



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Libro de texto

A photograph of a hand-shaped sculpture made of many small, colorful beads in shades of purple, orange, and yellow. The sculpture is positioned in the center of the cover, with its fingers spread. The background is a blurred outdoor scene with greenery and a building.

Indagaciones sobre el calentamiento y el transporte de especies químicas

Alberto Soria López

Indagaciones sobre el calentamiento y el transporte de especies químicas

*ensayos de análisis y síntesis para la integración
de conocimientos teóricos y experimentales de los
fenómenos de transporte*

Alberto Soria López



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Rector General

Dra. Norma Rondero López

Secretaria General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dra. Verónica Medina Bañuelos

Rectora de Unidad

Dr. Javier Rodríguez Lagunas

Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Indagaciones sobre el calentamiento y el transporte de especies químicas. Ensayos de análisis y síntesis para la integración de conocimientos teóricos y experimentales de los fenómenos de transporte

Primera edición: 2024

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, Núm. 186, Col. Leyes de Reforma 1 A Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, Ciudad de México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3482-8

Dedico este trabajo a mi compañera de vida

Sandra Araceli

*Su hermoso canto:
un dorado pájaro cascabel,
lo elevan muy hermoso.
Están en un cercado de flores.
Sobre las ramas floridas cantan.
¿Eres tú acaso, un ave preciosa del Dador de la vida?
¿Acaso tú al dios has hablado?
Tan pronto como vieron la aurora,
se han puesto a cantar.*

Ayocuan Cuetzpaltzin¹.

¹En *Quince poetas del mundo náhuatl*, con adaptación libre al español hablado en México.

Índice general

1	La termodinámica y los fenómenos de transporte	19
1.1	Significados y alcances	19
1.1.1	Termodinámica	19
1.1.2	Termostática o termodinámica del equilibrio	20
1.1.3	Termodinámica de los procesos irreversibles	21
1.1.4	Fenómenos de transporte	22
1.2	Sistemas	24
1.2.1	Sistemas homogéneos y sistemas heterogéneos	24
1.2.2	Sistemas abiertos o eulerianos y cerrados o lagrangianos	24
1.2.3	Tamaño del sistema	26
1.2.4	Cuerpos termodinámicos y cuerpos puntuales	27
1.2.5	Hipótesis del medio continuo	27
1.2.6	Hipótesis del equilibrio local	28
1.3	Propiedades termomecánicas	28
1.3.1	Propiedades extensivas, intensivas, específicas y densidades	28
1.3.2	Energía y masa	29
1.3.3	Temperatura y energía	31
1.3.4	Energía interna y energía cinética	33
1.3.5	Presión termodinámica	33
1.4	Dos principios de la termodinámica	33
1.4.1	Primer principio de la termodinámica	34
1.4.2	Segundo principio de la termodinámica	35
1.5	Ecuaciones generales de cambio	36
1.5.1	Formas eulerianas de las ecuaciones locales de cambio	37
1.5.2	Formas lagrangianas de las ecuaciones locales de cambio	39

2	Procesos de calentamiento y de potencia mecánica	43
2.1	Procesos de calentamiento	44
2.2	Calentamiento por conducción	45
2.2.1	Cambios de la energía interna $\hat{U}$	46
2.2.2	Densidad de calentamiento	47
2.2.3	Coeficiente de conductividad térmica k	48
2.2.4	Comportamiento de la conductividad térmica k	48
2.3	Calentamiento con convección	49
2.3.1	Convección forzada en un tubo horizontal	50
2.3.2	Convección natural en un tubo vertical	51
2.3.3	Coeficientes de calentamiento por convección	53
2.3.4	Coeficientes h locales	55
2.3.5	Coeficientes h convencionales	55
2.3.6	Valores de los coeficientes de calentamiento	56
2.4	Calentamiento por radiación	56
2.4.1	Irradiación hacia una superficie desde los alrededores	57
2.4.2	Emisividad de un cuerpo negro	57
2.4.3	Ley de Kirchhoff	58
2.4.4	Coeficiente de calentamiento por radiación	59
2.5	Procesos de potencia mecánica	59
2.5.1	Trabajo efectuado por fuerzas de presión	59
2.5.2	Procesos de disipación de trabajo mecánico	60
2.5.3	Trabajo mecánico y disipación térmica	61
3	Procesos de transporte de fluidos multicomponentes	63
3.1	Los materiales multicomponentes	63
3.2	Balances de masa	63
3.2.1	Balances de masa de la especie química K -ésima	63
3.2.2	Balances de masa de la mezcla	64
3.2.3	Relaciones entre parámetros de la mezcla	64
3.3	Flujo medio y difusión de especies	65
3.3.1	Densidades de flujo o fluxes	65
3.3.2	Balances de masa con fluxes convectivos y difusivos	66
3.4	Relaciones de comportamiento para fluxes difusivos	67
3.4.1	Difusión fickeana	68
3.4.2	Difusión binaria como caso multicomponente	69
3.4.3	Difusión ternaria	69
3.5	Estimados de los coeficientes de difusión	70
3.5.1	Difusividades típicas y experimentales	70
3.5.2	Difusividades en gases	71
3.5.3	Difusividades en líquidos	72
3.6	Balances del ímpetu y la energía en cuerpos multicomponentes	72
3.6.1	Mezclas multicomponentes y cuerpos multicomponentes	72
3.6.2	Conservación de la masa y balances del ímpetu	73
3.6.3	Energía cinética y balances de energía de un cuerpo multicomponente	74
3.6.4	Generación de entropía de un cuerpo multicomponente	75

3.7	Transferencia interfacial alotérmica de especies químicas	77
3.7.1	Modelo analítico de la película estancada para transferencia de masa	77
3.7.2	Coeficiente de película de energía térmica	79
4	Etapas, fases y modelos de procesos de transporte	83
4.1	Procesos de transporte	83
4.2	Fase transitoria incipiente ($0 < t < \tau_T$)	85
4.2.1	Difusión de un soluto en un líquido en un tubo capilar	85
4.2.2	Difusión de energía térmica en una barra metálica	87
4.3	Etapas estacionaria ($t \gg \tau_T$)	89
4.3.1	Difusión de un soluto en un líquido en un tubo capilar	89
4.3.2	Difusión de energía térmica en una barra metálica	89
4.3.3	Solución	90
4.4	Etapas transitoria completa ($0 < t < \tau_T$)	90
4.4.1	Difusión de un soluto en un líquido en un tubo capilar	90
4.4.2	Difusión de energía térmica en una barra metálica	91
4.5	Tiempos característicos de los fenómenos de transporte	92
4.5.1	Extensión de la fase difusiva incipiente	92
4.5.2	Duración de la etapa transitoria	93
4.5.3	Duración del transitorio de la difusión térmica en una barra metálica	93
4.5.4	Duración del transitorio de la difusión en un tubo capilar de una membrana	94
4.6	Modelos para el aparato de difusión de un soluto A en fase líquida	95
4.6.1	Balance de masa del soluto A en el vaso	95
4.6.2	Concentración del soluto en el vaso durante la fase transitoria incipiente	96
4.6.3	Modelo cuasi-estacionario de la concentración del soluto en el vaso	97
4.7	Modelos para la difusión de vapores en el tubo de Stefan	98
4.7.1	Funcionamiento del tubo de Stefan	98
4.7.2	Balances del vapor A en un tubo de Stefan	98
5	Disolución de una esfera de sal soluble en agua	103
5.1	Observaciones experimentales y tiempos característicos	103
5.1.1	Descripción y rapidez de los fenómenos observados	103
5.1.2	Tiempos característicos y longitudes características	104
5.2	Adecuación al uso de coordenadas esféricas	106
5.3	Balances locales-instantáneos en coordenadas esféricas	107
5.4	Condiciones de salto, condiciones iniciales y a la frontera	108
5.5	Adimensionalización y simplificación	109
5.5.1	Normalización y cambio de coordenadas	110
5.5.2	Eliminación de otros términos pequeños	111
5.6	Modelo local y modelo interfacial de esfera decreciente	112
5.6.1	Asimilación del modelo a la teoría de la capa límite	112
5.6.2	Modelo local estacionario	112
5.6.3	Modelo interfacial de transferencia de masa	113
5.6.4	Modelo local cuasiestacionario	113

6	Evaporación isobárica de un líquido volátil	115
6.1	Planteamiento	115
6.1.1	Descripción del sistema físico	115
6.1.2	Diagrama y notación	115
6.1.3	Objetivos	116
6.1.4	Balance de masa	116
6.1.5	Balance de energía térmica	116
6.1.6	Expresiones para los flujos y la energía interna	117
6.2	Ecuaciones de gobierno para el líquido y su solución	118
6.2.1	El modelo transitorio	118
6.2.2	Solución del modelo	120
6.3	Uso del modelo para evaluar experimentos	121
6.3.1	Determinación de datos a medir y a estimar	121
6.3.2	Preparación de una hoja de datos	121
6.3.3	Gráficas experimentales de evolución de la masa y la temperatura	121
6.3.4	Estimaciones de las propiedades del sistema	121
6.3.5	Resultados teóricos para las variables dependientes	126
6.3.6	Comparaciones de la teoría con el experimento	128
6.4	Crítica a la teoría y a los experimentos	130
7	Secado de materiales sólidos porosos	133
7.1	Planteamiento	134
7.1.1	Definiciones y notación	134
7.1.2	Elaboración de una hoja de datos	135
7.1.3	Objetivos	135
7.1.4	Diagrama y términos a medir o estimar	135
7.2	El modelo cuasiestacionario	136
7.2.1	Balances integrales estacionarios sin muestra sólida	137
7.2.2	Balances integrales transitorios para el sólido	137
7.2.3	Balance de agua en el sólido poroso	138
7.2.4	Balance de energía térmica en el sólido poroso	138
7.2.5	Términos de acumulación	138
7.2.6	Términos de flujo	139
8	Intercambiadores de calor	141
8.1	Clasificación y notación	141
8.2	Análisis del intercambiador de calor usando la <i>DTML</i>	143
8.2.1	Balances térmicos integrales	143
8.2.2	Análisis diferencial con flujo en paralelo	143
8.2.3	Análisis diferencial con flujo a contracorriente	144
8.2.4	Flujo cruzado y pasos múltiples	145
8.3	Método de cálculo de Intercambiadores de Calor por <i>DTML</i>	146
8.4	Análisis de intercambiadores de calor por el método eficiencia-<i>NUT</i>	147
8.5	Método de cálculo de intercambiadores de calor por $\varepsilon - NUT$	148

9	Soluciones analíticas de modelos de transporte	151
9.1	Evaporación isobárica de un líquido volátil	151
9.1.1	Ecuaciones de balance y condiciones iniciales	151
9.1.2	Método de solución	152
9.1.3	Desarrollo	152
9.1.4	Solución	154
9.2	Difusión axial y contradifusión equimolar en un tubo capilar	155
9.2.1	Balance de masa del soluto A en un tubo capilar	155
9.2.2	Solución para la etapa transitoria incipiente en un tubo capilar	156
9.2.3	Solución para la etapa transitoria desarrollada en un tubo capilar	157
9.3	Transitorios de concentración en el vaso de una celda de difusión de líquidos	162
9.3.1	Para la fase transitoria incipiente	162
9.3.2	Para la etapa transitoria completa	162
9.4	Difusión térmica transitoria en una barra metálica	163
10	Celda de conducción térmica axial	167
10.1	Elementos de diseño del instrumento	167
10.2	Operación del instrumento	169
10.2.1	Descripción del instrumento	169
10.2.2	Procedimiento de operación	170
10.3	Principios físicos del funcionamiento	171
10.4	Algunos objetivos de las experiencias	171
11	Celda de conducción térmica radial en un disco	173
11.1	Elementos de diseño	173
11.2	Operación del instrumento	173
11.2.1	Descripción	173
11.3	Operación	174
11.4	Principios físicos del funcionamiento	175
11.5	Algunos objetivos de las experiencias	175
12	Celda de resistencias en serie	177
12.1	Descripción	177
12.2	Operación	178
12.3	Principios físicos del funcionamiento	178
12.4	Algunos objetivos de las experiencias	179
13	Aleta de enfriamiento	181
13.1	Descripción	181
13.2	Operación	182
13.3	Principios físicos del funcionamiento	182
13.4	Algunos objetivos de las experiencias	183

14	Aislamientos de tuberías	185
14.1	Descripción	185
14.2	Operación	186
14.3	Principios físicos del funcionamiento	186
14.4	Algunos objetivos de las experiencias	187
15	Transitorios de temperatura en sólidos cuasiesféricos	189
15.1	Descripción	189
15.2	Operación	190
15.3	Principios físicos del funcionamiento	191
15.4	Algunos objetivos de las experiencias	191
16	Intercambiadores de calor	193
16.1	Descripción	193
16.2	Operación	193
16.3	Principios físicos del funcionamiento	195
16.4	Algunos objetivos de las experiencias	196
17	Celda de Stefan para la difusión de un vapor en aire	197
17.1	Descripción	197
17.2	Operación	197
17.3	Principios físicos del funcionamiento	198
17.4	Algunos objetivos de las experiencias	199
18	Celda de difusión de un soluto en fase líquida	201
18.1	Descripción	201
18.2	Operación	201
18.3	Principios físicos del funcionamiento	204
18.4	Algunos objetivos de las experiencias	204
19	Disolución de un sólido esférico	207
19.1	Descripción	207
19.2	Operación	208
19.3	Principios físicos del funcionamiento	208
19.4	Algunos objetivos de las experiencias	208
20	Torre de absorción empacada	211
20.1	Descripción	211
20.2	Operación	211
20.3	Principios físicos del funcionamiento	211
20.4	Algunos objetivos de las experiencias	213

21	Evaporación isobárica	215
21.1	Descripción	215
21.2	Operación	215
21.3	Principios físicos del funcionamiento	217
21.4	Algunos objetivos de las experiencias	218
22	Secador de charolas con aire caliente	219
22.1	Descripción	219
22.2	Operación	220
22.3	Principios físicos del funcionamiento	221
22.4	Algunos objetivos de la experiencia	221
23	Métodos	223

Prefacio

No piensa el autor haber alcanzado una total comprensión de su asunto, sabe que es un intento por conocer: hace entrega de un ensayo.

En términos de la definición a medias que de esa voz incluye el Diccionario de la Academia, los vestigios descubiertos se comunican por medio de un “escrito, generalmente breve, sin el aparato ni la extensión que requiere un tratado completo sobre la misma materia”.

Añadiré tan sólo, respecto de los ensayos que aquí interesan que, si por “aparato” se entiende “pompa u ostentación”, la definición es buena; no así si el sentido de la expresión implicara carencia de pruebas o “aparato crítico”.

Miguel León-Portilla (1980).²

Este ensayo es el resultado de una etapa de la búsqueda. En él encontrará el lector, como reflejos, buena parte de las peripecias de mi viaje y de la heterogeneidad de los caminos. Habrá capítulos suaves, tendidos sobre el llano; otros habrá sinuosos; otros parecerán distanciarse de la meta. Pero todos, pese a frecuentes apariencias, se dirigen al esclarecimiento de un pensamiento... El lector tendrá oportunidad de comprobar –como en las novelas policiacas– que los cabos pueden atarse. Y –a diferencia de las novelas policiacas– que se atan no sólo al final del libro.

Alfredo López Austin (2020).

El señalamiento que hace Miguel León Portilla representa con claridad la intención del escrito que tienes ante tus ojos. He pensado que es importante incluir el subtítulo: "*ensayos de análisis y síntesis para la integración de conocimientos teóricos y experimentales de los fenómenos de transporte*", porque efectivamente, estos ensayos no son un tratado completo sino rasgos o facetas

²Las referencias se encuentran en la bibliografía. Cuando queremos dirigir la atención a un lugar o aspecto específico de la referencia, lo hacemos mediante una nota al pie, donde aclaramos el punto y mencionamos las páginas. En este caso es la introducción de la referencia, pp. 8-9.

de algunas maneras de aproximarnos a nuestros materiales de estudio. Maneras que quieren ser tan antiguas como la curiosidad, la percepción, el ingenio y la respuesta creativa, de las cuales somos capaces ante las necesidades de nuestras comunidades. Estas cualidades han prevalecido en el conocimiento transformador que ha surgido en todas las civilizaciones del mundo. Maneras de conocer que no debemos dejar perder, ni en nuestra formación ni en nuestro ejercicio profesional, en aras de un productivismo explotador que no se interesa más que en la acumulación de ganancias y que, para lograrlas, expolia sin límites nuestras vidas y las de quienes generan la riqueza con sus manos, con sus mentes y con sus corazones.

Los capítulos de este escrito se pueden considerar ensayos, dentro del marco de la organización del pensamiento. Mencionarlo es una manera de señalar la heterogeneidad de sus caminos, como nota Alfredo López Austin, tanto en su amplitud como en sus limitaciones, que se hacen presentes al conocer la primera. Las bases sobre las que se han edificado las ciencias en la civilización occidental son también los cimientos del conocimiento en todas las civilizaciones, cada una con su diversidad de culturas, de sus maneras de atar cabos a cada paso del camino.

*Xitlacachihuan*³, "*hagámonos humanos, juntos*", bien podría ser reconocido como el principio que sostiene toda acción creadora de los seres humanos; que sostiene no sólo las ciencias, también las tecnologías, la filosofía y las artes, *in xochitl in cuicatl*⁴. Las segundas, las limitaciones de nuestro conocimiento científico occidental, así como sus potencialidades, están asociadas a la metodología de parcializar y dividir, separando los sujetos de los objetos y unos objetos de otros, así como las aproximaciones y enfoques que, frecuentemente y por descuido, se toman por absolutos, ignorando la multiplicidad de posibilidades. La insuficiencia de estas parcialidades simplificadoras y sobre todo la pretensión de algunos de confundirlas con criterios absolutos de verdad científica, ha generado ya, como respuestas, varias propuestas desde la teoría de la complejidad⁵ y desde la teoría general de los sistemas,⁶ que son notables esfuerzos por abrir los cauces de las ciencias occidentales desde su misma plataforma epistemológica, entendida en el sentido más amplio.

Partiendo de la propuesta *xitlacachihuan* como el fundamento de nuestro método de trabajo para el estudio de estos ensayos, conviene puntualizar que nuestro método consiste en profundizar nuestra atención, en ampliar nuestra percepción, en agudizar nuestra observación y en comunicar, con precisión y detalle, nuestra experiencia, haciendo énfasis en los diálogos enriquecedores de la correspondencia entre los conceptos, los signos que los representan y las múltiples relaciones que los conectan desde nuestras percepciones. Estos son formas concretas de transformar la relación directa entre nosotros y entre nosotros y nuestros objetos de trabajo, que es importante tener presentes y promover para la comprensión y transformación de los sujetos de aprendizaje, en la misma medida que los objetos aprehendidos.

Hay excelentes libros de texto sobre los Fenómenos de Transporte y cada estudiante tiene sus preferencias. Por ejemplo, a mí me gusta mucho el tratamiento de Bird, Stewart y Lightfoot, cuya segunda edición apareció en inglés el año 2002 y en español los años 2006 y 2012, después de una primera edición en inglés, de 1960 que a muchos nos enseñó a pensar en los fundamentos de la ingeniería química de una manera ordenada y con claridad creciente, que no ha dejado de mover y ampliar mi consciencia. Es por ello que tomo este libro como referencia fundamental, me adapto en

³Federico Navarrete (2019), p. 61, refiere que "*En la actualidad, los nahuas de la sierra norte de Puebla brindan a la salud de sus comensales y amigos con la expresión xitlacachihuan, que significa, a la letra, "hagámonos humanos (juntos)". Este brindis indica, en primer lugar, que la humanidad siempre es una relación, es decir, que los seres humanos sólo se hacen tales interactuando entre sí y de manera constante y repetida a lo largo de sus vidas. Por eso, ser humano no es algo que esté dado por el nacimiento, ni que permanezca fijo hasta la muerte, sino que es el producto de la acción continua y deliberada de las personas.*"

⁴*Flor y canto* son los símbolos de la belleza, el arte y la poesía nahuatlacas. También es el nombre con el cual reconocemos un coloquio que reunió a los sabios, filósofos y poetas del Anáhuac, convocado por el señor Tecayehuatzin en Huexotzinco, Puebla, a principios del Siglo XVI, como es relatado por M. León Portilla (1961), pp. 126-137.

⁵Muy notablemente los estudios del filósofo Edgar Morin, (1990).

⁶Como la propuesta por Ludwig Berthalanffy (1986) desde el estudio de los sistemas biológicos.

lo posible a sus símbolos y notaciones y hago las aclaraciones pertinentes cuando me aparto de ellas en alguna consideración o particularidad. También me refiero a este texto como "*el libro de Bird*", o "*el Bird*", sencillamente, para dar agilidad a su frecuente mención como referencia. La brevedad ganada no debe confundirse con demérito para los dos coautores del libro, cuya autoría reconocemos plenamente, sin sentirnos obligados por ello, a hacerlo explícitamente cada vez que se menciona esta referencia.

Entonces, los ensayos que encuentras en este escrito no pretenden sustituir tus libros de texto sobre termodinámica y fenómenos de transporte. Lo que deseo es que tus lecturas sobre estas materias, en combinación con la realización de los experimentos propuestos, la reflexión compartida con tu comunidad de aprendizaje⁷, de los posibles significados de las observaciones y mediciones y la resolución de los ejercicios, sean instrumentos de trabajo que te ayuden a tener una mejor comprensión del comportamiento de los materiales que manejamos en la ingeniería, en los procesos donde ocurren flujos con calentamiento y transferencia de masa de especies químicas, para entender lo que pasa y adquirir las capacidades para generar, modificar y adaptar las tecnologías de la producción, apoyándonos en un mejor conocimiento de los materiales y de sus comportamientos. Lo que deseo es ofrecerte elementos de reflexión e indagación, para que integres tus conocimientos de los diversos temas de calentamiento y transferencia de masa, con la ayuda de la experiencia que las operaciones de laboratorio te pueden brindar. Estas experiencias, bien aprovechadas, tienen el poder de facilitar la comprensión de algunos conceptos medianamente aprehendidos, de incentivar tu inventiva para la modificación del aparato de trabajo y el desarrollo de propuestas para mejorar los procesos, a través de saber apreciar la importancia relativa de los fenómenos que se llevan a cabo durante la realización de las experiencias de laboratorio, para movilizar una adecuada representación de lo que es importante, para que en las formulaciones matemáticas a elaborar, o ya elaboradas, resalten los rasgos más sobresalientes de los comportamientos observados. Por lo tanto, los libros de texto preferidos por estudiantes y profesores son bienvenidos. Por las razones que he mencionado en el párrafo anterior, tomo del libro de Bird su conceptualización y en buena medida su notación, complementándola en los temas que no son tratados allí, así como casi la totalidad de la denominación de los términos y conceptos, con la excepción notable de los conceptos de *nivel macroscópico* y *nivel microscópico*, usados por Bird para referirse a lo que he preferido llamar **nivel integrado** y **nivel local**, respectivamente⁸. Considero que este cambio es conveniente porque, frecuentemente, es necesario elaborar un lenguaje común con profesionistas de las disciplinas de la física y de la química⁹, para quienes la escala microscópica es usualmente entendida como la que Bird y nosotros llamamos la *escala molecular*, la cual determina el **nivel molecular** con longitudes del orden del tamaño de las moléculas o de la trayectoria libre media de las moléculas en una fase gaseosa. Además, se refieren usualmente al nivel macroscópico como a lo que es propio de nuestra percepción cotidiana, es decir, como la escala que observamos en el **nivel local**, que incluye un gran número de moléculas indistinguibles, cuyo referente es el número de Avogadro, es decir, el número de moléculas que contiene un gramo-mol del material. En la escala local se determinan los parámetros de estado que se usan en la termodinámica, en los fenómenos de transporte y en la electroquímica, que son disciplinas que tratan los materiales como los percibimos directamente, en escalas accesibles a nuestros sentidos como **materiales continuos**, con propiedades físicas y químicas cuya determinación, haciendo uso de instrumentos que detectan cambios en la misma escala local, que observamos directamente, como los termómetros, los manómetros, las balanzas, los multímetros y otros aparatos de uso cotidiano. Finalmente, los parámetros asociados al funcionamiento de las piezas completas de equipo en los laboratorios o en plantas industriales,

⁷que ojalá tuvieras la fortuna de formar con colegas de diversos niveles de la carrera, incluyendo profesores.

⁸Véase el diagrama en la tapa de la segunda edición (2012) de su libro, así como su figura 0.2-1.

⁹como me ocurrió en mis primeras discusiones con mi colega y amiga Elizabeth Salinas, a quien agradezco su paciencia en nuestras frecuentes discusiones, donde aclaré el significado de los términos *macroscópico* y *microscópico* entre los profesionales de la física.

que Bird refiere como escala macroscópica, requieren generalmente de la integración de nuestras ecuaciones de trabajo desarrolladas en el nivel local, razón por la cual preferimos llamarla escala integrada y sus descripciones como representativas del **nivel integrado**.

Nuestros ensayos están divididos en dos partes. Llamamos *Contenidos* a la primera parte. Del conjunto de ensayos que la componen, unos son analíticos, porque presentan los detalles de algún tema o método y otros son integradores, porque relacionan diversos puntos de vista que son usualmente sostenidos desde diversas disciplinas como las matemáticas, la termodinámica del equilibrio, los procesos de transporte, la estimación de propiedades y las etapas de los procesos que corresponden a distintas representaciones mediante modelos adecuados, incluso aspectos indirectamente relacionados con los currícula de las licenciaturas, como la observación y su importancia en la comprensión de los fenómenos de interés. La segunda parte son los *Instrumentos*, que consiste de un catálogo donde se ha sistematizado la descripción de un conjunto específico de instrumentos de laboratorio, con los que es posible realizar experimentos con diversos objetivos. El catálogo es una muestra de los instrumentos, a los cuales estudiantes y maestros tenemos acceso en la UAM Iztapalapa, o en otras instituciones educativas, aunque puede haber diferencias para cada institución. Cada capítulo de esta segunda parte trata de un instrumento que se describe, haciendo notar algunos aspectos importantes. Luego se puntualiza una secuencia de acciones, referidas como "operación", que se realizan normalmente para la operación estandarizada del instrumento o equipo y a continuación, en la sección de los "principios físicos del funcionamiento" se discuten las relaciones entre sus elementos, que determinan las bases de su funcionamiento. Se sugieren algunas ideas para desarrollar sus ecuaciones de operación o diseño, que llamamos "ecuaciones de trabajo", las cuales constituyen una parte fundamental del método de trabajo que se pretende llevar a cabo para favorecer el aprendizaje significativo. La última sección de cada capítulo que corresponde a un instrumento, sugiere algunos posibles objetivos a cumplir con el uso del instrumento. Estos objetivos solo pretenden ser una guía para detonar la imaginación de estudiantes y profesores para proponerse similares o alternos objetivos que guíen sus indagaciones en el conocimiento del calentamiento y la transferencia de especies químicas, usando instrumentos muy sencillos y principios teóricos cada vez mejor entendidos y aplicados.

La propuesta original de este texto tenía una tercera parte, llamada "Métodos", la cual incorporaba cuatro capítulos también presentes en el texto llamado "*Indagaciones sobre mecánica de fluidos*", con mínimas diferencias. El editor nos ha recomendado no repetir dichos materiales en este texto, ya que están disponibles en el citado. Estamos de acuerdo, pues los métodos de aprendizaje que se promueven en ambos textos son, en realidad, el mismo método que partiendo de la observación atenta, ligada a nuestras experiencias cotidianas, elabora los significados de las observaciones del laboratorio a partir de la intuición y el desarrollo de nuestros conocimientos teóricos. Es decir, son aquellos métodos que hemos ensayado que nos conducen al aprendizaje significativo. Por esto es importante tener presentes los capítulos de la tercera parte del texto mencionado, que forma, con el presente, una manera de aprehender los fenómenos de transporte. Como un recordatorio de la importancia de los métodos de trabajo, hemos incorporado, con el título de esta tercera parte, una breve relación de la importancia de los métodos de trabajo que nos han dado buenos resultados y referimos como *hagámonos humanos, juntos*. Estos son cuatro capítulos, el primero de dichos capítulos es la exposición de elementos básicos del aprendizaje significativo, su naturaleza dialéctica y las capacidades a desarrollar para que el aprendizaje sea significativo, así como los recursos de la elaboración de mapas conceptuales y diagramas de flujo. El siguiente capítulo trata de la naturaleza estadística de las determinaciones experimentales y su comparación con las predicciones teóricas, que conduce a decidir si el modelo usado puede representar, y en qué medida, los resultados de los experimentos realizados. Los dos últimos capítulos son instructivos para realizar dos escritos con relación a cada una de las experiencias, el primero de ellos refiere cuáles son los contenidos de un proyecto experimental con fundamentos teóricos y el segundo los

contenidos de un reporte con trabajo experimental y teórico.

La realización del documento de *proyecto experimental* indica que el equipo de estudiantes se ha preparado para realizar una experiencia provechosa. El elemento que concentra el trabajo de esta etapa de reflexión, discusión y desarrollo teórico es la *hoja de datos de laboratorio* en la cual se representan las *ecuaciones de trabajo*, que son la forma específica que toma el modelo elaborado para cumplir con los objetivos propuestos para la experiencia. Del análisis de dichas ecuaciones de trabajo se determinan los parámetros que se deben medir y los que se deben buscar en las referencias, así como las variables dependientes e independientes que se deben medir en ciertos intervalos, cuyas magnitudes deben proponerse, haciendo una tabla con sus encabezados para capturar en ella la información del experimento.

El segundo documento relativo a una experiencia es el *reporte experimental*, que se elabora una vez que la experiencia ha sido realizada, cuando los resultados de las mediciones han sido evaluados y comparados con las propuestas teóricas. Lo fundamental del reporte es profundizar en dicha comparación para sustentar las conclusiones de la experiencia. Por lo tanto, vemos que la tercera parte del texto, los "métodos", es muy importante y se encuentra ya en el libro de texto *Indagaciones sobre mecánica de fluidos*, con el que inicia un método de aprendizaje al cual referimos al estudiantado, para apuntalar su aprendizaje significativo.

Muchas personas han contribuido a la realización de este trabajo. Agradezco a los estudiantes de las licenciaturas de ingeniería química y de ingeniería en energía, su entusiasmo y actitud, sus preguntas y cuestionamientos; a mis colegas su participación en actividades experimentales que ha generado y mantenido la infraestructura de los laboratorios. Agradezco especialmente a Sergio Hernández, a Juan Cabello, a Febe Arzola, a Fernando Salazar y más recientemente a Evaristo Díaz, su dedicación a la tarea de cuidar y mejorar los equipos y materiales de nuestros laboratorios de docencia. Agradezco también a Francisco Valdés, a Elizabeth Salinas y a Guadalupe Hernández, así como a Juan Manuel Zamora y Alejandro Torres, sus propias versiones de las prácticas de laboratorio, que de alguna manera han inspirado la elaboración de este escrito. Un especial recuerdo para nuestro compañero Eduardo Rincón Gallardo, con quien elaboramos el primer manual de prácticas de transferencia de calor en 1983. A todos ellos un reconocimiento por su empeño en aportar su granito de arena a la elaboración de las prácticas de los laboratorios de docencia, que tan escasa atención había recibido por los colegas y por las autoridades. Sin embargo eso ha cambiado y existe un interés creciente por acompañar la elaboración teórica con experiencias de laboratorio; agradezco también el importante apoyo institucional que nuestros colegas Richard Ruíz, Alberto Ochoa y Rodolfo Vázquez, han proporcionado a la infraestructura de los laboratorios de docencia en los últimos tiempos.

Los ensayos que aquí entrego son solamente un peldaño del método de enseñanza-aprendizaje propio-nuestro, que espero se consolide, con el trabajo continuo e imaginativo de profesores, técnicos de laboratorio, ayudantes y estudiantes, para beneficio de las futuras generaciones de estudiantes de nuestras universidades, quienes podrán seguir elaborando epistemologías propias-nuestras que aprovechen lo mejor de las epistemologías occidentales y que vayan recuperando, desde nuestra memoria genética colectiva, los modos de conocimiento propios de nuestra civilización del Anáhuac¹⁰.

*San Baltazar Tetela, 16 de febrero de 2024,
vigésimo octavo aniversario de la firma de los Acuerdos de San Andrés Larrainzar,
que siguen esperando su cumplimiento por parte de los gobiernos mexicanos.*

¹⁰Anáhuac es el nombre propio de nuestro continente, que no tiene por qué cambiarlo para honrar a un cartógrafo florentino quien, además, no hizo el primer mapa de nuestra tierra, pues hay mapas mucho más antiguos, elaborados por ejemplo por navegantes chinos y quizás por nuestros mismos sabios anahuacas. Anáhuac significa *la tierra que se extiende entre dos grandes aguas*, es decir, entre los dos océanos, el Pacífico y el Atlántico.

1. La termodinámica y los fenómenos de transporte

1.1 Significados y alcances

1.1.1 Termodinámica

La palabra “termodinámica” surge de combinar dos palabras griegas, $\theta\acute{\epsilon}\rho\mu\eta$ (thérmi) que significa calor, ardor y $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\sigma$ (dínamis): fuerza, poder, capacidad. Etimológicamente, la termodinámica trata entonces del poder o la fuerza del calor. Los diccionarios usuales definen a medias la **termodinámica**, como la *parte de la física en la que se estudian las relaciones entre el calor y las restantes formas de la energía*. Se refieren al calor, por consiguiente, como “**una forma de la energía**”, sin embargo, hay otra concepción preferida en muchos textos clásicos de termodinámica, de acuerdo con la cual¹

"hay que insistir en que el calor y el trabajo no son formas de energía, sino modos de intercambiarla y que la energía interna, como función de estado, es una propiedad intrínseca del sistema al igual que cualquiera otro de sus atributos. Por el contrario, el calor y el trabajo son conceptos asociados a la evolución del sistema, de ahí que pueda decirse que cada uno de ellos es una función de proceso y no una propiedad del sistema".

Algunos libros se refieren al calor como **energía térmica en movimiento**, es decir, la transmisión o transferencia de energía, asociada tanto al **cambio de la temperatura** de los materiales o cuerpos, como al **cambio de la estructura física** de los materiales, que observamos como sus **cambios de fase**. En este sentido, decir que hay “transferencia de calor” sería redundante, porque si el calor es el flujo de energía térmica, al decir transferencia de calor estaríamos diciendo “*transferencia del flujo de energía térmica*”, pero tanto fluir como transferir indican el movimiento de la energía térmica. Sin embargo, entendemos claramente el nombre de “transferencia de calor” si consideramos el término calor como sinónimo de **energía térmica**. Ambos conceptos de la palabra *calor* deberían estar en la mente atenta de quien estudia sus temas.

¹Manuel Criado-Sancho y José Casas-Vázquez (2004), p. 40.

La termodinámica estudia dos grandes temas principales: el primero de estos temas es el de los estados de equilibrio; el segundo es el de los procesos que transcurren entre dos estados de equilibrio.

1.1.2 Termostática o termodinámica del equilibrio

Las propiedades termodinámicas de un sistema son, en general, **variables termodinámicas** tales como la temperatura, la presión, los potenciales químicos, la energía interna, el volumen y los moles de las especies químicas, que evolucionan de tal manera que vienen a quedar finalmente determinadas por factores intrínsecos y no por influencias externas aplicadas previamente. Los valores finales que alcanzan las variables termodinámicas denotan los estados de equilibrio del sistema, los cuales son independientes del tiempo, es decir que

un estado de equilibrio es el conjunto completo de valores de las variables termodinámicas que se alcanza en el equilibrio, es decir, cuando el valor de cada una de estas variables está determinado solamente por relaciones intrínsecas al sistema.

El caso más frecuente de un sistema en equilibrio es, entonces, el de los sistemas cerrados y adiabáticos, ya que no interactúan con los alrededores.

No todas las variables termodinámicas son independientes entre sí, pero existe un subconjunto de ellas, conocido como parámetros de estado, que es suficiente para determinar unívocamente cada estado de equilibrio del sistema. Podemos entonces decir que

los parámetros de estado son subconjuntos de variables termodinámicas independientes, que son necesarias y suficientes para determinar unívocamente los estados de equilibrio del sistema.

El número de variables termodinámicas independientes, que es necesario conocer para determinar un estado de equilibrio, equivale al **número de grados de libertad**, L , del sistema, dado por la relación:

$$L = C + 2 - F, \quad (1.1.1)$$

donde C es el número de componentes o especies químicas del sistema y F es el número de fases presentes en el sistema.

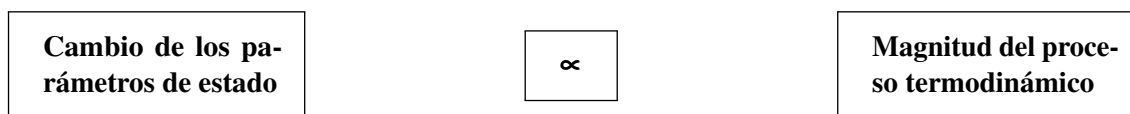
Las **ecuaciones de estado** son relaciones generales entre los parámetros de estado, que **existen en el equilibrio**. Un estado de equilibrio sólo puede cambiar si cambia el valor de alguno de sus parámetros de estado. Para que esto ocurra es necesario que el sistema se vea afectado por algún otro sistema (los alrededores), es decir, que se lleve a cabo algún **proceso** de interacción, con el consecuente intercambio de energía y algunas veces de masa, entre ambos sistemas.

Un proceso termodinámico es la interacción de un sistema con sus alrededores o la realización de un conjunto de interacciones del sistema con sus alrededores, cuyo resultado final es un nuevo estado de equilibrio del sistema.

Una vez que se desencadena un proceso de cambio, tenderá a desenvolverse hasta llevar al sistema a nuevas condiciones de equilibrio, es decir, a un nuevo conjunto de valores de los parámetros de estado, los cuales quedarán fijos en el nuevo estado de equilibrio, el cual corresponde a un nuevo contenido de energía y en algunos casos, también de masa.

La **termostática estudia las proporciones de los cambios** de los valores de los parámetros de estado con respecto a la extensión de los procesos inducidos al sistema. Existe una proporcionalidad

entre ambos, tal que:



Los procesos termodinámicos consisten en **realizar trabajo** sobre el sistema o desde el sistema y en **suministrar (o sustraer) calor al (o del) sistema**.

Un proceso se considera reversible cuando al realizar el proceso inverso, los parámetros de estado vuelven a sus valores originales.

