina a partir del análisis del circuito formado con el amplificador A_1 , el que se muestra en la figura 6.27.

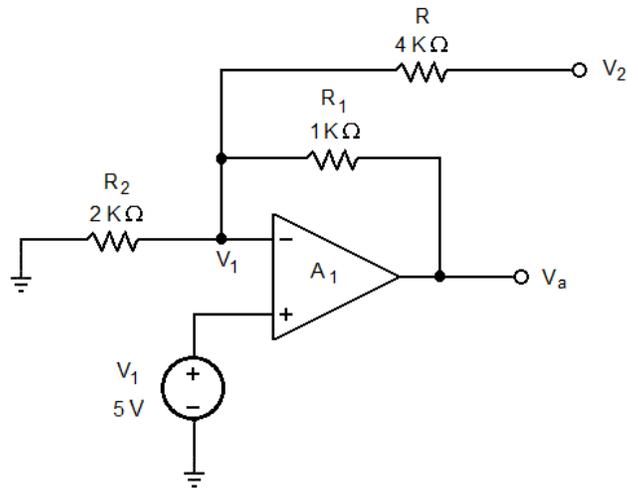


Figura 6.27. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_1 .

En el circuito de la figura 6.27 se identifican dos configuraciones básicas que se muestran en la figura 6.28. La respuesta total del circuito formado por A_1 es

$$V_a = V_a' + V_a'' \quad (6.17)$$

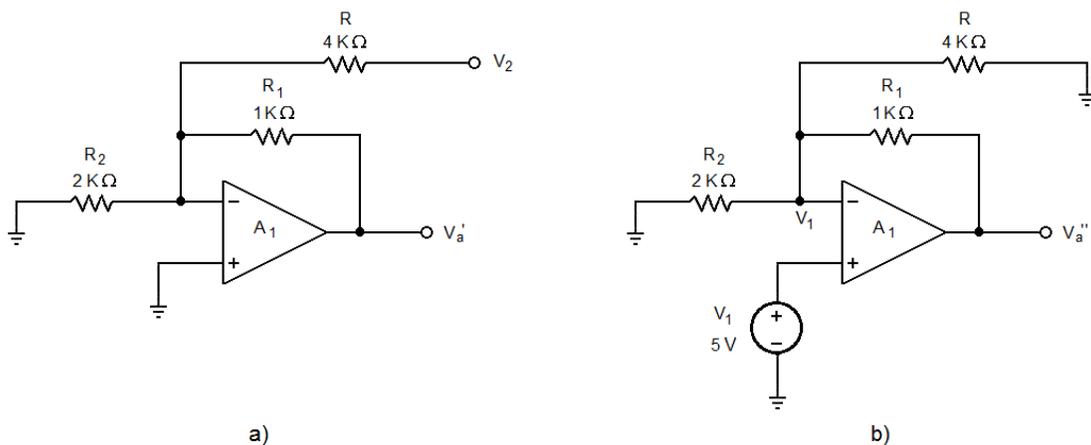


Figura 6.28. Configuraciones básicas identificadas en el amplificador A_1 .

Nótese que el resistor R_2 del circuito de la figura 6.28a, no afecta los cálculos puesto que sus dos terminales están referidas a tierra; por lo anterior, este circuito se comporta como un amplificador inversor, cuyo voltaje de salida es

$$V'_a = -\frac{R_1}{R}V_2$$

El circuito de la figura 6.28b corresponde a un amplificador no inversor con voltaje de salida

$$V''_a = \left(1 + \frac{R_1}{R \parallel R_2}\right)V_1$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en la ecuación 6.17, la respuesta total de A_1 es

$$V_a = -\frac{R_1}{R}V_2 + \left(1 + \frac{R_1}{R \parallel R_2}\right)V_1 \quad (6.18)$$

Sustituyendo la ecuación 6.18 en 6.16 y desarrollando las operaciones algebraicas, se obtiene el mismo resultado que el encontrado por medio de análisis de nodos.

$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R}\right)(V_2 - V_1) = \left(1 + \frac{2 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega} + \frac{2 \cdot 2 \text{ k}\Omega}{4 \text{ k}\Omega}\right) \cdot (7 \text{ V} - 5 \text{ V}) = \mathbf{8 \text{ V}}$$

Ejemplo 6.9. Determinar V_o a la salida del circuito mostrado en la figura 6.29.

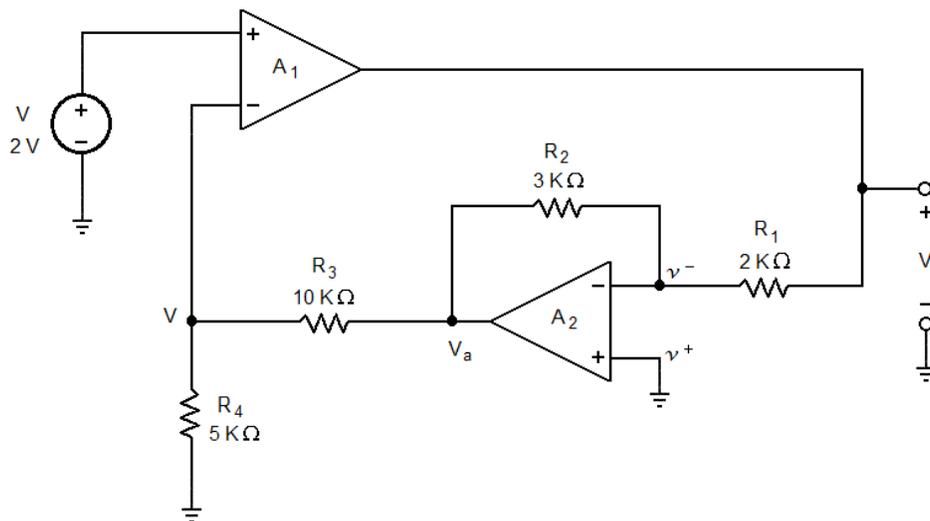


Figura 6.29. Circuito para el ejemplo 6.9.

