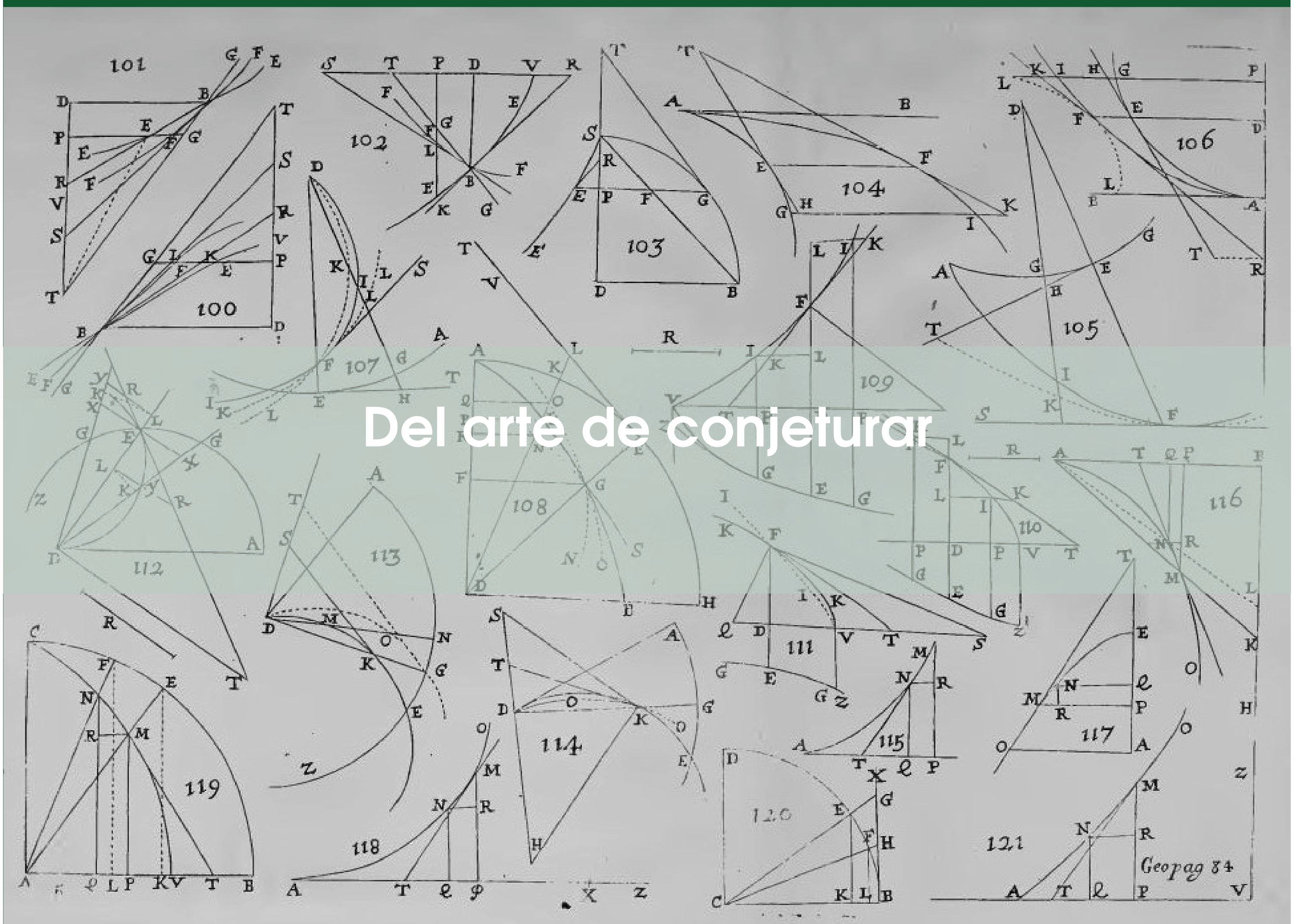
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

Casa abierta al tiempo

Colección CBI

Libro de divulgación



Del arte de conjeturar

Gabriel López Garza

Del arte de conjeturar

Gabriel López Garza

Libro de divulgación

Casa abierta al tiempo
Dr. José Antonio de los Reyes
Rector General
Dra. Norma Rondero López
Secretario General
Dra. Verónica Medina Bañuelos
Rector de la Unidad Iztapalapa
Dr. Javier Rodríguez Lagunas
Secretario de Unidad
Dr. Román Linares Romero
Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Mtro. Rodolfo Palma Rojo
Coordinador de Extensión Universitaria
Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas
Jefe de la Sección de Producción Editorial

Del arte de conjeturar
Primera edición: 2024

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX, México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3353-1

Impreso en México / Printed in Mexico

GABRIEL LÓPEZ GARZA

PROFESOR INVESTIGADOR DE LA UAM IZTAPALAPA

DEL ARTE DE CONJETURAR

HISTORIA DE LAS SERIES DE FOURIER MEDIANTE TEXTOS CLÁSICOS

INTERCONECTADOS, INCLUYE TRADUCCIONES DIRECTAS DEL LATÍN

Y OTRAS LENGUAS

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

Un día cualquiera usted toma una fotografía con su teléfono celular y la envía a sus conocidos. Para que esto ocurra, el dispositivo electrónico que utilice requiere transformadas rápidas de Fourier, las cuales solamente cobraron relevancia precisamente con la invención y desarrollo de las computadoras electrónicas, pero surgieron en relación con un tema totalmente diferente al humano deseo de compartir bonitas imágenes. Las trasformadas rápidas de Fourier alcanzaron el auge después de la segunda guerra mundial con el afán de diferenciar las ondas sísmicas de las ondas producidas por las pruebas con bombas nucleares subterráneas las cuales estaban "prohibidas" o, mejor dicho, eran rigurosamente vigiladas por las potencias atómicas quienes desconfiadamente se observaban entre sí, ya que mediante la utilización de dichas transformadas, es posible distinguir un sismo de un ensayo atómico. Para llegar a las transformadas rápidas, más de un siglo antes, Fourier tuvo que aplicar las series de funciones trigonométricas para entender el fenómeno de la difusión de calor en la naturaleza. Newton a su vez y en su tiempo, en alguno de los resultados que le permitió el Cálculo diferencial, herramienta que él mismo desarrollo, fue capaz de obtener por primera vez, los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo con la precisión que se desee, superando los logros de los matemáticos griegos, egipcios y babilonios obtenidos y mantenidos casi sin cambios casi dos mil años antes y llegados a nosotros a través de la obra de Ptolomeo. Para llegar a Ptolomeo, debió desarrollarse la geometría Euclidiana y la aritmética, lo cual inició unos tres mil años antes del astrónomo. Para conocer las funciones trigonométricas tuvo que obtenerse la medida de la circunferencia del círculo, es decir, se requirió aproximar al número π, lo cual fue abordado, entre otros por Arquímedes, y como se verá, en el siglo XVII por Wallis, hasta el momento culminante que ocurre con Euler en el texto aquí incluido.

Así, si usted encuentra mi resumen demasiado largo, en mi dispensa piense que han ocurrido cinco mil años entre los primeros balbuceos trigonométricos conocidos y sus entrañables fotos.

El libro que aquí presento es un acercamiento al complejo y casi azaroso desarrollo de la trigonometría, de las funciones trigonométricas, hasta llegar a las series de Fourier e incluye algunas de las ideas de las mejores mentes que se ocuparon de estos y otros temas relacionados.

Mi libro es y no es, un libro de historia. Es de historia, porque de eso trata: la historia de algunos descubrimientos matemáticos, pero no esperé el lector un camino lineal fácil ni ordenado, sino que más bien se enfrentará con un orden (¿desorden?) parecido al de una novela policíaca, pero con la inquietante advertencia de que no siempre se encontrará al verdadero culpable.

Este libro también es y no es un libro de divulgación. Es de divulgación porque es mi deseo compartir la alegría de los hallazgos aquí incluidos y que de alguna forma se encuentran soterrados entre un enorme cúmulo de textos e información. Pero no es un libro de divulgación para un publico en general, sino que en algunos momentos requiere al menos del conocimiento del Cálculo Diferencial e Integral que se imparte a nivel preparatoria, aunque no se exige que el lector sea un experto.

Presentar el avance de la ciencia como un proceso razonado, lineal y predecible no tiene ningún sentido, ya que esto no corresponde en absoluto a la realidad. Por otra parte, mostrar la historia de las matemáticas según la cronología, tampoco da una idea correcta de la forma en la que progresa esta ciencia, dados los largos y fortuitos periodos que pueden ocurrir entre descubrimientos, por ejemplo, entre el método de Arquímedes y el método de Wallis para calcular π y, a veces, dada la simultaneidad con la que se suceden los descubrimientos más notables, como ocurrió durante el periodo que incluye a Wallis, Barrow, Newton y que se continua hasta el siglo XIX con Gauss, Weierstrass y Riemann, para completarse en el siglo XX: un descubrimiento disruptivo tras otro se suceden vertiginosamente tras el descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral con una ola incontable de aplicaciones en todas las ciencias y la ingeniería, ¡todas!

Por los anteriores motivos, en lugar de los enfoques tradicionales, en este libro se ha tratado de aproximar a la Historia con un enfoque parecido al de James Burke, siguiendo el hilo de Ariadna en el laberinto. Pero ¿cómo procede Burke?, he aquí un ejemplo[1]: "Un mecánico autodidacta escocés logra un ajuste menor en una bomba de vapor y dispara la Revolución Industrial completa. Un meteorólogo del siglo XIX desarrolla una máquina para hacer nubes la cual revela a un físico, Ernest Rutherford, conocido del mismo meteorólogo, que el átomo podía ser dividido" y sigue Burke, "no hay gran diseño en la manera en la que la historia avanza. El proceso no cae cuidadosamente en las categorías como aquellas que nos han enseñado en la escuela. Por ejemplo, la mayoría de los componentes que contribuyeron al desarrollo histórico del transporte no tienen nada que ver con vehículos".

[1] James Burke. *Connections*. Little, Brown and Company., 1995

Y si esto sucede con el avance de la tecnología ¿qué ocurre con las matemáticas? Desafortunadamente, a diferencia del desarrollo de la tecnología, no es posible dar seguimiento cabal a cada paso del desarrollo, como lo hace genialmente Burke, y seguir las contribuciones menores de cientos de matemáticos, que no por ser menores dejan de ser importantes y, a veces, imprescindibles en los más grandes descubrimientos de las matemáticas. Solo ocasionalmente y en tiempos recientes la abundancia de publicaciones y acceso a las fuentes harán posible, si alguien alguna vez lo intenta, alcanzar una mejor comprensión de la forma como se desarrolla realmente la matemática.

Dice Burke "Las cosas casi nunca ocurren como se espera... el cambio llega como sorpresa porque las cosas no ocurren en líneas rectas. Las conexiones se realizan por accidente...Un telar de seda y un censo en 1800, dieron nacimiento a la computadora...Hace algunas décadas el líder de IBM dijo que Estados Unidos de América nunca necesitaría más de cuatro o cinco computadoras"...

Del arte de conjeturar

El mismo título de este libro lo lleva pero en latín, el libro póstumo de Jacobo Bernoulli, "Ars Conjectandi", el cual trata mayormente temas de combinatoria y probabilidad. Del famoso libro de notable influencia en los matemáticos posteriores como Pascal, Huygens, debo decir que mi libro solo tiene en común el tópico de los números llamados precisamente "de Bernoulli" los que, tanto en el texto famoso, como en el mio solo aparecen someramente, pero a pesar de ello con cierta relevancia en ambos casos.

La poderosa imaginación de los grandes matemáticos que encontrará aquí, se movía con una libertad sin precedentes, sin las ataduras de los procedimientos formales que colmarían y abrumarían los trabajos de los matemáticos del siglo XX, libertad llevada a veces al extremo de aproximarse al absurdo, al sinsentido, lo que no obstó para el surgimiento de grandes ideas que atraviesan todas las ciencias exactas actualmente. Los grandes descubrimientos de Euler, Newton y un largo etcétera pueden compararse más con epifanías, iluminaciones y están más relacionados con la creatividad del arte que con el trabajo sistemático con el que se estereotipa en el ámbito común a los matemáticos, por ello el "Arte de conjeturar" me parece un titulo adecuado para este texto.

Guía para el lector o cómo seguir el hilo de Ariadna

La transformada rápida de Fourier es un algoritmo computacional que permite almacenar datos y compactar información de una manera mucho más rápida que otros algoritmos conocidos; por ejemplo, la información de una imagen capturada en un teléfono. Digamos, para 2^{10} datos, la transformada rápida de Fourier podrá almacenar y compactar datos aproximadamente cien veces más rápido que con el uso de otros algoritmos.

La transformada rápida de Fourier de una fotografía usa información en forma de sumas de senos y cosenos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S(n) &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\left(\cos(2\pi nk/N) - i\,\mathrm{sen}\,(2\pi nk/N)\right), \\ x(k) &= \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} S(n)\left(\cos(2\pi nk/N) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi nk/N)\right), \end{aligned}$$

con $n = 0, 1, \ldots, N-1$ y $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Con lo que en la primera fórmula, si se conocen los datos $x(k)$, se conocen los $S(n)$ datos y con la segunda fórmula, si se conocen los $S(n)$ datos se conocen los $x(k)$ datos, datos que en general son números asociados con los colores almacenados en cada pixel de una pantalla. Así, con ambas fórmulas es posible codificar y decodificar información.

Las fórmulas para $S(n)$ y $x(k)$ son una aproximación finita de las series de Fourier, las cuales se encuentran en el capítulo “Fourier escribe un poema...usando funciones trigonométricas”. Para evaluar las series de Fourier es necesario conocer los valores de las funciones trigonométricas para datos arbitrarios de sus argumentos, lo cual fue alcanzado solo hasta la época de Newton y se trata en el capítulo “Newton lleva el infinito a la trigonometría”, tal artículo de Newton es inconcebible sin los artículos de Wallis y Barrow que se encuentran en los capítulos “Wallis decifra π” y “Barrow calcula derivadas”. La forma en la que Wallis calcula a π lo llevó a establecer firmemente la posibilidad del cálculo de áreas y por ello poder calcular integrales, antes de que fueran formuladas. La forma en la que Barrow calcula las derivadas mediante triángulos semejantes con lados infinitesimales (que no existen) da fe de las imprevistas consecuencias para sus contemporáneos de la trigonometría y de la aritmética.

Ciertamente el poder calcular π con la precisión deseada es fundamental para el cálculo de las funciones seno y coseno, tal cálculo llega a niveles de virtuosismo en los textos de Euler incluidos en el presente libro, pero también la definición de la exponencial para números complejos es tratada allí, y el lector interesado podrá encontrar el tratamiento de Euler para la exponencial, la cual permite escribir en forma más compacta

$$S(n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-(2\pi nk/N)i},\ n = 0, 1, \ldots, N-1$$

por ejemplo, forma que sobrepasa absolutamente el uso anterior a Euler de las exponenciales y que tendrá consecuencias insospechadas en las aplicaciones y en las matemáticas mismas.

Mucho antes de las aplicaciones de la transformada rápida de Fourier, la trigonometría formó parte de un corpus de conocimientos insoslayable con aplicaciones en ingeniería, física y astronomía. Un momento cumbre en la historia de las matemáticas está plasmado en la obra de Ptolomeo que se estudia en el capítulo "Ptolomeo basamenta la astronomía con tablas trigonométricas". Naturalmente los cálculos de π de Arquímedes son fundamentales en la obra de Ptolomeo, pero inesperados efectos tendrá en la mente de Torricelli quien ante un diagrama del texto de Arquímedes encontrará la forma para calcular el volumen finito de un sólido ¡de área infinita!, ¡aquí aparece una vez más π!

Finalmente, el cúmulo de conocimientos requerido para llegar a la obra de Ptolomeo requirió siglos de observación y estudio, el documento más antiguo conocido con información sobre triángulos semejantes está en la tableta Plimpton 322, cuya antigüedad se remonta a la antigua Babilonia, cerca de dos mil años antes de Ptolomeo. Una revisión y ensayo sobre el contenido de la tableta podrá verse en el capítulo "Los más antiguos antecedentes".

Advertencia final

Finalmente, este libro es y no es, un libro de investigación histórica. Es de investigación, porque recurrí directamente a las fuentes e hice mi propia interpretación, traducción, tanto del latín o inglés o francés, tanto como del lenguaje de las matemáticas a la notación, contexto y lenguaje contemporáneos. No es estrictamente de "investigación histórica" porque no pretende la rigidez del método que tal frase envuelve, sino que más bien, el texto intenta que con un mínimo de conocimientos se logre un acercamiento lúdico al pensamiento de ideas matemáticas admirables las cuales, sin exagerar, se aplican en cada rama de la ingeniería, en cada computadora, en toda la física contemporánea.

Se han agregado para completar el texto las traducciones integras de los textos originalmente escritos en latín. Algunos de estos textos se encuentran traducidos al inglés, al francés o al alemán, pero casi nunca al español. La advertencia que debo hacer, al hablar de la traducción, es que nunca se siguió el enfoque de algunos eruditos que prefieren sacrificar la comprensión, antes que abandonar la literalidad. Por ejemplo, cuando Newton[2] escribe: "Multiplicetur omnis aequationis terminus per *indicem dignitatis* quantitatis..." algunos historiadores traducen "indicem dignitatis" literalmente como "índice de la dignidad": "Multiplíquese cada término de la ecuación por el índice de la

[2] Isaac Newton. *Tratado de la cuadratura de las curvas, edición facsimilar de 1723. Traducción de Angelo Altieri Megale.* Universidad Autónoma de Puebla, 1995

dignidad de la cantidad...” yo traduzco: “Multiplique cada término de la ecuación por el *exponente* de la cantidad...” Es decir, Newton se refiere a lo que en lenguaje moderno de matemáticas se llama “exponente” por lo que siempre se prefiere, en este libro, el uso moderno del término a la traducción literal, la cual solo puede ser de interés para algunos historiadores, precisamente para quienes estudien la evolución de las palabras y la terminología en los textos científicos, pero no para aquel lector que desee acercarse por primera vez a la obra original de Newton y otros autores, y comprenderlos desde una perspectiva actual. A fin de cuentas, es mi deseo y mi única pretensión que el lector encuentre tanta diversión y esclarecimiento al leer como el que yo experimente al escribir este libro.

Euler calcula $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$

Euler presenta el cálculo que aparece en el título, entre muchos otros cálculos, en el artículo titulado: *Del uso de los factores encontrados al definir las sumas de series infinitas*, el cual corresponde al capítulo X del libro[3] *Introducción al análisis del infinito, volumen I*, pag. 128. La idea de Euler para calcular la suma se basa en su suposición de que es posible escribir el seno hiperbólico, en el plano complejo $\mathbb{C}$, como una suma infinita y como un producto infinito al mismo tiempo:

[3] Leonhard Paul Euler. *Introductio in Analysin Infinitorum. Vol 1*. Euler Archive - All Works. 101., a

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots & (1) \\ &= z\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots & (2) \end{aligned}$$

La fórmula (1), como se sabe, es la serie de Maclaurin del seno hiperbólico y la fórmula (2), donde escribe el seno hiperbólico[4] como un producto, no tenía precedentes y muestra la audacia de Euler para extender sin limitaciones lo que puede hacerse para polinomios finitos con polinomios ¡que no terminan nunca! Seguidamente Euler factoriza z en (1) y procede a cancelarla en (1) y (2), para después sustituir $z^2 = \pi^2 x$ en la ecuación resultante y así llegar a

[4] El seno hiperbólico es la función

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

la forma en la que Euler la desarrolla en el campo de los números complejos puede verse desde el párrafo anterior a la ecuación (11), hasta el posterior a la ecuación (15).

$$1 + \frac{\pi^2}{3!}x + \frac{\pi^4}{5!}x^2 + \frac{\pi^6}{7!}x^3 + \cdots = (1+x)\left(1 + \frac{1}{2^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}x\right)\cdots \quad (3)$$

Al desarrollar el lado derecho de (3) se obtiene una serie de la forma

$$(1+x)\left(1 + \frac{1}{2^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}x\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}x\right)\cdots = 1 + \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)x + \cdots . \quad (4)$$

así concluye que al igualar el lado izquierdo de (3) con el lado derecho de (4) se llega a

$$1 + \frac{\pi^2}{3!}x + \cdots = 1 + \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)x + \cdots , \quad (5)$$

por lo tanto, concluye Euler, los coeficientes de x en ambos lados de la ecuación (5) anterior, deben ser iguales y así

$$\frac{\pi^2}{3!} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots . \quad (6)$$

Así... simplemente.

Validez de la argumentación anterior

La argumentación anterior es totalmente válida desde la perspectiva de la matemática actual, y tiene diferencias en los detalles con la presentada por Euler. La ecuación (1), como ya se dijo, es la serie de Maclaurin del seno hiperbólico la cual es verdadera ya que ésta función es analítica en todo el plano complejo[5] (Teorema 3, pag. 179). La ecuación (2) es válida por un teorema de Weierstrass (Teoremas 6 y 7, del capítulo 5, del libro de Ahlfors *op. cit.*), y un teorema bien establecido de convergencia absoluta para productos infinitos. La ecuación (3) se cumple trivialmente ya que números iguales a un tercero son iguales entre sí. La ecuación (4) se cumple ya que el producto y la serie infinita son absolutamente convergentes y, por lo tanto, es válido expandir y agrupar términos semejantes para estas series infinitas, como lo es para sumas y productos finitos. Finalmente igualar los coeficientes de la ecuación (5) es posible dada la independencia lineal de los polinomios del conjunto $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ o si se prefiere, derive la serie en (5) (lo cual es ciertamente permitido para las series involucradas) con respecto a x y ponga $x = 0$, de donde se obtiene la igualdad (6). $\square$

[5] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* Dover Publications, Inc. New York, 1966

Por otra parte, Euler además de su audaz argumentación, realizó la verificación numérica. En el capítulo VIII del *Introductio in Analysin Infinitorum op. cit.*, habla de π y escribe el desarrollo de 113 cifras exactas (la cifra 114 está equivocada, debe ser 8 en lugar de 7, en realidad Euler da 128 cifras de π), la cual calculó, según puede deducirse, de la fórmula mostrada al final del mismo capítulo VIII (se muestra como la presenta Euler):

$$\pi = 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \cdots \\ \\ \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} - \cdots \end{bmatrix}$$

la cual obtuvo de la fórmula $\pi/4 = \arctan 1 = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$ (y de la fórmula $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \cdots$), con la que, en palabras del mismo Euler: "de este modo, la longitud de la semicircunferencia π puede ser encontrada de una forma muy expedita", el lector puede probar por sí mismo, haciendo los cálculos a mano, cuán expedito puede ser este cálculo para llegar a 113 dígitos exactos de pi, pero no debe olvidar lo que se tardaría con el método de Arquímedes, que se verá más adelante, que es con lo que se contaba antes de las técnicas de Wallis.

Validez de la argumentación original de Euler

Es importante mencionar que en la época de Euler no existían varios de los teoremas que hemos mencionado o no existían en la forma como los hemos utilizado, ya que, por ejemplo, Weierstrass nació mas de cien años después que Euler. Por tal motivo, resulta muy ilustrativo constatar cómo fue que el gran matemático obtuvo las ecuaciones (1) a (5). Procederemos a reconstruir, paso a paso, las ideas de Euler lo más cercano posible a como están expuestas en el capítulo X, en la página 113 y subsiguientes páginas de la obra citada de Euler.

En la ecuación (1) no aparece[6] "senh" para denotar el seno hiperbólico complejo, sino $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y Euler no usa series de Maclaurin directamente, sino un desarrollo binomial infinito que es cuestionable desde el punto de vista contemporáneo:

$$e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i \overset{Eu}{=} 1 + i\frac{x}{i} + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{i^2} + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \tag{7}$$

la cual sería válida , como pensaba Euler, ¡si ponemos $i = \infty$! Observe que usamos el símbolo $\overset{Eu}{=}$ para expresar que se trata de la notación en el original de Euler[7] y donde sucede que $i = \infty$, es decir,

$$e^x \overset{Eu}{=} \left(1+\frac{x}{\infty}\right)^\infty .$$

Para ser más claros, Euler sabía que si $n \in \mathbb{N}$, se tiene (es decir, si n es finito, se puede usar el teorema del binomio de Newton)

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{n}\right)^n . \tag{8}$$

Partiendo de la ecuación finita (8) Euler pasa al infinito directamente y escribe

$$\left(1+\frac{x}{\infty}\right)^\infty \overset{Eu}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{9}$$

Observe que el procedimiento de Euler en (9) está lejos del procedimiento reconocido como válido en nuestros días. Si bien la expresión $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots$ es considerada correcta y se considera que $\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{x}{i}\right)^i = e^x$ es válido, sin embargo, sustituir ∞ en una ecuación, no es aceptable en tiempos modernos por muchas razones. A pesar de todo, podemos entender la intuición detras del pensamiento de Euler. Dado que todos los coeficientes de la forma $\frac{a}{i^m}$ se consideran iguales a cero[8] para i muy grande y para $a < i$ y $m \geq 1$, aunque definitivamente Euler tomaba directamente $i = \infty$ (algo más que grande) y por lo tanto, la suma se vuelve infinita, en su pensamiento y en el pensamiento de sus ilustres contemporáneos y predecesores como lo fueron Newton, Leibnitz y muchos otros.

[6] Actualmente se define $\sinh x \overset{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, pero Euler no usa tal notación en el texto original.

[7] Euler *op. cit.* pag. 92.

[8] Por ejemplo el segundo coeficiente en (8), $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = \frac{n^2}{2n^2} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ si $n = \infty$, según pensaba Euler.

Siguiendo con la notación de Euler y por la ecuación (7) tenemos

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right), \end{aligned} \tag{10}$$

de donde se llega a la ecuación (1).

Para obtener la ecuación (2), Euler muestra[9] que los binomios como $a^n - z^n$ pueden escribirse como productos de factores trinomiales de la forma

$$a^2 - 2az\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + z^2. \tag{11}$$

Por ejemplo[10],

$$a^6 - z^6 = (a-z)\left(a^2 - 2az\cos\left(\frac{2}{6}\pi\right) + z^2\right)\left(a^2 - 2az\cos\left(\frac{4}{6}\pi\right) + z^2\right)(a+z)$$

Poniendo en (11) $a = 1 + \frac{x}{i}$, $z = 1 - \frac{x}{i}$ y $n = i$ (piense primero i finito por favor), se tiene

$$\begin{aligned} a^2 - 2az\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + z^2 &= 2 + 2\frac{x^2}{i^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{i} \\ &= 2 + 2\frac{x^2}{i^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)\left(1 - 2\left(\frac{k\pi}{i}\right)^2\right) \\ &= \frac{4x^2}{i^2} + \frac{4k^2}{i^2}\pi^2 - \frac{4k^2x^2}{i^4}\pi^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Para llegar a la ecuación (12) se ha sustituido $\cos\frac{2k\pi}{i} = 1 - 2\left(\frac{k\pi}{i}\right)^2$ mediante la fórmula de Maclaurin para el coseno y eliminando los téminos que contienen potencias de i mayores de dos ya que serían cero. En la ecuación (12) se elimina el término dividido por i^4 ya que para i grande, tal término es próximo a cero (siguiendo a Euler: *evanescente termino cujus denominator est* i^4). Obtenemos así (de acuerdo con Euler), factores de la forma $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}$ los cuales, piensa Euler, deben dividir a $e^x - e^{-x}$. Ahora, suponiendo que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \tag{13}$$

dado que (13) tiene divisores de la forma $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}$ (al desaparecer los términos divididos por i^4 en (12)), se debe tener

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \stackrel{Eu}{=} x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \tag{14}$$

[9] Euler pag. 113 párrafo 151 *op. cit.*. Lo que hace Euler es escribir $a^n - z^n = (a - \omega_1 z)(a - \omega_2 z)\cdots(a - \omega_n z)$ donde $\omega_1, \ldots, \omega_n$ son las raíces enésimas de la unidad. Los factores cuadráticos son el producto de las raíces complejas por sus conjugados.

[10] Euler pag. 114 *op. cit.*.

la última ecuación es precisamente (2). Sin embargo Euler no deja claros algunos pasos, por ejemplo: puesto que de (12)

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4k^2}{i^2}\pi^2=\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\frac{4k^2\pi^2}{i^2}$$

¿no deberíamos poner todos los factores $\frac{4k^2\pi^2}{i^2}, k=1,2,\ldots$ y escribir realmente en lugar de (14),

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(\frac{4\cdot 1^2\pi^2}{i^2}\right)\left(\frac{4\cdot 2^2\pi^2}{i^2}\right)\cdots ? \quad (15)$$

¿Acaso, además, no se debería tener en (15) cada factor $\frac{4k^2\pi^2}{i^2}=0$, ya que $i=\infty$? o acaso ¿supone Euler que $\left(\frac{4\cdot 1^2\pi^2}{i^2}\right)\left(\frac{4\cdot 2^2\pi^2}{i^2}\right)\cdots=\frac{\infty}{\infty}=1$? ¡Nada de esto discute el gran matemático en su texto! A pesar de todo, Euler tenía la convicción de que el producto en la ecuación (13) era válido, aunque su demostración, hasta aquí, sea defectuosa para los estándares actuales. Enseguida daremos algunos elementos en favor de esta afirmación.

La fórmula más bella del mundo

Entre los hallazgos de Euler con relación a las funciones exponencial, seno y coseno una de las más espectaculares, además de las que ya estudiamos, es la que se encuentra en *Introductio in Analysin Infinitorum, op. cit.* (volumen I, páginas 98 a 104). Partiendo de la fórmula de De Moivre,

$$(\cos z+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n=\cos nz+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,nz,$$

Euler deduce que[11]:

$$\begin{aligned}\cos nz &= \frac{(\cos z+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n+(\cos z-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n}{2}\\ \mathrm{sen}\,nz &= \frac{(\cos z+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n-(\cos z-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,z)^n}{2\sqrt{-1}}\end{aligned}$$

o bien, poniendo $z=\frac{v}{n}$

$$\cos v = \frac{(\cos\frac{v}{n}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{n})^n+(\cos\frac{v}{n}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{v}{n})^n}{2}$$

y, dado que para n suficientemente grande $\cos\frac{v}{n}=1$ y $\mathrm{sen}\,\frac{v}{n}=\frac{v}{n}$, Euler afirma que

$$\begin{aligned}\cos v &= \frac{\left(1+\sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n+\left(1-\sqrt{-1}\frac{v}{n}\right)^n}{2}\\ &= \frac{e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2},\end{aligned}$$

[11] La notación de Euler $\sqrt{-1}$ para nuestra $\sqrt{-1}$, es la que se utiliza aquí. No usamos i dado que Euler, como ya se mencionó, usa i para el infinito actual, esta convención la tomamos como una precaución por si algún lector desea aproximarse al texto original.

dado que, como debe recordar el lector, si sustituimos n por ∞, Euler escribe $\left(1+\frac{u}{\infty}\right)^{\infty} = e^u$. Similarmente, Euler obtiene

$$\operatorname{sen} v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

multiplicando esta ecuación por $\sqrt{-1}$ y sumando el resultado con la fórmula para el $\cos v$, Euler llega a la famosa fórmula

$$e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} v \tag{16}$$

Notable fórmula en si misma que relaciona las funciones seno y coseno con la exponencial compleja. Además, al sustituir $v = \pi$ se llega a la fórmula que, si no es la más bella del mundo (como se dice en el folclor matemático), definitivamente es una de las que mas información contiene:

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1,$$

cerca de cinco mil años de matemáticas contenidas en la famosa fórmula (desde los antiguos babilonios hasta Euler), aunque cabe aclarar que esta fórmula como tal, no aparece en ninguna parte de la obra de Euler, pero se sigue directamente de (16), como hemos visto.

Crítica a la demostración de Euler

Resulta muy interesante que si $x \in \mathbb{R}$, es decir, si x no tiene parte imaginaria, entonces

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \iff x = 0.$$

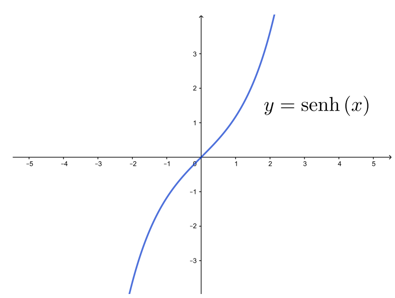


Figura 1: La gráfica de la función $y = \operatorname{senh} x$ muestra que para $x \in \mathbb{R}$, la función tiene solo un cero.

Con lo que el seno hiperbólico solo tiene un cero en $\mathbb{R}$, exactamente en $x = 0$. Entonces, solo se tendría como factor a x ¿cómo puede factorizar Euler el seno hiperbólico como el producto (14)?¿de dónde salen los demás factores? Pero el lector no debe alarmarse; si revisa nuestra ecuación (1) podrá cerciorarse de que cautelosamente se ha escrito $\operatorname{senh} z$ y que se ha mencionado que $z \in \mathbb{C}$. Afortunadamente, existe una relación asombrosa entre senh y la función seno en el plano complejo que Euler conocía, claramente, como mostraremos. En la página 120 de la obra citada de Euler en el párrafo 158, se lee[12] "Si x se convierte a cantidad imaginaria, estas fórmulas exponenciales dan el seno y coseno de cada arco real" y escribe las fórmulas siguientes poniendo $x = z\sqrt{-1}$ (observe que escribimos como escribió Euler y no ponemos $i = \sqrt{-1}$ dado que "i" significó más arriba ∞),

[12] Si x fiat quantitas imaginaria, formulae hae exponenclales in Sinum et Cosinum cujuspiam Arcus realis abeunt.

$$\begin{aligned}\frac{e^{z\sqrt{-1}}-e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} &= \operatorname{sen} z &(17)\\ &= z-\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots &(18)\\ & &(19)\end{aligned}$$

además

$$\operatorname{sen} z = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\cdots. \quad (20)$$

Esta notable sucesión de ecuaciones contiene una multitud de afirmaciones que vale la pena reiterar en nuestro idioma. La ecuación (17) se calcula partiendo de la ecuación (7), es decir, la serie para $\operatorname{sen} z$ se obtiene desarrollando $e^{z\sqrt{-1}}$ y $e^{-z\sqrt{-1}}$; posteriormente, se suman las series respectivas y se divide la suma que resulta por $2\sqrt{-1}$. Por cierto, la serie para seno es la dada en (18) y ya conocida en los círculos matemáticos. Dado que, además, se conocen los ceros reales de la función seno: $\operatorname{sen} z = 0$, si $z = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, entonces se puede escribir, siguiendo a Euler, el producto infinito (20), aunque Euler no lo justifica. ¡Vaya la audacia de Euler expuesta en estas tres líneas! Con estas ecuaciones es fácil obtener (1), simplemente ponga $z = x/\sqrt{-1}$ en (18):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{-1}} &= \frac{x}{\sqrt{-1}}-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{-1}}\right)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{-1}}\right)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right) &(21)\\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{senh} x, &(22)\end{aligned}$$

note que (21) se obtiene porque $-1 = (\sqrt{-1})^2$ y tenemos por lo tanto

$$\operatorname{senh} x = \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{x}{\sqrt{-1}}. \quad (23)$$

La expresión para el producto se obtiene sustituyendo $z = x/\sqrt{-1}$ en (20), nuevamente, y poniendo

$$\left(1-\frac{z}{k\pi\sqrt{-1}}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi\sqrt{-1}}\right) = \left(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

y así, partiendo de (17)

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \quad (24)$$

como afirmaba Euler en (14), pero con una argumentación diferente.

La mayor crítica, desde mi punto de vista, que se puede hacer al procedimiento de Euler para obtener la ecuación (14) es el uso indiscriminado del infinito cuando a veces se cancela y a veces no, agravado con el uso de reglas para sumas y productos infinitos que se cumplen para los casos finitos, sin detenerse a examinar si realmente tales reglas se cumplen o no. Es bien conocido que el procedimiento de sustituir el infinito directamente se puede reemplazar por medio del cálculo de límites como se establecieron en el siglo XIX y tal argumentación puede verse en el artículo de Eberlein[13]. Citando a Eberlein[14] "Euler y sus contemporaneos del siglo XVIII nunca llegaron a la noción de límite del siglo XIX. En lugar de escribir $\operatorname{sen} x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$ (es decir $P_n(x)$ como producto finito de polinomios), Euler pone $\operatorname{sen} x = P_\infty(x)$ y factoriza de manera formal más cercana al Análisis no estándar *à la* Luxemburg que al análisis del siglo XIX."

Dada la cita anterior, es oportuno decir algunas palabras sobre el análisis no estándar. En el artículo de Luxemburg[15] en la página 62, trata exactamente el problema de la factorización de Euler de la función seno que hemos estudiado. Al parecer en el análisis no estándar es válida la sustitución $i = \infty$ que hace Euler (vea la página 67, pero con la diferencia de que aquí usamos nuestra notación), pero en un Campo que no es el de los números reales, sino una extensión de éste. Como en toda extensión del campo de los números reales, algo se gana y algo se pierde. Lo que se pierde en la extensión de Luxemburg es la propiedad arquimediana[16]. Desde mi punto de vista el Análisis no estándar es interesante como un desarrollo más de la matemática a partir de las ideas del siglo XVIII, pero al día de hoy, a mi parecer, ha perdido ímpetu. El lector debe saber que el único campo ordenado completo es $\mathbb{R}$, salvo isomorfismos, y que en este conjunto no existen las cantidades infinitamente pequeñas ni las infinitamente grandes, dada la propiedad arquimediana, es decir, *no existen los infinitesimales y el infinito no es un número* y por lo tanto *las sustituciones y operaciones de Euler no son válidas* en $\mathbb{R}$. A pesar de todo, sin los infinitesimales es impensable el surgimiento y desarrollo del Cálculo diferencial e integral en el siglo de las luces.

Resumiendo, Euler llegó a resultados correctos con varias ideas que no se podían justificar plenamente en su época. En su mente las ideas fluían torrencialmente, como muestra veamos otros resultados de Euler en el mismo capítulo X del Análisis del infinito (*op. cit.*), traduzco (*sic*):

"Si fuera

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ etc.} = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z) \text{ etc.}$$

aquí los factores, ya sea en número finito o, ya sea en número infinito, si son multiplicados deben producir la expresión $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 +$

[13] W. F. Eberlein. *On Euler's Infinite Product for the Sine*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 58, 147-151 (1977)

[14] Euler and his 18th century contemporaries never arrived at the 19th century notion of limit. Instead of writing $\sin x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$, Euler set $\sin x = P_\infty(x)$ and factored in a formal manner closer to 20th century nonstandard analysis *à la* Luxemburg than to 19th century analysis.

[15] W. A. Luxemburg. *What is Nonstandard Analysis?* The American Mathematical Monthly, Jun.-Jul., 1973, vol 80, No. 6, Part 2. Papers on the Foundations of Mathematics (Jun.-Jul.), 1973, pp.38-67

[16] **Propiedad arquimediana:** Para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a$ existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $1/n < a < m$.

$Dz^4 +$ etc. Entonces el coeficiente A es igual a la suma de todas las cantidades $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon +$ etc.. También B será igual a la suma de los productos binarios $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta +$ etc.. Además también será $C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta +$ etc.. De esta forma será $D =$ suma de productos de cuatro, $E =$ suma de productos de cinco, etc., lo cual consta del álgebra común."

Aquí una advertencia al lector moderno: no se sigue que las operaciones se cumplan en todos los casos infinitos, sino solo en algunos. A Euler le interesan particularmente los casos donde los sumandos son potencias de $\alpha, \beta, \ldots$, por ejemplo $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots$ y descubre que siempre es posible obtenerlos ya que por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\alpha^1 + \beta^1 + \gamma^1 + \ldots &= A \\
\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots &= A^2 - 2B \\
\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \ldots &= A(A^2 - 2B) - BA + 3C \\
\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \ldots &= A(A(A^2 - 2B) - BA + 3C) - B(A^2 - 2B) + CA - 4D \\
\vdots \qquad &\ \ \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Regresando a nuestro seno hiperbólico Euler obtiene al aplicar los resultados anteriores, además del resultado que ya conocemos y que aparece en el título del presente capítulo,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \frac{2^0}{3!}\frac{1}{1}\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \\
\frac{\pi^4}{90} &= \frac{2^2}{5!}\frac{1}{3}\pi^4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots \\
\frac{\pi^6}{945} &= \frac{2^4}{7!}\frac{1}{3}\pi^6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \cdots \\
\frac{\pi^8}{9450} &= \frac{2^6}{9!}\frac{3}{5}\pi^8 = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \cdots \\
\frac{\pi^{10}}{93555} &= \frac{2^8}{11!}\frac{5}{3}\pi^{10} = 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{6^{10}} + \cdots \\
\vdots \quad &\ \vdots \quad \vdots \\
\frac{1315862\,\pi^{24}}{11094481976030578125} &= \frac{2^{24}}{27!}\frac{76977927}{1}\pi^{24} = 1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \frac{1}{6^{26}} + \cdots
\end{aligned}$$

Por supuesto, Euler no se detiene aquí sino que continua con el coseno hiperbólico (página 132 *op. cit.*),

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \left(1 + \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{7^2\pi^2}\right)\cdots \quad (25)$$

Notas sobre la bibliografía referente a la obra de Euler

En ciertos artículos, como el de Ayoub[17], hay imprecisiones por

[17] Raymond Ayoub. *Euler and the Zeta Function*. The American Mathematical Monthly , Dec., 1974, Vol. 81, No. 10 (Dec., 1974), pp. 1067-1086

ejemplo en la página 1076, lo que hace Euler en *De summis serierum reciprocarum*[18] pág.125 a 126, no es escribir lo que hace el articulista, sino

$$
\begin{aligned}
y &= s - \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \\
1 &= \frac{s}{y} - \frac{s^3}{y\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{y\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots \\
0 &= 1 - \left(\frac{s}{y} - \frac{s^3}{y\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{s^5}{y\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\right) \\
0 &= \left(1 - \frac{s}{A}\right)\left(1 - \frac{s}{B}\right)\cdots
\end{aligned}
$$

de aquí concluye que

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \ldots$$

y además, concluye que la suma de los coeficientes de s^2 deben ser cero. De esta forma lo que escribe Euler es claro, comparado con lo que hace Ayoub.

[18] Leonhard Paul Euler. *De summis serierum reciprocarum*. (1740). Euler Archive - All Works. 41., c

A continuación se presenta la traducción al español de parte del capítulo del libro de texto de Euler, estudiado en las secciones anteriores. Se mantiene la numeración del texto original de los párrafos que para esta capítulo comienza con 165.

Traducción del latín del texto original de Euler[19]*:*
Capítulo X
Del uso de los factores ya calculados para definir la suma de una serie infinita

[19] Leonhard Paul Euler. *Introductio in Analysin Infinitorum. Vol 1*. Euler Archive - All Works. 101., a

165 . Si se cumple que

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots = (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z) \cdots$$

indistintamente que los factores sean finitos o infinitos, si al ser multiplicados producen la expresión $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \cdots$, entonces de igual manera el coeficiente A debe ser la suma de todas las cantidades $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$. Similarmente, el coeficiente B será la suma de productos de dos cantidades, así

$$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \cdots$$

Similarmente, C será la suma de productos de tres cantidades, por lo que será

$$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \cdots$$

Entonces así continuará, D como la suma de productos de cuatro, E la suma de productos de cinco, etcétera, lo cual consta a partir del Álgebra común[20].
166. Dada la suma $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$, de la suma de productos de dos cantidades puede obtenerse la suma de cuadrados $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \cdots$, la cual obviamente[21] es igual al cuadrado de una suma quitando los dobles productos. De similar manera pueden definirse la suma de cubos, bicuadrados y otras potencias. Así, si ponemos

$$\begin{array}{rcl} P & = & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \cdots \\ Q & = & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \cdots \\ R & = & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \cdots \\ S & = & \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \cdots \\ T & = & \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \cdots \\ V & = & \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

conociendo $A, B, C, D, \ldots$, los valores de $P, Q, RS, T, V, \ldots$ pueden ser

[20] El lector debe recordar que la convergencia de las series no es un asunto trivial, como ya se mencionó, esta frase de Euler debe leerse agregando siempre: para aquellas series y productos que convergen. Euler tiene en mente solo aquellas series para las cuales se cumple la igualdad sin restricciones de ninguna especie, lo cual no es tan común como pareciera afirmar el texto.

[21] "Obviamente", se recalca nuevamente, que se cumple solamente bajo condiciones de convegencia de las series.

determinados:

$$\begin{aligned}
P &= A, \\
Q &= AP - 2B, \\
R &= AQ - BP + 3C, \\
S &= AR - BQ + CP - 4D, \\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E, \\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F, \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

la veracidad de tales fórmulas se reconoce mediante un examen instituido, pero también pueden ser demostradas con sumo rigor mediante el Cálculo diferencial[22]

167. Como se encontró antes (párrafo 156)

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x\left(1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \cdots\right) \\
&= x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

se tendrá

$$1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \cdots = \left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

Póngase $x^2 = \pi^2 z$ (por razones tipográficas y de estilo, solía escribirse $xx = \pi\pi z$ y no $x^2 = \pi^2 z$, no se respeta está convención por ser irrelevante para la comprensión del texto) y se tendrá

$$1 + \frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3}z + \frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^2 + \frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdots 7}z^3 + \cdots = (1+z)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{16}z\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)z\cdots$$

Entonces aplicando la regla establecida anteriormente en este caso se tendrá

$$A = \frac{\pi^2}{6},\ B = \frac{\pi^4}{120},\ C = \frac{\pi^6}{5040},\ D = \frac{\pi^8}{362880}, \ldots$$

En consecuencia, si se supone que

$$\begin{aligned}
P &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots, \\
Q &= 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \cdots, \\
R &= 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \cdots, \\
S &= 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \cdots, \\
T &= 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \cdots, \\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

[22] Así escribe Euler "Calculo differentiali" con C mayúscula "Calculo"y escribe "diferentiali", no con D mayúscula, por lo cual se respeta la ortografía del original.

y dados que los valores de $A, B, C, D, \ldots$ están determinados, se obtiene:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi^2}{6}, \\ Q &= \frac{\pi^4}{90}, \\ R &= \frac{\pi^6}{945}, \\ S &= \frac{\pi^8}{9450}, \\ T &= \frac{\pi^{10}}{9355}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

168. Es evidente entonces que toda serie infinita de la forma general

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

puede ser descrita en términos de la semiperiferia del círculo π, siempre y cuando n sea par; entonces se tendrá que la suma de la serie tiene a π^n como razón racional[23]. Sin embargo para que sea visto más claramente el valor de tales sumas, añado varias series de una manera más cómoda.

[23] Se entiende que π sea "rationem rationalem", i. e., razón racional, observando los cocientes del lado derecho mostrados en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots &= \frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{1}{1}\pi^2, \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots &= \frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \cdot \frac{1}{3}\pi^4, \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \cdots &= \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} \cdot \frac{1}{3}\pi^6, \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \cdots &= \frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9} \cdot \frac{3}{5}\pi^8, \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{6^{10}} + \cdots &= \frac{2^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11} \cdot \frac{5}{3}\pi^{10}, \\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{6^{12}} + \cdots &= \frac{2^{12}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13} \cdot \frac{691}{105}\pi^{12}, \\
1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \frac{1}{6^{14}} + \cdots &= \frac{2^{14}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 15} \cdot \frac{35}{1}\pi^{14}, \\
1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \frac{1}{6^{16}} + \cdots &= \frac{2^{16}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 17} \cdot \frac{3617}{15}\pi^{16}, \\
1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \frac{1}{6^{18}} + \cdots &= \frac{2^{18}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 19} \cdot \frac{43861}{21}\pi^{18}, \\
1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \frac{1}{6^{20}} + \cdots &= \frac{2^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 21} \cdot \frac{1222277}{55}\pi^{20}, \\
1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \frac{1}{6^{22}} + \cdots &= \frac{2^{22}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 23} \cdot \frac{1181820455}{273}\pi^{22}.
\end{aligned}$$

Conclusión

A lo largo de la historia de las matemáticas son innumerables las citas de prominentes autores, por ejemplo Gauss, que mencionan a los textos de Euler como fuente imprescindible para acercarse a las matemáticas, principalmente para los estudiantes; en particular, se cita el libro de análisis, de cuyo capítulo X se ha traducido aquí una pequeña parte. El capítulo X contiene además los párrafos 169 a 183, donde el lector interesado podrá encontrar caudales de fórmulas fascinantes. Versiones en inglés del libro pueden encontrarse sin mayor dificultad en *internet*; desconozco si existen traducciones al español, además de mi humilde versión.

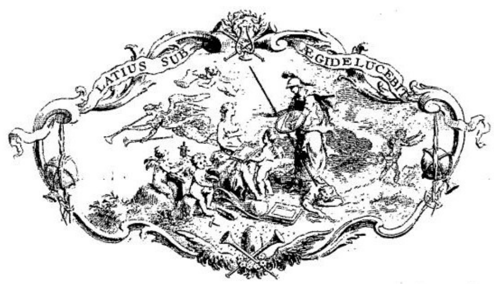
INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.



LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

Portada del original de Euler *op. cit.*. Créditos de la digitalización: *University of the Pacific Scholarly Commons*
https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works

 $\frac{\text{fin.}\ \frac{1}{2}(g+v)}{\text{fin.}\ \frac{1}{2}g} = \text{cof.}\ \frac{1}{2}v + \text{cot.}\ \frac{1}{2}g.\ \text{fin.}\ \frac{1}{2}v =$

$$(1+\frac{v}{g})(1-\frac{v}{2\varpi-g})(1+\frac{v}{2\varpi+g})(1-\frac{v}{4\varpi-g})\ \&c.$$

Quorum Factorum lex progreſſionis ſatis eſt ſimplex & uniformis; atque ex his expreſſionibus per multiplicationem oriuntur eæ ipſæ, quæ §. præcedente ſunt inventæ.

CAPUT X.

De uſu Factorum inventorum in definiendis ſummis Serierum infinitarum.

165. SI fuerit $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\ \&c.$, hi Factores, ſive ſint numero finiti ſive infiniti, ſi in ſe actu multiplicentur, illam expreſſionem $1 + A + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$, producere debent. Æquabitur ergo coëfficiens A ſummæ omnium quantitatum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.$. Coëfficiens vero B æqualis erit ſummæ productorum ex binis, eritque $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \&c.$. Tum vero coëfficiens C æquabitur ſummæ productorum ex ternis, nempe erit $C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \&c.$. Atque ita porro erit $D =$ ſummæ productorum ex quaternis, $E =$ ſummæ productorum ex quinis, &c., id quod ex Algebra communi conſtat.

166. Quia ſumma quantitatum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$, datur una cum ſumma productorum ex binis, hinc ſumma Quadratorum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \&c.$, inveniri poterit, quippe quæ æqualis eſt Quadrato ſummæ demtis duplicibus productis ex binis. Simili modo ſumma Cuborum, Biquadratorum & altiorum Poteſtatum definiri poteſt: ſi enim ponamus

$P =$

$$
\begin{aligned}
P &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \text{\&c.}\\
Q &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \text{\&c.}\\
R &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \epsilon^3 + \text{\&c.}\\
S &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \epsilon^4 + \text{\&c.}\\
T &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \epsilon^5 + \text{\&c.}\\
V &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \epsilon^6 + \text{\&c.}\\
&\text{\&c.}
\end{aligned}
$$

Valores P, Q, R, S, T, V &c. ſequenti modo ex cognitis A, B, C, D, &c., determinabuntur.

$$
\begin{aligned}
P &= A\\
Q &= AP - 2B\\
R &= AQ - BP + 3C\\
S &= AR - BQ + CP - 4D\\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E\\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F\\
&\text{\&c.}
\end{aligned}
$$

quarum formularum veritas examine inſtituto facile agnoſcitur: interim tamen in calculo differentiali ſummo cum rigore demonſtrabitur.

167. Cum igitur ſupra (§. 156.) invenerimus eſſe: $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.\ldots.7} + \text{\&c.}\right) = x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}\right)\text{\&c.}$, erit $1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.\ldots7} + \text{\&c.} = \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\text{\&c.}$ Ponatur $xx = \pi\pi z$, eritque $1 + \frac{\pi\pi}{1.2.3}z + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.5}z^2 + \frac{\pi^6}{1.2.3\ldots.7}z^3 + \text{\&c.} = (1+z)\left(1 + \frac{1}{4}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{16}z\right)$

LIB. I. $\left(1+\frac{1}{25}z\right)$ &c.. Facta ergo applicatione superioris regulæ ad hunc casum, erit $A=\frac{\pi\pi}{6}$; $B=\frac{\pi^4}{120}$; $C=\frac{\pi^6}{5040}$; $D=\frac{\pi^8}{362880}$ &c.. Quod si ergo ponatur

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$$
$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \&c.$$
$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \&c.$$
$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \&c.$$
$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \&c.$$
&c.

atque harum litterarum valores ex A, B, C, D, &c. determinentur, prodibit.

$$P = \frac{\pi\pi}{6}$$
$$Q = \frac{\pi^4}{90}$$
$$R = \frac{\pi^6}{945}$$
$$S = \frac{\pi^8}{9450}$$
$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$
&c.

168. Patet ergo omnium Serierum infinitarum in hac forma generali $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ &c., contentarum, quoties n fuerit numerus par, ope Peripheriæ Circuli π exhiberi posse; habebit enim semper summa Seriei ad π^n rationem rationalem.

lem. Quo autem valor harum ſummarum clarius perſpiciatur, plures hujuſmodi Serierum ſummas commodiori modo expreſſas hic adjiciam. CAP. X.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\&c.=\frac{2^4}{1.2.3\ldots.7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\&c.=\frac{2^6}{1.2.3\ldots.9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\&c.=\frac{2^8}{1.2.3\ldots..11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\&c.=\frac{2^{10}}{1.2.3\ldots..13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\&c.=\frac{2^{12}}{1.2.3\ldots..15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\&c.=\frac{2^{14}}{1.2.3\ldots..17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\&c.=\frac{2^{16}}{1.2.3\ldots..19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\&c.=\frac{2^{18}}{1.2.3\ldots.21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\&c.=\frac{2^{20}}{1.2.3\ldots23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\&c.=\frac{2^{22}}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots 25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\&c.=\frac{2^{24}}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots\ldots 27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}.$$

Hucuſque iſtos Poteſtatum ipſius π Exponentes artificio alibi exponendo continuare licuit, quod ideo hic adjunxi, quod

 Seriei

LIB. I. Seriei fractionum primo intuitu perquam irregularis 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{691}{105}$, $\frac{35}{1}$, &c. in plurimis occasionibus eximius est usus.

169. Tractemus eodem modo æquationem §. 157. inventam, ubi erat $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ &c., $= (1 + \frac{4xx}{\pi\pi})(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi})(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi})(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi})$ &c.. Posito ergo $xx = \frac{\pi\pi z}{4}$ erit $1 + \frac{\pi\pi}{1.2.4}z + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2}zz + \frac{\pi^6}{1.2....6.4^3}z^3 +$ &c., $= (1+z)(1+\frac{1}{9}z)(1+\frac{1}{25}z)$ $(1+\frac{1}{49}z)$ &c.. Unde, facta applicatione, erit $A = \frac{\pi\pi}{1.2.4}$; $B = \frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2}$; $C = \frac{\pi^6}{1.2.3....6.4^3}$; &c.. Quod si ergo ponamus

$$P = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{\&c.}$$
$$Q = 1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \text{\&c.}$$
$$R = 1 + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \text{\&c.}$$
$$S = 1 + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \text{\&c.}$$
&c.

reperientur sequentes pro P, Q, R, S, &c., valores:

$$P = \frac{1}{1} \cdot \frac{\pi^2}{2^3}; \qquad Q = \frac{2}{1.2.3} \cdot \frac{\pi^4}{2^5}$$
$$R = \frac{16}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\pi^6}{2^7}; \qquad S = \frac{272}{1.2.3....7} \cdot \frac{\pi^8}{2^9}$$

$T =$

Wallis decifra a π

A quien desee aproximarse a la historia de las matemáticas sin profundizar demasiado, quizá le bastará considerar a Newton y Leibniz solamente como los inventores del Cálculo Diferencial e Integral. Pero tal simplificación resulta totalmente inútil para entender el entramado de ideas fundamentales. La obra de Wallis y Barrow, sin cuyas publicaciones no podrían haberse dado grandes descubrimientos, es indispensable para la comprensión del desarrollo del cálculo. Además, por ejemplo, las ideas de Wallis, para calcular áreas tienen gran influencia de la obra de Cavalieri y muchos otros antecesores, por lo que intentar rastrear la historia de las ideas en matemáticas resulta extremadamente complejo.

En cuanto al papel jugado por Wallis, se observa en el libro *Arithmetica Infinitorum*[24], publicado cincuenta años antes del nacimiento de Euler, que no solo aparece una expresión equivalente a la famosa fórmula

$$\frac{2}{\pi} \stackrel{def}{=} \square = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}, \tag{26}$$

(Proposición 191, página 179, *op. cit.*, donde el lector encontrará el famoso "$\square$" que puede verse en la ecuación (26)), sino que se revela todo un método para integrar funciones $f(x) = x^n$, lo cual contribuyó notablemente al desarrollo del cálculo integral. Es decir, Wallis calculaba integrales aún antes de que fueran inventadas como tales.

[24] Johan Wallis. *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata, (1656)*

Técnica de Wallis para integrar

Wallis observa en la Proposición I (*op. cit.* página 1) que la razón de la serie $0+1+2+3+\cdots+n$ con la serie $n+n+\cdots+n$ de $n+1$ sumandos da $1/2$ independientemente de n y concluye, en la Proposición III, que el área de cualquier triángulo de base y altura dados dividida por el área del paralelogramo de altura y base iguales respectivamente a las del triángulo está dada por $1/2$, es decir, dado que

$$\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+\cdots+n} = \frac{0+1+2+\cdots+n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}, \tag{27}$$

tal razón se cumplirá para cualesquiera triángulos y paralelogramos con bases iguales y alturas iguales. El cociente de la ecuación (27) no debe resultar sorpresivo para el lector ya que $0+1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ (como se mencionó en el capítulo *Euler calcula ...*), es decir

$$\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+\cdots+n} = \frac{0+1+2+\cdots+n}{n(n+1)} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Lo novedoso para la época de Wallis es que afirma que puede calcular el área de cualquier triángulo con tales razones aritméticas. Así Wallis lleva el problema geométrico del cálculo de áreas a un problema puramente aritmético. Lo más relevante para los contemporáneos de Wallis es que tal método de cálculo de razones lo puede extender al cálculo de áreas de parábolas, hipérbolas, áreas de curvas $f(x) = x^n$ y otras figuras geométricas, pero además, puede calcular el volumen de ciertos sólidos a partir estos resultados.

Si bien, para un triángulo, la fórmula (27) puede parecer trivial, para el cálculo del área bajo la parábola $y = x^2$ ya no lo es tanto. Veamos, Wallis nota que (Proposición XIX, página 15 *op. cit.*),

$$\begin{aligned}
\frac{0+1=1}{1+1=2} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\\
\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{12}\\
\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{18}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

y en general, se observa, al evaluar la razón aritmética, que

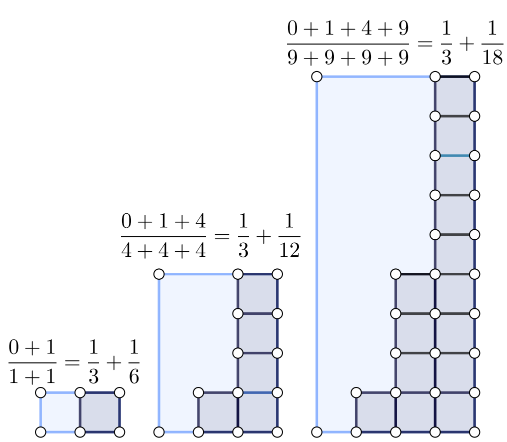


Figura 2: Wallis construye las series $0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ y las inscribe en un rectángulo de altura n^2 y base $n+1$. El cociente de las áreas es aproximadamente un tercio.

$$\frac{0+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2(n+1)} \approx \frac{1}{3}, \tag{28}$$

es decir, la razón de la serie $0+1+2^2+3^2+\cdots+n^2$, lo cual da un área con tendencia a parecerse al área bajo una parábola, dividida por el área del rectángulo de altura n^2 y base $n+1$, se aproxima cada vez más a un tercio.

Demos un salto al futuro (en el futuro con respecto a la época en la que vivió Wallis), para recordar que Euler encontraría que

$$1+4+9+\cdots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

por lo que se tiene al sustituir en el lado izquierdo de la expresión anterior en (28),

$$\begin{aligned} \frac{0+1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2(n+1)} &= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2(n+1)} \\ &= \frac{2n+1}{6n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6n}. \end{aligned} \tag{29}$$

¡De donde puede inferirse que el área de una semiparábola inscrita en un rectángulo[25] dividida por el área del rectángulo es $1/3$!