Cuando esto no ocurre, el proceso es **irreversible**. Teóricamente,

un proceso cuasiestático es una sucesión ordenada y densa de estados de equilibrio,

es decir que los procesos cuasiestáticos son idealizaciones que no ocurren experimentalmente²; cualquier curva trazada sobre una hipersuperficie de máxima entropía representa un conjunto denso de estados de equilibrio. Sin embargo, en la práctica experimental es imposible desarrollar un proceso íntegramente en una hipersuperficie que represente los estados de equilibrio o de máxima entropía, puesto que todo cambio de estado, por pequeño que sea, requiere desplazar al sistema real fuera del equilibrio y esto lo lleva fuera de la hipersuperficie de equilibrio, hasta volver luego que restituye su equilibrio, generando así una sucesión temporal de estados de equilibrio y estados fuera del equilibrio. Por tal motivo, decimos que los procesos cuasiestáticos son idealizaciones. En cambio,

un proceso real es una sucesión *temporal* de estados de equilibrio y estados sin equilibrio.

Se favorece la reversibilidad del proceso si se efectúa muy lentamente en ambos sentidos, pues entonces, el proceso real se aproxima a un proceso cuasiestático y se puede representar aproximadamente por dicho proceso cuasiestático, siguiendo las **curvas de equilibrio de los parámetros de estado**.

1.1.3 Termodinámica de los procesos irreversibles

El segundo de los grandes temas de la termodinámica es la **termodinámica de los procesos irreversibles**, la cual estudia la **evolución del sistema termodinámico** desde un estado de equilibrio hasta otro, cuando se modifica alguno de los parámetros de estado detonando un proceso termodinámico que finaliza en un **nuevo estado de equilibrio**, aunque puede también llegar a un **estado estacionario sin equilibrio termodinámico**, característico de los sistemas abiertos.

La evolución de los parámetros de estado se puede asociar a **funciones exclusivas del tiempo**, para todo el sistema, es decir, verificar (o suponer) que no existe diferencia entre el valor del parámetro de estado que está cambiando, entre una parte y otra del sistema, ya sea porque el sistema es muy pequeño y sólo es posible medir el parámetro en un sitio que representa la mayor parte del sistema, o porque los cambios son tan lentos que no alcanzan a apreciarse diferencias en los valores de un parámetro, cuando se miden simultáneamente en dos lugares distintos del mismo sistema.

Si, a continuación, entendemos por **sistemas homogéneos** aquellos cuyos parámetros sólo pueden cambiar con el tiempo, pero **no con su configuración espacial**, es decir, hablamos de los sistemas que hemos llamado **uniformes**, podemos citar las palabras de Truesdell, en su primera conferencia³:

²Ver la discusión a detalle en Callen, sección 4-2.

³Clifford A. Truesdell (1973), p. 5.

“El dominio de aplicación prometida de la Termodinámica clásica reside en los sistemas homogéneos, cuales son los cuerpos que pueden describirse suficientemente por medio de funciones exclusivas del tiempo. Ejemplo típico lo constituye la mezcla de fluidos en un recipiente, los cuales estén suficientemente agitados para que no haya diferencias de temperatura, concentraciones u otros parámetros de un punto a otro en un instante dado cualquiera.”

El estudio de la termodinámica de los procesos irreversibles en sistemas uniformes o que no dependen específicamente de la posición, es un enfoque seguido por Prigogine (1967). En su estudio, las fuerzas generalizadas se mantienen como funciones exclusivas del tiempo y sólo se relacionan con los gradientes de los potenciales termodinámicos en una corta sección específica⁴. También Truesdell⁵ menciona que “La **Termodinámica clásica** sólo se refiere a un cuerpo completo $\mathfrak{B}$, no a un sistema infinito de subcuerpos, por lo que no será necesario escribir nunca más la $\mathfrak{B}$ como variable independiente”. Sin embargo, esto sólo vale para la termodinámica de los procesos uniformes, pues ya en su siguiente conferencia, sobre la disipación interna, Truesdell⁶ supone la existencia de campos vectoriales suficientemente suaves al interior del cuerpo $\mathfrak{B}$, lo cual le permite encontrar expresiones locales de las ecuaciones de balance.

En otro enfoque de la termodinámica de los procesos irreversibles, reportado por Gyarmaty (1970) y por de Groot y Mazur (1984), entre otros, la evolución de las variables termodinámicas no procede de manera uniforme en la totalidad del sistema, es decir que, además de su dependencia temporal, las variables termodinámicas son funciones de la posición, que cambian de valores localmente en su evolución hacia los estados de equilibrio termodinámico o en los estados estacionarios carentes de equilibrio, que pueden ocurrir en los sistemas abiertos.

El enfoque gira en torno a la rapidez de cambio de las derivadas temporales de los parámetros de estado intensivos (por unidad de masa), considerados variables de campo. Esto requiere ecuaciones de balance independientes para la densidad de masa $\rho(\mathbf{x}, t)$, la densidad del ímpetu $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, la densidad de energía interna $\rho(\mathbf{x}, t)\hat{U}(\mathbf{x}, t)$ y las concentraciones de las especies químicas de la mezcla, en unidades másicas $\rho_K(\mathbf{x}, t)$; $K = A, \dots, G$ o en unidades molares $c_K(\mathbf{x}, t)$; $K = A, \dots, G$, las cuales se obtienen de los balances locales de dichas cantidades y se sustituyen en la ecuación fundamental $U = U(S, V, \dots, n_K, \dots)$; para $K = A, \dots, G$, al aplicar el segundo principio de la termodinámica en la búsqueda de relaciones de comportamiento que lo satisfagan.

1.1.4 Fenómenos de transporte

La segunda parte del título de este capítulo, **los fenómenos de transporte**, se refiere al tratamiento unificado de la transferencia de momentum, energía y masa, como una de las ciencias fundamentales de las ingenierías. Aún cuando su estudio como partes de la física clásica data de varios siglos atrás, su tratamiento unificado se desarrolló en el Siglo XX, en concordancia con el desarrollo y la **sistematización de la ingeniería química** por su lado y de la **teoría clásica de los campos**, por el lado de la física clásica. Los fenómenos de transporte tuvieron su consolidación en 1960 con la primera edición del libro *Transport Phenomena* de Bird, Stewart y Lightfoot⁷ y simultáneamente, ese mismo año, con el capítulo *Theory of Classical Fields* de Truesdell y Toupin⁸. Dicho capítulo es un amplio tratado de la teoría fundamental de los fenómenos de transporte, donde las cantidades de los balances y sus flujos, sus fuentes y sumideros, se representan de manera general en una ecuación del transporte y se expresan en particular, para cada uno de los balances de

⁴Ilya Prigogine (1967), pp. 112-116.

⁵Truesdell, *op. cit.* p. 7.

⁶Truesdell, *op. cit.* pp. 28 y siguientes.

⁷Este libro de texto está en el origen del tratamiento sistemático de los fenómenos de transporte, le llamamos simplemente, *el Bird*. Su primera edición en inglés se publicó en 1960 y aquí nos referiremos a su segunda edición, que apareció en el año 2002 en inglés y en 2006 y 2012 en español.

⁸Un capítulo así llamado, del *Handbuch der Physik, III-I*, editado por S. Flügge, pp. 226-858.

masa, ímpetu, especies químicas y energía total, sustituyendo las cantidades del balance general por expresiones particulares. Sin embargo, un antecedente más temprano es el libro de Hirschfelder, Curtiss y Bird: *Molecular Theory of Gases and Liquids*, de 1954, en el cual la primera parte se dedica a la estimación de las propiedades de equilibrio por métodos de la física estadística. La segunda parte trata de manera similar con las propiedades fuera del equilibrio, incluyendo aplicaciones hidrodinámicas y la tercera parte trata de las fuerzas intermoleculares que dan lugar a la estimación de coeficientes de transporte, incluyendo campos externos magnéticos y eléctricos.

Dentro del marco de referencia de la mecánica estadística, Huang⁹ trata los fenómenos de transporte desde un punto de vista estadístico, para gases de baja densidad. En este sentido, un gas no está en equilibrio cuando su función de distribución no es la de Maxwell-Boltzmann. El caso más frecuente sucede cuando los parámetros termodinámicos, tales como la temperatura, la presión, la densidad y la velocidad promedio, no son constantes a través del gas, es decir, cuando al menos uno de los parámetros no es uniforme, o en las palabras de Truesdell, no es homogéneo. Para aproximarse al equilibrio, las no-uniformidades de los parámetros de estado son eliminadas mediante el transporte de masa, ímpetu y energía, de una región a otra del gas. El mecanismo de dichos transportes, en los gases a baja densidad, es el movimiento molecular entre sus colisiones moleculares, que ocurren en una distancia promedio conocida como la trayectoria libre media, que es la distancia promedio que recorre una molécula entre dos colisiones sucesivas. La consideración de la importancia del mecanismo molecular del transporte del ímpetu, la energía y la masa, para los gases a baja densidad, los líquidos y los sólidos, ha permitido la estimación de los parámetros de transporte por métodos de la teoría cinética y la mecánica estadística. Salvo este aspecto, los contenidos de los fenómenos de transporte y los contenidos de la termodinámica de los procesos irreversibles consideran los mismos procesos mediante los mismos fundamentos, como son los balances de masa, ímpetu, energía y masa de especies químicas, especialmente en los enfoques seguidos, por ejemplo, por el Bird y por Gyarmaty (1970). El énfasis que se pone en los aspectos tratados es, posiblemente, lo que diferencia a unos de la otra, pues

mientras la termodinámica de los procesos irreversibles estudia con detenimiento las relaciones entre las fuerzas y los flujos generalizados, que se aplican a los fluidos cerca del equilibrio, a partir de la formulación de la relación de Gibbs-Duhem, expresada como cambios temporales, los fenómenos de transporte enfatizan la representación de la evolución espacio-temporal de los balances de masa, ímpetu y energía y sus aplicaciones, cuando se prescriben las condiciones de frontera e iniciales que determinan la evolución del sistema específico, con relaciones de comportamiento bien determinadas.

Lo aquí dicho abre una rendija para otro gran tema, que es de carácter teórico-experimental y más general que sus aplicaciones a la termodinámica y los procesos de transporte, pues ¿en qué medida dos determinaciones de un parámetro se pueden considerar del mismo lapso? y ¿cuál es el valor de un parámetro medido a partir de la información que brinda determinado instrumento? Estas dos preguntas se relacionan, por supuesto con la **precisión y la sensibilidad de los instrumentos de medición**. También se pueden proponer otras preguntas significativas, relacionadas con el **diseño y la realización de los experimentos**, como ¿cuántas veces debo realizar un experimento para tener confianza en un resultado? y si de mis observaciones se desprende un conjunto de resultados ligeramente distintos o muy diferentes entre sí, ¿cuáles de ellos se pueden relacionar correctamente con las propuestas teóricas del tema? Estas y otras preguntas no son el objeto de muchos estudios teóricos, en tanto que muchas veces los trabajos experimentales se quedan cortos en la crítica a las teorías que pretenden comprobar. Nosotros intentaremos establecer puentes, estimaciones y discusiones entre los aspectos teóricos y experimentales de los trabajos de las ingenierías, extendiendo los métodos del capítulo 20: llamado *Modelos y experimentos*, del libro

⁹K. Huang, 1987, capítulo 5.

de texto "*Indagaciones Sobre Mecánica de Fluidos*", cuya tercera parte podemos considerar que es parte integral de nuestras "*Indagaciones Sobre el Calentamiento y el Transporte de Especies Químicas*", como hemos advertido en el prólogo del presente texto.

1.2 Sistemas

Tanto la termodinámica como los fenómenos de transporte son *ciencias fenomenológicas*, ciencias que se han construido directamente sobre los hechos experimentales, sintetizándolos en sus principios, es decir,

transformando los fenómenos en sus esencias y llevándolos a planos de su generalidad abstracta.

Acerca de la extensión y diversidad del significado de la voz *fenómeno* ver, por ejemplo, Abbagnano (2004). Central al análisis de los hechos experimentales es el concepto de **sistema**. Decimos que

un sistema es una porción del mundo físico (materia y radiación) que constituye el objeto de observación y estudio.

La idea de parte requiere determinar su *frontera, límite o contorno* que la distingue con respecto al resto de un **todo**. El sistema y su complemento, que podemos llamar *el medio*, constituyen ese "todo" de su clase, que podemos llamar *universo*, es decir,

el sistema y su medio constituyen un universo de su clase.

1.2.1 Sistemas homogéneos y sistemas heterogéneos

Un sistema puede componerse de varios **sub-sistemas**, ya sean idénticos, o semejantes pero con ciertas particularidades que pueden tomarse en cuenta, precisamente para identificarlos y estudiarlos como **componentes del sistema**. Por lo tanto, el sistema tiene una **composición** que lo determina como homogéneo o heterogéneo. Un *sistema es homogéneo* (del griego *ομγενής* (omoguenís)= de la misma familia, pariente) cuando **su composición y su estructura son uniformes**, es decir, de una sola forma. Así, los materiales que se presentan en una sola fase constituyen sistemas homogéneos, por ejemplo un grano de sal, el agua líquida o el aire, en tanto que los materiales formados por varias fases, en forma conjunta, forman *sistemas heterogéneos* cuando se considera su transporte combinado, por ejemplo el calentamiento desde el magma al agua de un campo geotérmico; el flujo de hielo y agua en un glaciar; un derrame de petróleo en la corriente oceánica o las cenizas de una erupción volcánica arrastradas en la atmósfera hacia ciudades y campos de cultivo.

1.2.2 Sistemas abiertos o eulerianos y cerrados o lagrangianos

La termodinámica elabora sus principios para sistemas abiertos o cerrados, en tanto que los fenómenos de transporte elaboran sus balances en sistemas eulerianos o lagrangianos. Existe una correspondencia uno-a-uno entre estos sistemas, es decir,

Termodinámica: aplicación de principios en sistemas abiertos o cerrados

Fenómenos de transporte: balances en sistemas eulerianos o lagrangianos

los sistemas eulerianos son abiertos y los sistemas lagrangianos son cerrados

Los **sistemas cerrados** de la termodinámica frecuentemente tienen por objeto determinar los valores de los parámetros de estado cuando están fijos al transcurrir el tiempo (*i.e.* están en equilibrio). Estos sistemas cerrados pueden ser **aislados**, cuando se impide el calentamiento o enfriamiento por la pared del sistema cerrado, recubriéndola con un material aislante térmico, que conceptualmente se considera un **aislante perfecto**, aunque en la práctica diaria haya algún flujo térmico a través de la pared. Los sistemas cerrados también pueden acondicionarse para ser **isotérmicos**, o aproximarse a ello, sumergiendo el sistema cerrado en un baño térmico a temperatura constante y mezclando el interior continuamente para uniformizar la temperatura.

Por otra parte, los **sistemas abiertos** de la termodinámica son flujos, con superficies de entradas y salidas atravesadas por los fluidos. Es posible operar un sistema abierto en condiciones transitorias, es decir, dependientes del tiempo, o en condiciones estacionarias, las cuales se alcanzan cuando, en cada punto fijo o posición del sistema, los valores de los parámetros o variables de estado no cambian con el tiempo, sin embargo, estos valores cambian con su posición en el espacio, con respecto a un origen fijo.

Pasar **de los parámetros de estado definidos y estudiados en un sistema cerrado en equilibrio termodinámico, al estudio de las variables termodinámicas como funciones de la posición y del tiempo**, requiere la elaboración de hipótesis, conceptos y relaciones causales en **diversos niveles de generalidad y de profundidad**. Un **primer nivel** es el establecido por la aplicación de los principios de la termodinámica de equilibrio (la termostática) a los sistemas abiertos, como lo hacen muchos libros de texto al definir la entalpía del sistema, asociando esta función a los flujos de entradas y salidas: **El sistema abierto se considera en equilibrio termodinámico**, en todo momento, de modo que no es dependiente del tiempo, es estacionario. Sus insumos de masa están en los flujos de entrada y sus insumos de energía, además de la energía en el flujo de entrada, incorporan el calentamiento y la potencia mecánica suministrada mediante alguna bomba o compresor. La suma de estos insumos equivalen a los flujos a la salida, tanto de masa como de energía.

Sin mayores consideraciones, los sistemas cerrados y los abiertos pueden incorporar algunos **transitorios, siempre bajo la consideración del equilibrio termodinámico**. Tal es el caso de un fluido en un recipiente cerrado, con un agitador que opera con una velocidad angular fija, incorporando trabajo mecánico al sistema, conforme transcurre el tiempo. Ver ejemplo desarrollado en Soria (2022). Otro ejemplo es un fluido que al pasar por un serpentín de calentamiento aumenta su temperatura de manera proporcional a la longitud del serpentín. En este caso, el tiempo y la longitud L del serpentín se correlacionan a través de la velocidad media de flujo $\langle v \rangle = L/\tau$, donde τ es el tiempo de residencia del fluido en la región de calentamiento del serpentín.

El siguiente nivel de generalidad y profundidad, del estudio de los parámetros de estado como funciones de la posición y del tiempo, conduce a la consideración de **dos hipótesis fundamentales: (1) la hipótesis del equilibrio local**, que consiste en proponer que, **instantáneamente**, cualquier posición del sistema es un punto de equilibrio termodinámico y **(2) la hipótesis de pequeñas desviaciones locales** con respecto al equilibrio, que consiste en proponer que los cambios locales de los potenciales termodinámicos se pueden expresar por una serie de Taylor truncada al término de primer orden. De la consideración de estas dos hipótesis se desprenden las teorías de la **termodinámica de los procesos irreversibles lineales**.

Por otra parte, los conceptos de los **sistemas lagrangianos y eulerianos, surgidos de la mecánica**, se han extendido a los fenómenos de transporte; no sólo al transporte del ímpetu o transporte de momentum lineal, sino también al transporte de momento angular, al transporte de energía cinética, al transporte de energía térmica, al transporte de masa de especies químicas en una mezcla homogénea, al transporte de cargas eléctricas y al transporte de entropía. Un **sistema lagrangiano** es un cuerpo físico, una porción de materia en la que ponemos nuestra atención para

su representación y estudio. Por su misma definición, en un sistema lagrangiano la masa del cuerpo permanece invariante ante todas las transformaciones que experimente el cuerpo. En cambio, un **sistema euleriano** es una porción de materia que **instantáneamente** ocupa una región fija del espacio. La materia contenida en el sistema euleriano no es constante, puesto que fluye libremente a través de la región fija definida como el lugar del sistema, concentrándose o diluyéndose en su interior.

Independientemente del sistema elegido, ya sea el euleriano o el lagrangiano, el propósito de los fenómenos de transporte es establecer las ecuaciones de variación o **ecuaciones de cambio locales e instantáneas**, es decir, para funciones de la posición y del tiempo, como $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$, $c_K(\mathbf{x}, t)$; ($K = A, \dots, G$), $\rho_{eM}(\mathbf{x}, t)$, $\rho_{eK}(\mathbf{x}, t)$; ($K = D, \dots, G$), donde las variables son la densidad, la velocidad de flujo, la temperatura, la concentración de la especie K -ésima, la densidad de carga eléctrica móvil total y las densidades de las cargas eléctricas de las especies iónicas, respectivamente. Por lo tanto, independientemente de que el sistema elegido haya sido el lagrangiano o el euleriano, es necesario **extraer de los principios de balance** aplicados al sistema elegido, **las mismas ecuaciones de cambio locales e instantáneas** y esto nos conduce a establecer la equivalencia entre los flujos convectivos en las entradas y las salidas del sistema euleriano y los movimientos del fluido en la frontera del sistema lagrangiano, es decir que

**flujos convectivos en entradas
y salidas del sistema euleriano**

equivalen a

**movimientos de la fronte-
ra del sistema lagrangiano**

Hay tres maneras de extraer las ecuaciones de cambio locales e instantáneas a partir de los balances realizados en un sistema lagrangiano o euleriano. Dos de ellas son muy conocidas, pues la primera consiste en convertir todos los términos en integrales sobre el volumen del sistema, para lo cual utiliza el teorema de la divergencia. Luego agrupa las integrales en una sola integral de volumen igualada a cero, notando que **la región sobre la cual se integra es arbitraria**, por lo cual, el integrando mismo debe ser igual a cero. Este primer método se aplica a un cuerpo arbitrario que se denomina sistema lagrangiano. La segunda manera se aplica a una región fija del espacio, que se denomina sistema euleriano, y consiste en aplicar la forma apropiada del teorema del valor medio, dividir los balances entre el volumen del sistema y tomar el límite cuando dicho volumen tiende a cero. Este segundo método ilustra la importancia de considerar los tamaños de los sistemas y en particular, el significado de la definición local de las variables termodinámicas.

El tercero de los métodos para obtener las ecuaciones de cambio locales e instantáneas utiliza a fondo **el concepto de cuerpo puntual o partícula material de un fluido** y se relaciona con los dos procedimientos descritos arriba. A este concepto de partícula material de fluido o cuerpo puntual ξ está referida la reflexión de la subsección siguiente.

1.2.3 Tamaño del sistema

Mientras los sistemas de la termodinámica del equilibrio son siempre de tamaños en el orden del tamaño de los instrumentos de laboratorio, los cuales manejan un número de moléculas en el orden del número de Avogadro, de 6.022×10^{23} moléculas, los sistemas locales de los fenómenos de transporte utilizan derivadas en las coordenadas espaciales, las cuales requieren que **las funciones derivadas sean cantidades bien “comportadas”, en el límite** cuando el tamaño del sistema tiende a cero, pero dicho límite no puede ser demasiado fino o pequeño, pues debe seguir representando el comportamiento de un número suficientemente grande de moléculas, para que cantidades tales como la temperatura, la presión, la densidad o la concentración de una especie química, sean cantidades que están bien definidas. Por ejemplo, si pensamos que la partícula material más pequeña a considerar sea, por ejemplo de diez micrómetros como su longitud característica, es decir de 10^{-5} m, su volumen sería $V = 10^{-15}$ m³. Entonces, si el material fuera agua líquida en las

condiciones ambientales normales, dicho volumen contendría alrededor de

$$\frac{V\rho}{M}N_{avo} = \frac{10^{-15}10^3}{18}6.022 \times 10^{23} = 3.35 \times 10^{10} \text{ moléculas};$$

pero si fuera aire, el mismo volumen tendría alrededor de 2.5×10^7 moléculas y si fuera un diminuto grano de cloruro de potasio, contendría alrededor de 1.60×10^{10} moléculas.

Por lo anterior, el valor local de una variable termomecánica (termodinámica o hidrodinámica) está asociado a un volumen alrededor de la posición donde se determina la función, cuyo tamaño es tal que podemos hablar del concepto de partícula material o cuerpo puntual ξ , que contiene un número suficientemente grande de moléculas, como para poder definir de manera única y continua dicha variable termomecánica.

1.2.4 Cuerpos termodinámicos y cuerpos puntuales

En conclusión, las partículas materiales más pequeñas que se consideran con mayor frecuencia en los fenómenos de transporte contienen alrededor de 10^7 a 10^{10} moléculas y volúmenes de alrededor de $10^3 \mu\text{m}^3$. Por supuesto que hay aplicaciones que no cumplen estas características, que son magnitudes ilustrativas, solamente, para ayudar a estimar las dimensiones y los órdenes de magnitud de los conceptos. Algunas aplicaciones que salen de estos rangos de números de moléculas se relacionan con flujos de gases enrarecidos o flujos en grietas y fisuras, flujos en membranas porosas, que pueden ser impulsados por fuerzas eléctricas en materiales iónicos, etc. Para precisar estas magnitudes indicativas recordemos:

Cuerpo termodinámico, hidrodinámico o termomecánico:
 $\mathcal{C} \approx 6.022 \times 10^{23}$ moléculas
 Volumen molar.

Partícula material o cuerpo puntual del fluido:
 $\xi \approx 10^7 - 10^{10}$ moléculas
 Volumen $\approx 10^3 \mu\text{m}^3 = 10^{-15} \text{m}^3$

1.2.5 Hipótesis del medio continuo

Mientras la termodinámica del equilibrio estudia los estados cuando un cuerpo termodinámico $\mathcal{C}$ tiene un valor constante para cada una de sus variables termodinámicas de interés, como por ejemplo, la densidad $\rho = \rho_0$ y la temperatura $T = T_0$, una versión de la termodinámica de los procesos irreversibles analiza la evolución de dichas variables del cuerpo $\mathcal{C}$, desde un estado de equilibrio inicial $\{\rho_i, T_i\}$ hasta otro final $\{\rho_f, T_f\}$, como función del tiempo: $\{\rho(t), T(t)\}$, en tanto que una versión más amplia de la termodinámica de los procesos irreversibles, así como los fenómenos de transporte, estudian los cambios espaciales y temporales de los valores de las variables, por ejemplo $\{\rho(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t)\}$, donde $\mathbf{x}$ es el vector de posición de un punto con respecto a un origen, lo cual requiere que dichas variables termodinámicas se consideren funciones continuas del espacio y del tiempo, con derivadas temporales y espaciales continuas.

Lo anterior se cumple, por hipótesis, cuando proponemos que

la partícula material o cuerpo puntual ξ de un fluido, ocupa un volumen tan pequeño que lo identificamos con el punto que corresponde a su centroide. Todas las propiedades termomecánicas de interés de ξ pueden representarse por funciones continuas del espacio y del tiempo, con tantas derivadas continuas como sea necesario, excepto por algún conjunto numerable de superficies singulares, donde estas funciones podrían presentar discontinuidades de salto.

Estas funciones, que cambian de valor localmente de punto a punto, son la propiedades termomecánicas que describiremos a continuación y sus discontinuidades de salto representan, por ejemplo,

cambios de fase u ondas de choque, donde la densidad del fluido, por ejemplo, cambia abruptamente de valores, en regiones muy delgadas que podemos asociar a superficies de discontinuidad.

1.2.6 Hipótesis del equilibrio local

Cuando las variables termodinámicas forman campos, es decir que se consideran funciones del espacio y del tiempo, por ejemplo la temperatura $T(\mathbf{x}, t)$, donde $\mathbf{x}$ es el vector de posición del centroide de una porción pequeña del cuerpo, que podríamos llamar “partícula material”, o “cuerpo puntual”, y t es el tiempo, ¿qué relaciones guardarán entre sí las variables termodinámicas? **Duhem** y **Hadamard** propusieron la hipótesis de que las ecuaciones que relacionan la presión, la temperatura y el volumen específico de un gas en movimiento, son las mismas que en el equilibrio. Actualmente esta suposición se conoce como la *hipótesis del equilibrio local*, y consiste en proponer que

los parámetros de estado de toda partícula material, ξ , se encuentran en equilibrio termodinámico.

En consecuencia, es posible aplicar una ecuación de estado localmente, en cualquier punto ocupado por una pequeña porción del cuerpo a un tiempo dado.

1.3 Propiedades termomecánicas

Todo sistema posee un conjunto de **atributos**, entre los cuales algunos pueden ser seleccionados como magnitudes físicas medibles, de acuerdo a los objetivos del estudio que se realice. Llamaremos *propiedades* a los atributos que necesitamos determinar cuantitativamente. Así, la forma, el olor, la temperatura y el color de un objeto son, en principio, atributos. Pero en un estudio dado pueden ser, además, propiedades. Por ejemplo, un atributo de los cuerpos es tener una temperatura; la consideración de la temperatura T , como una cantidad importante en el estudio de la longitud de una barra metálica L , la hace una propiedad a ser determinada y correlacionada con otras propiedades, en este caso como $L(T)$. Decimos que el *conjunto de propiedades es completo* cuando es suficiente para calcular el resultado de cualquier medición experimental. Un conjunto completo de propiedades se denomina *parámetros de estado*.

1.3.1 Propiedades extensivas, intensivas, específicas y densidades

Las propiedades son magnitudes asociadas al cuerpo. Hay propiedades intensivas y propiedades extensivas.

las propiedades extensivas son proporcionales a la masa del cuerpo.

Por ejemplo, la masa M_c , la energía E_c y el volumen V_c del cuerpo son propiedades extensivas; su valor es proporcional a la extensión del cuerpo, que a su vez es proporcional a la masa. En cambio

las propiedades intensivas son independientes de la extensión del cuerpo.

Por ejemplo, la temperatura T y la presión P son propiedades intensivas de los cuerpos, pues sus valores no dependen de la extensión del cuerpo, es decir de su masa. Las propiedades extensivas se pueden convertir en propiedades intensivas cuando se dividen entre la masa del cuerpo. Entonces

las propiedades específicas son las propiedades extensivas divididas entre la masa del cuerpo,

por ejemplo, la energía específica del cuerpo $\hat{E}_c = E_c/M_c$ y el volumen específico $\hat{V}_c = V_c/M_c$ son

propiedades intensivas.

La densidad de un cuerpo es el inverso de su volumen específico: $\rho = \frac{M_c}{V_c} = \frac{1}{\hat{V}_c}$

Las densidades de otras cantidades extensivas se obtienen multiplicando las propiedades específicas correspondientes por la densidad, así,

La densidad de energía de un cuerpo es el producto de la energía específica por la densidad:
 $\rho \hat{E}_c = \frac{M_c}{V_c} \frac{E_c}{M_c} = \frac{E_c}{V_c}$

1.3.2 Energía y masa

La masa y la energía son los dos atributos más importantes del universo, que los seres humanos somos capaces de identificar y hacemos esfuerzos por comprender. De estos esfuerzos derivamos nuestros conceptos que expresamos con definiciones y relaciones, de acuerdo con las percepciones que desarrollamos en las diversas *tlacanemilistín*¹⁰ en las cuales nos ha sido dado vivir. Como lo que percibimos son cuerpos formados de materia, con diversos atributos como su peso y su temperatura, establecemos que lo fundamental son los cuerpos, los cuales poseen como sus principales atributos su masa y su energía. Sin embargo, los desarrollos recientes de la física cuántica dan cuenta de asociaciones de partículas elementales que no generan masa, sólo manifiestan energía, y llegan ahora a proponer que la energía sea lo único que se conserva en el universo. En congruencia con tales desarrollos, muchas de las conceptualizaciones presentes en este y en muchísimos libros de texto, contienen ideas erróneas que iremos modificando conforme elaboremos otras representaciones de la realidad. Por el momento diremos que, de acuerdo con la tradición científica, la masa y la energía son las dos propiedades extensivas centrales de los cuerpos, porque

la masa es la cantidad de materia que contiene un cuerpo.

Si m es la masa de una molécula de un cuerpo $\mathcal{C}$, hecho de una sola especie química, entonces $M_c = N_c m$ es la masa del cuerpo, que contiene N_c moléculas de masa m . El número de moléculas N_c del cuerpo, dividido entre el número de Avogadro, $N_{avo} = 6.022 \times 10^{23}$ moléculas/g – mol, representa los "moles" que corresponden a dicho cuerpo: $n_c = N_c / N_{avo}$. Multiplicando este número de moles por la masa molecular M obtenemos también la masa del cuerpo: $M_c = n_c M$, expresada en gramos.

Además, la energía es la otra propiedad fundamental de los cuerpos, pues decimos que

la energía es aquella propiedad escalar de los cuerpos que les hace posible transformarse y transformar a otros cuerpos sobre los que puede actuar.

La figura 1.1 es una lámina que representa los elementos fundamentales del concepto de la energía pues, de manera sintética, afirma que **la energía es la capacidad de transformar** y asocia ciertos atributos a los términos de *capacidad* y de *transformar*.

La **capacidad** es, ante todo, el poder inmanente para hacer la cosa, el ser apto o idóneo para lograr el propósito. Aquí subyace la idea de un principio o poder cósmico, que en la *tlacanemilistli* del Anáhuac se identifica como un poder estático e inmanente: *In neli teotl*, es decir, "el estable, el inmaculado, el fundamento"¹¹. Además, **transformar** indica atravesar las formas, es decir, cambiar, moverse y fluir, generando todas las formas de lo existente. Es un principio generador cósmico

¹⁰ Palabra de la lengua náhuatl que significa los modos o formas de vivir como seres humanos, la cuál sustituye con ventajas el concepto de *civilizaciones*; ver la nota al pie número 2 del prefacio del libro de Soria, 2024, páginas 13 y 14.

¹¹ de acuerdo con Velázquez, 2019, Pags. 56 y 57.



Figura 1.1: Alegoría del concepto de la energía.

dinámico, que en el Anáhuac se denomina *Ometeotl* y corresponde a la capacidad o poder aplicados a la acción generadora, la cual requiere los elementos de la dualidad masculino-femenina, de donde viene su nombre de Principio o Señor-Señora de la dualidad, que tiene dos personas: el principio masculino Ometecuhtli (el Señor dual) y el principio femenino Ometecihuatl (la Señora dual).

Los rasgos de la metafísica del Anáhuac que se han mencionado aquí permiten ver cómo es posible proporcionar elementos concretos sobre lo dicho acerca de la diversidad de representaciones de la realidad en distintas tlacanamilistín, aquí con referencia al concepto de la energía.

En el lado derecho de la figura 1.1 se encuentra un símbolo solar extendiendo sus rayos de energía en todas direcciones y especialmente hacia la tierra. El sol es nuestra única fuente de energía, en última instancia, en la tierra, lo cual ha sido reconocido por todas las tlacanamilistín, desde la antigüedad.

Todo cambio y todo movimiento son transformaciones determinadas por la acción de la energía. **El movimiento está presente en todo lo que implique la energía de un cuerpo y la energía es necesaria para realizar todo movimiento.** Es importante determinar cuál es la relación del movimiento con la energía de los cuerpos.

Los cuerpos están formados por un gran número de moléculas cuyos movimientos están constreñidos por fuerzas intermoleculares que determinan el estado físico en que se encuentran. **La variable que determina el movimiento es la velocidad.** La velocidad de las moléculas, $\mathbf{V}$, de un cuerpo fluido, se puede separar en dos contribuciones: (1) la **velocidad del cuerpo $\mathbf{v}$** , o **velocidad de flujo**, la cual es un valor promedio que comparten todas las moléculas en el entorno de un punto, entendiendo por entorno una esfera que contiene las moléculas de un cuerpo puntual ξ o de un cuerpo termodinámico $\mathcal{C}$ **en un flujo uniforme** y (2) las **fluctuaciones estocásticas** de la velocidad de cada molécula $\mathbf{u}$, de modo que, para una molécula,

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

es su velocidad, compuesta por la **velocidad de flujo $\mathbf{v}$** , a la cual se superpone la **velocidad estocástica $\mathbf{u}$** . Para los fluidos, ésta última cambia drásticamente con el tiempo.

La velocidad de flujo está determinada y es compartida por todas las moléculas que componen el cuerpo puntual ξ . La velocidad de flujo es, además, una cantidad que puede ser medida a partir de la distancia recorrida por la partícula material ξ en un determinado tiempo. La **energía cinética de flujo** es:

$$M_c \hat{E} = N_c \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.3.1)$$

donde $\hat{E} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/2$ es la energía cinética de flujo por unidad de masa, la cual es una cantidad que corresponde al nivel de descripción local, así como las cantidades hidrodinámicas y termodinámicas, tales como la densidad, la velocidad de flujo, la presión y la temperatura. Además de la energía cinética de flujo, existe otra forma de energía de las moléculas en el nivel de descripción molecular, el cual corresponde a los movimientos estocásticos de las moléculas, cuya velocidad es $\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{v}$. Esta velocidad estocástica se asocia a una **energía cinética en el nivel molecular**, que tiene una relación directa con **la temperatura del fluido** en el nivel local.

1.3.3 Temperatura y energía

Para medir la temperatura de un cuerpo $\mathcal{C}$ utilizamos termómetros, termopares o termistores, que se calibran en alguna escala de las más usadas, como los grados Celsius o los grados Kelvin, los grados Rankine o los Fahrenheit. La temperatura medida por cualquiera de estos instrumentos es una cantidad escalar que se asocia al cuerpo y que puede ser capturada como una función del tiempo $T(t)$. Las temperaturas medidas en grados Rankine (R) o grados Kelvin (K) son siempre positivas y parten del cero absoluto, que es el valor de la temperatura límite inferior para todos los cuerpos, debajo de la cual no es posible enfriar más ningún cuerpo. La relación entre las dos escalas absolutas de temperatura es $(R)=1.8(K)$. Mostraremos a continuación cómo la temperatura se relaciona con la energía cinética media de las fluctuaciones estocásticas de la velocidad en el nivel molecular. Tomemos el caso de la **teoría cinética de un gas ideal**¹², cuya ecuación de estado es la relación

$$PV = NkT = nRT \quad (1.3.2)$$

donde $k = 1.380658 \times 10^{-23} [\text{J/K} \cdot \text{molécula}]$ es la constante de Boltzmann, $R = N_{avo}k$ es la constante del gas ideal, N es el número de moléculas, $n = N/N_{avo}$ es el número de gramos-mol de gas y $N_{avo} = 6.0221367 \times 10^{23} [\text{moléculas/g} - \text{mol}]$ es el número de Avogadro.

En un estado de equilibrio termodinámico existe, en promedio, un número fijo de moléculas cuya velocidad se encuentra en el intervalo $d^3\mathbf{u} = du_x du_y du_z$, de modo que existe una **distribución de velocidades** $f(\mathbf{u})$, que no depende del tiempo. El número de moléculas en dicho intervalo de velocidad es

$$dN = Nf(\mathbf{u})d^3\mathbf{u}, \quad (1.3.3)$$

y la distribución de velocidad está normalizada, es decir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{u})d^3\mathbf{u} = 1. \quad (1.3.4)$$

La presión del gas sobre una superficie sólida, situada en el plano $x = x_0$, según puede apreciarse en la figura 1.2(a), es proporcional al transporte neto del ímpetu de las moléculas que impactan en la superficie de área A , cuya normal unitaria es $\boldsymbol{\delta}_x$. Entonces

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} - m\mathbf{u}', \quad (1.3.5)$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de la molécula antes de una colisión en la pared y $\mathbf{u}'$ es su velocidad después de la colisión elástica en la pared. La elasticidad de la colisión nos permite saber que $u'_x = -u_x$, ver figura 1.2(a), de modo que

¹²Esta subsección se ha adaptado del desarrollo que presentan Greiner *et al.* (1995), pp. 10-11.