Solución.

Resolviendo mediante la identificación de configuraciones básicas, se observa que el circuito formado por A_2 es un amplificador inversor cuya salida es

$$V_a = -\frac{R_2}{R_1} V_o \quad (6.19)$$

El arreglo resistivo de R_3 y R_4 es un circuito divisor de voltaje de la forma

$$V = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_a \quad (6.20)$$

Sustituyendo 6.19 en 6.20 y despejando V_o , tenemos

$$V_o = -\frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_2 R_4} V = -\frac{2 \text{ k}\Omega \cdot (10 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega)}{3 \text{ k}\Omega \cdot 5 \text{ k}\Omega} \cdot 2 \text{ V} = -4 \text{ V}$$

En caso de que el circuito propuesto se hubiese resuelto utilizando análisis de nodos las ecuaciones serían

$$V \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - \frac{V_a}{R_3} = 0 \quad \text{y} \quad v^- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{V_a}{R_2} - \frac{V_o}{R_1} = 0$$

Sabiendo que para el amplificador A_2 , $v^- = v^+ = 0$, la solución al sistema de ecuaciones es

$$V_o = -\frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_2 R_4} V = -\frac{2 \text{ k}\Omega \cdot (10 \text{ k}\Omega + 5 \text{ k}\Omega)}{3 \text{ k}\Omega \cdot 5 \text{ k}\Omega} \cdot 2 \text{ V} = -4 \text{ V}$$

lo que corresponde al resultado obtenido anteriormente.

Ejemplo 6.10. El circuito mostrado en la figura 6.30, se denomina amplificador de instrumentación. Determinar su voltaje de salida.

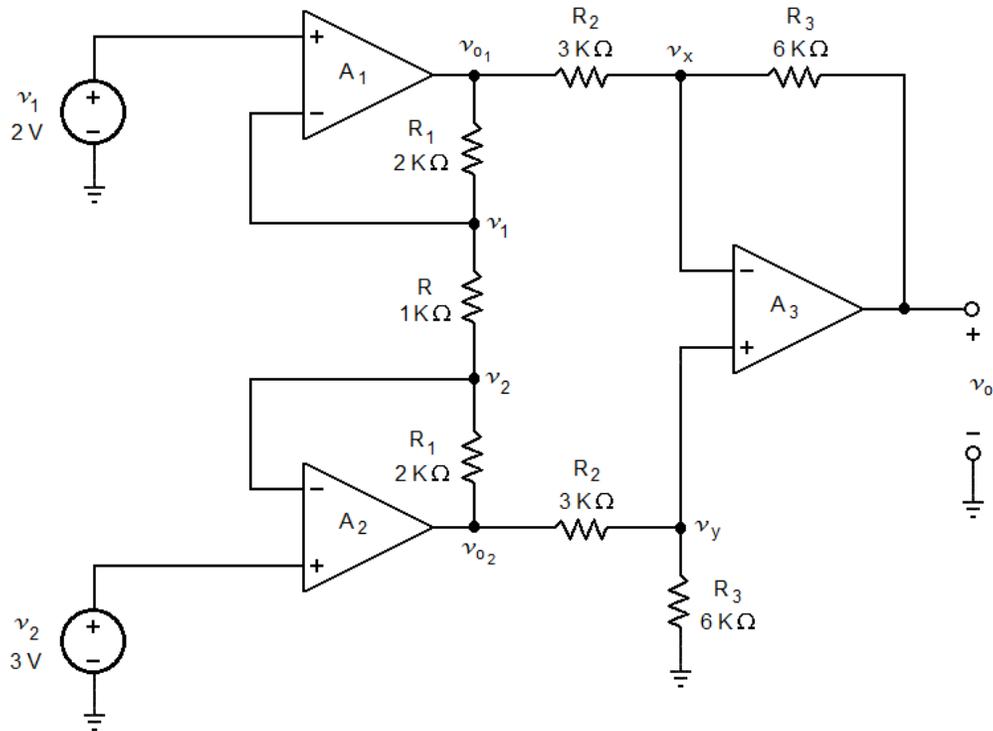


Figura 6.30. Circuito para el ejemplo 6.10.

Solución.

Resolviendo mediante análisis de nodos, la ecuación para el nodo v_1 es

$$v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) - \frac{v_{o1}}{R_1} - \frac{v_2}{R} = 0$$

y despejando v_{o1} , se tiene

$$v_{o1} = v_1 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) - \frac{R_1}{R} v_2 \quad (6.21)$$

La ecuación en el nodo v_2 es

$$v_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \right) - \frac{v_{o2}}{R_1} - \frac{v_1}{R} = 0$$

Y despejando v_{o2} de esta ecuación

$$v_{o2} = v_2 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) - \frac{R_1}{R} v_1 \quad (6.22)$$

Por otra parte, ya que no hay corrientes de entrada hacia los amplificadores operacionales, el voltaje de nodo v_y puede ser obtenido aplicando un divisor de voltaje, teniéndose que

$$v_y = \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_{o2}$$

Para el nodo v_x , la ecuación está dada como

$$v_x \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{v_{o1}}{R_2} - \frac{v_o}{R_3} = 0$$

y despejando v_o de esta última ecuación, se tiene

$$v_o = v_x \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) - \frac{R_3}{R_2} v_{o1}$$

Asimismo, puesto que

$$v_x = v_y$$

se obtiene

$$v_o = \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} v_{o2} \right) \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) - \frac{R_3}{R_2} v_{o1} \quad (6.23)$$