[25] El lector no debe dejar de ver que $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

Reinterpretación contemporánea de la técnica de Wallis

Si reescribimos la fórmula del lado izquierdo de (29) de la forma

$$\begin{aligned} \frac{0+1+2^2+3^3+\cdots+n^2}{n^2(n+1)} &= \frac{1^2}{n^2(n+1)}+\frac{2^2}{n^2(n+1)}+\cdots+\frac{n^2}{n^2(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n+1}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n+1}, \end{aligned} \tag{30}$$

podemos ver las coincidencias de la suma (30) con la suma de Riemann de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[0,1]$, donde se toma

$$\left\{x_0=0,\, x_1=\frac{1}{n},\, x_2=\frac{2}{n},\ldots,x_n=\frac{n}{n}\right\}, \tag{31}$$

como partición de tal intervalo y obtendríamos así, tomando límites,

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}. \tag{32}$$

Por lo que

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right) = \frac{1}{3},$$

lo que es coherente con la notación y la técnica que se utiliza hoy en día y coincide con el resultado final de Wallis.

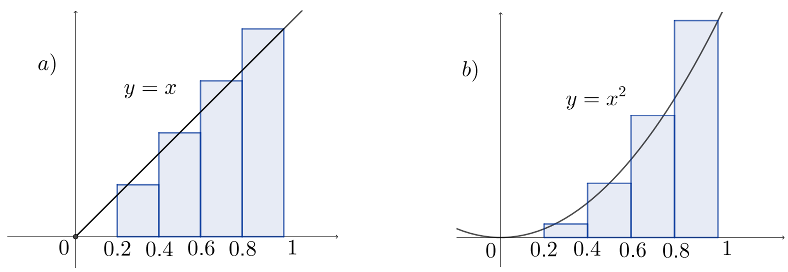


Figura 3: En la figura $a)$ se observa que la partición de Wallis para una recta da exactamente el valor del área bajo la recta, es decir, $1/2$ debido claro a que las áreas de los triángulos sobre la recta se ajustan exactamente a los triángulos que faltan bajo la misma. En la figura $b)$ se obtienen la aproximación del área bajo la parábola con la misma partición que en la figura $a)$. En ambas figuras se toma la partición de Wallis con $n = 4$ para $0 \leq x \leq 1$.

Wallis realiza sus cálculos sin conocer aparentemente la fórmula general para las series finitas de potencias (aquí el lector puede ver la fórmula general (49) que obtuvo Euler casi cien años después[26]), sino que hace cálculos manualmente. Por ejemplo, para los cubos (Proposición 39, página 31 *op. cit.*), es decir, para $f(x) = x^3$ hace cálculos para las particiones (31) con $n = 1, 2, \ldots, 6$. La última razón que escribe en sus cálculos es (*sic*)

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216 = 441}{216+216+216+216+216+216+216 = 1512} = \frac{7}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}.$$

Dado que en todos sus cálculos aparece $1/4$ más una cantidad que se hace pequeña cuando n crece, Wallis concluye que el área bajo la gráfica de $f(x) = x^3$, para $0 \leq x \leq 1$ es $1/4$. Wallis incluye entonces una lista en la proposición 44 (página 35 *op. cit.*) donde obtiene el área bajo la curva para $f(x) = x^m$ dividida por el área del rectángulo que inscribe a la curva, con $m = 1$ hasta $m = 6$. Equivalentemente, si denotamos con $A(x^m)$ el área bajo la gráfica de $f(x) = x^m$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, podemos ver, siguiendo la conjetura de Wallis que

$$A(x^m) = \frac{1}{m+1}, \text{ para } m = 1, 2, \ldots, 6 \tag{33}$$

y conjetura que esto es válido para toda $m \in \mathbb{N}$, como en efecto lo es[27]. Pero no olvidemos que lo que interesa a Wallis es realmente el área sobre la curva, dentro del rectángulo; pero al haber calculado el complemento (el área bajo la curva), el área que desea queda determinada. Por ejemplo, el área (sobre la curva) de la semiparábola inscrita en el rectángulo es $2/3$, pues el área bajo la curva es $1/3$, dado que el área total es $3/3$. Este razonamiento abre la puerta para el cálculo de áreas para funciones con exponentes fraccionarios[28] puesto que, por ejemplo, para $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene que el área bajo la curva de $y = \sqrt{x}$ inscrita en el cuadrado de lado 1, es $2/3$, ya que por simetría corresponde a la misma área sobre la gráfica de $y = x^2$. Por lo que si escribimos $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, se tiene también

[26] Sin embargo Wallis conoce las fórmulas

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n^2+n}{2}, \\ 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n^3+3n^2+2n}{6} \\ 1+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}, \end{aligned}$$

las cuales pueden verse, por ejemplo en la tabla de la página 162, Proposición 184 y cuya fórmula se estudia en el capítulo siguiente.

[27] Dicho esto con notación moderna, Wallis conjetura que,

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$$

es válida para toda m, Proposición 43, página 33, *op. cit.*

[28] De hecho Wallis inventa los exponentes fraccionarios para las raíces.

$$A\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3},$$

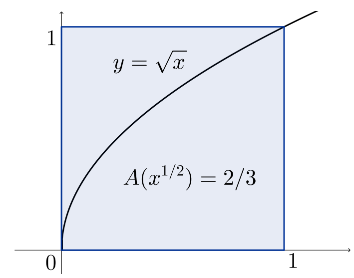


Figura 4: El área bajo la gráfica de $y = \sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq 1$ es $A(1/2) = 2/3$.

por lo que se sigue cumpliendo la regla (33), también para $n = 1/2$. Sin embargo, al parecer el argumento de Wallis es de naturaleza totalmente aritmética más que geométrica.

Wallis toma la media aritmética entre 1 y 2, es decir $(1+2)/2 = 1 + 1/2$, y concluye que es el número que le corresponde a $A(x^{1/2}) = \frac{1}{\frac{1+2}{2}} = \frac{2}{3}$, es decir, el recíproco de la media aritmética entre 1 y 2, de acuerdo con Nunn[29], página 352.

Ahora bien, razonando de manera *inductiva*[30], a partir de consideraciones meramente aritméticas, Wallis afirma que la ecuación (33) es válida también para $n = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, es decir,

$$A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{\frac{p}{q}+1}, \text{ para } p, q \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

lo cual será suficiente para calcular π. Aunque las conjeturas de Wallis van más allá de los cálculos que hemos realizado, no nos extenderemos sobre este tema[31].

Se requiere una aclaración final antes de pasar al cálculo de π, todas las fórmulas para las sumas de las series se cumplen si incluyen rectángulos de longitud a, ya que, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{0a^2 + 1a^2 + 2^2a^2 + 3^2a^2 + \cdots + n^2a^2}{a^2n^2(n+1)} &= \frac{a^2(0 + 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{a^2n^2(n+1)} \\ &= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2(n+1)} \\ &= \frac{2n+1}{6n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}, \end{aligned} \tag{35}$$

dado que la a^2 en el numerador y en el denominador se cancelan mutuamente, lo cual evita el uso de infinitesimales asignados al valor a, aunque Wallis los menciona[32] y quizá son el origen de todo lo que se hizo respecto a estas cantidades en las obras de Newton, Leibniz, Euler, hasta nuestro siglo en el análisis no estándar.

Cuadratura del círculo

Para calcular el área de la circunferencia, $x^2 + y^2 = 1$, basta calcular, por simetría, el área bajo la curva $y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, para $0 \leq x \leq 1$. Dado que Wallis no cuenta con una serie para evaluarla[33] utiliza un método de interpolación desarrollado por él mismo que intentaremos describir enseguida.

[29] Percy T. Nunn. *The Arithmetic of infinities. A School Introduction to the Integral Calculus*. The Mathematical Gazette, Dec., 1910, Vol. 5, No. 89 (Dec., 1910), pp. 345-356, a

[30] Wallis llama *inducción*, apropiadamente, a las generalizaciones que obtiene de casos particulares.

[31] Según Nunn (*op. cit.*, página 355), Wallis especula sobre potencias negativas, pero al obtener cantidades negativas da una interpretación errónea.

[32] Recordamos que los infinitesimales son cantidades infinitamente pequeñas las cuales no existen en la axiomática estándar de los números reales. Wallis los menciona en la página 92 del *Arithmetica Infinitorum, op, cit.* como $R/\infty = a$ y los nombra *pars infinite parva*, esto es “parte infinitamente pequeña”.

[33] Newton la descubriría años después inspirado en la obra de Wallis.

Con la fórmula (34) Wallis se da cuenta que puede evaluar las series para las funciones de la forma $(1-x^{1/q})^p$. Por ejemplo, para la función $(1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4$, el cálculo de $A((1-x^2)^2)$ está dado por

$$\begin{aligned} A((1-x^2)^2) &= A(1-2x^2+x^4) \\ &= A(1)-2A(x^2)+A(x^4) \\ &= 1-2\frac{1}{3}+\frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{15}, \end{aligned}$$

Aunque, obviamente, Wallis hace el cálculo evaluando las series para cada uno de los sumandos que se obtienen al desarrollar el binomio. El cálculo directo de algunas de las series para la circunferencia de radio arbitrario R, dada por $x^2+y^2=R^2$ pueden verse en la segunda parte del artículo de Nunn[34]. Para el lector que identifica A con la integral, las relaciones anteriores son consecuencia de las propiedades más básicas, pero recuerde que la integral no se había inventado todavía. El método de Wallis consiste en elaborar una tabla donde aparecen los recíprocos de $A((1-x^{1/q})^p)$. El uso de recíprocos está motivado porque de esta forma los números son más fácilmente reconocibles. De acuerdo con lo expuesto por Osler[35] (el lector curioso encontrará una detallada descripción de las tablas de Wallis en el mencionado artículo), resulta que ciertos coeficientes binomiales corresponden a tales recíprocos (para $q \neq 0$ y $p > q$, enteros), es decir[36],

[34] Percy T. Nunn. *The Arithmetic of infinities. A School Introduction to the Integral Calculus*. The Mathematical Gazette, Jan., 1911, Vol. 94, No. 531 (Nov., 2010), pp. 430-437, b

[35] Thomas J. Osler. *The tables of John Wallis and the discovery of his product for π*. The Mathematical Gazette, Nov., 2010, Vol. 5, No. 90 (Jan., 1911), pp. 377-386

[36] Los coeficientes binomiales se definen mediante la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

$$\frac{1}{A((1-x^{1/q})^p)} = \binom{p+q}{q} \tag{36}$$

Veamos algunos ejemplos, $\binom{3+2}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ y, por otra parte,

$$\begin{aligned} A((1-x^{1/2})^3) &= A(1-3x^{1/2}+3x^{2/2}-x^{3/2}) \\ &= 1-3\frac{2}{3}+3\frac{1}{2}-\frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

El objetivo es evaluar por medio de interpolaciones $A((1-x^2)^{1/2})$, es decir, $A((1-x^{1/q})^p)$, para $p=q=1/2$, dado que para $p=1/2$, Wallis no cuenta con una forma directa de calcularlo. Como $4/\pi$ es una cantidad desconocida, Wallis emplea una notación especial:

$$\Box \stackrel{def}{=} \frac{4}{\pi} = \frac{1}{A((1-x^2)^{1/2})}. \tag{37}$$

La notación "$\Box$" es la originalmente utilizada por Wallis (*op. cit.* en la tabla de la página 137, por ejemplo), y la forma en la que ha escrito $A((1-x^{1/q})^p)$, determina que $\Box$ quede en la diagonal de la tabla infinita, arreglo que, visto como matriz infinita, resulta ser igual a su propia transpuesta. Dicho de otra manera, si consideramos la matriz con entradas

$$a_{i,j} = \binom{i+j}{j}$$

donde $i = 1, 2, \ldots$ corresponde al i-ésimo renglón y $j = 1, 2, \ldots$ corresponde a la j-ésima columna resulta que $a_{i,j} = a_{j,i}$, lo cual es claro, dado que

$$a_{i,j} = \binom{i+j}{j} = \frac{(i+j)!}{(i+j-j)!\,j!} = \frac{(j+i)!}{j!\,i!} = \binom{j+i}{i} = a_{j,i}. \tag{38}$$

Se tiene entonces la matriz infinita dada por la tabla del cuadro 1 para p, q enteros. Observe que el renglón $q = j$ es igual a la columna

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	1	1	1	1	$\cdots$
$q=1$	1	2	3	4	$\cdots$
$q=2$	1	3	6	10	$\cdots$
$q=3$	1	4	10	20	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 1: Matriz para valores enteros p, q donde $a_{p,q} = \frac{1}{A((1-x^{1/q})^p)} = \binom{p}{q}$, recordando que $0! = 1$ por definición. Corresponde en el original de Wallis (*op. cit.*) a la Proposición 132, p. 105.

$p = j$, por la propiedad (38), propiedad que es fundamental en la argumentación de Wallis. El siguiente paso consiste (vea el cuadro 2) en insertar valores fraccionarios de p y q, en particular interesa el valor $p = q = 1/2$, lo que corresponde a crear un nuevo renglón y columna en la matriz que se muestra en el cuadro 2.

Ahora, procedamos paso a paso, Wallis no puede calcular el valor de A cuando $p = n/2$, y q entero, pero puede calcular cuando p es entero y q de la forma $n/2$, lo que ayudará, a conjeturar los valores para la columna $p = 1/2$, a partir del renglón $q = 1/2$, suponiendo que la simetría de la matriz se conserva para los casos fraccionarios. En efecto, dado que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A((1-x^{1/\frac{1}{2}})^1)} &= \frac{1}{A((1-x^2)^1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \\
\frac{1}{A((1-x^{1/\frac{1}{2}})^2)} &= \frac{1}{A((1-x^2)^2)} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{15}{8} = \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} \\
\frac{1}{A((1-x^{1/\frac{1}{2}})^3)} &= \frac{1}{A((1-x^2)^3)} = \frac{1}{1-\frac{3}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}} = \frac{35}{16} = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

	$p=0$	$p=1/2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	1		1	1	1	$\cdots$
$q=1/2$		$\square$				$\cdots$
$q=1$	1		2	3	4	$\cdots$
$q=2$	1		3	6	10	$\cdots$
$q=3$	1		4	10	20	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Cuadro 2: Se buscan valores fraccionarios de p, q. En particular se crea una nueva columna y un nuevo renglón para $p = q = 1/2$. Esta tabla corresponde a la tabla de Wallis de la página 137, Proposición 165 (*op. cit.*). Recuerde que $\square = 4/\pi$ es el valor que se desea calcular.

que son los valores del renglón $q = 1/2$, Wallis concluye que también los valores de la columna $p = 1/2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A((1-x^{1/1})^{1/2})} &= \frac{3}{2} \\
\frac{1}{A((1-x^{1/2})^{1/2})} &= \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} \\
\frac{1}{A((1-x^{1/3})^{1/2})} &= \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora se puede completar la tabla 2, como se muestra en el cuadro 3, siguiente

	$p=0$	$p=1/2$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	1	1	1	1	1	$\cdots$
$q=1/2$	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$q=1$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4	$\cdots$
$q=2$	1	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	3	6	10	$\cdots$
$q=3$	1	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	4	10	20	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Cuadro 3: Se completa la matriz del cuadro anterior, calculando los valores con $p = 1, 2, \ldots$ y $q = 1/2$, con esta información se completa la columna $p = 1/2$, $q = 1, 2, \ldots$

Con esta técnica, ahora Wallis es capaz de intercalar todos los múltiplos impares de $1/2$, es decir, para $q = 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$ y p entero, para luego intercalarlos en las columnas de $p = 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$, respectivamente. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A((1-x^{1/\frac{3}{2}})^1)} &= \frac{1}{A((1-x^{2/3})^1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{2}{3}}} = \frac{5}{2} \\
\frac{1}{A((1-x^{1/\frac{3}{2}})^2)} &= \frac{1}{A((1-x^{2/3})^2)} = \frac{1}{1-\frac{6}{5}+\frac{3}{7}} = \frac{35}{8} = \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4} \\
\frac{1}{A((1-x^{1/\frac{3}{2}})^3)} &= \frac{1}{A((1-x^{2/3})^3)} = \frac{1}{1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{3}{9}} = \frac{105}{16} = \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Insertamos estos valores en una nueva matriz para obtener el arreglo del cuadro 4. Con estos números, procediendo inductivamente, Wallis

	$p=0$	$p=1/2$	$p=1$	$p=3/2$	$p=2$	$5/2$	$p=3$
$q=0$	1	1	1	1	1	1	1
$q=1/2$	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	¿$\square$?	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	¿$\square$?	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$
$q=1$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$
$q=3/2$	1	¿$\square$?	$\frac{5}{2}$	¿$\square$?	$\frac{5\cdot7}{2\cdot4}$	¿$\square$?	$\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6}$
$q=2$	1	$\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{5\cdot7}{2\cdot4}$	$\frac{6\cdot8}{2\cdot4}$	$\frac{7\cdot9}{2\cdot4}$	$\frac{6\cdot8\cdot10}{2\cdot4\cdot6}$
$q=5/2$	1	¿$\square$?	$\frac{7}{2}$	¿$\square$?	$\frac{7\cdot9}{2\cdot4}$	¿$\square$?	$\frac{7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6}$
$q=3$	1	$\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{6\cdot8\cdot10}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6}$	$\frac{8\cdot10\cdot12}{2\cdot4\cdot6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Cuadro 4: En este arreglo se agregan las columnas y renglones para $p, q = 3/2, 5/2$. Los enteros $2, 3, 4, \ldots$ se han escrito en una manera que concuerden con los subsiguientes números en la columna y renglón correspondientes. El símbolo "¿$\square$?" se ha agregado para indicar que Wallis logra ver que de alguna forma debe aparecer $4/\pi$ en los espacios donde se muestra tal símbolo.

encuentra el patrón general. Una clave está en escribir los números en el renglón $q = 1$ para $p = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$, de tal forma que queden productos de números impares en el denominador y también productos de impares en el numerador, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
q=1,\ p=1/2 \quad &\mapsto \quad \frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\\
q=1,\ p=3/2 \quad &\mapsto \quad \frac{5}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 5}{1\cdot 3}\\
q=1,\ p=5/2 \quad &\mapsto \quad \frac{7}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 3\cdot 5}\\
&\vdots\\
q=1,\ p=(2m+1)/2 \quad &\mapsto \quad \frac{2m+3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2m+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}.
\end{aligned}$$

Lo mismo puede hacerse con el renglón correspondiente a $q=2$ y también con los p múltiplos de $1/2$,

$$\begin{aligned}
q=2,\ p=1/2 \quad &\mapsto \quad \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{1}\\
q=2,\ p=3/2 \quad &\mapsto \quad \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot 7}{1\cdot 3}\\
q=2,\ p=5/2 \quad &\mapsto \quad \frac{7\cdot 9}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot 7\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5}\\
&\vdots\\
q=1,\ p=(2m+1)/2 \quad &\mapsto \quad \frac{(2m+3)(2m+5)}{8}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot 7\cdot 9\ldots(2m+3)(2m+5)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)(2m+1)}.
\end{aligned}$$

Un patrón puede verse entonces para q entero y p múltiplo de $1/2$ en general. La segunda clave será encontrar el patrón para q entero y p entero, pero esto no es tan difícil de encontrar con la información que se tiene:

$$\begin{aligned}
q=1,\ p=1 \quad &\mapsto \quad \frac{4}{2}=1\cdot\frac{4}{2}\\
q=1,\ p=2 \quad &\mapsto \quad \frac{6}{2}=1\cdot\frac{4\cdot 6}{2\cdot 4}\\
q=1,\ p=3 \quad &\mapsto \quad \frac{8}{2}=1\cdot\frac{4\cdot 6\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6}\\
&\vdots\\
q=1,\ p=m \quad &\mapsto \quad \frac{2m+2}{2}=1\cdot\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2m+2)}{2\cdot 4\cdot 6\ \cdots\ \ 2m}.
\end{aligned}$$

Similarmente para $q=2$ y $p=1,2,3,\ldots$

$$\begin{aligned}
q=2,\ p=1 \quad &\mapsto \quad \frac{6}{2}=1\cdot\frac{6}{2}\\
q=2,\ p=2 \quad &\mapsto \quad \frac{6\cdot 8}{2\cdot 4}=1\cdot\frac{6\cdot 8}{2\cdot 4}\\
q=2,\ p=3 \quad &\mapsto \quad \frac{6\cdot 8\cdot 10}{2\cdot 4\cdot 6}=1\cdot\frac{6\cdot 8\cdot 10}{2\cdot 4\cdot\ 6}\\
&\vdots\\
q=2,\ p=m \quad &\mapsto \quad \frac{2m+4}{2}=1\cdot\frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)\cdot(2m+4)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ \cdots\ (2m)\cdot(2m+2)}.
\end{aligned}$$

Si actualizamos la información, por ejemplo para el renglón $q = 1, 2$; se tiene lo que se muestra en el cuadro 5. Sabiendo lo anterior, Wallis

	$p=0$	$p=1/2$	$p=1$	$p=3/2$	$p=2$	$5/2$	$p=3$
$q=1$	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}$	$1\cdot\frac{4}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot5}{1\cdot3}$	$1\cdot\frac{4\cdot6}{2\cdot4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7}{1\cdot3\cdot5}$	$1\cdot\frac{4\cdot6\cdot8}{2\cdot4\cdot6}$
$q=2$	1	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{1}$	$1\cdot\frac{6}{2}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot7}{1\cdot3}$	$1\cdot\frac{6\cdot8}{2\cdot4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot7\cdot9}{1\cdot3\cdot5}$	$1\cdot\frac{6\cdot8\cdot10}{2\cdot4\cdot\ 6}$

Cuadro 5: Valores actualizados para $q = 1$, escritos en forma de producto. Observe que para p de la forma $p/2$ y el número en la entrada correspondiente es cociente de impares multiplicado por $1/2$, mientras que para p entero, es el cociente de pares. En este caso se escribe 1, como factor para indicar que en otros renglones aparecerán otros números multiplicando los cocientes respectivos.

conjetura que el patrón de la forma en la que se alternan los productos de pares y nones de una columna a otra se repite incluso para $q = 1/2$, $p = 1/2$. Se tienen entonces tres patrones x·pares/nones, x·pares/pares y x·nones/pares, donde x es un número que multiplica a la fracción y estos patrones se alternan en renglones consecutivos en la misma columna, y en columnas consecutivas en el mismo renglón, tal y como puede observarse en el cuadro 6. Esta observación es relevante cuando el número x es igual a $\square$.

Habiendo determinado el patrón general, o mejor dicho, la posibilidad de calcular cualquier entrada de la matriz infinita, se puede ahora ver la propiedad principal de la tabla y, en particular, del renglón $q = 1/2$: *el cociente de dos entradas consecutivas en un mismo renglón se aproxima al número uno cuando p se hace grande.* Lo cual permite a Wallis establecer su genial conjetura:

$$\frac{\frac{\square\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdots}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdots}}{\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdots}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdots}} = 1,$$

de donde se obtiene la famosa fórmula

$$\frac{4}{\pi} = \square = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\ \ \cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdots} \tag{39}$$

Crítica al método de Wallis

Desde mi punto de vista, el método de Wallis para deducir inductivamente patrones generales de casos particulares es impecable. La meticulosidad para sus cálculos y su profunda capacidad para encontrar simetrías en lo más recóndito, por decir lo menos, es más que admirable. Después del formalismo acontecido a comienzo del siglo XX, el cual permeó todas las áreas de la matemática, tendrían que pasar muchos años y la invención de la computadora para poner de moda

	$p=0$	$p=1/2$	$p=1$	$p=3/2$	$p=2$	$5/2$	$p=3$	$\cdots$
$q=0$	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
$q=1/2$	1	$\square$	$1\cdot\frac{3}{2}$	$\square\cdot\frac{4}{3}$	$1\cdot\frac{3\cdot5}{2\cdot4}$	$\square\cdot\frac{4\cdot6}{3\cdot5}$	$1\cdot\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$q=1$	1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}$	$1\cdot\frac{4}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot5}{1\cdot3}$	$1\cdot\frac{4\cdot6}{2\cdot4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7}{1\cdot3\cdot5}$	$1\cdot\frac{4\cdot6\cdot8}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$q=3/2$	1	$\square\cdot\frac{4}{3}$	$1\cdot\frac{5}{2}$	$\square\cdot\frac{4\cdot6}{3\cdot5}$	$1\cdot\frac{5\cdot7}{2\cdot4}$	$\square\cdot\frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7}$	$1\cdot\frac{5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$q=2$	1	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{1}$	$1\cdot\frac{6}{2}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot7}{1\cdot3}$	$1\cdot\frac{6\cdot8}{2\cdot4}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5\cdot7\cdot9}{1\cdot3\cdot5}$	$1\cdot\frac{6\cdot8\cdot10}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$q=5/2$	1	$\square\cdot\frac{4\cdot6}{3\cdot5}$	$1\cdot\frac{7}{2}$	$\square\cdot\frac{4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7}$	$1\cdot\frac{7\cdot9}{2\cdot4}$	$\square\cdot\frac{4\cdot6\cdot8\cdot10}{3\cdot5\cdot7\cdot9}$	$1\cdot\frac{7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$q=3$	1	$\frac{15}{48}\cdot\frac{7}{1}$	$1\cdot\frac{8}{2}$	$\frac{15}{48}\cdot\frac{7\cdot9}{1\cdot3}$	$1\cdot\frac{8\cdot10}{2\cdot4}$	$\frac{15}{48}\cdot\frac{7\cdot9\cdot11}{1\cdot3\cdot5}$	$1\cdot\frac{8\cdot10\cdot12}{2\cdot4\cdot6}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Cuadro 6: Observe los patrones en columnas consecutivas para el renglón $q = 1/2$, donde se alternan los números $\square$·pares/nones y 1·nones/pares, lo cual es relevante para el cálculo de $\pi/4$.

nuevamente la experimentación como fuente válida para realizar descubrimientos en matemáticas, como se argumenta por ejemplo, en el libro de Borwein y coautores[37], con la salvedad de que la computadora de Wallis era su propio brillante cerebro.

Cuentan los biógrafos de Wallis que algún tiempo de su vida lo dedicó a descifrar códigos secretos de mensajes de sus enemigos políticos, quienes, por lo que hemos visto, seguramente estuvieron en grandes dificultades al tener como adversario a tan poderoso decodificador (véase por ejemplo Nunn 1910 *op. cit.*). Por otra parte, es claro que el gran decifrador no demostró nada con la rigurosidad que se requiere en la matemática actual. Sin embargo, sus ideas para el cálculo de áreas y volúmenes influyeron profundamente en el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, como queda de manifiesto en la destacada influencia que tuvo la obra de Wallis en el pensamiento de Newton, como veremos.

Para destacar los alcances de la obra del matemático, debemos dejar en claro que Wallis, en la Proposición 191, escribe $\square$ entre dos cotas exactas (página 179, *op. cit.*),

$$\frac{3^2\cdot5^2\cdots11^2\cdot13^2}{2\ \cdot4^2\cdots12^2\cdot14}\sqrt{1+\frac{1}{14}}<\square<\frac{3^2\cdot5^2\cdots11^2\cdot13^2}{2\ \cdot4^2\cdots12^2\cdot14}\sqrt{1+\frac{1}{13}}\ ,$$

[37] Jonathan M. Borwein David H. Bailey y Roland Girgensohn. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century and Experiments in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. Zentrum Mathematik, Technische Universit¨at M¨unchen, 2003

dado que además Wallis observa que estas estimaciones pueden mejorarse a voluntad aumentando el número de factores en el numerador y el denominador mediante la fórmula,

$$\frac{3^2 \cdot 5^2 \quad \cdots \quad (z-1)^2}{2 \quad \cdot 4^2 \quad \cdots \quad z}\sqrt{1+\frac{1}{z}} < \Box < \frac{3^2 \cdot 5^2 \quad \cdots \quad (z-1)^2}{2 \quad \cdot 4^2 \quad \cdots \quad z}\sqrt{1+\frac{1}{z-1}}$$

tenemos entonces que tales estimaciones son totalmente correctas desde el punto de vista contemporáneo y que, todavía más, si escribimos el signo "$\leq$" en lugar de "$<$", se puede ver que Wallis se adelantó al proceso de límite al concluir que se cumple la igualdad (39), argumentando que al tomar z valores arbitrariamente grandes, la diferencia entre las cantidades $\sqrt{1+\frac{1}{z}}$ y $\sqrt{1+\frac{1}{z-1}}$ resulta arbitrariamente pequeña y que, por lo tanto, se puede concluir la igualdad. No obstante, decir "se adelantó", no es exacto, ya que de acuerdo con Jacqueline Stedall[38], Wallis menciona como sustento de sus ideas la proposición 1 del libro X de *Los Elementos Euclides*.

Las cotas obtenidas por Wallis, perfectamente verificables con cálculos numéricos, permitirían a los matemáticos de generaciones posteriores, como la de Euler, calcular π con la precisión arbitraria que se requiriera[39].

[38] J. Stedall. *The Discovery of Wonders: Reading Between the Lines of John Wallis's Arithmetica infinitorum*. Archive for History of Exact Sciences, November 2001, Vol. 56, No. 1 (November 2001), pp. 1-28

[39] Años antes del nacimiento de Wallis, Ludolph van Ceulen había calculado π con treinta y cinco cifras decimales, para lo cual usó el método de Arquímedes duplicando 60 veces los lados de un cuadrado inscrito en un círculo, vea por ejemplo, el artículo de Cipra en *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Volumen 6 AMS, 2006.

Demostración moderna de la fórmula de Wallis

Por último, una observación, note que la fórmula (20) de Euler se puede escribir como

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\cdots.$$

Ahora substituya $z = \pi/2$ de donde, dado que $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$, se llega a

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 2}\right)\left(1-\frac{1}{2\cdot 2}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 2}\right)\left(1-\frac{1}{3\cdot 2}\right)\cdots\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2\cdot 2}\cdot\frac{3}{2\cdot 2}\cdot\frac{7}{3\cdot 2}\cdot\frac{5}{3\cdot 2}\cdots\end{aligned}$$

la cual es equivalente a la fórmula de Wallis que bien conocía Euler y que le daba una evidencia más de que su fórmula (15) era correcta.

Crítica a Wallis de sus contemporáneos

Una presentación amplia de las críticas adversas de los contemporáneos de Wallis se encuentra en el artículo de Jaqueline Stedall, que ya hemos citado antes (artículo que además contiene una presentación muy completa de los métodos de Wallis). La intención de esta sección es tratar de entender cómo la resistencia a lo novedoso es una fuerza mantenida ciertamente por quienes se instituyen voluntaria o involuntariamente como sensores, dada su fama y prestigio. En el caso de Wallis, fue Fermat, indiscutiblemente, el más acérrimo crítico de la obra del inglés. La más insistente resistencia de Fermat se expresa cuando afirma que todas las proposiciones de Wallis podrían ser demostradas *via ordinaria, legitima y arquimediana*[40]. Podemos decir en defensa de Wallis que si todos los matemáticos hubieran seguido sumisamente los métodos del genial Arquímedes, los avances del cálculo, en aquel momento en ciernes, se hubieran retrasado varios siglos más. En defensa de Fermat podemos decir que su comentario *...todas sus proposiciones pueden ser demostradas vía ordinaria, legítima y arquimediana con mucho menos palabras que las contenidas en su libro*, es exacto con respecto al número de palabras, nadie es más prolijo que Wallis. Sin embargo, el apego de Fermat a los métodos a la antigua (*à l' ancienne*, como él dice) son puramente reaccionarios y creo que el primero en abandonarlos sería el mismo Arquímedes, dada la brillantez del sabio griego y dada su misma manera desapegada de los que en su época eran "métodos tradicionales", por ejemplo con el uso que hace de herramientas de la física para medir áreas y volúmenes[41]. Si bien los métodos de Wallis podían o no ser demostrados dentro de una axiomática, digamos partiendo de la geometría de Euclides, bien podían corroborarse directamente mediante cálculos directos que es a lo que invita su método "inductivo". Veamos, alrededor del año 1610 (46 años antes de la publicación de la obra de Wallis), Ludolph van Ceulen[42] duplicando 60 veces el número de lados de un cuadrado inscrito en una circunferencia, mediante el método de Arquímedes, calculó 35 dígitos de π. Conocido este número de cifras, cualquiera podía comprobar si el método de Wallis daba los mismos resultados; de hecho, el número de operaciones con el método de Wallis es varios ordenes menor que el de van Ceulen para un mismo número de dígitos, como lo puede comprobar por sí mismo el lector con una simple estimación, por lo que el cálculo de Ceulen puede ser superado con el método de Wallis con menos operaciones aritméticas, aunque el número de operaciones no deja de ser muy grande y, por lo tanto, una hazaña como lo fue para 1600.

La disonancia cognitiva en los ámbitos del más alto nivel de la ciencia es una fuerza perniciosa que se opone al avance del conocimiento. En el ejemplo de Wallis, la resistencia a lo novedoso aflora en la crítica de Fermat, aunque no es demasiado maligna y, afortunadamente, no tuvo mayores consecuencias, debido, entre otras cosas, a que el área de influencia de Fermat no abarcaba Inglaterra. Por este motivo, las limitaciones y prejuicios de Fermat no se potenciaron y la obra de Wallis pudo influenciar mentes como la de el entonces joven Newton. Las limitaciones de Wallis no se potenciaron ni obstaculizaron a nadie, sino motivaron al desarrollo de nuevas ideas. Por ejemplo, la imposibilidad

[40] El comentario completo en francés es: *Ce n'est pas que je ne l'approuve, mais tuot ses propositions pouvant estre demostrées via ordinaria, legítima et Archimedea en beacoup moins de parolles, que n'en contient son livre. Je ne sçay pas, porquoy il a preferé cette maniere par notes algebraiques á la ancienne, qui est et plus convainquante, et plus elegante, ansi que j'espere luy faire voir á mon premier loisir.* Vea las referencias al interior del artículo de Stedall *op. cit.*

[41] Arquímedes. *Geometrical Solutions Derived from Mechanics; a Treatise of Archimedes*. Project Gutemberg 2005

[42] Barry Cipra. *Digits of Pi*. What's happening in the Mathematical Sciences, vol. 6, AMS

de Wallis de calcular $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, motivo a Newton a encontrar el desarrollo en serie para $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, y otras funciones más generales (vea por ejemplo la fórmula (62) y las fórmulas subsecuentes), y además despertó la curiosidad de Newton para que lograra generalizar el método de Wallis para el cálculo de áreas, lo que llevo al desarrollo sin precedentes del Cálculo Diferencial e Integral, pero partiendo Newton siempre de las ideas de Wallis, quien lejos de obstaculizar a Newton se convirtió en editor de sus obras, nada menos, aunque con cierta dosis de patrioterismo, cabe mencionar.

Si para algo sirve el estudio de la historia es para evitar que se repitan errores; en este caso habría que evitar la obstaculización del progreso por personajes o instituciones con influencia y poder. Si revisamos las acciones de los científicos convertidos en censores de la era soviética, por ejemplo con el sabotaje a Belousov y sus reacciones periódicas, cuando el bloqueo de la burocracia del régimen soviético tuvo entre sus consecuencias nefastas llevar a Belousov a abandonar completamente la ciencia[43]. La burocracia llegó al extremo de informar a Belousov que publicaría sus investigaciones cuando explicara por qué no era posible que ocurriera lo que decía que ocurría, ¡pero las reacciones periódicas ocurren! como cualquiera puede reproducir con el debido cuidado en un laboratorio[44].

Podría llega a pensarse que el nefasto bloqueo de los poderosos y famosos solo ocurre con gobiernos dictatoriales, pero no es así; este fenómeno se repite hasta en el presunto mundo libre, como lo prueba el rechazo por uno de los químicos mas destacados del siglo XX al descubrimiento de los cristales cuasiperiódicos por Shechtman[45]. En esta nuestra época, luminosa y obscura al mismo tiempo, en la que intereses comerciales de muchos grupos editoriales los lleva a publicar artículos con información falsificada[46] en lugar de ciencia, como lo ocurrido a Shechtman. Bien harían las universidades de todo el mundo en recuperar las publicaciones científicas y abrirlas a toda crítica académica para evitar que la gente de ciencia tenga que recurrir a editoriales dirigidas por personas sin escrúpulos cuyo único interés es enriqueserse con el trabajo de otros.

[43] Arthur T. Winfree. *The prehistory of the Belousov-Zhabotinsky oscillator*. Journal of Chemical Education, 61(8), 661

[44] Irina Barzykina, *Chemistry and Mathematics of the Belousov-Zhabotinsky Reaction in a School Laboratory*, Journal of Chemical Education, v97 n7 p1895-1902 Jul 2020

[45] Daniel Shechtman. *Quasi-periodic crystals-the long road from discovery to acceptance*. Rambam Maimonides Medical Journal, 30 Jan 2013, 4(1):e0002

[46] El dos veces premio nobel de química Linus Pauling, llegó a decir "no existen los cuasi cristales, solo los cuasi científicos", vea Shechtman *op. cit.*.

A continuación se presenta la traducción al español de algunas páginas del libro de Wallis estudiado en este capítulo.

Traducción del latín del texto original de Wallis[47]: Aritmética del infinito o nuevo método para investigar la cuadratura de las curvas y otros problemas más difíciles

[47] Johan Wallis. *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata, (1656)*

Proposición I. Lema.

Si se proponen series de cantidades aritmético-proporcionales (*sic*) (o de acuerdo con la sucesión natural de números), continuamente crecientes (piense en $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$), comenzando con el punto o 0 (cifra o cero), el propósito es investigar qué relación guarda el total de todos ellos con la suma de iguales tomando el mayor de ellos[48].

[48] Se usa la notación del original así como el cambio en el tamaño del tipo de letra con el cual Wallis, y los editores originales, separan los comentarios del texto principal utilizando tamaño normal que contrasta con un tipo más pequeño.

Se investiga de manera simplísima en estos y en subsecuentes problemas semejantes, el asunto mismo a realizar durante algún tiempo, se observa la razón de los resultados y se comparan entre sí, de modo que por inducción pueda finalmente conocerse la proposición universal.

Es entonces, a modo de ejemplo, $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20} = \frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42} = \frac{1}{2}$.
Y del mismo modo, cuantos se quiera agregar, se obtendrá siempre como razón un medio[49] y entonces (se obtiene)

[49] En el original *ratio subdupla*, es decir $\frac{1}{2}$

Proposición II. Teorema.

Si se suman series de cantidades aritméticamente proporcionales (o de acuerdo con la sucesión natural de números), que crecen continuamente comenzando en el punto o cifra 0 y ya sea en número finito o infinito (lo que no será causa de discriminación[50]) será ésta (comparada) con una serie de iguales, tomando el mayor, como 1 es a 2.

[50] Es decir, el que se considere una cantidad finita o infinita de términos no será causa para invalidar la afirmación, lo cual haría levantar la ceja a cualquier matemático después de Weierstrass.

Por supuesto, si el primer término es 0, el segundo es 1 (de lo contrario se requerirá modificar) y el último fuera l se tendrá la suma $\frac{l+1}{2}l$ (será también, según el caso, el número de términos $l+1$) o (dado el número de términos a, cualquiera que sea el segundo término), $\frac{1}{2}al$.

Proposición III. Corolario.

Se concluye que[51] *triángulos con paralelogramos (sobre bases iguales e igual altura) son como* 1 *a* 2.

[51] En el original dice "Triangulum ad Parallelogrammum est 1 ad 2" se sobreentiende que habla de comparar las áreas.

Entonces los triángulos constan de infinitas rectas paralelas casi aritméticamente proporcionales (*sic.*) que inician en un punto y cuyo máximo es la base, (como se mostró en pr. 1 y 2 en nuestro libro de

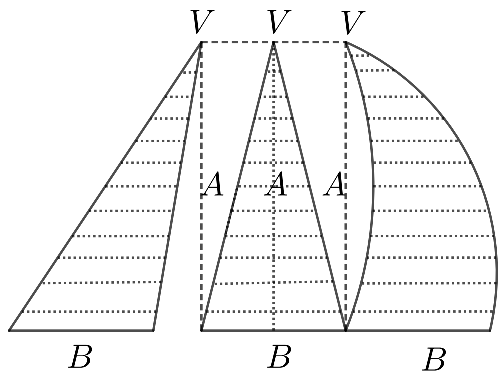


Figura 5: Figura similar al del original de Wallis: Proposición III. La intrigante figura curvilínea aparece tal cual en el original, sugiere o indica que el mismo argumento para calcular áreas de triángulos se aplica a tal clase de figuras.

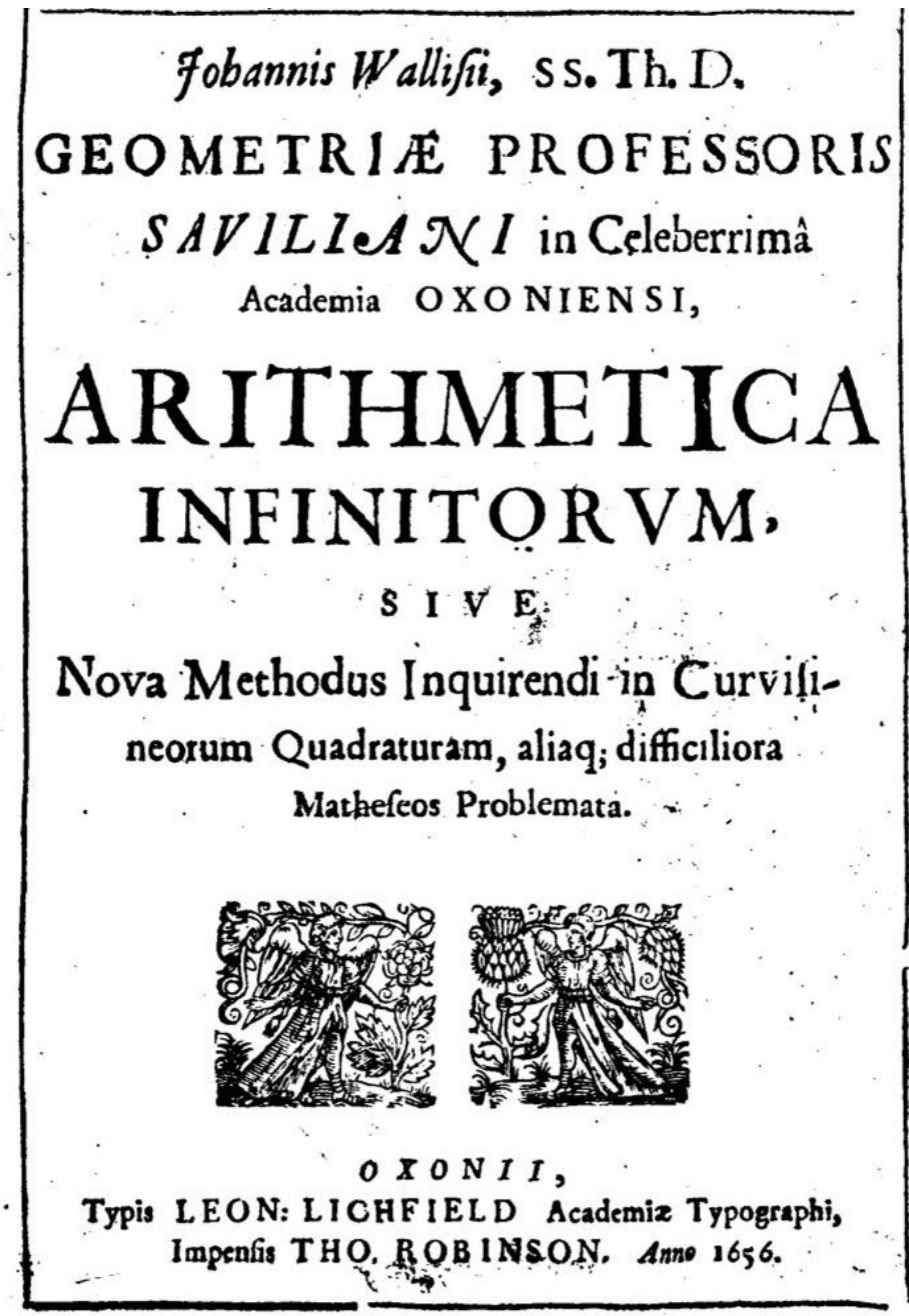
secciones cónicas (*sic.*)), los paralelogramos con bases iguales también (como es evidente). Por lo tanto, por tal motivo, estos son como 1 a 2 (por la precedente (proposición)). Lo que estaba por demostrarse.

Proposición XIX. Lema.

Si se propone series de cantidades en razón aritmética-proporcional *duplicada* (*sic*) (o de acuerdo con la serie de los cuadrados de los números), que crece continuamente que comienza en el punto 0 (pensada como $1, 4, 9, 16, \ldots$) el propósito es investigar ¿cuál es la razón de esta serie con la de la suma de iguales tomando el mayor de ellos?

Se hace la investigación por medio de inducción (como en la proposición I) y se tendrá, $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$, $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$, $\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$, $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$, $\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}$. Y así se continúa. La razón que se obtiene es en todas partes mayor que un *subtriple* (*sic*), o $\frac{1}{3}$. Sin embargo, el exceso decrece perpetuamente cuando se aumentan el número de términos, obtenidos $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$, etcétera, dado que aumenta el denominador de la fracción, o el resultado de la razón, agrego que en cada lugar será el número de seis veces (como es evidente), de modo que el exceso de la razón original quede por encima de un tercio[52], seis veces el número de términos después de 0.

[52] Se tradujo "subtriple que tiene la unidad", simplemente como lo que quiere decir, o sea $1/3$.



Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA
INFINITORUM,
SIVE:
Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.

Texto original de Wallis *op. cit.* Créditos de la digitalización: *Google Books* http://books.google.com/

Arithmetica Infinitorum.

SIVE

NOVA METHODUS INQUIRENDI in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheſeos Problemata.

PROP. I. *Lemma.*

SI proponatur ſeries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (ſive juxta naturalẽ numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel o (ciphra, ſeu nihilo) inchoatarum, (puta ut o, 1, 2, 3, 4. &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciſſimus inveſtigandi modus, in hoc & ſequentibus aliquot Problematis, eſt, rem ipſam aliquouſq; præſtare, & rationes prodeuntes obſervare atq; invicem comparare; ut inductione tandem univerſalis propoſitio innoteſcat.

Eſt igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42} = \frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla. Adeóq; ----

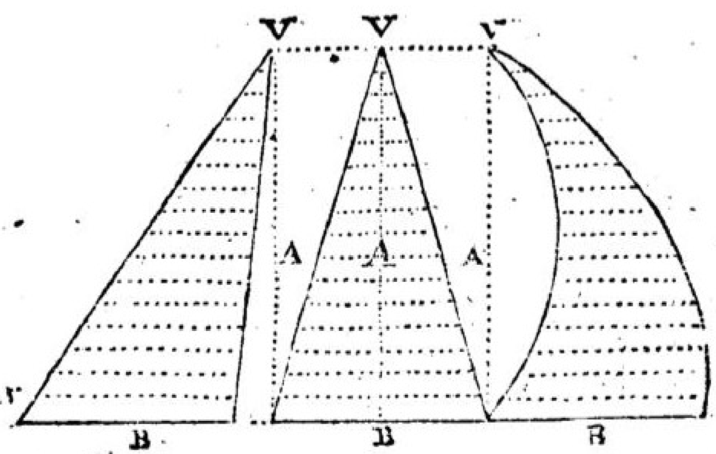
PROP. II. *Theorema.*

SI sumatur series quantitatum Arithmeticè proportionalium (sive juxta naturalem numerorum consecutionem) continuè crescentium, a puncto vel o inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim discriminis causa erit,) erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

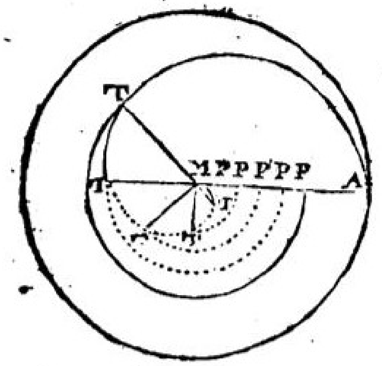
Nempe, si primus terminus sit o, secundus 1, (nam si secus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l erit summa $\frac{l+1}{2}l$. (erit enim, eo casu, numerus terminorum $l+1$.) vel, (posito numero terminorum a, quantuscunq; sit terminus secundus) $\frac{1}{2}al$.

PROP. III. *Corollarium.*

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum (super æquali base, æquè altum,) est ut 1 ad 2.*



Triangulum



MT, &c. ſint ut 1, 2, 3, 4, &c. (per conſtructionem ſpiralis:) & propterea curvæ MT, MT, &c. (iſtis rectis conterminæ) ſint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1, 4, 9, 16, &c. erunt ipſa ſegmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4 − 1, 9 − 4, 16 − 9; Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ ſpiralis doctrina, continuis quatuordecim propoſitionibus jam tradita, eſt apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus penitus omiſſa: Neſcio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX. *Lemma.*

SI proponatur ſeries Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continuè creſcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut o, 1, 4, 9, 16, &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) eritq; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$. $\frac{0+1+4+9+16=30}{10+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} = \frac{9}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$.

$$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252}=\frac{13}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}.$$ Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubiq; major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuò decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$ &c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet,) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post 0, adeoq; ----

PROP. XX. *Theorema.*

SI proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto vel 0 inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maxime æqualium, subtriplam superabit; eritq; excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post 0; sive, quam habet radix quadratica termini primi post 0, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (si terminus post 0 primus ponatur 1, & ultimi latus l) $\frac{l+1}{3}l^2+\frac{l+1}{6l}l^2$. Vel (posito numero terminorum a, & ultimi latere l,) $\frac{a}{3}l^2+\frac{a}{6a-6}l$.

Patet ex Prop. præced.

Cùm autem crescente numero terminorum, excessus ille supra rationē subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoq; ----

PROP.

Euler descubre la suma de series finitas mediante el término general

En un artículo de 1741, Euler[53] se interesa en usar series de Maclaurin para calcular sumas de series finitas cuyo término general se puede escribir en términos de una función. En la época de Euler son bien conocidas las sumas de las series geométricas y aritméticas[54], pero Euler fue mucho más allá de lo conocido, de hecho, encontró una fórmula general para cualquier suma finita, como veremos. Por ejemplo, en la serie $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, el término general se puede describir con la función $f(x) = x^2$, poniendo $x = n$, la fórmula que da Euler para la suma S, es

$$S = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

Al trabajar ciertas fórmulas en los cursos universitarios, los estudiantes aprenden la técnica de inducción matemática, pero no quedan convencidos, en absoluto de la validez de las fórmulas sólo con el argumento inductivo. Esto ocurre, dado que en realidad su interés está mayormente en saber de dónde se obtienen tales fórmulas, más que en saber cómo demostrarlas. la deducción de fórmulas de sumas de expresiones algebraicas no es trivial. Si bien, algunas fórmulas pueden ser deducidas fácilmente sin las técnicas de Euler, veremos algunas que, sin la técnica que se estudia en este capítulo, están fuera del alcance de lo que puede hacerse con operaciones e intuición elementales.

En el párrafo 12 del *Inventio sumae* (*op. cit.*) escribe Euler: Sea

$$S = A + B + C + D \cdots + X(x). \tag{40}$$

Claramente $S = S(x)$ y deberíamos escribir realmente, para ser más claros, la fórmula (40) como

$$S(x) = X(1) + X(2) + \cdots + X(x-1) + X(x), \tag{41}$$

de donde, siguiendo a Euler, al sustituir en (41), $x - 1$ en lugar de x, se tiene

$$\begin{aligned} S(x-1) &= X(1) + \cdots + X(x-1) \\ &= S(x) - X(x), \end{aligned} \tag{42}$$

[53] Leonhard Paul Euler. *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*. (1741). Euler Archive - All Works. 47., b

[54] Una serie $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ es *aritmética* si para toda n la diferencia $a_{n+1} - a_n = d$, donde d es una constante y es *geométrica* si el cociente $a_{n+1} - a_n = r$, donde $r \neq 1$ es una constante. Se conocen las fórmulas para las sumas

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{(n+1)(a_0 + a_n)}{2},$$

si la serie es aritmética y

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si la serie es geométrica.

Pero además, el gran matemático dispone de la serie de Taylor para $S(x-1)$ (aquí presentada con notación distinta a la del original) dada por,

$$S(x-1) = S(x) - S'(x) + \frac{1}{2!}S''(x) - \frac{1}{3!}S'''(x) + \cdots. \tag{43}$$

Se requiere ahora un breve paréntesis, la fórmula (43), la ha obtenido previamente (en el párrafo 8 *op. cit.*) para cualquier expresión de la forma $X(x+a)$, donde $X(x) = x^m$, recuerde que nos interesan las potencias de números. Por ejemplo, en el párrafo 6 escribe, para $X(x+a) = (x+a)^m$

$$(x+a)^m = x^m + \frac{max^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1)}{2!}a^2x^{m-2} + \cdots, \tag{44}$$

expresión que, como recordará el lector, era conocida por Newton y Taylor y de particular interés cuando m no es $1, 2, 3, \ldots$, sino posiblemente un número negativo o razón de enteros. Ahora regresamos a nuestra fórmula (43), la cual es obtenida de (44) poniendo $a = -1$, es decir, del desarrollo de Taylor

$$S(x+a) = S(x) + \frac{a}{1}S'(x) + \frac{a^2}{2!}S''(x) + \cdots$$

poniendo $a = -1$, se llega a la fórmula (43) y comparando (42) y (43) se obtiene

$$X(x) = \frac{1}{1}S'(x) - \frac{1}{2!}S''(x) + \frac{1}{3!}S'''(x) + \cdots. \tag{45}$$

Observe que de alguna manera Euler ha invertido la ecuación que ponía a S en términos de X (en la ecuación (41)), para tener X en términos de S y sus derivadas, y pasará, a partir de este momento, de una expresión a otra hasta obtener el resultado que desea mediante fórmulas de recurrencia, así en el párrafo 15 escribe: Póngase entonces

$$S'(x) = \alpha X(x) + \beta X'(x) + \gamma X''(x) + \cdots, \tag{46}$$

donde $\alpha, \beta, \ldots$ son constantes por determinar. Entonces integrando la ecuación anterior

$$S(x) = \alpha \int X\,dx + \beta X + \gamma X' + \cdots \tag{47}$$

Integrando (45)

$$\int X dx = S(x) + \ldots$$

Ahora, derivando (46)

$$\begin{array}{rcl} S''(x) & = & \alpha X' + \beta X'' + \cdots \\ S'''(x) & = & \alpha X'' + \beta X''' + \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Sustituyendo estas series en (45) se tiene

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{1}{1}S'(x) - \frac{1}{2!}S''(x) + \frac{1}{3!}S'''(x) + \cdots \\ &= \frac{1}{1}(\alpha X + \beta X' + \gamma X'' + \cdots) + \\ & \quad -\frac{1}{2!}\left(\alpha X' + \beta X'' + \cdots\right) + \\ & \quad +\frac{1}{3!}\left(\alpha X'' + \beta X''' + \cdots\right) + \ldots, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$0 = (\alpha - 1)X + \left(\beta - \frac{1}{2!}\alpha\right) X' + \left(\gamma - \frac{1}{2!}\beta + \frac{1}{3!}\alpha\right) + \cdots,$$

y aquí aparecen un poco escondidos y salvo factores constantes, los famosos números de Bernoulli[55]

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= \frac{1}{2!}\alpha \\ \gamma &= \frac{1}{2!}\beta - \frac{1}{3!}\alpha \\ \delta &= \frac{1}{2!}\gamma - \frac{1}{3!}\beta + \frac{1}{4!}\alpha \\ &\vdots \end{aligned} \tag{48}$$

para Euler este logro no pasa desapercibido y escribe[56]: *Entonces debemos estar contentos por nuestro sistema de que la serie de coeficientes continúe libremente, lo cual se puede obtener fácilmente a partir de la ley de progresión*, donde se refiere, por supuesto, a las fórmulas en (48). Finalmente se llega a la fórmula para la suma, utilizando los coeficientes de (48) y la ecuación (47)

$$S(x) = \int X(x)dx + \frac{X(x)}{2!} + \frac{X'(x)}{3! \cdot 2} - \frac{X^{(3)}(x)}{6!} + \frac{X^{(5)}(x)}{7! \cdot 6} + \cdots \tag{49}$$

note que no aparecen derivadas pares en la expresión anterior dado que los números de Bernoulli correspondientes son cero. Establecida la fórmula (49), Euler aclara, apropiadamente, que al calcular $\int X dx$ se debe agregar una constante que $S(0) = 0$ y procede a dar ejemplos.

Ejemplo 1 (párrafo 21 *op. cit.*). Sea $X(x) = x$, la serie a sumar es $1 + 2 + \cdots + x = S(x)$. Dado que $\int x\, dx = x^2/2 + c$ y dado que $X' = 1$, $X'' = 0$, se tiene de la fórmula $S(x) = \dfrac{x^2}{2} + c + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{1}{3!2}$. Al poner $S(0) = 0$ se tiene que $c = -1/12$ y, finalmente, se llega a la fórmula[57] $S(x) = \dfrac{x^2 + x}{2}$.

Ejemplo 2 (párrafo 21 *op. cit.*). Si más aun, $X(x) = x^2$ la serie correspondiente será $S(x) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + x^2$, se tiene $\int x^2\, dx =$

[55] Los números de Bernoulli B_k se obtienen mediante los polinomios de Bernoulli $B_k(t)$ los cuales satisfacen las relaciones de recurrencia siguientes:

$$\begin{aligned} B_0(t) &= 1 \\ B_k'(t) &= kB_{k-1}(t) \quad (k \geq 1) \\ B_k &= B_k(0) \quad (k \neq 1) \\ B_{2m+1} &= 0 \quad (m \geq 1). \end{aligned}$$

[56] Pro instituto ergo nostro contenti esse debemus seriem coefficientum quousque libuerit continuasse, id quod ex lege progressionis facile perfici potest.

[57] O bien, poniendo $x = n$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$x^3/3 + c$, $X' = 2x$, $X'' = 2$, $X''' = 0$ y así la suma de la serie es[58] $S(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

Con la técnica establecida se puede ir más allá de lo ya conocido, por ejemplo con $X(x) = x^n$, Euler escribe

$$1 + 2^n + 3^n + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2 \cdot 6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{4!\,30} + \cdots - \frac{n(n-1)\cdots(n-14)\cdot 3617\,x^{n-15}}{16!\,510} + \cdots$$

Fórmula que Wallis le hubiera agradecido algunos años antes[59]. Enseguida Euler da una tabla de sumas para $1 + 2^n + 3^n + \cdots + x^n$ hasta $n = 16$ (párrafo 23 *op. cit.*). Pero Euler no ha hecho todo este trabajo para quedarse con algo tan convencional[60] y procede a estudiar la suma finita de series de racionales (párrafo 25 *op. cit.*) por ejemplo $X(x) = 1/x$. Entonces $\int X dx = \int 1/x dx = \log x + C$ y $X' = -1/x^2$, $x''' = -1 \cdot 2 \cdot 3/x^3$, etcétera. Así concluye que

$$S(x) = C + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x} + \frac{1}{120x^4} + \cdots$$

Euler aclara que la constante C no puede eliminarse y decide estimarla dado que conoce la suma $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/10$, así como también conoce el $\log 10$ encuentra que

$$C = 0.5772156649015329$$

Esta constante C que hemos deliberadamente escrito con mayúscula, es la famosa constante de Euler-Mascheroni[61] y todos los dígitos son correctos salvo el último. Debo agregar que esta constante es una de las más misteriosas actualmente y no se ha determinado aun si es un número racional o irracional, además de muchos otros misterios. Euler procede entonces a calcular las sumas finitas de los recíprocos de los naturales, se sabe que la suma infinita diverge, pero está decidido a calcular algunos términos y lo hace para $x = 10, 100, \ldots, 1\,000\,000$, por ejemplo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1\,000\,000} = 14.3927267228657236$$

con lo cual es claro que si bien la serie diverge, lo hace muy lentamente.

Muchas otras consideraciones interesantes contiene el artículo que estamos estudiando, pero es de interés para conocer el grado de conocimiento de Euler antes de llegar a la suma del capítulo anterior de $\pi/6$, la estimación de sumas finitas de la serie de los recíprocos de los cuadrados (párrafo 31 *op. cit.*). Considerando la serie $1 + 1/4 + 1/9 + \cdots 1/x^2$, se tiene $X(x) = 1/x^2$, $\int 1/x^2 dx = -1/x$, $X' = -1/x^3$, $X''' = -2 \cdot 3 \cdot 4/x^5$, etcétera. Concluye que

$$S = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \cdots + \frac{7}{6x^{15}} + \cdots$$

[58] O bien, poniendo $x = n$,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[59] Como el lector puede observar la fórmula puede usarse para calcular mediante particiones la integral de x^n por el método de Wallis.