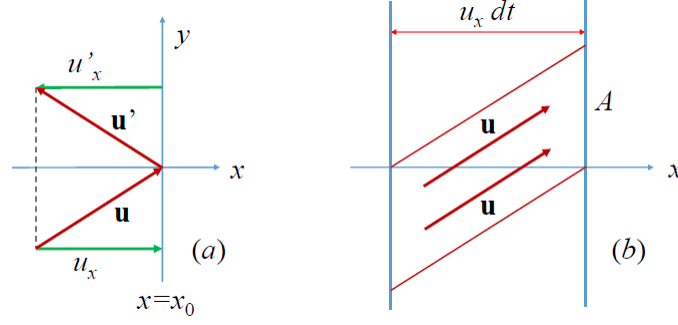


Figura 1.2: (a) Transporte del ímpetu de una molécula sobre una superficie sólida, situada en el plano $x = x_0$, y su componente $u'_x = -u_x$. (b) Área de impacto para calcular la presión.

$$p_x = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\delta}_x = mu_x - mu'_x = 2mu_x \quad (1.3.6)$$

es el ímpetu transferido a la pared en su dirección normal, por una molécula incidente. Si despreciamos las colisiones partícula-partícula, las partículas o moléculas con velocidad $\mathbf{u}$ que golpearán la pared en un intervalo de tiempo dt , son aquellas que se encuentran al interior de un paralelepípedo cuyo volumen tiene un área A y una altura $u_x dt$, ver figura 1.2(b), de modo que la fracción de volumen correspondiente a dichas moléculas es $Au_x dt/V$ y el número de moléculas con velocidad $\mathbf{u}$ dentro del paralelepípedo equivale a la ecuación (1.3.3) multiplicada por esta fracción volumen:

$$dN = N \frac{Au_x dt}{V} f(\mathbf{u}) d^3\mathbf{u}. \quad (1.3.7)$$

Por lo tanto, la fuerza normal dF_x que ejercen estas dN moléculas que impactan en la superficie de área A durante el intervalo de tiempo dt es

$$dF_x = \left(\frac{p_x}{dt} \right) dN = \frac{AN}{V} 2mu_x^2 f(\mathbf{u}) d^3\mathbf{u}, \quad (1.3.8)$$

en tanto que la fuerza normal total que efectúan las moléculas de toda la distribución de velocidades, por unidad de área, equivale a la presión y es la integral:

$$P = \frac{1}{A} \int dF_x = 2m \frac{N}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u_x^2 f(\mathbf{u}) du_x du_y du_z. \quad (1.3.9)$$

Sin embargo, debido a la estocasticidad de la velocidad $\mathbf{u}$, $f(\mathbf{u})$ no depende de la dirección de $\mathbf{u}$, sino solamente de su magnitud $|\mathbf{u}|$ y en consecuencia, la integral en u_x equivale a la mitad de la integral en el intervalo completo de velocidades, es decir que

$$PV = 2mN \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 f(\mathbf{u}) du_x du_y du_z = mN \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 f(\mathbf{u}) d^3\mathbf{u} \equiv mN \langle u_x^2 \rangle. \quad (1.3.10)$$

La Ecuación (1.3.10) define la media cuadrática de la velocidad en la dirección transversal a la superficie, que será la misma en todas las direcciones, debido a la isotropía del movimiento estocástico del gas, es decir que

$$\langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle. \quad (1.3.11)$$

Además, sabemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, de modo que $\langle u_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle$ y la Ecuación (1.3.10) resulta:

$$PV = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{1}{2} m \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle, \quad (1.3.12)$$

expresión que puede compararse con la ecuación de estado del gas ideal (1.3.2), de donde resulta que

$$kT \equiv \frac{2}{3} \left\langle \frac{1}{2} m \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle, \quad (1.3.13)$$

y puede decirse que, en el nivel de los movimientos estocásticos moleculares,

la temperatura es proporcional a la energía cinética media de los movimientos estocásticos de las moléculas de un gas ideal.

1.3.4 Energía interna y energía cinética

Si multiplicamos la Ecuación (1.3.13) por el número de moléculas N que tiene algún cuerpo termodinámico $\mathcal{C}$, o algún cuerpo puntual ξ , y despejamos la energía cinética media de los movimientos estocásticos de todas las moléculas del cuerpo, podemos definir la **energía interna** U como:

$$U \equiv N \left\langle \frac{1}{2} m \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle = \frac{3}{2} N k T, \quad (1.3.14)$$

en tanto que la **densidad másica de energía interna** $\hat{U}$, o energía interna por unidad de masa, resulta al dividir la expresión anterior entre la masa de las N moléculas, Nm :

$$\hat{U} = \frac{U}{Nm} = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T, \quad (1.3.15)$$

la cual es una expresión adecuada a los gases ideales. Los fluidos, en general, y los materiales más complejos pueden tener otras expresiones más apropiadas.

Ahora, podemos definir la energía total E_{tot} como la energía asociada a los movimientos de las moléculas del fluido en sus dos niveles: la energía cinética de flujo, en el nivel local más la energía cinética de los movimientos estocásticos o energía interna, en el nivel molecular, de donde la **densidad de energía total por unidad de volumen** $\rho \hat{E}_{tot}$ viene a ser:

$$\rho \hat{E}_{tot} = \rho \hat{E} + \rho \hat{U} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho \frac{3}{2} \frac{k}{m} T \quad (1.3.16)$$

1.3.5 Presión termodinámica

La presión es una fuerza ejercida sobre una superficie de área unitaria, en la dirección normal a la superficie considerada. **En el caso de un gas ideal**, esta fuerza es únicamente la generada por el movimiento estocástico de las moléculas y es posible relacionarla con la energía cinética media de la componente estocástica de la velocidad. En efecto, si despejamos la presión de la Ecuación (1.3.12), resulta que

$$P = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left\langle \frac{1}{2} m \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle = \frac{2}{3} \rho \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right\rangle = \frac{2}{3} \rho \hat{U}. \quad (1.3.17)$$

1.4 Dos principios de la termodinámica

La termodinámica del equilibrio se ha construido en torno de dos principios fundamentales que expondremos a continuación. La termodinámica del equilibrio se conoce también como la

termostática, porque analiza solamente los estados de equilibrio y las relaciones entre ellos, sin atender al desarrollo de los procesos de transformación desde un estado de equilibrio hasta otro. Hacer los análisis del equilibrio en sistemas cerrados es fundamental, la variable de estado que lo determina es la energía interna U . En la extensión a sistemas abiertos, la entalpía H es la variable de estado determinante.

La definición de la entropía S como otra de las variables de estado y el estudio de sus alcances y limitaciones es fundamental en el planteamiento del segundo principio de la termodinámica.

Un **proceso** es una sucesión de cambios que modifican el estado de un sistema. Los **procesos termodinámicos** ocurren al transferir energía del exterior al sistema o desde el sistema al exterior. Esto puede ocurrir como consecuencia de modificar el espacio físico del sistema, ya sea en su interior o desde sus contornos. Las interacciones de los contornos con los alrededores determinan el tipo de sistema que se tiene y las formas de transformación posibles. Los contornos o fronteras determinan que un sistema sea aislado, cerrado o abierto. Un **sistema aislado** no permite el paso de materiales ni el calor a través de las fronteras. Un **sistema cerrado** permite el calor, pero no el flujo de materiales a través de las fronteras y un **sistema abierto** tiene algunas porciones de frontera abierta, donde permite el paso de materiales y otras porciones de frontera cerradas o aisladas. En los sistemas totalmente aislados se llevan a cabo procesos adiabáticos, es decir, aquellos procesos que no intercambian energía térmica, lo cual también ocurre en las porciones aisladas de la frontera de los sistemas abiertos. En los sistemas cerrados los procesos termodinámicos consisten en pasar de un **estado inicial** de equilibrio a un **estado final**, también de equilibrio. Para que esto tenga lugar se debe modificar alguna condición interna, como el volumen o la temperatura del sistema, a partir de alguna acción desde el exterior, como ejercer una fuerza desde alguna porción de la frontera o poner en contacto parte de la frontera con una fuente térmica. Finalmente, en los sistemas abiertos los procesos ocurren desde sus **condiciones de entrada** hasta sus **condiciones de salida**. Los materiales atraviesan las entradas y las salidas del sistema en determinados **flujos másicos**, que surgen, generalmente, por el efecto de una fuerza como una diferencia de presión entre la entrada y la salida, o una fuerza de flotación debida a la gravedad.

1.4.1 Primer principio de la termodinámica

La energía que depende sólo del estado termodinámico del sistema es llamada **energía interna**. Ésta es una cantidad que representamos por U y que se conserva en los sistemas aislados, cuando no se realiza trabajo sobre ellos.

EN UN SISTEMA CERRADO LA ENERGÍA INTERNA U SOLO PUEDE INTERCAMBIARSE A TRAVÉS DE LA FRONTERA DEL SISTEMA DE DOS MANERAS CUALITATIVAMENTE DISTINTAS: COMO CALOR Q O COMO TRABAJO W .

Es decir, se satisface la igualdad

$$\Delta U = Q + W, \quad (1.4.1)$$

donde $\Delta U = U_2 - U_1$, es la diferencia de la energía interna en el estado de equilibrio final menos la del estado de equilibrio inicial. Desde luego, al proponer la ecuación (1.4.1), una primera duda es que sumar los términos sea una operación correcta, puesto que es una condición necesaria que las tres variables sumadas tengan las mismas dimensiones. Este fue, precisamente, un tema que abordó Joule, ya que en su tiempo, sumar energía o calor con trabajo se podría parecer a "sumar peras con manzanas". Así que, haciendo uso de un sistema de pesas para generar corriente eléctrica, le fue

posible determinar la equivalencia entre el trabajo mecánico y el calor¹³

También, en cualquier **proceso infinitesimal en un sistema cerrado**, se satisface la igualdad

$$dU = \delta Q + \delta W. \quad (1.4.2)$$

Esta manera de expresar la **primera ley de la termodinámica**, tanto en su forma integral (1.4.1) como en la diferencial (1.4.2), implica que tanto el calor como el trabajo son cantidades positivas cuando ingresan al sistema y negativas cuando se sustraen del mismo. Además, en (1.4.2) la diferencial d ha sido sustituida por una δ griega, al aplicarse del lado derecho, para indicar que el calor Q y el trabajo W son formas de intercambio de la energía, que dependen de la manera como se da dicho intercambio, cómo se realiza el proceso de transferencia, en tanto que la diferencial dU indica que el cambio es de una propiedad del estado termodinámico del sistema, el cual solamente depende de sus valores inicial y final, pero no de la forma o trayectoria que siguió su cambio entre estos dos valores.

1.4.2 Segundo principio de la termodinámica

Mientras el primer principio de la termodinámica trata de un balance, es decir, de la energía interna que solamente cambia debido a la energía que entra o sale de un sistema cerrado, ya sea como calor o como trabajo, el segundo principio de la termodinámica expresa la imposibilidad de realizar determinados procesos y, en la misma medida que una operación propuesta no puede ocurrir en el sistema. Así, el segundo principio indica cuál es la dirección de los acontecimientos que suceden en el tiempo, o mejor dicho, que la dirección de los procesos está limitada por aquellos que no pueden ocurrir.

Hay tres enunciados del segundo principio, que fueron expresados en palabras, a partir de las cuales pudo ya surgir el concepto de entropía, como una variable de estado. El primero de dichos enunciados, debido a Rudolf Clausius en 1850, se puede expresar diciendo que

NINGUNA MÁQUINA, OPERANDO CÍCLICAMENTE, PUEDE TRANSFERIR CALOR DE UN CUERPO FRÍO A UNO CALIENTE, SIN REALIZAR TRABAJO SOBRE ELLA.

En 1851, William Thomson (Lord Kelvin) expresó un enunciado distinto, diciendo que

NINGUNA MÁQUINA, OPERANDO CÍCLICAMENTE, PUEDE EXTRAER CALOR DE UN RESERVORIO A TEMPERATURA CONSTANTE Y CONVERTIRLO TOTALMENTE EN TRABAJO.

Este enunciado se reconoce también, combinado con una aportación posterior de Planck, como el enunciado de Kelvin-Planck, que puede expresarse en la forma:

NINGUNA MÁQUINA, OPERANDO CÍCLICAMENTE, PUEDE CONVERTIR CALOR EN TRABAJO SIN TRANSFERIR, AL MISMO TIEMPO, CIERTA CANTIDAD DE CALOR A OTRO RESERVORIO DE TEMPERATURA INFERIOR.

Un tercer enunciado, expresado en 1909 por Constantin Carathéodory, establece que

TODO ESTADO DE EQUILIBRIO DE UN SISTEMA CERRADO TIENE ALGUNOS ESTADOS VECINOS, ARBITRARIAMENTE CERCANOS, QUE NO PUEDEN SER ALCANZADOS POR ALGÚN PROCESO ESPONTÁNEO O POR EL LÍMITE REVERSIBLE DE ALGÚN PROCESO

¹³El equivalente mecánico del calor corresponde a la igualdad: 1 cal = 4.184 J, o bien 1 btu = 1054.35 J. El joule (J) es la unidad del SI (sistema internacional de unidades) y equivale a: 1 J = 1 N·m = 1 W·s.

ESPONTÁNEO, SIN INCLUIR TRANSFERENCIA DE CALOR.

En este enunciado vemos incorporado el concepto de reversibilidad, que ya hemos adelantado al hablar de los procesos cuasiestáticos, en la subsección 1.1.2. Así, hemos identificado dichos procesos cuasiestáticos como aquellos que transcurren, teóricamente, mediante una sucesión densa de estados de equilibrio, de modo que, en la práctica, es posible aproximarnos a los procesos reversibles mediante la operación temporal extremadamente lenta, de cualquier proceso, que en el límite, sería cercano a una operación reversible. En tal límite, podemos expresar el **segundo principio de la termodinámica** al reconocer que

EXISTE UNA VARIABLE DE ESTADO LLAMADA ENTROPÍA S QUE ES EXTENSIVA, CUYO CAMBIO dS DURANTE CUALQUIER PROCESO EN EL CUAL SE INTERCAMBIA UNA CANTIDAD INFINITESIMAL DE CALOR δQ , EQUIVALE A LA RAZÓN $\delta Q/T$ SI EL PROCESO ES REVERSIBLE Y ES MAYOR A $\delta Q/T$ SI EL PROCESO ES IRREVERSIBLE.

Un sistema aislado alcanza en el equilibrio el valor máximo de su entropía. Para conocer los cambios en el medio o si se desconoce el estado final a partir de un cambio estipulado, o si se desconocen las condiciones de salida a partir de procesos de intercambio, será necesario seguir la evolución del proceso. Un proceso es **isentrópico** o **reversible** cuando procede tan lentamente que en cualquier momento puede invertirse hacia su estado inmediato anterior. Teóricamente se trata de intercambios infinitesimales de masa y energía que modifican infinitesimalmente el estado del sistema, llevándolo en su espacio termodinámico, **a lo largo de una curva de estados de equilibrio**. Cualquier proceso que no siga esta curva, desde su condición inicial de equilibrio, es **irreversible**.

1.5 Ecuaciones generales de cambio

Por otra parte, el estudio de los **fenómenos de transporte** es el tratamiento de los cambios que se manifiestan en las propiedades termomecánicas de los materiales, la rapidez con que se producen estos cambios y los procesos que producen las interacciones con otros materiales de los alrededores o con otras porciones del mismo material, fuera del alcance del estudio.

Los **fenómenos de transporte**, como se ha dicho antes, resultaron de la conjunción de tres campos del conocimiento aplicado, que se estudiaban por separado en los currícula de las ingenierías: la **mecánica de fluidos**, la **transferencia de calor** y la **transferencia de masa**. En la sistematización de su estudio se han establecido los principios o **leyes fundamentales** para el transporte de momentum lineal y angular, el principio de conservación de la masa y el transporte de las especies químicas de una mezcla homogénea, con o sin reacciones químicas, así como el transporte de energía mecánica y térmica. Luego se han considerado las relaciones que regulan los comportamientos de los materiales, que muchos textos traducen del inglés como “**relaciones constitutivas**”, aunque también se conocen como “**relaciones fenomenológicas**”. Nosotros las llamaremos **relaciones de comportamiento**, nombre que indica con claridad y sencillez el significado de dichas relaciones, que establecen la correspondencia entre los flujos debidos a los transportes moleculares, con los gradientes de los potenciales o fuerzas generalizadas que producen dichos flujos. Así, el flujo de momentum viscoso, el flujo por conducción de energía térmica y los flujos difusivos de las especies químicas, se relacionan con el **gradiente de la velocidad de flujo**, el **gradiente de la temperatura** y los **gradientes de los potenciales químicos**, respectivamente. Estos gradientes determinan los flujos en magnitud y sentido. Las relaciones lineales entre estas cantidades se establecieron empíricamente y se conocen como las **leyes de Newton, Fourier y Fick**, respectivamente, para los tres transportes moleculares referidos arriba. Hasta aquí, el planteamiento general de los fenómenos de transporte sigue de cerca las formulaciones de la termodinámica irreversible lineal, aunque con diferentes métodos y alcances, de acuerdo a lo expresado por el mismo Onsager (*c. fr.* García-Colín, 1989,

pp. 64-66). Así, las relaciones de comportamiento asociadas a Newton, Fourier y Fick, se pueden entender como tres casos específicos de las relaciones de Onsager. Los coeficientes de viscosidad, conductividad térmica y difusión se pueden entender como tres de los coeficientes que relacionan los flujos $\mathbf{J}_k$ con las fuerzas $\mathbf{X}_j$ en dicha formulación de Onsager, donde $\mathbf{J}_k = \sum_j L_{kj} \mathbf{X}_j$; $k = 1, \dots, n$. Las fuerzas, por otra parte, se expresan en términos de gradientes, como en la ley de Fourier donde $\mathbf{q} = -k \nabla T$. Aquí se ve claramente que la fuerza térmica equivale al gradiente de la temperatura, pudiendo entenderse entonces la temperatura T como un **potencial térmico**, más que una **fuerza térmica intensiva**, como se hizo arriba.

El desplazamiento de los cuerpos implica la realización de **trabajo** W , el cual se define como como la aplicación de una fuerza proyectada sobre dicho desplazamiento, es decir, el producto de la magnitud de la componente de la fuerza $\mathbf{F}$ en la dirección del desplazamiento, $\mathbf{d}$, por la magnitud del desplazamiento, d , entonces $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$. La capacidad de realizar trabajo se asocia con la **energía mecánica**, es decir, con **las formas de la energía asociadas al movimiento de los cuerpos**, en el nivel de descripción local. En este nivel, el movimiento de los cuerpos fluidos se puede describir por las **ecuaciones de movimiento**, que equivalen a **balances de fuerzas**, aplicados **localmente sobre el fluido** en un punto dado, $\mathbf{x}$ del sistema.

1.5.1 Formas eulerianas de las ecuaciones locales de cambio

El balance de masa en un punto $\mathbf{x}$ da lugar a la **ecuación de continuidad**. Su derivación en un sistema de referencia fijo en el espacio, es realizada cuidadosamente por Bird (2012), y puede ser considerada como consecuencia de un principio de balance. **La ecuación de continuidad, en sus términos eulerianos** es

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} & = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ \text{rapidez temporal de} & \text{densidad de flujo} \\ \text{cambio de la densidad} & = \text{máscico neto por} \\ \text{máscica del fluido} & \text{convección en} \\ \text{en el punto fijo } \mathbf{x} & \text{el punto } \mathbf{x}, \end{array} \quad (1.5.1)$$

El balance de masa de la especie química K -ésima de una mezcla homogénea multicomponente se puede expresar como:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial \rho_K}{\partial t} & = & -\nabla \cdot (\rho_K \mathbf{v}) & -\nabla \cdot \mathbf{j}_K & +r_K \\ \text{rapidez temporal} & & \text{densidad de} & \text{densidad de} & \text{rapidez temporal} \\ \text{de cambio de la} & & \text{flujo máscico} & \text{flujo máscico} & \text{de generación o} \\ \text{densidad parcial} & = & \text{de la especie} & \text{de la especie} & \text{consumo de la} \\ \text{de la especie} & & K\text{-ésima por} & K\text{-ésima por} & \text{especie } K\text{-ésima por} \\ K\text{-ésima en} & & \text{convección} & \text{difusión} & \text{reacciones químicas} \\ \text{el punto fijo } \mathbf{x} & & \text{en el punto } \mathbf{x} & \text{en el punto } \mathbf{x} & \text{en el punto } \mathbf{x} \end{array} \quad (1.5.2)$$

La ecuación de movimiento, expresada en su forma vectorial, se puede escribir como:

$$\begin{array}{llllll} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) & = & -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) & -\nabla p & -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} & +\rho \mathbf{g} \\ \text{rapidez temporal} & & \text{densidad de} & \text{gradiente} & \text{densidad de} & \text{fuerzas} \\ \text{de cambio de la} & = & \text{flujo de} & \text{de presión} & \text{flujo de} & \text{externas} \\ \text{densidad de mo-} & & \text{momentum} & \text{en el} & \text{momentum} & \text{por unidad} \\ \text{mentum lineal} & & \text{convectivo} & \text{punto } \mathbf{x} & \text{viscoso} & \text{de volumen} \\ \text{del fluido en el} & & \text{en el punto } \mathbf{x} & & \text{en el punto } \mathbf{x} & \text{en el punto } \mathbf{x} \\ \text{punto fijo } \mathbf{x} & & & & & \end{array} \quad (1.5.3)$$

Cuando este balance es proyectado en la velocidad de flujo, entendida como la rapidez (temporal) del desplazamiento del fluido en la dirección del flujo, es decir, cuando efectuamos el producto punto de la velocidad por la ecuación (1.5.3), resulta una **ecuación local para la rapidez de cambio de la energía cinética de flujo**, donde cada término del lado derecho representa la **rapidez de trabajo** realizado por la fuerza correspondiente. Además se obtienen dos términos que corresponden a los cambios temporales y espaciales de la energía cinética. En dicha ecuación todos los términos son de naturaleza mecánica, es decir, representan entidades de movimiento en el nivel de descripción local. Al efectuar el producto punto del balance de fuerzas por la velocidad de flujo $\mathbf{v}$ tenemos, después de efectuar algunas operaciones que consisten, fundamentalmente, en introducir la velocidad en las derivadas, **una ecuación a la cual podemos llegar también desde primeros principios, elaborando un balance de energía cinética** y definiendo adecuadamente términos de disipación viscosa y disipación reversible por cambios de volumen. Dicha ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

<i>rapidez temporal de cambio de la densidad de energía cinética en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>=</i>	<i>flujo de energía cinética por convección en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>flujo de potencia efectuado por fuerzas de presión en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>flujo de potencia efectuado por fuerzas viscosas en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>flujo de potencia efectuado por fuerzas externas en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>disipación reversible de potencia por procesos de compresión o expansión en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>disipación irreversible de potencia por procesos de fricción viscosa en el punto $\mathbf{x}$</i>
--	----------	---	---	---	---	---	---

(1.5.4)

donde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ es el cuadrado de la magnitud de la velocidad del flujo. Los dos últimos términos de la ecuación anterior corresponden a la **disipación de potencia incidente**, es decir que implican **un cambio de temperatura o un cambio de fase**, que son las dos formas que toman los cambios de la energía interna. Podemos también formular el **balance local de energía interna**, considerando todos los **efectos térmicos** sobre el fluido o cuerpo en el punto $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) = -\nabla \cdot (\rho \hat{U} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) + (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

<i>rapidez temporal de cambio de la densidad de energía interna en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>=</i>	<i>flujo neto de energía interna por convección en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>calentamiento o flujo neto de energía térmica por conducción en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>disipación reversible de potencia por compresión o expansión en el punto $\mathbf{x}$</i>	<i>disipación irreversible de potencia por fricción viscosa en el punto $\mathbf{x}$</i>	(1.5.5)
---	----------	---	---	---	---	---------

Además, al tomar la energía del fluido como la suma de su energía cinética más su energía interna, podemos sumar los dos balances anteriores para obtener el **balance local de la energía total**, entendida como la **suma de la energía cinética más la energía interna**:

$$\begin{array}{rclclclcl}
\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \hat{U} \right) \right] & = & -\nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \hat{U} \right) \mathbf{v} \right] & -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) & -\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) & +\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} & -\nabla \cdot \mathbf{q} \\
\text{rapidez temporal} & & \text{flujo neto de} & \text{flujo neto} & \text{flujo neto} & \text{flujo neto} & \text{calentamiento} \\
\text{de cambio de la} & & \text{la densidad de} & \text{de potencia} & \text{de potencia} & \text{de potencia} & \text{o flujo neto} \\
\text{suma de las} & = & \text{energía cinética} & \text{efectuado} & \text{efectuado} & \text{efectuado} & \text{de energía} \\
\text{densidades de} & & \text{más la densidad} & \text{por las} & \text{por las} & \text{por las} & \text{térmica} \\
\text{energía cinética} & & \text{de energía} & \text{fuerzas de} & \text{fuerzas} & \text{fuerzas} & \text{por} \\
\text{y energía} & & \text{interna por} & \text{presión} & \text{viscosas} & \text{externas} & \text{conducción} \\
\text{interna} & & \text{convección} & \text{en el} & \text{en el} & \text{en el} & \text{en el} \\
\text{en el punto } \mathbf{x} & & \text{en el punto } \mathbf{x} & \text{punto } \mathbf{x} & \text{punto } \mathbf{x} & \text{punto } \mathbf{x} & \text{punto } \mathbf{x}
\end{array}
\quad (1.5.6)$$

El término de **la disipación viscosa es siempre la transformación de una parte del flujo incidente de la potencia debida a fuerzas viscosas en energía interna**, que debe restarse del flujo de potencia en el balance de energía cinética y sumarse en el balance de energía interna. Posteriormente, al sumarse ambos balances en el balance de energía total, los términos de disipación viscosa de ambos balances sumados se cancelan uno a uno. Algo semejante ocurre con el término de disipación reversible debida a los procesos de compresión o expansión, puesto que, **en el proceso de compresión, una parte del flujo incidente de potencia debida a la fuerza de presión se convierte en energía interna**. Lo opuesto ocurre en los procesos de expansión, pues en ellos, la parte disipativa del flujo incidente de potencia debida a las fuerzas de presión se convierte en energía cinética, resultando un término que suma en el balance de energía cinética y que resta en el balance de energía interna, ya que dicha potencia, agregada a la energía cinética, debe ser tomada de la energía interna del fluido. De esta manera, los términos correspondientes a la disipación reversible por fuerzas de presión se suman y restan al sumar los balances de energía cinética y de energía interna. En el balance de energía total, en ambos casos, tanto en los procesos de compresión como en los procesos de expansión, los términos de disipación se cancelan uno a uno. Además,

LA INTERPRETACIÓN DE LA DISIPACIÓN REVERSIBLE, EN LA ESCALA MOLECULAR, SE PUEDE ASOCIAR A QUE, EN LOS PROCESOS DE COMPRESIÓN DE UN GAS, AL REDUCIRSE EL RECORRIDO MEDIO ENTRE SUS MOLÉCULAS, LAS INTERACCIONES Y LA SUMATORIA DE LA ENERGÍA CINÉTICA MOLECULAR AUMENTAN, AL AUMENTAR EL NÚMERO DE MOLÉCULAS EN UN VOLUMEN UNITARIO, EN TANTO QUE LO CONTRARIO OCURRE EN LOS PROCESOS DE EXPANSIÓN.

1.5.2 Formas lagrangianas de las ecuaciones locales de cambio

El principio de conservación de la masa de un cuerpo puntual ξ , desemboca localmente en la **ecuación de continuidad**, de acuerdo con su derivación en un sistema de referencia lagrangiano, y como la masa del cuerpo puntual ξ es constante, por la misma definición del cuerpo puntual, los cambios temporales de la densidad son consecuencia de los cambios de volumen de la masa del cuerpo ξ . Entonces resulta:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{D\rho}{Dt} & = & -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\
\text{rapidez temporal} & & \text{proceso de} \\
\text{de cambio del} & = & \text{dilatación de la} \\
\text{estado másico de la} & & \text{partícula material } \xi \\
\text{partícula material } \xi & & \text{por unidad de volumen,}
\end{array}
\quad (1.5.7)$$

que es equivalente a la ecuación (1.5.1), sin embargo, la primera está expresada para los cambios de estado másico en un punto fijo, es decir, en un sistema abierto, y la segunda, es decir, la ecuación (1.5.7) representa los cambios de estado másico y el proceso de dilatación en un sistema cerrado, es decir, en la partícula material ξ .

Usando la ecuación de continuidad es posible escribir las ecuaciones locales de cambio en sus formas lagrangianas, que son:

Balance local de masa de la especie química K -ésima en una mezcla homogénea multicomponente:

$$\rho \frac{D\omega_K}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_K + r_K$$

<i>rapidez temporal</i>	<i>densidad de</i>	<i>rapidez temporal</i>
<i>de cambio de la</i>	<i>flujo másico</i>	<i>de generación o</i>
<i>fracción masa</i>	<i>de la especie</i>	<i>consumo de la</i>
<i>de la especie</i>	<i>K-ésima por</i>	<i>especie K-ésima por</i>
<i>K-ésima en la</i>	<i>difusión a la</i>	<i>reacciones químicas en</i>
<i>partícula material ξ</i>	<i>partícula material ξ</i>	<i>la partícula material ξ,</i>

(1.5.8)

donde $\omega_K = \rho_K/\rho$, es la fracción masa local de la especie química K -ésima.

Balance local del ímpetu en forma lagrangiana:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

<i>rapidez temporal</i>	<i>densidad de</i>	<i>densidad de</i>	<i>fuerzas</i>
<i>de cambio de la</i>	<i>flujo de</i>	<i>flujo de</i>	<i>externas</i>
<i>densidad del</i>	<i>momentum</i>	<i>momentum</i>	<i>por unidad</i>
<i>ímpetu de la</i>	<i>intrínseco sobre</i>	<i>viscoso sobre</i>	<i>de volumen so-</i>
<i>partícula</i>	<i>la partícula</i>	<i>la partícula</i>	<i>bre la partícula</i>
<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>

(1.5.9)

Balance local de energía cinética en forma lagrangiana:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

<i>rapidez</i>	<i>flujo de</i>	<i>flujo de</i>	<i>flujo de</i>	<i>disipación</i>	<i>disipación</i>
<i>temporal</i>	<i>potencia</i>	<i>potencia</i>	<i>potencia</i>	<i>reversible</i>	<i>irreversible</i>
<i>de cambio</i>	<i>efectuado</i>	<i>efectuado</i>	<i>efectuado</i>	<i>de potencia</i>	<i>de potencia</i>
<i>de la</i>	<i>por</i>	<i>por</i>	<i>por</i>	<i>por</i>	<i>por</i>
<i>densidad</i>	<i>fuerzas</i>	<i>fuerzas</i>	<i>fuerzas</i>	<i>procesos de</i>	<i>procesos de</i>
<i>de energía</i>	<i>de presión</i>	<i>viscosas</i>	<i>externas</i>	<i>compresión o</i>	<i>fricción</i>
<i>cinética en</i>	<i>sobre la</i>	<i>sobre la</i>	<i>sobre la</i>	<i>expansión en</i>	<i>viscosa en</i>
<i>la partícula</i>	<i>partícula</i>	<i>partícula</i>	<i>partícula</i>	<i>la partícula</i>	<i>la partícula</i>
<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>

(1.5.10)

Balance local de energía interna en forma lagrangiana:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + p(-\nabla \cdot \mathbf{v}) + (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$$

<i>rapidez</i>	<i>calentamiento</i>	<i>disipación</i>	<i>disipación</i>
<i>temporal de</i>	<i>o flujo neto</i>	<i>reversible</i>	<i>irreversible</i>
<i>cambio de la</i>	<i>de energía</i>	<i>de potencia</i>	<i>de potencia</i>
<i>densidad de</i>	<i>térmica por</i>	<i>por compresión</i>	<i>por fricción</i>
<i>energía interna</i>	<i>conducción so-</i>	<i>o expansión</i>	<i>viscosa</i>
<i>en la partícula</i>	<i>bre la partícula</i>	<i>en la partícula</i>	<i>en la partícula</i>
<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>

(1.5.11)

Balance local de energía total en forma lagrangiana:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \hat{U} \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

<i>rapidez temporal</i>	<i>flujo neto</i>	<i>flujo neto</i>	<i>flujo neto</i>	<i>calentamiento</i>	
<i>de cambio de la</i>	<i>de potencia</i>	<i>de potencia</i>	<i>de potencia</i>	<i>o flujo neto</i>	
<i>suma de las</i>	<i>= efectuado</i>	<i>efectuado</i>	<i>efectuado</i>	<i>de energía</i>	
<i>densidades de</i>	<i>por las</i>	<i>por las</i>	<i>por las</i>	<i>térmica</i>	(1.5.12)
<i>energía cinética</i>	<i>fuerzas de</i>	<i>fuerzas</i>	<i>fuerzas</i>	<i>por</i>	
<i>más energía</i>	<i>presión</i>	<i>viscosas</i>	<i>externas</i>	<i>conducción</i>	
<i>interna en la</i>	<i>sobre la</i>	<i>sobre la</i>	<i>sobre la</i>	<i>sobre la</i>	
<i>partícula</i>	<i>partícula</i>	<i>partícula</i>	<i>partícula</i>	<i>partícula</i>	
<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	<i>material ξ</i>	

Ejercicios

E.1.5-1. Ecuaciones de cambio en representación lagrangiana. Demostrar que la representación lagrangiana de las ecuaciones de masa de la especie K -ésima, (1.5.8), movimiento, (1.5.9), energía cinética de flujo, (1.5.10), energía interna, (1.5.11) y energía total, (1.5.12), es equivalente a las ecuaciones en la forma euleriana. Incorpora a este conjunto de ecuaciones la ecuación de continuidad (1.5.7) e identifica el conjunto de las variables del estado termomecánico de la partícula material ξ . Identifica el conjunto de los procesos que se aplican a ξ , los cuales modifican los valores de las variables de estado.

2. Procesos de calentamiento y de potencia mecánica

En este capítulo revisamos los procesos de calentamiento y de flujo de potencia mecánica, aplicados a un fluido puro y alotérmico, es decir, un fluido compuesto por una sola especie química o por una mezcla homogénea que no cambia su composición en los procesos analizados. La palabra alotérmico significa que el fluido puede cambiar su temperatura, ya sea en distintas porciones del mismo a un tiempo dado, ya sea conforme transcurre el tiempo en cada porción del fluido o en todo él, como un cuerpo homogéneo.

Los procesos de calentamiento y flujo de potencia ocurren en sistemas cerrados o abiertos. Los sistemas cerrados contienen una masa del material de interés que no cambia de principio al fin del proceso, en tanto que en los sistemas abiertos, existe un flujo másico a través del sistema, con regiones de entrada y salida de masa.

La representación de la ecuación de continuidad en términos lagrangianos, ecuación (1.5.7), se ha relacionado con la dilatación y su rapidez temporal de cambio, términos que es importante aclarar.¹

Definimos la dilatación J_m del cuerpo puntual ξ como la razón de su volumen dV_m con respecto al volumen en su configuración de referencia dV_0 :

$$J_m = \frac{dV_m}{dV_0}. \quad (2.0.1)$$

Se puede demostrar que la derivada material de la dilatación, para una dilatación unitaria es:

$$\frac{1}{J_m} \frac{DJ_m}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.0.2)$$

de manera que este resultado se puede sustituir en la ecuación (1.5.7), encontrando que

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{J_m} \frac{DJ_m}{Dt}, \quad (2.0.3)$$

¹ Aquí se presenta una síntesis de resultados importantes. Versiones más detalladas y fundamentadas se encuentran en el capítulo 2 de Soria (2022).

lo cual puede expresarse como una relación de derivadas logarítmicas:

$$\frac{D}{Dt} \ln \rho + \frac{D}{Dt} \ln J_m = \frac{D}{Dt} \ln(\rho J_m) = 0. \quad (2.0.4)$$

Esta expresión permite ver que la densidad y la dilatación son dos funciones inversas, en el sentido de que su producto es una constante, es decir que $\rho J_m = C$.

2.1 Procesos de calentamiento

El calentamiento de un cuerpo se lleva a cabo por medio de tres mecanismos o **modos de transferencia**, que son la **conducción**, la **convección** y la **radiación**, los cuales se tratan en las siguientes subsecciones.

Los procesos de calentamiento modifican los estados termodinámicos del sistema, ya sea un sistema cerrado o abierto, llevándolo, en el primer caso, de una condición inicial a una final, y en el segundo caso, de una condición de entrada a una de salida del sistema, cuando opera en el régimen estacionario, pero puede también operar en un régimen transitorio, cuando las condiciones de entrada y salida cambian con el tiempo.

En la figura 2.1 se muestran los tres modos de calentamiento, cada uno de ellos con una expresión representativa que lo describe y un diagrama que lo identifica, en el cual se muestran los principales elementos de cada uno de los mecanismos o modos de transferencia.

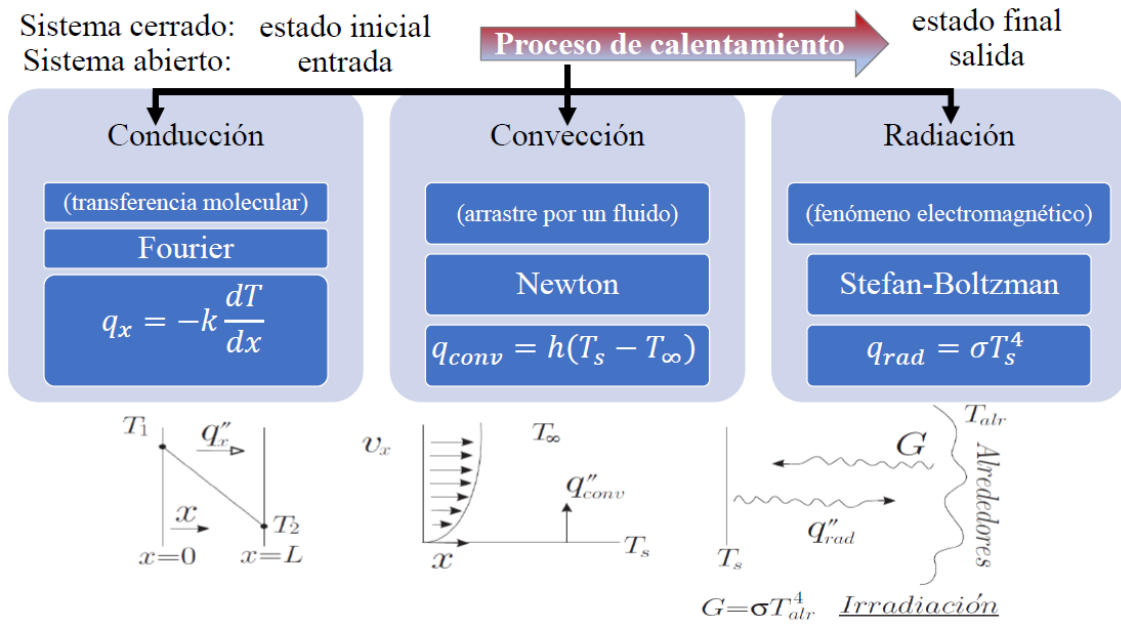


Figura 2.1: Modos del proceso de calentamiento. (a) **Conducción:** en este ejemplo el calentamiento se da en la dirección x ; el flux térmico es $\mathbf{q} = q_x \delta_x$, tiene solamente componente en la dirección x , desde $x = 0$ hasta $x = L$ y está dada por la ley de Fourier $\mathbf{q} = -k \nabla T$. (b)

Convección: ejemplo de calentamiento desde una superficie sólida plana; el flux con magnitud q_{conv} es proporcional a la diferencia de temperaturas $T_s - T_\infty$, h es el coeficiente de calentamiento y $T_s > T_\infty$. Aquí $\mathbf{q}_{conv} = h(T_s - T_\infty) \delta_y$. (c) **Radiación:** ejemplo de calentamiento por radiación desde una superficie a sus alrededores; aquí el calentamiento se da desde la superficie vertical. El flux

neto q_{rad} tiene una parte emitida a los alrededores, de magnitud $q_{rad} = \sigma T_s^4$ y recibe de ellos una irradiación de magnitud $G = \sigma T_{alr}^4$, de modo que

$$\mathbf{q}_{rad} = (q_{rad} - G) \delta_x = \sigma (T_s^4 - T_{alr}^4) \delta_x$$

La conducción es el único modo de calentamiento propio de los cuerpos sólidos, aunque existe también en los fluidos, en los cuales es usualmente de mucha menor importancia, comparado con el calentamiento producido por el modo convectivo y posiblemente también por la radiación. La convección, en cambio, es un modo de calentamiento que existe en los fluidos, pero no en los sólidos, pues implica el desplazamiento de unas masas de fluido con respecto a otras. La interfase entre un sólido y un fluido da lugar a que se presenten los tres modos de calentamiento a través de la interfase, conformando un proceso en el cual podemos identificar dos mecanismos en serie del lado del fluido: la convección y la radiación, como puede apreciarse en la figura 2.2. En esta figura se muestra también cómo los modos de calentamiento por radiación y convección desde el fluido, ocurren en serie con el calentamiento por conducción en el sólido, en el caso mostrado.