Sustituyendo 6.21 y 6.22 en la ecuación 6.23

$$v_o = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \left[v_2 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) - \frac{R_1}{R} v_1 \right] \left(1 + \frac{R_3}{R_2} \right) - \frac{R_3}{R_2} \left[v_1 \left(1 + \frac{R_1}{R} \right) - \frac{R_1}{R} v_2 \right]$$

Finalmente, factorizando términos de la ecuación anterior, se llega al siguiente resultado

$$v_o = \frac{R_3}{R_2} \left[\left(1 + \frac{2R_1}{R} \right) (v_2 - v_1) \right] = \frac{6 \text{ k}\Omega}{3 \text{ k}\Omega} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 2 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega} \right) \cdot (3 \text{ V} - 2 \text{ V}) = \mathbf{10 \text{ V}}$$

Este circuito también puede ser resuelto identificando las configuraciones básicas en las que se encuentran cada uno de los amplificadores operacionales que lo integran, lo cual se muestra a continuación.

Amplificador A_1

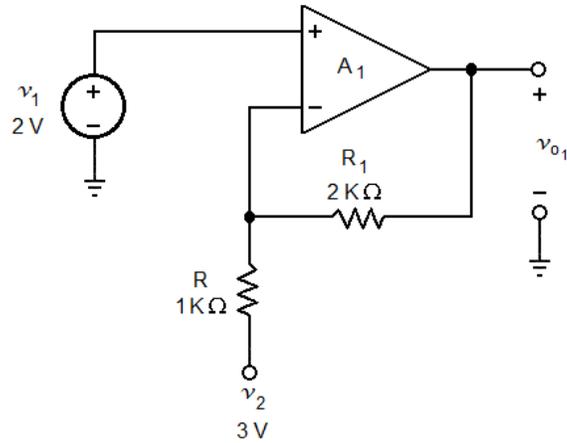


Figura 6.31. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_1 .

Al aplicar la superposición, y desactivar v_2 , el circuito se comporta como un amplificador no inversor; cuando se desactiva v_1 lo hace como un amplificador inversor, por lo que

$$v_{o1} = \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) v_1 - \frac{R_1}{R} v_2 \quad (6.24)$$

Amplificador A_2

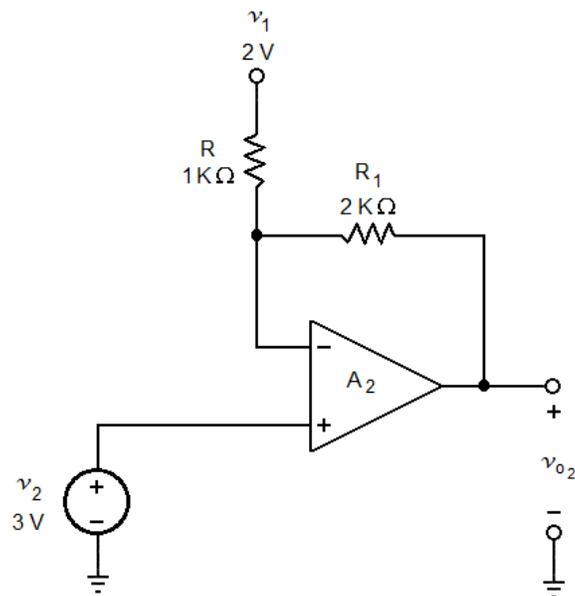


Figura 6.32. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_2 .

Al aplicar la superposición, y desactivar v_1 , el circuito se comporta como un amplificador no inversor; cuando se desactiva v_2 lo hace como un amplificador inversor, por lo que

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) V_2 - \frac{R_1}{R} V_1 \quad (6.25)$$

Amplificador A_3

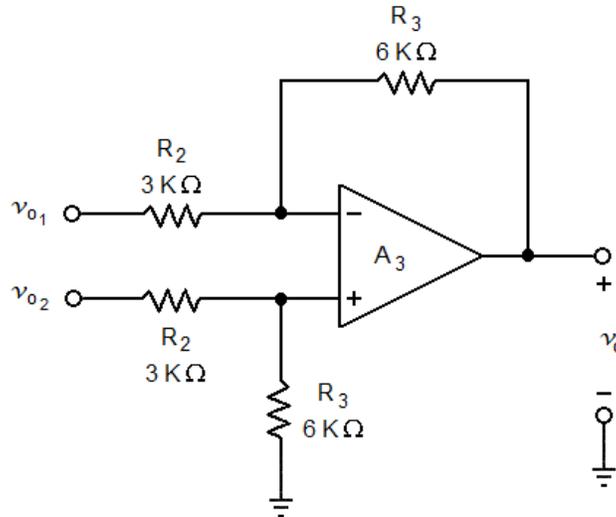


Figura 6.33. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_3 .

Se observa que A_3 se encuentra en configuración de amplificador de diferencias, por lo que

$$v_o = \frac{R_3}{R_2} (v_{o2} - v_{o1}) \quad (6.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones 6.24 y 6.25 en 6.26, se tiene

$$v_o = \frac{R_3}{R_2} \left[\left(1 + \frac{R_1}{R}\right) V_2 - \frac{R_1}{R} V_1 - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) V_1 + \frac{R_1}{R} V_2 \right]$$

Factorizando los coeficientes de esta ecuación, se llega, de una manera sencilla y rápida, al mismo resultado obtenido por análisis de nodos.

$$v_o = \frac{R_3}{R_2} \left(1 + \frac{2R_1}{R}\right) (V_2 - V_1) = \frac{6 \text{ k}\Omega}{3 \text{ k}\Omega} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 2 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega}\right) \cdot (3 \text{ V} - 2 \text{ V}) = \mathbf{10 \text{ V}}$$