[60] Bernoulli, previamente había calculado una tabla hasta $n = 10$ que aparece la página 97 en el "Ars coniectandi, opus posthumus", Bernoulli, Jakob, Basileae, 1713, ETH-Bibliothek Zürich, Shelf Mark: Rar 4983,Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-9001.

[61] Actualmente la constante de Euler-Mascheroni se denota por γ y se define como

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).$$

donde C *es una constante que debe determinarse como un caso especial*[62]. Procede el gran matemático a calcular C tomando $x = 10$ en la fórmula anterior, de donde determina que

$$C = 1.64493406684822643647$$

lo que da el valor exacto de $C = \pi^2/6$ con veinte cifras decimales, ¡lo que evidencia que Euler sabía lo que decía cuando calculó la suma infinita!, como se vió en el capítulo anterior. Pero más aún, sabía el valor de π, antes de ser capaz de calcularlo, dado que Wallis (vea la fórmula (26)), encontró una forma eficiente de calcularlo mucho antes que Euler. Las citas de Euler a la obra de Wallis, solo en el artículo *Inventio sumae* se refieren a los factoriales a los cuales llama "progresión hipergeométrica dada por Wallis: $2, 6, 24, 120, 720, 5040$" (párrafo 17, página 15 *op. cit.*), lo cual es una pequeña muestra del conocimiento que tenía Euler de la Obra de Wallis.

[62] Ubi constantis quantitas ex casu speciali debet determinari

Validez de la argumentación de Euler

En la matemática contemporánea, la fórmula de aproximación de una suma de una serie finita mediante integrales del término general está contenida en el siguiente teorema[63].

[63] Kelly W. G. y Peterson A. C. *Difference Equations*. Academic Press 1991

Teorema [Fórmula para sumar de Euler-Mascheroni]. Suponga que la derivada de orden $2m$ de $y(t)$ es continua en $[1, n]$, para algunos enteros $m \geq 1$ y $n \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} y(k) &= \int_1^n y(t)\,dt + \frac{y(n)+y(1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{(2i)!}(y^{(2i-1)}(n) - y^{(2i-1)}(1)) \\ &\quad - \frac{1}{(2m)!}\int_1^n y^{(2m)}(t) B_{2m}(t - \lfloor t \rfloor)dt,\end{aligned}$$

donde $\lfloor t \rfloor$ representa la función "mayor entero menor o igual a t" y $B_{2m}(t)$ son los polinomios de Bernoulli dados por las fórmulas

$$\begin{aligned}B_0(t) &= 1 \\ B'_k(t) &= kB_{k-1}(t) \quad (k \geq 1) \\ B_k &= B_k(0) \quad (k \neq 1) \\ B_{2m+1} &= 0 \quad (m \geq 1).\end{aligned}$$

La demostración del teorema anterior (vea por ejemplo la página 35 del libro de Kelly y Peterson, *op. cit.*) requiere solo integración por partes y las propiedades de los polinomios de Bernoulli enunciadas en el teorema.

A continuación presento mi versión de las partes relevantes del artículo original de Euler[64] cuyo título original es "Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali", el cual se traduce literalmente como: Invención de cada suma de una serie dado el término general. Desafortunadamente, la palabra "inventio", invención, ha perdido el sentido en español a lo que, a mi parecer, se aproxima mejor con el titulo actual. El análisis realizado en las secciones anteriores comienza en el párrafo 12, sin embargo se incluye la traducción desde el primer párrafo hasta el tercero, ya que proporcionan el contexto histórico dentro del cual se inscribe este artículo. Es posible pasar directamente al párrafo 12 sin mayores contratiempos dado que los párrafos 4 a 11 tratan temas del Cálculo diferencial e integral incluido en los cursos universitarios estándar.

[64] Leonhard Paul Euler. *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*. (1741). Euler Archive - All Works. 47., b

Traducción del latín del artículo original de Euler: Fórmula para calcular cada suma de una serie dado el término general

1. Dado que en la disertación anterior expuse el método geométrico de la suma de series, donde había considerado diligentemente e investigado analíticamente el mismo método de suma. Vi que aquello que expuse geométricamente se puede deducir de un método particular de suma, que ya mencioné hace tres años en la diferenciación de la suma de series. Pero después, no pensé más en eso. Por lo tanto, después de haber investigado a fondo el poder del método analítico, descubrí que contenía no solo la fórmula geométrica que había sido descubierta, sino también que, con su ayuda, perfeccioné aún más, mediante la adición de varios términos, de forma que, al último, se presentó la suma absoluta y verdadera. Sin embargo parece sumamente difícil encontrar los mismos términos de forma geométrica.

2. Sin embargo, en esa disertación sobre la suma de series, si había un término general de alguna serie fuera x y su índice n, presenté la siguiente forma de forma universal para el término de la suma[65]

$$\int xdn + \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\frac{dx}{dn} - \frac{1}{720}\frac{d^3x}{dn^3} + \cdots$$

a partir de lo cual los diferenciales de x, dado que se supone[66] que x está dado por n, serán destruidos por las potencias del diferencial dn, que se supone constante; de tal manera que se obtenga una suma algebraica, si efectivamente xdn admite integración. En la integración de xdn, se debe agregar una constante tan grande que toda la expresión desaparezca cuando $n = 0$.

[65] La fórmula original de Euler es $\int xdn + \frac{x}{2} + \frac{dx}{12dn} - \frac{d^3x}{720dn^3}$, se escribe en el texto principal en notación moderna para facilitar la lectura, no olvide el lector que $x = x(n)$.

[66] i.e., se entiende aquí que x es función de n.

3. Por tanto, decidí profundizar en esta fórmula y su uso con mayor

precisión en este ensayo. En primer lugar explicaré el método mediante el cual obtuve esa fórmula: porque el análisis que he utilizado en este asunto es singular y proporciona una serie de puntos de análisis bastante sobresalientes, en parte nuevos y en parte ya conocidos, pero que, que yo recuerde, nunca se han demostrado de manera suficientemente clara.

Los párrafos 4 a 11 tratan del cálculo diferencial e integral contenido en los primeros cursos universitarios, por lo tanto se pueden omitir y pasar directamente al párrafo 12.

4. De la naturaleza del cálculo infinitesimal se sigue que si fuera y, de alguna manera, dado por x y ciertas constantes, y si en lugar de x se pone $x + dx$ entonces y se convierte[67] en $y + dy$. Si x aumenta aún más con el elemento dx, o x cambia[68] en $x + 2dx$, entonces en lugar de y se tendrá[69] $y + 2dy + d^2y$. Si de nuevo x crece en el elemento dx, y se transforma en $y + 3dy + 3d^2y + d^3y$, donde los coeficientes son los mismos que en las potencias del binomio. De aquí se sigue que si en lugar de x se pone $x + mdx$, entonces y deberá tener la forma: $y + \frac{m}{1}dy + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}d^2y + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3y + \cdots$.

5. Ahora sea m un número infinitamente grande para nuestra teoría, porque mdx puede denotar una cantidad finita, poniendo $x + mdx$ en lugar de x será el valor que y tendrá el siguiente: $y + \frac{m}{1}dy + \frac{m^2}{1\cdot 2}d^2y + \frac{m^3}{1\cdot 2\cdot 3}d^3y + \frac{m^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d^4y + \cdots$. Si ahora se hace $mdx = a$ o $m = \frac{a}{dx}$, si por x se pone $x + a$, se llega a que y tiene la forma $y + \frac{a}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$, en la cual todos los términos son de magnitud finita[70].

6. Ahora la misma serie, cuyo mismo valor y se exhibe transformado, si en lugar de x se pone $x + a$, lo que fue primeramente producido por Cl. Taylor[71] en "Methodo Increm. inu." y que a muchos sobresalientes usos se aplicará. Primero se sigue, por supuesto, la elevación a cualquier potencia de un binomio. Si se quiere el valor de $(a + a)^m$ se pone $y = x^m$ y sera $(x + a)^m$ el valor de y, si en lugar de x se pone $x + a$, ya que se tiene $dy = mx^{m-1}dx$, $d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2$ y, por lo tanto, se tiene $(x + a)^m = x^m + \frac{max^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1)a^2x^{m-2}}{1\cdot 2} + \cdots$.

7. Taylor continúa con esta serie para encontrar la raíz de cualquier ecuación, lo que logra de la siguiente manera. Si una ecuación cualquiera a saber $Z = 0$, que envuelve la incógnita z, donde Z depende de la incógnita z. Luego toma x como un valor casi igual al propio z, y la cantidad de Z que se produce si x se pone en lugar de z , la pone igual a y, de modo que $y = 0$, si x fuera el verdadero valor de z.

8.

[67] En notación moderna, si $y = f(x)$, entonces, bajo las condiciones apropiadas de diferenciabilidad,

$$y(x + dx) = f(x) + f'(x)dx = y + dy.$$

[68] La notación $x + 2dx$, y en general, $x + mdx$ están completamente en desuso.

[69] En este caso, sustituyendo como en la nota anterior, en el argumento de y: $x + dx$,

$$\begin{aligned} y(x + dx) + d(y(x + dx)) &= y(x) + dy + d(y + dy) \\ &= y + 2dy + d^2y. \end{aligned}$$

[70] Aquí Euler con una notación en desuso llega a la fórmula de Taylor que presenta y cita en el siguiente párrafo.

[71] Brook Taylor. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londini : Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino, 1715

12. Establecido lo anterior, temas menos pertinentes con el asunto que se persigue, regreso a las series. Sea entonces la serie $A+B+C+D+\cdots+X$, en la cual A denota al primer término, B al segundo y X a aquel término cuyo índice es x; de esta forma X será el *término general*[72] de la serie propuesta. Póngase también la suma de tal desarrollo $A+B+C+D+\cdots+X=S$, donde será S la suma final[73], aunque tanto S como X, si la serie fuera determinada, estarán compuestas de x y de constantes.

[72] El "término general" es el que define la suma.

[73] Aquí, "terminus summatorius" se traduce como "suma final", i. e. la suma de la serie.

13. Ya que S exhibe la suma de todos los términos de la serie, los cuales dependen de x, si en S en el lugar de x se sustituye $x-1$, se tendrá en la suma, que termina antes del último término X, quitando la X. Por lo tanto, con tal sustitución se pasará de S a $S-X$. Si se compara entonces esta con la suma anterior, se tiene S=y y $a=-1$, por lo tanto, el valor de S será transformado en $S-X$ y será igual[74] a $S-\frac{1}{1}\frac{dS}{dx}+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2S}{d}x^2-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3}+\cdots$

[74] Esto se obtiene por la fórmula en el párrafo 5.

14. Entonces, con la ayuda de esta ecuación, el término general de cada serie se encuentra a partir del término de suma dado. Ahora bien, como por lo demás es facilísimo, sería superfluo utilizar este método para encontrar el término general a partir de la suma. Esto sucede de manera más conveniente con esta ecuación, de modo que se desarrollan los términos individuales y, por lo tanto, se puede acomodar a usos particulares. Conocida la serie $X=\frac{1}{1}\frac{dS}{dx}-\frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2S}{d}x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3S}{dx^3}-\cdots$, entonces el método permite invertir y a partir de término general X se determina la suma S, lo cual es el máximo objetivo de este artículo.

15. Por lo tanto, supongamos $\frac{dS}{dx}=\alpha X+\beta\frac{dX}{dx}+\gamma\frac{d^2X}{dx^2}+\delta\frac{d^3X}{dx^3}+\epsilon\frac{d^4X}{dx^4}+\cdots$, también sea $S=\alpha\int Xdx+\beta X+\gamma\frac{dX}{dx}+\delta\frac{d^2X}{dx^2}+\cdots$. Se tendrá entonces $\frac{d^2S}{dx^2}=\alpha\frac{dX}{dx}+\beta\frac{d^2X}{dx^2}+\gamma\frac{d^3X}{dx^3}+\cdots$, y $\frac{d^3S}{dx^3}=\alpha\frac{d^2X}{dx^2}+\beta\frac{d^3X}{dx^3}+\gamma\frac{d^4X}{dx^4}+\cdots$, y $\frac{d^4S}{dx^4}=\alpha\frac{d^3X}{dx^3}+\beta\frac{d^4X}{dx^4}+\cdots$, y además $\frac{d^5S}{dx^5}=\alpha\frac{d^4X}{dx^4}+\cdots$, etcétera.

16. Luego, se sustituyen estas series en el lugar del término superior de la serie, y los términos similares se comparan entre sí, y de ninguna manera se suponen iguales. Hecho esto, se determinarán los coeficien-

tes α, β, γ etcétera, de tal forma que quede como sigue:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 \\
\beta &= \frac{\alpha}{2} \\
\gamma &= \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} \\
\delta &= \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} \\
\epsilon &= \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} \\
\zeta &= \frac{\epsilon}{2} - \frac{\delta}{6} + \frac{\gamma}{24} - \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720}
\end{aligned}$$

etcétera.

17. Entonces, los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etcétera, constituyen una serie de tal índole que cada término está determinado a partir de todos los anteriores, siendo el primer término igual a 1. Ahora bien, los números por los que se debe dividir cada uno de los términos anteriores constituyen una progresión, llamada por Wallis, progresión hipergeométrica: $2, 6, 24, 120, 720, 5040$, etcétera. Sin embargo, si se compara la misma con la serie de coeficientes α, β, γ, etcétera no creo que se pueda ofrecer un término general para ella.

18. Para nuestros fines debemos estar contentos con la serie de coeficientes que cualquiera puede continuar, ya que por la ley de la progresión se puede hacer fácilmente. Encontré también la serie que sigue:

$$\begin{aligned}
&+1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2} + 0 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - 0 \\
&+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6} + 0 - \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} \\
&- 0 + \frac{5}{1\cdots 11\cdot 6} + 0 - \frac{691}{1\cdots 13\cdot 210} \\
&- 0 + \frac{35}{1\cdots 15\cdot 2} + 0 - \frac{3617}{1\cdots 17\cdot 30}
\end{aligned}$$

en la cual es una serie notable[75], en la cual todos los términos pares, excepto el segundo, son cero.

[75] ¡Los números de Bernoulli aparecen en esta serie!

19. Si se sustituyen en lugar de α, β, γ, etcétera estos términos, se obtienen los términos de la suma $S = \int X dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2}\frac{dX}{dx} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6}\frac{d^5X}{dx^5} - \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\frac{d^7X}{dx^7} + \frac{5}{1\cdots 11\cdot 6}\frac{d^9X}{dx^9} + \frac{691}{1\cdots 13\cdot 210}\frac{d^{11}X}{dx^{11}} + \frac{35}{1\cdots 15\cdot 2}\frac{d^{13}X}{dx^{13}} - - \frac{3617}{1\cdots 17\cdot 30}\frac{d^{15}X}{dx^{15}} + \cdots$.

20. Tales series tienen un insigne uso para calcular las sumas de las progresiones aritméticas, en cuyos término general x nunca entra en el

denominador. Puesto que, por esta razón, x tiene en todas partes exponentes enteros positivos, sus diferenciales eventualmente se anulan y la serie terminará, de modo que el número de términos en la suma en sí, será finito. Al encontrar que todos los términos que no contienen x pueden eliminarse inmediatamente, porque en $\int Xdx$ se debe agregar dicha constante, lo que hace que se convierta en $S = 0$, poniendo $x = 0$.

21. Para que sea más claro el uso de tales fórmulas, conviene dar algunos ejemplos. Sea $X = x$ cuya serie de sumas es $1 + 2 + 3 + \cdots + x$. Dado que $\int Xdx = \frac{x^2}{2}$, tendrá suma $S = \frac{x^2+x}{2}$, es por tanto, $\frac{dX}{dx}$ una constante y, por lo tanto se elimina, y la sucesión de derivadas espontáneamente termina. Si se continua con $X = x^2$ su serie correspondiente es $1 + 4 + 9 + \cdots + x^2$. Se tiene $\int Xdx = \frac{x^3}{3}$ y $\frac{dX}{dx} = 2x$ y por lo tanto la suma será, $S = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

22. Si ahora se considera una serie general de potencias de números naturales $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \cdots$ cuyo termino general es x^n. Entonces, se tiene $X = x^n$ y $\int Xdx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Se tienen también las diferenciales como siguen: $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$. Serán entonces propuestos los siguientes términos para la serie de sumas

$$S = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2 \cdot 6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 30} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 42}$$
$$- \frac{n(n-1)\cdots(n-6)x^{n-7}}{2 \cdot 3 \cdots 8 \cdot 30} + \frac{n(n-1)\cdots(n-8) \cdot 5x^{n-8}}{2 \cdot 3 \cdots 10 \cdot 66} - \frac{n(n-1)\cdots(n-10) \cdot 691x^{n-11}}{2 \cdot 3 \cdots 13 \cdot 2730}$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-12) \cdot 7x^{n-13}}{2 \cdot 3 \cdots 14 \cdot 6} - \frac{n(n-1)\cdots(n-12) \cdot 3617x^{n-14}}{2 \cdot 3 \cdots 16 \cdot 510} + \cdots .$$

Para que el cálculo de esta serie se prosiga, conviene que la serie anterior para α, β, γ, etcétera se continúe.

23. A partir de esto, por lo tanto, para la serie cuyo término general es x^n se puede construir la suma especial de potencias de la siguiente manera[76,77]:

[76] En el original, Euler abusa de la notación escribiendo $\int x^r$ por $\sum_{n=1}^{x} n^r$. Para evitar confusiones no se sigue al original sino que se escribe a tabla en notación más moderna.

[77] En el original Euler escribió la tabla completa para $r = 1, 2, \ldots, 16$, la cual se omite para una lectura más breve.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{x} n^1 &= \frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\\
\sum_{n=1}^{x} n^2 &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\\
\sum_{n=1}^{x} n^3 &= \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}\\
\vdots \quad & \quad \vdots\\
\sum_{n=1}^{x} n^{16} &= \frac{x^{17}}{17}+\frac{x^{16}}{2}+\frac{4x^{15}}{3}-\frac{14x^{13}}{3}+\frac{52}{3}x^{11}-\frac{143x^9}{3}+\frac{260x^7}{3}-\frac{1392x^5}{15}+\frac{140x^3}{3}-\frac{3617x}{510}
\end{aligned}
$$

24. Pero si x no tiene en todas partes exponentes positivos en el término general de la serie, la expresión de la suma consta de infinitos términos, porque series de este tipo no admiten suma general, sino que involucran cuadraturas desconocidas. Entretanto, sin embargo, he observado que con la ayuda de este método se puede aproximar fácilmente una serie de este tipo, lo que tiene una marcada ventaja en series que convergen poco y que, de otro modo, son difíciles de ser sumadas. Enseñaré con ejemplos que tan eficiente es este método.

25. Primero consideraré la series armónicas y antes que otras esta $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ cuyo término general es $\frac{1}{x}$. Sea S, la suma buscada. Es entonces[78] $X=\frac{1}{x}$y $\int Xdx = Const. + \log x$. Por lo tanto, $\frac{dX}{dx}=\frac{-1}{x^2}$, $\frac{d^3X}{dx^3}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\frac{d^5X}{dx^5}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$, etcétera. Sustituyendo esto se obtiene $S = Const. + \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \cdots$. Donde la constante (de integración) añadida debe ser encontrada suponiendo que $x=0$ da $S=0$. De hecho, para todos los términos infinitamente grandes, la constante no se puede determinar.

[78] $Const.$ es una constante de integración, por el momento indeterminada, por supuesto.

26. Para determinar la constante es conveniente otro caso cuya suma de la serie es conocida y que se obtiene si se agregan cierto número de términos en la suma. Consecuentemente, si se agregan 10 términos iniciales $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{10}$, se obtiene la suma igual a 2.9289682539682539, la cual debe ser igual a la suma de aquellos términos de la fórmula a saber, $Const. + \ln 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{1\,200\,000} - \frac{1}{252\,000\,000} + \frac{1}{24\,000\,000\,000} - \frac{1}{1\,320\,000\,000\,000} + \cdots$. De hecho, dado que $\ln 10 = 2.302585092994045684$ la constante (de integración)[79] añadida es igual a 0.5772156649015329, una vez que se hace esto, se encontrará la suma de cualquier número de términos de esta serie.

[79] Esta es la llamada Constante de Euler-Mascheroni.

27. Así, investigué[80] la suma de 100, 1 000 y 10 000, etcétera términos de la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ y encontré lo que sigue[81]:

[80] Observe que la suma de un millón de términos así como las demás sumas las hizo Euler manualmente y que, según se cuenta, tenía gran habilidad para tales operaciones.

[81] Nuevamente la notación del original difiere de la que se usa aquí. Euler usa $\int 10$ para denotar $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n}$.

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = 2.9289682539682539$$
$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = 5.1873775176396203$$
$$\sum_{n=1}^{1\,000} \frac{1}{n} = 7.4854708605503449$$
$$\sum_{n=1}^{10\,000} \frac{1}{n} = 9.7876060360443823$$
$$\sum_{n=1}^{100\,000} \frac{1}{n} = 12.0901461298634280$$
$$\sum_{n=1}^{1\,000\,000} \frac{1}{n} = 14.3927267228657236$$

Los párrafos 28 a 31 tratan de series divergentes que no se estudiaron en el ensayo previo por no ser de mayor trascendencia y, por lo tanto, no se incluyen en la presente traducción.

31. Paso a una serie más compleja, y considero así $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ de los recíprocos de los cuadrados, cuyo término general es $\frac{1}{x^2} = X$. Se tendrá entonces $\int X dx = Const. - \frac{1}{x}$, además $\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{x^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2\cdot3\cdot4}{x^5}$, $\frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{x^7}$, etcétera. Su sustitución será $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{x^2} = S = Const. - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{5}{96x^{11}} + \frac{691}{2730x^{13}} - \frac{7}{6x^{15}} + \cdots$. Donde la cantidad constante debe ser considerada como un caso especial.

32. Entonces, agregué diez términos iniciales a la serie cuya suma encontré 1.549767731166540. Con esto hice el caso $x = 10$, así se adicionó $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} - \frac{1}{3\,000\,000} + \frac{1}{420\,000\,000} - \frac{1}{30\,000\,000\,000} + \frac{1}{1\,320\,000\,000\,000} - \frac{691}{27\,300\,000\,000\,000\,000} + \frac{7}{6\,000\,000\,000\,000\,000} + \cdots$. A partir de esto se sigue que la constante que debe ser añadida es igual[82] a 1.64493406684822643647. Por lo tanto, la constante es igual a la serie, si se continúa la suma al infinito. Puesto así $x = \infty$, se tiene $S = Const.$ al evanecerse[83] todos los términos.

33. De manera similar para la serie de recíprocos de cubos $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \cdots$ si se agregan diez términos iniciales se tiene la siguiente suma 1.197531985674193. Donde se encontró la constante, la que en la suma de cuya serie se debe añadir y es igual a 1.202056903159594. Tal número es igual a la serie $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \cdots$ si se continúa la suma al infinito. También para la bicuadrática $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots$ con suma igual a 1.0823232337110824.

[82] Obviamente, esta es una excelente aproximación a $\frac{\pi^2}{6}$ a lo que la suma de los recíprocos de los cuadrados es igual, según el primer ensayo de Euler estudiado en este texto.

[83] Se traduce literalmente "euanescentibus omnibus terminis" la que con el proceso de tomar $x = \infty$ los términos se evanecen, y no se "anulan" como podría ser tentativo al traducir.

$+\frac{1}{22}+\frac{1}{132}-\frac{1}{144}-\frac{1}{2000002}-\frac{1}{12000012}+\frac{1}{12000024}+2,928968$ seu $=14,392669$. q. pr.

§. 14. Proposita sit nunc haec series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ etc., cuius summa in infinitum desideretur. Si primo decem termini initiales addantur habebitur $1,549768$. Pro reliquis vero erit $a=\frac{1}{121}$, $b=\frac{1}{144}$; $x=\frac{1}{(n+10)^2}$ et $y=\frac{1}{(n+11)^2}$. Ex his fit $\int y\,dn=\frac{1}{11}-\frac{1}{n+11}$; atque posito $n=\infty$ erit $\int y\,dn=\frac{1}{11}$. Seriei ergo propositae in infinitum continuatae summa erit $\frac{1}{11}+\frac{7}{12.121}-\frac{1}{12.144}+1,549678$. Quae expressio in partibus decimalibus dat $1,644920$.

INVENTIO SVMMAE CVIVSQVE SERIEI EX DATO TERMINO GENERALI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Cum, quae superiore dissertatione de summatione serierum methodo geometrica exposui, diligentius considerassem, eandemque summandi rationem analytice inuestigassem; perspexi, id, quod geometrice elicui, deduci posse ex peculiari quadam summandi methodo, cuius iam ante triennium in Disser-

Texto original de Euler *op. cit.*. Créditos de la digitalización: *University of the Pacific Scholarly Commons* https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works tatione de ſummatione ſerierum mentionem feceram; poſtmodum vero de ea non amplius cogitaueram. Vim igitur analyticae methodi penitius perſcrutatus, deprehendi non ſolum formulam geometrice inuentam in ea contineri; ſed etiam eius ope adhuc pluribus terminis adiiciendis magis perfici poſſe, ita vt tandem veram ſummam abſolute exhibeat. Geometrica autem via eosdem terminos inuenire ſumme difficile videtur.

§. 2. In illa autem diſſertatione de ſummatione ſerierum, ſi fuerit terminus generalis cuiuspiam ſeriei x, eiusque index n, vniuerſali modo pro termino ſummatorio exhibui ſequentem formam $\int x\,dn + \frac{x}{2} + \frac{dx}{12\,dn} - \frac{d^3x}{720\,dn^3} +$ etc. ex qua differentialia ipſius x, quia x per n dari ponitur, a differentialis dn, quod conſtans aſſumitur, poteſtatibus, deſtruentur; ita vt ſumma algebraica obtineatur, ſi quidem $x\,dn$ integrationem admittat. In integratione vero ipſius $x\,dn$ tanta adiici debet conſtans, vt tota expreſſio euaneſcat poſito $n = 0$.

§. 3. Quia igitur hanc formulam eiusque vſum accuratius in iſta diſſertatione perſequi conſtitui; ante omnia modum, quo eam formulam ſum conſecutus exponam: Singularis enim eſt analyſis, qua in hac re ſum vſus, et complura ſatis praeclara in Analytica ſuppeditat, partim noua partim iam cognita, quae autem nusquam quantum recordor, ſatis euidenter ſunt demonſtrata.

§. 4. Ex natura calculi infiniteſimalis ſequitur, ſi fuerit y quomodocunque per x et conſtantes datum, atque loco x ponatur $x + dx$ tum abiturum y in $y + dy$.

Si

Si iam porro x elemento dx augeatur, vel x abeat in $x+2dx$; tum loco y habebitur $y+2dy+ddy$. Atque si x denuo elemento dx crescat, y transibit in $y+3dy+3ddy+d^3y$, vbi coefficientes sunt iidem qui in potestatibus binomii. Ex his sequitur si loco x ponatur $x+mdx$ tum y abire in hanc formam: $y+\frac{m}{1}dy+\frac{m(m-1)}{1.\ 2.}ddy+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}d^3y+$ etc.

§. 5. Sit iam ad nostrum institutum m numerus infinite magnus, quo mdx quantitatem finitam significare queat; erit valor, quem y, posito $x+mdx$ loco x, habebit, iste: $y+\frac{mdy}{1}+\frac{m^2d^2y}{1.2}+\frac{m^3d^3y}{1.2.3}+\frac{m^4d^4y}{1.2.3.4}+$ etc. Si nunc fiat $mdx=a$ seu $m=\frac{a}{dx}$, induet y, si pro x ponatur $x+a$, hanc formam $y+\frac{ady}{1\,dx}+\frac{a^2ddy}{1.2.dx^2}+\frac{a^3d^3y}{1.2.3.dx^3}+$ etc. in qua omnes termini sunt finitae magnitudinis.

§. 6. Hanc ipsam seriem, quae valorem ipsius y transmutatum exhibet, si loco x ponatur $x+a$, primus produxit *Cl. Taylor* in Methodo Increm. inu. eamque ad multos egregios vsus accommodauit. Sequitur scilicet primum eleuatio binomii ad quamcunque dignitatem. Vt si quaeratur valor ipsius $(x+a)^m$ pono $y=x^m$; eritque $(x+a)^m$ valor ipsius y, si loco x ponatur $x+a$. Cum igitur sit $dy=mx^{m-1}dx$; $d^2y=m(m-1)x^{m-2}dx^2$ et ita porro erit $(x+a)^m=x^m+\frac{max^{m-1}}{1}+\frac{m(m-1)a^2x^{m-2}}{1.2}+$ etc.

 §. 7.

§. 7. Hanc porro feriem *Taylorus* adhibet ad radicem ex quacunque aequatioue proxime inueniendam, id quod hoc pacto perficit. Sit aequatio quaecunque incognitam z inuoluens, nempe $Z = o$, vbi Z eft quantitas ex incognita z et cognitis vtcunque compofita. Deinde fumit x pro valore ipfi z prope aequali, et quantitatem ipfius Z, quae prodit fi loco z ponatur x ponit $= y$, ita vt foret $y = o$, fi x effet verus ipfius z valor.

§. 8. At cum x a vero ipfius z valore aliquantum discrepet, ponit verum ipfius z valorem effe $x + a$. Quare perfpicuum eft fi in y loco x ponatur $x + a$, tum euaniturum y. At loco x fi ponatur $x + a$ tum abibit y in $y + \frac{a\,dy}{1.dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2.dx^2} + \frac{a^3\,d^3y}{1.2.3.dx^3} +$ etc. Hancobrem ergo erit $o = y + \frac{a\,dy}{1.dx} + \frac{a^2\,ddy}{1.2.dx^2} +$ etc. Ex qua aequatione valor ipfius a erutus dabit complementum a ad x addendum requifitum, quo obtineatur incognita z.

§. 9. Quia autem x ad z prope accedere ponitur, erit a quantitas valde parua, ita vt prae duobus terminis initialibus fequentes omnes euanefcere queant. Hocque pacto oritur $a = -\frac{ydx}{dy}$ atque $z = x - \frac{ydx}{dy}$, qui eft valor ipfius z multo magis propinquus quam x tantum. Vt pro hac aequatione $z^3 - 3z - 20 = o$ erit $y = x^3 - 3x - 20$ et $dy = 3x^2 - 3$, ideoque $z = x - \frac{x^3 - 3x - 20}{3xx - 3} = \frac{2x^3 + 20}{3xx - 3}$. Sumto nunc primo $x = 3$, erit $z = 3\frac{1}{12}$, hocque valore denuo pro x pofito proxime z inuenietur.

§. 10. Si porro detur conditio quaecunque functionis y, quae certo ipfius x cafu locum habeat, formula fuperior abibit

abibit in aequationem, in qua proprietas ipsius y continebitur. Vt si y huiusmodi fuerit functio ipsius x vt euanescat posito $x = 0$; pono $a = -x$, fiet enim hoc modo $x + a = 0$, atque erit $0 = y - \frac{x\,dy}{1.dx} + \frac{x^2\,ddy}{1.2.dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3\,dx^3}$ + etc. seu $y = \frac{x\,dy}{1.dx} - \frac{x^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3.dx^3}$ — etc. In qua aequatione omnium earum functionum ipsius x natura continetur, quae euanescunt posito $x = 0$.

§. 11. Si pro y ponatur $\int z\,dx$; erit $dy = z\,dx$; $ddy = dz\,dx$; $d^3 y = d^2 z\,dx$ etc. quibus valoribus substitutis habebitur $\int z\,dx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2\,dz}{1.2.dx} + \frac{x^3\,ddz}{1.2.3.dx^2}$ — etc. in qua aequatione integrale ipsius $z\,dx$ per seriem infinitam exhibetur. Atque haec est generalis quadratura curuarum, quam *Cl. Ioh. Bernoulli* in Act. Lipſ. tradidit; analysin autem, qua ad hanc seriem peruenit, non adiunxit.

§. 12. Missis autem his, quae ad nostrum institutum minus pertinent, pergo ad series. Sit igitur series quaecunque $A + B + C + D - - - - - - - + X$; in qua A denotat terminum primum; B secundum; et X eum cuius index est x; ita vt X sit terminus generalis seriei propositae. Ponatur autem summa huius progressionis $A + B + C + D - - - - + X = S$; erit S terminus summatorius; atque tam S quam X, si series fuerit determinata, ex x et constantibus erunt composita.

§. 13. Quia iam S exhibet summam tot terminorum seriei, quot sunt vnitates in x; si in S loco x scribatur $x - 1$, habebitur prior summa termino vltimo X immi-

X imminuta. Hac igitur ſubſtitutione abibit S in $S-X$. Comparentur ergo haec cum ſuperiore formula; erit $S = y$ et $a = -1$; quamobrem valor ipſius S transmutatus ſeu $S-X$ erit $= S - \frac{dS}{1\,dx} + \frac{ddS}{1.2.dx^2} - \frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} +$ etc. Ex quo oritur iſta aequatio $X = \frac{dS}{1.dx} - \frac{ddS}{1.2.dx^2} + \frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} - \frac{d^4S}{1.2.3dx^4} +$ etc.

§. 14. Ope huius ergo aequationis ex dato termino ſummatorio ſeriei cuiusque inuenitur terminus generalis. Quod autem, cum alias ſit facillimum, ſuperfluum foret hac methodo ad terminum generalem ex ſummatorio inueniendum vti. Id autem maxime commodi huic aequationi accidit, vt ſinguli termini ſint euoluti, eaque idcirco ad ſingulares vſus poſſit accommodari. Methodo enim cognita haec ſeries $X = \frac{dS}{1.dx} - \frac{ddS}{1.2.dx^2} + \frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} -$ etc. poteſt inuerti vt ex termino generali X determinetur ſummatorius S; quod ipſum maxime deſideratur.

§. 15. Ponamus igitur $\frac{dS}{dx} = \alpha X + \frac{\beta dX}{dx} + \frac{\gamma ddX}{dx^2} + \frac{\delta d^3X}{dx^3} + \frac{\varepsilon d^4X}{dx^4} +$ etc. ita vt ſit $S = \alpha \int X\,dx + \beta X + \frac{\gamma dX}{dx} + \frac{\delta ddX}{dx^2} +$ etc. Erit ergo $\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} + \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} +$ etc. et $\frac{d^3S}{dx^3} = \frac{\alpha ddX}{dx^2} + \frac{\beta d^3X}{dx^3} + \frac{\gamma d^4X}{dx^4} +$ etc. et $\frac{d^4S}{dx^4} = \frac{\alpha d^3X}{dx^3} + \frac{\beta d^4X}{dx^4} +$ etc. atque $\frac{d^5S}{dx^5} = \frac{\alpha d^4X}{dx^4} +$ etc.

§. 16. Subſtituantur ergo iſtae ſeries loco cuiusque termini ſuperioris ſeriei; et termini ſimiles inter ſe comparentur nihiloque aequales ponantur. Quo facto coëfficentes α, β, γ etc. ita determinabuntur, vt ſit, vti ſequitur:

$\alpha = 1$

$$\alpha = 1$$
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$
$$\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6}$$
$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24}$$
$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120}$$
$$\zeta = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{6} + \frac{\gamma}{24} - \frac{\beta}{120} + \frac{\alpha}{720} \text{ etc.}$$

§. 17. Coëfficientes ergo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. feriem conftituunt huius indolis, vt quisque terminus ex omnibus antecedentibus determinetur; exiftente termino primo $= 1$. *Numeri* autem per quos finguli terminorum antecedentium diuidi debent, conftituunt progreffionem a *Wallifio* hypergeometricam dictam; 2, 6, 24, 120, 720, 5040, etc. Ipfa autem feries coëfficientium α, β, γ etc. ita eft comparata, vt vix credam pro ea terminum generalem poffe exhiberi.

§. 18. Pro inftituto ergo noftro contenti effe debemus feriem coëfficientium quousque libuerit continuaffe, id quod ex lege progreffionis facile perfici poteft. Inueni autem hanc feriem, vt fequitur:

$$+ 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.2} + 0 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} - 0$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.6} + 0 - \frac{3}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$$
$$- 0 + \frac{5}{1 - - - - - - - 11.6} + 0 - \frac{691}{1 - - - - - - 13.210}$$
$$- 0 + \frac{35}{1 - - - - - - - - 15.2} + 0 - \frac{3617}{1 - - - - - - - 17.30}$$

in qua ferie notabile eft, quod omnes termini pares praeter fecundum euanefcant.

§. 19.

§. 19. Si ergo loco α, β, γ etc. hi termini substituantur; habebitur terminus summatorius $S = \int X dx + \frac{X}{1.2} + \frac{dX}{1.2.3.2dx} - \frac{d^3X}{1.2.3.4.5.6dx^3} + \frac{d^5X}{1 \cdots 7.6dx^5} - \frac{3d^7X}{1 \cdots 9.10.dx^7} + \frac{5d^9X}{1 \cdots 11.6dx^9} + \frac{691d^{11}X}{1 \cdots 13.210dx^{11}} + \frac{35d^{13}X}{1 \cdots 15.2dx^{13}} - \frac{3617d^{15}X}{1 \cdots 17.30dx^{15}} +$ etc.

§. 20. Series haec insignem habet vsum in summis progressionum algebraicarum inueniendis, quarum in terminis generalibus x nusquam in denominatorem ingreditur. Quia enim hac ratione x vbique habet exponentes affirmatiuos integros, eius differentialia tandem euanescent, atque series abrumpetur, vnde ipse terminus summatorius finito terminorum numero reperietur. In quo inueniendo statim omnes termini, qui x non continent reiici possunt, quia in $\int X dx$ tanta constans addi debet, quae faciat vt fiat $S = 0$, posito $x = 0$.

§. 21. Quo vsus huius formulae clarius percipiatur, exempla quaedam afferre conuenit. Sit ergo $X = x$ seu series summanda haec $1 + 2 + 3 \cdots + x$; propter $\int X dx = \frac{x^2}{2}$ erit summa $S = \frac{x^2 + x}{2}$, est enim $\frac{dX}{dx}$ constans, et propterea reiicitur, et sequentia differentialia sponte euanescunt. Sit porro $X = x^2$ seu ista series $1 + 4 + 9 \cdots + x^2$ summanda, erit $\int X dx = \frac{x^3}{3}$ et $\frac{dX}{dx} = 2x$ ideoque summa seriei $S = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$.

§. 22. Sit nunc haec series generalis potestatum numerorum naturalium proposita $1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n +$ etc. cuius terminus generalis est x^n. Habebitur ergo $X = x^n$ et $\int X dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Differentialia autem

ita

ita se habebunt vt sit $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$; etc. His igitur valoribus substitutis erit terminus summatorius seriei propositae

$$S = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2.6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2.3.4.30} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2.3.4.5.6.42} - \frac{n(n-1)\text{----}(n-6)x^{n-7}}{2.3\text{-------}8.30} + \frac{n(n-1)\text{------}(n-8)5x^{n-9}}{2.3\text{-------}10.66} - \frac{n(n-1)\text{---}(n-10)691x^{n-11}}{2.3\text{-------}13.2730} + \frac{n(n-1)\text{--}(n-12)7x^{n-13}}{2.3\text{---}14.6} - \frac{n(n-1)\text{------}(n-14)3617x^{n-15}}{2.3\text{---------}16.510} + \text{etc.}$$

Ad quam seriem, quousque opus est continuandam, oportet, vt superior illa series α, β, γ, etc. eousque continuetur.

§. 23. Ex hac igitur generali summatione seriei cuius terminus generalis est x^n confici possunt summae specialium serierum potestatum vt sequitur:

$$\int x = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$
$$\int x^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$
$$\int x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$
$$\int x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$$
$$\int x^5 = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12}$$
$$\int x^6 = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42}$$

 $\int x^7 =$

$$\int x^7 = \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{2} + \frac{7x^6}{12} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^2}{12}$$
$$\int x^8 = \frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{2} + \frac{2x^7}{3} - \frac{7x^5}{15} + \frac{2x^3}{9} - \frac{x}{30}$$
$$\int x^9 = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^9}{2} + \frac{3x^8}{4} - \frac{7x^6}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{20}$$
$$\int x^{10} = \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{2} + \frac{5x^9}{6} - x^7 + x^5 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x}{66}$$
$$\int x^{11} = \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{2} + \frac{11x^{10}}{12} - \frac{11x^8}{8} + \frac{11x^6}{6} - \frac{11x^4}{8} + \frac{5x^2}{12}$$
$$\int x^{12} = \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{2} + x^{11} - \frac{11x^9}{6} + \frac{22x^7}{7} - \frac{33x^5}{10} + \frac{5x^3}{3} - \frac{691x}{2730}$$
$$\int x^{13} = \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{2} + \frac{13x^{12}}{12} - \frac{143x^{10}}{60} + \frac{143x^8}{28} - \frac{143x^6}{20} + \frac{65x^4}{12} - \frac{691x^2}{420}$$
$$\int x^{14} = \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{2} + \frac{7x^{13}}{6} - \frac{91x^{11}}{30} + \frac{143x^9}{18} - \frac{143x^7}{10} + \frac{91x^5}{6} - \frac{691x^3}{90} + \frac{7x}{6}$$
$$\int x^{15} = \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{15}}{2} + \frac{5x^{14}}{4} - \frac{91x^{12}}{24} + \frac{143x^{10}}{12} - \frac{429x^8}{16} + \frac{455x^6}{12} - \frac{691x^4}{24} + \frac{35x^2}{4}$$
$$\int x^{16} = \frac{x^{17}}{17} + \frac{x^{16}}{2} + \frac{4x^{15}}{3} - \frac{14x^{13}}{3} + \frac{52x^{11}}{3} - \frac{143x^9}{3} + \frac{260x^7}{3} - \frac{1382x^5}{15} + \frac{140x^3}{3} - \frac{3617x}{510}$$

§. 24. Sin autem x non vbique habuerit exponentes affirmatiuos in termino generali seriei, tum quoque expressio summae infinitis constat terminis; quia huiusmodi series generalem summationem non admittunt, sed quasque quadraturas inuoluunt. Interim tamen obseruaui ope huius methodi eiusmodi series facile admodum proxime summari posse, quod insignem habet vtilitatem in seriebus, quae parum conuergunt, et alias difficulter summantur. Quod quomodo efficiendum sit, exemplis docebo.

§. 25. Considerabo igitur primum series harmonicas, et prae ceteris quidem hanc $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{1}{x}$; summatorius vero, sit S, quaeritur. Est ergo $X = \frac{1}{x}$ et $\int X\,dx =$ Const. $+ lx$. Atque porro $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{x^2}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-1.2.3}{x^4}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = -\frac{1.2.3.4.5}{x^6}$ etc. His substitutis prodit $S =$ Const.

+

$+ lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} +$ etc. Vbi conſtans addenda ita debet eſſe comparata vt poſito $x = o$ fiat $S = o$; Ex hoc vero ob omnes terminos infinite magnos conſtans determinari non poteſt.

§. 26. Ad conſtantem vero determinandam alium caſum aſſumi oportet, quo ſumma ſeriei eſt cognita; qui ergo habebitur, ſi certus terminorum numerus in vnam ſummam colligatur. Addantur ergo 10 termini initiales $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \; --- \frac{1}{10}$; reperieturque eorum ſumma $= 2,9289682539682539$; cui aequalis eſſe debet ſumma eorundem terminorum ex formula nempe, Conſt. $+ l10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{1200000} - \frac{1}{252000000} + \frac{1}{24000000000} - \frac{1}{1320000000000}$ etc. Quo facto reperietur propter $l10 = 2,302585092994045684$ conſtans illa addita $= 0,5772156649015329$; hacque ſemel determinata ſumma quotcunque terminorum huius ſeriei reperietur.

§. 27. Hac igitur ratione inueſtigaui ſummam 100, 1000, 10000 etc. terminorum ſeriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. inuenique vt ſequitur:

$$\begin{aligned}
\int 10 &= 2,9289682539682539 \\
\int 100 &= 5,1873775176396203 \\
\int 1000 &= 7,4854708605503449 \\
\int 10000 &= 9,7876060360443823 \\
\int 100000 &= 12,0901461298634280 \\
\int 1000000 &= 14,3927267228657236
\end{aligned}$$

§. 31. Pergo ad ſeries magis compoſitas, et conſidero hanc $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. reciprocam quadratorum, cuius terminus generalis eſt $\frac{1}{x^2} = X$. Erit ergo $\int X\,dx = \text{Conſt.} - \frac{1}{x}$, atque $\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{x^3}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2.3.4}{x^5}$; $\frac{d^5X}{dx^5} = \frac{-2.3.4.5.6}{x^7}$ etc. His ſubſtitutis erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots\cdots \frac{1}{x^2} = S = \text{Conſt.} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \frac{5}{66x^{11}} + \frac{691}{2730x^{13}} - \frac{7}{6x^{15}} +$ etc. Vbi conſtantis quantitas ex caſu ſpeciali debet determinari.

§. 32. Ipſo ergo actu addidi decem terminos initiales ſeriei iſtius, quorum ſummam inueni 1,5497677311665 40. Ad hanc ergo cum ſit hoc caſu $x = 10$, ſi addatur $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{6000} - \frac{1}{3000000} + \frac{1}{4200000000} - \frac{1}{300000000000} + \frac{1}{1320000000000000} - \frac{691}{27300000000000000} + \frac{7}{6000000000000000}$ — etc. Ex hoc ergo prodit conſtans illa addenda $= 1,6449340668482264 7$. Huicque conſtanti aequalis eſt ſeriei in infinitum continuatae ſumma; poſito enim $x = \infty$ fit $S = \text{Conſt.}$ euaneſcentibus omnibus terminis.

§. 33. Simili modo pro ſerie reciproca cuborum $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} +$ etc. ſi addantur decem termini initiales habebitur eorum ſumma haec 1,197531985674193. Vnde inuenitur conſtans, quae in ſummatione huius ſeriei addi debet $= 1,2020569031595 94$. Atque huic numero aequalis eſt ſeriei $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ in infinitum continuatae ſumma. Atque pro biquadratis $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} +$ etc. et ſumma $= 1,0823232337110824$.

Newton lleva el infinito a la trigonometría

Entre las múltiples contribuciones de Newton a la ciencia, está el desarrollo en series de las funciones trigonométricas, como veremos en este capítulo. Además de las trigonométricas, el desarrollo de la función logaritmo logrado por Newton permitió a Nicholas Mercator expandir las tablas de logaritmos de Neper que tuvieron tremenda importancia en las mediciones astronómicas y que, por ende, derivaron en el desarrollo y auge de la navegación comercial y militar. Pero regresando a las trigonométricas, los descubrimientos de Newton permitieron extender las tablas de Ptolomeo y podemos decir sin exagerar que extendió las tablas nada menos que al infinito y con ello, se expandieron inconmesurablemente las aplicaciones de tales funciones a todas las ramas de la ciencia y la tecnología.

Seguiremos para esta parte el cápitulo *De Analysi Per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*, del opúsculo[84] publicado, al parecer, no sin ciertas dificultades en 1711. En el citado capítulo, Newton explica las técnicas para calcular el área delimitada por ciertas curvas para las cuales descubrió un desarrollo en series infinitas, al parecer, por primera vez en la historia[85]. Comienza con ejemplos, lo que transparenta la intención didáctica del opúsculo. Son de particular interés el desarrollo infinito de la hipérbola $y = \dfrac{a^2}{b+x}$ y de la raíces cuadradas $y = \sqrt{a^2 \pm x^2}$, entre otros ejemplos similares y combinaciones de estos, los cuales se encuentran a partir de la página 5. Para la hipérbola escribe el desarrollo que se logra al usar el algoritmo de división de

[84] Isaac Newton. *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis.* ETH-Bibliothek Zürich, Shelf Mark: Rar 1909

[85] Se menciona que el matemático hindú Sri Nilakantha Somayaji (1444-1545) como pionero en la serie para la función seno, pero en el texto *El Tantrasamgraha* se encuentra la fórmula $\operatorname{sen} x = x - x^3/6$, la cual está lejos del desarrollo infinito de Newton, como puede corroborar el lector que así lo desee.

los polinomios:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^2}{b^3}x^2 - \frac{a^2}{b^4}x^3 + \cdots \\ \hline
b + x & a^2 \\
 & -a^2 - \frac{a^2}{b}x \\ \cline{2-2}
 & -\frac{a^2}{b}x \\
 & \frac{a^2}{b}x + \frac{a^2}{b^2}x^2 \\ \cline{2-2}
 & \frac{a^2}{b^2}x^2 \\
 & -\frac{a^2}{b^2}x^2 - \frac{a^2}{b^3}x^3 \\ \cline{2-2}
 & \vdots
\end{array}
$$

es decir,

$$y = \frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^2}{b^3}x^2 - \frac{a^2}{b^3}x^3 + \cdots \tag{50}$$

y procede a calcular el área bajo la hipérbola mediante la fórmula dada en las regla I (página 1, *op. cit.* se da la traducción literal):

Regla I. Si $y = ax^{\frac{m}{n}}$, será área $ABD = \dfrac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ (véase la Figura 6).

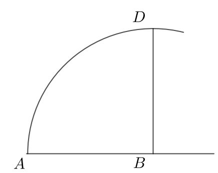


Figura 6: Figura que corresponde a la regla I de Newton *op. cit.* para el área ABD.

Es de notar que Newton ha adoptado completamente la notación fraccionaria para las raíces n-ésimas y los exponentes negativos para las funciones racionales y que la fórmula para hallar el área está basada en las fórmulas encontradas por Wallis (recuerde la fórmula (34)).

De esta forma, al dividir en el ejemplo

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots \tag{51}$$

concluye que el área $ABDC = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$ (vea Figura 7), al integrar cada sumando mediante la fórmula de la regla I.

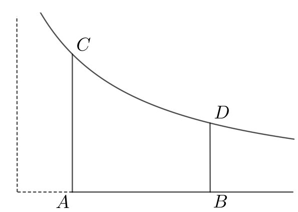


Figura 7: Ejemplo de Newton del área $ABCD$ bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$ *op. cit.* página 5. Observe que A está en el punto que corresponde a 0.

Para la serie infinita de las raíces cuadradas, Newton utiliza el algoritmo, menos conocido actualmente, para obtener la raíz cuadrada de polinomios. Como ejemplo Newton[86] calcula la serie para $y = \sqrt{a^2 + x^2}$.

[86] Para sacar la raíz a $a^2 + x^2$ se toma la raíz al primer sumando, lo cual da a; posteriormente se busca un número cuyo doble producto con a dé x^2, lo cual resulta $\frac{x^2}{2a}$, término que debe ser elevado al cuadrado, con lo que se obtiene $\frac{x^4}{4a^2}$; etcétera.

$$
\begin{array}{l|c}
 & a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots \\ \hline
\sqrt{} & a^2 + x^2 \\
 & a^2 \\ \hline
 & 0 + x^2 \\
 & x^2 + \frac{x^4}{4a^2} \\ \hline
 & 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
 & -\frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\ \hline
 & \vdots
\end{array}
$$

Por lo tanto, la serie infinita buscada es

$$y = \sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots$$

Newton procede entonces a dar la fórmula de la serie para el área del círculo de radio a sin exponer los detalles del cálculo (pero que se siguen del cálculo anterior, evidentemente) y dice: "Del mismo modo, si fuera $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ su raíz será

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \cdots \tag{52}$$

y agrego (*i. e.* Newton agrega) que el área buscada $ABDC$ (Figura 8) será igual a $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \cdots$".

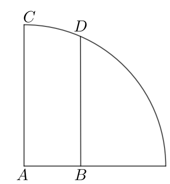


Figura 8: Figura que corresponde al área $ABCD$ del arco de la circunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Para calcular el área completa del círculo Newton usa la serie

$$y = \sqrt{x - x^2} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} + \cdots$$

cuya área ABD (Figura 9) es

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} + \cdots = x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 + \cdots\right).$$

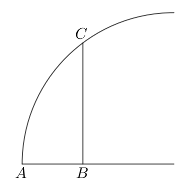


Figura 9: Figura que corresponde al área ABC del arco de la circunferencia $y = \sqrt{x}\,\sqrt{1-x}$.

El lector perspicaz podrá ver que el área completa de un círculo, puede calcularse conociendo el área $ABCD$ de la figura 8 y el área del complemento en la figura 9, por lo que Newton termina esta sección con la frase[87] "Y esta es la cuadratura del área del círculo", nada menos.

[87] *Et haec est Areae Circuli Quadratura*

Cálculo de la serie del arcoseno o cómo calcular longitudes de arco, según Newton

No debemos perder de vista que estamos en busca de cómo fue el descubrimiento de la serie para la función seno. Para llegar a ella, Newton calcula primero la serie de la función inversa del seno, es decir, la serie de la función arcoseno. Entonces, dado que Newton inventó una técnica para calcular la serie infinita de una inversa local, es capaz de calcular la serie para el seno. Sigámoslo paso a paso.

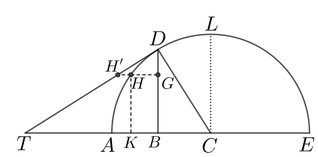


Figura 10: Una figura similar presenta Newton para el cálculo de la longitud de arco de una circunferencia. La diferencia principal con nuestra figura es que en general $H' \neq H$, pero Newton considera que para un rectángulo "infinitamente pequeño" estos puntos coinciden, lo cual no tiene sentido en $\mathbb{R}$, desde el punto de vista actual.

Para calcular la serie del arcoseno, Newton primero calcula la serie infinita para su derivada siguiendo las técnicas de Barrow y después integra la serie derivada usando las técnicas de Wallis, las cuales generalizó el mismo Newton. Procedemos como en la sección *Longitudines Curvarum invenire, op. cit.* la cual se encuentra a partir de la página 7 de la obra original de Newton. Considere el semicírculo ADE en la figura 10. Se desea encontrar la tangente en el punto D localizando el punto T sobre la recta AE (ésta es la técnica de Barrow que se verá más adelante). Sea BD perpendicular a AE. Se tiene que el triángulo TCD

es semejante al triángulo $H'GD$, pero imaginando que, para triángulos con lados infinitamente pequeños, también se cumple la semejanza, Newton supone que el triángulo TCD es semejante a HDG, aunque de la figura es claro que $H' \neq H$. Entonces por semejanza de triángulos también se tiene que el triángulo HDG es semejante al triángulo TDB. Sea $x = m(AB)$, $y = m(BD)$, donde m denota la medida del segmento respectivo. Si z denota al arco AD, Δz el arco HD, $\Delta x = m(HG)$, $t = m(BT)$ y r denota al radio del círculo, tenemos

$$\triangle HDG \sim \triangle TDB \iff \frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{t}{DT} \tag{53}$$

$$\triangle DBT \sim \triangle CDT \iff \frac{t}{DT} = \frac{y}{r}, \tag{54}$$

donde "$\sim$" denota semejanza de triángulos.

En particular. si $r = 1$, $y = \sqrt{1-x^2}$ se tiene de (53) y (54)

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{55}$$

Es decir[88], hemos llegado a la derivada para la longitud de arco del círculo (al tomar Δx y Δz infinitamente pequeños), de donde si desarrollamos en serie $1/\sqrt{1-x^2}$ podremos calcular z con las reglas dadas por Newton para el cálculo de áreas (es decir, para la integración, reglas I y II página 1 *op. cit.*). Al sacar raíz se tiene mediante la fórmula dada por (62)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} - \cdots} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots \end{aligned} \tag{56}$$

para calcular la división por una serie infinita, Newton aclara que se obtiene dividiendo como si fuera una fracción decimal (página 7 *op. cit.*). De (56) "calculando el área" (Newton *dixit*, es decir, integrando) se tiene[89]

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \tag{57}$$

Ahora, para encontrar la serie del seno, Newton encuentra la inversa, es decir, pone a x en términos de una serie infinita en términos de z; veamos cómo calcular la inversa de $\log(1+x)$. Recordamos que la serie (51) al ser integrada nos dio el área la cual resulta ser el logaritmo de $1+x$, es decir

$$z = \log(1+x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \tag{58}$$

Newton propone un algoritmo (página 16 *op. cit.*) para calcular la serie inversa $x = z + p + q + \cdots$, donde $p = p(z)$, $q = q(z)$, etcétera, Newton

[88] Deberíamos de escribir en lenguaje moderno $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$, pero se prefiere apegarse lo más posible a la notación del autor quien por supuesto, no usó la notación de Leibniz $\frac{dz}{dx}$, como prefieren usar otros autores. En todo caso, Newton y, antes Barrow, entendían por $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ el cociente de cantidades infinitesimales, las cuales en la axiomática moderna de los números reales no existen.

[89] Efectivamente la serie (57) es la serie para el arcoseno

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

Término a sustituir	dónde se substituye	Término resultante
$x = z + p$	$+\frac{1}{5}x^5$	$\frac{1}{5}z^5 + \cdots + \frac{1}{5}p^5$
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p + \cdots + \frac{1}{4}p^4$
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2 + \frac{1}{3}p^3$
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z + p$
	$-z$	$-z$

Cuadro 7: Tabla para invertir la serie de $\log(1 + x)$ similar al cuadro original de Newton página 16 *op. cit.*

propone sustituir en el primer paso $x = z + p$ en la serie (58) y resolver para p tomando en cuenta solo la menor potencia de z que aparezca.

Lo que aparece en la segunda columna del cuadro 7 es la ecuación (58) igualada a cero es decir

$$0 = -z + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

En la tercera columna aparecen los términos que se obtienen al desarrollar los binomios al sustituir $x = z + p$, de donde

$$0 = p(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots) - \frac{1}{2}z^2 + \cdots,$$

de aquí, Newton concluye que la primera aproximación para p, es $p = \frac{1}{2}z^2$. Así, $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots$. La justificación para descartar las potencias mayores debe ser que Newton consideraba que su procedimiento era válido para valores pequeños de x, p, z, etcétera.

El segundo paso consiste en escribir $p = \frac{1}{2}z^2 + q$, sustituir en los términos donde aparece p y despejar q, como se muestra en el siguiente cuadro. Al sumar todos los términos de la última columna del cuadro 8 e igualar la suma a cero, se puede despejar q. Note que algunos términos se cancelan mutuamente:

$$0 = q(1 - z - z^2 + \cdots) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)z^3 + \cdots,$$

de donde Newton concluye que $q = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)z^3 = \frac{1}{2\cdot 3}z^3$ y, actualizando los valores de la serie,

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \cdots$$

Término a sustituir	dónde se substituye	Término resultante
$p = \frac{1}{2}z^2 + q$	$+zp^2$	$\frac{1}{4}z^5 + \cdots$
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q + \cdots$
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5 + \cdots$
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 - z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+\ p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$

Cuadro 8: Segundo paso para invertir la serie de $\log(1+x)$ similar al cuadro original de Newton página 16 *op. cit.*

El procedimiento se continúa poniendo $q = \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + r$, sustituyendo en la serie para q, de donde obtiene que la inversa de $z = \log(1+x)$ es

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}z^4 + \cdots$$

la cual, como puede notar el lector, es la serie de $e^z - 1$, efectivamente, es la inversa bajo composición de $\log(1+x)$. No deja de asombrar que este método para invertir funciones se halle en el olvido completamente.

Habiendo conocido el método de inversión de series de Newton, procedemos a calcular la serie para el seno a partir de la serie del arcoseno. Debo mencionar que el cuadro 9 siguiente no aparece en la publicación de Newton, lo que Newton reporta es la serie de la función seno hasta el grado siete, en una brevísima sección *op. cit.* página 17 que traduzco:

Si dado el arco αD se desea el seno AB de la ecuación $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 +$ etcétera, calculada antes (suponiendo que $AB = x$, $\alpha D = z$ y $A\alpha = 1$), la raíz extraída[90] *será $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$.*

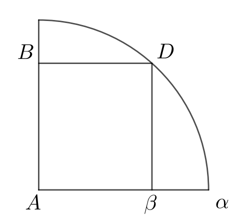


Figura 11: Presentamos la figura que usa Newton para la serie infinita de la función seno, salvo que la hemos rotado para que coincida con las representaciones modernas, donde el eje x es horizontal.