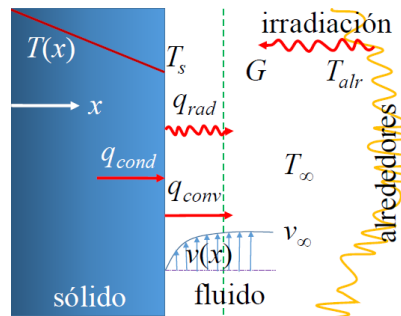


Figura 2.2: Calentamiento de una interfase sólido-fluido por conducción desde el sólido, en serie con convección y radiación que ocurren en paralelo desde el fluido, por ejemplo, cuando una placa metálica al rojo vivo se enfría al salir del horno, donde el centro de la placa es el plano $x = 0$.

2.2 Calentamiento por conducción

Este modo de transferencia de la energía térmica es molecular, es decir que **ocurre por el transporte de energía en la escala molecular**, cuando la energía cinética de las moléculas es transmitida de molécula a molécula, en distancias del tamaño de su trayectoria libre media entre dos colisiones, como ocurre en los **gases a baja densidad**. También ocurre por la transferencia de energía cinética en las interacciones elásticas moleculares de las colisiones entre moléculas, como acontece en los **gases densos** y los **líquidos**, y también por la transmisión de la energía cinética en la escala molecular, desde unas moléculas a las adyacentes, en las redes intermoleculares formadas por los **cuerpos sólidos** con modos vibracionales y rotacionales.

La transferencia de energía térmica por conducción ocurre en materiales en reposo o en movimiento de bulto; su velocidad de flujo no influye en el transporte térmico y puede hacerse cero, ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), en un sistema coordenado adecuado. Bajo esta consideración, el balance de la energía interna (1.5.5) equivale al balance de energía total (1.5.6) y la ecuación de la energía cinética (1.5.4) es irrelevante. Entonces, la **ecuación local para el calentamiento por conducción** es:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2.2.1)$$

como es el caso del calentamiento (o enfriamiento) en cuerpos sólidos, sujetos a una distribución no-uniforme de temperatura o a un flujo térmico por alguna parte de su frontera.

Cuando, además de la conducción, el sistema tiene una fuente o sumidero de energía térmica, con densidad de flujo térmico por unidad de volumen, $\dot{S}_{et}$ (W/m^3), por ejemplo cuando un material se sujeta a calentamiento debido a su resistencia eléctrica al paso de una corriente por el material, o cuando, en una mezcla líquida bien agitada se llevan a cabo reacciones químicas o nucleares, la

ecuación (2.2.1) debe incorporar dicho término de fuente y resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{U}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \dot{S}_{et}, \quad (2.2.2)$$

que es la **ecuación de conducción del calor con fuentes o sumideros de energía térmica**. Claramente en la ecuación (2.2.2), $\dot{S}_{et} < 0$ corresponde a un sumidero, en tanto que $\dot{S}_{et} > 0$ corresponde a una fuente.

2.2.1 Cambios de la energía interna $\hat{U}$

La ecuación (2.2.1) tiene una estrecha relación con el primer principio de la termodinámica: si consideramos esta ecuación aplicada a un material o cuerpo en reposo, la derivada parcial en el tiempo coincide con la derivada material: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \hat{U}) \rightarrow \frac{D}{Dt}(\rho \hat{U})$, es decir, la derivada parcial, en un punto fijo, equivale a la derivada parcial para la partícula material que ocupa ese punto fijo, **pues su velocidad de flujo es cero**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} \\ \frac{DU}{Dt} &= \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{\xi} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla U = \frac{\partial U}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

donde $U = \rho \hat{U}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Entonces, la ecuación (2.2.1) se puede escribir como:

$$\frac{D}{Dt}(\rho \hat{U}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.2.4)$$

y también, integrando en la región, $\mathcal{V}$, para todo el cuerpo y aplicando el teorema de la divergencia en la segunda igualdad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \hat{U} dV = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{q} dV = \oint_{\mathcal{S}} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS. \quad (2.2.5)$$

Si ahora expresamos los dos extremos de la ecuación (2.2.5) en forma diferencial, tenemos que

$$d \int_{\mathcal{V}} \rho \hat{U} dV = \oint_{\mathcal{S}} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS dt, \quad (2.2.6)$$

donde podemos reconocer en la integral sobre el volumen del cuerpo, a la **energía interna total** del mismo, es decir que

$$U = \int_{\mathcal{V}} \rho \hat{U} dV \quad (2.2.7)$$

y también podemos reconocer el calentamiento del cuerpo, desde los alrededores, como la integral en la superficie del cuerpo, del producto $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}$, donde $-\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie del cuerpo, apuntando hacia el interior del mismo y $\mathbf{q}$ es la densidad de calentamiento, expresada en unidades de $[energía/(área \cdot tiempo)]$. Este calentamiento está multiplicado por un intervalo diferencial de tiempo, lo cual equivale al **calor transferido al cuerpo en dicho intervalo de tiempo**, es decir que

$$dQ = \oint_{\mathcal{S}} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS dt. \quad (2.2.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.2.6) y (2.2.5) en la ecuación (2.2.4), tenemos una forma del **primer principio de la termodinámica** que no incluye procesos con realización de trabajo:

$$dU = dQ. \quad (2.2.9)$$

Expresado de esta manera, podemos distinguir las variables de estado y los procesos, pues aunque la ecuación (2.2.9) representa una igualdad, no es una identidad, ya que dicha igualdad describe un proceso de calentamiento, es decir: **como resultado del calentamiento del cuerpo** (en un intervalo diferencial de tiempo), **su energía interna aumenta una cantidad diferencial**.

Esta manera de refrescar los principios fundamentales de la termodinámica, a partir de las ecuaciones de balance de los fenómenos de transporte, resulta muy adecuada para comprender los términos y significados de los parámetros de estado y las “variables” de proceso, o mejor dicho, los procesos de transferencia que modifican el estado del cuerpo.

2.2.2 Densidad de calentamiento

En los párrafos anteriores, al integrar el balance local para todo el cuerpo sólido, que ocupa la región $\mathcal{V}$ fija del espacio, llegamos a una forma del primer principio de la termodinámica clásica, completamente compatible con una descripción en los términos de los balances locales. Así, resulta claro el significado de dos términos del primer principio de la termodinámica, al menos en el caso sencillo del calentamiento de un sólido, representado por la expresión local (2.2.4). Es importante señalar la **diferencia entre el calor y el calentamiento**: el calor Q se mide como la cantidad de energía (en joules) transferida durante un proceso de calentamiento (medido en watts) por la superficie expuesta que limita al cuerpo. El calentamiento es, entonces, un flujo de energía, proporcional al área de la superficie expuesta del cuerpo. Regresando a la ecuación (2.2.5), podemos definir el calentamiento como

$$\dot{Q} = \oint_{\mathcal{S}} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS, \quad (2.2.10)$$

donde acostumbramos llamar **flux de calor o densidad de calentamiento** a $\mathbf{q}$ que, como las densidades de flujo o fluxes, tiene unidades de la cantidad de que se trata, masa, ímpetu o energía, por unidad de área y unidad de tiempo. En este caso la cantidad en cuestión es la energía, de modo que las unidades de la densidad de calentamiento son $\left[\frac{\text{joules}}{\text{m}^2 \cdot \text{segundo}} \right] = \left[\frac{\text{watts}}{\text{m}^2} \right]$. La unidad de tiempo surge por tratarse de un flujo y la unidad de área por ser una densidad de flujo vectorial (también es así para las densidades de flujo tensoriales), ya que una cantidad que fluye se cuantifica cuando se mide cuánto de ella pasa a través de un área unitaria. Por este motivo, la proyección de la densidad de calentamiento $\mathbf{q}$ en la dirección del vector normal a la superficie $-\mathbf{n}$ equivale a la cantidad que atraviesa dicha superficie, en la dirección normal hacia el cuerpo. Así, un elemento vectorial diferencial de área se puede identificar con $\mathbf{n} dS$, donde el vector unitario normal $\mathbf{n}$, inicia en la superficie y apunta en la dirección que sale del cuerpo.

La densidad de calentamiento se puede expresar en función de la temperatura, que es una cantidad fácilmente medible. La **ley de Fourier** de la conducción térmica permite estimar la densidad de calentamiento por medio de la expresión

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (2.2.11)$$

donde $k \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] > 0$ es el coeficiente de conductividad térmica, que usualmente se considera constante en un proceso dado. Algunos materiales, como la madera, tienen estructura interna, la cual genera mayor facilidad de calentamiento en una dirección que en otra, estos materiales son

no-isotrópicos, sus coeficientes de conductividad térmica dependen la dirección del calentamiento y se pueden agrupar en un arreglo 3×3 , que podemos llamar el **tensor de conductividad térmica** $\mathbf{k} = k_{ij}$; con $i, j = 1, 2, 3$.

2.2.3 Coeficiente de conductividad térmica k

Los intervalos de **valores típicos de k** son:

1. Para gases: $0.01 \leq k \leq 0.02 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$.
2. Para líquidos: $0.1 \leq k \leq 10 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$.
3. Para sólidos
 - 3.1 Aislantes: $0.02 \leq k \leq 1 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$,
 - 3.2 No-metales: $0.2 \leq k \leq 50 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$,
 - 3.3 Aleaciones: $10 \leq k \leq 100 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$,
 - 3.4 Metales puros: $20 \leq k \leq 500 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$.

2.2.4 Comportamiento de la conductividad térmica k

Para gases a baja densidad se elaboran expresiones que reflejan el comportamiento molecular de dichos gases a baja densidad a partir de la teoría cinética de los gases, que Bird resume en su capítulo 9, de acuerdo a los resultados de Chapman-Enskog, quienes encuentran, **para gases monoatómicos**, expresiones como la ecuación (9.3-13) de Bird, la cual, combinada con la estimación de la viscosidad, de acuerdo a la misma teoría, resulta en la expresión

$$k = \frac{15}{4} \frac{R}{M} \mu = \frac{5}{2} \hat{C}_v \mu, \quad \text{para gases monoatómicos,} \quad (2.2.12)$$

en tanto que la fórmula semiempírica de Eucken es adecuada **para gases poliatómicos**:

$$k = \left(\hat{C}_p + \frac{5}{4} \frac{R}{M} \right) \mu \quad (2.2.13)$$

y la estimación de la conductividad térmica de **mezclas de gases a baja densidad**, a partir de las conductividades de sus N especies, se puede hacer ponderando:

$$k_m = \sum_{\alpha=1}^N \frac{x_{\alpha} k_{\alpha}}{\sum_{\beta} x_{\beta} \Phi_{\alpha\beta}}, \quad (2.2.14)$$

donde

x_{α} = fracción molar de la especie α ,

k_{α} = conductividad térmica de la especie α ,

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_{\alpha}}{M_{\beta}} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}} \right)^{1/2} \left(\frac{M_{\beta}}{M_{\alpha}} \right)^{1/4} \right]^2.$$

Los comentarios y ejemplos de Bird son muy útiles para elaborar los cálculos numéricos. Aquí solo aclaramos que los gases a baja densidad son aquellos cuya distancia intermolecular, o distancia libre media λ es mucho mayor que su diámetro molecular d , es decir que $\frac{\lambda}{d} \gg 1$. Cuando esto no ocurre, es decir, cuando es solo $\frac{\lambda}{d} \geq 1$, tenemos gases densos o líquidos. Chapman y Cowling

desarrollaron la teoría cinética para los primeros y a continuación mencionamos un resultado del método referido por Bird para los líquidos.

Para los líquidos, la conductividad térmica se puede correlacionar con la velocidad del sonido a baja frecuencia en ese medio líquido, v_s , definida como

$$v_s = \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T}, \quad (2.2.15)$$

de modo que resulta linealmente proporcional a la conductividad térmica, dada por

$$k = 2.80 \left(\frac{\tilde{V}}{\tilde{N}} \right)^{2/3} \kappa v_s, \quad (2.2.16)$$

donde $(\tilde{V}/\tilde{N})^{1/3}$ es la longitud característica de un arreglo cúbico que contiene una molécula de líquido, o también, $\tilde{V}/\tilde{N}$ es el volumen por molécula y $\kappa = 1.38066 \times 10^{-23}$ [J/K], es la constante de Boltzmann.

Para los sólidos, son importantes dos componentes, de modo que $k = k_e + k_r$, donde

k_e componente de k debida al comportamiento electrónico y

k_r componente de k asociada a la influencia de la red cristalina.

Metales: $k_e \gg k_r$, además, k es una función fuerte de la temperatura, $k = k(T)$.

Aleaciones: $k_e > k_r$, **sus valores están lejos de ser promedios** de los metales puros participantes en la aleación. Ejemplo: Aleación con 56 % en peso de Na y 44 % de K , a la temperatura de 977.2[K] tienen los valores: $k_{Na} = 59.8$, $k_K = 33.1$, $k_{Na-K} = 28.9$ [W/m · K].²

No-metales: La contribución de k_e todavía es importante.

Aislantes: Frecuentemente son estructuras que encierran celdas con gas o al vacío. k se encuentra altamente influida por la conductividad térmica de los gases encerrados en las celdas.

Ejercicios

E.2.2-1. Conductividad térmica de un gas.

¿Cómo se evita o minimiza el movimiento de convección natural (o convección libre), en un aparato para medir la conductividad térmica **de un gas**?

2.3 Calentamiento con convección

El **calentamiento por convección** es usualmente mucho más rápido que el calentamiento por conducción, pues la velocidad que lo determina es la velocidad de flujo del fluido, que moviliza las partículas materiales del fluido, las cuales se encuentran a diversas temperaturas, a diferencia del **calentamiento por conducción**, cuya velocidad está regida por la propagación de las fluctuaciones térmicas de las moléculas del material sólido o fluido.

El calentamiento asociado a movimientos convectivos ocurre en los fluidos y en sólidos fluidizados. El flujo de estos materiales sucede a la par de su calentamiento. Cuando el flujo es provocado por algún elemento externo, tal como una bomba o un ventilador, que impulsa al fluido desde una región a otra, generando zonas con diferentes valores de la presión, decimos que el calentamiento es por **convección forzada**. Por otra parte, cuando el flujo ocurre como consecuencia del calentamiento, debido a que la densidad del fluido es una función de la temperatura, la cual cambia al variar los valores locales de la temperatura, y genera un movimiento convectivo ascendente del fluido más ligero y también un movimiento convectivo descendente del fluido de

²Datos tomados de Bird, Tabla 9.1-4.

mayor densidad, por efecto de la fuerza de flotación³. Esta forma de calentamiento es la **convección natural o convección libre**. La velocidad de una partícula material del fluido es consecuencia de las fuerzas que actúan sobre la misma

2.3.1 Convección forzada en un tubo horizontal

Hemos dicho que la **convección es forzada** cuando la produce un elemento externo, como cuando el flujo se impulsa desde una bomba, un ventilador o un impulsor, aportando movimiento desde el exterior al fluido. Entonces, una partícula material ξ , que es un sistema cerrado, cambia su energía interna de acuerdo con la expresión:

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}, \quad (2.3.1)$$

que resulta de la eliminación de los términos que no contribuyen, en la ecuación general (1.5.11). Si el flujo forzado es moderado y no genera un calentamiento apreciable, podemos suponer que el término de la disipación viscosa no contribuye significativamente y podemos decir que la energía interna de la partícula material ξ solo cambia debido al calentamiento que le es aplicado desde el fluido adyacente o desde la pared del recipiente, si la partícula ξ está en contacto con ella. Entonces

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (2.3.2)$$

representa el cambio de energía interna de cualquier partícula material ξ .

Supongamos que el calentamiento del fluido se estudia en un tubo horizontal, por el que circula el fluido, empujado por una bomba, como puede apreciarse en la figura 2.3. Podemos integrar la ecuación (2.3.2) para el interior del tubo, que es la región fija $\mathcal{V}_T$, de modo que

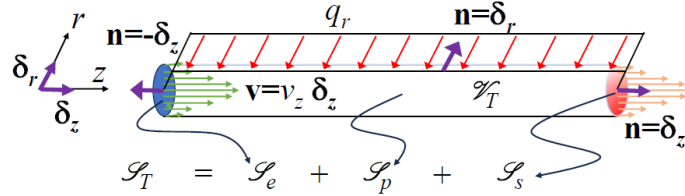


Figura 2.3: Convección forzada en un tubo horizontal. Nótese que el vector normal unitario exterior a $\mathcal{V}_T$ es $\mathbf{n} = -\boldsymbol{\delta}_z$ en la superficie $\mathcal{S}_e$, en tanto que es $\mathbf{n} = \boldsymbol{\delta}_z$ en la superficie $\mathcal{S}_s$ y $\mathbf{n} = \boldsymbol{\delta}_r$ en la superficie $\mathcal{S}_p$. El calentamiento radial es $\mathbf{q} = q_r \boldsymbol{\delta}_r$, en $\mathcal{S}_p$, donde la componente $q_r < 0$.

$$\int_{\mathcal{V}_T} \rho \frac{D\hat{U}}{Dt} dV = \int_{\mathcal{V}_T} -\nabla \cdot \mathbf{q} dV. \quad (2.3.3)$$

Sustituyendo la derivada material e introduciendo la densidad en la derivada temporal, y sustituyendo la ecuación de continuidad (1.5.1) podemos representar el término del lado izquierdo por dos integrales, una de las cuales contiene la divergencia de una función, que movemos al lado derecho de la ecuación, quedando⁴:

$$\int_{\mathcal{V}_T} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) dV = \int_{\mathcal{V}_T} -\nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \hat{U}) dV + \int_{\mathcal{V}_T} -\nabla \cdot \mathbf{q} dV. \quad (2.3.4)$$

³Ver el Bird, sección 2.6 y Soria (2026) sección 11.2 y en particular la subsección 11.2.5.

⁴El procedimiento detallado en este párrafo equivale a regresar la forma lagrangiana de la ecuación 1.5.11 a su forma euleriana, la cual se integra en la región $\mathcal{V}_T$, como puede comprobarse al simplificar e integrar directamente la forma euleriana, ecuación (1.5.5), lo cual coincide con la ecuación (2.3.4).

Como la región delimitada por el tubo no es función del tiempo, podemos intercambiar los operadores de derivación e integración de la integral del lado izquierdo, además podemos aplicar el teorema de la divergencia en las dos integrales del lado derecho, para encontrar que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_T} (\rho \hat{U}) dV = \oint_{\partial \mathcal{V}_T} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \rho \hat{U} dS + \oint_{\partial \mathcal{V}_T} -\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS, \quad (2.3.5)$$

donde $\partial \mathcal{V}_T$ es la superficie cerrada que delimita el tubo, la cual tiene tres secciones: una es la sección transversal por donde entra el fluido, $\mathcal{S}_e$, otra es la sección transversal por donde sale el fluido, $\mathcal{S}_s$ y la tercera es la pared del tubo, $\mathcal{S}_p$, de modo que cada integral sobre la superficie cerrada del tubo equivale a tres integrales, una sobre cada una de las regiones mencionadas. En la pared del tubo, la cual es impermeable al paso del fluido, la proyección normal de la velocidad de flujo es nula, $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$; en cambio, la proyección de $\mathbf{v}$ en la dirección normal, sobre la superficie de entrada, $\mathcal{S}_e$, es $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = v_z$ y $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -v_z$ en $\mathcal{S}_s$. Por otra parte, el calentamiento sólo es importante a través de la pared. Además, la integral de volumen del lado izquierdo es la energía interna total. Entonces la ecuación (2.3.5) resulta:

$$\frac{dU_{Tot}}{dt} = (\rho \langle v_z \rangle A \hat{U})_e - (\rho \langle v_z \rangle A \hat{U})_s + \dot{Q} \quad (2.3.6)$$

La ecuación (2.3.6) es el balance de energía interna integrado en un tubo horizontal, el cual es equivalente a un **balance postulado directamente**, con cantidades totales, medibles, que se pueden establecer como las **variables no-locales** del sistema⁵. Estas son:

- U_{Tot} = Energía interna total del fluido ocupando todo el tubo.
- ρ = Densidad del fluido a la temperatura promedio en el tubo.
- $\langle v_z \rangle$ = Velocidad promedio de flujo en el tubo.
- A = Área interna transversal del tubo.
- $\hat{U}$ = Energía interna por unidad de masa.
- $\dot{Q}$ = Calentamiento a través de la pared del tubo: $\dot{Q} = \int_{\mathcal{S}_p} -q_r dS$.

El balance postulado es la expresión matemática correspondiente al enunciado:

<i>rapidez de acumulación de energía interna en el tubo</i>	=	<i>flujo convectivo de energía interna que entra al tubo</i>	−	<i>flujo convectivo de energía interna que sale del tubo</i>	+	<i>calentamiento a través de la pared del tubo.</i>	(2.3.7)
---	---	--	---	--	---	---	---------

Podemos comprobar que la ecuación (2.3.6) corresponde al enunciado anterior y podría haberse postulado directamente, definiendo previamente el conjunto de las variables no-locales que intervienen, como se ha propuesto arriba.

2.3.2 Convección natural en un tubo vertical

La **convección libre**, o **convección natural**, se produce espontáneamente al cambiar la densidad del fluido, como resultado de los cambios locales de la temperatura. En efecto, la densidad local del fluido depende de su temperatura local; al cambiar localmente la densidad del fluido, la gravedad afecta de manera distinta a las partículas de fluido con mayor o menor densidad, generando una **fuerza de flotación**, que eleva las regiones de menor densidad, sobre las de mayor densidad, que ocupan las posiciones más bajas del dispositivo de flujo.

⁵Para ampliar la discusión de los balances integrados y los balances postulados, ver Soria (2026), sección 2.4, pp.59-65.

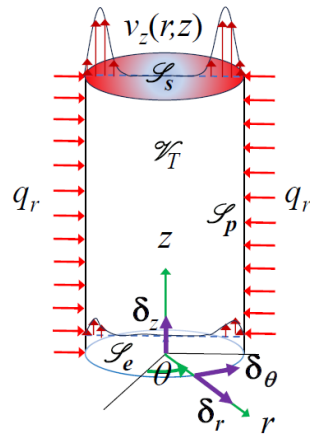


Figura 2.4: Convección natural en un tubo vertical. Todos los elementos del sistema coinciden con los de la figura 2.3, a excepción de la fuerza de gravedad, que aquí es importante y está dirigida en la dirección $-\delta_z$. El calentamiento es radial: $\mathbf{q} = q_r \delta_r$, en $\mathcal{S}_p$, donde la componente $q_r < 0$ y la componente axial de la velocidad depende de dos coordenadas: $v_z(r, z)$. Suponemos una altura pequeña, de modo que en el eje axial la velocidad es $v_z(r, 0) = 0$.

Para ilustrar este proceso, proponemos el flujo por convección natural estacionaria, de un líquido newtoniano en un tubo vertical, con calentamiento radial, ver la figura 2.4. En la convección natural el flujo es consecuencia del calentamiento, que modifica el coeficiente de expansión térmica del fluido, lo cual determina la magnitud del proceso convectivo.

Para representar acertadamente este proceso de calentamiento, de una manera todavía sencilla, debemos considerar la razón fundamental del flujo, que es el calentamiento local del fluido. Este aspecto debe quedar expresado como parte fundamental en las ecuaciones de gobierno, pues no se puede manejar independientemente de la magnitud del calentamiento, a diferencia de lo que ocurre en el calentamiento con convección forzada, donde el dispositivo que regula el flujo es una potencia externa, como la de una bomba, que lo puede cambiar arbitraria e independientemente.

Una manera sencilla de incorporar la causa del movimiento por convección natural es considerar que la densidad del fluido es una función de la temperatura, mediante una ecuación de estado $\rho = \rho(T)$, y aproximar a la relación lineal $\rho(T) = \bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{\beta}(T - \bar{T})$, conocida como la **aproximación de Boussinesq**, la cual es una manera simplificada de tomar en consideración la dependencia de la temperatura, donde $\bar{T}$ es la temperatura media o promedio aritmético. Esta relación lineal se puede encontrar mediante una serie de Taylor alrededor de un estado base que se denota por $\bar{\rho} = \rho(\bar{T})$ y truncada en el término lineal, de donde vemos que

$$\bar{\beta} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (2.3.8)$$

es conocido como el coeficiente de expansión térmica⁶.

Por lo demás, el proceso sigue siendo el mismo que el de calentamiento del ejercicio anterior, por lo que también se representa de la misma manera, es decir, por el balance de energía interna para cualquier partícula material ξ , ecuación (2.3.2), o bien para cualquier posición fija $\mathbf{x}$, ecuación (1.5.5), eliminando los dos términos de disipación, que no son significativos en este proceso. Entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \hat{U}) = -\nabla \cdot (\rho \hat{U} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (2.3.9)$$

⁶Ver Bird, secciones 10.9 y 11.3, así como su nota al pie de la p. 399.

De manera semejante a lo realizado en el ejemplo anterior, podemos integrar la ecuación (2.3.9) en la región $\mathcal{V}_T$, para obtener, finalmente, la ecuación (2.3.5), la cual se puede integrar en las superficies de entrada, de salida y de pared, de modo que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_T} (\rho \hat{U}) dV = \int_{\mathcal{S}_e} \rho \hat{U} v_z dS - \int_{\mathcal{S}_s} \rho \hat{U} v_z dS + \int_{\mathcal{S}_p} -q_r dS, \quad (2.3.10)$$

donde las dos primeras integrales del lado derecho representan flujos convectivos de entrada y salida, respectivamente, más la integral sobre la pared sólida del tubo donde se efectúa el calentamiento radial $q_r < 0$.

El acoplamiento de la velocidad $\mathbf{v}$ y la temperatura T se manifiesta al establecer el balance del ímpetu, ecuación (1.5.3), para flujos laminares e incompresibles, donde la densidad depende linealmente de la temperatura, solamente en el término que representa las fuerzas gravitacionales, es decir, donde tenemos la ecuación de continuidad para flujos incompresibles:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3.11)$$

y la **ecuación de Boussinesq** para flujo del ímpetu:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + [\bar{\rho} - \bar{\rho}\beta(T - \bar{T})] \mathbf{g}, \quad (2.3.12)$$

ver la ecuación (11.3-2) del Bird y el párrafo subsiguiente. La aproximación de Boussinesq es una muestra de la importancia de elegir bien los términos que deben permanecer en una ecuación, pues lo que se pretende resaltar aquí es la influencia de la temperatura en el fenómeno, ya que **el cambio de temperatura es el factor dominante que provoca el flujo** y por ello es imprescindible que se tome en cuenta. Sin embargo, esto se hace junto con el uso de la suposición de incompresibilidad del flujo, que equivale a suponer una densidad constante y muchas veces junto con la sustitución de la densidad ρ del lado izquierdo de la ecuación (2.3.12) por su valor base $\bar{\rho}$ de la serie de Taylor. En la ecuación (2.3.12) es evidente cómo la temperatura afecta las fuerzas gravitacionales al modificar localmente la densidad del fluido, pero se hace también necesario considerar la relación de la energía interna con la temperatura, es decir, una ecuación de estado:

$$\hat{U}(T) = \hat{U}(\bar{T}) + \hat{c}_p(T - \bar{T}), \quad (2.3.13)$$

al aplicar la expresión (2.3.10). Aquí $\hat{c}_p$ es el calor específico a presión constante por unidad de masa (no unidad molar).

2.3.3 Coeficientes de calentamiento por convección

El calentamiento por convección ocurre en los fluidos, desde una frontera, generalmente sólida, es decir, desde una de las superficies o paredes que limitan al fluido, hacia el interior del mismo. La superficie tiene una temperatura T_s y la masa fluida o bulto del fluido tiene una temperatura que podemos denotar por T_0 o por T_∞ .

Es conveniente extender el entendimiento de la expresión de Fourier para el calentamiento por conducción, ecuación (2.2.11), que implica que

el calentamiento procede en la dirección opuesta a la del gradiente de la temperatura, es decir que el calentamiento ocurre en la dirección del máximo decaimiento de la temperatura.

Podemos extender este criterio a la descripción del calentamiento por convección. En este sentido, podemos recurrir a una teoría muy usada en el contexto de los procesos de transferencia de masa, pero aplicándolo aquí a la transferencia de energía térmica. Se trata del **modelo de la película estancada**: Pensemos que el fluido forma una película estancada desde la superficie sólida

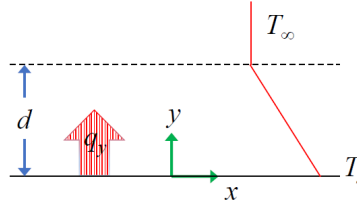


Figura 2.5: Modelo de la película estancada para calentamiento de un fluido desde una superficie.

que lo limita, hacia su interior. La temperatura del fluido en la superficie del sólido es T_s , en tanto que la masa o el bulto de fluido, lejos de la superficie y fuera de la película estancada, tiene la temperatura T_∞ . Ver la figura 2.5.

Consideremos el calentamiento desde la superficie del sólido hacia el interior del fluido, a través de la película estancada. Dicho calentamiento procedería por conducción, de acuerdo con la expresión de Fourier, donde la derivada se puede discretizar en diferencias finitas quedando:

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow q_y = -k \frac{\Delta T}{\Delta y} = -k \frac{T_\infty - T_s}{d - 0} = \frac{k}{d} (T_s - T_\infty), \quad (2.3.14)$$

donde $T_s > T_\infty$ implica que $q_y > 0$ y la ecuación (2.3.14) representa un proceso de calentamiento desde la superficie. Este modelo muy sencillo se conoce como la **ley de enfriamiento de Newton**, que se representa como:

$$q_{\text{conv}} = h(T_s - T_\infty), \quad (2.3.15)$$

donde el coeficiente de calentamiento, $h > 0$, ha reemplazado al coeficiente k/d , de la ecuación (2.3.14). La densidad de calentamiento q_{conv} , tiene unidades de $\left[\frac{\text{watts}}{\text{m}^2} \right] = \left[\frac{\text{joules}}{\text{m}^2 \cdot \text{segundo}} \right]$,

de modo que las unidades del coeficiente de calentamiento h son las de $\left[\frac{\text{watts}}{\text{m}^2 \cdot \text{Kelvin}} \right]$, o bien

$\left[\frac{\text{joules}}{\text{m}^2 \cdot \text{segundo} \cdot \text{Kelvin}} \right]$, cuando las temperaturas están en grados Kelvin o en grados Celsius. La expresión (2.3.15) de la ley de enfriamiento de Newton proporciona un valor positivo cuando la superficie se encuentra a mayor temperatura que el bulto de fluido, $T_s > T_\infty$; en cambio, cuando $T_s < T_\infty$, el valor de $q_{\text{conv}} < 0$, el calentamiento procede en la dirección opuesta, es decir, del seno del fluido hacia la superficie.

El procedimiento reseñado alrededor de las ecuaciones (2.3.14) y (2.3.15) es intuitivo y sólo pretende, como se hizo en siglos pasados, indagar en las semejanzas del transporte por conducción y por convección, para lo cual la propuesta de un término de convección, por analogía a la conducción en una película estancada de fluido, tendría la forma integrada del flux térmico por conducción, pero con un coeficiente de transporte distinto, el coeficiente h , que toma el lugar del factor k/d .

Para estimar el calentamiento (total) por convección desde una superficie, a partir de la densidad de calentamiento por unidad de área, dada por la ecuación (2.3.15), es necesario integrar en el área de la superficie de calentamiento. Si la temperatura T_s cambia en diversos lugares de la superficie de calentamiento, es decir, si T_s es función de la posición en la superficie, $T_s = T_s(\mathbf{x})$, es necesario conocer la función $T_s(\mathbf{x})$ para integrar la expresión:

$$\dot{Q} = \int_{\mathcal{S}_c} h [T_s(\mathbf{x}) - T_\infty] dS, \quad (2.3.16)$$

donde $\dot{Q}$ es el calentamiento y $\mathcal{S}_c$ es la región bidimensional de calentamiento conocida como superficie de calentamiento.

Es posible expresar el calentamiento en su forma integrada, aplicando el teorema del valor medio a la expresión (2.3.16), de donde tenemos que

$$\dot{Q} = \overline{(T_s - T_\infty)} \int_{\mathcal{S}_c} h dS = \bar{h} A \overline{(T_s - T_\infty)}. \quad (2.3.17)$$

En la última igualdad estamos definiendo un coeficiente de calentamiento medio sobre toda la superficie de calentamiento. La temperatura del cuerpo fluido, fuera de la película también puede ser dependiente de la posición, es decir que puede ser $T_\infty = T_\infty(\mathbf{x})$. Esto da lugar a la definición de otros coeficientes h promediados con diversas ponderaciones, como veremos a continuación.

2.3.4 Coeficientes h locales

Podemos multiplicar la densidad de calentamiento q_{conv} por un elemento diferencial del área de transferencia dA , para obtener un calentamiento diferencial alrededor del punto $\mathbf{x}$, de modo que, de la ecuación (2.3.15) resulta:

$$d\dot{Q} = q_{\text{conv}} dA = h_{\text{loc}}(T_s - T_\infty)_{\text{loc}} dA = h_{\text{loc}} \Delta T_{\text{loc}} dA. \quad (2.3.18)$$

Aquí hemos incorporado la notación h_{loc} para denominar el coeficiente de calentamiento empleado, que es uno que corresponde a la diferencia local de temperaturas, $(T_s - T_\infty)_{\text{loc}} = \Delta T_{\text{loc}}$, entre el fluido en un punto dado de la superficie de calentamiento y la masa de fluido lejos de dicho punto.

2.3.5 Coeficientes h convencionales

Por otra parte, se utilizan principalmente tres definiciones de los coeficientes de calentamiento en sistemas integrados. Estos coeficientes corresponden, uno a uno, a tres diferencias de temperatura definidas, cada una, de una manera distinta. Ya que los valores de los coeficientes de calentamiento se determinan experimentalmente, es importante distinguir qué definición del promedio de la diferencia de temperatura corresponde a cada estimación del coeficiente de calentamiento que se utilice.

Consideremos el calentamiento por convección desde una superficie, para el fluido representado en la figura 2.1(b), desde un plano 1, localizado en la coordenada $x = x_1$ y un plano 2, localizado en $x = x_2$, de acuerdo con la figura 2.6. Entonces, la temperatura del fluido en la superficie de calentamiento variará desde el valor T_{s1} en la sección 1, hasta el valor T_{s2} en la sección 2. Además, el fluido presente en la masa de fluido tendrá, en general, temperaturas entre $T_{\infty 1}$ y $T_{\infty 2}$, respectivamente.

Una primera manera de definir una diferencia de temperatura convencional promedio resulta al considerar solamente la diferencia de temperaturas en la sección de entrada, $T_{s1} - T_{\infty 1}$. La consideración de este valor conduce la ecuación (2.3.17) a la definición del coeficiente de calentamiento h_1 de modo que resulte

$$\dot{Q} = \overline{h(T_s - T_\infty)} \int_{\mathcal{S}_c} dS = h_1 \Delta T_1 A, \quad \text{donde } \Delta T_1 = T_{s1} - T_{\infty 1} \quad (2.3.19)$$

es la **diferencia de temperaturas a la entrada** de la región 1-2.

Otra manera de definir un valor medio para la ecuación (2.3.17) se establece al utilizar la **media aritmética de las diferencias de temperatura**, ΔT_a , en combinación con la definición de h_a , el coeficiente de calentamiento basado en la media aritmética de las diferencias de temperatura:

$$\dot{Q} = \overline{h(T_s - T_\infty)} \int_{\mathcal{S}_c} dS = h_a \Delta T_a A, \quad \text{donde } \Delta T_a = \frac{(T_{s1} - T_{\infty 1}) + (T_{s2} - T_{\infty 2})}{2}. \quad (2.3.20)$$

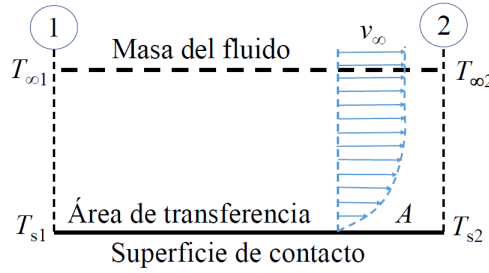


Figura 2.6: Temperaturas en una porción de fluido, comprendido de la sección 1 a la sección 2. El fluido, en la superficie de contacto tiene temperaturas T_{s1} y T_{s2} , en tanto que en la masa al interior del fluido, tiene temperaturas $T_{\infty 1}$ y $T_{\infty 2}$, respectivamente. El área de calentamiento o área de transferencia de la superficie de contacto $\mathcal{S}_c$ es A y la velocidad del fluido cambia desde su condición de no-deslizamiento en la superficie de contacto hasta su valor constante v_{∞} en la masa del fluido.

La tercera manera de definir un valor medio en la ecuación (2.3.17) utiliza la **media logarítmica de las diferencias de temperatura**, $\Delta T_{\ln}$, así como el coeficiente de calentamiento $h_{\ln}$:

$$\dot{Q} = \overline{h(T_s - T_{\infty})} \int_{\mathcal{S}_c} dS = h_{\ln} \Delta T_{\ln} A, \quad \text{donde } \Delta T_{\ln} = \frac{(T_{s1} - T_{\infty 1}) - (T_{s2} - T_{\infty 2})}{\ln(T_{s1} - T_{\infty 1}) - \ln(T_{s2} - T_{\infty 2})}. \quad (2.3.21)$$

La media logarítmica de las diferencias de temperatura es un término que aparece de manera natural al establecer los balances de un intercambiador de calor de doble tubo, como puede apreciarse, por ejemplo en el tratamiento de Incropera y De Witt⁷

2.3.6 Valores de los coeficientes de calentamiento

Además de la diversidad de definiciones a tomar en consideración para estimar o determinar adecuadamente los coeficientes de calentamiento, es muy importante notar que sus comportamientos dependen ampliamente, tanto de las propiedades térmicas del fluido como de las características del flujo, lo cual se refleja en los números adimensionales de Prandtl (Pr) y de Reynolds (Re), respectivamente. El mismo coeficiente, adimensionalizado, se conoce como otro número adimensional, el número de Nusselt (Nu), de modo que $Nu = f(Pr, Re)$.