Ejemplo 6.11. Considerando que inicialmente los capacitores del circuito mostrado en la figura 6.34 están descargados, demostrar que éste resuelve la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) + 2y(t) = 2\text{sen}3t$$

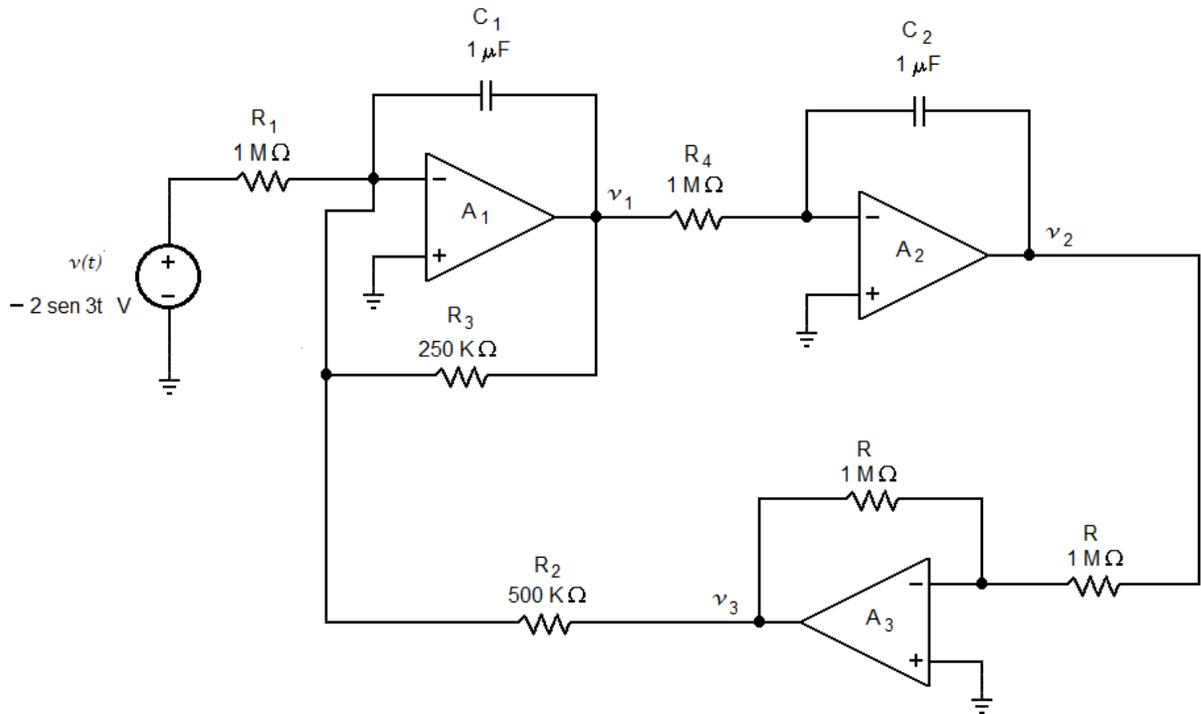


Figura 6.34. Circuito para el ejemplo 6.11.

Solución.

Para analizar este tipo de circuitos, los términos de la ecuación original deben ser reordenados de la siguiente forma

$$y''(t) = 2\text{sen}3t - 4y'(t) - 2y(t)$$

integrando la ecuación anterior tenemos

$$\int y''(t)dt = \int [2\text{sen}3t - 4y'(t) - 2y(t)] dt = y'(t)$$

por lo que

$$y'(t) = \int [2\text{sen}3t - 4y'(t) - 2y(t)] dt \quad (6.27)$$

Analizando el segmento de circuito de la figura 6.35 se observa que la ecuación 6.27 puede ser implementada por medio del amplificador A_1 que está en configuración de sumador e integrador, por lo que se conoce como integrador sumador, y donde el voltaje de salida v_1 es de la forma

$$v_1 = y'(t) = \int \left[-\frac{1}{R_1 C_1} \cdot (-2 \text{sen} 3t) - \frac{1}{R_3 C_1} \cdot y'(t) - \frac{1}{R_2 C_1} \cdot y(t) \right] dt$$

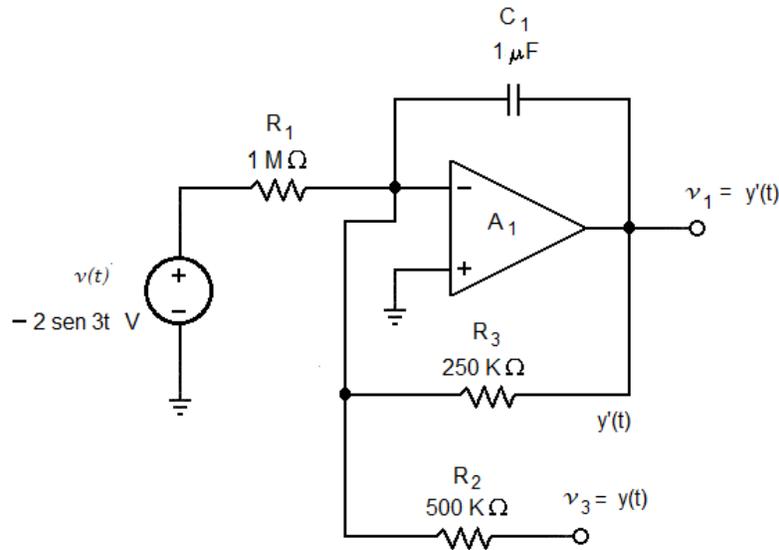


Figura 6.35. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_1 .

al sustituir los valores de capacitores y resistores en la ecuación anterior tenemos

$$y'(t) = \int [2 \text{sen} 3t - 4y'(t) - 2y(t)] dt$$

La parte correspondiente a los amplificadores A_2 y A_3 se muestra en la figura 6.36.