[90] Es decir, el seno de z, Newton llama *raíz* a la cantidad que encuentra con el cálculo de la inversa, puesto que ha usado con antelación su técnica para encontrar raíces de ciertas ecuaciones que no discutimos en este libro.

etcétera. Y más aun si el coseno Aβ de este arco dado se desea, haga $A\beta(=\sqrt{1-x^2}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$*, etcétera.*

Newton, de esta forma, presenta la serie para el seno y el coseno, con lo que las tablas anteriores a él quedaron infinitamente superadas. Presentamos a continuación, la posible tabla que pudo haber usado Newton para el cálculo de la serie del seno, pero que no aparece en la obra original. Para el cálculo de seno, se parte de la serie

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

Término a sustituir	dónde se substituye	Término resultante
$x = z + p$	$+\frac{5}{112}x^7$	$\frac{5}{112}z^7 + \cdots$
	$+\frac{3}{40}x^5$	$-\frac{3}{40}z^5 + \frac{3\cdot5}{40}z^4p + \cdots$
	$+\frac{1}{6}x^3$	$+\frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{6}z^2p+$
	$+x$	$+z + p$
	$-z$	$-z$

Cuadro 9: Tabla para invertir la serie de $z = \operatorname{arcsen}(x)$ y así encontrar la serie $x = \operatorname{sen} z = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 + \cdots$. Para esta tabla Newton no se toma la molestia de presentarla en su texto, ya que de alguna manera, para cuando llega a dicha serie, es de alguna manera trivial.

Del Cuadro 9 puede deducirse que

$$0 = p(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4 + \cdots) + \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{40}z^5 + \cdots \tag{59}$$

(60)

Por lo tanto, en una primera aproximación $p \approx -\frac{1}{6}z^3 = -\frac{1}{2\cdot3}z^3$. Ahora se busca una segunda aproximación poniendo $p = -\frac{1}{2\cdot3}z^3 + q$, donde q queda por determinar:

Del Cuadro 10 (abajo), puede encontrarse que

$$0 = q\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{8}z^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)z^3 + \left(-\frac{1}{12} + \frac{3}{40}\right)z^5 + \cdots$$

$$q \approx \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}z^5, \tag{61}$$

de donde

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{1}{2\cdot3}z^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}z^5 + \cdots$$

Crítica a los cálculos de Newton

Desde la perspectiva actual, las series infinitas para seno y coseno que presenta Newton en el *Analysis*, son correctas. Sin embargo los

Cuadro 10: Segunda aproximación para invertir la serie de $z = \text{arcsen}\,(x)$.

Término a sustituir	dónde se substituye	Término resultante
$p = -\frac{1}{2\cdot3}z^3 + q$	$+\frac{1}{2}z^2p$	$-\frac{1}{2\cdot3}z^5q + \cdots$
	$+p$	$-\frac{1}{2\cdot3}z^3 + q$
	$+\frac{3}{40}z^5$	$+\frac{3}{40}z^5$
	$-\frac{1}{12}z^5$	$-\frac{1}{12}z^5$
	$-\frac{1}{6}z^3$	$-\frac{1}{6}z^3 + \cdots$
	$+\frac{1}{6}z^3$	$+\frac{1}{6}z^3$

métodos sustentados en operaciones algebraicas han caído en desuso completamente. El surgimiento de las series de Taylor y Maclaurin, donde los coeficientes de las potencias en las series son calculados con las derivadas de la función cuya serie desea calcularse, y donde se establece un error de truncamiento para los desarrollos finitos. Esto es lo que prevalece en las implementaciones computacionales de los desarrollos de tales funciones, así como en todos los libros de texto; y por *implementaciones computacionales*, me refiero, por supuesto, a que cuando usted, apreciable lector, usa una calculadora para encontrar el seno de cualquier ángulo, su calculadora utiliza, de alguna manera, el desarrollo que encontró Newton. Si hay algo original en la obra de Newton seguro son sus técnicas y las fórmulas a las que se llegó por primera vez, lo que, sin duda, contribuyó al enriquecimiento de las tablas de funciones trigonométricas y de las tablas de logaritmos que, a su vez, fueron empleadas en astronomía, ingeniería y un infinito etcétera. Por cierto, otras fórmulas de extraordinaria relevancia aparecen en los extractos de epístolas al final de *Analisi per Aequationes, op. cit.*; por ejemplo, en el fragmento de una carta a Oldenburg, se muestran las fórmulas de las series para el desarrollo binomial para $(P + PQ)^{\frac{m}{n}}$:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \cdots,$$

donde, por cierto, la notación[91] $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}, \sqrt{c}, a^5 = a^{\frac{5}{3}}$ así como $\frac{1}{a} = a^{-1}, \frac{1}{a^2} = a^{-2}, \frac{1}{a^3} = a^{-3}$ queda establecida para siempre como una notación excelente para los fines del cálculo. Entre los célebres ejemplos, Newton pone

$$\sqrt{c^2 + x^2} = (c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^10}{256c^9} + \cdots$$

[91] Usamos la notación $\sqrt{}$ y $\sqrt{c}$, para las raíces cuadradas y cúbicas, respectivamente, por ser la que aparece en la obra original de Newton.

y explica: *"Porque en este caso, es* $P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$, $A = P^{\frac{m}{n}} = (c^2)^{\frac{1}{2}} = c$, $B = \frac{m}{n}AQ = \frac{x^2}{2c}$, $C = \frac{m-n}{2n}BQ = -\frac{x^4}{8c^3}$, *y así sucesivamente."* De esta manera, para todos los casos prácticos, Newton muestra que no requiere de los métodos algebraicos que usó (y que estudiamos), para el cálculo de las series de raíces cuadradas, siempre y cuando las series converjan, lo que no es tema menor; pero en la época de Newton, época de desarrollo, fue tema un tanto soslayado.

Se cuenta que Newton dijo a alguno de sus biógrafos que comenzó a interesarse en las matemáticas cuando dio con un libro de astrología y no pudo comprender los cálculos y figuras que allí aparecían, lo que lo llevó, al cabo, a estudiar la geometría de Descartes y trigonometría... ¡Algunos libros de astrología de entonces requerían de cálculos de trigonometría esférica!; ni modo...las cosas ya no son como antes.

La prodigiosa curiosidad de Newton lo llevó al descubrimiento de fórmulas para el cálculo de los valores de las funciones trigonométricas que son insuperables, ya que incluyen todos los números posibles, reales y complejos, con lo que culmina una búsqueda que comenzó con los sumerios, algunos milenios antes.

Traducción del latín de textos de Newton:
1. Del análisis para las ecuaciones con infinito número de términos

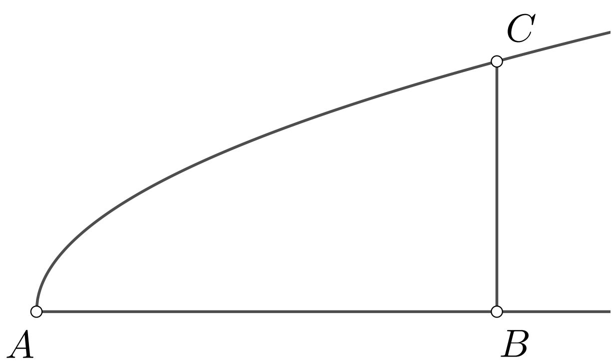
A continuación presento mi versión al español del capítulo de la obra de Newton[92] cuyo título original es "De Analysi Per Aequationes Numero Terminorum Infinitas", el cual se traduce como se ha nombrado al título de esta sección.

[92] Isaac Newton. *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. ETH-Bibliothek Zürich, Shelf Mark: Rar 1909

Cuadratura de las curvas simples
Regla I.

Si $ax^{m/n} = y$, se tendrá $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ Area ABD. Con ejemplos el asunto

Figura 12: Figura semejante al del original de Newton: Regla I.



será evidente.
1. Si $x^2(= 1x^{2/1}) = y$, esto es $a = 1 = n$ y $m = 2$, se tendrá $\frac{1}{3}x^3 = ABD$.
2. Si $4\sqrt{x}(= 4x^{1/2}) = y$, se tendrá $\frac{8}{3}x^{3/2}(= \frac{8}{3}\sqrt{x^3}) = ABD$.
3. Si $\sqrt[3]{x^5}(= x^{5/3}) = y$, se tendrá $\frac{3}{8}x^{8/3}(= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) = ABD$.
4. Si $\frac{1}{x^2}(= x^{-2}) = y$, esto es, si $a = 1 = n$ y $m = -2$, se tendrá $(\frac{1}{-1}x^{-1/1} =) - x^{-1}(= \frac{-1}{x}) = \alpha BD$, infinito extendido hacia α que el cálculo establece negativa[93] ya que ésta yace del otro lado de la línea BD. 5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}(= x^{-3/2}) = y$, se tendrá $(\frac{2}{-1}x^{-1/2} =)\frac{2}{-\sqrt{x}} = AB\alpha$.
6. Si $\frac{1}{x}(= x^{-1}) = y$, se tendrá $\frac{1}{0}x^{0/1} = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0}$ =infinito, la cual es el área de la hipérbola en ambos lados de la línea BD.

[93] Esta explicación es incorrecta desde el punto de vista moderno, no sobra señalar.

Cuadratura de curvas compuestas a partir de más sencillas
1 Regla II

Si el valor mismo y está compuesto de múltiples términos, el área también estará compuesta de las áreas de los términos individuales.

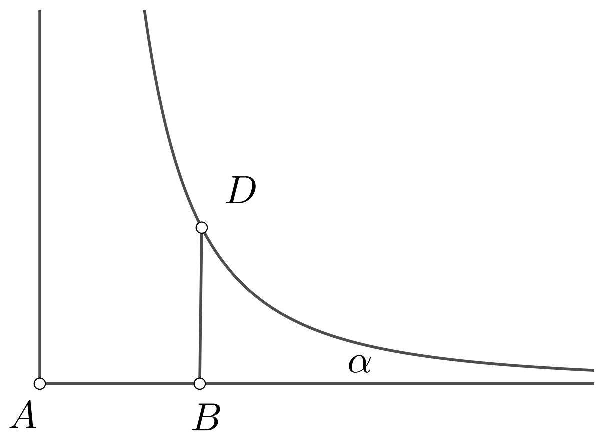


Figura 13: Figura semejante al del original de Newton: Regla I, 4.

Primer ejemplo.

Si $x^2 + x^{3/2} = y$, se tendrá $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{5/2} = ABD$. En efecto, siempre que sea $x^2 = BF$ y $x^{3/2} = FD$ se tendrá por la regla precedente $\frac{1}{3}x^3$ igual al área AFB descrita por la línea BF y $\frac{2}{5}x^{5/2}$ igual a AFD descrita por DF de donde $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{5/2}$ es igual a la totalidad ABD. Así, si

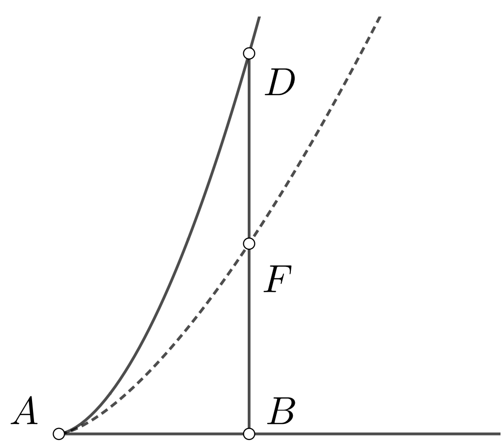


Figura 14: Figura semejante al del original de Newton: Regla II, ejemplo primero.

$x - x^{3/2} = y$, se tendrá $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{5/2} = ABD$ y si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$, se tendrá $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 = ABD$.

Se traduce a continuación, la sección titulada "Aliarum Omnium Quadratura. Regula III", es decir, "cuadratura de todas las demás. Regla III", la cual se encuentra a partir de la página 5 en el original de Newton, y la cual se estudia en el ensayo que precede a la traducción del original.

Cuadratura de todos los otros casos
Regla III.

Si el valor de y, o uno de sus términos es más complejo que los anteriores, hay que reducirlo a términos más simples, trabajando las letras del mismo modo que los aritméticos dividen números decimales, se extraen las raíces o resuelven las ecuaciones involucradas. Siguiendo las reglas anteriores, encontrará el área buscada de la curva.

Ejemplo: dividiendo

Sea $\frac{a^2}{b+x} = y$, curva que representa a una hipérbola. Al ser liberada esta ecuación de su denominador, instituyo así la división[94]:

[94] Se usa ahora la notación de Newton salvo que aa se sustituye por a^2, como en las traducciones anteriores.

$$
\begin{array}{lll}
b + x \quad) & a^2 & + \; 0 \left(\frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \cdots \right. \\
& a^2 + \frac{a^2}{b}x & \\
\hline
& 0 - \frac{a^2}{b}x + 0 & \\
& \quad -\frac{a^2}{b}x - \frac{a^2}{b^2}x^2 & \\
\hline
& \qquad 0 + \frac{a^2}{b^2}x^2 + 0 & \\
& \qquad\quad +\frac{a^2}{b^2}x^2 + \frac{a^2}{b^3}x^3 & \\
\hline
& & \vdots
\end{array}
$$

Así de esta $y = \frac{a^2}{b+x}$ se produce una nueva $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} +$

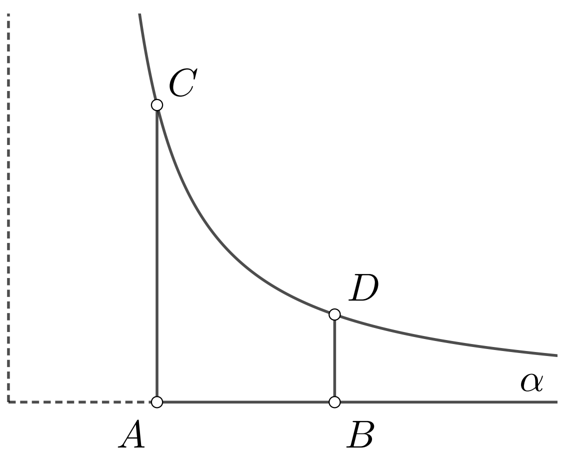


Figura 15: Figura semejante al del original de Newton: Regla III, ejemplo dividiendo.

$\cdots$ la cual es una serie infinita que se continúa así. Y agrego que (por la regla segunda) el área requerida (*sic*) $ABCD$ será igual a lo siguiente $y = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \cdots$ lo cual es también una serie infinita, pero cuyos pocos términos iniciales son suficientemente exactos para el uso de cualquiera, siempre que x sea varias veces menor que b.

De la misma manera, si se tiene $\frac{1}{1+x^2} = y$, dividiendo se llega a $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots$. De donde (por la regla segunda) se tendrá $ABDC = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \cdots$.

O si se pone primero el término x^2 como divisor, de este modo $x^2 + 1$, se tendrá $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \cdots$ para el valor del mismo y. De donde, (por la regla segunda) se obtendrá $BD\alpha = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} - \frac{1}{7}x^{-7} + \cdots$. El primer método procede para x suficientemente pequeña, el segundo si se supone x suficientemente grande.

Finalmente, si $\frac{x^{1/2}-x^{3/2}}{1+x^{1/2}-3x} = y$, al dividir da $2x^{1/2} - 2x + 7x^{3/2} - 13x^2 + 34x^{5/2} + \cdots$, de donde, $ABCD = \frac{4}{3}x^{3/2} - x^2 + \frac{14}{5}x^{5/2} - \frac{13}{3}x^3 + \cdots$.

Ejemplo extrayendo raíces

Sea $\sqrt{a^2 + x^2} = y$, así extraigo la raíz[95],

$$
\begin{array}{ll}
a^2 + x^2(& \quad a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \cdots \\
\hline
 & a^2 \\
\hline
 & 0 + x^2 \\
 & \quad x^2 + \frac{x^4}{4a^2} \\
\hline
 & 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
 & \quad - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
 & \vdots
\end{array}
$$

Donde para la ecuación $\sqrt{a^2 + y^2} = y$, se produce una nueva, a saber $y = a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} + \dfrac{x^6}{16a^5} - \dfrac{5x^8}{128a^7} + \cdots$ y (por la regla 2) el área buscada $ABCD$ será igual a $ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \cdots$. Y esta es la cuadratura de la hipérbola.

Del mismo modo, si fuera $\sqrt{a^2 - x^2} = y$ su raíz será

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \cdots. \qquad (62)$$

Agrego que el área buscada $ABDC$ será igual a $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} + \cdots$. Y esta es la cuadratura del círculo.

Pero si pusiera (*n. t.* el lector) $\sqrt{x - x^2} = y$ será la raíz igual a la serie infinita $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} + \cdots$ Y el área buscada ABD será igual a $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} + \cdots$ o (*n.t.* factorizando) $x^{\frac{1}{2}}$ en $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5 + \cdots$. Y esta es la cuadratura del área del círculo.

95 Se escribe aquí una notación similar a la del original.

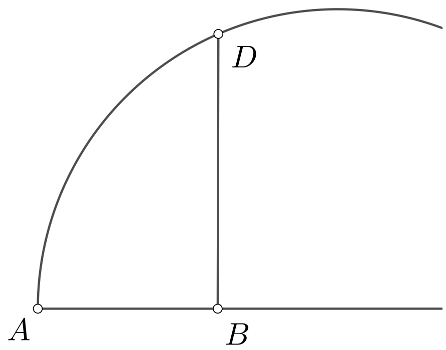


Figura 16: Figura semejante al del original de Newton: Regla III, ejemplo extrayendo raíces.

Cálculo de la base dada la longitud de la curva (p. 17)

Si dado el arco αD se desea el seno AB, se obtiene de la ecuación $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7+$ etcétera, calculada antes (suponiendo que $AB = x$, $\alpha D = z$ y $A\alpha = 1$), la raíz extraída[96] será $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$. etcétera. Y más aun si se desea el coseno $A\beta$ de este arco dado, haga (*sic*) $A\beta(= \sqrt{1-x^2}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, etcétera.

[96] Es decir, el seno de z, Newton llama *raíz* a la cantidad que encuentra con el cálculo de la inversa, puesto que ha usado con antelación su técnica para encontrar raíces de ciertas ecuaciones que no discutimos en este libro.

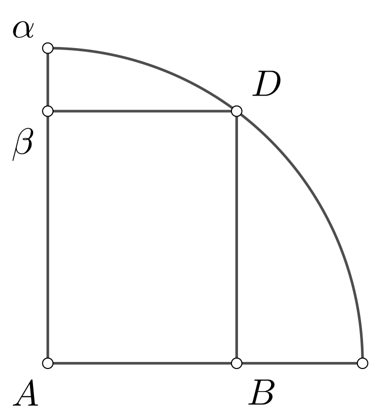


Figura 17: Figura semejante a: Cálculo de la base dada la longitud de la curva del original de Newton p. 17.

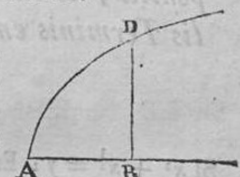
Nota. En esta mínima sección por primera vez en la historia aparecen series infinitas para el seno y el coseno. Con tales series pueden aproximarse las funciones trigonométricas para *cualquier arco* con un error arbitrariamente pequeño, de allí su importancia histórica.

DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, fit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & fint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ ABD.*

Res Exemplo patebit.

1. Si x^2 ($= 1x^{\frac{2}{1}}$) $= y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABD.

A

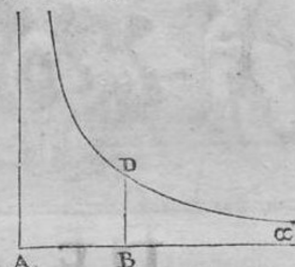
2. Si

Original de Newton *op. cit.*. Crédito de la digitalización *ETH-Bibliothek Zürich*
https://doi.org/10.3931/e-rara-8934

2. Si $4\sqrt{x}\ (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\ (= \frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3}) =$ ABD.

3. Si $\sqrt[3]{x^5}\ (= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\ (= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) =$ ABD.

4. Si $\frac{1}{x^2}\ (= x^{-2}) = y$, id eſt, ſi $a = 1 = n$, & $m = -2$;



Erit $(\frac{1}{-1}x^{-\frac{1}{1}} =) - x^{-1}\ (= -\frac{1}{x}) = \alpha$BD, infinite verſus α protenſæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ (= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(\frac{2}{-1}x^{-\frac{1}{2}} =) \frac{2}{-\sqrt{x}}$ = BDα.

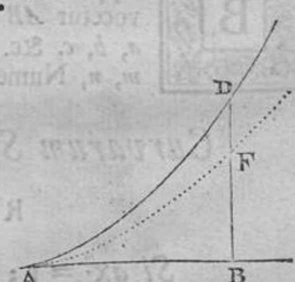
6. Si $\frac{1}{x}\ (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipſius y *ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a ſingulis Terminis emanant.*

Exempla Prima.



Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Etenim ſi ſemper ſit $x^2 =$ BF, et $x^{\frac{3}{2}} =$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per Lineam BF, et $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic ſi $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et ſi $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipſius* y*, vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.

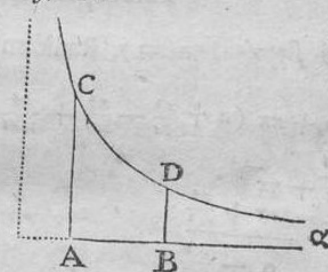
Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x}=y$; Curva nempe exiſtente Hyperbola.

Jam ut Æquatio iſta a Denominatore ſuo liberetur, Diviſionem ſic inſtituo.

$$b+x)\ aa+0\ \left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa+\frac{aax}{b} \\
\hline
0-\frac{aax}{b}+0 \\
\quad -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
\qquad 0+\frac{aax^2}{b^2}+0 \\
\qquad\quad +\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\
\hline
\qquad\qquad 0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\
\qquad\qquad\quad -\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0+\frac{aax^4}{b^4} \\
\qquad\qquad\qquad \&c.
\end{array}$$



Et ſic vice hujus $y = \frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. ſerie iſtac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæſita ABDC æqualis erit ipſi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. infinitæ etiam ſeriei, cujus tamen Termini pauci initiales ſunt in uſum quemvis ſatis exacti, ſi modo x ſit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, ſi ſit $\frac{1}{1+xx} = y$, Dividendo prodibit $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c.

Vel ſi Terminus xx ponatur in diviſore primus, hoc modo $xx + 1$), prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipſius y; Unde (per Regulam Secundam) erit BDα $= -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cum x eſt ſatis parva, poſteriori cum ſatis magna ſupponitur.

Denique ſi $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit

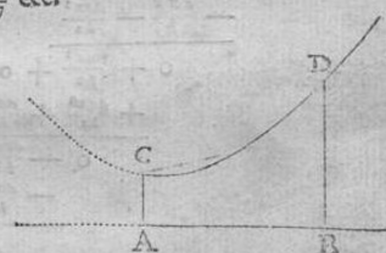
$2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit

ABDC $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

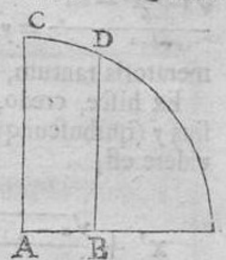
Si ſit $\sqrt{aa + xx} = y$, Radicem ſic extraho,

$$
\begin{array}{l}
aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \right. \text{ \&c.} \\
\underline{aa} \\
0 + xx \\
\quad \underline{xx + \frac{x^4}{4a^2}} \\
\quad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
\quad\quad \underline{- \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}} \\
\quad\quad\quad 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\quad\quad\quad\quad \underline{+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{\&c.}
\end{array}
$$



Unde,

Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa+xx}=y$, nova producitur, viz. $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæſita ABDC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc eſt Quadratura Hyperbolæ.



Eodem modo, ſi ſit $\sqrt{aa-xx}= y$, ejus Radix erit

$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c.

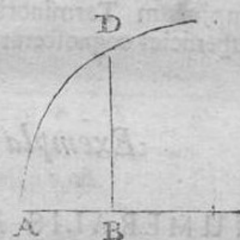
Adeoque Area quæſita ABDC erit

æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c.

Et hæc eſt Quadratura Circuli.

Vel ſi ponas $\sqrt{x-xx} = y$; erit Radix æqualis infinitæ ſeriei

$x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c.



Et Area quæſita ABD æqualis erit

$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c.

ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c.

Et hæc eſt Areæ Circuli Quadratura.

Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ ;) Extrahendo radicem utramq; prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8} \text{ \&c.}$$

Et Dividendo, ſicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll} 1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & + \frac{35}{128}b^4x^8 & \text{\&c.} \\ \quad + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 & \\ & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 & \\ & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{1}{32}a^3b & \\ & & & - \frac{5}{128}a^4 & \end{array}$$

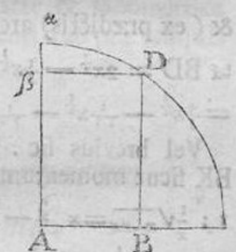
Adeoque Aream quæſitam $\begin{array}{lll} x & + \frac{1}{6}bx^3 & + \frac{3}{40}b^2x^5 \text{ \&c.} \\ & + \frac{1}{6}a & + \frac{1}{20}ab \\ & & - \frac{1}{40}a^2 \end{array}$

Sed

ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantum poſt z^3. Cum radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; Quod poſt primum terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem non addo plures terminos dextrorſum, quam iſtius primi termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis a ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

2. Cum video p, q, vel r, &c. in æquatione noviſſime reſultante eſſe unius tantum dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos terminos quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Baſis ex data Longitudine Curvæ.



Si ex dato arcu αD Sinus AB deſideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. ſupra inventæ, (poſito nempe $AB = x$, $\alpha D = z$, & $A\alpha = 1$,) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea ſi Coſinum $A\beta$ ex iſto arcu dato cupis, fac $A\beta \left(= \sqrt{1 - xx}\right) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

De Serie progreſſionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis iſtarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia obſervata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. Et ſic in reliquis.

Barrow calcula derivadas por primera vez en la historia

El argumento de Newton para calcular derivadas está basado en las ideas de su maestro[97], basta ver el "Ejemplo II" que presenta Barrow[98] en la Lección X, página 82. La idea, con notación moderna, es que para calcular la tangente a una curva en un punto dado basta conocer la intersección de la tangente con el eje x. El ejemplo dado por Barrow consite en encontrar la tangente en un punto cualquiera $M = (x, y)$ a la curva $x^3 + y^3 = r^3$ que pasa por E, M, O con $0 < x, y < 1$ y $0 < r$ dadas. Si x corresponde a la medida de AP y y a la medida de PM, segmento perpendicular a AP, para determinar la tangente basta localizar T, el punto donde la tangente interseca a la recta AP, para lo cual basta calcular el número t, el cual es la medida del segmento PT. Para ello utiliza un argumento metafísico, ya que supone que para PQ y MR "infinitamente pequeños", el triángulo $\triangle MRN$ será semejante al triángulo $\triangle MPT$.

[97] Newton fue alumno de Barrow en el Trinity College Cambridge

[98] Isaac Barrow. *Lectiones opticae et Geometricae in quibus Phaenomenon opticorum Genuina Rationes investigantur, ac exponuntur: et Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur*. Internet Archive 2011

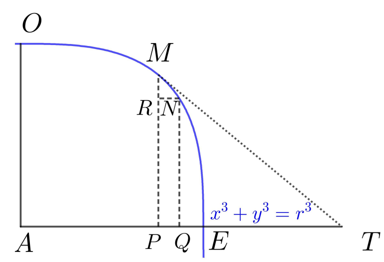


Figura 18: Se desea encontrar la tangente a la curva $x^3 + y^3 = r^3$ que pasa por M para ello basta encontrar el punto T y calcular la distancia $t = PT$, lo cual se logra con la igualdad $t = y^2/x^2$, de acuerdo con Barrow.

Si hacemos $\Delta x = |RN|$ (donde $|RN|$ denota la medida del segmento RN), y hacemos $\Delta y = |MR|$, Barrow calcula que si $\Delta x, \Delta y$ son infinitamente pequeñas entonces el punto $(x + \Delta x, y - \Delta y)$ también satisface la ecuación $x^3 + y^3 = r^3$ y así, determina Barrow que

$$\begin{aligned} r^3 &= (x+\Delta x)^3 + (y-\Delta y)^3 \\ r^3 &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + y^3 - 3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 - (\Delta y)^3 \\ 0 &= 3x^2\Delta x - 3y^2\Delta y. \end{aligned}$$

Primero, como $x^3 + y^3 = r^3$, estas cantidades se anulan entre sí en la ecuación anterior. En segundo lugar, para obtener la tercera ecuación, se cancelan todas las cantidades $(\Delta x)^2, (\Delta x)^3, (\Delta y)^2, (\Delta y)^3$. Ya que, según Barrow son todas cero, dado que al elevar una cantidad infinitamente pequeña al cuadrado y al cubo, respectivamente, estas cantidades son comparables con cero (no olvide que $\Delta x, \Delta z$ son infinitesimales para Barrow). Por lo tanto, dado que $0 = 3x^2\Delta x - 3y^2\Delta y$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{(r^3 - x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Observe que Barrow con su técnica[99] ha calculado la derivada de

[99] El resultado de Barrow, es el que se obtiene en los cursos de Cálculo con la técnica de derivación implícita, con excepción de un signo faltante.

$y = (r^3 - x^3)^{1/3}$, (salvo el signo menos que falta), y por triángulos semejantes (según Barrow, el teorema de semejanza de triángulos se debe cumplir para triángulos con lados infinitamente pequeños), el triángulo $\triangle MRN$ es semejante al triángulo $\triangle MPT$, con lo cual se tiene que:

$$\triangle MRN \sim \triangle MPT \iff \frac{t}{y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \iff t = \frac{y^3}{x^2}.$$

Vale la pena mencionar que el segmento dado por t tiene el nombre de *subtangente* y encontrarlo se puso de moda en la época en la que vivió Barrow, dado que la tangente (y con ella, la derivada) queda totalmente determinada con ese segmento y el punto sobre la curva donde se quiere trazar la tangente. Es decir, con la subtangente puede construirse la tangente con regla y compás. Cabe señalar que, sin embargo, la fama que gozó la subtangente ha desaparecido actualmente.

Traducción del original de Barrow[100]*: Ejemplo II.*

Sean la curva EMO y una recta EA (posición y magnitud dada) tales que cualquier recta MP construida de tal manera que sea perpendicular a EA, tengan la propiedad de que la suma de cubos de AP y MP sea igual al cubo de la recta AE. Llámese $AE = r$, $AP = f$,

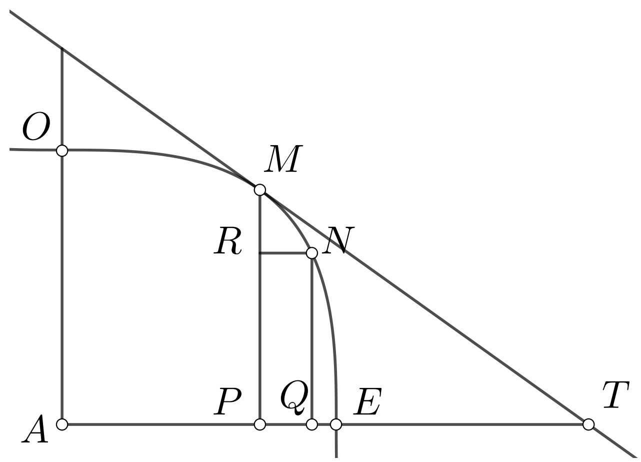


Figura 19: Figura semejante al del original de Barrow. En el original la curva está rotada. Aquí se muestra la gráfica de $x^3 + y^3 = r^3$ en los ejes con la orientación normal que se usa actualmente.

donde $AQ = f + e$ y $AQ^3 = f^3 + 3f^2e + 3fe^2 + e^3$ (o quitados los terminos superfluos como se ha prescrito[101]) $= f^3 + 3f^2e$. El término $NQ^3 = (m-a)^3 = m^3 - 3m^2a + 3ma^2 - a^3$ (esto es[102]) $= m^3 - 3m^2a$. Por lo cual se tiene $f^3 + 3f^2e + m^3 - 3m^2a = (AQ^3 + NQ^3 = AE^3 =)r^3$ y quitadas las (cantidades) dadas[103], se tiene $3f^2e = 3m^2a = 0$ o bien $f^2e = m^2a$. Y sustituyendo en lugar de a lo mismo m que t se tiene $f^2t = m^3$, o $t = \dfrac{m^3}{f^2}$. Por lo tanto PT es la cuarta proporcional[104] de la razón AP a PM continuada[105].

Similarmente, si se tuviera[106] $AP^4 + MP^4 = AE^4$ se tendría $PT = \frac{m^4}{f^3}$, o PM cuarta proporcional en la razón AP a PM y así se continúa. Desconozco si estas líneas (*sic*) *cicloformes*[107] son dignas de observación.

Guía para la traducción

Para comparar la traducción anterior con el texto explicativo previo, note que en el primer texto x equivale a f en la traducción, y corresponde a m, recuerde que en la gráfica x y y están invertidas respecto a lo que se usa actualmente. También $\Delta x \equiv a$ y $\Delta y = e$, aunque en realidad Barrow está operando con infinitesimales (i.e. cantidades infinitamente pequeñas que no son realmente los incrementos Δx, Δy), tales infinitesimales no existen en $\mathbb{R}$.

[100] Isaac Barrow. *Lectiones opticae et Geometricae in quibus Phaenomenon opticorum Genuina Rationes investigantur, ac exponuntur: et Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur*. Internet Archive 2011

[101] Barrow se refiere a que se eliminan las cantidades pequeñas $3e^2f, e^3$ al ser e "infinitesimalmente" pequeña.

[102] Dado que a es "infinitesimalmente" pequeña.

[103] *i.e.* quitadas las cantidades 'infinitesimales".

[104] La cuarta proporcional x dadas las cantidades a, b, c, está dada por la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

[105] Se entiende que "continuada" hasta llegar a los infinitesimales.

[106] Similarmente si se tuviera $x^4 + y^4 = r^4$, dice el texto traducido a notación moderna y la exacta forma como lo escribió Barrow es $APqq + MPqq = Aqq$.

[107] "Lineas cicloformes" significa "líneas con forma de ciclo" por su parecido con la circunferencia, recuerde que al pasar a coordenadas cartesianas la curva del ejemplo tiene ecuación $x^3 + y^3 = r^3$.

82 **L E C T. X.**

abjicienda) $= 2\,rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò subſtituendo m pro a, & t pro e, eſt $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta E A (poſitione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & A Q cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (ſeu abjectis ſuperfluis, ex præſcripto) $= f^3 + 3ffe$. Item N Q cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc eſt) $= m^3 - 3mma$. Quapropter eſt $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (A Q cub. + N Q cub. $=$ A E cub. $=$) r^3. abjectíſque datis, eſt $3ffe = 3mma = o$. ſeu, $ffe = mma$; ſubrogatíſque loco a, & e ipſis m, & t, erit $fft = m^3$; ſeu $t = \frac{m^3}{ff}$; eſt ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

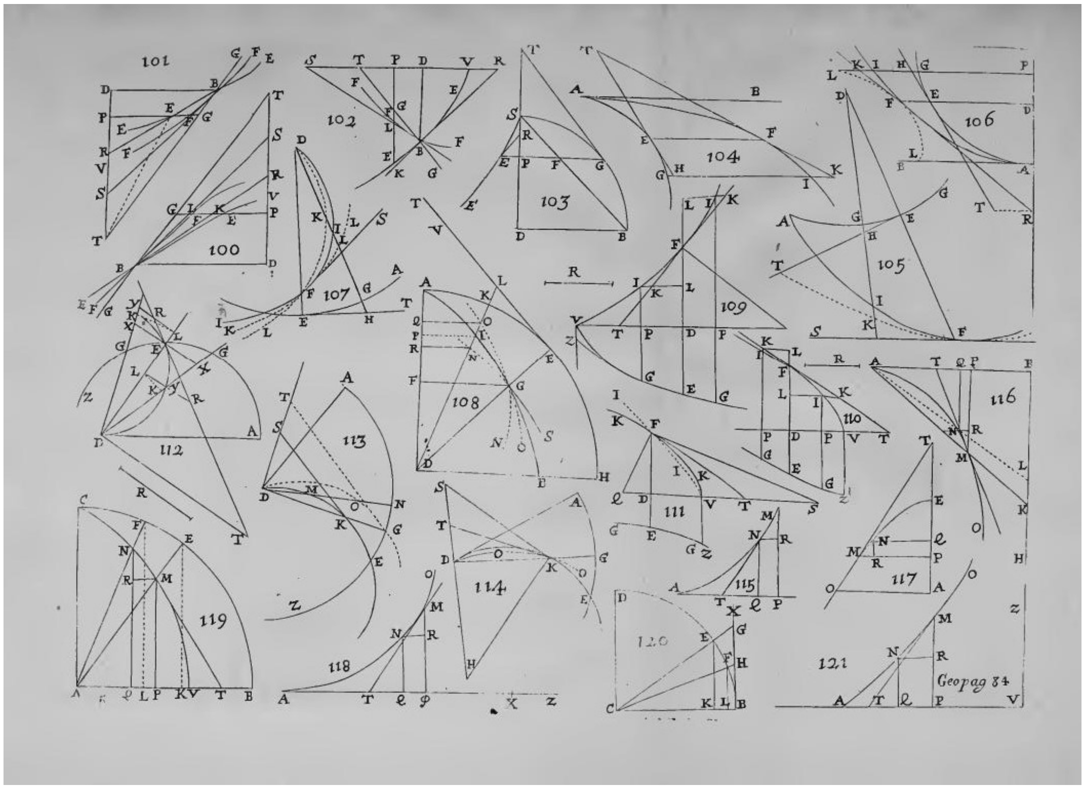
Similiter, Si fuerit A P qq + M P qq $=$ A E qq; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel P M quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* iſtis lineis an obſervatu dignum ſit neſcio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Poſitione data ſit recta A Z, & A X magnitudine ; ſit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, ſit A P *cub.* + P M *cub.* $= AX \times AP \times PM$.

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & A Q *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & Q N *cub.* $= m^3 - 3mma$. & $AQ \times QN = fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde $AX \times AQ \times QN = bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; ſeu amoliendo rejectanea

Ejemplo II del original de Barrow *op. cit.*. Créditos de la digitalización *The Internet Archive* (2011) http://www.archive.org/details/lectionesopticOObarr



Figuras originales del texto de Barrow, la figura con el número 117 corresponde al ejemplo 2 estudiado en este texto.

Ptolomeo basamenta la astronomía con tablas trigonométricas

De la colosal obra de Ptolomeo, se estudiará solo la parte con la cual se construye la trigonometría moderna. Los antecedentes de esta obra, entre los cuales se menciona la obra de Hiparco, son prácticamente desconocidos en la actualidad, ya sea porque se perdieron en el tiempo, entre guerras y la destrucción que conllevan, o ya sea porque la obra de Ptolomeo volvió obsoletos los saberes precursores y se fueron desvaneciendo al ser olvidados.

Si algo caracteriza a la obra de Ptolomeo es su generosidad. En el *Almagesto*, es decir, en la *Compilación Matemática,* como más modestamente realmente tituló a su obra el matemático y astrónomo, el lector encontrará el catálogo de todas las estrellas visibles a simple vista en el hemisferio que habitó Ptolomeo; una guía para construir un instrumento para medir posiciones de los astros y la inclinación de la eclíptica; la famosa tabla de cuerdas calculadas rigurosamente con varios sexagesimales exactos y que comprende todos los arcos de una semicircunferencia comenzando con $1/2$ grado hasta llegar a los 180 grados, con incrementos de medio grado entre cada uno de ellos; mucho más se encuentra en la obra de Ptolomeo, entre otras cosas relevantes, los modelos matemáticos de los movimientos planetarios fundados en rigurosas observaciones e innumerables tablas de observaciones basadas en la trigonometría.

Además, el tratado incluye las técnicas que utilizó Ptolomeo para sus cálculos y las demostraciones rigurosas de su validez, todas ellas fundamentadas dentro del contexto de la teoría contenida en los Elementos de Euclides.

Las argumentaciones que aparecerán junto a las ecuaciones (y que también se encuentran en el libro de Thomas[108]) son tomadas de la edición de Heiberg[109] quien editó y tradujo los *Elementos* de Euclides[110], la edición citada es a la que nos referiremos con la numeración de las proposiciones allí dada. Tales argumentaciones no aparecen en el original (del cual se presentará una traducción), dado que se daban por *conocidas*, como se dice en la literatura matemática.

[108] Ivor Thomas. *Greek Mathematical Works, Aristarchus to Pappus*. Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, London, England, 2005

[109] Claudii Ptolemaei. *Syntaxis Mathematica edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri, 1898

[110] Euclides. *Euclid's Elements of Geometry, The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick*. Open Source, 2007. ISBN 978-0-6151-7984-1

Construción de la Tabla de senos

Lo primero que considera Ptolomeo es asignar medidas a los arcos de circunferencia dada una escala en el diámetro de la circunferencia. El matemático asigna 120 partes al diámetro, lo cual denotaremos: 120^p; esto es conveniente para los cálculos. También divide la circunferencia en 360 partes lo que se denotará como se hace usualmente: $360°$ dividiendo, además, cada grado a la mitad. La división de $360°$ de la circunferencia, como se sabe, tiene origen con los babilonios y esta basada en un ancestral calendario solar de 360 días.

Observe que la división del diámetro se proyecta de alguna manera sobre la circunferencia y, por lo tanto, las unidades del diámetro son *diferentes* a las unidades sobre la circunferencia, de otra forma, se tendría $\pi = \frac{360}{120} = 3$, lo cual, cualquiera que haya leído desde el principio este libro sabe que *no es verdad*, como lo sabía Ptolomeo. Esta diferencia entre unidades, digamos, planas y las unidades, digamos, circulares, es la principal dificultad para medir cuerdas, dado un arco, y recíprocamente.

Ahora conocida la cuerda para $60°$, Ptolomeo construye con *regla y compás* la cuerda para un arco de $36°$ dado por un decágono y la de $72°$ que corresponde a un pentágono, pero recuerde que debe usar la cuerda conocida del hexágono. La construcción se sigue de la figura 20 y es como sigue.

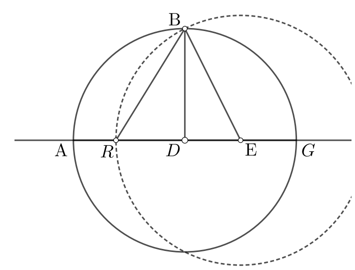


Figura 20: La figura corresponde a la construcción de los lados de un pentágono y un decágono regulares que pueden ser inscritos en una circunferencia a partir de la cuerda de un hexágono regular también inscrito.

Dada una circunferencia que pasa por A, B, G con centro en D y diámetro AG, se construye la perpendicular al diámetro que pasa por D, se supone que B es la intersección de tal perpendicular con la circunferencia. Al ser DB un radio, este corresponde a la cuerda de un hexágono inscrito en la circunferencia. Sea E el punto medio de DG, se afirma que EB es el lado del decágono. Ahora construya una circunferencia con centro en E y radio EB. Sea R la intersección de tal circunferencia con el diámetro AG. Se afirma que BR es el lado del pentágono buscado.

Efectivamente,

$$\begin{aligned} GR \cdot RD + ED^2 &= ER^2, \text{ Euclides, libro 2, prop. 6} \\ &= BE^2, \text{ dado que } ER = BE. \end{aligned}$$

Pero, por el teorema de Pitágoras[111],

$$ED^2 + DB^2 = EB^2,$$

por lo cual,

$$GR \cdot RD + ED^2 = ED^2 + DB^2.$$

Al restar ED^2 queda,

$$GR \cdot RD = DB^2 = DG^2,$$

[111] El teorema llamado *de Pitágoras* es la proposición 47 del libro 1 de los elementos de Euclides.

ya que DB y DG son ambos radios del círculo. O bien

$$\frac{GR}{DG} = \frac{DG}{RD}.$$

De donde puede concluirse que RG está dividido en D, en la razón media y extrema, es decir, en proporción áurea[112]. Entonces DR es el lado de un dacágono (Euclides, libro 13, prop. 9). Además, como ya se mencionó, GD es el radio del círculo y, por lo tanto, GD es igual a un lado del hexágono inscrito (Euclides, libro 4, corolario de la proposición 15).

[112] Euclides, libro 6, definición 2, pag. 156: *Una línea recta se dice que está dividida en razón media y extrema cuando el todo al segmento mayor es como el mayor al segmento menor* .

El que BR sea el lado de un pentágono inscrito en el círculo se sigue de la proposición 10 del libro 13 de Euclides y del teorema de Pitágoras, dado el triángulo RDB en la figura 20.

Ahora, Ptolomeo puede dar las medidas de los arcos. Primero calcula EB mediante el teorema de Pitágoras con el triángulo DEB de la figura 20. Ya que el diámetro tiene 120 partes, el radio 60 partes; entonces, como DE es la mitad de un radio, se sigue que tiene 30 partes y mediante el teorema de Pitágoras

$$EB = ER = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500}$$

Por supuesto, Ptolomeo podía obtener aproximaciones a la raíz cuadrada[113] y, además en base 60, de tal manera que escribe

[113] El metodo para extraer raíz cuadrada en base 60, en particular de 4500 puede encontrarse en un texto de Herón, que puede consultarse en el libro de Thomas *op. cit.* volumen I pag. 57.

$$ER = 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2} = 67^p\,4'\,55''$$

y así el lado del decágono DR es

$$DR = ER - 30^p = 67^p\,4'\,55'' - 30^p = 37^p\,4'\,55''$$

el cual corresponde al arco de $360^\circ/10 = 36^\circ$ del decágono. No olvide el lector la diferencia de unidades $\circ$ y p las cuales corresponden respectivamente a la división de la circunferencia en 360° y la división del diámetro en 120^p. La construcción de un cuadrado es inmediata, por lo que Ptolomeo puede calcular las cuerdas correspondientes a 90°, también mediante el teorema de Pitágoras. Efectivamente, el lado del cuadrado regular inscrito que forma la cuerda y sustenta por lo tanto un arco de 90° mide dos veces el radio de la circunferencia al cuadrado, por el teorema de Pitágoras. Por lo tanto, la cuerda mide $\sqrt{2 \cdot 60^2} = 60\sqrt{2} \approx 84^p\,51'\,10''$. En la tabla 11 se dan las cuerdas medidas en partes tomadas de 120 divisiones del diámetro. Las cuerdas están asociadas con los arcos correspondientes a los polígonos allí incluidos.

Polígono	cuerda p	arco θ°	cuerda $/120^p$	$2\,\mathrm{sen}\,\theta/2$
decágono	$37^p\,4'\,55''$	36°	0.30901620370	0.3090169943
pentágono	$70^p\,32'\,3''$	72°	0.58778472222	0.5877852522
hexágono	60^p	60°	0.5	0.5
cuadrado	$84^p\,51'10''$	90°	0.70710648148	0.7071067811
triángulo	$103^p 55'\,23''$	120°	0.86599537037	0.8660254037

Cuadro 11: Cuerdas construidas con regla y compás por Ptolomeo en el *Almagesto*.

Observe que las cuerdas, medidas en grados, corresponden a dos veces el seno de la mitad del ángulo, como se muestra en la figura 21. Por lo que, para comparar los cálculos de Ptolomeo con los cálculos modernos, se debe tomar la mitad del arco, tomar el seno y multiplicar por 2. Recuerde que las funciones trigonométricas están definidas en un círculo de radio 1. En la tabla 11, para obtener la equivalencia de las partes de las cuerdas dadas por Ptolomeo, se debe recordar que se dividió el diámetro en 120 partes, por lo que, para comparar con el seno, se deben dividir las partes que mide la cuerda (en base 60), entre 120 partes, como se muestra en la tercera columna de la tabla.

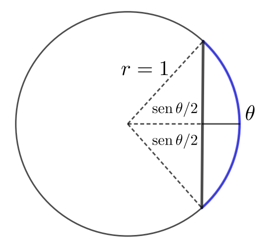


Figura 21: Las cuerdas medidas por Ptolomeo en θ° son equivalentes a $2\,\mathrm{sen}\,\theta^\circ/2$

El resultado principal de Ptolomeo no es el mostrado en la tabla 11, sino un teorema a partir del cual se obtiene un equivalente a la identidad $\mathrm{sen}\,(\theta - \phi) = \mathrm{sen}\,\theta\cos\phi - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$, el teorema al que nos referimos se llama precisamente *Teorema de Ptolomeo*.

Teorema de Ptolomeo

Dado un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, entonces el producto de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero es la suma de los productos de las longitudes lados opuestos.

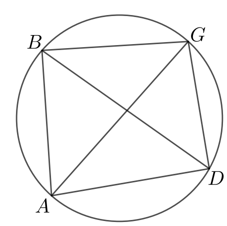


Figura 22: En un cuadrilatero $ABGD$ inscrito en una circunferencia, como el de la figura, se cumple $AG \cdot BD = BA \cdot DG + AD \cdot GB$.

Ptolomeo demuestra el teorema mediante una construcción ingeniosa y un uso reiterado de los teoremas de semejanza de triángulos siguiendo los siguientes pasos:
(i) Construye el punto E sobre una de las diagonales de tal modo que $\angle EBA = \angle GBD$, como en la figura 23.
(ii) Observa que los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle EGB$ son semejantes figura 24, para este fin, utiliza la proposición 21 del libro 3 de los elementos[114]. En la figura 25 se indica con marcas los ángulos que son congruentes en los triángulos involucrados. Se tiene que $\angle ABD \cong \angle EBG$ por construcción y $\angle ADB \cong \angle AGB$ dado que los ángulos, uno con vértice en D y otro con vértice en G, subtienden la misma cuerda AB y, por lo tanto, subtienden el mismo arco.

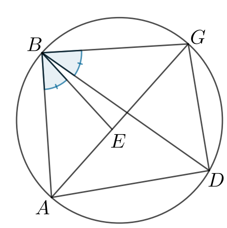


Figura 23: Se construye el punto E de tal forma que $\angle EBA = \angle GBD$.

[114] Euclides, libro 3, prop. 21: *En un círculo ángulos inscritos que subtienden el mismo arco son iguales entre sí.*

Dado que $\triangle ADB$ y $\triangle EGB$ son semejantes se cumplen las siguientes relaciones[115],

$$\frac{BG}{EG} = \frac{BD}{AD},$$

[115] Euclides, libro 6, prop. 4: *En triángulos equiangulares los lados de ángulos iguales son proporcionales y los lados subtendiendo ángulos iguales se corresponden.*

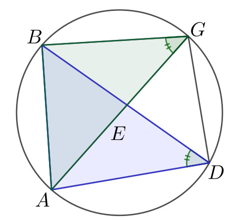


Figura 24: Los ángulos con vértices en D y G son congruentes por la proposición 21 del libro 3 de los elementos.

o bien,

$$BG \cdot AD = BD \cdot EG,$$

(iii) En la figura 26 los triángulos $\triangle AEB$ y $\triangle DGB$ son también semejantes, ya que tienen los ángulos $\angle ABE$ y $\angle DBE$ congruentes, por construcción, y también tienen congruentes los ángulos $\angle EAD$ y $\angle BDG$, dado que al prolongarse AE hasta G se observa que dichos ángulos subtienden el mismo arco GB. Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DG}$$

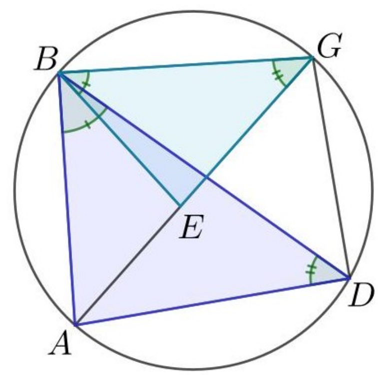


Figura 25: Los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle DGB$ son semejantes.

o bien,

$$AB \cdot DG = BD \cdot AE.$$

Se puede concluir que

$$\begin{aligned} AG \cdot BD &= (AE + EG) \cdot BD \\ &= AE \cdot BD + EG \cdot BD \\ &= AB \cdot DG + AD \cdot BG. \end{aligned}$$

Lo cual se deseaba demostrar.

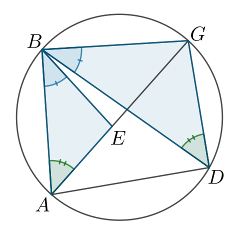


Figura 26: Los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle BEG$ son semejantes.

Diferencia de arcos

Del Teorema de Ptolomeo es inmediata una relación para la diferencia de arcos, si se considera el caso particular en el que una de las cuerdas del cuadrilátero es un diámetro de la circunferencia, es decir, si se considera un arco de $180°$. En la figura 27, AD es un diámetro de la circunferencia, si se conocen las cuerdas AB y AG, entonces puede conocerse BG. Por el teorema de Ptolomeo se concluye que $AG \cdot BD = AB \cdot DG + AD \cdot BG$,

$$AD \cdot BG = AG \cdot BD - AB \cdot DG.$$

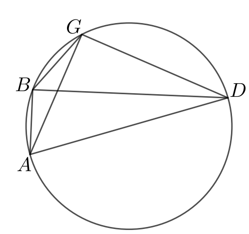


Figura 27: Si A, B, G, D estan inscritos en una semicircunferencia y AD es su diámetro, si se conocen AB y AG, puede conocerse BG.

Observe que tanto BD como DG pueden ser calculadas, ya que todo triángulo inscrito en una circunferencia con base sobre el diámetro y con vértice opuesto al diámetro sobre la misma circunferencia es necesariamente rectángulo[116], por lo tanto, mediante el teorema de Pitá-

[116] Euclides, libro 3, prop. 20: *En todo círculo el ángulo en el centro es el doble de aquel sobre la circunferencia cuando los ángulos subtienden el mismo arco.*

goras pueden ser calculadas BD y GD. Con lo que se pueden conocer las cuerdas de los arcos complementarios a AB y AG, es decir se pueden conocer las cuerdas de los arcos: $180^\circ - arco AB$ y $180^\circ - arco AG$. Pasando a la notación moderna, si se denota por 2θ el arco subtendido por AG y por 2ϕ el arco subtendido por AB, dado que, según la ecuación anterior

$$\begin{aligned} &cuerda(2\theta - 2\phi) \cdot cuerda\, 180^\circ = \\ &= cuerda(2\theta) \cdot cuerda(180^\circ - 2\phi) - cuerda(2\phi) \cdot cuerda(180^\circ - 2\theta) \end{aligned}$$

y como $cuerda\, 180^\circ = 2 \operatorname{sen} 90^\circ = 2$, se tiene

$$4 \operatorname{sen}(\theta - \phi) \quad = \quad 2 \operatorname{sen}\theta \cdot 2 \operatorname{sen}(90^\circ - \phi) - 2 \operatorname{sen}\phi \cdot 2 \operatorname{sen}(90^\circ - \theta)$$

De la anterior relación se sigue fácilmente la identidad moderna

$$\operatorname{sen}(\theta - \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi - \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

de sabida inmensa utilidad. Ptolomeo con su nueva fórmula calcula inmediatamente la cuerda que subtiende un arco de 12°, ya que acaba de calcular la del arco de 60° y la de 72°.

Fórmula para la mitad de un arco

Lo que sigue es calcular la cuerda que corresponde a la mitad de un arco dado. En la figura 28 la cuerda GB y el arco subtendido por ella son conocidos, entonces se conoce el arco $GD = \frac{1}{2}GB$. Para ello recurre Ptolomeo a lo que ahora llamamos el coseno del arco, claro, sin llamarlo así. De nuevo, mediante teoremas de semejanza de triángulos, dados en los *Elementos* encuentra una fórmula que es equivalente a la identidad moderna

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta),$$

donde θ corresponde al arco dado en grados, por supuesto.

Con esta fórmula Ptolomeo obtiene la cuerda de $6^\circ, 3^\circ, 1\frac{1}{2}^\circ, \frac{3}{4}^\circ$ (dado que acaba de calcular la de 12°) y reporta que (siendo el diámetro de 120 partes),

$$\begin{aligned} \text{cuerda del arco de } 1\frac{1}{2}^\circ &\quad = \quad 1^p\, 34'\, 15'' \\ \text{cuerda del arco de } \frac{3}{4}^\circ &\quad = \quad 0^p\, 47'\, 8'' \end{aligned}$$

Y sí, estimado lector, ha visto usted bien, aparece el *cero* en su función posicional, ¡Ptolomeo usaba el cero! Por lo menos así aparece en la edición de Heiberg[117,118] de 1898 (pág. 41) donde puede verse el número en griego

$$\bigcirc\, \overline{\mu\xi}\ \overline{\eta}$$

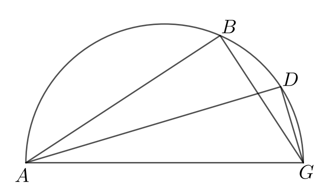


Figura 28: El arco GB y su cuerda son conocidos, se desea calcular la cuerda de la mitad del arco GD.

[117] Claudii Ptolemaei. *Syntaxis Mathematica edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri, 1898

[118] La edición de Heiberg, según el prefacio del libro, está basada en documentos escritos en griego a los que el autor tuvo acceso, por ejemplo el *codex Parisinus Graecus 2389*, el *codex Uaticanus Graecus 1594* (accesible en internet), el *codex Martianus Graecus 313*, entre varios más.

lo cual es equivalente a $0^p\,47'\,8''$, es decir, el símbolo $\bigcirc$ es equivalente al 0, aunque cabe mencionar que en la versión en latín en la parte correspondiente del texto, la cual se traduce más adelante, no se menciona el cero[119] pero el símbolo si aparece en las tablas.

El procedimiento para encontrar la fórmula es el siguiente . De nuevo se considera la semicircunferencia con diámetro AG. Siempre es posible construir con regla y compás la mitad de un ángulo y, por lo tanto, la mitad de un arco. Se desea calcular la cuerda de la mitad del arco GB del cual es conocida su cuerda. Sea el punto D el cual está en la mitad de la cuerda GB. Sea E sobre el diámetro tal que $AE = AB$ y sea R el pie de la perpendicular al diámetro que pasa por el punto D.

Los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle AED$ son congruentes dado que, por construcción, tienen lado común AD, $AB = AE$ y, además, $\angle BAD = \angle DAG$, por lo tanto[120] $DB = ED$. Además $DB = GD$, ya que son cuerdas de arcos de la misma medida y, por lo tanto, el triángulo $\triangle EGD$ es isósceles. Así dado que $RD \perp EG$, se tiene que (de nuevo por congruencia de triángulos, Euclides, libro 1, prop 26) $ER = RG$. Pero EG es la diferencia entre AB y AD y entonces RG es la mitad de tal diferencia. Dado que la cuerda que subtiende el arco BG es conocida así como el diámetro AG dado que (como ya se mencionó) el ángulo $\angle ABG$ es recto entonces $AB = AE$ son conocidos inmediatamente (por el teorema de Pitágoras) y así RG es también conocido. Además[121] $\triangle AGD$ es semejante a $\triangle DRG$ por lo que

$$\frac{AG}{GD} = \frac{GD}{GR},$$

es decir,

$$AG \cdot GR = GD^2.$$

Como AG y GR están dados, entonces se puede conocer GD^2 y, por lo tanto, GD.

Recapitulando, si BG subtiende un arco de 2θ se ha obtenido que

$$(cuerda\,\theta)^2 = (cuerda\,180^\circ)\cdot\frac{1}{2}\Big(\,(cuerda\,180^\circ) - cuerda\,(180^\circ - 2\theta)\Big)$$

lo que se traduce a notación moderna como

$$\operatorname{sen}^2(\theta/2) = \operatorname{sen}90^\circ\cdot\left(\frac{1}{2}(\operatorname{sen}90^\circ - \cos\theta)\right)$$

o bien,

$$\operatorname{sen}^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta).$$

Fórmula para el coseno de suma de arcos

Posteriormente, Ptolomeo encuentra una fórmula equivalente a la moderna

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

[119] La opinión de que los griegos no utilizaban el cero como se usa en el sistema de notación arábigo fue establecida por algunos eruditos (vea nota la nota *a* en el vol. 1 de Trevor (*op. cit*)), al parecer $\bigcirc$ es una abreviación de la frase *ninguna parte*, *ουδεμια μοιρα*, en todo caso cumple con la misma función del cero.

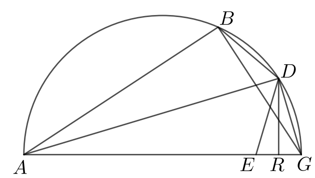


Figura 29: En la figura se tiene $AE = AB$, $DR \perp AG$ y $DE = DG$.

[120] Euclides, libro 1, prop 4: *Si dos triángulos tienen dos lados iguales a dos lados respectivamente y tienen el ángulo formado por los segmentos dados iguales, entonces también tienen la misma base.*

[121] Euclides, libro 6, prop. 8: *Si en un triángulo rectángulo se dibuja una perpendicular de la base al vértice del ángulo recto, entonces los triángulos adosados a la perpendicular son semejantes entre sí y al triángulo completo.*

la cual utilizará para calcular cuerdas de múltiplos de los arcos cuyas cuerdas ya ha calculado.