Más allá de las definiciones detalladas de los coeficientes de calentamiento, los rangos de sus valores dependen principalmente del estado de agregación físico de los materiales, es decir, si se encuentran como gases y vapores o como líquidos, así como del tipo de convección, que puede ser forzada o natural.

Para la convección natural, otro grupo adimensional, donde interviene el coeficiente de expansión térmica, es también muy importante. El grupo adimensional es conocido como el número de Grashoff, (Gr), de modo que $Nu = f(Pr, Gr)$.

2.4 Calentamiento por radiación

La radiación es un modo de calentamiento de un cuerpo a través de su superficie, desde un espacio que bien puede ser vacío. Este modo de transferencia no requiere un medio de transferencia, pues la potencia emitida no se propaga por movimientos moleculares, sino de manera ondulatoria, a través del espacio vacío u ocupado por algún cuerpo transparente a la propagación radiativa, como un gas.

⁷Vease Incropera, De Witt, 1999, sección 11.3.

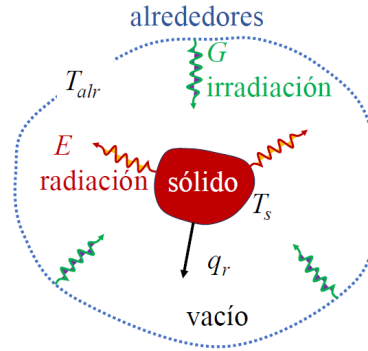


Figura 2.7: Radiación e irradiación en una superficie sólida a temperatura T_s .

2.4.1 Irradiación hacia una superficie desde los alrededores

Son dos los principales términos del transporte de energía a considerar en el fenómeno de radiación. Centrando la atención en un cuerpo, que puede ser un sólido o un fluido, cuya superficie se encuentra a la temperatura T_s , observamos que dicha superficie recibe energía por irradiación desde los alrededores. Esta irradiación puede tener su origen en fuentes determinadas, como el sol o algunas superficies cuyo efecto se aglutina en algo que llamaremos la temperatura de los alrededores, T_{alr} . Ver figura 2.7. El segundo término del transporte radiante es la radiación emitida desde la superficie del cuerpo sólido o fluido, a la temperatura T_s , de la cual hablaremos en la siguiente subsección.

La **radiación incidente** se determina por la intensidad espectral $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi)$, que es la proporción de la energía radiante de longitud de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$, que incide de la dirección (θ, ϕ) por unidad de área de la superficie normal a esta dirección, por unidad de ángulo sólido.

La **irradiación espectral** $G_\lambda(\lambda)$, en unidades de $(\text{W}/\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$ es la rapidez de la radiación incidente de longitud de onda λ en una superficie unitaria, por intervalo de longitud de onda $d\lambda$ alrededor del valor λ .

Además, la **irradiación total** $G(\text{W}/\text{m}^2)$ es la razón a la que incide la radiación por unidad de área, desde todas las direcciones y a todas las longitudes de onda. Entonces,

$$G = \int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d\lambda \quad (2.4.1)$$

Partes de la irradiación espectral se pueden **reflejar, transmitir o absorber** en materiales semitransparentes, de modo que

$$G_\lambda = G_{\lambda,\text{ref}} + G_{\lambda,\text{tr}} + G_{\lambda,\text{abs}} \quad (2.4.2)$$

Tanto la irradiación que se refleja como la que se transmite a través del material, no afectan la energía ganada por dicho material. En consecuencia, sólo la irradiación absorbida por el material afecta su balance energético y existe una absorptividad direccional espectral, $\alpha_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \phi)$, una absorptividad hemisférica espectral $\alpha_\lambda(\lambda)$ y, finalmente, la **absorptividad hemisférica total** α , la cual representa la fracción de la irradiación total absorbida por la superficie:

$$\alpha = \frac{G_{\text{abs}}}{G} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda(\lambda) G_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda} \quad (2.4.3)$$

2.4.2 Emisividad de un cuerpo negro

La radiación emitida desde una superficie es la rapidez a la que se libera energía por unidad de área, es decir, la potencia emisiva superficial E , que tiene un límite superior que se conoce como la

radiación del cuerpo negro, E_{cn} y que es establecida por la ecuación de Stefan-Boltzmann:

$$E_{\text{cn}} = \sigma T_s^4, \quad (2.4.4)$$

donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ es la constante de Stefan-Boltzmann, con la temperatura determinada en grados absolutos, en este caso, grados Kelvin.

La radiación emitida desde las superficies de los cuerpos reales depende del material y del grado de pulimento o rugosidad de la superficie. Puesto que la radiación del cuerpo negro es el valor máximo que puede alcanzar la transferencia de energía por radiación, podemos representar la radiación desde cualquier superficie, introduciendo un factor acotado entre cero y uno, que llamamos coeficiente de emisividad: $0 < \varepsilon \leq 1$. Así, la potencia emitida, por unidad de área es:

$$E = \varepsilon \sigma T_s^4. \quad (2.4.5)$$

2.4.3 Ley de Kirchhoff

Como hemos visto, todo cuerpo real absorbe cierta irradiación G_{abs} , en proporción a la irradiación total G . Dicha proporción está acotada de modo que la absorptividad, definida en la primera igualdad de la ecuación (2.4.3), es una cantidad acotada: $0 < \alpha \leq 1$, de manera similar a la emisividad ε . La absorptividad $\alpha \leq 1$ es propia de superficies opacas con irradiación que, en parte se refleja y en parte también se transmite, atravesando los cuerpos semitransparentes. Otra parte de la irradiación se absorbe en el cuerpo. La irradiación absorbida está en una situación semejante a la representada en la figura 2.7, donde la superficie de un sólido pequeño o de varios cuerpos pequeños en relación con un recinto mucho mayor, se encuentran en equilibrio térmico, de modo que $T_{\text{alr}} = T_s$ y en régimen estacionario. En tal situación y sin importar las propiedades radiativas, la superficie del recinto forma una cavidad de cuerpo negro, de modo que la irradiación equivale a

$$G = E_{\text{cn}}(T_s), \quad (2.4.6)$$

y para cada uno de los cuerpos dentro del recinto podemos escribir un balance de energía, que para el cuerpo j -ésimo da

$$\alpha_j G A_j - E_j(T_s) A_j = 0, \quad (2.4.7)$$

donde podemos despejar G y sustituir la ecuación (2.4.6) para obtener que

$$E_{\text{cn}}(T_s) = \frac{E_j(T_s)}{\alpha_j}, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, \quad (2.4.8)$$

que es la conocida **ley de Kirchhoff**. Otra manera de expresarla resulta al sustituir la ecuación (2.4.5), de manera que $E_j = \varepsilon_j \sigma T_s^4$ y por lo tanto

$$\frac{\varepsilon_j}{\alpha_j} = 1, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, \quad (2.4.9)$$

que es otra manera de expresar la ley de Kirchhoff, o su equivalente, al decir que **la emisividad hemisférica total ε es igual a la absorptividad hemisférica total α de cualquier superficie**.

En situaciones menos restringidas que la anterior, cuando los alrededores se encuentran a una temperatura representativa T_{alr} , distinta a T_s , cualquier superficie gris puede, todavía, ser evaluada por la ley de Kirchhoff para representar su radiación como una buena aproximación. Entonces, podemos expresar el calentamiento neto emitido por radiación desde la superficie del cuerpo como:

$$q_r = E - G_{\text{abs}} = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{\text{alr}}^4). \quad (2.4.10)$$

En particular, esta puede ser una situación frecuente en el laboratorio, donde experimentos con calentamiento por convección desde superficies expuestas, tienen también una componente de calentamiento por radiación, debido a diferencia apreciables de temperatura entre la temperatura de los alrededores y la temperatura de la superficie de un cuerpo sólido sujeto al calentamiento.

2.4.4 Coeficiente de calentamiento por radiación

La diferencia de temperaturas $(T_s^4 - T_{\text{alr}}^4)$ se puede reorganizar usando productos notables, de modo que

$$T_s^4 - T_{\text{alr}}^4 = (T_s^2 - T_{\text{alr}}^2)(T_s^2 + T_{\text{alr}}^2) = (T_s - T_{\text{alr}})(T_s + T_{\text{alr}})(T_s^2 + T_{\text{alr}}^2), \quad (2.4.11)$$

con lo cual, la ecuación (2.4.10) se puede expresar en función de un coeficiente de calentamiento por radiación altamente dependiente de las temperaturas, $h_r(T_s, T_{\text{alr}})$, de modo que

$$q_r = h_r(T_s - T_{\text{alr}}), \quad (2.4.12)$$

donde

$$h_r = \varepsilon \sigma (T_s + T_{\text{alr}})(T_s^2 + T_{\text{alr}}^2). \quad (2.4.13)$$

2.5 Procesos de potencia mecánica

2.5.1 Trabajo efectuado por fuerzas de presión

Consideremos el proceso de flujo de un gas desde un depósito a presión constante P_G , que descarga por un tubo cuya superficie transversal tiene un área A , donde la presión cae de P_0 a la entrada al tubo hasta P_L a la salida, como se aprecia en la figura 2.8.

Calcular el trabajo realizado sobre el gas en su paso a través del tubo, así como la rapidez de trabajo sobre el mismo gas.

La fuerza $\mathbf{F}$ por unidad de volumen, efectuada por la presión sobre el gas en el tubo es

$$\frac{\mathbf{F}}{AL} = -\nabla P = \frac{P_0 - P_L}{L} \boldsymbol{\delta}_z, \quad (2.5.1)$$

donde $\boldsymbol{\delta}_z$ es un vector unitario dirigido en la dirección del eje coordenado z . El desplazamiento del gas en el tubo es el vector

$$\mathbf{L} = L \boldsymbol{\delta}_z, \quad (2.5.2)$$

de donde, el trabajo realizado sobre el gas en su recorrido por el tubo es

$$W = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = -AL^2 \frac{dP}{dz} = AL(P_0 - P_L). \quad (2.5.3)$$

Por otra parte, la rapidez de trabajo sobre el gas, por fuerzas de presión se puede estimar en variables promediadas, como:

$$\dot{W} = \langle v_z \rangle \boldsymbol{\delta}_z \cdot \mathbf{F} = -AL \langle v_z \rangle \frac{dP}{dz} = A \langle v_z \rangle (P_0 - P_L). \quad (2.5.4)$$

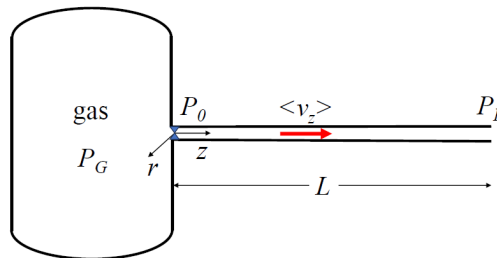


Figura 2.8: Flujo de un gas por el tubo de descarga de un depósito.

Es importante notar que la fuerza de presión corresponde a su gradiente, es decir, a la dirección de su máximo cambio, no al valor mismo de la presión. También, en la ecuación (2.5.1) vemos que la variable P se puede interpretar como un potencial de fuerza y que $-\nabla P$, el gradiente de un potencial, es una fuerza conservativa, lo cual se sabe porque toda fuerza es conservativa si, y sólo si su rotacional es cero, pero también sabemos que el rotacional de un gradiente es cero, es decir, que

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla P = 0. \quad (2.5.5)$$

La principal característica de las fuerzas conservativas es que los valores de sus integrales sólo dependen de los límites de integración y no dependen de la trayectoria que recorren desde el punto de inicio hasta el punto final. Debido a esto, **tanto el trabajo W como la rapidez de trabajo $\dot{W}$, de las ecuaciones (2.5.3) y (2.5.4) representan entidades mecánicas**, es decir, cantidades que corresponden a entidades representadas únicamente en el nivel de descripción local.

Un elemento diferencial de trabajo, a partir de la ecuación (2.5.3) se puede escribir como

$$dW = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = -dzAL \frac{dP}{dz} = -ALdP = -VdP. \quad (2.5.6)$$

2.5.2 Procesos de disipación de trabajo mecánico

Posiblemente, el ejemplo más frecuente de un proceso con realización de trabajo desde los alrededores sobre un sistema, es el trabajo de compresión o de expansión de un gas encerrado en un recipiente cilíndrico, por medio de un pistón o émbolo que ejerce una fuerza normal a la superficie interna del mismo sobre el gas contenido al interior del recipiente.

La figura 2.9 representa la compresión de un gas en un cilindro con un pistón que se desplaza, ejerciendo una fuerza efectiva $\mathbf{F}_e$ sobre el gas. **Esta fuerza es efectiva**, porque los efectos de fricción del pistón con las paredes del cilindro deben ser evaluados como parte de la eficiencia del aparato, mediante calibraciones y procedimientos experimentales apropiados. En este caso, **el sistema que vamos a considerar es el gas contenido en el cilindro**, de manera que las paredes del cilindro, así como el pistón con sus sellos, lubricantes y juntas, **no forma parte del sistema considerado y no puede explicar las irreversibilidades** del sistema. Esta afirmación contrasta con las explicaciones de algunos autores, quienes consideran que la fricción en los sellos del cilindro es causa de irreversibilidad del trabajo realizado. Desde mi punto de vista, nada tiene que ver, ya que el pistón y sus accesorios no forman parte del sistema. En cambio, la relación entre los cambios temporales de la densidad y la magnitud de los efectos viscosos es de capital importancia para la estimación de la magnitud de las irreversibilidades del sistema.

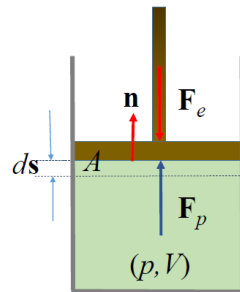


Figura 2.9: Trabajo de compresión efectuado por un pistón sobre el gas encerrado en un cilindro.

En otro libro⁸ he propuesto una desigualdad de órdenes de magnitud para estimar cuándo la **disipación viscosa** de un fluido newtoniano es mucho menor que la **disipación térmica reversible**,

⁸Soria (2022), pag.131, desigualdad (4.2.5)

en un proceso de cambio de volumen, ya sea de compresión o de expansión. Esta desigualdad se puede escribir como:

$$\frac{|-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}|}{|P \nabla \cdot \mathbf{v}|} = O\left(\frac{\mu |\nabla \mathbf{v}|^2}{\frac{P}{\rho} \left|\frac{D\rho}{Dt}\right|}\right) \ll 1, \quad (2.5.7)$$

donde el numerador, $|\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}|$ representa el valor absoluto de la disipación viscosa, que para un fluido newtoniano tiene un término principal del orden de $\mu |\nabla \mathbf{v}|^2$ y cuyo denominador, $|P \nabla \cdot \mathbf{v}|$, representa el valor absoluto de la disipación térmica reversible que, para flujos compresibles de fluidos puros, es del orden de $\frac{P}{\rho} \left|\frac{D\rho}{Dt}\right|$, donde se ha sustituido la divergencia de la velocidad empleando la ecuación de continuidad. En efecto, en la desigualdad anterior, (2.5.7), comparamos las magnitudes de estos dos efectos de disipación, ambos para el fluido encerrado en el cilindro. Cuando la desigualdad se satisface, el proceso de compresión o expansión se aproxima a la reversibilidad, lo cual se facilita con bajos gradientes de velocidad y elevada rapidez temporal de cambio de la densidad del fluido. Estos elementos deben tomarse en cuenta al diseñar los aparatos, ya que permiten tener en cuenta los fluidos a usar y los experimentos a realizar, para estimar cómo una experiencia específica se aproxima a la reversibilidad.

Un elemento diferencial del trabajo, dW , realizado **sobre el gas**, es:

$$dW = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.5.8)$$

Un balance de fuerzas en la superficie interna del pistón, en condiciones de equilibrio mecánico, conduce a la igualdad:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_e = 0 = P\mathbf{A}\mathbf{n} + \mathbf{F}_e, \quad (2.5.9)$$

de donde $\mathbf{F}_e = -P\mathbf{A}\mathbf{n}$. Además, $d\mathbf{s}$ es un vector de desplazamiento diferencial del pistón, que **reduce el volumen de gas en la cantidad** $dV = A d\mathbf{s}$, donde $d\mathbf{s}$ es una cantidad negativa, ya que $\frac{ds}{dt} < 0$, y puesto que $dt > 0$ conforme avanza el tiempo, resulta que $ds = \frac{ds}{dt} dt < 0$ para los procesos de compresión, lo cual coincide con la realización de trabajo sobre el sistema, por lo que $dW > 0$. Sustituyendo $\mathbf{F}_e$ y $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$ en la ecuación (2.5.8) tenemos que

$$dW = -P\mathbf{A}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} ds = -PA ds = -PdV. \quad (2.5.10)$$

Aquí vemos que el trabajo es el producto de una cantidad intensiva, la densidad de fuerza $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$ por una cantidad extensiva, el desplazamiento diferencial $[\text{m}^3]$, dando por resultado un término con unidades de energía: $[\text{Nm}]$ o $[\text{J}]$.

2.5.3 Trabajo mecánico y disipación térmica

Si revisamos las expresiones (2.5.6) y (2.5.10), vemos que la primera está conformada por un elemento diferencial de una fuerza intensiva, la presión, por el volumen del sistema, en tanto que la segunda es el producto de otra fuerza intensiva por un elemento diferencial de volumen. **Ambas expresiones son conocidas como trabajo mecánico**, y se denotan muy frecuentemente por el mismo símbolo, dW , como hemos hecho aquí. Sin embargo propiamente hablando, sólo la ecuación (2.5.6) expresa la realización de trabajo mecánico que, como se ha indicado, corresponde a una fuerza conservativa, el gradiente de la presión aplicado a un elemento diferencial de desplazamiento axial en el tubo. Por su parte, la ecuación (2.5.10) corresponde a una fuerza no-conservativa, la presión absoluta, aplicada a un elemento diferencial de volumen del cilindro. Esta expresión no

corresponde a trabajo mecánico, sino a un efecto de disipación térmica que aplica en procesos tales como la compresión o la expansión, lo cual puede verse fácilmente a partir de la expresión diferencial del primer principio de la termodinámica en un sistema cerrado, que se expresa como:

$$dU = \delta Q + \delta W. \quad (2.5.11)$$

Aquí, δW corresponde a la diferencial dW de la ecuación (2.5.10). El cambio de notación corresponde a una convención existente entre muchos practicantes de la termodinámica clásica, para indicar que el trabajo W es una variable de proceso, no una de estado como la energía interna U . Esto implica que el trabajo, así como el calor Q varían su magnitud, de acuerdo con la trayectoria o el proceso que siga el calentamiento o la realización de trabajo. La ecuación (2.5.11) indica que, en un sistema cerrado, el calor agregado y el trabajo realizado sobre el sistema, incrementan su energía interna, modificando su estado mediante un incremento diferencial dU . Lo anterior implica que δW , así como δQ , los dos modos de transferencia de energía, se incorporan al cuerpo como parte de su energía interna. Es decir que, el trabajo realizado δW , al incorporarse a la energía interna del cuerpo, no está más disponible en el nivel de descripción local, como un término mecánico, pues la energía de dicho término ha migrado de las escalas locales a las pequeñas escalas moleculares, como fluctuaciones térmicas, incrementando la temperatura o el calor latente necesario para el cambio de fase del cuerpo.

En el proceso de compresión la disipación térmica, representada en el término dW de la ecuación (2.5.10), corresponde a la reducción de la trayectoria libre media entre las moléculas del gas que se comprime y es, por lo tanto, un proceso de intercalamiento de unas moléculas con otras, con cierta regularidad u ordenamiento. Este ordenamiento se ve reflejado en el hecho de que el término no contribuye a la entropía. El proceso es reversible, puesto que en la expansión ocurre un proceso inverso al intercalado, dando lugar al incremento de la trayectoria libre media.

Por lo dicho anteriormente, el término dW de la ecuación (2.5.10) no debe confundirse con trabajo mecánico, pues corresponde a la disipación reversible en los procesos de cambio de volumen y se manifiesta en el incremento de temperatura en los procesos de compresión y en la disminución de temperatura en los procesos de expansión.

En cambio, el término dW de la ecuación (2.5.6) corresponde propiamente a trabajo mecánico, el cual puede manifestarse como un incremento de la energía cinética del fluido, en el nivel de descripción local, o puede contribuir al equilibrio mecánico con las otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Ejercicios

E.2.5.2-1. Desarrolla la ecuación equivalente a (2.5.10) para un proceso de expansión de un gas, partiendo de los elementos de la figura 2.9, pero dirigiendo las fuerzas del pistón y de la presión de acuerdo al proceso de expansión.

E.2.5.2-2. Determina cómo se modifican las expresiones intermedias de los procesos de compresión y expansión si, en la figura 2.9, el vector unitario $\mathbf{n}$ se elige en la dirección opuesta al que se encuentra dibujado en dicha figura.

3. Procesos de transporte de fluidos multicomponentes

3.1 Los materiales multicomponentes

Llamaremos materiales multicomponentes a los cuerpos fluidos compuestos por varias especies químicas, que forman mezclas homogéneas completamente miscibles. Así, la mezcla de varios líquidos pueden formar una sola fase líquida o la disolución de algunas sales o tinturas vegetales en un solvente, como el agua, el etanol o el benceno, pueden formar una sola fase con varios componentes o especies químicas.

Las propiedades de cada especie química de una mezcla multicomponente se denota por un subíndice K , donde $K = A, B, \dots, G$, son las diversas especies de la mezcla. Así, por ejemplo, la densidad de la especie K -ésima, ρ_K , equivale a la masa de la especie K -ésima que existe en un volumen unitario de la mezcla multicomponentes.

3.2 Balances de masa

3.2.1 Balances de masa de la especie química K -ésima

Balance en unidades másicas

El balance diferencial de masa de la especie química K -ésima, de un fluido multicomponente que participa en reacciones químicas homogéneas es:

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_K \mathbf{v}_K) - r_K = 0, \text{ para } K = A, B, \dots, G, \quad (3.2.1)$$

donde $\mathbf{v}_K$ es la velocidad de flujo de la especie K -ésima y r_K es la rapidez de producción de la especie química K -ésima por unidad de volumen, causada por reacciones químicas homogéneas. Además, si la especie K -ésima es un reactivo, $r_K < 0$.

Balance en unidades molares

El balance de masa se puede expresar en unidades molares, por medio de las concentraciones, que están ponderadas en las masas moleculares. Sea M_K la masa molecular de la K -ésima especie

química. Si dividimos cada término de la ecuación (3.2.1) entre M_K tenemos:

$$\frac{\partial c_K}{\partial t} + \nabla \cdot (c_K \mathbf{v}_K) - R_K = 0, \text{ para } K = A, B, \dots, G, \quad (3.2.2)$$

donde $c_K = \rho_K/M_K$ es la concentración de la especie K -ésima y $R_K = r_K/M_K$ es la rapidez de producción de la especie K -ésima por las reacciones químicas homogéneas, en unidades molares.

3.2.2 Balances de masa de la mezcla

Balance en unidades másicas

Sumando las G ecuaciones de balance en unidades másicas (3.2.1) tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.2.3)$$

donde

$$\rho = \sum_{K=A}^G \rho_K; \quad \rho \mathbf{v} = \sum_{K=A}^G \rho_K \mathbf{v}_K; \quad 0 = \sum_{K=A}^G r_K, \quad (3.2.4)$$

son propiedades de la mezcla, es decir, la densidad de la mezcla ρ , la velocidad baricéntrica $\mathbf{v}$ y la sumatoria de la producción y consumo de especies que reaccionan, la cual es cero, ya que la masa total de productos es igual a la masa total de reactivos.

Balance en unidades molares

De manera semejante, sumamos los G balances en unidades molares (3.2.2), para obtener:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{V}) = R, \quad (3.2.5)$$

donde

$$c = \sum_{K=A}^G c_K; \quad c \mathbf{V} = \sum_{K=A}^G c_K \mathbf{v}_K; \quad R = \sum_{K=A}^G R_K. \quad (3.2.6)$$

Aquí c es la concentración de la mezcla multicomponente, $\mathbf{V}$ es la velocidad de la mezcla multicomponente promediada en moles y R es la tasa neta de producción de moles en un fluido multicomponente con reacciones químicas homogéneas, la cual es, en general, distinta de cero, debido a que el número total de moles de los productos puede ser distinto al número total de moles de los reactivos de las diversas reacciones químicas.

3.2.3 Relaciones entre parámetros de la mezcla

Si dividimos entre la densidad de la mezcla, la primera ecuación de (3.2.4), tenemos

$$1 = \sum_{K=A}^G \omega_K, \quad (3.2.7)$$

donde $\omega_K = \rho_K/\rho$ es la fracción masa de la K -ésima especie de la mezcla. La ecuación (3.2.7) indica que la suma de las fracciones masa de todas la especies de una mezcla es la unidad. De manera similar, si dividimos la primera ecuación de (3.2.6) entre la concentración de la mezcla c , tenemos que

$$1 = \sum_{K=A}^G x_K, \quad (3.2.8)$$

donde $x_K = c_K/c$ es la fracción molar de la especie K -ésima. Además

$$\bar{M} = \frac{\rho}{c} \quad (3.2.9)$$

es la masa molecular media. Con esta expresión y la definición de x_K , podemos encontrar que

$$x_K M_K = \omega_K \bar{M}. \quad (3.2.10)$$

Si sumamos la ecuación (3.2.10) para todas las especies, tenemos que

$$\bar{M} = \sum_{K=A}^G x_K M_K, \quad (3.2.11)$$

es una definición alternativa para la masa molecular media, $\bar{M}$.

3.3 Flujo medio y difusión de especies

3.3.1 Densidades de flujo o fluxes

La densidad de flujo másico de la K -ésima especie química es

$$\mathbf{n}_K = \rho_K \mathbf{v}_K, \quad (3.3.1)$$

y la densidad de flujo molar de la K -ésima especie química es

$$\mathbf{N}_K = c_K \mathbf{v}_K. \quad (3.3.2)$$

En ambos casos, la velocidad se puede descomponer en dos partes: la velocidad de la mezcla, que corresponde a la representación másica, $\mathbf{v}$ o la velocidad molar de la mezcla $\mathbf{V}$ más la diferencia que ajusta al valor de la velocidad, de modo que

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v} + \mathbf{u}_K = \mathbf{V} + \mathbf{U}_K, \quad (3.3.3)$$

donde $\mathbf{u}_K$ y $\mathbf{U}_K$ son conocidas como velocidades de difusión y corresponden a las diferencias de la velocidad de la K -ésima especie con respecto a la velocidad baricéntrica $\mathbf{v}$ o a la velocidad molar de la mezcla $\mathbf{V}$, respectivamente. Sustituyendo los sumandos de (3.3.3) en las ecuaciones (3.3.1) y (3.3.2), según corresponde, llegamos a:

$$\mathbf{n}_K = \rho_K \mathbf{v} + \mathbf{j}_K, \quad (3.3.4)$$

donde la densidad de flujo másico $\mathbf{n}_K$ equivale a la suma del flujo convectivo $\rho_K \mathbf{v}$ más el flujo difusivo $\mathbf{j}_K = \rho_K \mathbf{u}_K$, por unidad de área, para la K -ésima especie, en tanto que la densidad de flujo molar de la K -ésima especie química, $\mathbf{N}_K$, resulta

$$\mathbf{N}_K = c_K \mathbf{V} + \mathbf{J}_K, \quad (3.3.5)$$

donde la densidad de flujo molar $\mathbf{N}_K$ equivale al flujo molar convectivo $c_K \mathbf{V}$ más el flujo molar difusivo $\mathbf{J}_K$, por unidad de área, para la K -ésima especie.

3.3.2 Balances de masa con fluxes convectivos y difusivos

Nota sobre el uso del término *flux* y el concepto de densidad

Las cantidades extensivas son proporcionales a la masa M del cuerpo $\mathcal{C}$, pero pueden transformarse en intensivas al convertirlas en cantidades específicas; esto se logra al dividir la cantidad extensiva entre la masa del cuerpo. Así, U es la energía interna de una masa dada M , de un material $\mathcal{C}$. Entonces, la energía interna específica es $\hat{U} = U/M$, la cual permanece constante ante los cambios de la masa del cuerpo y tiene las dimensiones de [energía/masa]. Las configuraciones espaciales del cuerpo ocupan regiones $\mathcal{V} \subset \mathbb{E}^3$, cuyo volumen es alguna cantidad V [m^3], de modo que la densidad de la masa del cuerpo, que reconocemos simplemente por la palabra *densidad*, es $\rho = M/V$, la cual tiene las dimensiones de [masa/volumen] y es el término fundamental para transformar las cantidades específicas en densidades. Así, la densidad de la energía interna del cuerpo $\mathcal{C}$ es $\rho\hat{U}$ y tiene las unidades de [energía/volumen]. Este concepto de densidades aplica a las variables de estado y las densidades son volumétricas.

Podemos utilizar el concepto de densidad para otras cantidades, que representan flujos. Así, para estimar el flujo en la descarga de un tubo, podemos medir el volumen V de líquido que se acumula en un recipiente, durante un lapso de tiempo dado t . El volumen acumulado en el recipiente es proporcional, tanto a la masa del fluido $\mathcal{C}$ que ha fluido por el tubo, como al lapso de tiempo t , que ha durado su flujo. El caudal o flujo volumétrico $Q = V/t$ corresponde al volumen de líquido que ha salido por el tubo en un tiempo unitario. Si dicho volumen hubiera mantenido la forma del tubo del cual ha salido, sería igual a un cilindro cuya superficie transversal tendría área A y longitud L , es decir que $V = AL$ y por lo tanto, también $Q = AL/t$ o bien $Q/A = L/t = \langle v \rangle$ es la velocidad media de flujo, la cual equivale a la longitud axial L recorrida por el fluido en un segundo. La velocidad media de flujo $\langle v \rangle$ equivale también al flujo volumétrico que sale por un área transversal unitaria y es en este sentido que utilizamos el término de *flux*, para indicar los flujos a través de una superficie de área unitaria. En este sentido,

el concepto de flux, o densidad de flujo, equivale al de un flujo por unidad de área transversal,

es decir que al término *densidad de flujo* le corresponde la división entre el área de una superficie transversal, el área unitaria, no la división entre el volumen del cuerpo, como en el caso de las variables de estado, que son cantidades por unidad de volumen.

Balance en unidades másicas

Los términos convectivo y difusivo de la ecuación (3.3.4) se pueden sustituir para el flujo de la ecuación (3.2.1), el cual es equivalente a éstos, debido a la ecuación (3.3.1). Entonces el balance diferencial de masa de la especie química K —ésima, del fluido multicomponente es:

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_K \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{j}_K - r_K = 0, \text{ para } K = A, B, \dots, G. \quad (3.3.6)$$

Esta forma de la ecuación se ha expresado como el balance de masa de la especie química K —ésima, ecuación (1.5.2) en un sistema euleriano y como la ecuación (1.5.8) para una partícula material ξ . De manera semejante, también podemos expresar el balance de una especie química en términos molares, como sigue.

Balance en unidades molares

El balance de masa se puede expresar en unidades molares, sustituyendo el flujo de la ecuación (3.2.2) por los términos de flujo convectivo y difusivo de la expresión (3.3.5), debido a que la densidad de flujo molar es la expresión (3.3.2). Entonces

$$\frac{\partial c_K}{\partial t} + \nabla \cdot (c_K \mathbf{V}) + \nabla \cdot \mathbf{J}_K - R_K = 0, \text{ para } K = A, B, \dots, G, \quad (3.3.7)$$

Sumatorias de fluxes difusivos

Sumando los balances de masa, tanto en unidades másicas, como en unidades molares, según corresponda, para todos los componentes de la mezcla homogénea, llegamos a expresiones comparables con las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.5), respectivamente. Sin embargo, las ecuaciones que obtenemos ahora contienen una sumatoria adicional, cada una de ellas, que incorpora los fluxes difusivos. Es claro que dichas sumatorias deben ser iguales a cero, es decir, que

$$\sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K = 0, \quad \text{y también que} \quad \sum_{K=A}^G \mathbf{J}_K = 0, \quad (3.3.8)$$

respectivamente.

3.4 Relaciones de comportamiento para fluxes difusivos

Los fluxes difusivos de las especies químicas corresponden a las diferencias de sus movimientos con respecto al movimiento medio de la mezcla, que es el flux convectivo. Algunas especies avanzan más y otras menos que el movimiento de la mezcla. Estos comportamientos están gobernados por las interacciones moleculares entre las diversas especies de la mezcla. Tales interacciones moleculares deben tomarse en cuenta al elaborar expresiones para estimar el comportamiento de los fluxes difusivos, es decir, al formular las relaciones de comportamiento para los fluxes difusivos de una mezcla multicomponente.

Existen cuatro enfoques al tomar en cuenta las interacciones moleculares de las diversas especies químicas de una mezcla multicomponentes, al determinar sus relaciones de comportamiento para los fluxes difusivos. El primero de estos enfoques es conocido como la **difusión fickeana**.

En la difusión fickeana la fuerza impulsora de la difusión de una especie química dada es el gradiente de concentración de la misma especie.

La difusión fickeana surgió como propuesta al analizar el caso más simple: la difusión binaria. Posteriormente, al extenderse a la **difusión multicomponente**,

se considera la relación (3.3.8) como base para la definición de las fuerzas impulsoras de la difusión de multicomponentes.

La tercera forma para determinar los fluxes difusivos sigue el **enfoque de Stefan-Maxwell**:

La difusión de Maxwell-Stefan relaciona el movimiento de una especie química con respecto a las otras, considerando las fuerzas de interacción entre moléculas de distintas especies.

Por su parte, la **difusividad termodinámica** es conocida por expresar las fuerzas impulsoras de la difusión a partir de la idea de que

cuando el potencial químico no es uniforme, existe una tendencia de la energía libre a redistribuirse, tendiendo a la uniformidad.

Estos cuatro enfoques para expresar el comportamiento de los materiales, en la difusión multicomponente, se representan en la tabla 3.1¹.

¹La tabla se ha tomado de Soria (2022), Pag. 164. Véase la sección 5.6 en dicha referencia, para ampliar la discusión sobre los cuatro enfoques para representar la difusión multicomponente, así como el trabajo de Roy (1976), referido en la bibliografía.

Tabla 3.1 Representaciones de la difusión multicomponente

Velocidad convectiva ⁽¹⁾	Relaciones de comportamiento para la difusión de la especie K —ésima, donde $K = A, \dots, G$			
	Fick ⁽²⁾	Multicomp. ⁽³⁾	Maxwell-Stefan ⁽⁴⁾	Termodinámica ⁽⁵⁾
$\mathbf{v} = \sum_{I=A}^G \omega_I \mathbf{v}_I$	$-d_K \nabla \rho_K$	$\sum_{I \neq K}^G d_{KI} \nabla \rho_I$	$\nabla \omega_K = \sum_{I \neq K}^G \frac{\omega_K \omega_I}{d'_{KI}} (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_K)$	$\sum_{I \neq K}^G \frac{\delta_{KI}}{RT} \nabla \hat{\mu}_I$ (6)
$\mathbf{V} = \sum_{I=A}^G x_I \mathbf{v}_I$	$-D_K \nabla c_K$	$\sum_{I \neq K}^G D_{KI} \nabla c_I$	$\nabla x_K = \sum_{I \neq K}^G \frac{x_K x_I}{D'_{KI}} (\mathbf{v}_I - \mathbf{v}_K)$	$\sum_{I \neq K}^G \frac{\mathcal{D}_{KI}}{RT} \nabla \mu_I$

(1) Todos los coeficientes de difusión basados en $\mathbf{v}$ como velocidad de referencia, se representan por letras minúsculas y todos los basados en $\mathbf{V}$ se representan por letras mayúsculas.

(2) d_K y D_K son difusividades efectivas de una especie, dependen de su gradiente de concentración.

(3) d_{KI} y D_{KI} son difusividades multicomponentes, dependen del estado termodinámico.

(4) d'_{KI} y D'_{KI} son difusividades corregidas por los cambios locales de $\rho(\mathbf{x})$ y $c(\mathbf{x})$.

(5) δ_{KI} y $\mathcal{D}_{KI}$ son difusividades termodinámicas basadas en el potencial químico.

(6) $\hat{\mu}_I = \mu_I/M_I$ es el potencial químico con unidades de [energía/masa].

Las difusividades efectivas d_K y D_K representan la difusión de la componente K —ésima en una mezcla multicomponente dada. Así, tenemos que la ecuación (3.3.4) se puede expresar, para la K —ésima componente, como:

$$\mathbf{n}_K = \rho_K \mathbf{v} - d_K \nabla \rho_K = \rho_K \mathbf{v} + \sum_{I \neq K}^G d_{KI} \nabla \rho_I. \quad (3.4.1)$$

Aquí se puede notar cómo el coeficiente efectivo de difusividad d_K depende del gradiente de la concentración de la componente K —ésima en la mezcla, ya que al ser multiplicado por dicho gradiente, debe ser equivalente al término de la sumatoria de la representación multicomponente, donde las difusividades de las componentes no dependen de los gradientes de concentración sino de los estados termodinámicos de la mezcla.

3.4.1 Difusión fickeana

La difusión binaria es el caso más simple de difusión, excluido el de la autodifusión, que es la difusión de una porción de gas en otra porción del mismo gas en el mismo estado termodinámico, es decir, imaginando distinguibles las moléculas de la primera porción de gas, con respecto a las moléculas de la segunda porción.

Respecto de la difusión binaria, el enfoque fickeano establece, de acuerdo con la tabla 3.1, siguiendo el desarrollo tradicional del término, que la difusión de la especie A en B ocurre de modo que

$$\mathbf{j}_A = -d_{AB} \nabla \rho_A, \quad (3.4.2)$$

en unidades másicas, donde d_{AB} es el coeficiente de difusión de A en B . En la difusión binaria se considera que la densidad total ρ es homogénea, es decir, constante: $\rho_A + \rho_B = \rho = \text{constante}$, de modo que $\nabla \rho_A + \nabla \rho_B = 0$, donde podemos despejar $\nabla \rho_A$ y sustituirla en 3.4.2, para obtener:

$$\mathbf{j}_A = d_{AB} \nabla \rho_B. \quad (3.4.3)$$

Por otra parte, si consideramos el mismo proceso como la difusión de B en A , podemos iniciar por proponer que

$$\mathbf{j}_B = -d_{BA} \nabla \rho_B, \quad (3.4.4)$$

donde d_{BA} es el coeficiente de difusión de B en A . Además, ya que la suma de todos los fluxes difusivos es cero, por la ecuación (3.3.8), al efectuar la suma de $\mathbf{j}_B$, ecuación (3.4.4) y $\mathbf{j}_A$ en la forma (3.4.3), vemos que, necesariamente $d_{AB} = d_{BA}$. De este resultado de la difusión binaria surge la costumbre de representar el coeficiente de difusión con un sólo subíndice, como se ve en la columna de la representación de Fick, ya que podría expresarse que $d_{AB} = d_{BA} = d_A = d_B$. Sin embargo, en sistemas multicomponentes, los coeficientes de la difusión fickeana, d_K y D_K son **difusividades efectivas**, que dependen de los gradientes de concentración, como se aclara en la nota (2) de la tabla 3.1.