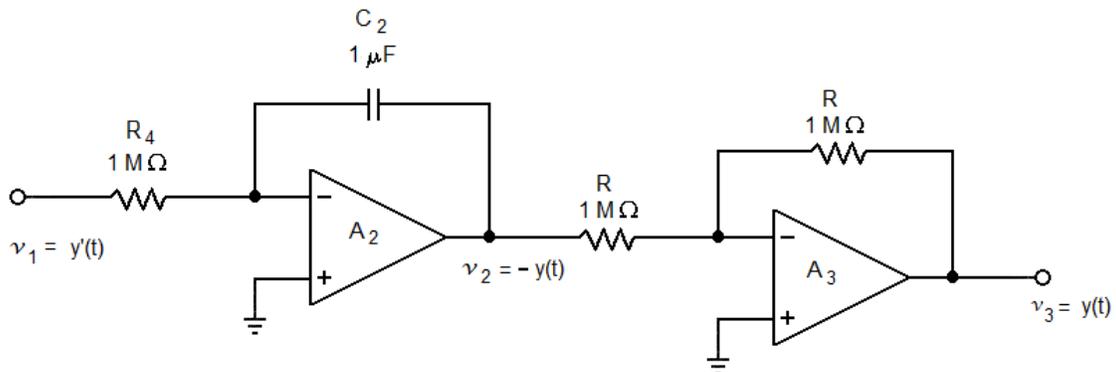


Figura 6.36. Segmento de circuito que contiene al amplificador A_2 y A_3 .

El amplificador A_2 es un circuito integrador cuyo voltaje de salida es

$$v_2 = -\frac{1}{R_4 C_2} \int y'(t) dt = -y(t)$$

El amplificador A_3 es un circuito inversor con ganancia unitaria por lo que

$$v_3 = -\frac{R}{R}v_2 = -(-y(t)) = y(t)$$

Con esto se comprueba que las entradas propuestas para el circuito de la figura 6.35 son correctas y por tanto se demuestra que el circuito de la figura 6.34 resuelve la ecuación diferencial de segundo orden.

Ejemplo 6.12. Determinar la corriente de carga I_L para el circuito que se muestra en la figura 6.37.

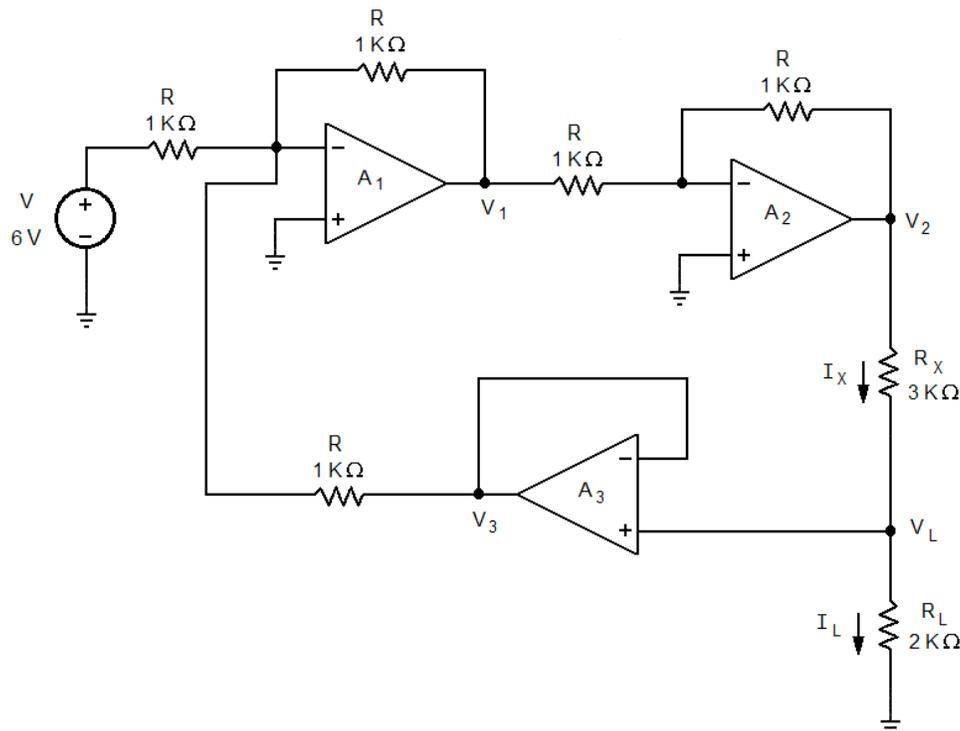


Figura 6.37. Circuito para el ejemplo 6.12.

Solución.

La corriente de carga está dada como

$$I_L = \frac{V_L}{R_L}$$

Por otra parte, puesto que el amplificador A_3 es un seguidor de voltaje, su voltaje de salida es

$$V_3 = V_L$$

Dado que no hay corrientes de entrada hacia A_3 debido a su alta resistencia de entrada que proporciona su configuración, la corriente I_X es la misma que circula por el resistor de carga R_L , por lo que

$$I_X = I_L$$

Además

$$I_X = \frac{V_2 - V_L}{R_X} \quad (6.28)$$

El voltaje V_2 se obtiene a partir del análisis de los amplificadores A_1 y A_2 . El primero es un circuito sumador con voltaje de salida

$$V_1 = -\frac{R}{R}V - \frac{R}{R}V_3 = -V - V_3$$

mientras que el segundo es un amplificador inversor de ganancia unitaria cuyo voltaje es

$$V_2 = -\frac{R}{R}V_1 = -V_1$$

Sustituyendo V_1 en esta última ecuación se tiene que

$$V_2 = V + V_3 \quad (6.29)$$

Al aplicar las consideraciones previamente comentadas y sustituyendo 6.29 en 6.28, se obtiene

$$I_X = \frac{V + V_L - V_L}{R_X} = \frac{V}{R_X} = I_L$$

La corriente I_L no depende de la resistencia de carga y sí del voltaje de entrada al circuito, por lo que éste circuito se comporta como una fuente de corriente controlada por voltaje.