Para obtener la identidad trigonométrica del coseno de una suma, Ptolomeo construye un círculo que pasa por los puntos ABG inscritos en una semicircunferencia. Se supondrán conocidos los arcos y las cuerdas AB, BG. Entonces se puede conocer la cuerda AG la cual subtiende el arco que resulta de la suma de arcos AB y BG.

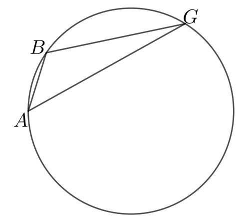


Figura 30: Dados dos arcos consecutivos AB y BG cuyas medidas así como las medidas de las cuerdas que los subtienden son conocidas, se puede conocer la medida de la cuerda AG la cual subtiende la suma de arcos AB y BG.

Primero, se agregan sobre la circunferencia los puntos D y E de tal forma que AD y BE son diámetros, dado que pasan por R, el centro de la circunferencia (figura 31).

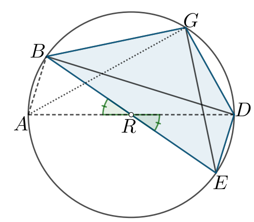


Figura 31: Para la demostración, se agrega a la figura anterior los puntos D y E los cuales con A y B, respectivamente, forman diámetros, siendo R el centro del círculo.

Al ser conocido BG, entonces también GE es conocido (al estar inscritos en una semicircunferencia) similarmente BD es conocido (al ser conocido AB y estar en la misma semicircunferencia ABD) así como DE (al estar en la misma semicircunferencia BDE). Ahora al estar los puntos $BGDE$ en un cuadrilátero, con diagonales BD y GE, por el teorema de Ptolomeo se tiene

$$BD \cdot GE = BG \cdot ED + GD \cdot BE$$

O bien

$$GD \cdot BE = BD \cdot GE - BG \cdot ED$$

En la igualdad anterior la única cuerda no conocida es GD, pero puede determinarse si se conocen las demás. Observe además que $AB = ED$, dado que los triángulos $\triangle ARB$ y $\triangle DRE$ son congruentes por tener dos lados congruentes (los lados son radios de la circunferencia) y el ángulo comprendido entre los lados congruente (son opuestos por el vértice) con el del otro triángulo. De esta forma se obtiene

$$GD \cdot BE = BD \cdot GE - BG \cdot AB$$

En notación moderna si AB subtiende el arco 2θ y si BG subtiende el arco 2ϕ

$$\begin{aligned} &cuerda(180^\circ - 2\theta - 2\phi) \cdot cuerda\,180^\circ = \\ &\quad = cuerda(180^\circ - 2\theta) \cdot cuerda(180^\circ - 2\phi) - cuerda\,2\phi \cdot cuerda\,2\theta \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

Interpolación

Finalmente, para la elaboración de sus tablas, Ptolomeo requiere calcular la cuerda de un arco de $\frac{1}{2}^\circ$, para lo cual utiliza un método de interpolación, con el cual obtiene la aproximación

$$\text{cuerda del arco de } \frac{1}{2}^{\circ} \approx 0^{p}\, 31'\, 25''.$$

Para realizar la interpolación, Ptolomeo recurre a la figura 32 donde se ha trazado una circunferencia que pasa por ABG, la cuerda AB es menor que BG. Ptolomeo afirma que

$$\frac{GB}{BA} < \frac{arco\, GB}{arco\, BA},$$

o en notación moderna, si $\theta = arco\, GB$ y $\phi = arco\, BA$ con $\phi < \theta$,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi} < \frac{\theta}{\phi}.$$

Para obtener una estimación de la cuerda del arco que subtiende $\frac{1}{2}^{\circ}$, primero el matemático considera que BA subtiende un arco de $\frac{3}{4}^{\circ}$ y la cuerda GB, un arco de 1°. Mediante la desigualdad $\frac{GB}{BA} < \frac{\text{arco } GB}{\text{arco } BA}$, se tiene por lo tanto $\frac{GB}{BA} < \frac{4}{3}$. Pero, como ya se mostró, la cuerda $BA = 0^{p}\, 47'\, 8''$, por lo tanto, se tiene para la cuerda de 1°

$$\text{cuerda de } 1^{\circ} = GB < \frac{4}{3} \cdot (0^{p}\, 47'\, 8'') = \left(1 + \frac{20}{60}\right) \cdot \left(\frac{47}{60} + \frac{8}{60^2}\right),$$

o bien

$$\text{cuerda de } 1^{\circ} < 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{40}{60^3}.$$

Sea ahora el arco de $BA = 1^{\circ}$ y el de $GB = 1\frac{1}{2}^{\circ}$. Con un razonamiento similar al anterior se tiene que

$$\text{cuerda de } \frac{3}{2}^{\circ} = GB < \frac{3}{2} \text{ cuerda de } 1^{\circ}$$

Pero en este caso se sabe que $GB = 1^{p}\, 34'\, 15''$ y, por lo tanto,

$$\frac{2}{3} \cdot (1^{p}\, 34'\, 15'') < \text{ cuerda de } 1^{\circ},$$

o bien

$$1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} < \text{ cuerda de } 1^{\circ},$$

por lo tanto se tiene que

$$1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} < \text{ cuerda de } 1^{\circ} < 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{40}{60^3},$$

por lo que Ptolomeo afirma que

$$\text{cuerda de } 1^{\circ} \approx 1^{p}\, 2'\, 50''.$$

Con esta estimación y el teorema para la cuerda del arco mitad que ha demostrado, Ptolomeo puede concluir además que

$$\text{cuerda } \frac{1}{2}^{\circ} \approx 0^{p}\, 31'\, 25'',$$

como se dijo al principio de esta sección.

Demostración de la desigualdad

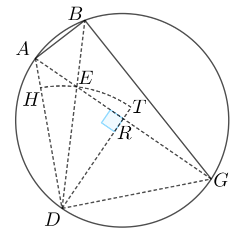


Figura 32: Se comparan los arcos AB y BG con respecto a sus cuerdas.

Para demostrar que la imprescindible desigualdad para sus cálculos $\frac{GB}{BA} < \frac{arco\, GB}{arco\, BA}$ se cumple, Ptolomeo realiza la siguiente construcción (figura 32):
(i) Bisecta el ángulo $\angle ABG$ con la línea DB y entonces[122] $DA = DG$. Se denota con E la intersección de AG con DB y entonces[123] $GE > EA$.
(ii) Se construyen DR perpendicular a AEG y el círculo con centro en D y radio DE el cual corta a AD en H y cae arriba de DR en T. Entonces $AD > ED$ y $ED > ER$ (por construcción ED es radio del círculo HET).
(iii) Se considera ahora el arco HET, entonces, por construcción,

$$\begin{aligned} \text{sector circular } DET &> \text{área } \triangle DER \\ \text{área } \triangle DEA &> \text{sector circular } DEH, \end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores se sigue que

$$\frac{\text{sector circular } DET}{\text{sector circular } DEH} > \frac{\text{área } \triangle DER}{\text{área } \triangle DEA}.$$

Pero[124]

$$\frac{\text{área } \triangle DER}{\text{área } \triangle DEA} = \frac{ER}{EA}$$

y además

$$\frac{\text{sector circular } DET}{\text{sector circular } DEH} = \frac{\angle EDT}{\angle EDH}$$

Por lo tanto

$$\frac{\angle EDT}{\angle EDH} > \frac{ER}{EA}$$

y por lo anterior (ya que $\triangle DEA$ y $\triangle DRA$ tienen la misma altura y por la prop. 1 del libro 6 de Euclides), dado que $\angle EDR = \angle EDT$, entonces *componiendo*[125]

$$\frac{\angle ADR}{\angle EDH} > \frac{RA}{EA}.$$

Volviendo a componer,

$$\frac{\angle ADG}{\angle EDA} > \frac{GA}{EA}.$$

Ahora *dirimiendo*[126] se llega a que

$$\frac{\angle GDA}{\angle EDA} > \frac{GE}{EA}$$

Pero se tiene que $\dfrac{GE}{EA} = \dfrac{GB}{BA}$ (por la citada prop. 3 del libro 6) y además[127]

$$\frac{\angle GDB}{\angle BDA} = \frac{\text{arco } GB}{\text{arco } BA}$$

Con lo que, finalmente, se obtiene lo que se desea demostrar.

[122] Euclides, libro 3, prop. 26: *En círculos iguales, ángulos iguales están sobre arcos iguales sin importar si están con vértice en el centro ambos o ambos sobre la circunferencia.*

[123] Euclides, libro 6, prop. 3: *Si el ángulo de un triángulo se corta a la mitad y el segmento que corta al ángulo también corta la base, los segmentos de la base tendrán la misma proporción que los lados restantes del triángulo.*

[124] Euclides, libro 6, prop. 1: *Triángulos y paralelogramos con la misma altura son entre sí como sus bases.*

[125] Así está en el original, por el término *componiendo* se entiende que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces es válida la siguiente sustitución:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

[126] El término *dirimiendo* se refiere que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces es válida la siguiente sustitución:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

también se le llama *dividiendo*.

[127] Euclides, libro 6, prop. 33: *En círculos iguales, los ángulos tienen las mismas razones como los arcos que subtienden, ya sea que ambos tengan vértice en el centro de la circunferencia o, ambos, sobre la circunferencia.*

Las tablas trigonométricas

Después de todas las explicaciones de los cálculos que ha provisto, Ptolomeo añade a su texto las tablas que ha obtenido, las cuales, en la versión de la que se ha traducido, ocupan cuatro páginas. Además de los cálculos que se estudiaron Ptolomeo añade el cálculo de sesentavos, es decir, divide cada medio grado en 30 partes e incorpora las aproximaciones en su tabla, de tal manera que los intervalos entre cada medio grado puedan estimarse con cierta precisión. Se llaman *sesentavos* porque dividen un grado en sesenta partes, por supuesto. Siguiendo la tradición de ilustrar los cálculos de Ptolomeo se agrega una pequeña muestra de la tabla original en el cuadro 12, solo para completar este capítulo.

Crítica a la obra de Ptolomeo

Es imposible saber qué tanto del Almagesto es original y qué tanto es saber acumulado. Sin embargo, al parecer todas las fórmulas que se traducen a la trigonometría moderna son una contribución de Ptolomeo para mejorar las tablas que se conocían en su época.

Muchas otras cosas más, además de las tablas, contiene el *Almagesto* y entre ellas una leyenda negra: se culpa a Ptolomeo de que la humanidad creyera por cientos de años que la tierra es el centro del universo. No creo que deba atribuirse a Ptolomeo tan tremenda culpa, no más que a cualquier persona que cuando se levanta al amanecer diga que ya salió el sol. Efectivamente, todo aquel que haya tenido la fortuna de haber observado el cielo durante una noche estrellada habrá observado el espectacular movimiento aparente de la bóveda celeste. Ptolomeo construyó su obra bajo tal perspectiva, la del observador absorto por el firmamento que desde un punto de vista absolutamente válido, se mueve relativamente a la tierra. En todo caso fueron quienes encumbraron la obra de Ptolomeo y la defendieron como la única teoría posible a quienes debe culparse. Las observaciones y mediciones de Ptolomeo con los instrumentos a su disposición son las mejores posibles y constituyen un ejemplo de rigor científico que fue solo superado en el renacimiento. Las prediciones que obtuvo con sus modelos son exactas e incluso los cálculos son más simples, paradójicamente, que los de Copernico, a decir de Neugebauer[128]. Es sabido que ya para la época de Ptolomeo se conocía la posibilidad de que la tierra se moviera al rededor del sol[129] y que la tierra misma se movía, contrariamente a lo que afirma Ptolomeo. Pero habría que esperar hasta las observaciones de Tycho Brahe y las ideas de Kepler para obtener mejores modelos matemáticos de la cinemática celeste que los de Ptolomeo.

No se intenta en este texto reivindicar a Ptolomeo, no lo necesita, el

128 O. Neugebauer. *The Exact Sciences in the Antiquity*. Dover Publications Inc. New York

129 Según los comentarios de Arquímedes y Plutarco, Arístaco de Samos sostuvo que la tierra se movía alrededor del sol y las estrellas fijas, vea por ejemplo Thomas (*op. cit.*) pag. 2-6.

objetivo del presente estudio es destacar la intuición y saber de quien quiera que haya generado los teoremas para generar nuevos a partir de lo establecido y la dedicada y minuciosa labor para construir las tablas que sirvieron para matemáticos, astrónomos e ingenieros por más de mil años, sin cambios, hasta el arribo de Newton y las nuevas técnicas del Cálculo que extendieron la posibilidad de encontrar el seno de cualquier arco, no solo de los que calculó Ptolomeo, sin necesidad de interpolar y con la exactitud que se desee, pero reitero, más de mil años después.

Finalmente, desde el punto de vista matemático las aproximaciones del Almagesto son impecables, siempre y cuando la geometría que rija el universo sea la Euclidiana, geometría sobre la cual están fundamentados todos sus teoremas y cálculos, lo cual, como se sabe, no es el caso.

A manera de apéndice

Generalmente se encuentra en la Internet la forma de hacer muchas construcciones de matemáticas, pero dado que no encontré hasta el momento de escribir este texto la forma práctica y exacta en la que se divide la circunferencia en 360 partes, enseguida describo como se hace, dada la importancia que tiene para entender los procedimientos de Ptolomeo:

(i) Construya una circunferencia con un compás. Tome un punto P cualquiera sobre la circunferencia. Con la misma medida en el compás con la que se construye la circunferencia a partir del punto P marque otro punto sobre la circunferencia. Si se continúa este proceso se construirá un hexágono regular si se unen los puntos consecutivamente. La demostración de porqué resuta un hexágono regular inscrito en una circunferencia está en los elementos de Euclides libro 6, prop. 9.

(ii) Es posible mediante triángulos semejantes dividir cualquier segmento en un número arbitrario de partes iguales (Euclides libro 4, prop. 15). Divida cada lado del hexágono construido en 60 partes iguales a las que están sobre el diámetro del círculo. Una el centro de la circunferencia con rayos que pasen por cada uno de los 60 puntos de cada lado del hexágono. La intersección del rayo con la circunferencia da la división de la misma en 360° (por las proposiciones 27 y 28 del libro 3 de los Elementos de Euclides). En particular a un arco de 60° le corresponde una cuerda de 60^p en una circunferencia cuyo diámetro es 120^p y que está dividida en 360°.

Traducción de partes de los capítulos 9 y 10 del Almagesto

Enseguida se traduce del latín algunas de las partes dedicadas a la construcción de la tabla de cuerdas del "El Almagesto" en la versión de Gerardo de Cremona, quien a su vez lo tradujo del árabe al latín en el siglo XII. Se traduce de un ejemplar de 1515 que se conserva en el Deutsches Museum[130]. Existen varias versiones del texto de Ptolomeo accesibles al público, en particular he consultado, además, la de la editorial Loeb[131], donde se presenta el texto en griego y en inglés (pag. 413). La versión en griego de Heiberg, la cual traduce al inglés Ivor Thomas en la edición de Loeb, se encuentra disponible en $https://commons.wikimedia.org/wiki/File: AlmagestComplete, Heiberg.pdf$

Una excelente aproximación de la travesía del *Almagesto* para llegar hasta nosotros, además de un análisis contemporáneo de las tablas trigonométricas del original, se encuentra en un artículo de Zieme[132].

Por último, para enfatizar la rareza de la copia de la cual traduzco, pongo enseguida parte de la nota de la *Mathematical Association of America* adjunta a una foto del libro:

"En el siglo II, Claudio Ptolomeo, astrónomo y matemático alejandrino, escribió *Mathematike Syntaxis* (en griego) o *La compilación matemática*, el cual es un tratado sobre los movimientos aparentes de las estrellas y los planetas. Esta obra pronto pasó a ser conocida como *La Mayor Compilación* y estableció el modelo de un universo geocéntrico, esquema científico que se seguiría durante los siguientes mil años. Cuando la obra griega de Ptolomeo fue adoptada en el mundo islámico, su título en árabe se redujo a *El más grande*, que cuando se transliteró al latín se convirtió en *Almagesto*. (La sintaxis griega Mathematike se tradujo al latín como Syntaxis mathematica). Los resúmenes y comentarios europeos se basaron en la traducción de la obra del árabe al latín realizada por Gerardo de Cremona en el siglo XII. La primera edición latina completa del Almagesto fue publicada en 1515 por Petri Liechtenstein (fl. 1497-1528), quien era un impresor que residía en la colonia alemana de Venecia en ese momento. Las copias del Almagesto de Liechtenstein de 1515 son extremadamente raras."

Espero que sea de alguna utilidad mi traducción de la pequeña parte del libro dedicada a la trigonometría de la tan extremadamente rara copia que he utilizado.

[130] Claudius Ptolemaeus. *Almagestu[m] Cl. Ptolemei Pheludiensis Alexandrini Astronomo[rum] principis, Venetiae, 1515*. Deutsches Museum, München Shelf Mark: 3000/1946 B 16 Persistent Link: http://dx.doi.org/10.5079/dmm-25, 1515

[131] Ivor Thomas. *Greek Mathematical Works, Aristarchus to Pappus*. Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, London, England, 2005

[132] Stefan Zieme. *Gerard of Cremona's Latin translation of the Almagest and the revision of tables*. Journal for the History of Astronomy 2023, Vol. 54(1) 3– 33, 2023

Capítulo noveno sobre la ciencia de la longitud de las cuerdas en partes de un círculo.

• (...) Para medir las cuerdas, divida la circunferencia del círculo en 360 partes y añada en ellas un medio de cada parte[133]. También divida el diámetro del círculo en 120 partes, lo cual es apropiado para aligerar

[133] Es decir, aumente la división de 360° dividiendo cada grado a la mitad.

los cálculos[134].

(...) El número 60 se asumirá (como base) en todas las operaciones aritméticas, para simplificar las operaciones con fracciones[135] y se utiliza en todas las multiplicaciones y divisiones para estar ciertos que las cantidades que se buscan estén más cerca del valor verdadero, de modo que lo que falta (en la aproximación) sea inapreciable[136].

Primero, seaABG un semicírculo construido sobre el diámetro ADG con centro en D. Se proyecta desde D sobre la línea AG ortogonalmente la línea DB. Se divide DG en el punto medio E y se produce la línea BE. Sea la línea ER igual a la línea EB y produzca la linea BR. Digo entonces que la línea RD es el lado de un decágono (inscrito) y que la línea BR de un pentágono. Lo cual se prueba como sigue. Ya que DG está dividida a la mitad en E y se adjunta a la línea DR, entonces [137] GR multiplicado por RD con el cuadrado de ED es igual al cuadrado de la línea ER que es igual a BE.

[134] Se traduce *levitas in numeris*, lo que quiere decir literalmente "levedad en los números", como "aligerar los cálculos", se pierde la metáfora pero se gana en claridad.

[135] La base 60 aligera los cálculos para Ptolomeo ya que el sistema de numeración griego no es apropiado para efectuar divisiones ni ningunos otros cálculos, además de las consabidas posibilidades del número 60 para ser dividido por otros números y que lo hacen notablemente útil.

[136] Sin duda el error de los cálculos de Ptolomeo son muy pequeños para los materiales usados en sus instrumentos y para las escalas requeridas por las exigencias de su tiempo.

[137] En el original no aparecen ecuaciones ni razones de la argumentación.

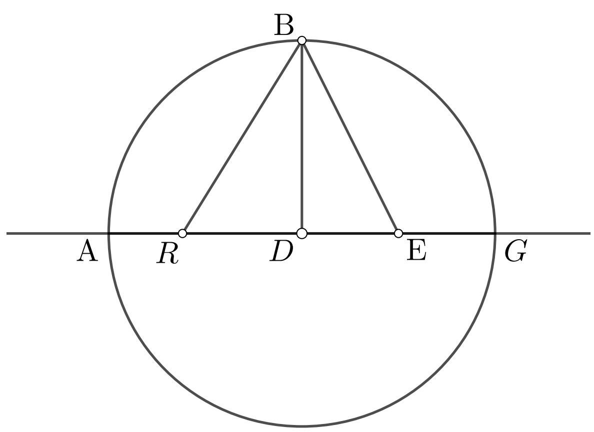


Figura 33: Figura semejante al del original de Ptolomeo. En el original se usan letras minúsculas para los puntos, aquí se utilizan mayúsculas de acuerdo con las prácticas contemporáneas.

Pero el cuadrado de ED con el cuadrado de DB, los dos al mismo tiempo, son iguales al cuadrado[138] de EB. Por lo cual, multiplicado GR por RD más el cuadrado de DE son iguales con el cuadrado de DE y DB los dos al mismo tiempo. Entonces, cuando se resta el cuadrado de ED queda el producto GR con RD que iguala al cuadrado de DB, el cual es igual a GD. Y porque con los lados del hexágono y lados del decágono inscritos en un mismo círculo, al ser puestos en una línea se dividen en proporción extrema y media[139] y siendo DG la mitad del diámetro, es el lado de un hexágono, y será DR el lado de un decágono. Similarmente, para el lado de un pentágono puede ponerse el lado de un hexágono con el lado de un decágono en un mismo círculo siendo recto el ángulo BDR del triángulo BDR, será el cuadrado de BR igual al cuadrado de BD, el cual es el lado de un

[138] Es decir, $ED^2 + DB^2 = EB^2$, lo cual se cumple por el Teorema de Pitágoras, pero no se dice en el texto.

[139] Es decir, están en proporción áurea, aunque el término "áureo" es muy posterior a Ptolomeo, por lo cual se omitió en la traducción.

hexágono y DR el lado de un decágono, simultáneamente será BR el lado de un pentágono.

Primero, dado que dividimos el diámetro del círculo en 120 partes, será la línea[140] DE de 30 partes, será su cuadrado 900. Y será la línea BD misma 60 partes dado que es la mitad del diámetro, su cuadrado 3600. Dado el cuadrado de EB que es el cuadrado de ER, que están en un círculo, de 4500 partes, será ER, 67 partes, 4 minutos, 55 segundos. Segundo, el restante más cercano DR será 37 partes, 4 minutos, 55, el cual más cercano es igual al lado de un decágono. Entonces el lado de un decágono que subtiende un arco de 36 partes de la cantidad de 360 partes de un círculo, será 37 partes 4 minutos, 55 segundos. Su cuadrado es 1375 partes 4 minutos, 14 segundos y el cuadrado de DB es 3600 los cuales sumados los dos serán el cuadrado de BR, 4975 partes, 4 minutos, 14 segundos, entonces, debido a esto la longitud de la línea BR será 70 partes, 32 minutos, 3 segundos, la misma es la longitud del lado del pentágono. Por lo tanto el lado del pentágono cuya cuerda es 72 partes de una circunferencia de 360, será 70 partes, 32 minutos, 3 segundos.

[140] Ptolomeo se refiere a la figura 33.

Y es manifiesto, por lo tanto, que el lado de un hexágono que subtiende un arco de 60 partes, es 60 partes: la mitad del diámetro. Similarmente, el lado de un cuadrado que subtiende un arco de 90 partes, es el doble de un cuadrado de la mitad de un diámetro, y el cuadrado de un lado del triángulo que subtiende 120 es el triple de la mitad del diámetro, y el cuadrado de la mitad del diámetro es 3600, entonces hace el cuadrado del lado del cuadrado (*sic*) 7200 y el cuadrado del lado del triángulo 10800. Por lo tanto la longitud del la cuerda de un arco de 90 partes será 84 partes, 51 minutos 10 segundos. La más cercana cantidad de la cual el diámetro es 120 tendrá una cuerda que subtiende un arco de 120, tendrá medida 103 partes, 55 minutos, 23 segundos.

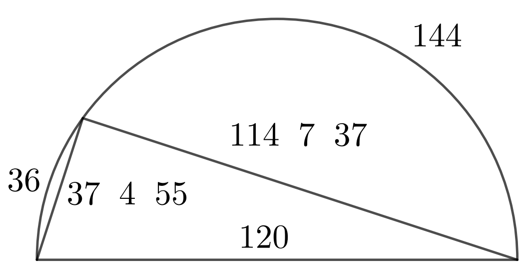


Figura 34: Figura semejante al del original de Ptolomeo. Conocida a cuerda de un arco de 36° es posible conocer la cuerda del arco complementario de 144° si el diámetro se ha dividido en 120 partes y la circunferencia en 360 partes.

• Entonces, ya han sido obtenidas las cantidades de estas cuerdas por sí mismas. Y debe ser claro para nosotros que debe ser fácil conocer las cuerdas de los arcos complementarias del semicírculo, dado que la suma de los cuadrados de tales cuerdas es igual al cuadrado del diámetro del círculo. Por ejemplo, ya se sabe que la cuerda de un arco de 36 partes es 37 partes, 4 minutos, 55 segundos y su cuadrado es 1375 partes 4 minutos, 14 segundos además el cuadrado del diámetro es 14400 por lo tanto el cuadrado de la cuerda que subtiende el arco complementario en el semicírculo de 144 partes es 13124 partes 55 minutos, 46 segundos, entonces la longitud del arco complementario es 114 partes, 7 minutos, 37 segundos. Similarmente, sabemos (la medida) para las cuerdas complementarias, conocidas las cuerdas que completan al semicírculo.
• Será explicado en lo que sigue cuáles de estas cuerdas pueden ser obtenidas por subdivisión del arco de las cuerdas sabidas y sus diversas partes. Nos permitimos destacar este saber extremadamente útil a continuación.

Sea $ABGD$ un círculo en el que está descrito un cuadrilátero sobre los puntos $ABGD$. Dibuje las líneas AG y BD. Demuestre que el producto $AG \cdot BD$ es igual a la suma de los productos AB con DG y AD con BG. Lo cual se demuestra como sigue. Construya un ángulo ABE

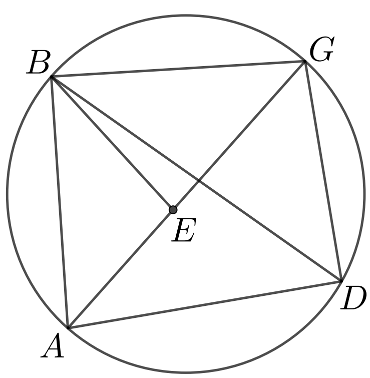


Figura 35: Figura semejante a la del original de Ptolomeo, la cual ilustra el teorema conocido como *Teorema de Ptolomeo*.

igual al ángulo DBG. Si se suma el ángulo EBD a ambos, el ángulo ABD es igual al ángulo EBG. Pero el ángulo BDA es igual al ángulo BGE ya que subtienden una misma cuerda. Entonces el triángulo ABD es equiángulo con el triángulo BGE. Por lo tanto, la proporción BG a GE es como la proporción de BD a DA, entonces el producto de BG con AD es igual al producto de BD con GE. Y también que el ángulo ABE es igual al ángulo DBG, el ángulo BAE igual al ángulo BDG, dará que el triángulo ABE es equiángulo con el triángulo BGD, entonces las proporciones BA con EA es como la proporción de BD con DG. Entonces el producto BA con GD es igual al producto BD con EA. Ya se demostró que el producto BG con AD es igual al producto BD con GE por lo que el producto AG con BD es igual al producto AB con GD simultáneamente (al producto) AD con BG. Y esto es lo que deseamos demostrar.

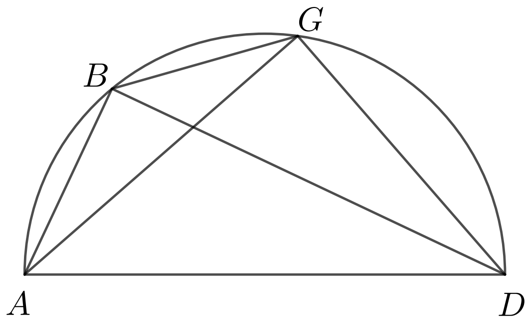


Figura 36: Primera figura de la página 6 en el original.

• Después de lo establecido anteriormente, construya un semicírculo con diámetro AD en el cual sean A, B, G, D. Construya de desde A dos cuerdas AB y AG con cantidades que sean conocidas. Produzca la cuerda BG. Digo que entonces la cuerda BG será conocida.

Lo cual se demuestra así. Las dos cuerdas BD y GD, también son conocidas ya que son cuerdas en partes complementarias de partes conocidas del semicírculo. También en el semicírculo está un cuadrilátero sobre A, B, G, D; por lo tanto, el producto de BA con GD junto con el producto de AD con BG igualan el producto de AG con BD. Y, por lo tanto, el producto de AG con BD es sabido; el producto de AB con GD, es sabido; dado que el diámetro AD es conocido, la cuerda BG será conocida.

Por lo tanto es claro que si dos arcos fueran conocidos y conocidas sus cuerdas, la cuerda que resulta al restar los arcos[141] que este entre los arcos será conocida. También es manifiesto y posible, por tal resultado, que la diferencia de varias cuerdas será conocida habiendo sido producidas de otras. De manera similar se encuentra la cuerda del arco de 12 partes, dado que se conoce la cuerda de 60 y la de 72 partes.

[141] Se llama *cuerda superflua* a la que resulta al restar arcos.

• También, si siendo conocida una cuerda y su arco, se quisiera calcular la cuerda de la mitad de ellas, entonces se construye un semicírculo que pase por A, B, G, siendo el diámetro AG, y sea el arco BG teniendo cuerda conocida, el cual será cortado en el punto medio D. Trace las cuerdas AB, AD, BD, DG. Produzca la perpendicular RD erigida sobre

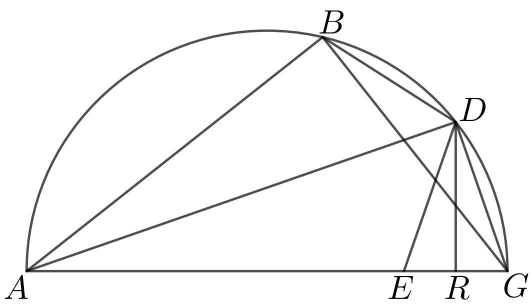


Figura 37: Segunda figura de la página 6 en el original.

el diámetro AG. Digo que entonces RG es la mitad de la diferencia AB con AG. Lo que se prueba así. Construya la línea AE igual a la línea AB, y extienda la línea DE de tal forma que AE quede hecha igual a AB. Con AD común, serán las dos líneas AB, AD iguales a las dos líneas AE, AD de tal forma que tendrán respectivamente iguales el ángulo BAD con el ángulo EAD, por lo tanto la base BD igual a DE. Puesto que BD es igual a DG, será DG igual a DE. Por tal motivo, entonces el triángulo DEG tendrá dos lados iguales y así la perpendicular divide la base EG en dos mitades. Entonces, ER es igual a RG y el total de EG es el excedente de AG sobre AB, por lo tanto RG es la mitad del excedente de AG sobre AB. Y dado que la cuerda del arco BG es conocida, será también la cuerda que reste del semicírculo que es AE, ya que es AB conocida. Y como el diámetro AG es conocido será EG el cual es el resto del diámetro conocido cuya mitad es conocida ya que es la mitad que resta de AG sobre AB. Por tal razón, dado que en el triángulo rectángulo ADG se encuentra la perpendicular DR, será el triángulo ADG rectángulo y equiangular al triángulo DRG. Será la proporción de AG con DG como la proporción de GD con GR. De esta forma el producto de AG con GR será igual al cuadrado de GD. Por lo tanto, la longitud de la cuerda GD la cual subtiende la mitad del arco BG será conocida.

Por este capítulo se pueden saber muchas cuerdas sabiendo aquellas de las que se quieren conocer. Entre ellas con la cuerda de un arco de 12 partes, se puede conocer la cuerda del arco de seis partes, la cuerda del arco de tres partes, la cuerda del arco de una y media partes, la cuerda del arco de media y un cuarto partes[142].

[142] Es decir, la cuerda del arco de $\frac{1}{2}^\circ + \frac{1}{4}^\circ$.

De este modo encontramos que la cuerda del arco de una y media es cercana a una parte, 34 minutos, 15 segundos, si la cantidad del diámetro es de 120 partes. Y la cuerda del arco de media y un cuarto partes es alrededor de (*sic*) cifra[143], 47 minutos, 8 segundos.

[143] Probablemente Gerardo de Cremona tradujo el "cero" árabe como *cifra*.

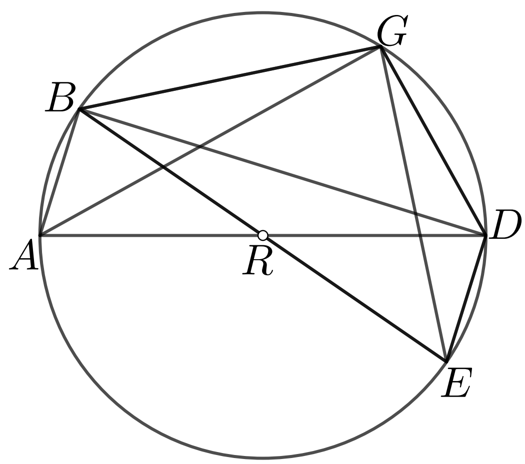


Figura 38: La figura que se muestra es semejante a la tercera figura de la página 6 del original.

• Trace nuevamente el círculo $ABGD$ sobre el diámetro AD, sea R el centro del círculo y construya desde A dos arcos que sean conocidos con sus cuerdas conocidas, uniendo los puntos de cada uno de ellos, que sean AB y BG las cuerdas. Digo entonces que si se traza la cuerda AG, ésta será también conocida. Lo cual se demuestra como sigue. Construya desde B el diámetro del círculo por BRE. Construya las cuerdas BD, GD, DE, GE. Queda manifiesto que conociendo la línea BG se conoce la línea GE; sabiendo AB, se conoce BD y de ella DE.

Y por eso, ya hemos supuesto que el cuadrilátero B, G, D, E, está sobre un círculo, siendo sus diagonales BD, GE, el producto de las diagonales entre sí, será igual a la suma de los dos productos de lados opuestos. Como se conoce el producto de BD con GE; será conocida la suma de los dos productos, BG con DE, GD con BE. El diámetro BE es conocido, por lo tanto la línea GD queda por conocerse, con la cual, la cuerda del arco restante del semicírculo, que es AG, queda determinada. Entonces, ya sabemos que si dos arcos fueran conocidos con las cuerdas que tienen también conocidas será conocida la cuerda de la suma de los arcos.

Por ello, también en este capítulo se nos deja claro que con la cuerda del arco de $1/2$ siempre puede ser calculada cualquiera cuerda conocida. Todas ellas tendrán su descripción en las tablas de cuerdas de nuestro libro. (...)

• Porque si encontramos el arco de la cuerda de $1/2$ verdaderamente, encontraremos con este, por el capítulo de la suma y por los argumentos del capítulo de la resta, las cantidades de las cuerdas de los arcos que faltan. (...)

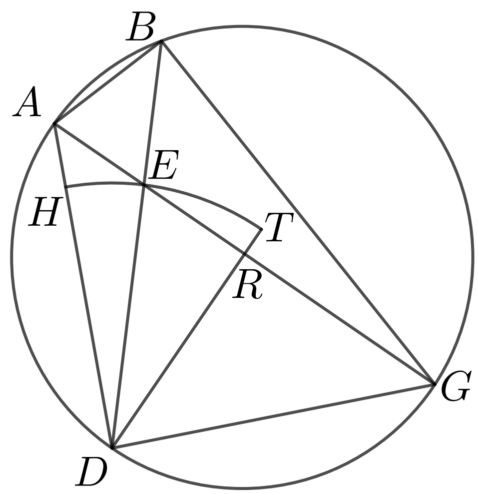


Figura 39: La figura que se muestra es semejante a la primera figura de la página 7 del original.

Para este propósito, permita que este capítulo diga: *Si son trazadas en un círculo cuerdas diferentes, será menor la proporción de la cuerda más larga con la cuerda más corta que la proporción del arco de la cuerda más larga con el arco de la cuerda más corta.*

En efecto, si se traza un círculo sobre los que sean A, B, G, D, en el cual sean dos cuerdas diferentes, donde AB es la menor y BG la mayor, digo entonces que la proporción de la cuerda BG a la cuerda BA es menor que la proporción del arco BG al arco BA. Lo que se demuestra así. Divida el ángulo ABG por la mitad mediante la línea BD. Trace las líneas AEG, AD, GD. Y dado que el ángulo ABG esta dividido a la mitad mediante la línea BED serán iguales las líneas GD y AD. Dado que también la línea GE es mayor que la línea AE trace en D una línea DR perpendicular a AEG. Y como la línea AD es más larga que la línea ED, la línea ED más larga que DR, el círculo con centro en D con radio DE, tendrá AD como secante y será superior a DR. Entonces afirmo que el círculo sobre el que estén BET encontrará DR en T. Y porque el sector DETes mayor que el triángulo DER y el triángulo DEAes mayor que el sector DEH, será la proporción del triángulo DER con el triángulo DEA menor que la proporción del sector DET con el sector DEB. Entonces la proporción del triángulo DER con el triángulo DEA es como la proporción de la línea ER con la línea EA; la proporción del sector DET con el sector DEH es como la proporción del ángulo RDE con el ángulo EDA. Entonces como compondremos[144], será la

[144] Se refiere a la operación *componiendo* la cual ya se explicó en las secciones iniciales de este capítulo. Es decir si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se *compone* si se escribe $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

proporción de la línea RA con la línea EA menor que la proporción del ángulo GDA que es el doble del ángulo ADR con el ángulo EDA. Entonces como dividiremos[145], será la proporción de la línea GE con AE menor que la proporción del ángulo GDE con el ángulo EDA, pero la proporción de la línea GE con EA es como la proporción de la cuerda GB con la cuerda BA; la proporción del ángulo GDB con el ángulo BDA es como la proporción del arco GB con el arco BA. Y esto es lo que queríamos demostrar.

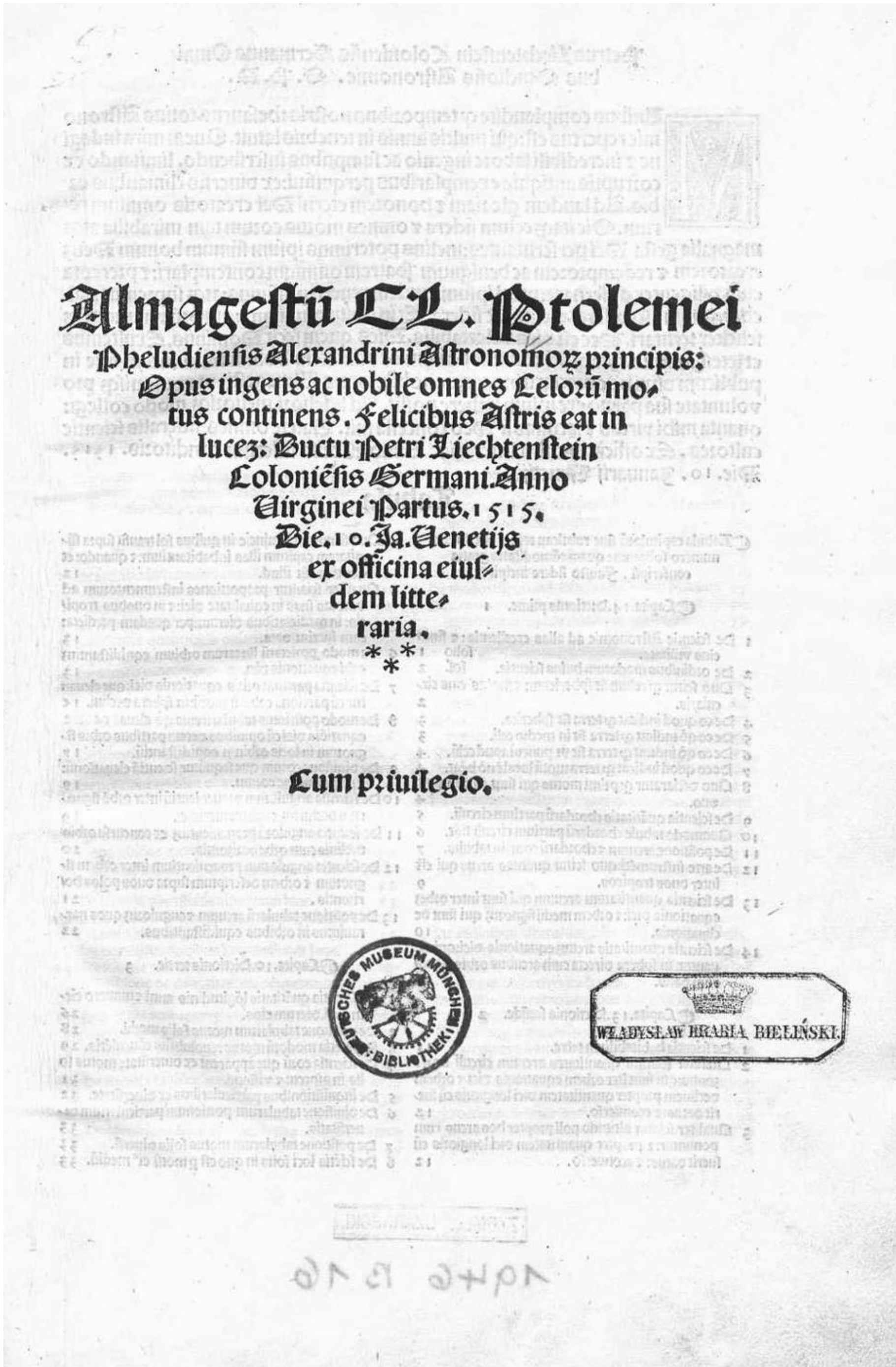
• Posteriormente, dada la figura precedente, afirmaremos que si traza el círculo ABG en éste las dos cuerdas AB, GA, si se pone primero AB que subtienda un arco de medio, un cuarto[146] partes del círculo; AG subtienda un arco de una parte[147] (y como la proporción de la cuerda AG con la cuerda AB es menor que la proporción del arco AG con el arco AB, el arco AG tanto como AB a su tercera parte), entonces, como ya se mostró, la cuerda AB es (*sic*) cifra, $47'$, $8''$ (cuando las cantidades del diámetro son 120), será la cuerda AG menor que una parte, $2'$, $50''$ (...)

En este mismo círculo, ponga como cuerda AB que subtienda un arco de 1°, el arco AG que subtienda un arco de $1\frac{1}{2}^\circ$ como se ha dicho porque el arco AG es una parte y mitad del arco AB, será la cuerda GA menor que una parte y mitad de la cuerda. Como ya se mostró, la cuerda EG es una parte, $34'$, $15''$ (si las partes del diámetro son 120)., entonces AB es mayor que una parte $2'$, $50''$. Entonces, queda de manifiesto que nos conviene que aceptemos para una cuerda de una parte del círculo, una parte, $2'$, $50''$ (si las partes del diámetro son 120). Y como esto ya se mostró, diremos que la cuerda del arco $\frac{1}{2}^\circ$ será (*sic*) cifra, $31'$, $25''$. Y con esto se completará el resto de las cuerdas que quedan que hemos predicho, las que son entre cuerdas conocidas. (...)

[145] Se refiere a la operación *dirimiendo* la cual ya se explicó en las secciones iniciales de este capítulo. Es decir si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se *dirime* o *divide* si se escribe $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

[146] Es decir, "medio, un cuarto" es lo mismo que $\frac{1}{2}^\circ + \frac{1}{4}^\circ = \frac{3}{4}^\circ$.

[147] Es decir, "arco de una parte" es lo mismo que 1°.


Almagestũ Cl. Ptolemei
Pheludiensis Alexandrini Astronomoꝝ principis:
Opus ingens ac nobile omnes Celorũ mo-
tus continens. Felicibus Astris eat in
lucẽ: Ductu Petri Liechtenstein
Coloniẽsis Germani. Anno
Virginei Partus. 1515.
Die. 10. Ja. Venetijs
ex officina eius-
dem litte-
raria.
* * *

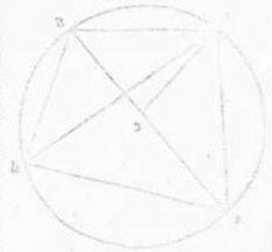
Cum priuilegio.

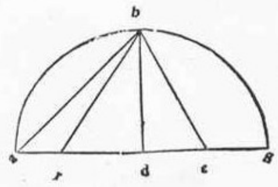
Portada del Almagesto edición 1515 *op. cit.*. Créditos de la digitalización: *Deutsches Museum, München,* Shelf Mark: 3000/1946 B 16, http://dx.doi.org/10.5079/dmm-25

mationem sunt diuersi absqꝫ mēsuratione. Scđm affirmationeʒ vͦ nostram: ꝙ hoc sit propter orbem decliuem ab orbe equationis diei: in quo motus mensurātur: est possibile vt videamus eos habere motꝰ diuersos in eis que sentiūtur: ipsi tñ in se non sunt diuersi. Quapropter scimus ꝙ orbis hic decliuis solus proprie ſm terminum currentibus est attributus. ⁊ ꝙ sol motu suo ad orientem signat ipsum ⁊ verificat. Et ab vtraqꝫ parte huius circuli ⁊ super ipsum est transitus lune ⁊ quinqꝫ erraticarum. ⁊ earum transitus a septentrione ad meridiem: ⁊ a meridie ad septentrioneʒ semper redeuntes. Neqꝫ aliqua earum quantitatē spacij sibi attributi in duabus partibus ab vtraqꝫ parte orbis decliuis parum etiā ptransit. Hic autem orbis non videtur nisi magnus: propterea ꝙ sol ipsuʒ penetrat ab orbe equationis diei duobus spacijs equalibus ad septentrionem ⁊ meridiem. Motus ergo omnium stellarum currentium: ad orienteʒ sunt: in orbe vno determinato: quemadmodum diximus: Et necessarium est vt affirmetur: ꝙ hic motus qui est super duos polos orbis decliuis: cuius inuentionem comprehendimus: sit scđs a motu vniuersali primo: ⁊ ꝙ ipse est contra ipsum. ¶ Q; ⁊ si imaginemur orbes magnos descriptos super polos horum duorum orbium quos prediximus: scilicet equationis diei ⁊ orbis decliuis: tendentes in latitudinem a meridie ad septentrionem. quos eorum poli reuoluunt ab oriente ad occidentem. ⁊ quos necessario cōuenit secare orbē equationis diei ⁊ decliuem ab eo in duo media ⁊ duo media ⁊ ortogonaliter. reperiemus quatuor puncta: super que secāt decliueʒ. duo quorum sunt illa super que secat ipsum orbis equationis diei. quorū vnumquodqꝫ alteri opponitur. que vocātur equātia diem. Quorum vnum est super quod transit sol a meridie ad septentrionem nominatum vernale. ⁊ alterum super quod transit sol a septentrione in meridiem: ⁊ vocatur autumnale. Reliqua vͦ duo puncta sunt: super que orbem decliuem secat orbis magnus descriptus super polos duorum orbium. quorum etiam vnumqđqꝫ alteri opponit. Et vnuʒ eorum qđ est ad id qđ sequitur meridiem ab orbe equationis diei: nominatur tropicus hyemalis. ⁊ alterū qđ est ad id quod sequitur septentrionē ab orbe equationis diei: nominatur tropicus estiualis. ¶ Sciamus autē ꝙ motū vnū primū vniuersalē cōtinentē omnes motus alios (qui est ille quē prediximus) comprehēdit ⁊ determinat orbis magnus signatus supra polos duorum orbium motu suo: ⁊ mouet omnia que sunt eius ab oriente ad occidentem super duos polos orbis equationis diei: qui sunt quasi fixi in orbe meridiano. Qui ꝑ hoc tñ qđ narrabo differt ab orbe quē prediximus: quē poli duorum orbium reuoluūt. quoniam nullo modo ipsum duo poli orbis decliuis in aliqua hora voluunt. ⁊ qm̄ ip̄e ortogonalr̄ ē supra horizōta. Et nominat̄ orbis meridiei: qm̄ ipse secat vnāquāqꝫ duaꝝ medietatum sphere celestis que est super terraʒ: ⁊ que est sub ea in duo media: ⁊ mediat tp̄a noctis ⁊ diei: ⁊ stat locus eius semꝑ. ¶ Motum vͦ secūdum plurium cōnexionum continet motus primus. ⁊ ipse cōtinet orbes stellarū currentiū. sed mouet eos motus primus quēadmodum diximus ab oriente in occidentē. ⁊ ipse mouetur cōtra hoc supra duos polos orbis decliuis: qui sunt fixi sicut duo cētra semper in orbe qui comprehendit motum primum: ⁊ terminat ipsum: descriptus supra duos polos duorum orbium qui cū eo vere mouent̄: sed manent fixi in motu scđo qui est contra primū. quorum loca sunt orbis magni ab eis reuoluti: decliuis ab orbe equationis diei: declinatione que semper vna existit.

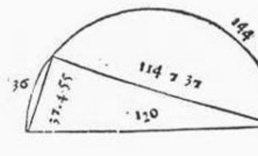
¶ Capitulum nonum De scientia quantitatis chordarum partium circuli.

SUmma vero p̄ncipioꝝ que oportuit nos incipere ⁊ premittere: est ſm ꝙ narrauimus. Qm̄ vͦ volumus incipere a demōstratiōibꝰ que sūt suꝑ particulares. Quaꝝ prima est demōstratio qua reperitur quātitas arcus qui est iter duos polos: quos nominauimus circuli magni signati supra polos duoꝝ orbiū: Uidemꝰ ꝙ necessario oportet nos prius loqui de sciētia quantitatum chordarum partium circuli: postq̄ꝫ volumus declarare demonstrationeʒ super hoc quod narraturi sumus per lineas: ⁊ facere post hoc vt leuior sit inuentio partis cuius volumus scire quātitatē per tabulas. ¶ Diuidā itaqꝫ circuli circūferentiam per. 360. partes: et ponam superfluū arcuum in eis ſm augmentum medietatis ⁊ medietatis partis: ⁊ corā ip̄is quantitatem chordaꝝ que eis subtendūtur. Et diuidam diametrū circuli in. 120. partes: ad hoc vt nobis declaret̄ eius leuitas in numeris. Prius tamen q̄ꝫ breuioribus capitulis postero ad protractionē vel inuentionē eius quod volumus velocioribus demonstrabo: qualiter per ea sciamus quantitatem chordaꝝ. ad hoc vt non tñ sint posite nobis in tabulis: ⁊ ignoremus de eis inuentionē mēsurationis ⁊ numerationis. sʒ cū positiōe eaꝝ in tabulis demōstrabimus scientiā quantitatū earū: vt facilius fiat qđ est ex capitulis sciētie numerationis ⁊ mensurationis. Et assumemus numerum. 60. in omnibus que operaturi sumus ex capitulis arithmetice: vt alleuietur operatio in fractionibus. ⁊ sequemur in omni multiplicatione ⁊ diuisione ad sciendum cuius quātitatis veritatem volumus: ei propinquiorē:



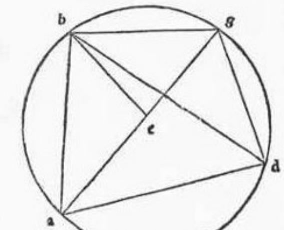


⁊ ita ne quod ex eo deest: quantitatis sit sensibilis. ¶ Sit itaq; primum semicirculus a.b.g. erectus supra diametrū.a.d.g.circūductus supra centrū.d. protrabam autem a d.supra lineam.a.g.ortogonaliter lineam.d.b.⁊ diuidam. d.g.in duo media supra punctum.e.⁊ producam lineam.b.e.sitq; linea.e.r.equalis linee.e.b. ⁊ protrabam lineam.b.r. Dico ergo q̄ linea.r.d.est latus decagoni.⁊ linea.b.r.est latus pentagoni. Quod sic probatur. Quoniam d.g. diuiditur in duo media super.e. ⁊ adiungitur ei linea.d.r. ergo ductus.g.r.in.r.d. cū quadrato.e.d.equatur quadrato linee.e.r.que est equalis.b.e.duo vero quadrata.d.b.et e.d.simul equantur.e.b.quadrato. Quapropter ductus.g.r.in.r.d.cum quadrato.d.e.equatur duobus quadratis.d.e.et.d.b.simul. Cum ergo minuit̄ ex vnoquoq; eorū quadratum d.e.remanet ductus.g.r.in.r.d.equale quadrato.d.b.que est equalis.g.d. Et quia cum latus hexagoni ⁊ latus decagoni: que sunt in circulo vno: sunt linea vna: ipsa diuiditur s̄m proportionē habētē mediū ⁊ duo extrema.⁊.d.g.q̄ est medietas diametri: est latus hexagoni: erit.d.r.latus decagoni. Et similiter quoniā latus pentagoni pōt supra latus hexagoni cum latere decagoni: q̄ sunt in vno circulo: ⁊ angulus.b.d.r.trianguli.b.d.r.est rectus: erit quadratum.b.r.equale quadrato.b.d.que est latus hexagoni: ⁊ quadrato.d.r.que est latus decagoni simul: ⁊ erit.b.r.latus pētagoni. ¶ Et q2 diametrū circuli diuisimus in.120.partes.ergo propter hoc quod premisimus erit linea.d.e.30.partes: ⁊ erit quadratū eius.900. Et erit linea.b.d.postq̄ ipsa est medietas diametri.60.partes: ⁊ eius quadratū.3600. Et quadratū.e.b. qd̄ est quadratū.e.r. que sunt in circulo vno.4500.ꝑpter hoc ergo erit.e.r. 67.partes.⁊.4.minuta.⁊.55. secunda vicinius.⁊ remanebit linea.d.r.s̄m illas partes.37. partes ⁊.4.minu.⁊.55.2ᵃ.vicinius.ipsa vero est equalis lateri decagoni. Latus ergo decagoni quod subtenditur arcui.36.partiū s̄m quantitatē qua circulus est.360.partes erit.37. partes.⁊.4.minuta ⁊.55.2ᵃ.vicinius: s̄m quātitatē qua diameter est.120.partiū. Et etiā q2 linea.d.r.est.37.partes ⁊.4.minuta.⁊.55.2ᵃ.⁊ eius quadratū est.1375.partes.⁊.4.minu.⁊ 14.scd̄a.⁊ q̄dratū.d.b.est.3600.⁊ cū hec duo cōiungent̄: erit ex eis q̄dratum.b.r.quod est 4975.partes.⁊.4.minuta.⁊.14.scd̄a. ergo propter hoc erit lōgitudo linee.b.r.s̄m illā quātitatem.70.partes. ⁊.32.minuta ⁊.3.2ᵃ.vicinius. Ipsa autem est equalis lateri pentagoni. Quapropter latus pētagoni: quod est chorda ptiū.72.s̄m quātitatē qua circulus est.360. erit.70.partes.⁊.32.minuta.⁊.3.2ᵃ.s̄m quātitatē qua diameter est.120. ¶ Jam ergo manifestum est: q̄ latus hexagoni quod subtēditur arcui.60.partiū: ⁊ est medietas diametri: est.60.partes. Et similiter etiam quia latus quadrati quod subtenditur.90.partibus est in potentia duplum medietatis diametri. Et latus trianguli quod subtendit̄.120.est in potentia triplum medietatis diametri. Et quadratū medietatis diametri est.3600.ergo fiet quadratū lateris quadrati.7200.⁊ quadratum lateris trianguli.10800. Quapropter erit lōgitudo chorde arcus.90.ptiū.84.partes.⁊.51.minuta.⁊.10.2ᵃ.vicini⁹: s̄m quātitatē qua diameter est.120. Et erit longitudo chorde arcus.120.s̄m eandem mensurā.103.partes ⁊.55.minuta.⁊.23.2ᵃ.



Jam ergo facile nouim⁹ harꝫ chordarꝫ quātitates i seipsis. Et declarabit̄ nobis: q̄ cū he chorde scite fuerit: scief ꝑ eas facile opatio chordarꝫ que subtēdunt̄ arcub⁹ residuis semicirculi. Qm̄ duo q̄drata duarꝫ chordarꝫ simul eq̄lia sunt q̄drato diametri circuli. Verbi gr̄a. Jam oñsum est q̄ chorda arcus.36.partiū est.37.ptes ⁊.4.minuta.⁊.55.2ᵃ.⁊ quadratū ei⁹ est.1375.partes.⁊.4.minuta. ⁊.14.2ᵃ. ⁊ quadratū diametri.14400. Et quadratū chorde residui semicirculi: qd̄ est.144.⁊ est residuū quadrati diametri est.13024.partes.⁊.55.minuta.⁊.46.2ᵃ. Longitudo ergo chorde residui semicirculi est.114.partes.⁊.7.minuta.⁊.37.2ᵃ.vicinius: s̄m illaꝫ quantitatē. Et similiter sciemus per chordas reliquas notas chordas arcuū reliquorꝫ semicirculi.

Et declarabit̄ in sequentibus: qualiter per istas chordas sciat̄ inuentio chordarū arcuū diuersorꝫ reliquorꝫ: postq̄ nos p̄miserimus narrationē capl'i valde putilis in hac scia. ¶ Sit itaq; circulus.a.b.g.d.in quo describā q̄drilaterꝫ: supra qd̄ sint a.b.g.d.⁊ ꝑtrahā duas lineas.a.g.⁊.b.d.⁊ ostēdā q̄ duct⁹.a.g.in.b.d.equat̄ duobus ductibus.a.b.in.d.g.⁊.a.d.in.b.g.simul. Quod sic demōstrat̄. Ponā eni angulū.a.b.e. equalem angulo.d.b.g.⁊ quia angulus.d.b.g.equatur angulo.a.b.e.tunc si nos cōicauerimus angulum.e.b.d.⁊ addiderimus ipsū vnicuiq; ipsorꝫ: erit angulus.a.b.d.equalis angulo.e.b.g. Angulus autē.b.d.a.est equalis angulo.b.g.e.quoniā eorꝫ chorda est arcus vnius. Triangulus igitur.a.b.d. est equiangulus triangulo.b.g.e. Quapropter proportio.b.g. ad.g.e.est sicut proportio.b.d.ad.d.a.ergo ductus.b.g. in.a.d. equatur ductui.b. d.in.g.e. Et ēt q2 angulus.a.b.e.est eq̄lis angulo.d.b.g.⁊ āgulus.b.a.e.equat̄ angulo.b.d.g. erit triāgulus.a.b.e.eq̄angulus triāgulo.b.g.d.ergo ꝓportio.b.a.ad.e.a.est sicut proportio.b. d.ad d.g. Quadratū itaq;.b.a.in.g.d.equatur quadrato.b. d.in.e.a. Jam vero declaratū fuit q̄ ductus.b.g.in.a.d.est equalis ductui.b.d.in.g.e.ergo totus ductus.a.g.in.b.d.est equalis ductui.a.b.in.g.d.⁊.a.d.in.b.g.sil'. Et illud est qd̄ demōstrare voluimus.

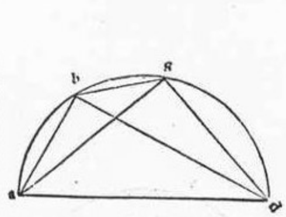


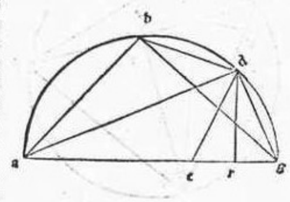
Et postq̄ premisimus caplm: describā semicirculum : supra quem sint.a.b. g.d. super diametrū.a.d. ⁊ .protrabam ab.a. duas chordas.a. b. ⁊.a.g.sitq3 cuiusq3 earum quantitas nota.⁊ producam chordam.b.g.Dico ergo ꝙ etiam chorda b.g.erit nota. Quod sic pbaf. Protrabam enim duas chordas.b.d.⁊.g.d.manifestum est igitur ꝙ ipse etiā note sunt:quoniā quecunq3 earum est chorda residui semicirculi.Et quia i semicirculo est quadrilaterū super quod sūt.a.b.g.d. ergo ductus.b.a.in.g.d. cum ductu.a.d. in.b.g. simul equātur ductui.a.g.in.b.d. Et quoniam ductus .a.g.in.b.d. est scitus : ⁊ ductus .a. b.in.g.d.est scitus : ⁊ diameter.a.d. est nota: erit chorda.b.g. nota. ¶ Iā ergo ostensum est:ꝙ cum fuerint duo arcus noti notaꝝ chordarum:chorda superflui quod est inter eos erit nota.¶ Manifestū est etiā ꝙ possibile est:vt per hoc caplm chorde plures superflui arcuū:chordas fm seipsas notas habentiū pducanf.Et similiter reperiem⁹ chordā arcus. 1 2 .ptiū: ppterea ꝙ scimus chordā sexagita:⁊ chordā septuagintaduarū ptiū.