3.4.2 Difusión binaria como caso multicomponente

Consideremos ahora la difusión binaria como el caso más simple de difusión multicomponente, de acuerdo con las expresiones de la tercera columna de la tabla 3.1. En el caso binario, para la especie A resulta:

$$\mathbf{j}_A = d_{AB} \nabla \rho_B, \quad (3.4.5)$$

que coincide con la ecuación (3.4.3), por tratarse del caso binario, sin embargo, la diferencia conceptual fundamental de la ecuación (3.4.5) es que ella es la expresión de una relación fundamental, es decir, que la difusión de la especie A en la mezcla es función de las concentraciones, másicas o molares, de las otras especies de la mezcla, cuyos coeficientes de difusividad no dependen de los gradientes de concentración ni de cualquier otra fuerza impulsora de la difusión, sino que dependen solamente del estado termodinámico de la mezcla.

3.4.3 Difusión ternaria

La difusión ternaria es mucho más compleja que la binaria y permite mostrar algunas situaciones interesantes, como la **difusión cuesta arriba o difusión inversa**, que ocurre cuando una especie se difunde en la dirección positiva de su gradiente de concentración, ver figura 3.1, la **difusión osmótica**, donde la difusión ocurre aún cuando el gradiente de concentración de la especie difundida es cero y la **barrera a la difusión**, cuando una especie no se difunde, aún cuando su gradiente de concentración sea distinto de cero. Estos tres comportamientos permiten ver por qué es importante poder estimar los coeficientes de difusión como variables de estado y no como funciones efectivas de las fuerzas impulsoras de la difusión.

Consideremos el siguiente experimento, reportado por Krishna (2015): Dos recipientes (A) y (B), que tienen el mismo volumen e idénticas condiciones de presión y temperatura, están unidos por medio de un conducto que tiene una válvula de paso, como se ve en la figura 3.1, parte superior. El recipiente (A) contiene una mezcla de N_2 y CO_2 , ambos a la concentración del 50 % molar. El recipiente (B) contiene una mezcla de N_2 e H_2 , ambos también a la concentración del 50 % molar. El experimento inicia al abrir la válvula, lo cual pone en contacto ambas mezclas e inicia el proceso difusivo.

Si la ley de Fick gobernara el proceso difusivo, el nitrógeno no se difundiría, puesto que su concentración molar es igual a 0.5 en los dos recipientes y en todo el sistema, por lo que su gradiente es cero, $\nabla c_{N_2} = 0$. Sin embargo, en las primeras horas del experimento se observa un aumento en la concentración de N_2 en el recipiente (B) y la correspondiente disminución de concentración de N_2 en el recipiente A, ambos hasta llegar a una concentración máxima en (B) y mínima en (A), como se observa, a un tiempo aproximado de 7 u 8 horas. Posteriormente ocurre lo contrario, es decir, la concentración de N_2 disminuye en (B) y aumenta en (A), tendiendo a comportamientos asintóticos hacia una concentración del 50 % en ambos recipientes.

¿Cómo podemos entender el proceso observado? Notemos primero las distintas masas moleculares de las tres especies: $M_{H_2} = 2$, $M_{N_2} = 28$ y $M_{CO_2} = 40$. Notamos, entonces, que las moléculas más masivas son las de CO_2 y las más ligeras son las de H_2 . Las moléculas de N_2 son intermedias. Al

inicio del proceso difusivo, el CO_2 se mueve hacia el recipiente (B), donde su concentración inicial es cero, en tanto que el H_2 se difunde hacia el recipiente (A). Las moléculas masivas de CO_2 arrastran, en su proceso difusivo, a las moléculas de N_2 , ejerciendo fuerzas de fricción sobre las superficies de las moléculas. El efecto del arrastre es el aumento de la concentración de N_2 en el recipiente (B). Además, el gas menos masivo es el H_2 , el cual se difunde con mayor rapidez hacia el recipiente (A), moviéndose fácilmente por los intersticios dejados entre las moléculas de los otros dos gases. Esta última explicación, sin embargo, es fickeana, pues si la difusión del H_2 estuviera regida por los otros dos gases y no por el gradiente de concentración del hidrógeno, no podría ser más rápida que la difusión de los gases más masivos, por lo que **no podemos decir** que la difusión fickeana sea físicamente insostenible. En cambio, lo que podemos decir es que la difusión de Maxwell-Stefan representa un enfoque compatible con la explicación de este **comportamiento difusivo** cuesta arriba.

3.5 Estimados de los coeficientes de difusión

3.5.1 Difusividades típicas y experimentales

Los coeficientes de difusividad toman valores muy distintos, dependiendo del estado de agregación de los materiales. Para tener una idea de los valores que toman los coeficientes de difusividad, en la tabla 3.2 se han tabulado los órdenes de magnitud de dichos coeficientes².

²Algunos métodos de estimación de difusividades pueden verse en el libro de Lobo Oehmichen (2007).

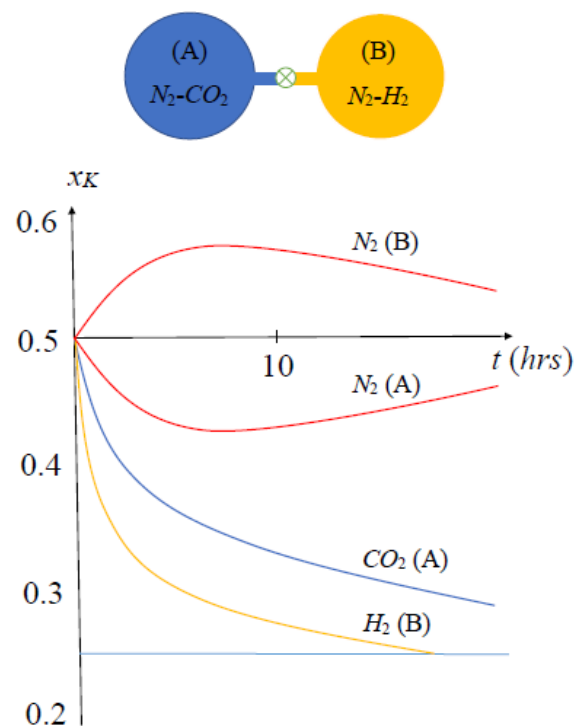


Figura 3.1: Difusión cuesta arriba de nitrógeno, el cual se difunde inicialmente en la dirección donde su concentración aumenta (en el recipiente B). (Figura tomada de Soria, 2022).

Tabla 3.2. Órdenes de magnitud de los coeficientes de difusión		
Estados de agregación	Difusividad [m ² /s]	
	desde	hasta
Gas-gas	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶
Líquido-líquido	10 ⁻⁹	10 ⁻¹¹
Gas-sólido	10 ⁻¹¹	10 ⁻¹⁴
Líquido-sólido	10 ⁻⁹	10 ⁻¹¹
Sólido-sólido	10 ⁻¹⁹	10 ⁻³⁴

La difusividad de vapores volátiles en aire puede determinarse experimentalmente utilizando una celda de tubo capilar, llamada celda de Stefan, que es el instrumento cuyo funcionamiento se describe en el capítulo 17 y cuya teoría se desarrolla en la sección 4.7. Por otra parte, la determinación experimental de la difusividad de líquidos en líquidos se puede realizar con una celda de difusión, como la que se describe en el capítulo 18 y cuyos modelos transitorio incipiente y cuasi-estacionario se desarrollan en la sección 4.6.

A partir de instrumentos teóricos y experimentales como los señalados arriba, varios textos, como el Bird en el capítulo 17, reportan los valores de coeficientes de difusión medidos experimentalmente. Existen también valores estimados utilizando predicciones basadas en diversos esquemas teóricos, como veremos a continuación.

3.5.2 Difusividades en gases

Los **coeficientes de difusión de los gases a baja densidad** se calculan mediante expresiones que resultan de la teoría cinética de los gases. El Bird reporta, en su expresión (17.3-9) una ecuación para estimar el coeficiente de autodifusión, D_{AA*} , así como, en su expresión (17.3-10), el coeficiente de difusión binaria, D_{AB} , ambos para gases a baja densidad. Esas dos ecuaciones son:

$$D_{AA*} = \frac{2 \times 10^{-4}}{3} \frac{\sqrt{\kappa T / \pi m_A}}{\pi d_A^2} \frac{1}{n} \quad (3.5.1)$$

y

$$D_{AB} = \frac{2 \times 10^{-4}}{3} \sqrt{\frac{\kappa T}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} \frac{4}{\pi (d_A + d_B)^2} \frac{1}{n}, \quad (3.5.2)$$

respectivamente, donde m_A, m_B son las masas de una molécula de A o B, así como d_A, d_B son sus diámetros, considerando el modelo de esferas duras, los cuales no deben confundirse con los coeficientes de difusión d_K definidos en la tabla 3.1 y n es la densidad en número de moléculas por unidad de volumen. T es la temperatura absoluta y $\kappa = R/N_{avo} = 1.38066 \times 10^{-23}$ J/K, es la constante de Boltzmann, en tanto que $N_{avo} = 6.02214 \times 10^{23}$ moléculas/g-mol es el número de Avogadro y $R = 8.31451$ J/gmol·K es la constante universal de los gases.

Para los **gases densos**, Chapman y Enskog extendieron la teoría cinética y sus resultados dan la ecuación (17.3-11) del Bird:

$$cD_{AB} = \frac{3 \times 10^{-4}}{16} \sqrt{\frac{2RT}{\pi}} \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right) \frac{1}{N_{avo} P \sigma_{AB}^2 \Omega_{\mathcal{D},AB}}, \quad (3.5.3)$$

o bien, cuando aproximamos la concentración mediante la ley del gas ideal, de modo que $P = cRT$, tenemos la expresión (17.3-12) de Bird:

$$D_{AB} = 1.8583 \times 10^{-7} \sqrt{T^3 \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)} \frac{1}{P \sigma_{AB}^2 \Omega_{\mathcal{D},AB}}. \quad (3.5.4)$$

En las ecuaciones (3.5.1) a (3.5.4) las difusividades están expresadas en unidades de $[m^2/s]$, en tanto que los parámetros σ_{AB} y $\Omega_{D,AB}$, conocidos como los parámetros de Lennard-Jones, se encuentran tabulados en la tabla E.2 del Bird.

También una expresión empírica es muy útil para estimar valores de coeficientes de difusión en gases. La ecuación (3.5.5) usa volúmenes molares de difusión para diversos gases, cuyos valores se encuentran en la siguiente tabla:

Tabla 3.3. Volúmenes molares de difusión					
$v_K; K = A, B$	H_2	N_2	CO_2	NH_3	H_2O
$10^{-6} m^3/gmol$	7.07	17.9	26.9	14.9	12.7

y se emplean al aplicar la ecuación³

$$D_{AB} = 3.16 \times 10^{-8} \frac{T^{1.75}}{P \left(v_A^{1/3} + v_B^{1/3} \right)^2} \sqrt{\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}. \quad (3.5.5)$$

3.5.3 Difusividades en líquidos

Principiamos por estimar el diámetro molecular ϕ_K de ambas especies $K = A, B$. Esto se efectúa a partir de la concentración de ambas componentes, c_A y c_B , así tenemos:

$$\phi_K = \left(\frac{1}{c_K N_{avo}} \right)^{1/3}, \text{ para } K = A, B. \quad (3.5.6)$$

Cuando $\phi_A/\phi_B \gg 1$, lo cual incluye el caso de suspensiones coloidales, empleamos la ecuación de Stokes-Einstein:

$$D_{AB} = \frac{\kappa T}{3\pi\mu_B\phi_A}. \quad (3.5.7)$$

Si $\phi_A/\phi_B \sim 1$ modificamos la ecuación anterior, de modo que

$$D_{AB} = \frac{\kappa T}{2\pi\mu_B\phi_A}, \quad (3.5.8)$$

lo cual puede asociarse tanto al efecto de un factor de deslizamiento, como más simplemente a no tomar en cuenta la fricción de forma, cuando las moléculas son de tamaños similares⁴. Esta ecuación también se usa para estimar coeficientes de autodifusión, D_{AA^*} .

3.6 Balances del ímpetu y la energía en cuerpos multicomponentes

3.6.1 Mezclas multicomponentes y cuerpos multicomponentes

En la sección 3.2 se definen las propiedades de una mezcla multicomponente a partir de los balances de masa de las especies químicas que constituyen dicha mezcla, sumándolos para definir variables de la mezcla multicomponente como las sumatorias de las ecuaciones en (3.2.4), como se muestra también en el diagrama de la figura 3.2. Luego, en la sección 3.3 se reconfiguran los balances de masa en términos de sus diferencias de velocidad con respecto a la velocidad de la mezcla, cuyo flujo medio transcurre a una velocidad másica $\mathbf{v}$ o a una velocidad molar $\mathbf{V}$, ver ecuaciones (3.2.4) y (3.2.6), dando lugar a expresiones con términos difusivos de las especies con respecto al flujo medio de la mezcla, ver ecuaciones (3.3.6) y (3.3.7).

³En Wesselingh y Krishna (2000), Pag. 96.

⁴Revisar la sección 17.4 del Bird, así como su sección 2.6, en especial con relación al significado de la ecuación (2.6-13) del mismo texto.

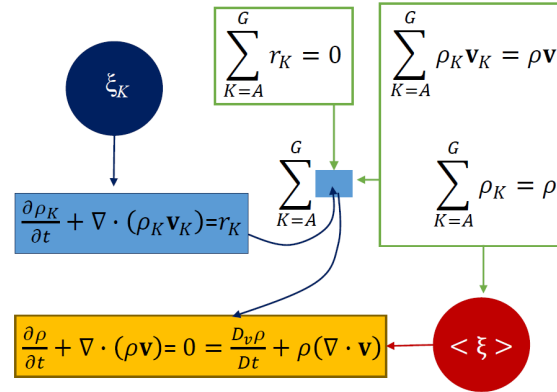


Figura 3.2: Partícula material de la especie K —ésima ξ_K (en azul oscuro) y su balance de masa (en azul). Sumatoria de los balances de masa de todas las especies (sumatoria y cuadro azul) y definiciones de variables de la mezcla $\{\rho, \mathbf{v}, \Sigma r_K\}$ recuadros verdes). Definición de cuerpo puntual multicomponente, $\langle \xi \rangle$, (en rojo), utilizando definiciones de variables de mezcla. Ecuación de continuidad de partícula material multicomponente (en amarillo), se obtiene de sumatoria de balances de especies o de principio de conservación de masa para $\langle \xi \rangle$.

Las secciones 3.4 y 3.5 se refieren al estudio de diversos coeficientes de difusión. Aquí nos interesa mencionar un desarrollo alternativo al de la mezcla multicomponente, cuyas características surgen de las sumatorias de los términos para las especies. En cambio, el concepto de una pseudo-partícula material multicomponente, $\langle \xi \rangle$, es la base de dicho desarrollo. Dicha pseudo-partícula material es pensada como una porción muy pequeña de fluido multicomponente, que tiene las propiedades locales de la mezcla y se desplaza a la velocidad media de la mezcla, $\mathbf{v}$.

3.6.2 Conservación de la masa y balances del ímpetu

El desarrollo de los balances del ímpetu y la energía, así como la ecuación de la energía mecánica, para una partícula material multicomponente, $\langle \xi \rangle$, puede verse en las secciones 5.4 y 5.5 de Soria (2022). Aquí vamos solamente a referir los elementos principales.

A partir del enunciado

La masa de un cuerpo multicomponente no depende del tiempo

podemos encontrar la **ecuación de continuidad** para una partícula material multicomponente:

$$\frac{D_v \rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.6.1)$$

la cual se expresa en términos de la derivada material $\frac{D_v}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$, que viaja con la partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$.

A partir de otro enunciado, conocido como la **primera ley de Euler**, debido a que Leonhard Euler la elaboró, aún cuando él mismo no tuvo la claridad para incorporar las fuerzas viscosas consideradas por Newton, podemos decir que

En un sistema inercial, la rapidez temporal de cambio del ímpetu de un cuerpo multicomponente es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

A partir de este enunciado, podemos llegar al balance diferencial de fuerzas para una partícula

material multicomponente $\langle \xi \rangle$, conocido también como la primera ley de Cauchy:

$$\rho \frac{D_v \mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \sum_{K=A}^G \rho_K \mathbf{f}_K, \quad (3.6.2)$$

donde las fuerzas externas actúan, en general, de manera diferenciada sobre las especies químicas, como es el caso de los campos eléctricos que actúan sobre una solución iónica. Cuando las fuerzas actúan indistintamente sobre todas las especies del fluido multicomponente, tenemos el término tradicional $\rho \mathbf{f}$.

3.6.3 Energía cinética y balances de energía de un cuerpo multicomponente

Si proyectamos el balance del ímpetu (3.6.2) en la dirección de la velocidad de la partícula material multifásica por la magnitud de dicha velocidad, obtenemos una expresión conocida como la **ecuación de la energía mecánica de la partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$** :

$$\rho \frac{D_v}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla P - \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \sum_{K=A}^G \rho_K \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_K, \quad (3.6.3)$$

La ecuación (3.6.3) es consecuencia del balance de fuerzas sobre la partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$ y no implica algún principio de balance pero nos muestra, en cada uno de sus términos, cómo **las fuerzas que actúan sobre el cuerpo $\langle \xi \rangle$ realizan trabajos mecánicos**, los cuales modifican la rapidez de cambio de la energía cinética de flujo de la partícula multicomponente $\langle \xi \rangle$.

Además, podemos proponer un **principio de balance de la energía cinética de flujo de la partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$** diciendo que

La rapidez temporal de cambio de la energía cinética de flujo de una partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$ es igual a la suma de los flujos de potencia menos la disipación de potencia de todas las fuerzas que actúan sobre $\langle \xi \rangle$.

La expresión que corresponde a este enunciado, para una partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$ es:

$$\rho \frac{D_v}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\nabla \cdot (P\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \sum_{K=A}^G \rho_K \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{f}_K - \rho \hat{D}_c - \rho \hat{D}_v - \rho \hat{D}_e, \quad (3.6.4)$$

donde los tres primeros términos del lado derecho corresponden a los flujos de potencia intrínseca, viscosa y externa, en tanto que los siguientes tres términos son de la disipación de potencia debida a las fuerzas intrínseca, viscosa y externa, respectivamente. Es importante notar que el flujo de potencia debido a las fuerzas externas $\mathbf{f}_K$ corresponde a las velocidades de flujo de las especies correspondientes $\mathbf{v}_K$.

Tenemos ahora un balance de energía cinética (3.6.4), que incorpora todos los términos importantes, así como una ecuación de la energía mecánica (3.6.3) que representa todos los términos que corresponden a efectos mecánicos, es decir, a movimientos del fluido multicomponente. Podemos comparar ambas expresiones, ya que sus lados izquierdos son iguales y por tanto, los derechos deben ser equivalentes. Además, a cada uno de los flujos de potencia corresponde un término de disipación de potencia y uno de rapidez de trabajo mecánico, Esta observación permite determinar los términos de disipación de potencia, que son **la disipación de potencia intrínseca**:

$$\rho \hat{D}_c = -P \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.6.5)$$

la disipación de potencia viscosa:

$$\rho \hat{D}_v = -\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \quad (3.6.6)$$

y la disipación de potencia por difusión en campos externos:

$$\rho \hat{D}_e = \sum_{K=A}^G \rho_K (\mathbf{v}_K - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{f}_K = \sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K \cdot \mathbf{f}_K. \quad (3.6.7)$$

Podemos sustituir estos tres términos de disipación en la ecuación (3.6.4), para encontrar la forma final del **balance de energía cinética para una partícula material multicomponente**: $\langle \xi \rangle$:

$$\rho \frac{D_v}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\nabla \cdot (P\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \sum_{K=A}^G \rho_K \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{f}_K + P\nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K \cdot \mathbf{f}_K, \quad (3.6.8)$$

Por otra parte, podemos proponer un principio de **balance de la energía interna de la partícula material multicomponente** $\langle \xi \rangle$, o **primer principio de la termodinámica**, aplicado al sistema cerrado $\langle \xi \rangle$, que puede expresarse como:

La rapidez temporal de cambio de la energía interna de una partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$ es igual al calentamiento más la disipación de potencia de todas las fuerzas que actúan sobre $\langle \xi \rangle$ más la rapidez de producción o de consumo de energía térmica asociada a todas las reacciones homogéneas de las especies químicas.

Al enunciado anterior corresponde la siguiente ecuación:

$$\rho \frac{D_v \hat{U}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - P\nabla \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K \cdot \mathbf{f}_K + \sum_{K=A}^G r_K Q_K, \quad (3.6.9)$$

donde Q_K es la energía térmica por unidad de masa de la K -ésima especie química que es producida o consumida por reacción química. La ecuación (3.6.9) puede expresarse en función de la entalpía $\hat{H} = \hat{U} + P/\rho$, de modo que la derivada material de la partícula multicomponente $\langle \xi \rangle$ da

$$\rho \frac{D_v \hat{U}}{Dt} = \rho \frac{D_v \hat{H}}{Dt} - \rho \frac{D_v}{Dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) = \rho \frac{D_v \hat{H}}{Dt} - \frac{D_v P}{Dt} - P\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (3.6.10)$$

donde se ha aplicado la ecuación de continuidad (3.6.1) en el último término. Al igualar las expresiones (3.6.9) y (3.6.10), podemos llegar al **balance de entalpía para la partícula material multicomponente** $\langle \xi \rangle$:

$$\rho \frac{D_v \hat{H}}{Dt} = \frac{D_v P}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K \cdot \mathbf{f}_K + \sum_{K=A}^G r_K Q_K, \quad (3.6.11)$$

3.6.4 Generación de entropía de un cuerpo multicomponente

La ecuación de Gibbs para sistemas multicomponentes es una relación fundamental de la termodinámica que consiste en la derivación de la energía interna con respecto a todos sus parámetros extensivos, es decir que, al derivar $U = U(S, V, n_A, n_B, \dots, n_G)$ para la partícula material multicomponente, con respecto al tiempo, tenemos que

$$\frac{D_v U}{Dt} = T \frac{D_v S}{Dt} - P \frac{D_v V}{Dt} + \sum_{K=A}^G \mu_K \frac{D_v n_K}{Dt}, \quad (3.6.12)$$

donde el operador de derivación es una derivada material siguiendo una partícula material multicomponente, $\langle \xi \rangle$, cuya masa es una cantidad constante m . Dividiendo la ecuación (3.6.12) entre la masa m , obtenemos una ecuación intensiva, donde las variables extensivas se convierten en intensivas, lo cual queda indicado por un acento, por ejemplo $\hat{U} = U/m$. Entonces, despejamos el término de la entropía y multiplicamos por la densidad para tener que:

$$\rho T \frac{D_v \hat{S}}{Dt} = \rho \frac{D_v \hat{U}}{Dt} + \rho P \frac{D_v \hat{V}}{Dt} - \rho \sum_{K=A}^G \mu_K \frac{D_v \hat{n}_K}{Dt}, \quad (3.6.13)$$

donde $\hat{V} = 1/\rho$ es el volumen específico del cuerpo multicomponente y $\hat{n}_K = c_K/\rho$ son los moles de la especie K -ésima por unidad de masa del cuerpo multicomponente $\langle \xi \rangle$. Ahora es posible sustituir el término de la energía interna de la ecuación (3.6.9) para encontrar, después de varios reordenamientos de términos, que:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D_v \hat{S}}{Dt} = & -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} - \sum_{K=A}^G \frac{\mu_K}{T} \frac{\mathbf{j}_K}{M_K} \right) - \frac{\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}}{T} + \mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \\ & - \sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K \cdot \left(\nabla \frac{\mu_K}{M_K T} - \frac{\mathbf{f}_K}{T} \right) - \sum_{K=A}^G \frac{r_K}{T} \left(\frac{\mu_K}{M_K} - Q_K \right). \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

La ecuación (3.6.14) se presenta en la forma general de un balance de entropía, aplicado a la partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$. Dicho balance tiene la forma

$$\rho \frac{D_v \hat{S}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_S + \dot{\sigma}_S, \quad (3.6.15)$$

y corresponde a expresar que

la rapidez temporal de cambio de la entropía de la partícula material multicomponente $\langle \xi \rangle$ es igual a la suma de los flujos entrópicos que entran a la partícula $\langle \xi \rangle$ más la rapidez de generación de la entropía en la partícula.

De acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, la generación de entropía es positiva en todo proceso irreversible y es igual a cero sólo si el proceso es reversible. Esto implica que $\dot{\sigma}_S \geq 0$ para cualquier proceso, lo cual es cierto si cada uno de sus términos es mayor o igual a cero, es decir, si

$$-\frac{\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}}{T} \geq 0, \quad (3.6.16)$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{T} \right) \geq 0, \quad (3.6.17)$$

$$-\sum_{K=A}^G \mathbf{j}_K \cdot \left(\nabla \frac{\mu_K}{M_K T} - \frac{\mathbf{f}_K}{T} \right) \geq 0, \quad (3.6.18)$$

$$-\sum_{K=A}^G r_K \left(\frac{\mu_K}{M_K T} - \frac{Q_K}{T} \right) \geq 0. \quad (3.6.19)$$

Ejercicios

E.3.6-1. Relación de comportamiento del fluido newtoniano. Convéncete de que la relación de comportamiento para la viscosidad newtoniana en un flujo incompresible unidimensional, donde la velocidad es $\mathbf{v} = v_z(x)\delta_z$, satisface la desigualdad (3.6.16) y por lo tanto es compatible con la segunda ley de la termodinámica.

E.3.6-2. Materiales de Fourier. Convéncete de que la relación de comportamiento de Fourier: $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$, para $\kappa > 0$, es compatible con el segundo principio de la termodinámica, expresado en la desigualdad (3.6.17).

E.3.6-3. Mezclas multicomponentes en campos gravitacionales. Si la única fuerza externa es la gravedad, que afecta indistintamente a todas las especies químicas, $\mathbf{f}_K = \mathbf{g}$, para $K = A, B, \dots, G$, encuentra la forma simplificada de la desigualdad (3.6.18).

E.3.6-4. Cambios lineales de las fuerzas. ¿En qué sentido las leyes de Newton, Fourier y Fick son lineales?

E.3.6-5. Potencial de una fuerza Aclara la relación entre la fuerza de gravedad y el potencial gravitacional. ¿Cuáles son las dimensiones de uno y otro?

E.3.6-6. Potencial térmico y fuerza térmica. Extiende el significado de fuerza a la fuerza térmica y encuentra el potencial térmico asociado.

E.3.6-7. Potencial químico y fuerza química Extiende el significado de fuerza a la fuerza química y encuentra el potencial químico asociado.

E.3.6-8. Concentraciones y potenciales químicos ¿Cuándo podemos proponer la descripción de las fuerzas químicas en términos de concentraciones en vez de potenciales químicos?

3.7 Transferencia interfacial alotérmica de especies químicas

En esta sección estudiamos el transporte interfacial simultáneo de energía térmica y de especies químicas de una mezcla de multicomponentes. Se trata, en general, de la especie química K -ésima, que puede ser un soluto que se disuelve desde un cuerpo sólido a un fluido que se mueve en los alrededores del primero. Pensemos, por ejemplo, en la disolución de cristales de una sal como el cloruro de sodio o de potasio o como el alumbre, que es un sulfato doble de aluminio y potasio dodecahidratado, $AlK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$. Ver capítulos 5 y 19, en agua líquida. Puede tratarse, también de una mezcla líquida que transfiere un soluto K a otro líquido, como en la extracción líquido-líquido, o de un líquido puro que se evapora en aire, como en la evaporación de acetona o cualquier otro líquido volátil. Ver capítulos 6, 21 y 22. En cualquiera de estos casos, consideremos una superficie, $\mathcal{S}$, cuya área es A_s , que separa dos fases, una de las cuales es un fluido. La otra puede ser otro fluido o un sólido. Ver figura 3.3.

3.7.1 Modelo analítico de la película estancada para transferencia de masa

En la subsección 2.3.3 la ley de enfriamiento de Newton, que representa la transferencia de energía térmica a través de una superficie, es encontrada siguiendo el desarrollo del modelo de la película estancada, el mismo razonamiento podemos aplicar para encontrar expresiones similares para los flujos convectivos simultáneos de masa y energía desde una superficie al seno de un fluido.

En la proximidad de un fluido a una superficie, el fluido adquiere una velocidad parecida a la velocidad de dicha superficie; en el límite, el fluido adyacente a la superficie, tiene la velocidad de la superficie misma, así, para una superficie estacionaria, la velocidad del fluido cercano a ella es cero. El modelo de la película estancada, como se ha indicado en la sección 2.3.3, parte de este supuesto, de modo que, en este límite, podemos decir que la masa de la especie K -ésima se transfiere con velocidad de flujo cero, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Entonces la expresión para el flux másico de la componente K -ésima, ecuación (3.3.4), es $\mathbf{n}_K = \mathbf{j}_K$, en unidades másicas. Si dividimos esta

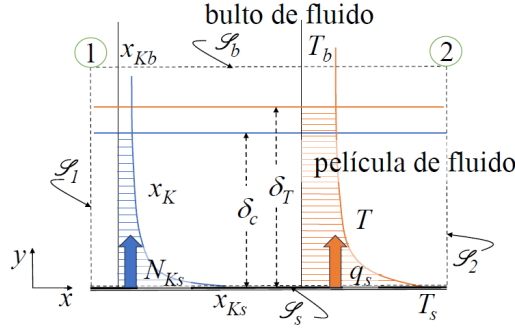


Figura 3.3: Perfiles de fracción molar de la especie K -ésima x_K y de temperatura T , en la proximidad de una superficie $\mathcal{S}_s$, del lado del fluido. Esta superficie puede ser la interfase con un sólido que se disuelve o un líquido que se evapora o la superficie por la que un soluto es transferido desde un líquido al fluido (líquido o gas). Aquí, x_{Ks} y T_s son los valores límite de los perfiles en la superficie $\mathcal{S}_s$ del lado del fluido, en tanto que N_{Ks} es el flux de la especie K -ésima y q_s es el flux térmico desde la misma superficie $\mathcal{S}_s$. En los espesores de las películas δ_c y δ_T , ocurre el 99 % del cambio de x_K y de T . Los símbolos x_{Kb} y T_b son los valores de los perfiles correspondientes en el bulto del fluido. La superficie $\mathcal{S}_b$ está en el bulto, en tanto que Las líneas verticales 1 y 2 representan dos de las superficies laterales $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ del fluido.

igualdad entre la masa molecular, M_K , de la especie K -ésima, tenemos que

$$\mathbf{N}_K = c_K(\mathbf{v}_K - \mathbf{v}) = c_K(\mathbf{v}_K - \mathbf{0}) = \frac{\mathbf{j}_K}{M_K}, \quad (3.7.1)$$

debido a que la velocidad de flujo $\mathbf{v}$ es igual a cero. En este punto, es conveniente restringir nuestro desarrollo a sistemas binarios, para que el flux difusivo molar se exprese adecuadamente por un modelo fickeano, de modo que $K \rightarrow A$:

$$\mathbf{N}_A = \frac{\mathbf{j}_A}{M_A} = c_A(\mathbf{v}_A - \mathbf{0}) = -d_A c \nabla x_A, \quad (3.7.2)$$

donde d_A es el coeficiente de difusión efectiva binario. Consideremos la región de la película estancada, $\mathcal{V}$, limitada por las superficies horizontales $\mathcal{S}_s$ y $\mathcal{S}_b$ y por las superficies verticales $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$; las superficies laterales, al frente y al fondo, son también verticales y su contribución es nula para este ejercicio, de modo que no las representamos. Podemos integrar los miembros extremos de la expresión (3.7.2) en la región estancada $\mathcal{V}$ y aplicar el teorema de la divergencia, para encontrar que

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{N}_A dV = d_A c \int_{\mathcal{V}} -\nabla x_A dV = d_A c \oint_{\mathcal{S}} -\mathbf{n} x_A dS, \quad (3.7.3)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie $\mathcal{S}$, dirigido hacia afuera de la región $\mathcal{V}$. Podemos expresar la integral cerrada de área, como la suma de las integrales de las caras del paralelepípedo que se muestra en la figura 3.3. Entonces, aplicando, también, el teorema del valor medio en el lado izquierdo de (3.7.3):

$$\bar{\mathbf{N}}_A \int_{\mathcal{V}} dV = d_A c \left(\int_{\mathcal{S}_s} \boldsymbol{\delta}_y x_A dS + \int_{\mathcal{S}_b} -\boldsymbol{\delta}_y x_A dS + \int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{\delta}_x x_A dS + \int_{\mathcal{S}_2} -\boldsymbol{\delta}_x x_A dS + \dots \right), \quad (3.7.4)$$

donde $\bar{\mathbf{N}}_A$ es el valor medio de la densidad de flujo de la especie A en la región $\mathcal{V}$, cuyo volumen es $A_s \delta_c$, el vector $(-\mathbf{n})$ se ha sustituido por los vectores unitarios de los ejes del sistema de

coordenadas rectangulares, de acuerdo con la región superficial que le corresponde en cada integral. La proyección del flujo medio de la especie A en la dirección de la superficie $\mathcal{S}_s$ resulta al aplicar la multiplicación escalar a la ecuación (3.7.4), por el vector unitario δ_y :

$$(\bar{\mathbf{N}}_A \cdot \delta_y) A_s \delta_c = \bar{N}_{Ay} A_s \delta_c = d_{Ac} \left(\int_{\mathcal{S}_s} x_A dS + \int_{\mathcal{S}_b} -x_A dS \right), \quad (3.7.5)$$

donde podemos notar que las contribuciones de las dos integrales en las caras laterales de la región $\mathcal{V}$, es decir, en $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, son nulas. Podemos sustituir la componente $\bar{N}_{Ay}$ por la notación $\bar{N}_{As}$, para indicar que es la densidad de flujo de la especie A , desde una superficie $\mathcal{S}_s$ en una película estancada. Además, podemos aplicar el teorema del valor medio a las fracciones molares en las superficies $\mathcal{S}_s$ y $\mathcal{S}_b$, cuyas áreas son A_s y A_b , donde, al despejar, tenemos:

$$\bar{N}_{As} = \frac{d_{Ac}}{\delta_c} (\bar{x}_{As} - \bar{x}_{Ab}) = k_{Ax} (\bar{x}_{As} - \bar{x}_{Ab}), \quad (3.7.6)$$

donde k_{Ax} es el coeficiente de película de transferencia de masa de la especie A , basado en la fracción molar x_A , el cual tiene las dimensiones de concentración por velocidad, es decir, $\left[\frac{\text{g} - \text{mol de } A}{\text{longitud}^2 \cdot \text{tiempo}} \right]$, que son también las dimensiones de la densidad de flujo $\bar{N}_{As}$, puesto que las fracciones molares x_A son adimensionales.

3.7.2 Coeficiente de película de energía térmica

Por otra parte, la transferencia interfacial de masa modifica el transporte interfacial de energía térmica, pues la masa transferida desde la superficie, incorpora también su entalpía parcial. Entonces, el flujo de energía térmica desde la superficie $\mathcal{S}_s$ tiene un término adicional al calentamiento $\mathbf{q}$ que está asociado a la diferencia de temperatura entre la superficie y el bulto de fluido, ver figura 3.3. El término adicional corresponde a la entalpía asociada a la incorporación de la especie A , o las entalpías parciales de todas las especies transferidas a través de la superficie. Es importante notar que estas entalpías, donde se incluye desde la entalpía de formación de la especie A , se incluyen también efectos de cambio de fase, como los calores latentes, que también pueden ser incorporados explícitamente, como en la evaporación isobárica de la acetona, ver capítulo 6.

Sea $\mathbf{e}_s$ la densidad de flujo de energía térmica, la cual equivale al calentamiento $\mathbf{q}$ más la densidad de flujo entálpico asociado al flujo másico que ingresa por la superficie $\mathcal{S}_s$ del sistema:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{q} + \sum_{K=A}^G \frac{\bar{H}_K}{M_K} \mathbf{j}_K. \quad (3.7.7)$$

Podemos seguir nuevamente un procedimiento similar al desarrollado arriba, para expresar el calentamiento medio en la película estancada, como la ley de enfriamiento de Newton:

$$\bar{\mathbf{q}} A_s \delta_T = \kappa \left(\int_{\mathcal{S}_s} \delta_y T dS + \int_{\mathcal{S}_b} -\delta_y T dS \right) = \kappa A_s \delta_y (\bar{T}_s - \bar{T}_b), \quad (3.7.8)$$

el cual tiene su forma escalar, apropiada a este caso, al proyectar el flujo en la dirección normal a la superficie $\mathcal{S}_s$, que se obtiene como el producto punto en la dirección δ_y :

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \delta_y A_s \delta_T = \bar{q}_s A_s \delta_T = \kappa A_s (\bar{T}_s - \bar{T}_b), \quad (3.7.9)$$

donde hemos sustituido la notación de la componente q_y por q_s , para indicar que el calentamiento se aplica desde la superficie $\mathcal{S}_s$ hacia el interior del fluido. Al despejar $\bar{q}_s$ obtenemos una expresión de la ley de enfriamiento de Newton:

$$\bar{q}_s = \frac{\kappa}{\delta_T} (\bar{T}_s - \bar{T}_b) = h (\bar{T}_s - \bar{T}_b), \quad (3.7.10)$$

de manera que la densidad del flujo de energía térmica en la superficie $\mathcal{S}_s$, en forma escalar, resulta de la proyección de (3.7.7), una vez integrada, en la dirección de la superficie, $\boldsymbol{\delta}_y$:

$$\bar{\mathbf{e}}_s \cdot \boldsymbol{\delta}_y = \bar{e}_s = \bar{q}_s + \sum_{K=A}^G \bar{H}_K \frac{\mathbf{j}_K}{M_K} \cdot \boldsymbol{\delta}_y, \quad (3.7.11)$$

Finalmente, con el propósito de utilizar la expresión (3.7.6), limitamos la ecuación (3.7.11) a mezclas binarias, para obtener, para el modelo de la película estancada

$$\bar{e}_s = \bar{q}_s + \bar{H}_A \bar{N}_{As}, \quad (3.7.12)$$

donde hemos reemplazado la ecuación (3.7.6) porque en este caso es equivalente, debido a (3.7.2). Es importante tener presente que la notación de los valores medios en alguna región se representa por una sobrelínea, como en $\bar{N}_{As}$. Esta notación coincide con la que se usa para representar la entalpía parcial molar $\bar{H}_K$, en la cual la sobrelínea no indica un valor medio sino, precisamente, que se trata de una cantidad parcial molar, es decir que:

$$\bar{H}_K = \left(\frac{\partial H}{\partial n_K} \right)_{T, P, n_I}, \text{ donde } I = A, B, \dots, G; \text{ pero } I \neq K, \quad (3.7.13)$$

donde n_K es el número de moles de la especie K -ésima.