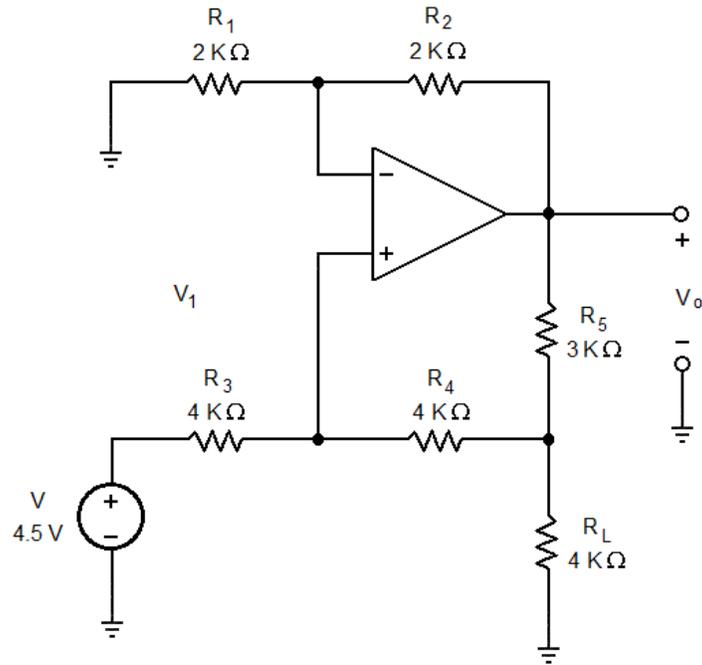
Finalmente

$$I_L = \frac{V}{R_X} = \frac{6 \text{ V}}{3 \text{ K}\Omega} = \mathbf{2 \text{ mA}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Para los circuitos que se muestran en las figuras siguientes determine el voltaje de salida V_o .

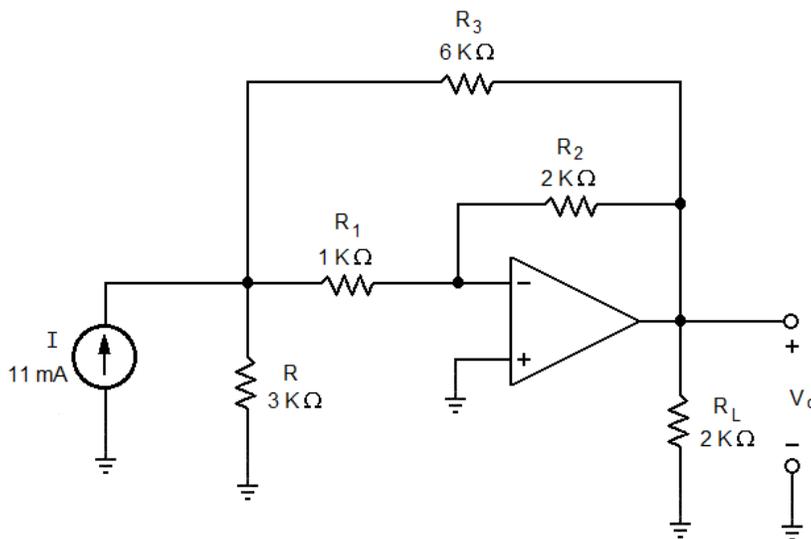
6.1.



Respuesta:

$$V_o = 10 \text{ V}$$

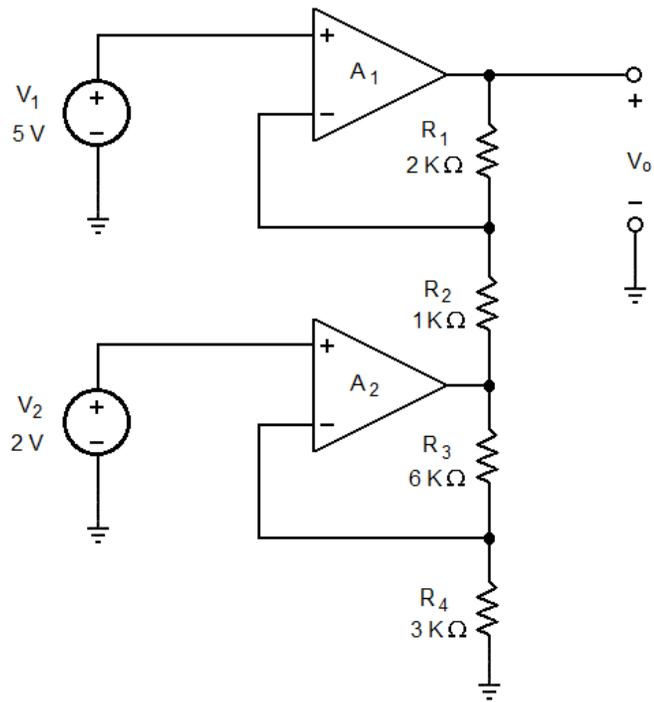
6.2.