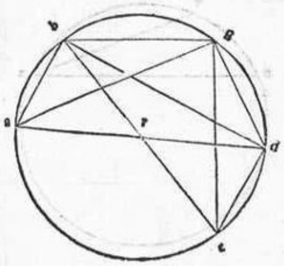
Quod si etiam arcus fuerit notus:⁊ chorda eius nota:⁊ voluerimus inuenire chordam medietatis eius.tunc describemus semicirculum: super quē sint.a.b.g. sitq3 diameter.a.g.⁊ sit arcus.b.g. chordam habens notam.quē in duo media supra d.secabo.⁊ protrabam chordas.a.b.⁊.a.d.⁊.b.d.⁊.d.g.⁊ producā perpēdicularē r.d.super diametrum.a.g.erectam.Dico ergo ꝙ.r.g.est medietas superflui. a.g. super.a. b. Quod sic probatur. Ponam enim lineam.a.e.equalem linee.a.b.⁊ producam lineam.d.e.⁊ quia.a.b est equalis.a.e.facta.a.d.cōmuni:erunt due linee.a.b.⁊.a.d.equales duabus lineis a.e.⁊.a.d.queq3 v3 sue relatiue equalis.⁊ angulus.b.a.d.equalis angulo.e.a.d.ergo ⁊ basis b.d.equalis basi.d.e. ⁊ quia . b.d.equaf.d. g.erit. d.g. equale.d.e. Quia igitur triangulus d.e.g.duoꝝ equaliū existit laterū:erit ppēdicularis.d.r.diuidēs basim.e.g.in duo media.ergo.e.r.equatur.r.g.ac tota.e.g. est superfluū.a.g.super. a b.ergo.r g.est medietas superflui a g.super.a.b.Et qm̄ chorda arcus.b.g.est nota: erit chorda residui semicirculi: que est.a.b. nota.que est equalis.a.e. Et qꝛ diameter.a.g.est nota : erit.e.g. que est residuum diametri nota.⁊ eius medietas que est.r g.nota:que est medietas superflui.a g.super.a.b.Quia igitur in triāgulo.a.d.g.ortogonio egredif ab eo ppēdicularis.d.r.erit triāgulus.a.d.g.ortogonius equiangulus triangulo.d.r.g. ⁊ erit proportio.a.g.ad.d.g.sicut proportio.g.d.ad.g.r. Ductus igitur.a.g.in.g.r.equaf q̄drato.g.d. Quapropter lōgitudo chorde.g d.est nota:que subtenditur medietati arcus.b.g. ¶ Per hoc ergo capitulum scientur chorde plures:si mediaueris ea quorum precessit scientia. Quarū est sicut chorda arcus. 1 2 .partiū:⁊ chorda arcus sex partiū:⁊ chorda arcus triū partiū:⁊ chorda arcus partis ⁊ semis:⁊ chorda arcus medietatis partis ⁊ quarte. ¶ Et hoc etiā modo inueniemus ꝙ chorda arcus partis ⁊ semis ē pars ⁊.3 4.minuta:⁊.1 5 .2̈.vicinius:fm quātitatem qua diameter est. 1 2 0.partes.Et chorda arcus medietatis ⁊ quarte partis fm illam quantitatē est cifre ⁊.4 7 . minuta:⁊.8 .2̈.fere.

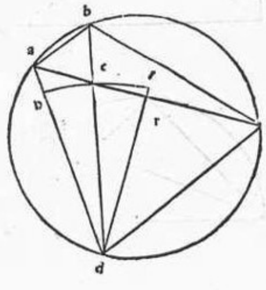
Describam etiam circulum.a.b.g.d.supra diametrum.a.d.⁊ sit centrum circuli.r. et accipiā ab a.duos arcus notos cōiūctos: duas chordas notas habentes:supra quos sint.a.b.⁊.b.g.⁊ copulabo vnam chordam eorum alteri. Dico igitur : ꝙ si protraxerimus chordam.a.g.erit ipsa quoq3 nota. Quod sic probatur. Producam enim a b.diametrum circuli : que sit.b.r.e. ⁊ protrabam lineas .b.d.⁊.g.d.⁊.d.e.⁊.g.e. Manifestum est igitur ꝙ ex scientia linee.b.g.scietur linea.g.e.⁊ ex noticia.a.b.scietur.b.d. ⁊ ex ea.d.e. Et propter hoc quod iam premisimus:quoniā in circulo est quadrilaterū:supra quod sūt.b.g.d.e.⁊ eius due diametri sunt.b.d.⁊.g.e.erit ductus vnius diametri eius in alterum equalis omnibus duobus ductibus omnium duorum laterū oppositoꝝ cuiusq3 in alterum.Quia igif ductus.b.d.in.g.e. est notus: erunt duo ductus.b.g. in.d.e.⁊.g.d.in.b.e. simul noti.diameter vo.b.e.est nota.ergo linea.g.d.reliq̄ est nota.quapropter chorda arcus residui semicirculi que est.a.g.est nota. Iam ergo nouimus ꝙ cu3 duo arcus ꝯiuncti fuerint noti:chordas habentes notas:erit eorum chorda simul iunctorum nota.¶ Per hoc autem capitulum declaratur nobis:ꝙ quotiens composuerimus chordam arcus partis ⁊ semis cū qualibet chordarum notarum : ⁊ totius eius quod erit ex earū compositione descripserim⁹ in tabulis libri nostri chordam : continget vt cum arcus illarum chordarum:duplabuntur habeat arcus cuiusq3 illarum chordarum tertiam integram.et erunt chorde eorum omnes veraciter note . ⁊ remanebunt inter omnes duas chordas earum duo loca duarum chordarum tm̄ : quarum perscrutabimur scientiam . eo ꝙ posuimus arcus in tabulis libri nostri i fm superfluum medietatis partis.

Quod si nos reperiremus chordā arcus medietatis partis vere:inueniremus cum ea per capitulum cōpositionis ⁊ capitulū superflui augmentoꝝ quantitates chordarū reliquoꝝ arcuū:que sunt inter chordas notas quas nominauimus:fm veritatē numerationis linearum almisaat ⁊ tegdir.⁊ per hoc cōpleremus omnes chordas circuli fm superfluū medietatis partis ⁊ medietatis partis.hoc autem nō fm veritatem reperitur.quoniā etsi chorda arcus partis ⁊ semis sit nota:tm̄ eius tertia non est reperta fm

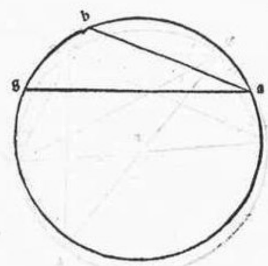








veritatē numerationis almisaat ꝛ tegdir. ¶ Perscrutabor igitur inuentionē chorde arcus vnius partis per chordam arcus partis ꝛ semis: ꝛ per chordam arcus medietatis ꝛ quarte. Et ponam capitulum de hoc. Quamuis enim non contineat vere quantitatem omniū chordarum: possibile tamē est vt per ipsum inueniatur quantitas chordarum paruorū arcuū: ita vt nihil veritatis eius cuius sentit quātitas deficiat. ¶ Et ad hoc pmittā hoc caplm: ꝛ dicā Si descripte sint in circulo due chorde diuerse: erit proportio chorde longioris ad chordam breuiorem minor proportione arcus chorde longioris ad arcum chorde breuioris. Et describā propter hoc circulū: supra quē sint.a.b.g.d.in quo sint due chorde diuerse: quarū breuior sit.a.b.ꝛ earum longior sit.b.g.Dico ergo ꝙ proportio chorde.b.g. ad chordaꝫ.b.a. est minor proportione arcus.b.g.ad arcum.b.a.Quod sic probať. Diuidam enim anguluꝫ a.b.g.in duo media linea.b.d.ꝛ protrahā lineas.a.e.g.ꝛ.a.d.ꝛ.g.d.Et quoniā angulus.a.b.g diuisus est in duo media linea.b.e.d.erit linea.g.d.equalis linee.a.d.Linea autē.g.e.est longior linea.a.e.producā aūt a d.ad lineā.a.e.g.perpendicularē.d.r.Et qꝛ linea.a.d.est longior linea.e.d.ꝛ linea.e.d.est longior.d.r.erit circulus descriptus supra centrum.d.cum lōgitudine.d.e.secans.a.d.ꝛ pertransiens.d.r.Igitur signabo circulū supra quem sint.b.e.t.ꝛ producam.d.r.ad.t.Et quia sector.d.e.t. est maior triangulo.d.e.r.ꝛ triangulus.d.e.a.est maior sectore.d.e.h.erit proportio trianguli.d.e.r.ad triangulū.d.e.a.minor proportione sectoris d.e.t.ad sectorem.d.e.h.Proportio autem triāguli.d.e.r.ad triāguluꝫ.d.e.a.est sicut proportio linee.e.r.ad lineam.e.a.ꝛ proportio sectoris.d.e.t.ad sectorem.d.e.h. est sicut proportio anguli.r.d.e.ad angulum.a.d.e.ergo proportio linee.r.e.ad lineam.e.a.est minor proportione anguli.r.d.e.ad angulum.e.d.a.Cum ergo cōposuerimus: erit proportio linee.r.a.ad lineam.e.a.minor proportione anguli.r.d.a.ad angulum.a.d.e.ꝛ erit proportio dupli.a.r. quod est.g.a.ad.a.e.minor proportione anguli.g.d.a.qui est duplus anguli.a.d.r.ad angulum.e.d.a. Et cum diuiserimus: erit proportio linee.g.e.ad.a.e.minor proportione anguli g.d.e.ad anguluꝫ.e.d.a.sed proportio linee.g.e.ad.e.a.est sicut proportio chorde.g.b.ad chordam.b.a.ꝛ proportio anguli.g.d.b.ad angulum.b.d.a.est sicut proportio arcus.g.b.ad arcuꝫ b.a.proportio igitur chorde.g.b.ad chordā.b.a.est minor proportiōe arcus.g.b.ad arcū.b.a. Et hoc est quod voluimus demonstrare.



Postq̄ affirmauimus hanc precedentem figuram: describam circulum.a.b.g.ꝛ in eo duas chordas.a.b.ꝛ.a.g.Et ponam primū vt a.b.subtēdať arcui medietatis ꝛ quarte partis circuli: ꝛ.a.g.subtēdatur arcui partis vnius.Et quia proportio chorde.a.g.ad chordaꝫ.a.b.est minor proportione arcus.a.g.ad arcū.a.b.ꝛ arcus.a.g. est quantum.a.b.ꝛ eius tertia. Ergo quia iam ostensum est ꝙ chorda.a.b.est cifre ꝛ.47.minuta ꝛ.8.2̈. ſm quantitatem qua diameter est.120.erit chorda.a.g.minus parte vna ꝛ duobus minutis ꝛ.50.secūdis: ſm quantitatē illā: tertijs pretermissis: que non ponūtur in tabulis: que tamen sunt.40.ſm illam quantitatem.hoc namqꝫ vicinius existit tanto ꝛ tertie tanti quantū sunt.47.minuta ꝛ.8.2̈. ¶ In hoc quoqꝫ circulo ponam vt chorda.a.b.subtendātur arcui partis vnius.ꝛ chorda.a.g.subtendatur arcui partis ꝛ semis.Scōm ergo ꝙ narrauimus: quoniam arcus.a.g.est quantum arcus.a.b.ꝛ semis: erit chorda.g.a. minus q̄ quantū chorda.a.b.ꝛ semis.Iam aūt ostensum fuit: ꝙ chorda.a.g.est pars ꝛ.34.minuta ꝛ.15.2̈. ſm quātitatē qua diameter est.120.chorda igiť.a.b.est plus parte ꝛ duob⁹ minutis ꝛ.50. secundis: ſm quantitatem illam. Pars nāqꝫ ꝛ.34.minuta ꝛ.15.2̈.sunt tantum ꝛ medium tanti quantū est pars ꝛ duo minuta ꝛ.50.2̈. Postq̄ ergo chorda vnius partis circuli quandoqꝫ est minus parte ꝛ.2.minutis ꝛ.50.secūdis: ꝛ quandoqꝫ maius parte ꝛ duobus minutis ꝛ.50.secundis.Tunc manifestum est: ꝙ conuenit nobis: vt accipiamus chordam vnius partis circuli partem vnam chorde ꝛ duo minuta: ꝛ.50.2̈. ſm quantitatem qua diameter est.120.Et propter hoc quod iam ostensum est per id quod diximus erit chorda arcus medietatis partis fere cifre ꝛ.31.minuta ꝛ.25.2̈. ¶ Et per hoc complebiť residuū reliquarum chordarum quas prediximus: que sunt inter chordas notas.Chordam enim arcus duarum partium sciemus per compositionem arcus partis ꝛ semis cū arcu medietatis partis. Sed chordam arcus duarum partium ꝛ semis sciemus propter superfluum: videlicet per superfluum arcus trium partium super arcum medietatis partis.Et similiter sciemus quantitatē reliquarum chordarum.Et illud est quod demonstrare voluimus.

¶ Capitulum decimum Quomodo tabule chordarum partium circuli fiant.

T aūt sciať quātitas chordaꝝ arcuū circuli: hoc leuius est quo fit ꝛ breuius ꝛ magis aggregatū. Et quoniā necesse est nobis scire numerum partium chordarum ꝛ quantitatem earum: ꝛ vt sint preparate: faciam tabulas.ꝛ in vnaquaqꝫ tabula.45.areas.eo ꝙ in hoc mensurationis bonitas cōsistit.Et describam in prima tabula numerum partium arcuum superfluentium medietate partis ꝛ medietate partis. Et in tabula secunda numerum partium chordarum ꝛ minutorum partium ꝛ secundoꝛ earum: que subtenduntur arcubus consequenter ex latere. ita ꝙ queqꝫ chorda suum consequatur arcum: ẜm diuisionem diametri circuli per. 120. In tabula vo tertia partem tricesimã superflui: quod est inter oẽs duas chordas: que subtendunt arcubꝰ supfluentibꝰ medietate partis et medietate partis: Ideo vt cũ sciuerimꝰ numerũ minutoꝝ portionis medial minuti vnius nõ diuerse a veritate ẜm sensum: possimus scire leui opere portionẽ minutorũ: q̃ sunt ab vno minuto vsqꝫ ad. 30. minuta: ex eis que sunt inter omnes duas chordas. ¶ O q̃ꝫ bene: ꝙ declarabit nobis cũ dubitauerimꝰ de errore existẽte in aliquo numero alicuius chordarũ descriptarũ in tabulis verificatio illius erroris: qñ poterimus per hec capitula rectificare illud: ꝛ scire eius veritatẽ: aut per scientiam chorde que subtẽditur duplo arcus dati: aut per scientiã superflui quod est inter duos arcus notos duas notas habentes chordas: aut per totius arcus scientiam: qui est ad complendum semicirculum cum arcu noto chordam habente notam. Et hec est tabularum descriptio.

¶ Capitulum Undecimũ De positione arcuum ꝛ chordarum eorum in tabulis.

¶ Prima

¶ Tabula prima chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium.					¶ Pars tricesima superflui: quod est inter oẽs duas chordas. ꝛ est portio arcus vnius minuti.			
Arcus		Chorde						
Partes	m	ptes	m	2	ptes	m	2	3
0	30	0	31	25	0	0	2	50
1	0	1	2	50	0	0	2	50
1	30	1	34	15	0	0	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	48
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	48
4	30	4	42	40	0	1	2	48
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	44
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	44
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	42
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	38
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	38
10	0	10	27	32	0	1	2	34
10	30	10	58	49	0	1	2	32
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28
12	30	13	3	50	0	1	2	28
13	0	13	35	4	0	1	2	24
13	30	14	6	16	0	1	2	22
14	0	14	37	27	0	1	2	22
14	30	15	8	38	0	1	2	18
15	0	15	39	47	0	1	2	18
15	30	16	10	56	0	1	2	14
16	0	16	42	3	0	1	2	12
16	30	17	13	9	0	1	2	10
17	0	17	44	14	0	1	2	6
17	30	18	15	17	0	1	2	4
18	0	18	46	19	0	1	2	4
18	30	19	17	21	0	1	2	0
19	0	19	48	21	0	1	1	56
19	30	20	19	19	0	1	1	54
20	0	20	50	16	0	1	1	52
20	30	21	21	12	0	1	1	48
21	0	21	52	6	0	1	1	44
21	30	22	22	58	0	1	1	42
22	0	22	53	49	0	1	1	40
22	30	23	24	39	0	1	1	36

¶ Secunda

¶ Tabula secũda chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium.					¶ Pars tricesima superflui: quod est inter oẽs duas chordas. ꝛ est portio arcus vnius minuti.			
Arcus		Chorde						
Partes	m	ptes	m	2	ptes	m	2	3
23	0	23	55	27	0	1	1	32
23	30	24	26	13	0	1	1	30
24	0	24	56	58	0	1	1	26
24	30	25	27	41	0	1	1	22
25	0	25	58	22	0	1	1	18
25	30	26	29	1	0	1	1	14
26	0	26	59	38	0	1	1	12
26	30	27	30	14	0	1	1	8
27	0	28	0	48	0	1	1	4
27	30	28	31	20	0	1	1	0
28	0	29	1	50	0	1	0	56
28	30	29	32	18	0	1	0	52
29	0	30	2	44	0	1	0	48
29	30	30	33	8	0	1	0	44
30	0	31	3	30	0	1	0	40
30	30	31	33	50	0	1	0	36
31	0	32	4	8	0	1	0	28
31	30	32	34	22	0	1	0	26
32	0	33	4	35	0	1	0	22
32	30	33	34	46	0	1	0	18
33	0	34	4	55	0	1	0	12
33	30	34	35	1	0	1	0	8
34	0	35	5	5	0	1	0	2
34	30	35	35	6	0	0	59	58
35	0	36	5	5	0	0	59	52
35	30	36	35	1	0	0	59	48
36	0	37	4	55	0	0	59	44
36	30	37	34	47	0	0	59	38
37	0	38	4	36	0	0	59	32
37	30	38	34	22	0	0	59	26
38	0	39	4	5	0	0	59	22
38	30	39	33	46	0	0	59	16
39	0	40	3	24	0	0	59	12
39	30	40	33	0	0	0	59	6
40	0	41	2	33	0	0	59	0
40	30	41	32	3	0	0	58	54
41	0	42	1	30	0	0	58	48
41	30	42	30	54	0	0	58	42
42	0	43	0	15	0	0	58	36
42	30	43	29	33	0	0	58	32
43	0	43	58	49	0	0	58	24
43	30	44	28	1	0	0	58	18
44	0	44	57	10	0	0	58	12
44	30	45	26	16	0	0	58	6
45	0	45	55	19	0	0	58	0

Residuum tabularum Chordarum Arcuū semicirculi: vna cum excessuū earundem parte tricesima: vnius videlicet minuti arcuum portiuncule debita.

Tertia

Tabula tertia chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium. Arcus Partes	m	Chorde ptes	m	2	Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. et est portio arcus vnius minuti. ptes	m	2	3
45	30	46	24	19	0	0	57	54
46	0	46	53	16	0	0	57	46
46	30	47	22	9	0	0	57	42
47	0	47	51	0	0	0	57	34
47	30	48	19	47	0	0	57	26
48	0	48	48	30	0	0	57	22
48	30	49	17	11	0	0	57	14
48	0	49	45	48	0	0	57	5
49	30	50	14	21	0	0	57	0
50	0	50	42	51	0	0	56	57
50	30	51	11	18	0	0	56	48
51	0	51	39	42	0	0	56	36
51	30	52	8	0	0	0	56	32
52	0	52	36	16	0	0	56	26
52	30	53	4	29	0	0	56	18
53	0	53	32	38	0	0	56	10
53	30	54	0	43	0	0	56	2
54	0	54	28	44	0	0	55	56
54	30	54	56	42	0	0	55	48
55	0	55	24	36	0	0	55	40
55	30	55	52	26	0	0	55	32
56	0	56	20	12	0	0	55	24
56	30	56	47	54	0	0	55	18
57	0	57	15	33	0	0	55	8
57	30	57	43	7	0	0	55	2
58	0	58	10	38	0	0	54	54
58	30	58	38	5	0	0	54	44
59	0	59	5	27	0	0	54	36
59	30	59	32	45	0	0	54	30
60	0	60	0	0	0	0	54	22
60	30	60	27	11	0	0	54	12
61	0	60	54	17	0	0	54	4
61	30	61	21	19	0	0	53	56
62	0	61	48	17	0	0	53	46
62	30	62	15	10	0	0	53	40
63	0	62	42	0	0	0	53	30
63	30	63	8	45	0	0	53	22
64	0	63	35	26	0	0	53	12
64	30	64	2	2	0	0	53	4
65	0	64	28	34	0	0	52	54
65	30	64	55	1	0	0	52	46
66	0	65	21	24	0	0	52	38
66	30	65	47	43	0	0	52	28
67	0	66	13	57	0	0	52	20
67	30	66	40	7	0	0	52	10

Quarta

Tabula quarta chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium. Arcus Partes	m	Chorde ptes	m	2	Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. et est portio arcus vnius minuti. ptes	m	2	3
68	0	67	6	12	0	0	52	0
68	30	67	32	12	0	0	51	52
69	0	67	58	8	0	0	51	42
69	30	68	23	59	0	0	51	32
70	0	68	49	45	0	0	51	24
70	30	69	15	27	0	0	51	14
71	0	69	41	4	0	0	51	4
71	30	70	6	36	0	0	50	54
72	0	70	32	3	0	0	50	46
72	30	70	57	26	0	0	50	36
73	0	71	22	44	0	0	50	24
73	30	71	47	56	0	0	50	16
74	0	72	13	4	0	0	50	6
74	30	72	38	7	0	0	49	56
75	0	73	3	5	0	0	49	46
75	30	73	27	58	0	0	49	36
76	0	73	52	46	0	0	49	26
76	30	74	17	29	0	0	49	16
77	0	74	46	7	0	0	49	4
77	30	75	6	39	0	0	48	56
78	0	75	31	7	0	0	48	44
78	30	75	55	29	0	0	48	34
79	0	76	19	46	0	0	48	24
79	30	76	43	58	0	0	48	14
80	0	77	8	5	0	0	48	2
80	30	77	32	6	0	0	47	52
81	0	77	56	2	0	0	47	40
81	30	78	19	52	0	0	47	32
82	0	78	43	38	0	0	47	20
82	30	79	7	18	0	0	47	8
83	0	79	30	52	0	0	46	58
83	30	79	54	21	0	0	46	48
84	0	80	17	45	0	0	46	36
84	30	80	41	3	0	0	46	24
85	0	81	4	15	0	0	46	14
85	30	81	27	22	0	9	46	4
86	0	81	50	24	0	0	45	50
86	30	82	13	19	0	0	45	40
87	0	82	36	9	0	0	45	30
87	30	82	58	54	0	0	45	18
88	0	83	21	33	0	0	45	6
88	30	83	44	6	0	0	44	56
89	0	84	6	34	0	0	44	42
89	30	84	28	55	0	0	44	30
90	0	84	51	10	0	0	44	20

Residuum tabularum Chordarum Arcuū semicirculi: vna cum excessuū earundem parte tricesima: vnius videlicet minuti arcuum portiuncule debita.

Quinta

Tabula quinta Chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium. Arcus		Chorde			Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. et est portio arcus vnius minuti.			
Partes	m	ptes	m	2	ptes	m	2	3
90	30	85	13	20	0	0	44	8
91	0	85	35	24	0	0	43	58
91	30	85	57	23	0	0	43	44
92	0	86	19	15	0	0	43	34
92	30	86	41	2	0	0	43	20
93	0	87	2	42	0	0	43	10
93	30	87	24	17	0	0	42	56
94	0	87	45	45	0	0	42	44
94	30	88	7	7	0	0	42	34
95	0	88	28	24	0	0	42	20
95	30	88	49	34	0	0	42	10
96	0	89	10	39	0	0	41	56
96	30	89	31	37	0	0	41	44
97	0	89	52	29	0	0	41	32
97	30	90	13	15	0	0	41	20
98	0	90	33	55	0	0	41	8
98	30	90	54	29	0	0	40	54
99	0	91	14	56	0	0	40	42
99	30	91	35	17	0	0	40	30
100	0	91	55	32	0	0	40	16
100	30	92	15	40	0	0	40	4
101	0	92	35	42	0	0	39	52
101	30	92	55	38	0	0	39	38
102	0	93	15	27	0	0	39	28
102	30	93	35	11	0	0	39	12
103	0	93	54	47	0	0	39	0
103	30	94	14	17	0	0	38	48
104	0	94	33	41	0	0	38	34
104	30	94	52	58	0	0	38	22
105	0	95	12	9	0	0	38	8
105	30	95	31	13	0	0	37	56
106	0	95	50	11	0	0	37	42
106	30	96	9	2	0	0	37	28
107	0	96	27	46	0	0	37	16
107	30	96	46	24	0	0	37	2
108	0	97	4	55	0	0	36	50
108	30	97	23	20	0	0	36	36
109	0	97	41	38	0	0	36	22
109	30	97	59	49	0	0	36	10
110	0	98	17	54	0	0	35	56
110	30	98	35	52	0	0	35	42
111	0	98	53	43	0	0	35	28
111	30	99	11	27	0	0	35	16
112	0	99	29	5	0	0	35	0
112	30	99	46	35	0	0	34	48

Sexta

Tabula sexta Chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium. Arcus		Chorde			Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. et est portio arcus vnius minuti.			
Partes	m	ptes	m	2	ptes	m	2	3
113	0	100	3	59	0	0	34	34
113	30	100	21	16	0	0	34	20
114	0	100	38	26	0	0	34	4
114	30	100	55	28	0	0	33	54
115	0	101	12	25	0	0	33	40
115	30	101	29	15	0	0	33	24
116	0	101	45	57	0	0	33	12
116	30	102	2	33	0	0	32	56
117	0	102	19	1	0	0	32	42
117	30	102	35	22	0	0	32	30
118	0	102	51	37	0	0	32	14
118	30	103	7	44	0	0	32	0
119	0	103	23	44	0	0	31	46
119	30	103	39	37	0	0	31	32
120	0	103	55	23	0	0	31	18
120	30	104	11	2	0	0	31	4
121	0	104	26	34	0	0	30	50
121	30	104	41	59	0	0	30	34
122	0	104	57	16	0	0	30	20
122	30	105	12	26	0	0	30	8
123	0	105	27	30	0	0	29	52
123	30	105	42	26	0	0	29	36
124	0	105	57	14	0	0	29	22
124	30	106	11	55	0	0	29	8
125	0	106	26	29	0	0	28	54
125	30	106	40	56	0	0	28	38
126	0	106	55	15	0	0	28	24
126	30	107	9	27	0	0	28	10
127	0	107	23	32	0	0	27	56
127	30	107	37	30	0	0	27	40
128	0	107	51	20	0	0	27	24
128	30	108	5	2	0	0	27	10
129	0	108	18	37	0	0	26	56
129	30	108	32	5	0	0	26	40
130	0	108	45	25	0	0	26	26
130	30	108	58	38	0	0	26	12
131	0	109	11	44	0	0	25	56
131	30	109	24	42	0	0	25	40
132	0	109	37	32	0	0	25	26
132	30	109	50	15	0	0	25	10
133	0	110	2	50	0	0	24	56
133	30	110	15	18	0	0	24	42
134	0	110	27	39	0	0	24	26
134	30	110	39	52	0	0	24	10
135	0	110	51	57	0	0	23	54

Dictio

¶ Residuum tabularum Chordarum Arcuū semicirculi: vna cum excessuū earundem parte tricesima: vnius videlicet minuti arcuum portiuncule debita.

¶ Septima

¶ Tabula septima chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium.					¶ Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. ⁊ est portio arcus vnius minuti.			
Arcus		Chorde						
Partes	m	ptes	m	2	ptes	m	2	3
135	30	111	3	54	0	0	23	40
136	0	111	15	44	0	0	23	24
136	30	111	27	26	0	0	23	10
137	0	111	39	1	0	0	22	54
137	30	111	50	28	0	0	22	38
138	0	112	1	47	0	0	22	24
138	30	112	12	59	0	0	22	8
139	0	112	24	3	0	0	21	54
139	30	112	35	0	0	0	21	36
140	0	112	45	48	0	0	21	22
140	30	112	56	29	0	0	21	6
141	0	113	7	2	0	0	20	50
141	30	113	17	27	0	0	20	34
142	0	113	27	44	0	0	20	20
142	30	113	37	54	0	0	20	4
143	0	113	47	56	0	0	19	48
143	30	113	57	50	0	0	19	34
144	0	114	7	37	0	0	19	16
144	30	114	17	15	0	0	19	2
145	0	114	26	46	0	0	18	46
145	30	114	36	9	0	0	18	30
146	0	114	45	24	0	0	18	14
146	30	114	54	31	0	0	17	58
147	0	115	3	30	0	0	17	44
147	30	115	12	22	0	0	17	28
148	0	115	21	6	0	0	17	10
148	30	115	29	41	0	0	16	56
149	0	115	38	9	0	0	16	40
149	30	115	46	29	0	0	16	22
150	0	115	54	40	0	0	16	8
150	30	116	2	44	0	0	15	52
151	0	116	10	40	0	0	15	36
151	30	116	18	28	0	0	15	20
152	0	116	26	8	0	0	15	4
152	30	116	33	40	0	0	14	48
153	0	116	41	4	0	0	14	32
153	30	116	48	20	0	0	14	16
154	0	116	55	28	0	0	14	0
154	30	117	2	28	0	0	13	44
155	0	117	9	20	0	0	13	28
155	30	117	16	4	0	0	13	12
156	0	117	22	40	0	0	12	56
156	30	117	29	8	0	0	12	40
157	0	117	35	28	0	0	12	24
157	30	117	41	40	0	0	12	6

¶ Octaua

¶ Tabula octaua chordarum arcuum: medietate et medietate partis superfluentium.					¶ Pars tricesima superflui: quod est inter oēs duas chordas. ⁊ est portio arcus vnius minuti.			
Arcus		Chorde						
Partes	m	ptes	m	2	ptes	m	2	3
158	0	117	47	43	0	0	11	52
158	30	117	53	39	0	0	11	34
159	0	117	59	26	0	0	11	20
159	30	118	5	6	0	0	11	2
160	0	118	10	37	0	0	10	48
160	30	118	16	1	0	0	10	30
161	0	118	21	16	0	0	10	14
161	30	118	26	23	0	0	9	58
162	0	118	31	22	0	0	9	42
162	30	118	36	13	0	0	9	24
163	0	118	40	55	0	0	9	10
163	30	118	45	30	0	0	8	52
164	0	118	49	56	0	0	8	36
164	30	118	54	14	0	0	8	20
165	0	118	58	24	0	0	8	4
165	30	119	2	26	0	0	7	48
166	0	119	6	20	0	0	7	32
166	30	119	10	6	0	0	7	16
167	0	119	13	44	0	0	6	58
167	30	119	17	13	0	0	6	42
168	0	119	20	34	0	0	6	26
168	30	119	23	47	0	0	6	10
169	0	119	26	52	0	0	5	54
169	30	119	29	49	0	0	5	36
170	0	119	32	37	0	0	5	20
170	30	119	35	17	0	0	5	4
171	0	119	37	49	0	0	4	48
171	30	119	40	13	0	0	4	32
172	0	119	42	29	0	0	4	14
172	30	119	44	36	0	0	3	58
173	0	119	46	35	0	0	3	42
173	30	119	48	26	0	0	3	24
174	0	119	50	8	0	0	3	10
174	30	119	51	43	0	0	2	54
175	0	119	53	10	0	0	2	36
175	30	119	54	28	0	0	2	20
176	0	119	55	38	0	0	2	2
176	30	119	56	39	0	0	1	46
177	0	119	57	32	0	0	1	32
177	30	119	58	18	0	0	1	14
178	0	119	58	55	0	0	0	56
178	30	119	59	23	0	0	0	42
179	0	119	59	44	0	0	0	24
179	30	119	59	56	0	0	0	8
180	0	120	0	0	0	0	0	0

Cuadro 12: Pequeña muestra de la Tabla de cuerdas de Ptolomeo.

Tabla de cuerdas en un círculo							
Arcos $^\circ$	Cuerdas ^{p}			Sesentavos			
$1/2^\circ$	0^p	$31'$	$25''$	0^p	$1'$	$2''$	$50'''$
1	1^p	$2'$	$50''$	0^p	$1'$	$2''$	$50'''$
$1\frac{1}{2}$	1^p	$34'$	$15''$	0^p	$1'$	$2''$	$50'''$
2	2^p	$5'$	$40''$	0^p	$1'$	$2''$	$50'''$
$2\frac{1}{2}$	2^p	$37'$	$4''$	0^p	$1'$	$2''$	$48'''$
3	3^p	$8'$	$28''$	0^p	$1'$	$2''$	$48'''$
$3\frac{1}{2}$	3^p	$39'$	$52''$	0^p	$1'$	$2''$	$48'''$
4	4^p	$11'$	$16''$	0^p	$1'$	$2''$	$47'''$
$4\frac{1}{2}$	4^p	$42'$	$40''$	0^p	$1'$	$2''$	$47'''$
60°	60^p	$0'$	$0''$	0^p	$0'$	$54''$	$21'''$
179	119^p	$59'$	$44''$	0^p	$0'$	$0''$	$25'''$
$179\frac{1}{2}$	119^p	$59'$	$56''$	0^p	$0'$	$0''$	$9'''$
180°	120^p	$0'$	$0''$	0^p	$0'$	$0''$	$0'''$

Arquímedes encuentra la "triangulatura" del círculo

La palabra "triangulatura", como habrá notado el lector, no existe en español, se intentó de hacer alusión al viejo problema de la *cuadratura del círculo.* Me explico: el problema de *cuadrar el círculo* consiste en construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado *usando exclusivamente regla sin marcas y compás.* Como se debe saber, dado que π es trascendente, esto *es imposible*[148]. Desde el punto de vista teórico, conociendo π, es trivial encontrar un cuadrado con la misma área de un círculo de radio dado r. Simplemente el cuadrado debe tener lados de longitud $\sqrt{\pi}r$. Es posible calcular la raíz cuadrada de cualquier número con regla y compás, lo que no es posible es construir π de tal forma.

[148] Martín Gardner escribió que una gran cantidad de aficionados, sedientos de fama, siguen tratando de cuadrar el círculo y amablemente les pedía que no le enviaran sus trabajos bajo ninguna circunstancia.

Con el mismo espíritu *teórico* de construcción, Arquímedes *encuentra* un triángulo rectángulo cuya área es igual a la de un círculo dado (vea figura 40), de aquí el nombre del presente capítulo. Por supuesto, se requiere conocer π, ya que el triángulo tiene un cateto de longitud $2\pi r$, la circunferencia completa, y el otro cateto de longitud igual al radio del círculo r. Así, trivialmente, el área del triángulo es $\frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$, es decir, igual al área del círculo, como ahora sabemos. Trivialmente, se debe insistir, el triángulo es posible si se conoce π, a lo cual Arquímedes, dedica el teorema donde obtiene las famosas estimaciones

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7},$$

las cuales no satisfacen la sed de dígitos de ningún *connoisseur* actual, ya que solo aproximan a π con dos decimales.

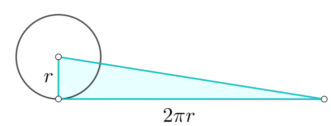


Figura 40: Se muestra un triángulo cuya área es igual a la de un círculo dado, cuando uno del los lados que forma el ángulo recto mide lo que mide el radio del círculo y el otro lado que forma el ángulo, mide la longitud de la circunferencia.

En el presente capítulo se muestran las argumentaciones de Arquímedes que fundamentan tales famosos resultados, las cuales nos dan una pequeña muestra del genio del gran matemático, físico e ingeniero de Siracusa.

El procedimiento de Arquímedes: proposición I del capítulo "De las dimensiones del círculo"

Dada una circunferencia C, de radio r, se desea demostrar que el área del círculo $A(C)$ es igual al área de un triángulo rectángulo T, denotada $A(T)$, cuya longitud de la base es igual a la circunferencia del círculo dado, que se denota $P(C)$, y cuya altura es igual al radio de C. Es decir, se desea demostrar que

$$A(C) = \frac{1}{2}P(C)r.$$

La idea de Arquímedes es proceder por reducción al absurdo, suponiendo que el área $A(T)$ del triángulo no es igual al área del círculo.

Supone primero que $A(T) < A(C)$. Se construirán sucesivamente polígonos inscritos que aproximen el área del círculo, duplicando cada vez el número de lados de los polígonos dividiendo en dos partes iguales los arcos subtendidos por los del polígono inmediato anterior. Se comienza con un cuadrado A, B, Γ, Δ, el cual está inscrito en la circunferencia.

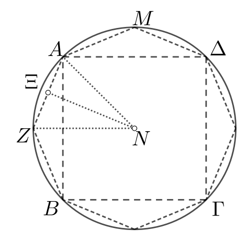


Figura 41: Sucesión de polígonos inscritos para aproximar el área de una circunferencia.

Se define D_n como la diferencia entre el área del círculo y el área de cada polígono la cual denotaremos con P_n, siendo n el número de lados del polígono. De esta manera, si $A(P_n)$ es el área del polígono

$$0 < D_n = A(C) - A(P_n).$$

Arquímedes afirma que existe un polígono[149] P_m, para el cual

$$0 < D_m < A(C) - A(T).$$

[149] Tal polígono existe por: Euclides, libro 10, prop. 1.

Para tal polígono, considere cualquiera de sus lados, por ejemplo el AZ y construya el segmento perpendicular a AZ que pasa por el centro del círculo N. Sea Ξ el pie de dicha perpendicular (vea la figura 43). Construya el triángulo $\triangle ZNA$, cuya altura es, obviamente $N\Xi$, la cual es menor que el radio del círculo AN. Se tiene entonces que el área del polígono $A(P_m)$ es m veces el área del triángulo $\triangle ZNA$, es decir,

$$A(P_m) = m\frac{AZ \cdot N\Xi}{2}.$$

Pero $m \cdot AZ$ es menor que la circunferencia del círculo $P(C)$ lo cual mide lo mismo que uno de los catetos de T, entonces se tiene

$$A(Pm) < \frac{1}{2}P(C)N\Xi = \frac{1}{2}P(C)r = A(T)$$

De esta forma

$$D_m = A(C) - A(P_m) > A(C) - A(T) > D_m$$

lo cual es una contradicción.

Similarmente, suponer que $A(T) > A(C)$ lleva a una contradicción. Para comprobarlo se construyen polígonos circunscritos a la circunferencia C. Primeramente, se circunscribe un cuadrado (vea la figura 43), sean M, Z los puntos de contacto del cuadrado con la circunferencia.

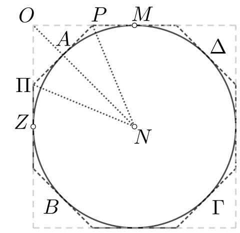


Figura 42: Sucesión de polígonos circunscritos para aproximar el área de una circunferencia.

Divida en dos el arco ZM en el punto A. Construya la tangente al círculo en A y la perpendicular que pasa por OAN.

Entonces el ángulo $\angle OAP$ es recto[150] y a intersección de la tangente con los lados del cuadrado da los vértices del siguiente polígono circunscrito. Este proceso de construcción se repite cuantas veces sea necesario hasta obtener un polígono P_m tal $A(P_m) - A(C) < D_m = A(T) - A(C)$. En este caso nuevamente $r = NA$ y, por lo tanto, $A(P_m) = m \cdot \Pi P \frac{r}{2}$, es decir, el área del polígono es $m/2$ veces la longitud del lado del polígono por el radio del círculo, o bien, m veces el área del triángulo $\triangle \Pi NP$. Así, se tiene que si $D_m > 0$ para algún m, entonces

$$\begin{aligned} A(P_m) - A(C) &< A(T) - A(C) \\ A(P_m) &< A(T) = P(C)\frac{r}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto $m \cdot \Pi P \frac{r}{2} < P(C)\frac{r}{2}$, con lo que

$$m \cdot \Pi P < P(C)$$

lo que quiere decir que el perímetro del polígono es menor que la circunferencia del círculo, lo cual es imposible dado que la circunferencia está circunscrita. Se concluye que no se cumple que $A(T) > A(C)$ ni, como se vio antes, $A(T) < A(C)$ y, por lo tanto, $A(T) = A(C)$.

[150] Euclides, libro 3, prop. 18.

Sobre la proposición iii del capítulo "De las dimensiones del círculo"

Desde un punto de vista moderno, la estimación que hace Arquímedes para π es fácil de realizar, ya que con las herramientas modernas, los cálculos que en época de Arquímedes eran muy difíciles, ahora son inmediatos. Se describe a continuación lo que se puede hacer con las herramientas a la mano. La idea de Arquímedes es inscribir y circunscribir en la circunferencia polígonos de 96 lados. Al calcular el perímetro de los polígonos, el valor de la longitud de la circunferencia es mayor que el perímetro de la circunferencia inscrita y menor que el de la circunferencia circunscrita, argumento que ha usado en las proposiciones i y ii.

En notación moderna, partiendo del hexágono del que Arquímides conoce la longitud de una arista y dado que, como claramente $96 = 6 \cdot 2^4$, el polígono se obtiene dividiendo por la mitad el ángulo que subtiende el lado de un hexágono 4 veces. La argumentación de Arquímedes está basada en dar estimaciones para divisiones por la mitad del ángulo de 60°, mediante el teorema de Pitágoras y la extracción de raíces cuadradas así como, sorprendentemente, la fórmula para la tangente del ángulo mitad, pero expresada en una forma sorprendente que, en notación moderna, se escribe como:

$$\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\tan\theta},$$

la cual es válida para $0 < \theta < 90°$. Sin la notación actual, la fórmula es sorprendente por que permitió a Arquímedes calcular segmentos asociados con la mitad de arcos simplemente sumando cantidades conocidas. Ptolomeo descubrió las fórmulas para senos y cosenos de ángulos mitad, ¡pero Ptolomeo es posterior a Arquímedes por varios siglos!, así que Arquímedes conocía una relación no trivial del ángulo mitad mucho antes de Ptolomeo.

Sin embargo, en nuestra época podemos obviar todas las etapas sucesivas de Arquímedes, así como sus meticulosos cálculos y proceder sencillamente como sigue:

1. No se pierde generalidad si se considera un círculo de radio $r = 1$. En la figura 43, $\alpha = 30°$ de tal manera que $Z'\Gamma' = \operatorname{sen} 30°$ y $Z\Gamma = \tan 30°$.

2. La longitud del lado del polígono inscrito ℓ_{ins} está dado por la fórmula $\ell_{ins} = 2\operatorname{sen}\theta$, donde θ es la mitad del ángulo subtendido por tal lado. El lado del polígono circunscrito ℓ_{cir} está dado por la fórmula $\ell_{cir} = 2\tan\theta$.

3. Para el polígono regular de 96 lados se tiene que $\theta = \dfrac{60°}{2^5} = \dfrac{30°}{2^4}$, de tal forma que, si denotamos el perímetro con $P(\ell_{ins})$ y $P(\ell_{cir})$ respectivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} P(\ell_{ins}) &= 2\cdot 96 \operatorname{sen}\frac{30°}{2^4} \approx 6.28206 \\ P(\ell_{cir}) &= 2\cdot 96 \tan\frac{30°}{2^4} \approx 6.28543. \end{aligned}$$

4. Con las estimaciones anteriores se tiene

$$6.28206 < 2\pi < 6.28543$$

o bien, si lo que se desea es obtener estimaciones para π

$$3.14103 < \pi < 3.14271$$

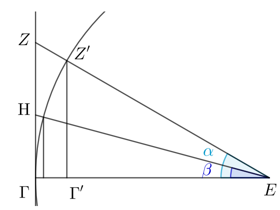


Figura 43: En la figura, $\angle ZEH = \angle HE\Gamma$, de esta forma $\alpha = \angle ZE\Gamma = 2\angle HE\Gamma = 2\beta$. Arquímedes divide el ángulo α hasta obtener la cuerda de un polígono inscrito y uno circunscrito de 96 lados ambos, con tales figuras obtiene las estimaciones para π.

Por supuesto, dado que Arquímedes desea dar las estimaciones como cocientes de enteros manejables para él, sus cálculos son menos exactos (además recordamos que no contaba con tablas trigonométricas ni las fórmulas trigonométricas para ángulos arbitrarios).

Si como antes, $P(C)$ denota la longitud de la circunferencia de un círculo dado de radio r, Arquímedes afirma que entonces $3\frac{10}{71}\cdot 2r < P(C) < 3\frac{1}{7}\cdot 2r$. de donde sus estimaciones nos dan

$$3.14085 = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.14286$$

las cuales no son mejores que las que se obtienen 2000 años después, obviamente, con todo el saber acumulado de Euler, Newton, etcétera, sin olvidar las contribuciones de Ptolomeo las cuales Arquímedes, no pudo conocer.

Crítica a las contribuciones de Arquímedes

Si bien las contribuciones de Arquímedes presentadas en este libro pueden no parecer muy impresionantes; no olvide el lector que son solo una parte muy menor de la obra que se conoce de Arquímedes y que el matemático usó tales estimaciones en cálculos más espectaculares como, por ejemplo, el del área de la superficie de una esfera. Estudio que puede encontrarse en la misma obra de Arquímedes editada por Heiberg (*op. cit.*).

Más aún, la aparentemente inocente forma de aproximar el área de un círculo mediante un triángulo (figura 40) provocó una epifanía en la mente de Torricelli, ya en el renacimiento, que lo llevó a intuir la forma de usar "indivisibles" para calcular áreas y volúmenes (como veremos), lo cual inspiró a Cavalieri, a Wallis, a Newton y ... un largo etcétera.

Por otra parte, si bien los cálculos aritméticos de Arquímedes en nuestra época solo tienen relevancia en la historia de la ciencia (ya que se restringen solamente al cociente de enteros y la extración de raíces cuadradas, con técnicas conocidas desde los antiguos babilonios), no hay que soslayar que influyeron grandemente para el desarrollo posterior de los algoritmos, sin los cuales las computadoras modernas son impensables.

Es de admirar la manera artística con la que Arquímedes escogió las partes en las que dividió los diámetros para facilitar los cálculos y para obtener, por ejemplo, la aproximación

$$780\sqrt{3} \approx 1\,351.000$$

Ignoro si Arquímedes conocía que $780\sqrt{3}$ no es racional y, por lo tanto, si sabía que su cálculo no es exacto, sino solo una sorprendente aproximación.

Para finalizar, en la obra de Arquímedes quedó más que establecido que π es mayor que 3, lo que Ptolomeo sabía y por lo que tomó tanto cuidado en las aproximaciones de sus tablas para distinguir entre "grados", es decir, divisiones del círculo y "partes", es decir, las divisiones del diámetro de la circunferencia consideradas para realizar sus famosos cálculos.

Traducción del original de Arquímedes

Para la traducción se utilizó el extraordinario texto de Heigberg[151], aunque existen versiones en inglés del mismo libro, por ejemplo la de Heath[152], la cual se encuentra disponible en internet. La versión que se presenta es la traducción de Heiberg, publicada en 1880, del texto que se encuentra en el códice florentino.

[151] Arquímedes. *Archimedes opera Omnia cum commentariis Eutocii, edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae in Aedibus B. G. Teuberni, 1880

[152] Thomas Heath. *The Works of Archimedes Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*. Cambridge University Press, New York, 2010

Posterior a la edición aquí estudiada es el hallazgo de Heiberg del palimpsesto famoso que después se perdió para luego ser recuperado. Las peripecias del palimpsesto que tuvo Heigberg en sus manos y que fotografió en 1906 para poder traducirlo, merecen un libro aparte, pero un acercamiento puede encontrarse en el artículo de Walvoord y Easton[153] que trata de la transcripción digital realizada en años recientes del ejemplar que estuvo perdido por decenas de años.

[153] Derek Walvoord y Roger Easton. *Digital Transcription of the Archimedes Palimpsest*. IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE [100] JULY 2008, 2008

Dimensiones del círculo

I. *Un triángulo rectángulo*[154] *es igual a todo el círculo cuyo radio es igual a uno del los lados que forman el ángulo recto y con la base del triángulo igual a la circunferencia.*

[154] Al decir "un triángulo", se refiere al área del triángulo y, similarmente, cuando dice "igual a todo el círculo" se refiere al área total del círculo. También, por "circunferencia" quiere decir la longitud de la circunferencia del círculo.

Téngase de esta manera el círculo $AB\Gamma\Delta$ con el triángulo E como se ha propuesto (*n. t.* vea la figura 40, al triángulo lo llamará E y también al área del triángulo), digo que estos son iguales entre sí.

Ahora, si fuera posible, sea mayor el círculo, e inscriba el cuadrado $A\Gamma$, divida también el arco (subtendido por un lado del cuadrado) en dos partes iguales y trace las rectas BZ, ZA , AM, $M\Delta$ y sea el área de tales segmentaciones[155] menor que lo que excede el círculo al triángulo, y suponga también que el polígono[156] sea mayor que el triángulo. Tome el centro N y construya las perpendiculares $N\Xi$, siendo $N\Xi$ menor que el lado del triángulo (se refiere al lado que tiene por medida el radio del círculo, es decir que $N\Xi < NZ$). Pero también el perímetro del polígono es menor que el otro lado del triángulo, porque la circunferencia del círculo también es menor, lo cual no es posible.

[155] Se refiere a la suma de las áreas que resultan entre el círculo y los lados del polígono.

[156] Se refiere ahora al área del polígono. Heiberg traduce "polígono" como "figura rectilínea".

Si, por otra parte, fuera posible que el círculo sea menor que el triángulo E y se circunscribe un cuadrado, y el arco se corta en dos partes iguales, pero a través de los puntos de las intersecciones se trazan las líneas tangentes; así $\angle OAP$ es recto.

Dado que $OP > MP$, además $MP = PA$ se sigue que el triángulo $PO\Pi > \frac{1}{2}OZAM$ quedando los pedazos del segmento[157]. Similarmente, el espacio ΠZA es menor que lo que el triángulo E excede al círculo $AB\Gamma\Delta$. De esta forma la figura circunscrita es menor que triángulo E, lo cual no es posible. Entonces es mayor, porque NA es igual a un cateto del triángulo, consecuentemente el perímetro es mayor que la

[157] Se refiere de nuevo a las áreas, esta vez, de los segmentos de secciones circulares exteriores al círculo.

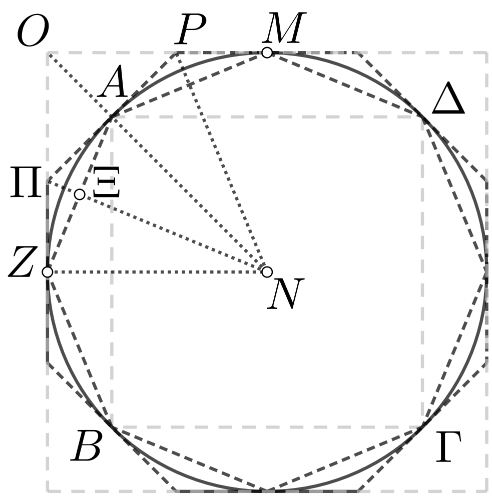


Figura 44: Sucesión de polígonos inscritos y circunscritos para aproximar el área de una circunferencia.

base del triángulo.

Por lo tanto, el círculo es igual al triángulo E.

Proposición iii

III. *El perímetro de un círculo es mayor que el triple del diámetro y la parte en la que lo excede es menor que un séptimo y también mayor que* $\frac{10}{71}$.

Sea un círculo de diámetro $A\Gamma$, centro en E con $\Gamma\Lambda Z$ recta tangente al círculo y $\angle \Gamma E Z$ la tercera parte de un recto.

Entonces[158]

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} = \frac{306}{153}.$$

Además[159]

$$\frac{E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{265}{153}.$$

Ahora se divide el ángulo $\angle ZE\Gamma$ en dos partes con la recta EH, entonces se cumple[160] $\dfrac{EZ}{E\Gamma} = \dfrac{ZH}{H\Gamma}$.

Y como[161]

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} + \frac{E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H},$$

dado que[162]

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} > \frac{571}{153},$$

se llega a que[163]

$$\frac{EH^2}{\Gamma H^2} = \frac{349450}{23409}$$

[158] Dado que $Z\Gamma = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, suponiendo $E\Gamma = 1$, entonces

$$\frac{EZ}{Z\Gamma} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 \overset{A}{=} \frac{306}{153}$$

donde con $\overset{A}{=}$ se denota la igualdad que usó Arquímedes en el original.

[159] En notación moderna, dado que

$$\frac{E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \approx 1.7320 \overset{A}{=} \frac{265}{153}.$$

[160] Euclides, libro 6, prop. 3: *Si un ángulo de un triángulo se divide a la mitad y la línea que lo divide, también corta la base, entonces los segmentos de la base tendrán la misma razón que los lados restantes del triángulo.*

[161] La igualdad $\frac{EZ}{Z\Gamma} + \frac{E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H}$ es exacta. En términos modernos se traduce a

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}},$$

la cual es válida para $0 < \theta < 90^\circ$. Esta identidad se usará a lo largo de toda la argumentación.

[162] Como $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}\cdot 30^\circ} = 3.73205\ldots$ se tiene que $\frac{E\Gamma}{\Gamma H} > \frac{571}{153} = 3.73203$, recuerde que $\frac{E\Gamma}{Z\Gamma} \approx \frac{265}{153}$.

[163] Mediante el teorema de Pitágoras $\frac{EH^2}{\Gamma H^2} = \frac{\Gamma H^2 + E\Gamma^2}{\Gamma H^2}$. Debe decir "≈".

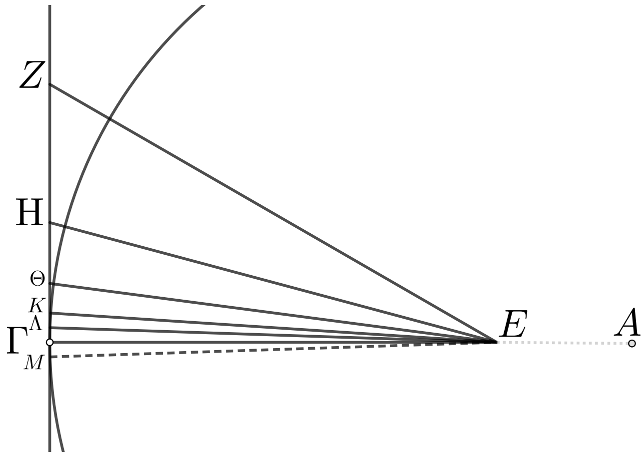


Figura 45: Figura correspondiente a la proposición iii.

así

$$\frac{EH}{\Gamma H} = \frac{591\frac{1}{8}}{153}.$$

De nuevo se divide del mismo modo $\angle HE\Gamma$ con la recta $E\Theta$, entonces por esto será

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153},$$

así[164] [165]

$$\frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

De nuevo se divide $\angle \Theta E\Gamma$ con la recta EK será[166]

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma K} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153},$$

así

$$\frac{EK}{\Gamma K} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}.$$

De nuevo se divide $\angle KE\Gamma$ con la recta ΛE, entonces será

$$\frac{E\Gamma}{\Lambda\Gamma} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}.$$

Ahora dado que $\angle ZE\Gamma$, que es la tercera parte de un recto, se divide en cuatro partes iguales, $\angle \Lambda E\Gamma$ será la doceava parte de un recto. Póngase entonces $\angle \Lambda EM$ igual a éste, de tal forma que $\angle \Lambda EM$ es la *vigésimo cuarta* parte de un recto; de esta forma ΛM es el lado de un polígono de 96 lados circunscrito al círculo. Así como se ha demostrado que es $\frac{E\Gamma}{\Gamma\Lambda} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, y $A\Gamma = 2E\Gamma$, $\Lambda M = 2\Gamma\Lambda$, también $A\Gamma$ con el

[164] Arquímedes omite repetir la argumentación, pero similarmente a lo que se hizo anteriormente, con la identidad

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

se tiene que

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma H} + \frac{EH}{\Gamma H} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta},$$

por lo que

$$\frac{571}{153} + \frac{591\frac{1}{8}}{153} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta}.$$

[165] Con $\frac{1162\frac{1}{8}}{153} = \frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta}$, ahora, mediante el teorema de Pitágoras

$$\frac{\Theta E^2}{\Gamma\Theta^2} = \frac{\Gamma\Theta^2 + E\Gamma^2}{\Gamma\Theta^2}$$

de donde al aproximar la raíz cuadrada obtiene

$$\frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}.$$

[166] Ya que ahora

$$\frac{E\Gamma}{\Gamma\Theta} + \frac{\Theta E}{\Gamma\Theta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma K},$$

etcétera.

perímetro del polígono de 96 lados tiene una razón mayor que $\frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$ lo cual es mayor que el triple, y quedan $667\frac{1}{2}$ que son menores que una séptima parte de $4673\frac{1}{2}$; por lo tanto, el polígono circunscrito es menor que el triple y séptima parte que el diámetro[167]. Por lo tanto, la circunferencia del círculo es mucho menor que el triple y un séptimo del diámetro.

[167] Dado que $\frac{4673\frac{1}{2}}{14688} = \frac{1}{3+\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}}$, además $\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{7}$.

Aproximación para el polígono circunscrito

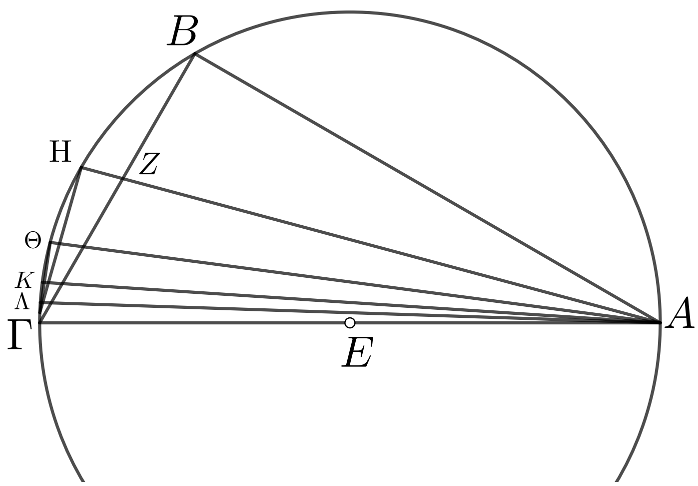


Figura 46: Segunda figura correspondiente a la proposición iii.

Sea el círculo con diámetro $A\Gamma$ y $\angle BA\Gamma$ la tercera parte de un recto (figura 46), entonces[168] $\frac{AB}{B\Gamma} < \frac{1351}{780}$. Se divide $\angle BA\Gamma$ en dos partes iguales mediante la recta AH. Ahora, puesto que $\angle BAH = \angle H\Gamma B$ de la misma forma son iguales[169] a $HA\Gamma$, se tendrá $\angle H\Gamma B = \angle HA\Gamma$. También el ángulo $\angle AH\Gamma$ es un ángulo recto común[170]. Dado que también[171] los ángulos que restan $\angle HZ\Gamma = \angle A\Gamma H$, entonces los triángulos $\triangle AH\Gamma$, $\triangle \Gamma HZ$ son equiángulos. Por lo que

$$\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{\Gamma H}{HZ} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.$$

Pero[172] $\frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{\Gamma A}{B\Gamma} + \frac{AB}{B\Gamma}$, por lo que también $\frac{\Gamma A}{B\Gamma} + \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AH}{H\Gamma}$.

Por ello[173], $\frac{AH}{H\Gamma} < \frac{2911}{780}$ y $\frac{A\Gamma}{\Gamma H} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780}$.

Divida el ángulo $\angle \Gamma AH$ en dos partes iguales con la recta $A\Theta$, entonces, por el mismo motivo, será $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{5924\frac{3}{4}}{780}$ o bien $\frac{A\Theta}{\Theta\Gamma} < \frac{1823}{240}$,

[168] Puesto que $B\Gamma$ es la cuerda que subtiende un arco de 60° entonces $B\Gamma = E\Gamma$ siendo $E\Gamma$ el radio de la circunferencia. Arquímedes tomará un radio de 780 partes para facilitar los cálculos. En efecto dado que el ángulo $\angle AB\Gamma$ es recto, por el teorema de Pitágoras $AB = \sqrt{1560^2 - 780^2} \approx 1351$, de donde $\frac{1351}{780}$ es una buena aproximación para $\frac{AB}{B\Gamma}$.

[169] Euclides, libro 3, prop. 26.

[170] Euclides, libro 3, prop. 31.

[171] Euclides, libro 1, prop.32.

[172] Aquí nuevamente aparece la identidad trigonométrica $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$, dado que $\frac{AH}{H\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}$.

[173] Dado que el radio $E\Gamma = B\Gamma$ mide 780 partes, el diámetro ΓA mide 1560, por lo que $1351 + 1560 = 2911$. Por otra parte $\frac{A\Gamma^2}{\Gamma H^2} = \frac{AH^2+H\Gamma^2}{H\Gamma^2}$, por el teorema de Pitágoras, de donde se obtiene la estimación para $\frac{A\Gamma}{\Gamma H}$.

puesto que $\frac{4}{13}$ está en ambos (*n. t.* en el numerador y en el denominador de la primera fracción). Por lo que $\dfrac{A\Gamma}{\Theta\Gamma} < \dfrac{1838\frac{9}{11}}{240}$.