Así, la densidad de flujo de energía térmica desde una superficie estancada que transfiere una especie química A a un fluido, es equivalente a:

$$\bar{e}_s = h(\bar{T}_s - \bar{T}_b) + \bar{H}_A k_{Ax} (\bar{x}_{As} - \bar{x}_{Ab}), \quad (3.7.14)$$

cuando el área de transferencia del calentamiento y de la transferencia de masa es la misma. De no ser este el caso, el flujo total de energía térmica $\dot{E}_s$, que se transfiere hacia el fluido, debe considerar las áreas de las superficies correspondientes a los procesos de calentamiento A_c y transferencia de la especie A -ésima, A_A :

$$\dot{E}_s = h A_c (\bar{T}_s - \bar{T}_b) + \bar{H}_A k_{Ax} A_A (\bar{x}_{As} - \bar{x}_{Ab}). \quad (3.7.15)$$

Ejercicios

E.3.7-1. Teoría de la película estancada.

1. Revisa la teoría de la película estancada, como se elaboró en la subsección 2.3.3.
2. Elabora la teoría de la película estancada siguiendo el procedimiento de la subsección 2.3.3, para encontrar la ecuación (3.7.6) en un fluido binario.
3. Desarrolla a detalle el procedimiento de esta sección para encontrar la ley de enfriamiento de Newton, ecuación (2.3.15), pero utilizando el perfil de temperatura, la notación de la figura 3.3 y el procedimiento de integración con el uso del teorema del gradiente y del teorema del valor medio, como se ha hecho en esta sección.
4. Compara el desarrollo de los tres puntos anteriores y elabora una lista de semejanzas y diferencias del procedimiento de la subsección 2.3.3 con el de la presente sección, en cuanto al procedimiento y los resultados.

E.3.7-2. Entalpía de una mezcla multicomponente. Convencete de que

$$\rho \hat{H} = \sum_{K=A}^G c_K \bar{H}_K,$$

para un fluido multicomponente.

E.3.7-3. Entalpías del cambio de fase. En un proceso de cambio de fase, al cambio de entalpía asociado a la reestructuración molecular se le llama calor latente, por consideraciones

históricas. Sea λ_f el calor latente de un cambio de fase de un material monocomponente, por ejemplo condensación, evaporación o sublimación, o del cambio de fase de una especie química en materiales multicomponentes, por ejemplo disolución, coagulación, anodizado, extracción, etc... Desarrolla un procedimiento para incorporar λ_f en la densidad de flujo de energía térmica $\bar{e}_s$, de la ecuación (3.7.14).

E.3.7-4. Tiempo de disolución. Un cubito de hielo de 30 mm de lado sale del congelador a 0°C y se suelta en el agua contenida en un vaso de unicel de pared muy gruesa, lo cual nos permite considerarlo un recipiente "perfectamente aislado". Son 300 ml de agua, a la temperatura ambiente de 20°C .

1. Encuentra la masa y la temperatura final del agua.
2. Encuentra la porción de volumen de hielo sumergido en el agua al inicio del proceso.
3. Encuentra el tiempo en el que se disuelve el cubito, de acuerdo a la teoría.
4. Repite los puntos anteriores si el cubito sale del congelador a -10°C
5. Repite los puntos anteriores si el vaso es de vidrio pyrex con espesor de 5 mm.

4. Etapas, fases y modelos de procesos de transporte

En la sección 1.5 definimos los fenómenos de transporte como el estudio de los cambios que manifiestan las propiedades termodinámicas y la rapidez con que se producen dichos cambios, considerando las interacciones del material de estudio con sus alrededores. En este capítulo queremos focalizar el interés en el análisis de la evolución de los procesos de transporte. Este análisis permite hacer predicciones sobre el funcionamiento de las partes más importantes de un equipo, y sobre la duración de dichos procesos.

4.1 Procesos de transporte

Un proceso de transporte es la sucesión de etapas de transferencia...

- de masa de las especies químicas,
- de momentum y/o
- de energía térmica,

en un instrumento, aparato o equipo donde ocurre uno o varios fenómenos de transporte. El análisis de los procesos de transporte inicia al **determinar el sistema**, es decir, la porción o región del material cuya evolución, cambios de configuración, cambios físicos y químicos vamos a estudiar, así como sus interacciones con los alrededores. En un proceso de transporte podemos elegir varios sub-sistemas a ser analizados por separado, de modo que unos sub-sistemas son parte de los alrededores de otros y el conjunto de todos ellos, el sistema, es una representación del instrumento o equipo donde ocurre el proceso bajo estudio.

Al definir el sistema, lo identificamos en una **configuración** que puede ser considerada su **configuración de referencia**, la cual puede coincidir, o no, con su **configuración inicial**, pero debe determinar completa y explícitamente al material a estudiar.

En determinado momento generamos un cambio en el sistema, al modificar alguna de sus propiedades o variables de estado termomecánico, en alguna porción del mismo sistema o generamos algún cambio en alguna de sus fronteras. Esta modificación provocada en un lugar, produce cambios inmediatos en los alrededores cercanos a la porción afectada. Cambios que paulatinamente se extienden a todo el material o sistema dando lugar, inicialmente, a la

etapa transitoria

y tendiendo, al final de esta etapa, a la

etapa estacionaria

del proceso de transporte, en la cual el proceso se efectúa de manera que pueden existir variables que tienen valores distintos en lugares distintos, pero que ya no cambian con el tiempo.

Vamos a identificar los aspectos más importantes de las dos **etapas del proceso de transporte**. La primera **etapa** que ocurre es la **transitoria**, inicia con la respuesta inmediata del sistema a los cambios que detonan el proceso de transporte.

En la etapa transitoria las propiedades de interés cambian conforme transcurre el tiempo. Esta etapa se puede subdividir en dos fases o períodos: el período o fase transitoria incipiente y la fase o período transitorio desarrollado.
--

En la fase transitoria incipiente los cambios afectan solamente a una pequeña región cercana a la porción del material en la que se han generado las modificaciones que detonan el proceso de transporte. Conforme transcurre el tiempo, los cambios afectan porciones cada vez más extensas del material, hasta abarcar su totalidad. En la fase transitoria desarrollada, los cambios afectan la totalidad del sistema, y los valores locales de las variables de interés cambian con el tiempo. Finalmente, el sistema puede evolucionar hasta

la etapa estacionaria, donde la configuración espacial del sistema permanece inalterada conforme transcurre el tiempo.
--

Se puede pensar que la etapa estacionaria consiste de una **única fase estacionaria**.

Hay procesos de transporte que son **inherentemente transitorios**, es decir, procesos cuyas configuraciones cambian continuamente con el tiempo y cuya configuración final es una de **equilibrio termodinámico**, es decir, una configuración final en la cual ya no hay un proceso de transporte. Los **sistemas cerrados o aislados** ilustran claramente esta situación, pues al introducir un cambio en alguna de sus variables de estado (por ejemplo al efectuar una expansión), el sistema responde con un proceso de transporte, que finaliza cuando alcanza su **nuevo estado de equilibrio termodinámico**. Por otra parte, en los **sistemas abiertos** un proceso de transporte, a tiempos muy largos, puede desembocar en una etapa o fase estacionaria que **no alcanza su equilibrio termodinámico**, puesto que el flujo continuo de materiales y/o energía, entrando y saliendo del sistema, impide que se alcance dicho equilibrio. Además, cuando el flujo es solamente de salida, o mayor que el de entrada, eventualmente el sistema puede llegar a la condición trivial de dejar de existir, como cuando se vacía un recipiente.

En este capítulo analizamos la transferencia de masa y de energía térmica en las tres fases correspondientes a las dos etapas: transitoria y estacionaria de algunos sistemas sencillos, para identificar los **cambios de configuraciones**, así como los **tiempos característicos**, en los que ocurren dichas fases o períodos.

Consideramos dos ejemplos: una membrana porosa, que une, a la vez que separa dos compartimentos que contienen líquidos, para determinar el coeficiente de difusión binario de un soluto en un líquido. Analizamos la difusión, que se conduce a través de un orificio capilar de la membrana, como se describe en el capítulo 18. El otro ejemplo es el del transporte de energía térmica a través de una barra sólida, aislada lateralmente, que se calienta en un extremo y se enfría en el otro, como se describe en el capítulo 10. Ambos son sistemas cilíndricos, donde se llevan a cabo procesos de difusión axial, ya sea difusión de un soluto en un solvente o difusión térmica en una barra metálica, con diferentes condiciones a la frontera. Las soluciones matemáticas de ambos modelos se tratan

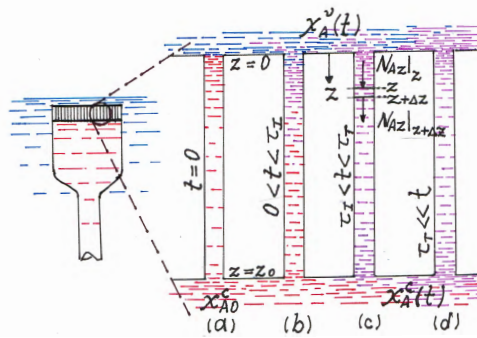


Figura 4.1: Celda de difusión de líquidos y difusión en tubos capilares en diversas fases del proceso: (a) condición inicial, (b) difusión transitoria incipiente, (c) difusión transitoria desarrollada y (d) difusión a tiempos muy largos.

en el capítulo 9.

4.2 Fase transitoria incipiente ($0 < t < \tau_I$)

La fase transitoria incipiente de un proceso de transporte existe desde el inicio del proceso, a $t = 0$, hasta un tiempo característico de la difusión incipiente τ_I , donde $\tau_I = z_0^2/16D$, siendo z_0 el valor de la longitud transversal a la dirección de la difusión, afectada por el proceso de transporte y D un coeficiente de difusión adecuado al problema físico de que se trate, como la viscosidad cinemática ν , la difusividad térmica α_T o la difusividad de una especie química en una mezcla $\mathcal{D}$, según el caso. En la Sección 4.5 obtenemos una expresión para τ_I y analizamos su significado.

4.2.1 Difusión de un soluto en un líquido en un tubo capilar

Una **membrana porosa** es una lámina sólida de espesor z_0 , atravesada por un conjunto de orificios capilares o poros. Ambos lados de la membrana están en contacto con líquidos bien mezclados de un **soluto A** en un **solvente B**, a dos concentraciones distintas. Representamos la **concentración del soluto en el vaso** por su **fracción molar** x_A^v , y la **concentración del soluto en la celda** por x_A^c . Ver figura 4.1. Inicialmente los orificios de la membrana están impregnados por la solución de la celda, con una fracción molar x_{A0}^c [figura 4.1(a)], en tanto que la concentración inicial de soluto en el vaso es, en general, $x_{A0}^v = x_A^v(t) |_{t=0}$. Resolver el ejercicio 9.2-1.

Tratemos primero el proceso de transporte de masa de un soluto A que se encuentra presente en la celda que se ve en la figura 18.1c, la cual se representa esquemáticamente en la figura 4.1. La membrana, que se observa a detalle en la figura 18.2, está formada por un conjunto de orificios o tubos capilares, que se encuentran totalmente impregnados con la solución a la concentración inicial del soluto en la celda $C_{A0}^c = Cx_{A0}^c$, donde $C = C_{A0}^c + C_{B0}^c$ es la concentración total, **que se considera constante** y $x_A + x_B = 1$ en cualquier punto y a cualquier tiempo.

El proceso de transporte inicia cuando la celda se coloca en el vaso lleno de solvente puro ($C_{A0}^v = 0$), o de solvente con alguna concentración inicial conocida $C_{A0}^v \neq 0$, sumergiendo la membrana, de modo que quede cubierta por una delgada capa de solvente de unos 2 ó 3 mm de espesor. Una vez fijada la celda en su sitio, se acciona el agitador del vaso y se mide la conductividad eléctrica de la solución como función del tiempo. La concentración $C_A^v(t)$ se determina como función de la conductividad eléctrica de la solución, a partir de una curva de calibración que previamente haya sido elaborada.

Consideremos como **sistema uno sólo de los tubos capilares de la membrana**, ver por ejemplo el tubo de la figura 4.1, el cual se encuentra en diferentes fases del proceso de difusión, mostradas secuencialmente en la figura 4.1(a), (b), (c) y (d).

Balance de masa de la especie química A al interior de un tubo capilar:

$$\pi r_0^2 \Delta z C \frac{\partial x_A}{\partial t} = \pi r_0^2 N_{Az} \big|_z - \pi r_0^2 N_{Az} \big|_{z+\Delta z} \quad (4.2.1)$$

donde

- r_0 = radio del orificio (m).
- $C = C_A + C_B$ = concentración de la mezcla binaria ($mol - g/m^3$).
- x_A = fracción molar del soluto A en el tubo capilar.
- N_{Az} = flux molar del soluto A en la dirección z ($mol - g/m^2s$).

Dividiendo entre el elemento de volumen $\pi r_0^2 \Delta z$ y tomando el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$, obtenemos el balance diferencial:

$$C \frac{\partial x_A}{\partial t} = - \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \quad (4.2.2)$$

donde

$$N_{Az} = -C \mathcal{D} \frac{\partial x_A}{\partial z} + x_A (N_{Az} + N_{Bz}) \quad (4.2.3)$$

Considerando que los fluxes de soluto (A) y solvente (B) son equimolares en el capilar, es decir que $N_{Bz} = -N_{Az}$, tenemos finalmente que la aplicación de (4.2.3) en (4.2.2) conduce a la EDP:

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 x_A}{\partial z^2} \quad (4.2.4)$$

En la **fase transitoria incipiente** el proceso de transferencia de masa en los tubos capilares se lleva a cabo en la región cercana a la salida de los orificios hacia el solvente del vaso. En esta fase incipiente, el proceso no altera la composición de la solución en el otro extremo de los tubos capilares, que está en contacto con la solución de la celda. Por ello podemos proponer un modelo transitorio en un medio semi-infinito. Este modelo representa adecuadamente el transporte de masa en la región del orificio superior del capilar, en contacto con el solvente del vaso, de modo que la condición inicial es:

$$x_A(z, t) = x_{A0}^c; t = 0, 0 < z < \infty \quad (4.2.5)$$

y las condiciones a la frontera:

$$x_A(z, t) = x_A^v(t); z = 0, t \geq 0 \quad (4.2.6)$$

$$x_A(z, t) = x_{A0}^c; z \rightarrow \infty, \forall t \quad (4.2.7)$$

La última condición enfatiza el hecho de que el proceso de transferencia sólo se lleva a cabo en los alrededores del orificio que conecta la membrana con el solvente en el vaso (en $z = 0$) y que el extremo opuesto, cercano a la celda, queda muy lejos de la zona donde el proceso difusivo es importante. Por esto el lado opuesto de la membrana se encuentra a la concentración constante de la celda x_{A0}^c y su ubicación queda bien representada diciendo que está tan lejos como uno lo quiera suponer, es decir, cuando $z \rightarrow \infty$.

La solución al problema de difusión (4.2.4) con condición inicial (4.2.5) y condiciones a la frontera (4.2.6) y (4.2.7) se obtiene por el método de combinación de variables, en términos de la variable combinada $\eta = z/\sqrt{4\mathcal{D}t}$, cuya sustitución reduce la EDP (4.2.4) a una EDO, y las tres condiciones (4.2.5), (4.2.6) y (4.2.7) a **sólo dos condiciones compatibles**. Dicha solución es:

$$\frac{x_A - x_A^v}{x_{A0}^c - x_A^v} = \text{fer}\left(\frac{z}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) \quad (4.2.8)$$

El procedimiento matemático para encontrar la solución (4.2.8) se puede revisar en la sección 9.3.

4.2.2 Difusión de energía térmica en una barra metálica

Otro ejemplo de un sistema con etapas transitoria y estacionaria es **el proceso de transferencia de energía térmica a través de una barra metálica cilíndrica**, como se describe en el capítulo 10 y se ilustra aquí, en la figura 4.2. El balance de energía térmica en una rebanada de la barra metálica puede expresarse como el balance de envoltura:

$$\pi r_0^2 \Delta z \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \pi r_0^2 q_z|_z - \pi r_0^2 q_z|_{z+\Delta z} \quad (4.2.9)$$

donde

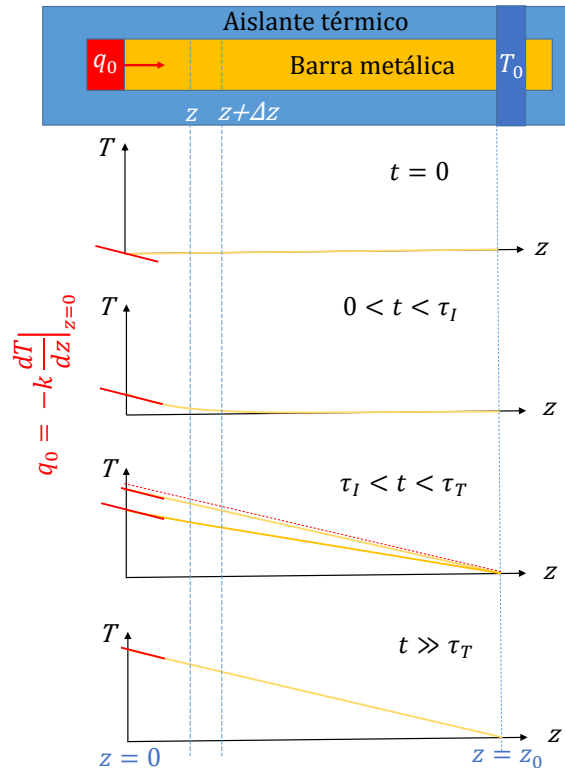


Figura 4.2: Evolución de la temperatura en una barra metálica, sujeta en el extremo $z = 0$ a un flujo térmico constante y en $z = z_0$ a un baño a temperatura constante. $t = 0$ es la condición inicial. $0 < t < \tau_I$ es la fase de difusión térmica incipiente. $\tau_I < t < \tau_T$ es la fase de difusión térmica transitoria desarrollada y $t \gg \tau_T$ es la etapa de difusión térmica estacionaria.

- r_0 = radio de la barra metálica aislada (m).
- ρCp = capacitancia de la barra, producto de la densidad másica por el calor específico, ($J/m^3 K$).
- T = temperatura instantánea de un punto de la barra ($^{\circ}C$) o (K).
- q_z = flux de energía térmica en la dirección z (W/m^2).

El balance de energía térmica (4.2.9) da lugar al balance diferencial:

$$\rho Cp \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad (4.2.10)$$

y la sustitución de la **ley de Fourier**:

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.2.11)$$

para el flux de energía térmica en la barra, conduce a la EDP:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (4.2.12)$$

donde α_T es la **difusividad térmica**, definida como

$$\alpha_T = \frac{k}{\rho Cp}, \quad (4.2.13)$$

y k es el coeficiente de **conductividad térmica**.

La barra inicialmente se encuentra a la temperatura constante T_0 y está en equilibrio térmico a la temperatura del agua de enfriamiento. La etapa inicial del proceso de transferencia de energía térmica se lleva a cabo solamente en la región cercana a la superficie que se calienta. En el resto de la barra no es posible detectar cambios de temperatura. En esta etapa, la **condición inicial** es

$$T(z, t) = T_0; t = 0, 0 < z < \infty \quad (4.2.14)$$

en tanto que las **condiciones a la frontera** se pueden proponer como:

$$q_z(z, t) = q_0; z = 0, t \geq 0 \quad (4.2.15)$$

y

$$T(z, t) = T_0; z \rightarrow \infty, \forall t, \quad (4.2.16)$$

donde q_0 es un flux de energía térmica constante, que se aplica en la superficie $z = 0$ de la barra, para tiempos $t \geq 0$. La solución de (4.2.12) con la condición inicial (4.2.14) y las condiciones de frontera (4.2.15) y (4.2.16) es (ver por ejemplo Incropera y de Witt, 1999, ecuación 5.59):

$$\frac{T(z, t) - T_0}{q_0 z_0 / k} = \frac{\sqrt{4\alpha_T t / \pi}}{z_0} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha_T t}\right) - \frac{z}{z_0} \left(1 - \operatorname{fer}\frac{z}{\sqrt{4\alpha_T t}}\right), \quad (4.2.17)$$

donde z_0 es la longitud de la barra, ver figura 4.2, y funciona en esta solución únicamente como una escala de longitud.

4.3 Etapa estacionaria ($t \gg \tau_T$)

La etapa estacionaria de un proceso de transporte existe cuando las variables del sistema permanecen invariantes en el tiempo, aunque pueden presentar variaciones en el espacio, que llamamos **perfiles**. Esta etapa es la situación límite de la evolución del sistema, cuando el tiempo tiende a infinito: $t \rightarrow \infty$. Hemos aclarado que en los **sistemas cerrados y aislados**, la etapa estacionaria es una de **equilibrio termodinámico** (donde ha finalizado el proceso de transporte). Si el sistema es abierto, la etapa estacionaria **puede ser inexistente**, como cuando se vacía un recipiente o cuando se evapora un solvente sin reposición de líquido. Una **etapa estacionaria** distinta de los dos casos anteriores es un proceso abierto, **donde los flujos de entrada equivalen a los de salida, sin acumulación**.

En esta sección tratamos la fase estacionaria de los dos ejemplos de difusión que venimos desarrollando en este capítulo. Estos sistemas tenderían a establecer una fase o etapa estacionaria, si por sus fronteras circularan **flujos constantes** a tiempos razonablemente grandes, tales que la acumulación de materiales y/o energía, al interior del sistema, pudiera considerarse despreciable. Así, cuando en el extremo caliente de la barra metálica se mantiene continuamente un flujo térmico $q_0 = \text{constante}$ o, en el caso de la difusión en el tubo capilar, mientras el proceso difusivo no acumula apreciablemente cantidades de soluto proveniente de la celda en el tubo capilar, podemos decir que el proceso de transporte se aproxima a uno estacionario.

4.3.1 Difusión de un soluto en un líquido en un tubo capilar

En la etapa estacionaria, el balance de masa para la difusión del soluto A en la membrana carece del término de acumulación, ya que la masa de soluto acumulada en cualquier zona del orificio capilar se considera despreciable. Entonces, la ecuación (4.2.4) se reduce a:

$$\frac{d^2 x_A}{dz^2} = 0 \quad (4.3.1)$$

y está sujeta a la condición a la frontera (4.2.6):

$$x_A(z=0) = x_A^v(t), \quad (4.3.2)$$

y a una **nueva condición a la frontera**, similar a la anterior, del lado de la celda:

$$x_A(z=z_0) = x_A^c(t). \quad (4.3.3)$$

La dependencia temporal de ambas condiciones a la frontera se ha expresado explícitamente, para tener presente que el modelo de difusión estacionaria sólo llegaría a ser una aproximación adecuada **si los cambios de concentración en las fronteras no afectarían significativamente las cantidades de soluto acumuladas al interior del orificio capilar**.

4.3.2 Difusión de energía térmica en una barra metálica

También, la difusión térmica estacionaria corresponde a la ecuación de difusión de la energía térmica (4.2.12), sin el término de acumulación, es decir:

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = 0, \quad (4.3.4)$$

con la condición a la frontera (4.2.15):

$$q_z(z=0) = -k \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0} = q_0, \quad (4.3.5)$$

y en la otra frontera, la nueva condición:

$$T(z=z_0) = T_0. \quad (4.3.6)$$

4.3.3 Solución

Ambos procesos difusivos estacionarios están representados matemáticamente por la misma ecuación y la única diferencia entre ellos es su condición a la frontera en $z = 0$. La solución general de ambos problemas estacionarios corresponde al perfil de una línea recta $\phi^E = mz + b$. Sus soluciones particulares se obtienen al utilizar las condiciones a la frontera para determinar las constantes m y b . Estas soluciones son:

Difusión estacionaria de un soluto en un líquido:

$$\frac{x_A^E(z) - x_A^v(t)}{x_A^c(t) - x_A^v(t)} = \frac{z}{z_0}. \quad (4.3.7)$$

Difusión estacionaria de energía térmica en una barra metálica:

$$\frac{T^E(z) - T_0}{q_0 z_0 / k} = 1 - \frac{z}{z_0}. \quad (4.3.8)$$

Aquí, el superíndice E se ha empleado para indicar que $x_A^E(z)$ y $T^E(z)$ son las soluciones de la etapa estacionaria.

4.4 Etapa transitoria completa ($0 < t < \tau_T$)

La etapa transitoria completa de un proceso de difusión se desenvuelve desde el inicio del proceso a $t = 0$; es decir, desde su condición inicial, hasta el tiempo característico de la difusión transitoria τ_T , más allá del cual se puede considerar que el proceso de transporte está ya en su etapa estacionaria. **La etapa transitoria completa se distingue de la fase transitoria desarrollada**, en que ésta última, que existe en el intervalo $\tau_I < t < \tau_T$, no incluye la fase incipiente, contenida en la etapa transitoria. En la sección 4.5 definimos el tiempo característico de la difusión transitoria τ_T y lo estimamos para los ejemplos que analizamos en este capítulo; sin embargo, en esta sección vamos a discutir las características de las soluciones transitorias de los procesos de difusión axial.

4.4.1 Difusión de un soluto en un líquido en un tubo capilar

Cuando el proceso difusivo, en su etapa transitoria, se extiende ya a todo el espacio del sistema, necesariamente afecta al extremo opuesto o más lejano a la frontera o la región donde se ha generado el proceso de transporte. En esta fase transitoria desarrollada **ya no es buena aproximación** proponer una condición de frontera al infinito, es decir, en el límite cuando $z \rightarrow \infty$; en cambio, es necesario expresar en una condición a la frontera, el estado que guarda dicho extremo. Así el **modelo diferencial para la difusión del soluto A** en la membrana consta de la ecuación de difusión (4.2.4):

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 x_A}{\partial z^2} \quad (4.4.1)$$

con la condición inicial (4.2.5):

$$x_A(z, t) = x_{A0}; t = 0, 0 < z < z_0, \quad (4.4.2)$$

la condición a la frontera (4.2.6):

$$x_A(z, t) = x_A^v(t); z = 0, t \geq 0 \quad (4.4.3)$$

y la **nueva condición a la frontera**, en el extremo finito $z = z_0$:

$$x_A(z, t) = x_A^c(t); z = z_0, \forall t. \quad (4.4.4)$$

Además, la extensión de la contradifusión equimolar de solvente en la dirección opuesta a la del soluto provoca el cambio en la concentración de soluto en el interior de la celda, como se indica en la CF (4.4.4). Este cambio no es arbitrario, cumple con un **balance de masa de soluto A en el conjunto vaso-celda**, de modo que la masa de soluto que hay en la celda más la masa de soluto que hay en el vaso al inicio del experimento, es igual a la masa de soluto en la celda más la masa de soluto en el vaso, en cualquier tiempo posterior. Es decir, que se cumple la ecuación:

$$x_A^c(t) = x_{A0}^c + \frac{V_v}{V_c} x_{A0}^v - \frac{V_v}{V_c} x_A^v(t). \quad (4.4.5)$$

donde

- V_c = Volumen de líquido en la celda.
- V_v = Volumen de líquido en el vaso.

Las CF (4.2.6) y (4.4.4) son **no-homogéneas**. La solución a este problema no-homogéneo de difusión se trata en la subsección 9.2.3, donde se aborda un método de solución que inicia por homogeneizar las CF, lo cual conduce, en cambio, a una EDP no-homogénea. El método lleva a la solución (9.2.54), que se transcribe aquí:

$$x_A(\zeta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\theta) \text{sen}(n\pi\zeta) - (B\zeta - 1)x_A^v(\theta) + x_{A0}^c\zeta, \quad (4.4.6)$$

donde $\zeta = z/z_0$ y $\theta = \mathcal{D}t/z_0^2$ son las variables independientes adimensionales, $B = (1 + V_v/V_c)$, en tanto que $c_n(\theta)$ son **funciones del tiempo**, dadas por la ecuación (9.2.53):

$$c_n(\theta) = a_n e^{-n^2\pi^2\theta} + 2 \frac{(-1)^{n+1}(B-1) - 1}{\pi n} \left(x_A^v(\theta) - n^2\pi^2 \int_0^\theta x_A^v(y) e^{-n^2\pi^2(\theta-y)} dy \right), \quad (4.4.7)$$

las cuales contienen, a su vez, los coeficientes constantes a_n dados por la ecuación (9.2.36), donde:

$$a_n = 2x_{A0}^c \int_0^1 (1 - \zeta) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta \quad (4.4.8)$$

4.4.2 Difusión de energía térmica en una barra metálica

Por su parte, el **modelo diferencial para la difusión de energía térmica** en la barra cilíndrica consta de la ecuación de difusión de la energía térmica (4.2.12):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (4.4.9)$$

con la condición inicial (4.2.14):

$$T(z, t) = T_0; t = 0, 0 < z < z_0, \quad (4.4.10)$$

la condición a la frontera (4.2.15):

$$q_z(z, t) = q_0; z = 0, t \geq 0 \quad (4.4.11)$$

y la **nueva condición a la frontera**, en el extremo finito de la barra $z = z_0$, ver figura 4.2.

$$T(z, t) = T_0; z = z_0, \forall t. \quad (4.4.12)$$

Utilizando cambios de variables, para expresar el problema matemático en su forma homogénea, se resuelve en el capítulo 9, ecuación (9.4.24):

$$\Phi(\zeta, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 Fo} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right), \quad (4.4.13)$$

donde la temperatura adimensional $\Phi(\zeta, Fo)$ es la **diferencia de la temperatura adimensional** de la etapa estacionaria menos la temperatura adimensional en la misma posición $\zeta = z/z_0$, a cualquier tiempo adimensional, conocido como el número de Fourier $Fo = \alpha_T t / z_0^2$, es decir que

$$\Phi(\zeta, Fo) = \frac{T^E(\zeta) - T(\zeta, Fo)}{q_0 z_0 / k}. \quad (4.4.14)$$

En la definición de Φ se ha utilizado la solución estacionaria $T^E(\zeta)$, dada por la ecuación (4.3.8).

4.5 Tiempos característicos de los fenómenos de transporte

4.5.1 Extensión de la fase difusiva incipiente

En las soluciones (4.2.8) y (4.2.17) **la forma de los perfiles de fracción molar y de temperatura**, respectivamente, **están estrechamente relacionados con la función error**, $fer(z/\sqrt{4Dt})$, donde $D = \{\mathcal{D}, \alpha_T\}$ es un coeficiente de difusión de acuerdo al problema tratado, es decir, el coeficiente de difusión binaria, para el ejemplo tratado de la transferencia de especies, y el coeficiente de difusión térmica, para la transferencia de energía térmica. En ambos casos, consideramos que **la extensión del proceso difusivo** en el medio o sistema se puede definir como la región del espacio-tiempo donde el cambio de la variable dependiente (la fracción molar o la temperatura) es mayor al 1 % de su cambio total. Dicha afectación en más del 1 % corresponde a un valor de la función error de alrededor de 0.995 y se relaciona, aproximadamente, con el valor de 2 del argumento η de la función error, como puede verse en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Función error											
η	fer η	η	fer η	η	fer η	η	fer η	η	fer η	η	fer η
0.00	0.0000	0.18	0.20094	0.36	0.38933	0.68	0.66378	1.04	0.85865	1.70	0.98379
0.02	0.02256	0.20	0.22270	0.38	0.40901	0.72	0.69143	1.08	0.87333	1.80	0.98909
0.04	0.04511	0.22	0.24430	0.40	0.42839	0.76	0.71754	1.12	0.88679	1.90	0.99279
0.06	0.06762	0.24	0.26570	0.44	0.46622	0.80	0.74210	1.16	0.89910	2.00	0.99532
0.08	0.09008	0.26	0.28690	0.48	0.50275	0.84	0.76514	1.20	0.91031	2.20	0.99814
0.10	0.11246	0.28	0.30788	0.52	0.53790	0.88	0.78669	1.30	0.93401	2.40	0.99931
0.12	0.13476	0.30	0.32863	0.56	0.57162	0.92	0.80677	1.40	0.95228	2.60	0.99976
0.14	0.15695	0.32	0.34913	0.60	0.60386	0.96	0.82542	1.50	0.96611	2.80	0.99992
0.16	0.17901	0.34	0.36936	0.64	0.63459	1.00	0.84270	1.60	0.97635	3.00	0.99998

Podemos determinar la extensión del proceso difusivo igualando al valor de 2 el argumento de la función error, expresada en las variables independientes originales, como:

$$\frac{z}{\sqrt{4Dt}} \approx 2 \quad (4.5.1)$$

Esta relación (4.5.1) nos permite **determinar la extensión espacial del proceso difusivo** a un tiempo dado. También se puede **determinar el tiempo necesario** para que el proceso difusivo se extienda hasta una longitud dada. En cuanto al ejemplo de la difusión binaria de un soluto a través de una membrana, cuyo espesor es z_0 , podemos decir que el tiempo característico de la fase transitoria inicial τ_I se puede estimar como

$$\tau_I = \frac{z_0^2}{16\mathcal{D}} \quad (4.5.2)$$

En cuanto al ejemplo del flujo térmico en una barra, también podemos **estimar**, por ejemplo, **la distancia axial de la barra** z_0 , cuya temperatura haya cambiado (más del 1 % del cambio total) a un tiempo dado t_0 , después de iniciado el calentamiento de la barra. Entonces

$$z_0 = 4\sqrt{\alpha_T t_0} \quad (4.5.3)$$

es esta distancia.

4.5.2 Duración de la etapa transitoria

La etapa transitoria termina cuando se llega a las soluciones estacionarias T^E y x_A^E , dadas por las ecuaciones (4.3.8) y (4.3.7), respectivamente. Además, las soluciones transitorias (4.4.13) y (4.4.6) tienden a las soluciones estacionarias en el límite cuando el tiempo (adimensional) tiende asintóticamente al infinito, es decir, cuando $Fo \rightarrow \infty$ en la ecuación (4.4.13), y cuando $\theta \rightarrow \infty$ en las ecuaciones (4.4.6) y (4.4.7).

De una manera análoga a la definición de una capa límite, podemos definir el **tiempo de la etapa transitoria**, τ_T , como el intervalo de tiempo necesario para que la diferencia del perfil transitorio de la variable dependiente $\phi(z, t)$, menos su perfil estacionario $\phi^E(z)$, con respecto a la diferencia del valor inicial de la variable dependiente ϕ_0 , menos su perfil estacionario $\phi^E(z)$, tenga **valores inferiores al uno por ciento**. Con este concepto general, podemos definir fracciones Δ , que cuantifican la diferencia porcentual de la función ϕ con respecto al cambio total, es decir:

$$\Delta(z, t) = \frac{\phi(z, t) - \phi^E(z)}{\phi_0 - \phi^E(z)}. \quad (4.5.4)$$

Las fracciones Δ son funciones de la posición y del tiempo. Podemos eliminar la dependencia espacial de dos maneras razonables: (1) evaluando la función en el valor de z donde se ven los cambios más grandes con respecto al perfil estacionario o (2) redefiniendo Δ en términos de sus integrales en todo el dominio espacial, para tener:

$$\bar{\Delta}(z, t) = \frac{\int_0^{z_0} [\phi(z, t) - \phi^E(z)] dz}{\int_0^{z_0} [\phi_0 - \phi^E(z)] dz}. \quad (4.5.5)$$

En lo que sigue, vamos a estimar aproximaciones al tiempo de duración de la etapa transitoria τ_T , limitándonos a funciones Δ evaluadas en algún punto del dominio espacial. Además, si nos limitamos al primer término de las sumatorias de las soluciones transitorias, y evaluamos dicho término para el valor de la coordenada espacial donde la diferencia de la variable dependiente (la temperatura o la fracción molar de nuestros ejemplos) con respecto a su valor estacionario sea máximo, para luego despejar y conocer el tiempo τ_T .