Respuesta:

$$V_o = 12 \text{ V}$$

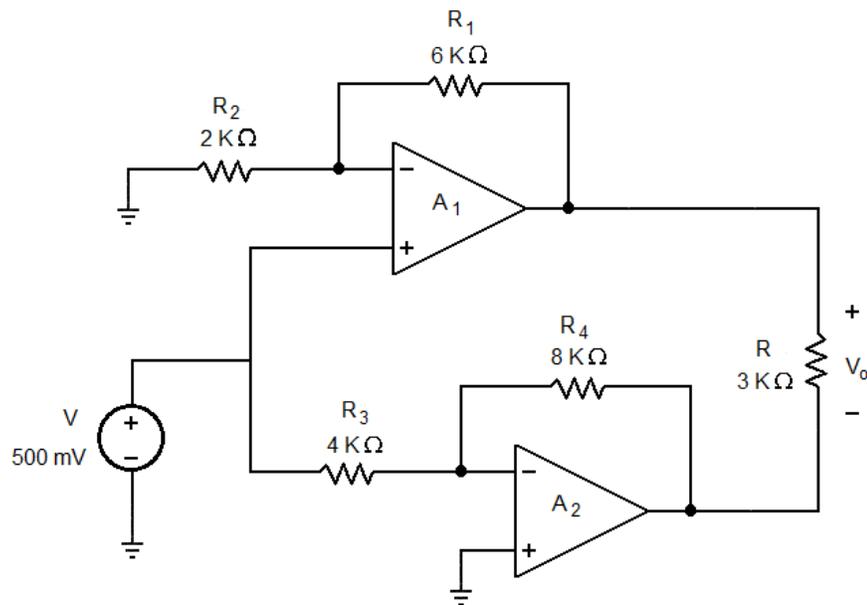
6.3.



Respuesta:

$$V_o = 3\text{ V}$$

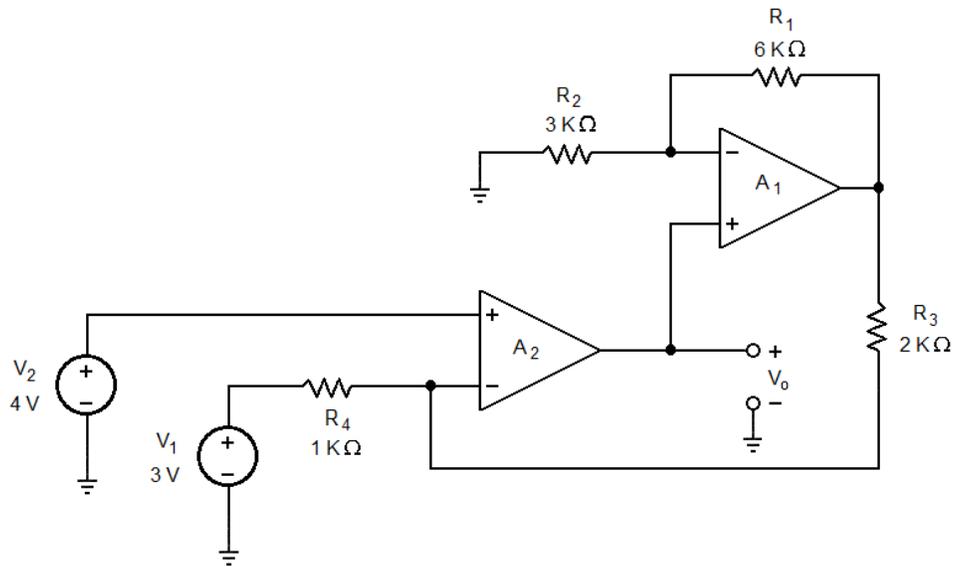
6.4.



Respuesta:

$$V_o = 3\text{ V}$$

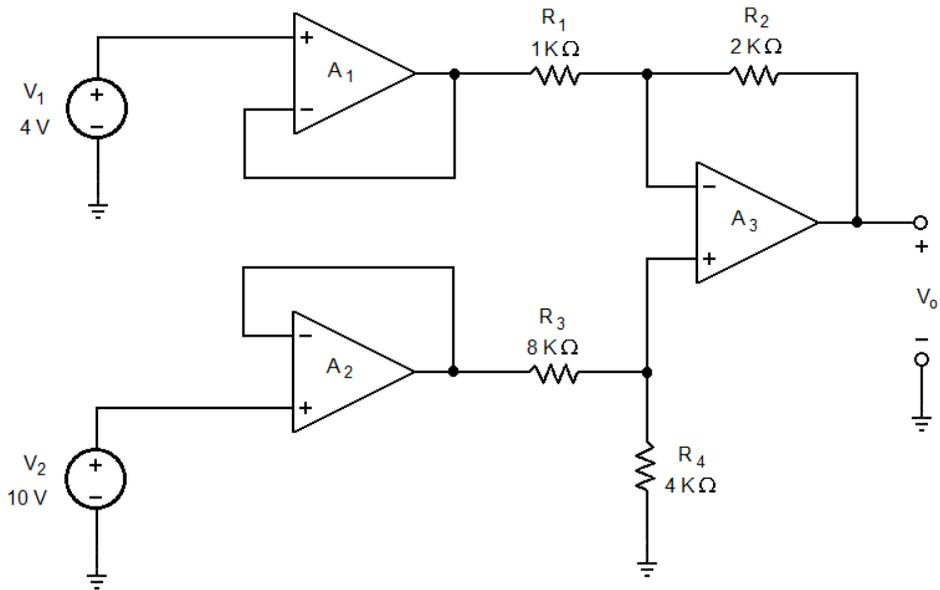
6.5.