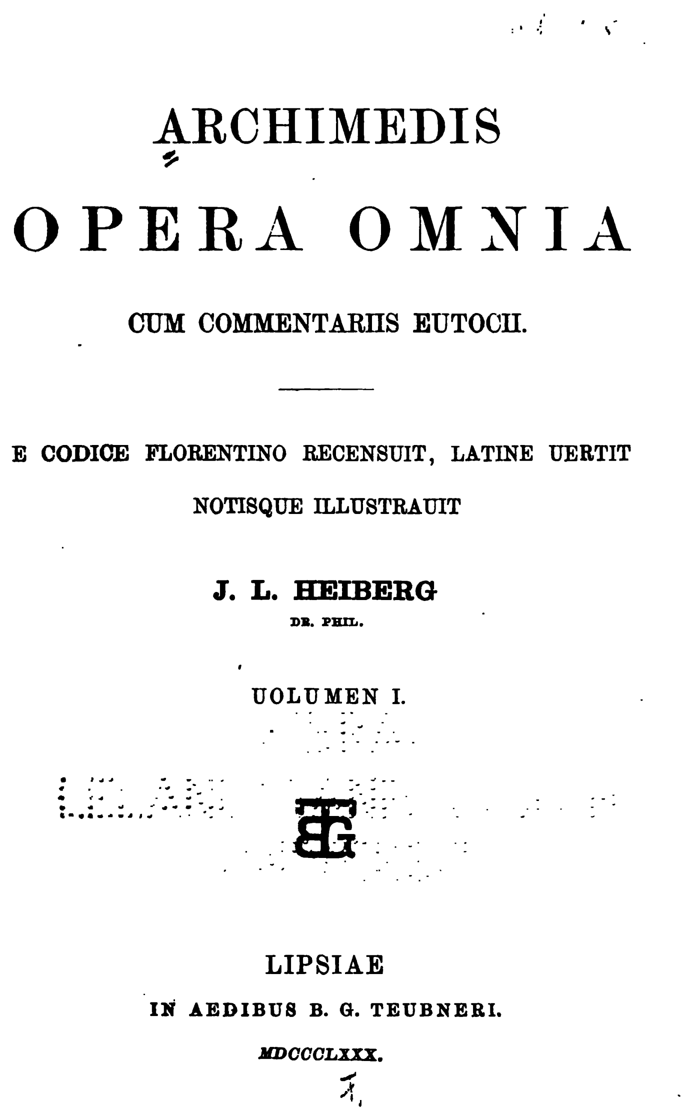
Después se divide $\angle\Theta A\Gamma$ en dos partes iguales con la recta KA, se tiene así $\dfrac{AK}{K\Gamma} < \dfrac{1009\frac{1}{6}}{66}$, ya que $\frac{11}{40}$ está en ambos.

Siguiendo se divide $\angle KA\Gamma$ en dos partes iguales con la recta ΛA. Será entonces

$$\frac{A\Lambda}{\Lambda\Gamma} < \frac{2016\frac{1}{6}}{66}$$

y $\dfrac{A\Gamma}{\Gamma\Lambda} < \dfrac{2017\frac{1}{4}}{66}$ y para el recíproco $\dfrac{\Gamma\Lambda}{A\Gamma} > \dfrac{66}{2017\frac{1}{4}}$. Pero $\Gamma\Lambda$ es el lado del polígono inscrito de 96 lados, por lo que el perímetro del polígono con el diámetro tiene una razón mayor que $\dfrac{6336}{2017\frac{1}{4}}$, que mayores son que tres y $\frac{10}{71}$ veces el diámetro. Por lo tanto, también mucho mayor es el círculo que tres y $\frac{10}{71}$ veces el diámetro.

Por lo tanto,la circunferencia del círculo es tres veces mayor que el diámetro y el espacio que excede es menor que $\frac{1}{7}$ y mayor que $\frac{10}{71}$.



ARCHIMEDIS

OPERA OMNIA

CUM COMMENTARIIS EUTOCII.

E CODICE FLORENTINO RECENSUIT, LATINE UERTIT

NOTISQUE ILLUSTRAUIT

J. L. HEIBERG

DR. PHIL.

UOLUMEN I.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXX.

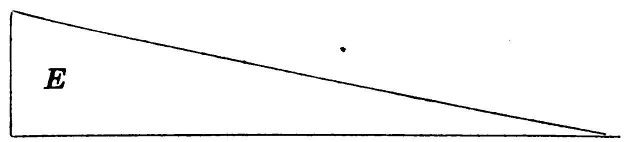
Portada de la obra completa de Arquímedes vol. I edición Heiberg 1880 *op. cit.*. Créditos de la digitalización: *Stanford University*

I.

Omnis circulus aequalis est triangulo rectangulo, si radius aequalis est alteri laterum rectum angulum continentium, ambitus autem basi.[1])

circulus $AB\Gamma\Delta$ ad triangulum E[2]) ita se habeat, ut propositum est. dico, eum ei aequalem esse.

nam si fieri potest, sit maior circulus, et inscribatur quadratum $A\Gamma$, et ambitus in duas partes aequales diuidantur [et ducantur lineae BZ, $Z\Delta$, AM, $M\Delta$ cet.][3]), et segmenta iam minora sint eo spatio, quo



circulus triangulum excedit.[4]) itaque figura rectilinea adhuc maior est triangulo. sumatur centrum N, et perpendicularis [ducatur] $N\Xi$. itaque $N\Xi$ minor est

---

1) Aliam et eam correctiorem huius propositionis formam significat Eutocius: *ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιόν φησιν· ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ*; et infra: *τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον — ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ.*

2) Archimedes scripserat *πρὸς τρίγωνον τὸ E*, lin. 5.

3) Tale aliquid (uelut: *καὶ ἐγγεγράφθω εὐθύγραμμον ἰσόπλευρον*) Archimedes sine dubio addiderat lin. 9.

4) Hoc fieri potest per Eucl. XII, 2 (II p. 200 ed. August), collato X, 1. sed statim uti potuit Archimedes de sph. et cyl. I, 6 p. 24.

Las figuras mencionadas etiquetadas con letras griegas aparecen en la traducción del texto.

latere [altero][1]) trianguli. sed etiam perimetrus figurae rectilineae minor est altero latere, quia etiam ambitu circuli minor est [de sph. et cyl. I p. 10].

itaque figura rectilinea minor est triangulo E [Zeitschr. f. Math., hist. Abth. XXIV p. 180 nr. 12]; quod fieri nequit.

sit autem circulus, si fieri potest, minor triangulo E. et circumscribatur quadratum, et ambitus in duas partes aequales secentur, et per puncta [sectionum] lineae contingentes ducantur. itaque $\angle\, OAP$ rectus est [Eucl. III, 18]; quare $OP > MP$; nam $MP = PA$ [Zeitschr. f. Math., hist. Abth. XXIV p. 181 nr. 15]. itaque $PO\Pi > \frac{1}{2} OZAM$.[2]) relinquantur [igitur] segmenta segmento[3]) ΠZA similia minora eo spatio, quo E triangulum circulum $AB\Gamma\Delta$ excedit.[4]) itaque figura rectilinea circumscripta adhuc minor est triangulo E; quod fieri nequit. est enim maior, quia NA aequalis est altitudini[5]) trianguli, perimetrus autem maior basi trianguli.[6]) circulus igitur aequalis est triangulo E.[7])

---

1) τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς lin. 1 obscurius quam pro more Archimedis dictum est.

2) Nam $OAP > APM$ (Eucl. VI, 1) et

$$OAP = \tfrac{1}{2} PO\Pi,\ PAM = A\Pi Z.$$

3) τομεῖ lin. 13 Archimedes non scripsit pro τμήματι.

4) Cum $PO\Pi > \frac{1}{2} OZAM$, hoc fieri potest per Eucl. X, 1; cfr. de sph. et cyl. I, 6.

5) Archimedes scripserat τῷ ὕψει lin. 16; Quaest. Arch. p. 71.

6) Quia maior est ambitu circuli; de sph. et cyl. I, 1.

7) Hanc propositionem citant: Pappus I p. 258, 17; 312, 20; III p. 1158, 22; demonstrationem repetit V, 6 p. 312—16 ex Zenodoro apud Theonem: comm. in Ptolem. p. 12—13 ed. Basil.; Proclus in Eucl. p. 423, 3; Anonymus Hultschii 42, 3 p. 265.

II.

Circulus ad diametrum quadratam eam rationem habet, quam $11 : 14$.

sit circulus, cuius diametrus sit AB, et circumscribatur quadratum ΓH, et sit $\Delta E = 2\Gamma\Delta$, et $EZ = \frac{1}{7}\Gamma\Delta$. iam quoniam est $A\Gamma E : A\Gamma\Delta = 21 : 7$ [Eucl. VI, 1], sed $A\Gamma\Delta : AEZ = 7 : 1$ [Eucl. VI, 1], erit

$$A\Gamma Z : A\Gamma\Delta = 22 : 7.$$ [1])

sed $\Gamma H = 4A\Gamma\Delta$ [Eucl. I, 34], et triangulum $A\Gamma\Delta Z$ circulo AB aequale est [quia altitudo $A\Gamma$ radio aequalis est, basis autem triplo et praeterea septima parte maior diametro, hoc est ambitui proxime aequalis, ut demonstrabitur prop. 3; tum u. prop. 1].[2]) quare circulus ad quadratum ΓH eam rationem habet, quam $11 : 14$.[3])

III.

Cuiusuis sphaerae perimetrus diametro triplo maior est, et praeterea excedit spatio minore, quam septima pars diametri est, maiore autem quam $\frac{10}{71}$.

1) Nam ἀνάπαλιν (Eucl. V, 7 πόρ.) $AEZ : A\Gamma\Delta = 1 : 7$; tum addendo sequitur proportio. sed poterat statim concludi ex Eucl. VI, 1; nam $\Gamma Z = (3 + \frac{1}{7})\,\Gamma\Delta = \frac{22}{7}\,\Gamma\Delta$.

2) Hic locus ἐπεί lin. 13 — δειχθήσεται lin. 16 mire corruptus et confusus transscriptori tribuo, qui eum addidit, postquam prop. 2 et 3 permutauit; neque enim Archimedes hanc propositionem ante prop. 3, quo nititur, posuit.

3) Citatur haec propositio a Pseudoherone Geom. 103 p. 186.

$A\Gamma Z$ ed. Basil., uulgo. 15. Post βάσις Wallis addit: τῇ τοῦ κύκλου περιμέτρῳ, ἥτις. τῷ] scripsi; του F, uulgo. 17. ιδ´ ἔγγιστα Wallis.

sit circulus, et diametrus $A\Gamma$, et centrum E, et ΓAZ linea circulum contingens, et $\angle ZE\Gamma$ tertia pars recti. itaque $EZ : Z\Gamma = 306 : 153$ [u. Eutocius], sed

$$E\Gamma : \Gamma Z = 265 : 153 \text{ [u. Eutocius].}$$

iam secetur $\angle ZE\Gamma$ in duas partes aequales linea EH. est igitur

$$ZE : E\Gamma = ZH : H\Gamma \text{ [Eucl. VI, 3].}$$

quare

$$ZE + E\Gamma : Z\Gamma = E\Gamma : \Gamma H \text{ [u. Eutocius].}^{1)}$$

quare

$$\Gamma E : \Gamma H > 571 : 153 \text{ [u. Eutocius].}^{2)}$$

itaque

$$EH^2 : H\Gamma^2 = 349450 : 23409 \text{ [u. Eutocius].}$$

itaque $EH : H\Gamma = 591\frac{1}{8} : 153$. rursus secetur eodem modo $\angle HE\Gamma$ linea $E\Theta$. propter eadem igitur erit

$$E\Gamma : \Gamma\Theta > 1162\tfrac{1}{8} : 153 \text{ [u. Eutocius].}$$

quare $\Theta E : \Theta\Gamma > 1172\frac{1}{8} : 153$ [u. Eutocius]. rursus secetur $\angle \Theta E\Gamma$ linea EK. erit

$$E\Gamma : \Gamma K > 2334\tfrac{1}{4} : 153 \text{ [u. Eutocius].}$$

---

1) Sequentia uerba lin. 6—7: *καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι* a transscriptore ex Eutocio huc prauo ordine illata sunt.

2) Quae Archimedes breuissime, omissis computationibus, proponit, copiose et perspicue explicat Eutocius; quare satis habui lectorem ad eum reuocare. quo modo Archimedes numeros 153 et 780 inuenerit, aut quibus adiumentis instructus latera numerorum non quadratorum computauerit, nondum constat (Quaest. Arch. p. 60—66). haec propositio difficillima a transscriptore et fortasse etiam a librariis pessime habita est. citatur ab Archimede ipso Arenar. I, 19; II, 3 et a Simplicio in Aristot. IV p. 508, b.

---

7. *συνθέντι καὶ ἐναλλάξ* Wallis. 10. *μείζονα λόγον* Wallis. *ἢ ὅν* Wallis. idem post *ἄρα* lin. 11 addit *μείζονα ἤ*. 17. *μείζονα*] scripsi; *μειζον* F, uulgo; *μείζονα λόγον ἔχει* Wallis.

quare $EK : \Gamma K > 2339\frac{1}{4} : 153$ [u. Eutocius]. rursus secetur $\angle K E \Gamma$ linea $\varDelta E$. erit igitur

$$E\Gamma : \varDelta \Gamma > 4673\frac{1}{2} : 153 \text{ [u. Eutocius].}$$

iam quoniam $\angle Z E \Gamma$, qui tertia pars est recti, quater in partes aequales diuisus est, $\angle \varDelta E \Gamma$ erit pars duodequinquagesima recti. ponatur[1]) igitur ei aequalis $\angle \Gamma E M$ ad punctum E. itaque $\angle \varDelta E M$ pars uicesima quarta est recti. quare linea $\varDelta M$ latus est polygoni 96 latera habentis circum circulum circumscripti. et quoniam demonstratum est $E\Gamma : \Gamma \varDelta > 4673\frac{1}{2} : 153$, et $\varDelta \Gamma = 2 E \Gamma$, $\varDelta M = 2 \Gamma \varDelta$, $\varDelta \Gamma$ etiam ad perimetrum polygoni 96 latera habentis maiorem habet rationem, quam $4673\frac{1}{2} : 14688$ [u. Eutocius]. est igitur triplo maior [perimetrus polygoni], et supersunt $667\frac{1}{2}$, quod minus est septima parte $4673\frac{1}{2}$. itaque [perimetrus] polygoni circumscripti minor est quam triplo et septima parte maior diametro. quare ambitus circuli multo magis[2]) minor est quam triplo et septima parte maior diametro.

sit circulus, et diametrus $\varDelta \Gamma$, et $\angle B \varDelta \Gamma$ tertia pars recti. itaque $\varDelta B : B\Gamma < 1351 : 780$ [u. Eutocius].

---

1) Quamquam Eutocius: *κείσθω οὖν, φησι, ἴση αὐτῇ ἡ ὑπὸ $\Gamma E M$*, tamen ex sequentibus adparet, eum suis ipsius uerbis uti. quare ne infra quidem (lin. 8: *δέδεικται*, lin. 9: *ρνγ´, καὶ ἔστι τῆς*) constat, eum genuinam formam praebere. sed lin. 19—20 puto eum recte praebere: *κύκλος περὶ διάμετρον τὴν $\varDelta \Gamma$ καὶ τρίτον ὀρθῆς ἡ ὑπὸ $B \varDelta \Gamma$*; lin. 10 om. *διπλασίων*. de lin. 10, 11, 15, 21 u. p. 269 not. 1.

2) Perimetrus enim polygoni maior est ambitu circuli; de sph. et cyl. I, 1.

---

om. F; corr. Wallis. 16. *ἐλάττονι*] scripsi; *ελαττον* F, uulgo. 19. *Δ´* addit F; corr. Wallis. 20. *τριτον* F; corr. B*. 21. *͵ατνα´*] *$\overline{\tau\nu\alpha}$* F; corr. B manu 2.*

secetur[1]) $\angle BA\Gamma$ in partes aequales linea AH: iam quoniam $\angle BAH = H\Gamma B$ [Eucl. III, 26], sed etiam $= HA\Gamma$, erit $H\Gamma B = HA\Gamma$. et communis est $\angle AH\Gamma$ rectus [Eucl. III, 31]. quare etiam $HZ\Gamma = A\Gamma H$ [Eucl. I, 32]. quare triangula $AH\Gamma$, ΓHZ angulos aequales habent. est igitur [Eucl. VI, 4]

$$AH : H\Gamma = \Gamma H : HZ = A\Gamma : \Gamma Z.$$

sed $A\Gamma : \Gamma Z = \Gamma A + AB : B\Gamma$ [Eucl. VI, 3; Eutocius]. quare $\Gamma A + AB : B\Gamma = AH : H\Gamma$. itaque $AH : H\Gamma < 2911 : 780$ [u. Eutocius],[2]) et

$$A\Gamma : \Gamma H < 3013\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{4} : 780 \text{ [u. Eutocius].}$$

secetur eodem modo $\angle \Gamma AH$ linea $A\Theta$. propter eadem igitur erit $A\Theta : \Theta\Gamma < 5924\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} : 780$ [u. Eutocius], hoc est $< 1823 : 240$. altera[3]) enim alterius $\frac{4}{13}$ [u. Eutocius]. quare est $A\Gamma : \Gamma\Theta < 1838\frac{9}{11} : 240$ [u. Eutocius]. porro secetur $\angle \Theta A\Gamma$ linea KA. est igitur

1) Cum p. 266, 20—21; 268, 9—12; 13—16; 268, 17—270, 1 ab Eutocio non ipsis uerbis Archimedis citari uideantur, has contra scripturas in lemmatis eius seruatas genuinas putauerim et in uerbis Archimedis a transscriptore mutatas: lin. 1: *τετμήσθω δίχα*; *ἐπεὶ οὖν*; lin. 3: *ἄρα τῇ*; lin. 4: *λοιπή* et *λοιπῇ* pro *τρίτη* et *τρίτῃ*; lin. 5: *ἔστιν ἴση*; *ἄρα ἐστί*; *ΑΗΓ τρίγωνον*; lin. 8 *καί* (prius) om.; lin. 16: *πρὸς ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ*; lin. 15: *ἐστὶ δ' ιγ''*; lin. 17: *ΘΑΓ γωνία*. simul alia transscriptionis uestigia colligam: ut lin. 5 om. *τρίγωνον* prop. 1 p. 260, 14; 2 p. 262, 6; *διπλῇ* p. 266, 10 (*διπλασίων* Nizze; cfr. prop. 2 p. 262, 5); *τοῦ* ϙϛ' *πολυγώνου* p. 266, 11; 270, 9; *τὸ πολυγώνον* pro *ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου* p. 266, 15 (*ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τοῦ — τριπλασίων — μείζων* Nizze). praeterea Eutocius uerba *ἡ δὲ ΑΓ — ψπ'* p. 266, 21 habuisse non uidetur; debebat insuper esse *ἡ γὰρ ΑΓ*.

2) Hic, ut saepissime in hac propositione, utitur proportione illa, quam exposui Quaest. Arch. p. 48.

3) Genus femininum refertur ad auditum uerbum *πλευρά*.

sil.* *ἑκατέρας*] *ἑκατέρων* Wallis. *ιγ''*] *ιγ' α'* F; corr. ed. Basil. 16. Post $\Gamma\Theta$ additur *ἐλάσσονα λόγον ἔχει* in ed. Basil. *ια''*] om. F; corr. Wallis.

$AK : K\Gamma < 1007 : 66$ [u. Eutocius]. altera enim alterius est $\frac{11}{40}$. itaque.

$$A\Gamma : \Gamma K < 1009\tfrac{1}{6} : 66 \text{ [u. Eutocius].}$$

porro secetur $\angle K A \Gamma$[1]) linea ΛA. erit igitur

$$A\Lambda : \Lambda\Gamma < 2016\tfrac{1}{6} : 66 \text{ [u. Eutocius],}$$

et $A\Gamma : \Gamma\Lambda < 2017\frac{1}{4} : 66$ [u. Eutocius]. et e contrario [$\Gamma\Lambda : A\Gamma > 66 : 2017\frac{1}{4}$ (Pappus VII, 49 p. 688); sed $\Gamma\Lambda$ latus est polygoni 96 latera habentis. quare][2]) perimetrus polygoni ad diametrum maiorem rationem habet quam $6336 : 2017\frac{1}{4}$, quod maius est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maius quam $2017\frac{1}{4}$. itaque perimetrus polygoni inscripti 96 latera habentis[3]) maior est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maior diametro. quare etiam multo magis[4]) circulus maior est quam triplo et $\frac{10}{71}$ maior diametro. itaque ambitus circuli triplo maior est diametro et excedit spatio minore quam $\frac{1}{7}$, maiore autem quam $\frac{10}{71}$.[5])

---

1) *ΚΑΓ γωνία* lin. 3 Eutocius. ceteras huius paginae discrepantias, quae apud eum inueniuntur, inde ortas esse puto, quod Archimedis demonstrationem non ad uerbum citauit, sed suis uerbis reddidit.

2) Ueri simile est, Archimedem ipsum haec addidisse.

3) *τοῦ ϟϛʹ πολυγώνου* transscriptori debetur, sicut etiam lin. 11: *ὁ κύκλος* pro *ἡ τοῦ κύκλου περίμετρος* (*περιφέρεια*).

4) Quippe quae maior est perimetro polygoni (de sph. et cyl. I p. 10).

5) *Ἀρχιμήδους κύκλου μέτρησις* in fine F, Cr.

Torricelli tiene una epifanía ante diagrama de Arquímedes

Alguna vez Torricelli estudiaba los textos de Arquímedes cuando repentinamente tuvo una sorprendente idea. Pensó que eran correctos los argumentos, pero que, de alguna manera, se podían obtener más fácilmente si se tomaban todos los círculos que podían formar con el mismo centro de la circunferencia inicial C (figura 47) y que pasaran por un punto del radio r, distinto de C y de O.

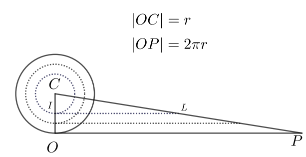


Figura 47: La circunferencia con centro en C y radio $r = CO$ mide $|OP| = 2\pi r$. Lo mismo ocurre para la circunferencia con radio $CI = r'$, mide $IL = 2\pi r'$. Torricelli concluye que poniendo todas las rectas paralelas a OP así obtenidas tiene el área completa del círculo.

De la misma forma que OP mide lo mismo que la circunferencia del círculo, es decir $OP = 2\pi r$, ocurre con la circunferencia de radio $CI = r'$ con lo que $IL = 2\pi r'$. Es como si las circunferencias estuvieran hechas de hilo las recortará y las pusiera una encima de otra, con lo que obtiene el triángulo $\triangle COP$, ¡salvo que las líneas no tienen anchura! Hecha esta salvedad, que no pasó inadvertida para Torricelli, concluye que el área del triángulo es la misma que la del círculo dado que el círculo está formado por todas las circunferencias interiores y el triángulo por todas rectas interiores. Así, tomándolas todas de una vez, *simul sumptis*. Y ahí está el asunto ¿cómo tomar todas juntas?, ¿cuándo es válida tal descomposición en circunferencias interiores al círculo y en rectas interiores al triángulo? Pero por el momento el área del círculo es πr^2, ¡sin más problema! ya que, como es sabido el área del triángulo es base por altura sobre 2 es decir $2\pi r \cdot r/2 = \pi r^2$.

Por supuesto, Torricelli no se quedó con este resultado que era conocido desde Arquímedes, sino que llevó tales descomposiciones al cálculo de volúmenes.

De los múltiples ejemplos que estudió, seguramente uno de los más famosos es el del cálculo del volumen bajo una superficie hiperbólica infinita, con lo que obtuvo un resultado paradójico: el área contenida por esta superficie infinita ¡es finita!, con lo cual no solo le enmendó la página a Arquímedes con una "demostración" más clara y simple, sino que además contradice a Aristóteles; quien, como se sabe, durante siglos fue la máxima autoridad en cuanto a asuntos del pensamiento concierne. Efectivamente, Aristóteles dicta[174] que "no hay proporción entre finito e infinito". ¡Qué época más trascendente posterior al renacimiento cuando alguien cuestiona con argumentos resonantes a las autoridades establecidas!

[174] Aristóteles, *De Coelo 1.6, 274*.

Regresando a Torricelli, el matemático considera el sólido que se obtiene al girar una rama de la hipérbola $y = \dfrac{k}{x}$ al rededor del eje y el cual es una asíntota de la hipérbola (figura 48). Pero solo entre los puntos E y D del eje x (figura 49).

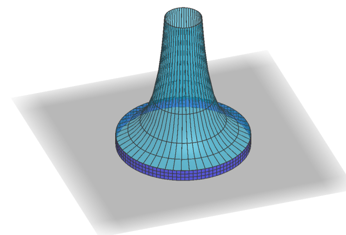


Figura 48: La superficie superior se obtiene al rotar una hipérbola alrededor de una de sus asíntontotas. Debajo hay un cilindro en color azul más intenso. Se desea calcular el volumen del sólido infinito así formado.

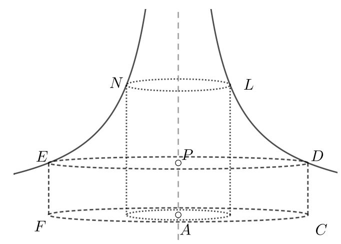


Figura 49: Se rota una hipérbola sobre su asíntota vertical y se considera el sólido que se obtiene entre los puntos E y D. La infinita colección de cilindros como los dos esbozados en la figura, según Torricelli, forma el volumen del sólido.

Torricelli de la misma manera que calcula las longitudes de las circunferencias dentro de un círculo, calcula las áreas de los cilindros que imagina que conforman el volumen del sólido. Al tratarse de una superficie obtenida al rotar la hipérbola, cada punto en ella, en cada corte horizontal, está sobre una circunferencia. Por ejemplo la circunferencia que pasa por D y por E con centro en P, y también, la circunferencia que pasa por L y N con centro también sobre la asíntota. Por otra parte, el área de la superficie del cilindro es $2\pi ra$, siendo r el radio del cilindro y a la altura. Ahora bien, la altura de cada cilindro en el sólido hiperbólico está dada por $y = \frac{k}{x}$ de tal manera que el cilindro que pasa por $x = d = |PD|$ tiene altura $\frac{k}{d}$ y así, para tal cilindro, la longitud de la circunferencia de la base es $2\pi d$ y, por lo tanto, el área de la superficie del cilindro es $2\pi d \cdot \dfrac{k}{d} = 2\pi k$.

De esta manera, cada cilindro con radio x que compone el volumen bajo el sólido (cilindros en la figura 49) ¡tiene superficie con misma área que cualquier otro para cualquier x!

$$\text{área de cada cilindro } = 2\pi x \cdot \frac{k}{x} = \pi \cdot 2k, \quad 0 < x \leq d.$$

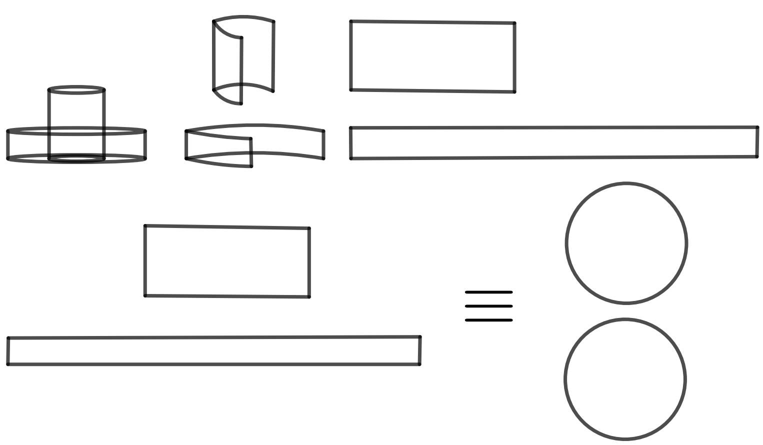


Figura 50: La idea de Torricelli consiste en encontrar circunferencias con áreas de la misma magnitud de la superficie de los cilindros que "conforman" el sólido hiperbólico.

De forma que Torricelli "tomando todos los círculos de una vez" puede, por ejemplo, construir un cilindro con área de la base $2\pi \cdot k$ y altura d, de donde se obtiene que

$$\text{volumen del cilindro construido } = \pi \cdot 2k \cdot d$$

y este volumen es equivalente al volumen buscado bajo el sólido hiperbólico. ¡Un volumen finito contenido en una superficie con área infinita!

En realidad, en el teorema de Torricelli la argumentación original se complica un poco, ya que el rol del parámetro k, el cual evidentemente está relacionado con los vértices y focos de la hipérbola, no es tan claro en su texto. Pero k aparece de alguna manera en sus ecuaciones dado que el cilindro que construye debe tener radio $\sqrt{2k}$, y este número es igual exactamente a la mitad de la distancia entre los focos de la hipérbola, como es sabido. Más aún, Torricelli quiere construir un cilindro

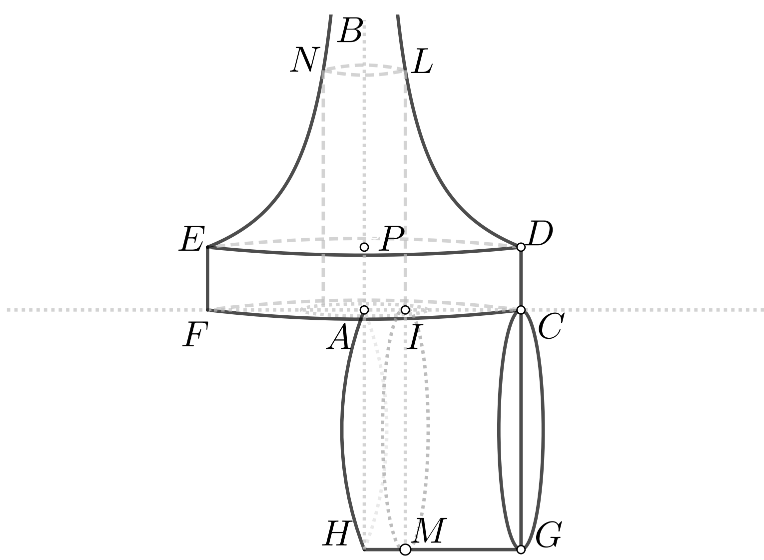


Figura 51: El cilindro $AHGC$ tiene el mismo volumen que el del sólido hiperbólico, dado que la circunferencia con diámetro IM (y de cualquier corte del cilindro) tiene la misma área que la superficie del cilindro que pasa por ILN; también la circunferencia con diámetro CG tiene la misma área que la superficie del cilindro que pasa por $EFCD$, y así para todos los cilindros verticales existe una circunferencia en el cilindro horizontal con la misma área de la superficie de tal cilindro. **Nota:** en la figura se han mantenido las mismas letras del original de Torricelli, pero las dimensiones y las posiciones de los puntos están aproximadas con los parámetros de la hipérbola que se muestra.

bajo el sólido que tenga exactamente el volumen que ya se calculó del sólido y procede a encontrar un punto sobre la hipérbola el cual tenga la altura igual al diámetro del cilindro, el cual está dado por una de las intersecciones del lado recto de la hipérbola con la hipérbola. Algunos cálculos elementales de geometría analítica dan que tal punto L tiene coordenadas $L = (\sqrt{2k} - \sqrt{k}, \sqrt{2k} + \sqrt{2})$. Y como el vértice de la hipérbola tiene coordenadas $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$ es decir, un punto que puede determinarse conociendo el vértice y el foco, los cuales son conocidos. En realidad, tal punto corresponde a una de las intersecciones del lado recto de la hipérbola con la hipérbola misma. Una vez realizado esto, el matemático refleja el punto L respecto al eje horizontal y así determina el punto M. El diámetro del cilindro horizontal es IM de esta forma el área de cualquier circunferencia en los cortes verticales del cilindro es $\pi(IM/2) = \pi 2k$ y, por lo tanto, el volumen del cilindro horizontal, dada la altura $|AC| = |PD| = d$, es $\pi \cdot 2k \cdot d$, como se dijo.

Validez de la argumentación original de Torricelli

Desde el punto de vista contemporáneo el resultado de Torricelli se considera correcto, pero no así su técnica, la cual no se usa más. Para obtener el mismo resultado con herramientas modernas primero debe calcularse la integral $V = \int_e^\infty \pi x^2 dy$, siendo $e = |CD|$, pero $y = \frac{k}{x}$ se tiene $x = \frac{k}{y}$ por lo que

$$\begin{aligned} V &= \int_e^\infty \pi \cdot \frac{k^2}{y^2} dy \\ &= -\pi \frac{k^2}{y}\Big|_{y=e}^{y=\infty} \\ &= \pi \frac{k^2}{e} = \pi \frac{k^2}{e} = \pi k d \end{aligned}$$

ya que $y = e = \frac{k}{d}$. Ahora sumando el volumen del cilindro $EFCD$, el cual es $\pi d^2 e = \pi d^2 \frac{k}{d} = \pi k d$, se llega al resultado esperado:

$$\text{volumen del sólido hiperbólico } = 2\pi k d.$$

Crítica a los resultados de Torricelli

Si hay una conjetura genial en la historia de las matemáticas, ésta corresponde al cálculo del volumen del sólido hiperbólico que realizó Torricelli. Si ahora todavía puede sorprender y parecer paradójico, puede imaginarse el efecto que causó en su época. Se debe recordar que Torricelli fue contemporáneo de Cavalieri, así como de Barrow y Wallis. Un ensayo sobre las discusiones filosóficas centradas en los resultados que presentamos, que incluye a matemáticos y filósofos como Hobbes se puede encontrar en un artículo de Paolo Manscu y Ezio Vailati[175].

[175] Paolo Mancosu y Ezio Vailati. *Torricelli's Infinitely Long Solid and Its Philosophical Reception in the Seventeenth Century.* Isis, 82(1), 50–70., 1991

Ciertamente, la idea de descomponer una figura en "todas las líneas" (*omnes lineas*) se debe a Cavalieri, no a Torricelli quien fue su discípulo. El método de Cavalieri difiere del método de los infinitesimales, ya que descompone figuras en líneas y no aproxima con infinitesimales. El matemático pensaba que su método era más cercano al de los antiguos griegos. Regresando a Torricelli, como hemos visto llevó el método de su maestro a terrenos insospechados y sus resultados son dignos de cualquier antología del arte de conjeturar.

Traducción de la obra de Torricelli

La traducción se hizo del ejemplar: Opera Geometrica, Torricellii, Evangelistae, Florentiae, 1644 ETH-Bibliothek Zürich Shelf Mark: Rar 5224 Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-4082 www.

Se traduce parte del capítulo "De solido Acuto Hyperbólico", es decir: *Acerca del sólido hiperbólico agudo*.

Ejemplo primero

Sea un círculo con centro en A, semidiámetro AB, con apropiada tangente que sea BC, la cual se supone igual a la longitud de la circunferencia BD. Construya AC. Digo que son iguales el círculo BD con el triángulo ABC.

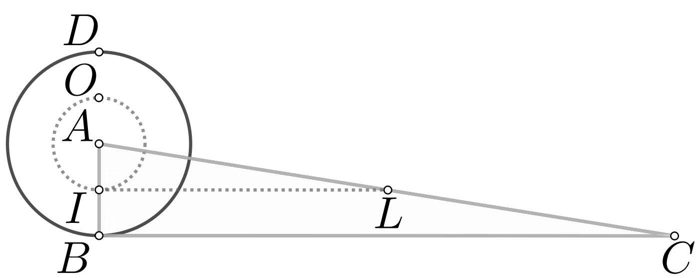


Figura 52: La misma figura se muestra en la obra de Arquímedes. Aparece un triángulo cuya área es igual a la de un círculo dado. Observe que este teorema es de Arquímedes como se puede verse en el capítulo correspondiente, sin embargo la demostración es totalmente diferente y esta tendrá consecuencias espectaculares e insospechadas hasta su época.

Se supone que el punto cualquiera I sobre el radio AB. Por I haga la circunferencia IO con centro en el mismo A, con la recta IL paralela a BC. Será entonces la circunferencia BD a la circunferencia IO como el radio BA con AI (se demuestra esto, sin suponer con antelación dimensiones del círculo[176]), o como BC es a IL. Al mover, será la circunferencia IO igual a la recta IL, y esto ocurre siempre donde quiera que se ponga el punto I. Y, consecuentemente, si se toman todas las circunferencias al mismo tiempo, tomadas todas las rectas al mismo tiempo iguales serán: por lo tanto, el círculo BD mismo será igual al triángulo ABC. Lo que se deseaba demostrar.

[176] Es decir, que la demostración no depende de las dimensiones del círculo.

Lo que concuerda con aquel Teorema de la proposición primera de Arquímedes, *De la dimensión del círculo*.

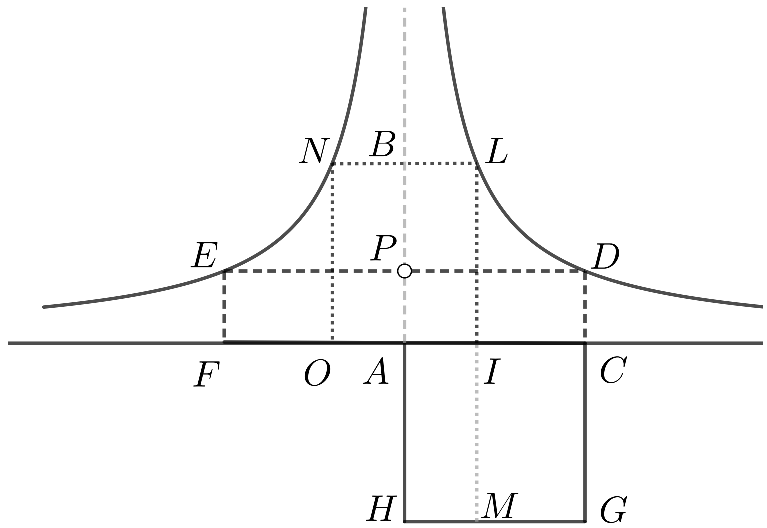


Figura 53: Se desea calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar una hipérbola alrededor de una de sus asíntotas incluyendo un cilindro $FEDC$ en la base. Torricelli afirma que el volumen del sólido completo es igual al volumen del cilindro con diámetro AH y altura AC.

Teorema

Un sólido agudo hiperbólico infinitamente largo, cortado en el plano perpendicular al eje, unido con un cilindro en su base, es igual al cilindro recto cuya base sea el lado (sic) verso, o eje de la hipérbola[177]*, y altura que sea exactamente igual al radio de la base del mismo sólido agudo.*

Sea una hipérbola cuyas asíntotas AB, AC, forman un ángulo recto. Suponga que en la hipérbola cualquier punto que se desee D se mueve DC equidistante del mismo AB y DP equidistante de AC. Gire toda la figura alrededor del eje AB. De esta forma haga un sólido agudo hiperbólico EBD junto con el cilindro $FEDC$ en la base. Construya en H, BA de forma que AH sea idéntico a este eje, pero del lado inverso de la hipérbola. Además, alrededor del diámetro AH se entiende un círculo perpendicular a la asíntota AC, y sobre la base AH construya un cilindro recto[178] $ACGH$, cuya altura sea AC, por lo tanto radio de la base del sólido agudo. Digo que el sólido completo $FEBDC$ de largo sin fin, es también igual al cilindro $ACGH$.

Se toma en la recta AC cualquier punto I y se entiende que por I se dibuja la superficie cilíndrica $ONLI$ comprendida alrededor del eje AB y el sólido agudo, también, el círculo IM en el cilindro $ACGH$ equidista de la base AH.

Entonces será la mencionada superficie del cilindro $ONLI$ al círculo IM como el rectángulo por el eje OL al cuadrado del radio del círculo IM; también como el rectángulo OL al cuadrado del semieje de la hipérbola; y de la misma forma igual al lema[179]. Y esto será siempre

[177] Se tradujo *latus versu, sive axis hiperbola* como "lado inveso o eje de la hipérbola", se refiere al eje focal de la hipérbola.

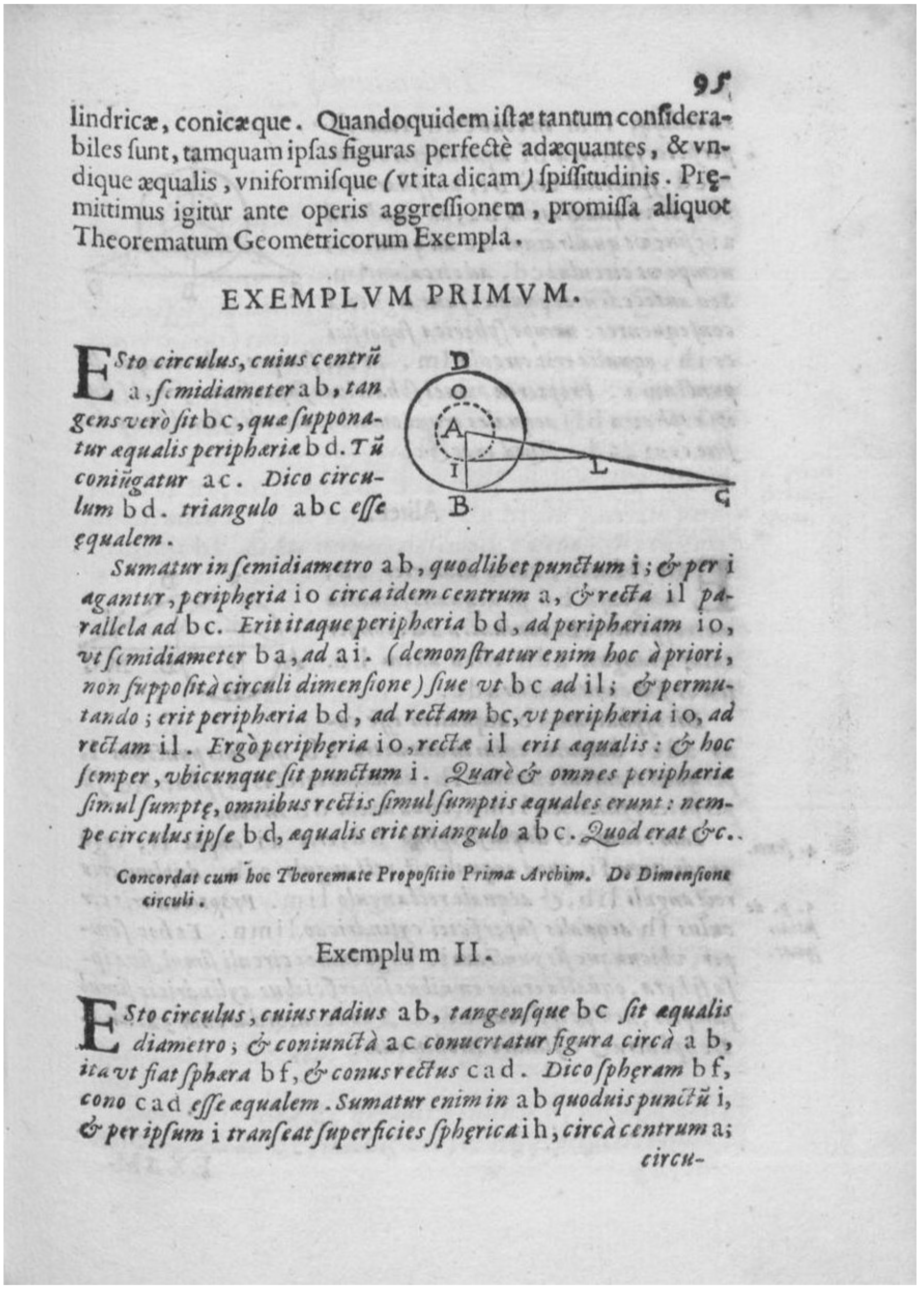
[178] Se refiere a construir un cilindro sobre círculo que está ahora sobre AH.

[179] Se refiere al lema V en el original, el cual puede omitirse para los objetivos de este libro.

verdadero para cualquier punto I que se escoja. Por lo tanto todas las superficies de los cilindros simultáneamente esto es con el mismo sólido agudo EBD unido al cilindro en la base $FEDC$, serán iguales a todos los círculos simultáneamente, esto es, al cilindro $ACGH$. Lo que era por demostrar.

Escolio

Puede verse como increíble que este sólido tenga longitud infinita y que, no obstante, ninguna de las superficies de aquellos cilindros a los cuales consideramos tenga longitud infinita y, sin embargo, están determinados conjuntamente. Esto será evidente para quien tenga modesta familiaridad con la doctrina de las cónicas.



95

lindricæ, conicæque. Quandoquidem istæ tantum considerabiles sunt, tamquam ipsas figuras perfectè adæquantes, & vndique æqualis, vniformisque (vt ita dicam) spissitudinis. Præmittimus igitur ante operis aggressionem, promissa aliquot Theorematum Geometricorum Exempla.

EXEMPLVM PRIMVM.

Esto circulus, cuius centrũ a, *semidiameter* a b, *tangens verò sit* b c, *quæ supponatur æqualis periphæriæ* b d. *Tũ coniũgatur* a c. *Dico circulum* b d. *triangulo* a b c *esse æqualem*.

Sumatur in semidiametro a b, *quodlibet punctum* i; *& per* i *agantur, periphęria* i o *circa idem centrum* a, *& recta* i l *parallela ad* b c. *Erit itaque periphæria* b d, *ad periphæriam* i o, *vt semidiameter* b a, *ad* a i. *(demonstratur enim hoc à priori, non supposità circuli dimensione) siue vt* b c *ad* i l; *& permutando; erit periphæria* b d, *ad rectam* b c, *vt periphæria* i o, *ad rectam* i l. *Ergò periphęria* i o, *rectæ* i l *erit æqualis: & hoc semper, vbicunque sit punctum* i. *Quarè & omnes periphæriæ simul sumptę, omnibus rectis simul sumptis æquales erunt: nempe circulus ipse* b d, *æqualis erit triangulo* a b c. *Quod erat &c.*

Concordat cum hoc Theoremate Propositio Prima Archim. De Dimensione circuli.

Exemplum II.

Esto circulus, cuius radius a b, *tangensque* b c *sit æqualis diametro; & coniunctà* a c *conuertatur figura circà* a b, *ita vt fiat sphæra* b f, *& conus rectus* c a d. *Dico sphęram* b f, *cono* c a d *esse æqualem. Sumatur enim in* a b *quoduis punctũ* i, *& per ipsum* i *transeat superficies sphęrica* i h, *circà centrum* a;

circu-

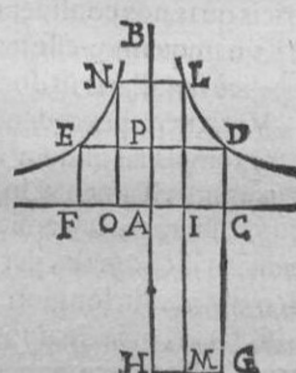
Portada de la obra de Torricelli edición de 1644 *op. cit.*. Créditos de la digitalización: *ETH-Bibliothek Zürich Shelf Mark: Rar 5224*, https://doi.org/10.3931/e-rara-4082

Lemma V.

C*Viuſcunque cylindri* g h i l *intra ſolidum acutum deſcripti (vt in precedenti figura) ſuperficies ſine baſibus æqualis eſt circulo cuius ſemidiameter ſit linea* d f. *nempe ſemiaxis, ſiue ſemilatus verſum ipſius hyperbolæ. Hoc enim in ipſo progreſſu præcedentis lemmatis demonſtratum eſt.*

Theorema.

SOlidum acutum hyperbolicum infinitè longum, ſectum plano ad axem erecto, vnà cum cylindro ſuæ baſis, æquale eſt cylindro cuidam recto, cuius baſis diameter ſit latus verſum, ſiue axis hyperbolæ, altitudo verò ſit æqualis ſemidiametro baſis ipſius acuti ſolidi.



Eſto hyperbola cuius aſymptoti *ab*, *ac* angulum rectum contineant; ſumptoq; in hyperbola quolibet puncto *d*, ducatur *dc* æquidiſtans ipſi *ab*, & *dp* æquidiſtans *ac*. Tũ conuertatur vniuerſa figura circa axẽ *ab*. ità vt fiat ſolidum acutum hyperbolicum *ebd*, vna cum cylindro ſuæ baſis *fedc*. Poducatur *ba* in *h*. ita vt *ah*. æqualis ſit integro axi, ſiue lateri verſo hyperbolæ. Et circa diametrum *ah* intelligatur circulus erectus ad aſymptoton *ac*: & ſuper baſi *ah* concipiatur cylindrus rectus *acgh*, cuius altitudo ſit *ac*, nempe ſemidiameter baſis acuti ſolidi. Dico ſolidum vniuerſum *febdc*, quanquam ſine fine longum, æquale tamen eſſe cylindro *acgh*.

Accipiatur in recta *ac* quodlibet punctum *i*, & per *i* intelligatur ducta ſuperficies cylindrica *onli* in ſolido acuto compræhensa circa axem ab: item circulus im in cylindro $acgh$ æquidistans basi ah.

Erit ergo prædicta superficies cylindrica $onli$ ad circulum im, vt rectangulum per axem ol, ad quadratum radij circuli im; nempe vt rectangulum ol, ad quadratum semiaxis hyperbolæ; & ideo æqualis ex lemmate. Et hoc semper verum erit, vbicunq; sumatur punctum i. Propterea omnes simul superficies cylindricæ, hoc est ipsum solidum acutum ebd, vna cum cylindro basis $fedc$, æquale erit omnibus circulis simul, hoc est cylindro $acgh$. Quod erat &c.

Scholium.

Incredibile videri potest, cum solidum hoc infinitam longitudinem habeat, nullam tamen ex illis superficiebus cylindricis quas nos consideramus, infinitam longitudinem habere; sed vnamquamq; esse terminatam; vt vnicuiq; patebit, cui vel modicè familiaris sit doctrina Conicorum.

Veritatem præcedentis Theorematis satis per se claram, & per exempla ad initium libelli proposita confirmatam satis superq; puto. Tamen vt in hac parte satisfaciam lectori etiam Indiuisibilium parùm amico, iterabo hanc ipsam demonstrationem in calce operis, per solitam veterum Geometrarum viam demonstrandi, longiorem quidem, sed non ideo mihi certiorē.

Interim, quia demonstrationes exhibebimus de illo tantùm acuto solido, cuius hyperbolæ genitricis asymptoti angulum rectum contineant, dicamus hic obitèr, omissà demonstratione, quibus figuris æqualia sint acuta solida; quando asymptoton angulus obtusus fuerit, vel acutus.

Demonstrationes, quas ad euitandam molem pręterimus, sibi lector industrius facili negotio comparabit.

Esto hyperbola cuius asymptoti ab, ac angulum obtusū contineant; & reuoluta figura circa axem ab fiat solidum acutum

Fourier escribe un poema... usando funciones trigonométricas

Si el título del capítulo pudiera parecer cursi, me excuso diciendo que la idea no me pertenece, sino que se deriva de un pensamiento de Kelvin, el matemático y físico inglés a quien debe responsabilizarse de tal exceso, si lo hubiera; sin embargo, algo tiene de verdad:

El teorema de Fourier no solamente es uno de los resultados más bellos en análisis moderno, sino que se dice que proporciona un instrumento indispensable para el tratamiento de casi cualquier recóndita pregunta en física moderna...lo de Fourier es un poema matemático.

El antecedente histórico de las series trigonométricas es la expansión en series de polinomios de funciones arbitrarias, la cual multiplicó infinitamente las posibilidades para utilizar funciones matemáticas en aplicaciones y, por otra parte, contribuyó notablemente al desarrollo del Cálculo diferencial mismo. Ejemplos de desarrollos en series de polinomios surgen a partir de los notables resultados de Taylor y MacLaurin, basados en los resultados de Newton, con los cuales quedaron firmemente establecidas las posibilidades de expandir funciones en términos polinomiales.

Como se ve en el capítulo dedicado a Newton de este libro, curiosamente, Newton llegó a las famosas series por métodos algebraicos, básicamente extendiendo los algoritmos para dividir, extraer raíces y, lo novedoso en su época, inventando un algoritmo para encontrar inversas de funciones, todo ello mediante procedimientos algebraicos. Curiosamente, insisto, porque el primer ejemplo de Fourier de expansión de una función en términos de funciones trigonométricas, también lo hace mediante procedimientos del álgebra, como ahora se muestra.

Primer ejemplo de Fourier

El ejemplo se encuentra en el capítulo III, sección II, artículo 171 del libro *Teoría analítica del calor*[180] y se trata de encontrar los coeficientes

[180] Jean Baptiste Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF, 1822

$a, b, c, \ldots$ para que sea verdadera la siguiente expansión

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \cdots \tag{63}$$

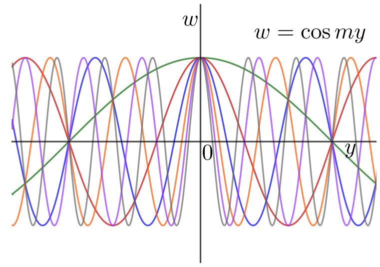


Figura 54: Se muestran las gráficas de $w = \cos my$ para $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ para ilustrar la forma en que tales funciones oscilan entre $-\pi/2$ y $\pi/$.

Muchos lectores de la época de Fourier simplemente encontraban difícil de creer que fuera verdadera una expresión tal, dado que las funciones $\cos my$, con $m = 1, 3, 5, 7 \ldots$ oscilan febrilmente y, en contraste, el lado izquierdo de la ecuación es una rígida constante, y sin embargo...

Procede entonces a derivar ambos miembros de la ecuación (63) respecto de y, repetidamente, para obtener

$$\begin{aligned}
1 &= a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \cdots \\
0 &= a\,\text{sen}\, y + 3\ b\,\text{sen}\, 3y + 5\ c\,\text{sen}\, 5y + 7\ d\,\text{sen}\, 7y + \cdots \\
0 &= a\cos y + 3^2 b\cos 3y + 5^2 c\cos 5y + 7^2 d\cos 7y + \cdots \\
0 &= a\,\text{sen}\, y + 3^3 b\,\text{sen}\, 3y + 5^3 c\,\text{sen}\, 5y + 7^3 d\,\text{sen}\, 7y + \cdots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

La convergencia de las series que son derivadas de series, es una cuestión delicada, pero suponerlo para realizar conjeturas es siempre válido, como hizo Fourier, pero quien no tenga mucha experiencia con series y sus derivadas, debe tomar en cuenta este comentario. Y al evaluar en $y = 0$:

$$\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d + e + f + g + \cdots \\
0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g + \cdots \\
0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g + \cdots \\
0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g + \cdots \\
0 &= a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g + \cdots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Sistema que, como es claro a la vista, es infinito de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, por lo cual solo será resoluble si Fourier encuentra un procedimiento algorítmico para resolverlo y, claro, así lo hizo, resolviendo primero un sistema finito; por ejemplo, el sistema de siete incógnitas a, b, c, d, e, f, g; el método es el de eliminación. Lo que hace Fourier es, primero, eliminar g para lo cual multiplica la primera ecuación por 13^2 y la resta de la segunda ecuación. Seguidamente multiplica la primera ecuación por 13^4 y la resta a la segunda, con lo que elimina a g de la segunda ecuación, y así procede hasta eliminar todas las g. Pero, para eliminar la g de la primera ecuación que ahora está multiplicada por 13, basta restarle la segunda ecuación antes de eliminar a la g. Repitendo el procedimiento de eliminación Fourier obtiene

$$a(13^2 - 1)(11^2 - 1)(9^2 - 1)(7^2 - 1)(5^2 - 1)(3^2 - 1) = 13^2 \cdot 11^2 \cdot 9^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2$$

Y una vez que ha tomado confianza, regresa al infinito y afirma que

$$\begin{aligned} a &= \frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{9^2}{9^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots \\ &= \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12\cdots} \end{aligned}$$

¡Así es, estimado lector, los viejos cálculos de Wallis reaparecen revitalizados!, con lo que Fourier concluye que

$$a = \frac{4}{\pi}$$

y es capaz de encontrar las demás incógnitas (después de una prolongada argumentación) para obtener,

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \frac{1}{9}\cos 9y - \frac{1}{11}\cos 11y + \cdots\right)$$

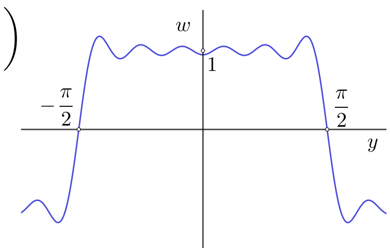


Figura 55: Se muestra la gráfica de la aproximación a la constante 1 con la serie de Fourier de solo seis términos. Observe la manera en la que la serie **finita** aproxima a la constante en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Moraleja: si usted, temeroso de lo infinito, al buscar el término general de una serie, encuentra el producto de Wallis, respire, revise sus cuentas y si todo cuadra, ¡felicidades, ha encontrado algo grande! Así lo supo Fourier.

En seguida (en el artículo 181, pag. 180), Fourier multiplica la serie por dx e integra término a término[181] con lo que obtiene la serie

$$\frac{\pi x}{4} = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5x - \frac{1}{7^2}\operatorname{sen} 7x + \cdots .$$

Siguiendo con las conjeturas, que es de lo que trata nuestro libro, si se pone $x = \frac{\pi}{2}$ (artículo 181, pag. 180) se obtiene la serie

$$\frac{\pi^2}{8} = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5x + \cdots$$

serie ya conocida, como lo menciona Fourier. Obviamente, al obtener series conocidas se reforzó la seguridad de Fourier en lo que estaba haciendo.

[181] Multiplicar por dx una serie e integrar término a término es común, aunque tardaría decenas de años en ser justificado rigurosamente, véase por ejemplo como es usada esta técnica en la obra de Bernoulli citada.

Fourier encuentra otra técnica para calcular las series

La segunda técnica que encontró Fourier, la cual, al igual que la técnica anterior, no se utiliza más, pero que sin embargo puede ser de interés para entender más profundamente el arte de conjeturar. En esta segunda técnica Fourier combina el álgebra con los desarrollos de MacLaurin. En la sección VI, artículo 207, pag. 211, Fourier se propone encontrar los coeficientes $a, b, c, d, e, f, \ldots$ para la función

$$\phi(x) = a\operatorname{sen} x + b\operatorname{sen} 2x + c\operatorname{sen} 3x + d\operatorname{sen} 4x + \cdots$$

partiendo de la serie de MacLaurin

$$\phi(x) = \phi'(0)x + \phi''(0)\frac{x^2}{2} + \phi'''(0)\frac{x^3}{3!} + \phi^{IV}(0)\frac{x^4}{4!} + \cdots$$

la cual se supone conocida. Ahora bien, en caso de que sean válidas las dos ecuaciones anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= 0, \\
\phi'(0) &= a + 2b + 3c + 4d + \cdots \\
\phi'''(0) &= a + 2^3 b + 3^3 c + 4^3 d + \cdots \\
\phi^V(0) &= a + 2^5 b + 3^5 c + 4^5 d + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Después de varias páginas dedicadas al álgebra, Fourier obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\phi(x) = {} & \operatorname{sen} x \left(\phi'(0) + \phi'''(0) \left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{1^2} \right) + \phi^V(0) \left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{1^2} \right) - + \cdots \right) \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \left(\phi'(0) + \phi'''(0) \left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{2^2} \right) + \phi^V(0) \left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{2^2} \right) + \cdots \right) + \\
& + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \left(\phi'(0) + \phi'''(0) \left(\frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{3^2} \right) + \phi^V(0) \left(\frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{3^2}\frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{3^2} \right) + \cdots \right) + \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

De la anterior fórmula, Fourier obtiene (pag. 230) que

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4x + \cdots$$

Quizá lo complicado de la fórmula general nos haga fácil comprender por qué la fórmula para calcular los coeficientes de la siguiente sección prevaleció sobre las demás.

La fórmula de Fourier que trascendió

Finalmente, los coeficientes que actualmente se conocen como coeficientes de Fourier son explicados en el artículo 222, pag. 235. Dada la fórmula

$$\phi(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + a_4 \operatorname{sen} 4x + \cdots$$

se multiplica por $\operatorname{sen} ix$ y se integra de $x = 0$ a $x = \pi$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \phi(x) \operatorname{sen} ix \, dx = a_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ix \, dx + a_2 \int_0^\pi \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} ix \, dx + \cdots \\
+ a_j \int_0^\pi \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix \, dx + \cdots
\end{aligned}$$

donde Fourier hace notar que:

1. Todos los términos del segundo miembro son cero excepto el término que contiene la integral $\int_0^\pi \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix \, dx$.