Respuesta:

$$V_o = 2 \text{ V}$$

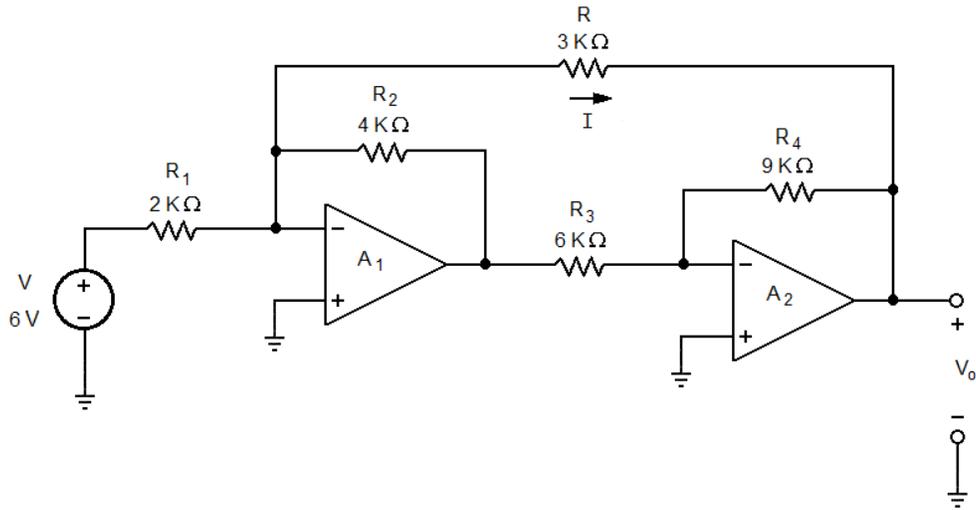
6.6



Respuesta:

$$V_o = 2 \text{ V}$$

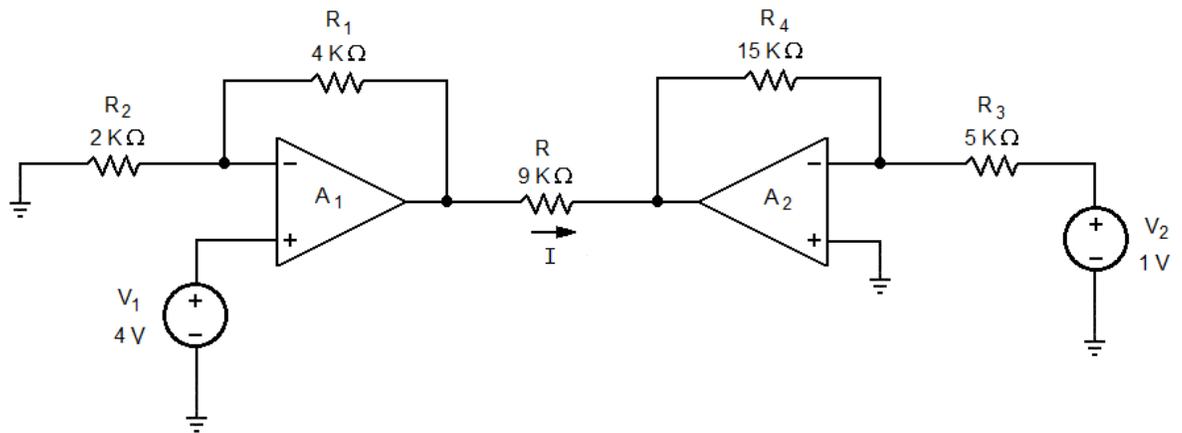
6.7. Para el circuito que se muestra en la figura determinar la corriente I .



Respuesta:

$$I = -4 \text{ mA}$$

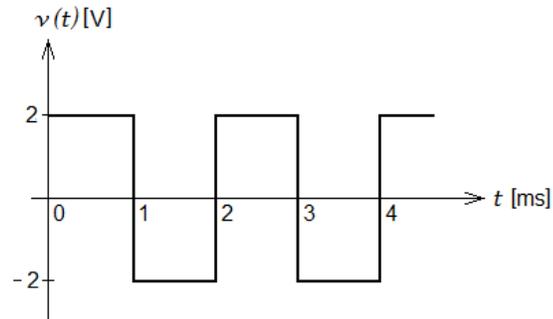
6.8. Para el circuito que se muestra en la figura determinar la corriente I .



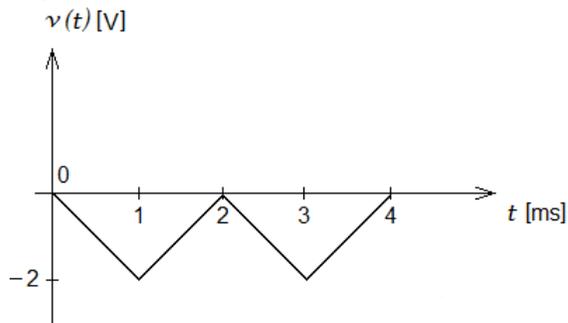
Respuesta:

$$I = 2 \text{ mA}$$

6.9 Determinar la integral de la señal que se muestra en la siguiente figura. Considere para ello una constante de tiempo de 1 mS.

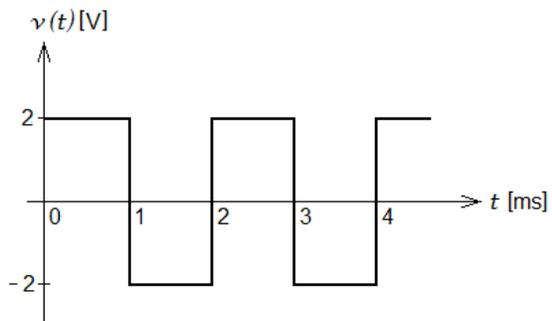


Respuesta:



6.10 determinar la derivada de la señal obtenida en 6.9.

Respuesta:



6.11. Demostrar que el circuito que se muestra en la figura resuelve la ecuación diferencial

$$3y''(t) + 15y'(t) + 6y(t) = 3\cos 2t$$