2. Que el valor de la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} jx\,dx \operatorname{sen} ix\,dx = \frac{1}{2}\pi$ de donde

$$a_j = \frac{\int_0^{\pi} \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix\,dx}{\frac{1}{2}}.$$

Fourier seguramente nunca esperó que su teoría se generalizaría para toda una familia de polinomios ortogonales, los polinomios de Laguerre, Legendre, Tchebychev, etcétera; para una serie de funciones especiales como las funciones de Bessel y tantas otras funciones que dan sustento a la teoría general de los espacios de Hilbert. Ni tampoco pudo siquiera imaginar que la extensión de sus series, la transformada que ahora lleva su nombre, la transformada de Fourier, podría tener tal infinidad de aplicaciones, incluidas algunas que usted, estimado lector, usa en su teléfono celular.

Crítica a la obra de Fourier

La obra de Fourier constituye un hito en la historia de las matemáticas; pero, como siempre ocurre en estos casos, está basada en saberes previos que se encuentran en los trabajos de Euler, Leibnitz y un largo etcétera, por lo que es difícil garantizar qué tanto es absolutamente original y que tanto se debe a autores anteriores. Al parecer el método de separación de variables es idea de Fourier. Al separar variables para resolver la ecuación de calor obtiene que la solución debe quedar en términos de series infinitas de cosenos, pero que también ha surgido en el problema de la cuerda, estudiado por D'Alembert, los hermanos Bernoulli y Euler mismo. Por ejemplo Daniel Bernoulli[182] ha encontrado que la ecuación de movimiento de la cuerda queda resuelto por la fórmula

$$\phi(x) = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \operatorname{sen} 2x + \gamma \operatorname{sen} 3x + \cdots,$$

aunque Bernoulli no da ninguna fórmula para los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ como si lo hará Fourier. Es en la determinación de tales coeficientes, ahora llamados coeficientes de Fourier, mediante el método de integración lo que le garantizó fama eterna al matemático o, por lo menos, fama mientras exista la civilización actual.

Para las series, al parecer, la historia comienza con la fórmula conocida[183] por Nilakanth, Leibniz, Gregory, para $\frac{\pi}{4}$ y mencionada por Fourier en el artículo 179 de su obra mencionada y dando crédito a Leibniz por ella:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

la cual en el contexto de Fourier aparece como un caso particular[184] de

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots,$$

182 Daniel Bernoulli. *De indole singularis serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu*. Novi Commentarü Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XVII p.5-6 1771 (1773) 11.6* - St.64*, 1773

183 Para un estudio sobre el descubrimiento para la fórmula de $\pi/4$ en diversas épocas y lugares del mundo vea el artículo de Ranjan Roy (1990). The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha. Mathematics Magazine, 63(5), 291–306. doi: 10.2307/2690896.

184 Artículo 180, pag. 179 de la obra citada de Fourier.

cuando $x = 0$.

La necesidad de expresar funciones con series trigonométricas se le impone a Fourier al separar variables para resolver la ecuación de calor. A partir de entonces la técnica de separación de variables se convierte en una herramienta indispensable en la solución analítica de las ecuaciones diferenciales parciales.

Por otro lado, las objeciones que se presentaron al método de Fourier, son absolutamente válidas desde la perspectiva contemporánea. ¿Para cuáles funciones es válida la expansión en series trigonométricas? ¿Cuándo convergen estas series? Los argumentos de Fourier para estas cuestiones consisten en mostrar series conocidas que convergen (como la de $\pi/4$) y que tienen además asociada una serie trigonométrica que él ha encontrado, lo cual no puede ser aceptado como una demostración general actualmente. En su dispensa hay que añadir que la dificultad intrínseca de éstas y otros espinosos asuntos relacionados con las series de Fourier tardaron decenas de años en ser resueltas con la contribución de muchos otros autores de genio.

Finalmente, la resonancia de los descubrimientos de Fourier, como todos los grandes descubrimientos, desembocó en múltiples ramas del saber humano, en particular, en el desarrollo de las matemáticas mismas. La teoría de la integración que culmina con la integral de Lebesgue es impensable sin los problemas asociados a las series y transformadas de Fourier. También la obra de Fourier influyó profundamente en el pensamiento de Georg Cantor, lo que culmina en la teoría de conjuntos y los números transfinitos.

Traducción de la obra de Fourier

La siguiente traducción del ejemplar *Théorie analytique de la chaleur, par M. Fourier* de la edición de 1822, a partir de la digitalización realizada por Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France. Se traducen las páginas 235, 236, 237 y 238 hasta antes del párrafo 223 de la obra citada.

221

Se puede también verificar la ecuación precedente (D) (art. 220) determinando inmediatamente las cantidades $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_j$ en la ecuación

$$\phi(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + a_3 \operatorname{sen} 3x + \cdots a_j \operatorname{sen} jx + \cdots$$

para ello se multiplicará cada uno de los miembros de la anterior ecuación por $\operatorname{sen} ix\, dx$ siendo i un número entero y se tomará la integral de $x = 0$ a $x = \pi$ con lo se tendrá

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \phi(x) \operatorname{sen} ix\, dx \quad &= \quad \int_0^\pi a_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ix\, dx + \int_0^\pi a_2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} ix\, dx \\ &+ \int_0^\pi a_3 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} ix\, dx + \cdots \int_0^\pi a_j \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix\, dx + \cdots\end{aligned}$$

Pero se puede fácilmente demostrar , 1° (*sic*) que todas las integrales contenidas en el segundo miembro tienen un valor nulo, excepto el único término $a_i \int_0^\pi \operatorname{sen} ix \operatorname{sen} ix\, dx$; 2° que le valor de $\int_0^\pi \operatorname{sen} ix \operatorname{sen} ix\, dx$ es $\frac{1}{4}\pi$; de donde se concluirá el valor de a_i que es $\frac{\int_0^\pi \phi(x) \operatorname{sen} ix\, dx}{\frac{1}{2}\pi}$. Todo se reduce a considerar los valores de las integrales que se encuentran en el segundo miembro, y a demostrar las dos proposiciones precedentes. La integral $2 \int \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} ix\, dx$ tomada de $x = 0$ a $x = \pi$, y en la cual i y j son números enteros, es

$$\frac{1}{i-j} \operatorname{sen}(i-j)x - \frac{1}{i+j} \operatorname{sen}(i+j)x + C.$$

La integral debe comenzar cuando $x = 0$, la constante C es nula, y los númeors i y j siendo enteros el valor de la integral será nulo cuando se hará $x = \pi$; se sigue que cada uno de los términos como

$$a_1 \int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ix\, dx, a_2 \int_0^\pi \operatorname{sen} 2, x \operatorname{sen} ix\, dx, a_3 \int_0^\pi \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} ix\, dx, \text{etc.}$$

se hacen cero y que esto tendrá lugar toda vez que los números i y j sean diferentes. No ocurre lo mismo cuando los números i y j sean iguales, porque el término $\frac{1}{i-j} \operatorname{sen}(i-j)x$, al que se reduce la integral, se convierte en $\frac{0}{0}$, y su valor es π. Se tiene por consecuencia

$2\int \operatorname{sen} ix \operatorname{sen} ixdx = \pi$; se obtiene así de la manera más breve, los valores $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$ etcétera que son:

$$a_1 = \frac{\int \phi(x) \operatorname{sen} xdx}{\frac{1}{2}\pi}, a_2 = \frac{\int \phi(x) \operatorname{sen} 2xdx}{\frac{1}{2}\pi},$$
$$a_3 = \frac{\int \phi(x) \operatorname{sen} 3xdx}{\frac{1}{2}\pi}, \cdots, a_i = \frac{\int \phi(x) \operatorname{sen} ixdx}{\frac{1}{2}\pi},$$

Al sustituirlos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi\phi(x) &= \operatorname{sen} x \int \phi(x) \operatorname{sen} xdx + \operatorname{sen} 2x \int \phi(x) \operatorname{sen} 2xdx \\ &+ \operatorname{sen} 3x \int \phi(x) \operatorname{sen} 3xdx + \cdots + \operatorname{sen} ix \int \phi(x) \operatorname{sen} ixdx + \cdots \end{aligned}$$

222

El caso más simple es aquel donde la función dada tiene un valor constante para todos los valores de la variable x; en este caso, la integral $\int \operatorname{sen} ixdx$ es igual a $\frac{2}{i}$ si el número i es impar, e igual a 0 si el número i es par. De done se deduce la ecuación

$$\frac{1}{2}\pi = \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{9}\operatorname{sen} 9x + \cdots$$

la cual se ha encontrado previamente.

Se debe remarcar que cuando se ha desarrollado una función $\phi(x)$ en una serie de senos de arcos múltiplos el valor de la serie $a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} 2x + c \operatorname{sen} 3x + \cdots$ es el mismo que aquel de la función $\phi(x)$en tanto que la variable x esté comprendida entre 0 y π; pero esta igualdad cesa en general de tener lugar cuando el valor de x sobrepasa el número π.

Supongamos que la función de que se requiere el desarrollo sea x, se tendrá, después del teorema precedente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi x &= \operatorname{sen} x \int x \operatorname{sen} xdx + \operatorname{sen} 2x \int x \operatorname{sen} 2xdx \\ &+ \operatorname{sen} 3x \int x \operatorname{sen} 3xdx + \operatorname{sen} 4x \int x \operatorname{sen} 4xdx + \cdots. \end{aligned}$$

La integral $\int_0^\pi x \operatorname{sen} ixdx$ equivale a $\pm\frac{\pi}{i}$, los índices 0 y π asociados al signo $\int$ dan a conocer los límites de la integral; el signo $+$ debe escogerse cuando i es impar, y el signo $-$ cuando i es par. Se tendrá entonces la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x - \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + \text{etc.}$$

$y = \sin. x$, $y = \sin. 2x$, $y = \sin. 3x$, $y = \sin. 4x$, etc.,

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y = \varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont:

$$y = \sin. x. \varphi x, y = \sin. 2x. \varphi x, y = \sin. 3x. \varphi x, y = \sin. 4x. \varphi x.. \text{etc.}$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, seront les valeurs des coëfficients $a\, b\, c\, d$ etc., dans l'équation

$$\frac{1}{2}\pi \varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

221.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités $a_1 a_2 a_3 \ldots a_j$ etc., dans l'équation

$$\varphi x = a_1 \sin. x + a_2 \sin. 2x + a_3 \sin. 3x + \ldots a_j \sin. jx + \ldots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par $\sin. ix.dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, on aura

$$S(\varphi x. \sin. ix.dx) = a_1 S(\sin. x \sin. ix.dx) + a_2 S(\sin. 2x. \sin. ix.dx)$$
$$+ \ldots a_j S(\sin. jx. \sin. ix.dx) + \ldots \text{etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a_i S(\sin. ix. \sin. ix\, dx)$; 2° que la valeur de $S(\sin. ix. \sin. ix.dx)$ est $\frac{1}{2}\pi$; d'où l'on con-

30.

Parráfo 221 de la Obra de Fourier *op. cit.*. Créditos de la digitalización: *Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France.*

clura la valeur de a_i, qui est $\frac{S(\varphi x . \sin. ix . dx)}{\frac{1}{2}\pi}$. Tout se réduit à considérer la valeur des intégrales qui entrent dans le second membre, et à démontrer les deux propositions précédentes. L'intégrale $2\,S(\sin. jx . \sin. ix . dx)$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et dans laquelle i et j sont des nombres entiers, est

$$\frac{1}{i-j}\sin.(\overline{i-j}.x)-\frac{1}{i+j}\sin.(\overline{i+j}\,x)+C.$$

L'intégrale devant commencer lorsque $x=0$, la constante C est nulle, et les nombres i et j étant entiers, la valeur de l'intégrale deviendra nulle lorsqu'on fera $x=\pi$; il s'ensuit que chacun des termes tels que

$$a_1 S(\sin. x \sin. ix.dx),\ a_2 S(\sin. 2x.\sin. ix.dx),\ a_3 S(\sin. 3x \sin. ix.dx) \text{ etc.}$$

s'évanouit, et que cela aura lieu toutes les fois que les nombres i et j seront différents. Il n'en est pas de même lorsque les nombres i et j sont égaux, car le terme $\frac{1}{i-j}\sin.(\overline{i-j}\,x)$ auquel se réduit l'intégrale, devient $\frac{0}{0}$, et sa valeur est π. On a parconséquent $2\,S(\sin. ix . \sin. ix . dx)=\pi$; on obtient ainsi de la manière la plus briève, les valeurs de $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_i$ etc. qui sont :

$$a_1=\frac{S(\varphi x . \sin. x . dx)}{\frac{1}{2}\pi},\quad a_2=\frac{S(\varphi x . \sin. 2x . dx)}{\frac{1}{2}\pi},$$

$$a_3=\frac{S(\varphi x . \sin. 3x . dx)}{\frac{1}{2}\pi}\ \ldots\ a_i=\frac{S(\varphi x . \sin. ix . dx)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

En les substituant on a

$$\frac{1}{2}\pi\varphi x = \sin. x\, S(\varphi x \sin. x.dx) + \sin. 2x\, S(\varphi x.\sin. 2x.dx)$$
$$+ \sin. 3x\, S(\varphi.x \sin. 3x.dx) \ldots + \sin. ix\, S(\varphi x \sin. ix.dx)$$
$$+ \text{etc.}$$

222.

Le cas le plus simple est celui où la fonction donnée a une valeur constante pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre o et π; dans ce cas, l'intégrale $\int \sin. i\,x\,d\,x$ est égale à $\frac{2}{i}$ si le nombre i est impair, et égal à o si le nombre i est pair. On en déduit l'équation

$$\frac{1}{2}\pi = \sin. x + \frac{1}{3}\sin. 3x + \frac{1}{5}\sin. 5x + \frac{1}{7}\sin. 7x + \frac{1}{9}\sin. 9x + \text{etc.}$$

que l'on a trouvée précédemment.

Il faut remarquer que lorsqu'on a développé une fonction $\varphi\, x$ en une suite de sinus d'arcs multiples la valeur de la série $a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x +$ etc. est la même que celle de la fonction $\varphi\, x$ tant que la variable x est comprise entre o et π; mais cette égalité cesse en général d'avoir lieu lorsque la valeur de x surpasse le nombre π.

Supposons que la fonction dont on demande le développement soit x, on aura, d'après le théorême précédent,

$$\frac{1}{2}\pi x = \sin. x \int x \sin. x\,dx + \sin. 2x \int x \sin. 2x\,dx$$
$$+ \sin. 3x \int x \sin. 3x\,dx + \sin. 4x \int x \sin. 4x\,dx + \text{etc.}$$

L'intégrale $\int_0^\pi x \sin. i\,x\,d\,x$ équivaut à $\pm \frac{\pi}{i}$, les indices o et π qui sont joints au signe $\int$ font connaître les limites de l'intégrale ; le signe + doit être choisi lorsque i est impair, et le signe — lorsque i est pair. On aura donc l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}x = \sin.x - \frac{1}{2}\sin.2x + \frac{1}{3}\sin.3x - \frac{1}{4}\sin.4x + \frac{1}{5}\sin.5x - \frac{1}{7}\sin.7x + \text{etc.}$$

223.

On développera aussi en séries de sinus d'arcs multiples les fonctions différentes de celles où il n'entre que des puissances impaires de la variable. Pour apporter un exemple qui ne laisse aucun doute sur la possibilité de ce développement, nous choisirons la fonction $\cos.x$, qui ne contient que des puissances paires de x, et qu'on développera sous la forme suivante :

$$a\sin.x + b\sin.2x + c\sin.3x + d\sin.4x + e\sin.5x + \text{etc.}$$

quoiqu'il n'entre dans cette dernière série que des puissances impaires de la même variable. On aura en effet, d'après le théorême précédent,

$$\frac{1}{2}\pi\cos.x = \sin.x\int\cos.x\sin.x\,dx$$
$$+\sin.2x\int\cos.x\sin.2x\,dx + \sin.3x\int\cos.x\sin.3x\,dx + \text{etc.}$$

L'intégrale $\int\cos.x\sin.ix\,dx$, équivaut à zéro lorsque i est un nombre impair, et à $\frac{2i}{i^2-1}$, lorsque i est un nombre pair. En supposant successivement $i=2, 4, 6, 8$, etc. on aura la série toujours convergente :

$$\frac{1}{4}\pi\cos.x = \frac{2}{1.3}\sin.2x + \frac{4}{3.5}\sin.4x + \frac{6}{5.7}\sin.6x$$
$$+ \frac{8}{7.9}\sin.8x + \frac{10}{9.11}\sin.10x + \text{etc.}$$

Los más antiguos antecedentes

¿Qué se debe entender por "trigonometría"? y a partir de esto ¿hasta dónde llegó el desarrolo de la trigonometría en la antigua babilonia? Para ello se puede comparar el avance de los babilonios (entre 2000 y 1600 aC) con lo que se alcanzó, por ejemplo 2000 años después, con Ptolomeo. Pero antes de comenzar, ¿qué es lo que hizo Ptolomeo que permite clasificar su obra como un hito en la historia de la trigonometría? En las tablas trigonométricas del astrónomo griego se encuentran triángulos rectángulos con hipotenusa de medida igual para todos, con longitud igual al radio de una circunferencia cuyo centro coincide con uno de los vértices de los triángulos. Tales ángulos de los triángulos, llamados α en la figura 56, están en correspondencia con un semiarco de la circunferencia, de tal forma que los triángulos pueden ser clasificados por la medida de este ángulo.

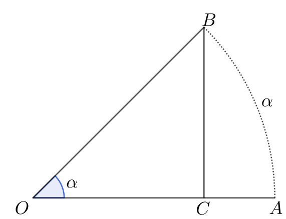


Figura 56: Se pueden conocer muchos triángulos rectángulos cuyo vértice coincide con el centro de un círculo de radio dividido en 60 partes, note que el radio también es la hipotenusa del triángulo, es decir Ptolomeo pudo conocer las medidas de los lados CB y OC para ciertos triángulos. Para los triángulos que calculó Ptolomeo es posible poner en correspondencia la medida del arco AB con el ángulo α y así conocer la medida del otro ángulo agudo del triángulo ya que la medida de $\angle COB$ es $90°$ de una circunferencia dividida en $360°$.

Un triángulo está completamente determinado por las medidas de sus tres lados y las medidas de sus ángulos internos. Para los triángulos rectángulos, basta conocer la medida de dos de sus lados para conocer el tercero, por el teorema de Pitágoras, y dado que en geometría euclidiana la suma de los ángulos internos de todo triángulo mide la suma de dos rectos, basta conocer dos ángulos para conocer el tercero. Ptolomeo parte de los triángulo con $\alpha = 45°$ y otro con $\alpha = 60°$ y mediante sus fórmulas fue capaz de conocer todos los triángulos para α con $0° < \alpha < 90°$ que se incrementa en medio grado, para cada triángulo en sus tablas.

Y ¿cuál es la idea de conocer triángulos? pues entre otras cosas para hacer cálculos indirectos de medidas de otros triángulos que sean semejantes a los conocidos, pero cuyas magnitudes sean difíciles o, definitivamente, imposibles de medir directamente. Para dar un ejemplo espectacular, Eratóstenes fue capaz de calcular aproximadamente el radio de la tierra utilizando triángulos formados con las sombras arrojadas por un pequeño poste vertical (véase por ejemplo el libro editado por Thomas[185] pag. 261).

De entre todos los triángulos, los más simples de reconocer cuando son semejantes entre sí, son los triángulos rectángulos, ya que, al ser rectángulos, tienen un ángulo de la misma medida, precisamente el

[185] Ivor Thomas. *Greek Mathematical Works, Aristarchus to Pappus*. Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, London, England, 2005

ángulo recto.

Posteriormente, se le dio el valor 1 al radio del círculo y, con ello, el cateto opuesto resulta ser el seno del ángulo y el cateto adyacente el coseno del ángulo en la trigonometría contemporánea que comienza con Newton, Taylor y MacLaurin para quienes tales valores podrían ser dados para cualquier ángulo con la aproximación que se deseara, no solo para las partes conocidas por Ptolomeo en grados, sino para cualquier arco de circunferencia, no dado en partes de 360°, sino en partes de π absolutamente arbitrarias.

Regresando a Ptolomeo, lo que se requiere para una buena tabla trigonométrica en sus tiempos es:

1. La posibilidad de medir ángulos es decir poder dividir la circunferencia en unidades igualmente separadas y segmentos y ser capaces de poner en correspondencia los ángulos de triángulos con arcos de circunferencia.

2. Conocer aproximadamente la diferencia entre las unidades sobre la circunferencia (en total 2π) y el diámetro de la circunferencia tomada para establecer las medidas (para Ptolomeo el diámetro es de 120 partes, sabe que el diámetro aproxima la circunferencia en un número cercano a tres, pero sabe que no es tres, recuerde que Arquímedes es anterior a Ptolomeo) .

3. Conocer el teorema de Pitágoras y además ser capaces de extraer raíz cuadrada, es decir, tener un algoritmo para calcularla con tanta precisión como se desee.

4. Conocer los teoremas que garanticen la semejanza de triángulos, en particular los que se refieren a triángulos rectángulos.

5. Conocer algoritmos de suma resta, multiplicación y división de números con la precisión que se desee.

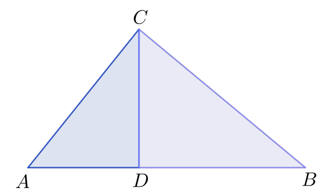


Figura 57: En la figura los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ son semejantes al ser equiángulos y por lo tanto tienen lados proporcionales, lo cual era bien conocido por Euclides, pero dos mil años antes, al parecer, también era conocido por los babilonios.

Regresando a Babilonia, parece ser que el concepto de ángulo, en general, y de cómo medirlo no eran conocidos en la antigua Babilonia, en el periodo que nos ocupará (2000 a 1600 a. C.) llamado "periodo viejo babilonio" (Old Babylonial). A pesar de que conocen como dividir la circunferencia en 360 partes, no hay referencia, hasta la fecha, de que hayan asignado medidas a los ángulos internos de ningún triángulo[186], aunque pueden reconocer los triángulos que son rectángulos. Al parecer saben dividir segmentos en unidades arbitrarias, según puede deducirse de sus cálculos y dibujos, algunos de los cuales se mostrarán más adelante (digo "al parecer", porque para dividir un segmento en partes arbitrarias se requieren conocimientos de semejanza de triángulos). Los antiguos babilonios conocen muchos ejemplos de triángulos

[186] Eleanor Robson. *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*. Historia Mathematica 28 (2001), 167–206, 2001

rectángulos y saben que las medidas de sus lados satisfacen lo que llamamos "teorema de Pitágoras", más de mil años antes que Pitágoras. Pueden calcular indirectamente longitudes de triángulos semejantes a triángulos dados, aunque no se sabe que tengan una definición de "triángulos semejantes" pueden reconocer varios, por ejemplo, si se encuentran dentro de un mismo triángulo como los de la figura 57.

Es decir, los babilonios del periodo viejo babilonio no cumplen con los puntos 1 y 2, para elaborar una tabla trigonométrica como la de Ptolomeo. Sin embargo conocen instancias del teorema de Pitágoras y tienen una formidable aritmética en base 60 con la que son capaces de realizar todas las operaciones básicas y, además, aproximar raíces cuadradas de números arbitrarios. Además, tienen saberes y ejemplos de triángulos semejantes y hacen cálculos indirectos de longitudes de lados de triángulos que son semejantes, en el sentido moderno, a triángulos que conocen.

De esta forma, se cumplen en cierta medida los puntos 3 a 5 de nuestro resumen. ¿Pero se puede proceder a clasificar triángulos rectángulos de otra manera que no sea midiendo el ángulo de la base del triángulo con la hipotenusa como hizo Ptolomeo? La respuesta es: sí, se puede dar el cálculo del cociente del cateto opuesto con el cateto adyacente, es decir, se puede dar la $\tan\alpha$ sin conocer α, recuerde, $\tan\alpha =$ cateto opuesto/cateto adyacente, no se requiere medir el ángulo en la más elemental aproximación.

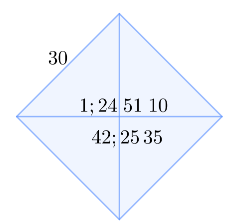


Figura 58: Se muestra un diagrama de lo que se representa en la tableta YBC 7289. Se trata de un cuadrado donde en un lado exterior se muestra el número 30. En la diagonal se muestran dos números el primero 1; 24 51 10 es la aproximación a $\sqrt{2}$ en sexagesimal, el segundo número, bajo la diagonal representa en sexagesimal $30 \cdot 1; 24\,51\,10 = 42; 25\,35$.

En el periodo viejo babilonio conocían el teorema de Pitágoras, obtenían lados proporcionales de triángulos semejantes y poseían métodos para calcular raíces cuadradas

La primera prueba que se presenta en este texto de que el teorema de Pitágoras se conocía entre 1800 y 1600 a. C., es la tableta de la colección de Yale, YBC 7289, de la cual se muestra una representación en la figura 58. La figura representa un cuadrado con sus dos diagonales y en ella parecen tres números en base 60, el primer número que llamaremos $\ell = 30$, el segundo número $m = 1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3}$ y el tercer número $n = 42 + \dfrac{25}{60} + \dfrac{35}{60^2}$. El segundo número m es aproximadamente $m \approx \sqrt{2}$ como el lector puede comprobar desarrollando los cálculos, corresponde a la hipotenusa de un triangulo rectángulo cuyos catetos miden 1 ambos, lo cual se cumple por el teorema de Pitágoras. Claramente el triángulo con catetos de medida 1 es semejante al triángulo con catetos de medida 30 por lo que sus hipotenusas son proporcionales, es decir, la diagonal n se obtiene multiplicando por $\ell = 30$, es decir, $n = 30 \cdot m$, que, como se ha dicho, es el segundo número escrito en la tableta sobre la diagonal. Por cierto, la aproximación para $\sqrt{2}$ es la misma que usa Ptolomeo en el Almagesto, insistimos, más de mil años después.

La fuente básica para las matemáticas babilónicas todavía es el extraordinario libro editado por Neugenbauer y Sachs[187], donde entre muchos materiales se encuentra, dibujada y fotografiada, la tableta Plimpton 322, de la que se hablará más adelante, y además, una representación de la tableta YBC7289 en la página 42.

[187] O. Neugebauer y A. Sachs. *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, Conn., Pub. jointly by the American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945

Tableta IM55357

La segunda prueba de que los babilonios del periodo 2000 a 1600 a. C. conocían y hacían cálculos indirectos mediante triángulos semejantes conocidos y que conocían el teorema de Pitágoras, es la tableta IM55357 encontrada en Tell Harmal.

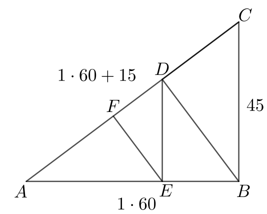


Figura 59: Se muestra una representación de la tableta IM55357. Se trata de un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ donde los catetos miden $1 =_{60} 1 \cdot 60$, $45 =_{60} 45$ y la hipotenusa mide $1\ 15 =_{60} 75$.

Información sobre esta y otras tabletas se encuentra en el libro de Gonçalves[188], donde además de la transliteración del texto de la tableta se encuentra una traducción al inglés así como comentarios que ayudan a la comprensión del texto (vea el capítulo 4). En la tableta que se representa en la figura 59 aparece un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ donde los catetos miden $1 =_{10} 1 \cdot 60$, $45 =_{10} 45$ y la hipotenusa mide $1\ 15 =_{10} 75$, donde con la expresión "$=_{10}$" se abrevia "igual en base 10 a" y los números a la izquierda de tal expresión están escritos en base 60, donde con el punto y como se separan las fracciones de los enteros de las fracciones, con tales dimensiones se sabe que el triángulo es rectángulo (por el teorema de Pitágoras). Sobre los triángulos interiores de la figura, fueron colocados números de la siguiente manera (aunque en el original no se separan con punto y coma los enteros de las fracciones):

[188] Carlos Gonçalves. *Mathematical Tables from Tell Harmal*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer International Publishing Switzerland, 2015

$$
\begin{aligned}
\triangle AEF &= 5\ 53;\ 53\ 39\ 50\ 24 =_{10} 5 \cdot 60 + 53 + \frac{53}{60} + \frac{39}{60^2} + \frac{50}{60^3} + \frac{24}{60^4} \\
\triangle FED &= 3\ 19;\ 3\ 56\ 9\ 36 =_{10} 3 \cdot 60 + 19 + \frac{3}{60} + \frac{56}{60^2} + \frac{9}{60^3} + \frac{36}{60^4} \\
\triangle EBD &= 5\ 11;\ 2\ 24 =_{10} 5 \cdot 60 + 11 + \frac{2}{60} + \frac{24}{60^2} \\
\triangle DBC &= 8\ 6 =_{10} 8 \cdot 60 + 6.
\end{aligned}
$$

Tales números corresponden a las áreas de los triángulos correspondientes, como se explica en el texto bajo la figura, lo que permite calcular las dimensiones de los lados de los diferentes triángulos suponiendo que tienen lados en correspondencia proporcionales, lo que en términos modernos, se traduce a suponer que los triángulos son semejantes. El problema consiste en encontrar las longitudes de los lados de los triángulos interiores que aparecen en la figura, es decir, FE, DE y DB. Por lo tanto, está implícito en el problema y en su solución que los triángulos interiores son rectángulos, y que el escriba sabe que al estar inscritos en un mismo triángulo tienen lados proporcionales, aunque no se conociera el concepto de "triángulos semejantes", ni se supiera cómo medir ángulos. En la tableta se da la solución $DB = 36$ y se indica el procedimiento para calcular las otras dimensiones de los demás triángulos.

Tableta Plimpton 322

Hay que decir que todavía está en discusión el grado en el que el contenido de la tableta Plimpton 322 se refiere a la trigonometría o no. En el artículo de Mansfeld y Wilberg titulado *Plimton 322 es trigonometría sexagesimal exacta*[189], el cual causó cierto revuelo en los medios masivos de comunicación, se discute este asunto y, el lector interesado no tendrá dificultad para encontrar el artículo y videos relacionados con el tema en internet.

[189] Daniel F. Mansfeld y N. J. Wildberg. *Plimpton 322 is Babylonian exact trigonometry*. Historia Mathematica 44 (2017) 395-419 Sciendirect Elsevier, 2017

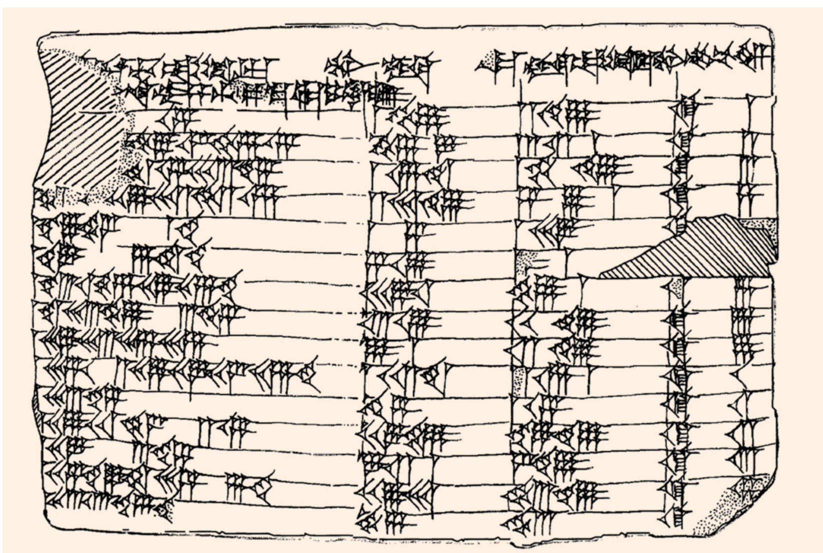


Figura 60: Aquí se muestra un dibujo de la tableta Plimpton 322. Créditos de la imagen: Rare Book and Manuscript Library, Columbia University.

El contenido de la tableta Plimpton 322

Para darnos una idea de la antigüedad de la tabla, habían pasado más de mil años cuando publicó sus cálculos Hiparco, antecesor de Ptolomeo en la elaboración de tablas trigonométricas. La tableta hecha en arcilla es una tabla informativa en el sentido más moderno contiene quince renglones formados con ternas pitagóricas[190]. Es decir, si por ejemplo, se llama a al cateto opuesto de un triángulo rectángulo, b al cateto adyacente y c a la hipotenusa, la tabla contiene en la primera columna, el número $\left(\frac{c}{b}\right)^2$ en expansión sexagesimal, en la segunda

[190] Las ternas pitagóricas son tres números enteros x, y, z los cuales satisfacen la relación $x^2 + y^2 = z^2$ por lo que si x, y son lados adyacentes de un triángulo, el triángulo resulta ser rectángulo con x, y como catetos y z como hipotenusa del triángulo.

columna al número a y en la tercera columna al número c, tales que los números a, b, c satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. En la cuarta columna se encuentran los lugares que ocupa el cálculo de la primera columna respecto de los otros triángulos ordenados de mayor a menor.

Además de los cálculos, los encabezados nos muestran que efectivamente se trata de catetos opuestos e hipotenusas en la segunda y tercera columnas. Aunque lamentablemente no es posible leer parte del texto de la primera columna por estar parcialmente destruido, los asiriólogos contemporáneos afirman que podría significar algo así como "si se quita el número 1 surge el cateto opuesto de un triángulo", como efectivamente ocurre en geometría dada la relación:

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2. \tag{64}$$

Es decir, se puede formar un triángulo rectángulo con cateto adyacente 1, cateto opuesto $\frac{a}{b}$ e hipotenusa $\frac{c}{b}$. Como es sabido, la relación (64) se obtiene inmediatamente de $a^2 + b^2 = c^2$ al dividir ambos miembros de esta igualdad por b^2, por lo que desde el punto de vista de la aritmética tal relación es clara, lo que debió haber llamado la atención en aquellas lejanas épocas es justamente el carácter geométrico de tal relación. En términos modernos (64) se lee

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

y el nombre de $\tan \alpha$ se debe al hecho de que efectivamente $\tan \alpha$ es la tangente al círculo de radio 1, en el punto a partir del cual se mide α. De esta forma si se quita el 1, como aparentemente indica el encabezado de la tableta, surge la tangente, la cual es el lado opuesto de un triángulo con cateto adyacente 1 e hipotenusa dada por la secante. En la tableta Plimpton 322 se encuentran los números asociados a los segmentos representados en la figura 61, en la primera columna de la tableta mencionada aparece la longitud del segmento $OD = \sec \alpha$ elevado al cuadrado; el cual, como todo parece indicar, ha sido calculado. También aparece el segmento $CB = a$ y el segmento $OB = c$, los cuales se encentran en la segunda y tercera columnas de la tableta, respectivamente. No aparece el segmento $OC = b$, sin embargo todos los segmentos de la tableta Plimpton 322 pueden ser calculados mediante este segmento, que tiene una forma particular de ser escrito, lo que facilita la aritmética usada por los antiguos babilonios.

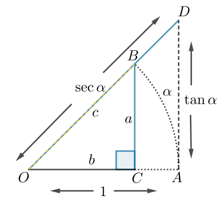


Figura 61: Para el caso en que $b < 1$ se muestra un triángulo rectángulo con $a = CB$ como cateto opuesto, $b = OC$ como cateto adyacente y $c = OB$ como hipotenusa. En este caso $a/b = \tan \alpha$, es el cateto opuesto del triángulo con cateto adyacente 1 e hipotenusa $c/b = \sec \alpha$.

En el cuadro 13 se muestra la información incluida en la tableta Plimpton 322, salvo la cuarta columna, la cual no está incluida en el original, pero se ha conjeturado que a partir de tal columna se generaron los demás números. Se ha utilizado notación moderna en la primera columna para resaltar las relaciones que ahora se conocen. En el original, solo aparece la expansión sexagesimal del primer número que se

Cuadro 13: Plimton 322. *La cuarta columna no está incluida en el original y se muestra en gris.*

$\sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha$ (en notación moderna)	cateto opuesto (frente)	hipotenusa (diagonal)	cateto adyacente (base)	lugar
$\left(\frac{169}{120}\right)^2 = 1+\left(\frac{119}{120}\right)^2$	$119 = 7\cdot 17$	$169 = 13^2$	$120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$	1
$\left(\frac{4825}{3456}\right)^2 = 1+\left(\frac{3367}{3456}\right)^2$	$3367 = 7\cdot 13\cdot 37$	$4825 = 5^2\cdot 193$	$3456 = 2^7\cdot 3^3$	2
$\left(\frac{6649}{4800}\right)^2 = 1+\left(\frac{4601}{4800}\right)^2$	$4601 = 43\cdot 107$	$6649 = 61\cdot 109$	$4800 = 2^6\cdot 3\cdot 5^2$	3
$\left(\frac{18541}{13500}\right)^2 = 1+\left(\frac{12709}{13500}\right)^2$	$12709 = 71\cdot 179$	18541 primo	$13500 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^3$	4
$\left(\frac{97}{72}\right)^2 = 1+\left(\frac{65}{72}\right)^2$	$65 = 5\cdot 13$	97 primo	$72 = 2^3\cdot 3^2$	5
$\left(\frac{481}{360}\right)^2 = 1+\left(\frac{319}{360}\right)^2$	$319 = 11\cdot 29$	$481 = 13\cdot 37$	$360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$	6
$\left(\frac{3541}{2700}\right)^2 = 1+\left(\frac{2291}{2700}\right)^2$	$2291 = 29\cdot 79$	3541 primo	$2700 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2$	7
$\left(\frac{1249}{960}\right)^2 = 1+\left(\frac{799}{960}\right)^2$	$799 = 17\cdot 47$	1249 primo	$960 = 2^6\cdot 3\cdot 5$	8
$\left(\frac{769}{600}\right)^2 = 1+\left(\frac{481}{600}\right)^2$	$481 = 13\cdot 37$	769 primo	$600 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$	9
$\left(\frac{8161}{6480}\right)^2 = 1+\left(\frac{4961}{6480}\right)^2$	$4961 = 11^2\cdot 41$	8161 primo	$6480 = 2^4\cdot 3^4\cdot 5$	10
$\left(\frac{75}{60}\right)^2 = 1+\left(\frac{45}{60}\right)^2$	$45 = 3^2\cdot 5$	$75 = 3\cdot 5^2$	$60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$	11
$\left(\frac{2929}{2400}\right)^2 = 1+\left(\frac{1679}{2400}\right)^2$	$1679 = 23\cdot 73$	$2929 = 29\cdot 101$	$2400 = 2^5\cdot 3\cdot 5^2$	12
$\left(\frac{289}{240}\right)^2 = 1+\left(\frac{161}{240}\right)^2$	$161 = 7\cdot 23$	$289 = 17^2$	$240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$	13
$\left(\frac{3229}{2700}\right)^2 = 1+\left(\frac{1771}{2700}\right)^2$	$1771 = 7\cdot 11\cdot 23$	3229 primo	$2700 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2$	14
$\left(\frac{106}{90}\right)^2 = 1+\left(\frac{56}{60}\right)^2$	$56 = 2^3\cdot 7$	$106 = 2\cdot 53$	$90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$	15

muestra, es decir el correspondiente en lenguaje moderno a $\sec^2 \alpha$. La expansión hexagesimal de tales números que fue usada por los antiguos babilonios se muestra en el cuadro 15.

Breve explicación de la aritmética de la vieja babilonia.

Muchas fotos de tablas originales de matemáticas en textos cuneiformes, además de su transliteración e interpretación pueden encontrarse el libro de Neugebauer[191]. Para multiplicar, los babilonios no usaban tablas de multiplicar que incluyeran todas los productos de los números de 1 a 60, como hacemos nosotros con los números de 1 a 10, sino tablas de cuadrados; por ello la relevancia de conocer números elevados al cuadrado. Se dice que para multiplicar, digamos $x \cdot y$ los babilonios usaban o bien la fórmula

$$x \cdot y = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$$

o bien

$$x \cdot y = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

por lo que, como se ha dicho, necesitaban largas tablas de números elevados al cuadrado, de las cuales existe evidencia (vea por ejemplo la tableta Plimpton 318 en el libro de Neugebauer pag. 34).

Para dividir, los babilonios usaban el método de multiplicar por inversos, por ejemplo, para dividir por 2 multiplicaban por $30/60 = 1/2$. Dada la importancia de la división en su desarrollada aritmética, contaban para el año 2000 a. C. con largas tablas de inversos, (vea por ejemplo el libro citado de Neugebauer en el capítulo II). En la aritmética sexagesimal tienen expresión exacta los inversos de aquellos números que pueden escribirse de la forma $2^l \cdot 3^m \cdot 5^n$, aunque los babilonios al igual que nosotros eran capaces de aproximar inversos de números que no tuvieran esta forma. Observe el lector que en base 10, siguiendo los mismos principios de los babilonios, los números más interesantes son aquellos de la forma $2^l \cdot 5^m$, que son los únicos que tienen expansión decimal finita; por ejemplo, $1/2 = 0{,}5$, $1/10 = 0{,}1$. Es decir, para dividir, los números que más interesan a los antiguos babilonios son aquellos que tienen expansión decimal finita, muchos más que en base 10 por cierto.

Por ello en el cuadro 13 en la cuarta columna se han escrito los números en la forma $2^l \cdot 3^m \cdot 5^n$. Con tales números pueden construirse las ternas pitagóricas y con ello la tabla Plimpton 322 completa. La forma más simple de construir las ternas pitagóricas es con dos números arbitrarios p, q, de preferencia números naturales. Con tales números se pueden construir los números $a = p^2 - q^2$ con $p > q$, $b = 2pq$ y $c = p^2 + q^2$ satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$, como el lector interesado puede

[191] O. Neugebauer y A. Sachs. *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, Conn., Pub. jointly by the American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945

verificar, es decir, los números a, b, c forman ternas pitagóricas. En el cuadro 14 pueden verse los números p, q que generan la tableta Plimpton 322, en particular debe observarse el número $2pq$ el cual es igual a b del cuadro 13, el cual, debe recordarse que no aparece en la tableta original.

Es claro que los números de la tableta original no pueden ser obtenidos mediante un simple tanteo, dado el orden de magnitud de algunos, por lo que el método presentado en el cuadro 14 pudo haber sido utilizado. Otro método ha sido aplicado por varios asiriólogos, por ejemplo en un artículo de Friberg[192], el cual es tan probable o improbable como el presentado aquí y que ha sido utilizado desde que se dio a conocer el libro de Neugebauer en 1945. También debe ser claro que el renglón 11° es excepcional en varios sentidos: no solo sus generadores p, q no son enteros, sino que además no aparece la forma más simple $p = 2$, $q = 1$ con lo que $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$, la más conocida y simple terna pitagórica.

[192] Jöran Friberg. *Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean Triples, and the Babylonian Triangle Parameter Equations*. Historia Mathematica Volume 8, Issue 3, August 1981, Pages 277-318

Tabla original y presuntos errores

A continuación, en el cuadro 15 se presenta con números modernos el contenido del original de la tableta Plimpton 322. La notación para la expansión en base 60 escogida en este texto (pensada para facilitar la lectura, pero que no es la notación estándar de los asiriólogos) es la siguiente: el número

$$X = a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 60 + a_0 + \frac{a_{-1}}{60} + \frac{a_{-2}}{60^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{60^m},$$

donde $a_{\pm n}$ son números enteros entre 0 y 59, se representa como

$$X = a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0; \frac{a_{-1}}{60} \frac{a_{-2}}{60^2} \cdots \frac{a_{-m}}{60^m},$$

aunque en la representación de la tabla original de la figura 60 se representa los números

$$1; \frac{a_{-1}}{60} \frac{a_{-2}}{60^2} \cdots \frac{a_{-m}}{60^m},$$

sin usar comas, sino simplemente como

$$1a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-m}$$

y los números

$$a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 60 + a_0,$$

simplemente como

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

no se usaban comas para separar en absoluto, lo que a veces conlleva errores de lectura; pero en la literatura moderna se usan variantes del sistema con puntos y comas.

Cuadro 14: Con $a = p^2 - q^q$, $b = 2\,p \cdot q$, $c = p^2 + q^2$, se cumple $a^2 + b^2 = c^2$. Recuerde que solamente las columnas cuarta a sexta aparecen en la tableta Plimpton 322 original. Observe que las columnas de a y c son las que aparecen en el original en la tercera y cuarta columnas.

p	q	$b = 2\,p \cdot q$	$a = p^2 - q^2$	$c = p^2 + q^2$	lugar
$2^2 \cdot 3$	5	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	119	169	1
2^6	3^3	$3456 = 2^7 \cdot 3^3$	3367	4825	2
$3 \cdot 5^2$	2^5	$4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	4601	6649	3
5^3	$2 \cdot 3^3$	$13500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	12709	18541	4
3^2	2^2	$72 = 2^3 \cdot 3^2$	65	97	5
$2^2 \cdot 5$	3^2	$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	481	360	6
$2 \cdot 3^3$	5^2	$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	2291	3541	7
2^5	$3 \cdot 5$	$960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$	799	1249	8
5^2	$2^2 \cdot 3$	$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	481	769	9
3^4	$2^3 \cdot 5$	$6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$	4961	8161	10
$2\sqrt{3 \cdot 5}$	$\sqrt{3 \cdot 5}$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	45	75	11
$2^4 \cdot 3$	5^2	$2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$	1679	2929	12
$3 \cdot 5$	2^3	$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$	161	289	13
$2 \cdot 5^2$	3^3	$2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	1771	3229	14
3^2	5	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$	56	106	15

Cuadro 15: Transliteración del contenido del original Plimpton 322.

La $\cdots$ de la diagonal de la que 1 se quita y aparece el frente	El lado del cuadrado de enfrente	El lado del cuadrado de la diagonal	Nombre
$\mathbf{1};\frac{59}{60}\frac{0}{60^2}\frac{15}{60^3}$	$1,59$	$2,49$	1°
$\mathbf{1};\frac{56}{60}\frac{56}{60^2}\frac{58}{60^3}\frac{14}{60^4}\frac{50}{60^5}\frac{6}{60^6}\frac{15}{60^7}$	$56,7$	$1,20,25$	2°
$\mathbf{1};\frac{55}{60}\frac{7}{60^2}\frac{41}{60^3}\frac{15}{60^4}\frac{33}{60^5}\frac{45}{60^6}$	$1,16,41$	$1,50,49$	3°
$\mathbf{1};\frac{53}{60}\frac{10}{60^2}\frac{29}{60^3}\frac{32}{60^4}\frac{52}{60^5}\frac{16}{60^6}$	$3,31,49$	$5,9,1$	4°
$\mathbf{1};\frac{48}{60}\frac{54}{60^2}\frac{1}{60^3}\frac{40}{60^4}$	$1,5$	$1,37$	5°
$\mathbf{1};\frac{47}{60}\frac{6}{60^2}\frac{41}{60^3}\frac{40}{60^4}$	$5,19$	$8,1$	6°
$\mathbf{1};\frac{43}{60}\frac{11}{60^2}\frac{56}{60^3}\frac{28}{60^4}\frac{26}{60^5}\frac{40}{60^6}$	$38,11$	$59,1$	7°
$\mathbf{1};\frac{41}{60}\frac{33}{60^2}\frac{45}{60^3}\frac{14}{60^4}\frac{3}{60^5}\frac{45}{60^6}$	$13,19$	$20,49$	8°
$\mathbf{1};\frac{38}{60}\frac{33}{60^2}\frac{36}{60^3}\frac{36}{60^4}$	$8,1$	$12,49$	9°
$\mathbf{1};\frac{35}{60}\frac{10}{60^2}\frac{2}{60^3}\frac{28}{60^4}\frac{27}{60^5}\frac{24}{60^6}\frac{26}{60^7}\frac{40}{60^8}$	$1,22,41$	$2,16,1$	10°
$\mathbf{1};\frac{33}{60}\frac{45}{60^2}$	45	$1,15$	11°
$\mathbf{1};\frac{29}{60}\frac{21}{60^2}\frac{54}{60^3}\frac{2}{60^4}\frac{15}{60^5}$	$27,59$	$48,49$	12°
$\mathbf{1};\frac{27}{60}\frac{0}{60^2}\frac{3}{60^3}\frac{45}{60^4}$	$2,41$	$4,49$	13°
$\mathbf{1};\frac{25}{60}\frac{48}{60^2}\frac{51}{60^3}\frac{35}{60^4}\frac{6}{60^5}\frac{40}{60^6}$	$29,31$	$53,49$	14°
$\mathbf{1};\frac{23}{60}\frac{13}{60^2}\frac{46}{60^3}\frac{40}{60^4}$	56	$1,46$	15°

Errores

A continuación se enumeran las discrepancias del patrón general de algunos elementos de la tableta babilonia.

1. En el segundo renglón, tercera columna, debe ser

$$1,20,25 = 1 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 + 25 = 4825,$$

está escrito en el original $3,12,1 = 11521$, el cual es un número demasiado grande. Debió ser obvio para un experto en ternas pitagóricas y aritmética en base 60.

2. En la 1a columna , renglón 9, dice $9,1 = 9 \cdot 60 + 1 = 541$, es primo, el único en esa columna debe decir $8,1 = 8 \cdot 60 + 1 = 481$ y $481 = 13 \cdot 37$. Pudo haber sido un error común.

3. Renglón 13, col 2 dice $7,12,1 = 7 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60 + 1 = 25921 = 161^2$. Sucede que el número correcto es $161 = 2 \cdot 60 + 41$, es decir, el mismo número, pero sin estar elevado al cuadrado. También debió ser obvio para alguien con experiencia, no parece ser un error de copia, ni menos de cálculo.

4. Renglón 15, 3a columna escribe 53 en lugar de $1 \cdot 60 + 44 = 106/2$, es decir la mitad del valor correcto. Tampoco parece ser un error de copia ni de cálculo.

Resumiendo, los presuntos "errores" en la tableta fueron asumidos como tales desde la publicación 1945 del libro de Neugebauer. Obviamente serían errores si la intención de quien los escribió era solo escribir datos verdaderos. Pero existe, desde mi punto de vista, la posibilidad de que el texto fuera otra cosa, quizá un examen. Lo que me lleva a pensar esto es el hecho de que la primera columna, la más difícil por el número de cifras, no contiene errores, ¡los errores solo aparecen en columnas de números más simples comparados con las otras columnas! Análisis de los presuntos errores fueron hechos desde Neugebauer (pag. 38 notas al pie de página), más objetivamente, ya que no se conoce la finalidad de la tabla, debió habérseles llamado *discrepancias del patrón general*, pero hasta tiempos recientes[193] sigue siendo la moda entre los asiriólogos llamarlos *errores*.

[193] John P. Britton Christine Proust Steve Shnider. *Plimpton 322: a review and a different perspective*. Arch. Hist. Exact Sci. (2011) 65:519–566 DOI 10.1007/s00407-011-0083-4

Completando la tabla

Otro asunto del que los asiriólogos se han dado a la tarea es el considerar, bajo el supuesto de que la tableta era varias veces mayor, que puede completarse (por ejemplo Fridberg *op. cit.*, de Sola Price[194]). Desde mi punto de vista el acercamiento de Derek de Sola podría ser el mejor aproximado, tomando en cuenta que usa la construcción de

[194] Derek J. de Sola Price. *The Babylonian "Pythagorean Triangle" Tablet*. Centaurus 1964: vol. 10: pp. 219-231

ternas pitagóricas que se ha descrito aquí; el mencionado autor añadió los lugares 16 a 38 de la tabla que puede consultarse en la página 6 del citado artículo.

Conclusión

El asunto de que si la tableta Plimpton 322 incluye ángulos, fue propuesto también por Neugebauer *op. cit.* dado que notó que si buscaba los grados asociados a los ángulos de las tabletas estos variaban, en promedio, alrededor de un minuto consecutivamente. Una fuerte oposición de, por ejemplo, Eleanor Robson[195] en la actualidad pone en entredicho la posibilidad de que estén implícitos los grados en la antigua tableta. Sin embargo, como se ha mencionado, aún si la tableta no incluye grados, esto no obsta para que sea una tabla trigonométrica, en el sentido de incluir triángulos de los cuales al menos son conocidos sus lados, y con ellos la posibilidad de hacer cálculos indirectos de triángulos semejantes, por ejemplo, en el sentido de la tableta IM55357. Lo que desde mi punto de vista es claro, es el carácter geométrico de la tabla y no puramente aritmético, dadas las referencias de los encabezados de la tabla a lados de cuadrados y en la transliteración de los encabezados si parecen estar de acuerdo todos los estudios.

[195] Eleanor Robson. *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322.* Historia Mathematica 28 (2001), 167–206 doi:10.1006/hmat.2001.2317

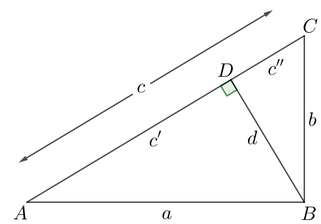


Figura 62: A partir de la tableta IM55357 y los conocimientos requeridos para resolverla se puede demostrar el teorema de Pitágoras.

Por último, es importante mencionar que a partir de los saberes involucrados en la tableta IM55357, se puede demostrar el teorema de Pitágoras. Efectivamente, al observar la figura 62 se sabe, aplicando los mismos conocimientos para resolver los problemas de la tableta del antiguo babilonio, que los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ y $\triangle BDC$ tienen lados en correspondencia proporcionales. En la mencionada figura se tiene $AB = a$, $BC = b$, $AD = c'$ $DC = c''$, $DB = d$ y $AB = c = c' + c''$. Dada la proporcionalidad de los triángulos que conforman se tiene

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{c'}{a} \\ \frac{b}{c} &= \frac{c''}{b} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} a^2 &= cc' \\ b^2 &= cc'' \end{aligned}$$

y así

$$a^2 + b^2 = cc' + cc'' = c(c' + c'') = c^2.$$

No se tiene evidencia de que los antiguos babilonios pudieran formular un enunciado general del tipo “para todo triángulo rectángulo...”, pero se sabe que el álgebra involucrada en la argumentación anterior era más que conocida por ellos, así que una demostración general del teorema de Pitágoras estaría a su alcance ¿pero a la fecha nadie puede afirmarlo con la contundencia de la evidencia histórica. Pero, si algún día se encontrara, tendríamos que cambiar el nombre del teorema a "teorema babilonio" o quizá "teorema sumerio" y cambiar todos los libros de texto, para ser más justos y acertados de acuerdo con la historia de la matemática.

Bibliografía

Lars V. Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* Dover Publications, Inc. New York, 1966.

Arquímedes. *Geometrical Solutions Derived from Mechanics; a Treatise of Archimedes*. Project Gutemberg 2005.

Arquímedes. *Archimedes opera Omnia cum commentariis Eutocii, edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae in Aedibus B. G. Teuberni, 1880.

Raymond Ayoub. *Euler and the Zeta Function*. The American Mathematical Monthly , Dec., 1974, Vol. 81, No. 10 (Dec., 1974), pp. 1067-1086.

Isaac Barrow. *Lectiones opticae et Geometricae in quibus Phaenomenon opticorum Genuina Rationes investigantur, ac exponuntur: et Generalia Curvarum Linearum Symptomata declarantur*. Internet Archive 2011.

Daniel Bernoulli. *De indole singularis serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angulorum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu*. Novi Commentarü Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Bd. XVII p.5-6 1771 (1773) 11.6* - St.64*, 1773.

James Burke. *Connections*. Little, Brown and Company., 1995.

Barry Cipra. *Digits of Pi*. What's happening in the Mathematical Sciences, vol. 6, AMS.

Derek J. de Sola Price. *The Babylonian "Pythagorean Triangle" Tablet.* Centaurus 1964: vol. 10: pp. 219-231.

W. F. Eberlein. *On Euler's Infinite Product for the Sine*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 58, 147-151 (1977).

Euclides. *Euclid's Elements of Geometry, The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick.* Open Source, 2007. ISBN 978-0-6151-7984-1.

Leonhard Paul Euler. *Introductio in Analysin Infinitorum. Vol 1*. Euler Archive - All Works. 101., a.

Leonhard Paul Euler. *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali*. (1741). Euler Archive - All Works. 47., b.

Leonhard Paul Euler. *De summis serierum reciprocarum*. (1740). Euler Archive - All Works. 41., c.

Jean Baptiste Joseph Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF, 1822.

Jöran Friberg. *Methods and traditions of Babylonian mathematics: Plimpton 322, Pythagorean Triples, and the Babylonian Triangle Parameter Equations*. Historia Mathematica Volume 8, Issue 3, August 1981, Pages 277-318.

Carlos Gonçalves. *Mathematical Tables from Tell Harmal*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

Thomas Heath. *The Works of Archimedes Edited in Modern Notation with Introductory Chapters*. Cambridge University Press, New York, 2010.

W. A. Luxemburg. *What is Nonstandard Analysis?* The American Mathematical Monthly, Jun.-Jul., 1973, vol 80, No. 6, Part 2. Papers on the Foundations of Mathematics (Jun.-Jul.), 1973, pp.38-67.

O. Neugebauer. *The Exact Sciences in the Antiquity*. Dover Publications Inc. New York.

Isaac Newton. *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis*. ETH-Bibliothek Zürich, Shelf Mark: Rar 1909.

Isaac Newton. *Tratado de la cuadratura de las curvas, edición facsimilar de 1723. Traducción de Angelo Altieri Megale.* Universidad Autónoma de Puebla, 1995.

Percy T. Nunn. *The Arithmetic of infinities. A School Introduction to the Integral Calculus*. The Mathematical Gazette, Dec., 1910, Vol. 5, No. 89 (Dec., 1910), pp. 345-356, a.

Percy T. Nunn. *The Arithmetic of infinities. A School Introduction to the Integral Calculus*. The Mathematical Gazette, Jan., 1911, Vol. 94, No. 531 (Nov., 2010), pp. 430-437, b.

Thomas J. Osler. *The tables of John Wallis and the discovery of his product for π*. The Mathematical Gazette, Nov., 2010, Vol. 5, No. 90 (Jan., 1911), pp. 377-386.

Claudii Ptolemaei. *Syntaxis Mathematica edidit J. L. Heiberg*. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri, 1898.

Claudius Ptolemaeus. *Almagestu[m] Cl. Ptolemei Pheludiensis Alexandrini Astronomo[rum] principis, Venetiae, 1515*. Deutsches Museum, München Shelf Mark: 3000/1946 B 16 Persistent Link: http://dx.doi.org/10.5079/dmm-25, 1515.

Eleanor Robson. *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322.* Historia Mathematica 28 (2001), 167–206 doi:10.1006/hmat.2001.2317.

Eleanor Robson. *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*. Historia Mathematica 28 (2001), 167–206, 2001.

Daniel Shechtman. *Quasi-periodic crystals-the long road from discovery to acceptance*. Rambam Maimonides Medical Journal, 30 Jan 2013, 4(1):e0002.

John P. Britton Christine Proust Steve Shnider. *Plimpton 322: a review and a different perspective*. Arch. Hist. Exact Sci. (2011) 65:519–566 DOI 10.1007/s00407-011-0083-4.

J. Stedall. *The Discovery of Wonders: Reading Between the Lines of John Wallis's Arithmetica infinitorum*. Archive for History of Exact Sciences, November 2001, Vol. 56, No. 1 (November 2001), pp. 1-28.

Brook Taylor. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londini : Typis Pearsonianis prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Coemeterio Paulino, 1715.

Ivor Thomas. *Greek Mathematical Works, Aristarchus to Pappus*. Harvard University Press, Cambridge Massachusetts, London, England, 2005.

Johan Wallis. *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata, (1656)*.

Arthur T. Winfree. *The prehistory of the Belousov-Zhabotinsky oscillator*. Journal of Chemical Education, 61(8), 661.

O. Neugebauer y A. Sachs. *Mathematical cuneiform texts*. New Haven, Conn., Pub. jointly by the American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945.

Paolo Mancosu y Ezio Vailati. *Torricelli's Infinitely Long Solid and Its Philosophical Reception in the Seventeenth Century.* Isis, 82(1), 50–70., 1991.

Daniel F. Mansfeld y N. J. Wildberg. *Plimpton 322 is Babylonian exact trigonometry*. Historia Mathematica 44 (2017) 395-419 Sciendirect Elsevier, 2017.

Kelly W. G. y Peterson A. C. *Difference Equations*. Academic Press 1991.

Derek Walvoord y Roger Easton. *Digital Transcription of the Archimedes Palimpsest*. IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE [100] JULY 2008, 2008.

Jonathan M. Borwein David H. Bailey y Roland Girgensohn. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century and Experiments in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. Zentrum Mathematik, Technische Universit¨at M¨unchen, 2003.

Stefan Zieme. *Gerard of Cremona's Latin translation of the Almagest and the revision of tables*. Journal for the History of Astronomy 2023, Vol. 54(1) 3– 33, 2023.