4.5.3 Duración del transitorio de la difusión térmica en una barra metálica

Consideremos la temperatura de la barra metálica en su etapa transitoria, ecuación (4.4.13), donde la variable adimensional $\Phi(\zeta, Fo)$ es la diferencia de temperatura, definida en (4.4.14). Para evaluar qué tanto la diferencia de la temperatura, en la etapa transitoria, se aparta de la temperatura estacionaria, construimos la función Δ_T , sustituyendo las ecuaciones (4.4.13) y (4.3.8) en:

$$\Delta_T(\zeta, Fo) = \frac{T^E(\zeta) - T(\zeta, Fo)}{T^E(\zeta) - T_0} = \frac{1}{1 - \zeta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2n-1)^2} e^{-(\frac{2n-1}{2}\pi)^2 Fo} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right), \quad (4.5.6)$$

Puesto que la barra se calienta con un flujo térmico constante q_0 , el extremo de la barra en $\zeta = 0$ será el más sensible a los cambios de temperatura, de manera que evaluamos el primer término de la serie de $\Delta_T(\zeta = 0, Fo)$ y lo igualamos al 1 %, es decir:

$$\Delta_{T1}(\zeta = 0, Fo) = \frac{8}{\pi^2} e^{-(\frac{\pi}{2})^2 Fo} = \frac{1}{100}, \quad (4.5.7)$$

y en la última igualdad despejamos el número de Fourier, o tiempo adimensional:

$$Fo = \frac{\alpha_T \tau_T}{z_0^2} = -\frac{4}{\pi} \ln \left(\frac{\pi^2}{800} \right) \approx 1.781, \quad (4.5.8)$$

de donde, la duración de la etapa transitoria es, aproximadamente

$$\tau_T \approx 1.781 \frac{z_0^2}{\alpha_T}. \quad (4.5.9)$$

Por otra parte, la estimación del tiempo característico de la fase transitoria incipiente τ_I , para la difusión térmica, por medio de una expresión similar a la ecuación (4.5.2), permite establecer una relación entre los dos tiempos característicos de la etapa transitoria:

$$\frac{\tau_T}{\tau_I} \approx 1.781(16) \approx 30. \quad (4.5.10)$$

Es decir, que **la duración de la etapa transitoria del proceso de calentamiento de una barra metálica con un flujo térmico constante dura, aproximadamente, treinta veces el tiempo característico de su fase transitoria incipiente.**

4.5.4 Duración del transitorio de la difusión en un tubo capilar de una membrana

Consideremos ahora la difusión equimolar transitoria en uno de los tubos capilares de la membrana de la celda de difusión, que se ha resuelto en el capítulo 9 y analizado en su significado físico en este capítulo. La fracción molar del soluto $x_A(\zeta, \theta)$, a través del capilar, está dada por la ecuación (4.4.6) y las funciones del tiempo $c_n(\theta)$, por la ecuación (4.4.7). Si definimos una función $\Delta_A(\zeta, Fo)$ para determinar la diferencia porcentual de la solución transitoria menos la estacionaria, con respecto a la diferencia de la concentración en la celda menos la concentración estacionaria, tenemos que:

$$\Delta_A(\zeta, \theta) = \frac{x_A(\zeta, \theta) - x_A^E(\zeta)}{x_A^c(\theta) - x_A^E(\zeta)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\theta) \text{sen}(n\pi\zeta)}{(1 - \zeta)[x_{A0}^c - (B - 2)x_A^v(\theta)]} \quad (4.5.11)$$

Los mayores valores de la diferencia en las fracciones molares Δ_A , está asociada a la región media de los tubos capilares ($\zeta \approx 1/2$), ya que en ambos extremos la diferencia en el numerador es cero, debido a las CF. Esta observación puede verse también en los valores de las funciones seno de la sumatoria, cuando $\zeta = 0$ y $\zeta = 1$. Por lo tanto elegimos el valor de $\zeta = 1/2$ para estimar la duración del transitorio de la difusión en un tubo capilar. Sustituyendo este valor en (4.5.11) y restringiendo la evaluación al primer término de la serie, tenemos:

$$\Delta_{A1}(1/2, \theta) = \frac{2c_1(\theta) \text{sen}(\pi/2)}{x_{A0}^c - (B - 2)x_A^v(\theta)}. \quad (4.5.12)$$

Esta relación depende de la composición en el vaso, como función del tiempo, y se hace necesario guardar la estimación del tiempo lo más sencilla posible. Por tal motivo es posible proponer dos casos extremos: (a) consideremos que $x_A^v = 0$, lo cual ocurre al inicio de un experimento cuando el vaso contiene solvente puro y (b) a tiempos muy largos, cuando se alcanza la concentración del equilibrio termodinámico, es decir, cuando $x_A^v = x_{A0}^c/B$. Los dos estimados quedan, entonces, entre los valores:

$$\left(\frac{2c_1(\theta)}{x_{A0}^c}, \frac{Bc_1(\theta)}{x_{A0}^c} \right). \quad (4.5.13)$$

Ambos estimados dependen de la función $c_1(\theta)$, que resulta de la aplicación de la ecuación (4.4.7):

$$c_1(\theta) = a_1 e^{-\pi^2 \theta} + \frac{2B-4}{\pi} \left(x_A^v(\theta) - \pi^2 e^{-\pi^2 \theta} \int_0^\theta x_A^v(u) e^{\pi^2 u} du \right), \quad (4.5.14)$$

donde es necesario evaluar la constante a_1 utilizando la ecuación (4.4.8). Esto es $a_1 = 2x_{A0}^c/\pi$. Por otra parte, el factor entre paréntesis de la ecuación (4.5.14) tiene dos términos; el primero representa la influencia de la concentración de soluto en el vaso, $x_A^v(\theta)$, y el segundo representa la importancia de la historia de los cambios de concentración de soluto en el vaso (la integral de cero a θ) en la evolución de la concentración a la mitad de los tubos capilares, hacia su valor estacionario. Si despreciamos el término de memoria y atendemos tanto a la influencia de la concentración inicial en la celda, como a las dos maneras de aproximar el valor de la función $x_A^v(\theta)$, sugeridas arriba, sustituyendo $x_A^v = 0$ en el primer estimado y $x_A^v = x_{A0}^c/B$ en el segundo, encontramos finalmente que

$$\left(\frac{4}{\pi} e^{-\pi^2 \theta}, \frac{2B}{\pi} (e^{-\pi^2 \theta} + 1) \right). \quad (4.5.15)$$

Ya que el valor $B \gg 1$ y que el segundo estimado no puede representar una fracción de la unidad, puesto que estaría acotado entre $2B/\pi$ (cuando $\theta \rightarrow \infty$) y $4B/\pi$ (cuando $\theta = 0$), vemos que aproximarnos al equilibrio termodinámico bajo esta aproximación, no tiene sentido físico. En consecuencia, nos quedamos solamente con el primer estimado, haciéndolo equivalente al 1 % del cambio total, para definir el tiempo de la etapa transitoria como:

$$\Delta_A(1/2, \theta) \approx \frac{4}{\pi} e^{-\pi^2 \theta} = \frac{1}{100}, \quad (4.5.16)$$

de donde

$$\theta = \frac{\mathcal{D} \tau_T}{z_0^2} \approx -\frac{1}{\pi^2} \ln \frac{\pi}{400} = 0.491 \quad (4.5.17)$$

y

$$\tau_T \approx 0.491 \frac{z_0^2}{\mathcal{D}}. \quad (4.5.18)$$

De acuerdo a lo anterior, la relación entre el tiempo característico de la etapa transitoria τ_T y el tiempo característico de la fase transitoria incipiente τ_I resulta:

$$\frac{\tau_T}{\tau_I} \approx 0.491(16) \approx 8. \quad (4.5.19)$$

Considerados conjuntamente los dos procesos difusivos estudiados, podemos concluir que en estos procesos, **la duración de la etapa transitoria es mayor en un orden de magnitud a la duración de la fase incipiente del mismo, aunque el factor puede ser de 30, como en el caso de la difusión térmica en la barra metálica, e inclusive, en sistemas abiertos podría ser conveniente usar un factor de 50.**

4.6 Modelos para el aparato de difusión de un soluto A en fase líquida

4.6.1 Balance de masa del soluto A en el vaso

Además del balance de masa del soluto A en los orificios capilares de la membrana, el siguiente paso importante es realizar un **balance de masa del soluto A en el vaso**, que se supone perfectamente agitado. También se supone que la concentración del soluto en el vaso, conocida como la

fracción molar $x_A^v(t)$, es medida por un instrumento de conductividad eléctrica (este paso requiere de una curva de calibración). El balance permite establecer la EDO:

$$V_v C_v \frac{dx_A^v}{dt} = n_{or} \pi r_{or}^2 N_{A0} \quad (4.6.1)$$

donde

- C_v = concentración molar total en el vaso.
- n_{or} = número de orificios en la membrana.
- r_{or} = radio de un orificio de la membrana.
- N_{A0} = flux molar de soluto A que entra al vaso desde un orificio de la membrana. Nótese que este flux es una magnitud, que no está asociada con sistema coordenado alguno y que, consecuentemente, será una expresión precedida por el signo que la convierta en una cantidad positiva, ya que se trata de una entrada.

Entonces, para un proceso difusivo equimolar en un tubo capilar de la membrana ($N_A + N_B = 0$), tenemos:

$$N_{A0} = -N_A|_{z=0} = -J_A|_{z=0} = \mathcal{D}C_v \left. \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (4.6.2)$$

donde $(\partial x_A / \partial z)|_{z=0}$ se obtiene derivando parcialmente la solución del balance de masa en un tubo capilar de la membrana, para $x_A(z, t)$, con respecto a la coordenada z que se estableció para el análisis de los tubos capilares. Ver Figura 4.1.

En las secciones 4.2, 4.3 y 4.4, hemos presentado soluciones para la fracción molar de soluto $x_A(z, t)$ en un tubo capilar, bajo distintas consideraciones físicas y matemáticas. Dichas soluciones son expresadas por la ecuación (4.2.8) para transitorios incipientes; por la ecuación (4.3.7) para difusión estacionaria y por la ecuación (4.4.6) para la etapa transitoria completa, a partir de una ecuación de gobierno no-homogénea, con CF homogéneas, ver subsección (9.2.3). También se puede partir de la solución para la misma etapa transitoria, pero con CF no-homogéneas, como se ha hecho en la sección (2.3) Estas soluciones pueden ser usadas para calcular el flux molar $N_A|_{z=0}$ en un capilar, de acuerdo con la expresión (4.6.2), como hacemos a continuación.

4.6.2 Concentración del soluto en el vaso durante la fase transitoria incipiente

La derivada en z de la solución de la **fase transitoria incipiente**, dada por la ecuación (4.2.8) se ha desarrollado en el capítulo 9, resultando la ecuación (9.3.3):

$$\left. \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{x_{A0}^c - x_A^v(t)}{\sqrt{\pi \mathcal{D}t}}, \quad (4.6.3)$$

de modo que, para el transitorio incipiente tenemos:

$$N_{A0} = -N_A|_{z=0} = \mathcal{D}C_v \frac{x_{A0}^c - x_A^v}{\sqrt{\pi \mathcal{D}t}}, \quad (4.6.4)$$

y podemos escribir el balance (4.6.1) como

$$\frac{d(x_{A0}^c - x_A^v)}{dt} = -\frac{\kappa_I}{2} \left[\frac{x_{A0}^c - x_A^v}{\sqrt{t}} \right] \quad (4.6.5)$$

donde el parámetro

$$\kappa_I = 2 \frac{r_{or}^2 n_{or} \sqrt{\pi \mathcal{D}}}{V_v}, \quad (4.6.6)$$

tiene el sentido de la raíz cuadrada de una rapidez de difusión en la membrana, con unidades de $\text{tiempo}^{-1/2}$.

La solución de (4.6.5) por integración directa da:

$$\ln \left(1 - \frac{x_A^v}{x_{A0}^c} \right) = -\kappa_I \sqrt{t}. \quad (4.6.7)$$

La ecuación (4.6.7) es apropiada para estimar coeficientes de difusividad $\mathcal{D}$, de solutos en líquidos a partir de resultados experimentales, utilizando un tiempo de experimentación que no rebase el tiempo característico de la fase transitoria incipiente τ_I , definido por la ecuación (4.5.2). Como una guía en cuanto a su orden de magnitud, consideremos que la difusividad binaria de un soluto en un solvente líquido tiene un orden de magnitud de $10^{-9} \text{m}^2/\text{s}$, y consideremos una membrana cuyo espesor sea $z_0 = 2 \times 10^{-3} \text{m}$. Entonces resulta que $\tau_I = (2 \times 10^{-3})^2 / (16 \times 10^{-9}) \approx 250 \text{s}$, y que el tiempo de experimentación debería ser $t \leq \tau_I \approx 250 \text{s}$, es decir, alrededor de 5 minutos, como máximo.

4.6.3 Modelo cuasi-estacionario de la concentración del soluto en el vaso

Los modelos cuasi-estacionarios surgen de comparar los tiempos característicos de dos dinámicas que difieren al menos en dos órdenes de magnitud. De esta manera, una dinámica ocurre muy rápidamente con respecto a la rapidez de la otra, que es comparativamente muy lenta. En la celda de difusión de líquidos, por ejemplo, está por una parte la dinámica de la difusión en los tubos capilares, cuyos cambios transitorios, es decir, cuyo tiempo característico de la etapa transitoria τ_T , puede considerarse como un tiempo muy corto, comparado con el tiempo característico de la transferencia de masa del soluto de la celda al vaso, que coincide con el tiempo de la duración de un experimento τ_{ex} . Entonces, cuando $\tau_T \ll \tau_{ex}$, podemos aproximar la difusión en los tubos capilares como si ocurriera instantáneamente, es decir, sin acumulación, comparada con el tiempo del transporte de soluto desde la celda al vaso. Esto significa que es posible acoplar la solución de la difusión estacionaria en el tubo capilar, con el balance transitorio para los cambios de la masa de soluto en el vaso.

Los modelos cuasi-estacionarios se construyen, entonces, con una parte transitoria que representa la dinámica más lenta, acoplada con una parte estacionaria que representa la dinámica más rápida.

En la sección 4.5 hemos encontrado que el tiempo característico de la etapa transitoria es aproximadamente ocho veces el tiempo característico de la difusión incipiente en cualquier tubo capilar de la membrana, Ecuación (4.5.19), de modo que, considerando los valores mencionados al final de la sección anterior, tenemos que $\tau_T \approx 8\tau_I \approx 2 \times 10^3 \text{s}$, lo cual equivale a unos 33 minutos. Esto significa que, para operar adecuadamente la celda de difusión de líquidos, utilizando un modelo cuasi-estacionario, es necesario realizar experimentos largos, que duren alrededor de 50 horas, es decir, cien veces el tiempo τ_T .

Para elaborar el **modelo cuasiestacionario**, utilizamos la solución estacionaria de la difusión en los tubos capilares, ecuación (4.3.7), simultáneamente con las ecuaciones (4.6.1) y (4.6.2). Derivando la fracción molar estacionaria y sustituyendo el balance total de soluto, ecuación (4.4.5), tenemos:

$$\left. \frac{\partial x_A^E}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{x_{A0}^c}{z_0} - \frac{B}{z_0} x_A^v(t), \quad (4.6.8)$$

que se sustituye en (4.6.2) para encontrar N_{A0} y luego en el balance de soluto en el vaso, ecuación (4.6.1), para obtener la EDO:

$$\frac{dx_A^v}{dt} + \kappa_E B x_A^v(t) = \kappa_E x_{A0}^c, \quad (4.6.9)$$

donde

$$\kappa_E = \frac{n_{or} \pi r_{or}^2 \mathcal{D}}{z_0 V_v}, \quad (4.6.10)$$

tiene el sentido de una rapidez de difusión en la membrana, con unidades de tiempo⁻¹. La solución, utilizando un factor integrante $e^{\kappa_E B t}$ es:

$$x_A^v(t) = \frac{x_{A0}^c}{B} (1 - e^{-\kappa_E B t}), \quad (4.6.11)$$

o, de manera equivalente:

$$\ln \left(1 - B \frac{x_A^v(t)}{x_{A0}^c} \right) = -\kappa_E B t. \quad (4.6.12)$$

Así, las ecuaciones (4.6.7) y (4.6.12) son dos soluciones para estimar el coeficiente de difusión a partir de experimentos con mezclas de líquidos en una celda de difusión. La primera es apropiada para los primeros cinco minutos de experimentación, en tanto que la segunda es adecuada con experimentos largos, de más de cinco horas de experimentación.

4.7 Modelos para la difusión de vapores en el tubo de Stefan

4.7.1 Funcionamiento del tubo de Stefan

El **tubo de Stefan** consiste de un tubo capilar colocado verticalmente, con una longitud total L de unos $0.1m$, con el extremo inferior obturado y el extremo superior conectado a un tubo horizontal, generalmente de mayor diámetro, formando con él un arreglo en T , como puede verse en la Figura 17.1. Este arreglo se sumerge en un baño a temperatura constante. Antes de ello, se introduce un líquido volátil en el tubo capilar, hasta que su nivel deje una altura H sin líquido, de alrededor de unos $0.03m$, en la región superior del capilar. La experiencia se desarrolla a temperatura constante y consiste en observar cómo baja el nivel del capilar $h(t)$ conforme transcurre el tiempo.

El nivel $h(t)$ baja debido a la evaporación del líquido volátil A que se ha colocado en el fondo. El extremo superior del tubo capilar se mantiene ventilado por un flujo laminar del gas B en el tubo horizontal, lo suficientemente bajo para **no generar succión** de la mezcla gaseosa en el extremo abierto del tubo capilar. Bajo estas condiciones, los vapores de A se transportan por difusión desde la interfase líquido-gas hasta la boca abierta del tubo capilar, donde son barridos por el flujo continuo del gas B .

4.7.2 Balances del vapor A en un tubo de Stefan

El proceso es transitorio y no tiende a llegar a un régimen estacionario, sino al agotamiento del líquido A , cuando se vacía por completo el tubo capilar.

Consideremos un sistema coordenado anclado en la boca abierta del tubo capilar, donde la coordenada vertical z está dirigida hacia abajo (ver la Figura 4.3, con la coordenada z marcada

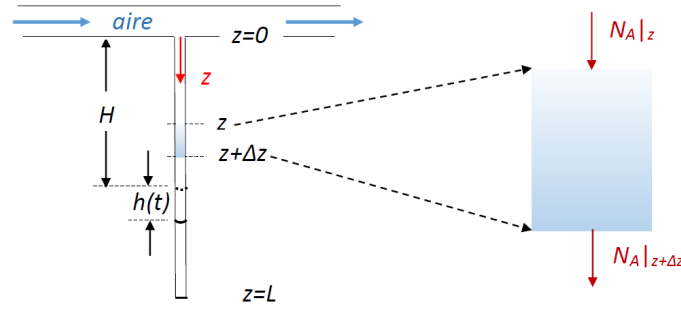


Figura 4.3: Tubo de Stefan.

en color rojo). En esta figura, H representa la distancia inicial, de la boca del tubo capilar al menisco del líquido, representado cruzando el capilar con una línea punteada. Además, $h(t)$ es el desplazamiento del menisco de líquido, conforme transcurre el tiempo y el líquido se evapora. La longitud total del tubo capilar es L . Un **balance de masa transitorio para la especie A** en unidades molares, entre el plano z y el plano $z + \Delta z$, en la región de la **mezcla gaseosa** $0 \leq z \leq [H + h(t)]$, resulta:

$$A_c \Delta z \frac{\partial C_A}{\partial t} = A_c N_{Az}|_z - A_c N_{Az}|_{z+\Delta z}, \quad (4.7.1)$$

donde A_c es el área transversal del tubo capilar. Dividiendo entre el volumen $A_c \Delta z$ y tomando el límite, cuando $\Delta z \rightarrow 0$ tenemos la EDP:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = - \frac{\partial N_{Az}}{\partial z} \quad (4.7.2)$$

Es importante aclarar que **el balance de masa del vapor de A se lleva a cabo de acuerdo al formalismo de sumar el término en el plano z y restarlo en el plano $z + \Delta z$** , independientemente de que la ubicación del sistema coordenado, en este caso, corresponde a la dirección contraria a la del flujo de vapor del compuesto volátil, ver la Figura 4.3. Este formalismo es compatible y debe usarse en combinación con la ley de Fick, expresada con un signo negativo, como:

$$\mathbf{J}_A = -\mathcal{D} \nabla C_A = -C \mathcal{D} \nabla x_A. \quad (4.7.3)$$

Esta expresión vectorial es independiente de los sistemas coordenados e indica que la dirección del flux difusivo de masa coincide con la dirección contraria a la del gradiente de la concentración del vapor, es decir, coincide con la dirección de su máximo decaimiento.

Ahora podemos expresar el flux total del vapor A en dirección z , como la suma de su parte difusiva mas su parte convectiva:

$$N_{Az} = J_{Az} + x_A (N_{Az} + N_{Bz}) = -C \mathcal{D} \frac{\partial x_A}{\partial z} + x_A (N_{Az} + N_{Bz}), \quad (4.7.4)$$

donde N_{Az} aparece en forma implícita y es posible despejarla. En particular, en este caso es razonable modelar al aire, el gas B, como una película estancada, es decir, proponer que $N_{Bz} = 0$, de la Ecuación (4.7.4), resulta entonces:

$$N_{Az} = - \frac{C \mathcal{D}}{1 - x_A} \frac{\partial x_A}{\partial z}. \quad (4.7.5)$$

que puede ser sustituida en (4.7.2) para tener la expresión:

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1 - x_A} \frac{\partial x_A}{\partial z} \right). \quad (4.7.6)$$

La solución de este balance requiere de una CI y dos CF, que son, respectivamente:

$$\begin{aligned} x_A(z, 0) &= x_{A,sat}; & 0 \leq z \leq H, \\ x_A(0, t) &= 0; & 0 < t, \\ x_A(H + h(t), t) &= x_{A,sat}; & 0 \leq t \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

La solución al problema transitorio se lleva a cabo en el Capítulo 9. En dicha solución se emplea un cambio de variables, utilizando la solución al problema asociado que no tiene término de acumulación. Dicho problema es planteado y resuelto a continuación. Sea

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} \right) = 0. \quad (4.7.8)$$

la ecuación de difusión estacionaria, con CF:

$$\begin{aligned} x_A(z=0) &= 0, \\ x_A[z=H+h(t)] &= x_{A,sat}. \end{aligned} \quad (4.7.9)$$

En este problema, la dependencia temporal permanece solamente en la rapidez de disminución del nivel del líquido, el cual es una frontera variable. Integrando la EDO (4.7.8), obtenemos:

$$\frac{1}{1-x_A} \frac{dx_A}{dz} = C_1 \quad (4.7.10)$$

Integrando nuevamente, obtenemos $\ln(1-x_A) = -C_1 z + C_2$, y aplicando las CF vemos que $C_2 = 0$ y que

$$C_1 = -\frac{\ln(1-x_{A,sat})}{H+h(t)}, \quad (4.7.11)$$

en tanto que la solución resulta

$$\ln(1-x_A) = \frac{z}{H+h(t)} \ln(1-x_{A,sat}) \quad (4.7.12)$$

donde, eliminando los logaritmos:

$$(1-x_A) = (1-x_{A,sat})^{\frac{z}{H+h(t)}} \quad (4.7.13)$$

Ahora es posible encontrar el flux molar axial N_{Az} , sustituyendo la Ecuación (4.7.11) en la (4.7.10) y esta en (4.7.5), considerando la derivada como ordinaria, de acuerdo con las consideraciones del presente desarrollo. Entonces:

$$N_{Az} = C \mathcal{D} \frac{\ln(1-x_{A,sat})}{H+h(t)}. \quad (4.7.14)$$

Por otra parte, un **balance integral de masa, para el líquido puro A** que se encuentra en el fondo del tubo capilar, Ec. (7.1-2) del libro de Bird es:

$$\frac{dm^{(A)}}{dt} = -w^{(A)}, \quad (4.7.15)$$

donde $w^{(A)}$ es el flujo másico evaporado, que se relaciona con N_{Az} a través de un **balance en la superficie interfacial**, o condición a la frontera para la interfase líquido-gas:

$$w^{(A)} = A_c M_A (-N_{Az})|_{z=H+h(t)}, \quad (4.7.16)$$

donde A_c es el área transversal del tubo capilar, M_A es la masa molecular del líquido volátil y el signo negativo asignado al flux N_{Az} evaporado, es el que corresponde a su dirección en el sistema coordenado elegido. Sustituyendo (4.7.14) en (4.7.16) y ésta en (4.7.15) el balance de líquido resulta:

$$\rho^{(A)} \frac{dh(t)}{dt} = -\frac{M_A C \mathcal{D}}{H+h(t)} \ln(1-x_{A,sat}). \quad (4.7.17)$$

Aquí se ha empleado la igualdad $m^{(A)} = \rho^{(A)} A_c [L-H-h(t)]$ donde $\rho^{(A)}$ es la densidad del líquido volátil puro, que es una constante, y el volumen de líquido contiene la variable $h(t)$. Por integración directa, sujeta a la CI $h(0) = 0$, la EDO anterior da:

$$[H+h(t)]^2 - H^2 = -2 \frac{M_A C}{\rho^{(A)}} \ln(1-x_{A,sat}) \mathcal{D} t, \quad (4.7.18)$$

que corresponde a la relación teórica entre el cambio de altura del nivel del líquido y el tiempo. Podemos despejar $h(t)$ en la expresión anterior, para obtener:

$$\frac{h(t)}{H} = \sqrt{1 - 2 \frac{M_A C}{\rho^{(A)}} \frac{\ln(1-x_{A,sat})}{H^2} \mathcal{D} t} - 1, \quad (4.7.19)$$

o despejar el tiempo, para tener una relación de comparación más directa con una línea recta:

$$t = \frac{\rho^{(A)}}{M_A C \mathcal{D} [-\ln(1-x_{A,sat})]} [H+h(t)]^2 - \frac{\rho^{(A)} H^2}{M_A C \mathcal{D} [-\ln(1-x_{A,sat})]}, \quad (4.7.20)$$

que tiene la forma de la ecuación de la recta $y = mx + b$ si hacemos $y = t$ y $x = (H+h)^2$.

Ejercicios

4.7-1. Libertad de elección de sistemas coordenados. Repite el desarrollo de esta subsección, 4.7.2, con un sistema coordenado anclado a la superficie de la interfase del líquido A y su vapor saturado, con la coordenada z dirigida (a) en la dirección ascendente y (b) en la dirección descendente. En ambos casos, toma en cuenta la convención formal, explicada en el párrafo que sigue después de la ecuación (4.7.2) y la ley de Fick, la cual establece físicamente la dirección del flujo, al considerar cuidadosamente las ubicaciones de las fronteras, en nuestro caso, la del líquido saturado y la boca del capilar.

Al concluir el desarrollo, demuestra que las cantidades físicas que dependen de la orientación del sistema coordenado, como el flux molar N_{Az} de nuestra ecuación (4.7.14), habrán quedado expresadas con el signo que les corresponda de acuerdo con dicha orientación; de modo que la cantidad representa la misma entidad física, en el sistema coordenado que haya sido elegido. Demuestra también que las cantidades que no dependen de la orientación del sistema coordenado, como el tiempo t de nuestra ecuación (4.7.20), resultan inalterados en las expresiones matemáticas que los determinan, independientemente del sistema coordenado que haya sido utilizado, para los tres sistemas coordenados.

5. Disolución de una esfera de sal soluble en agua

5.1 Observaciones experimentales y tiempos característicos

5.1.1 Descripción y rapidez de los fenómenos observados

Se hace una esfera de alumbre (componente A, soluto) puliendo con lija un trozo de la sal; el radio de la esfera mide alrededor de $R_0 = 0.025$ m. Se limpia con una brocha o cepillo seco la superficie de la esfera, que luego se coloca en una red muy abierta de hilo de nylon y se introduce en un recipiente transparente con agua estancada (componente B, solvente). La superficie de la esfera, en contacto con el agua, inicia su proceso de disolución, a temperatura y presión ambientales.

1. Conforme transcurre el tiempo, es posible observar la disminución del tamaño de la esfera, cuya rapidez inicial es, alrededor de

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_{R_0} \approx -0.4 \text{ [cm/hr]} \approx -1.11 \times 10^{-6} \text{ [m/s]}. \quad (5.1.1)$$

donde $R(t)$ es el radio de la esfera, que disminuye conforme transcurre el tiempo.

2. Se puede proponer que, en la superficie de la esfera, el sólido se encuentra en equilibrio con una solución saturada del alumbre. Más allá, en el líquido, la concentración de sal disminuye hasta agotarse, ver gráfica de densidad de la solución en la Figura 5.1.
3. La densidad de las soluciones de alumbre en agua es mayor que la densidad del agua, con un valor de saturación alrededor de $\rho_{sat} = 1150 \text{ Kg/m}^3$, por lo que alrededor de la esfera se forma una película de la solución, que al ser más pesada que el agua ($\rho_B = 1000 \text{ Kg/m}^3$), resbala cerca de la superficie, dirigiéndose hacia abajo. Ver gráfica de la velocidad en la Figura 5.1.
4. Es posible observar el movimiento de la solución conforme se desplaza alrededor de la esfera y luego se precipita hacia el fondo del recipiente. Se puede seguir este movimiento debido a que la dependencia del índice de refracción de las soluciones de sal con respecto a su concentración, permite visualizar el movimiento de *estrías o parvoides* de diferente concentración y así determinar, de una manera aproximada, la rapidez del movimiento

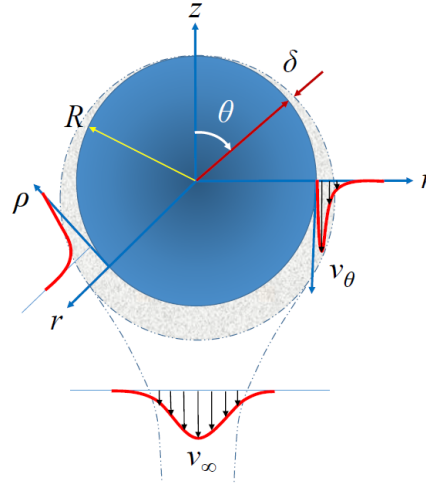


Figura 5.1: Perfiles radiales de densidad y de velocidad del líquido alrededor de una esfera de alumbre que se disuelve.

vertical descendente de la solución debajo de la esfera, que en el caso observado tiene un valor aproximado de $v_0 \approx 0.013$ m/s.

5.1.2 Tiempos característicos y longitudes característicos

El **tiempo de disolución de la esfera sólida**, τ_s , para una esfera de radio inicial $R_0 = 0.025$ m, es el tiempo que tardaría en disolverse, considerando la rapidez observada de la disminución de su radio, que se ha expresado en la ecuación (5.1.1), de acuerdo con la cual

$$\tau_s \approx \frac{R_0}{1.11 \times 10^{-6}} = 2.25 \times 10^4 \text{ s}, \quad (5.1.2)$$

es decir, seis horas y quince minutos, sin tomar en cuenta el efecto de la disminución del área de transferencia de la esfera, en el proceso de la disolución.

Por otra parte, el **tiempo asociado al movimiento convectivo**, τ_c , es un tiempo característico asociado al desplazamiento de la solución concentrada alrededor de la esfera, desde su posición superior hasta la inferior, es decir que

$$\tau_c = \frac{\pi R_0}{v_0} = \frac{\pi \times 0.025}{0.013} \approx 6 \text{ s}. \quad (5.1.3)$$

Este tiempo convectivo, que está asociado a la observación visual del movimiento de pequeños volúmenes de diferentes concentraciones, que son observables debido a la dependencia del índice de refracción con respecto a la concentración de la solución, podría estar sub-estimado debido a que el movimiento es mucho más lento en el líquido encima del hemisferio superior de la esfera. La velocidad reportada, en cambio, se ha medido en la región inferior, donde los parvoides, más o menos estables, descienden por el efecto de la gravedad sobre su mayor densidad que la del solvente. Considerando cada uno de estos parvoides como una gota o cuerpo esférico, con cierta composición e identidad, inmerso en el solvente, y sabiendo el valor de la densidad de una solución saturada, ρ_{sat} , podemos considerar que la velocidad observada de los parvoides de la solución de composición no-uniforme, v_0 , tiene alguna semejanza con la velocidad terminal de una gota o esfera en un medio infinito. Con esta idea en mente, podemos aplicar la expresión para encontrar la velocidad terminal de un cuerpo, Ecuación (2.6-17) de Bird *et al.*, pag. 70, encontrando que

$$v_0 = v_t = \frac{\sigma_0^2(\rho_{peli} - \rho_B)g}{18\mu}, \quad (5.1.4)$$

donde σ_0 es el diámetro de una esfera de solución concentrada que desciende con su velocidad terminal v_t ; ρ_B es la densidad del agua, en tanto que aproximamos la densidad del parvoide por la densidad de la película que rodea la esfera, definida como $\rho_{peli} = (\rho_{sat} + \rho_B)/2$. Despejando el diámetro σ_0 :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{36\mu v_t}{(\rho_{sat} - \rho_B)g}} = \sqrt{\frac{36 \times 10^{-3} \times 0.013}{150 \times 9.81}} \approx 5.64 \times 10^{-4} \text{ m}. \quad (5.1.5)$$

Podemos considerar el diámetro σ_0 como el tamaño o **longitud característica de los parvoides de concentración no homogénea**, que se desplazan en una capa límite alrededor de la esfera sólida. La teoría de la capa límite nos proporciona una manera de estimar el valor del **espesor de la capa límite**, δ_0 , Ecuación (4.4-17) de Bird *et al.*:

$$\delta_0 = 4.64 \sqrt{\frac{v x}{v_\infty}} = 4.64 \sqrt{\frac{v(\pi R_0/2)}{v_0}} = 4.64 \sqrt{\frac{10^{-6}(\pi 0.025/2)}{0.013}} \approx 8.06 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad (5.1.6)$$

de modo que $\delta_0 > 10 \sigma_0$, es decir que el espesor de la capa límite, δ_0 es, en un orden de magnitud, mayor que el tamaño de los parvoides o estrías, σ_0 , visibles por el efecto de refracción de la luz, debido a su dependencia de la concentración de sal.

Por otra parte, el avance del **proceso difusivo** en su **fase transitoria incipiente** (ver sección 4.5), puede estimarse a partir de la expresión (4.5.1), que para el proceso de difusión de alumbre en el líquido alrededor de la esfera resulta:

$$\frac{r - R}{\sqrt{4\mathcal{D}_{AB}\tau_D}} \approx 2, \quad (5.1.7)$$

donde $r > R$ es una **posición radial en el líquido**, cuando $R(t)$ es, como se ha establecido, el tamaño de la esfera; es decir, la posición de la interfase sólido-líquido, con respecto al centro de la esfera sólida; τ_D es el tiempo necesario para que el proceso difusivo, que inicia en la superficie de la esfera, penetre hasta la posición r y $\mathcal{D}_{AB}$ es el coeficiente de difusión de A en B. Entonces, un **proceso puramente difusivo** en la película de líquido, avanzaría el espesor de la capa límite de movimiento, δ_0 , con un coeficiente de difusión $\mathcal{D}_{AB} \approx 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ en un intervalo de tiempo τ_D , tal que la Ecuación (4.5.2) resultaría:

$$\tau_D \approx \frac{\delta_0^2}{16\mathcal{D}_{AB}} = \frac{8.06^2 \times 10^{-6}}{16 \times 10^{-9}} \approx 4.06 \times 10^3 \text{ s}, \quad (5.1.8)$$

donde τ_D es menor que el tiempo de disolución de la esfera, τ_S , en un orden de magnitud. De hecho resulta que $\tau_D \approx 0.18 \tau_S$. Esto implica que un proceso netamente difusivo tardaría, típicamente, la quinta parte del tiempo que toma a la esfera disolverse. Además, el tiempo característico de la convección, $\tau_C = 6 \text{ s}$, es mucho menor que el tiempo de la difusión, es decir, que $\tau_C \ll \tau_D < \tau_S$, por lo que...

...podemos proponer un modelo transitorio, que se simplifica a uno cuasi-estacionario, en el líquido que rodea la esfera, con una capa límite de movimiento estacionaria y un balance de masa transitorio de soluto, alimentado por la esfera sólida de sal, la cual disminuye continuamente de tamaño, debido a su proceso de disolución.

5.2 Adecuación al uso de coordenadas esféricas

Considerando las coordenadas esféricas de Bird *et al.*, Figura A.6-1(b), pg. 971 y toda su notación y relaciones de la pag. 973, tenemos por hipótesis que,

- H1 El fluido es un **medio infinito** estancado.
- H2 Se puede considerar **flujo incompresible**, es decir que $\rho \neq \rho(p)$.
- H3 El calor de disolución es despreciable, por lo cual se considera el **sistema isotérmico**, a la temperatura T_0 .
- H4 Por lo anterior, la **densidad sólo depende de la composición** de la mezcla binaria, $\rho = \rho(\omega_A)$.
- H5 El flujo es producido por la **convección natural** generada por el incremento de densidad de la solución, al aumentar la concentración de alumbre en la película de fluido más cercana a la esfera.

Además, las siguientes consideraciones son importantes al establecer los balances:

- C1 El vector de aceleración de la gravedad tiene componentes radial y angular, en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\delta}_z = -g(\cos\theta \boldsymbol{\delta}_r - \sin\theta \boldsymbol{\delta}_\theta), \quad (5.2.1)$$

- C2 Hay una ecuación para la densidad de la solución en función de la cantidad de soluto, $\rho = \rho(\omega_A; T_0)$, tal que su expansión en series de Taylor alrededor de la densidad del agua pura $\rho_0 = \rho(\omega_A = 0; T_0) = \rho_B$ es

$$\rho \approx \rho_0 + \omega_A \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega_A} \right)_{\omega_A=0} = \rho_0 + \rho_0 \zeta_A \omega_A, \quad (5.2.2)$$

- C3 En la Ecuación (5.2.2) se ha definido el **coeficiente de expansión másica** con respecto a los cambios de concentración de la especie A, ζ_A , como:

$$\zeta_A = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \omega_A} \right)_{\omega_A=0}, \quad (5.2.3)$$

cuya derivada es positiva. El coeficiente ζ_A es una constante positiva, que se evalúa en el límite de solución diluida, es decir, cuando $\omega_A \rightarrow 0$ y es la mejor aproximación de la derivada a una línea recta.

- C4 En las soluciones acuosas de alumbre, la densidad de la solución como función de la composición se aproxima a una línea recta; la Ecuación (5.2.2), tiene pendiente constante y suponemos que es suficiente para aproximar la función de la composición hasta la saturación, que ocurre en la superficie de la esfera.
- C5 Los términos de **gravedad** o **fuerza de campo externo** incluyen el estado base, que es el del solvente puro y un término de Boussinesq de la convección natural:

$$\rho \mathbf{g} = \rho g(-\boldsymbol{\delta}_z) = -\rho_0 g(1 + \zeta_A \omega_A)(\cos\theta \boldsymbol{\delta}_r - \sin\theta \boldsymbol{\delta}_\theta), \quad (5.2.4)$$

- C6 La **presión** se considera como una **variable mecánica** a ser encontrada como parte de la solución del problema de flujo. La presión se toma como $p(r, \theta, t) = p_0(r, \theta) + \tilde{p}(r, \theta, t)$, donde p_0 es la **presión del estado base**, que corresponde al agua pura en **situación hidrostática**, en tanto que $\tilde{p}$ es la **presión interna en exceso de la hidrostática**, asociada a **movimientos convectivos** en la cercanía de la esfera. La ecuación general de la hidrostática, $-\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0}$, corresponde, en este caso, a las ecuaciones escalares:

$$-\frac{\partial p_0}{\partial r} - \rho_0 g \cos \theta = 0 \quad (5.2.5)$$

y

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} + \rho_0 g \sin \theta = 0. \quad (5.2.6)$$

- C7 También, recordando que la densidad de la solución es igual a la suma de las **densidades parciales** del soluto y del solvente, es decir que $\rho(\omega_A) = \bar{\rho}_A + \bar{\rho}_B$, dividimos esta expresión entre ρ , para obtener la igualdad $1 = \omega_A + \omega_B$, donde vemos que las **fracciones masa** son $\omega_A = \bar{\rho}_A / \rho$ y $\omega_B = \bar{\rho}_B / \rho$. Además, (en las soluciones binarias) resulta que $\bar{\rho}_A = \omega_A \rho$ y $\bar{\rho}_B = (1 - \omega_A) \rho$.

- C8 La **velocidad media de flujo másico** se postula como la función vectorial:

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta, t) \boldsymbol{\delta}_r + v_\theta(r, \theta, t) \boldsymbol{\delta}_\theta, \quad (5.2.7)$$

cuyas componentes están en coordenadas esféricas. Esta velocidad corresponde al desplazamiento del centro de masa de las partículas o cuerpos puntuales de la solución de A en B y se justifica su expresión bidimensional debido a que la fuerza impulsora del flujo es la gravedad, cuyas componentes están dadas por la ecuación (5.2.4), que tiene solamente las componentes g_r y g_θ , lo cual causaría movimientos solamente en esas dos direcciones, si la velocidad es pequeña.

5.3 Balances locales-instantáneos en coordenadas esféricas

- B1 Ecuación de continuidad de la masa total:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0 \quad (5.3.1)$$

- B2 Ecuación de movimiento en dirección θ (la dirección principal de movimiento del fluido):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{r \partial \theta} + g \zeta_A \omega_A \sin \theta \\ + v \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

- B3 Ecuación de movimiento en dirección r :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - g \zeta_A \omega_A \cos \theta \\ + v \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

- B4 Ecuación de continuidad de la masa de la especie A:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial \omega_A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} = \mathcal{D}_{AB} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \omega_A}{\partial \theta} \right) \right] \quad (5.3.4)$$

Las ecuaciones (5.3.1) a (5.3.3) son **cuatro relaciones independientes para las cuatro variables dependientes** que contienen; es decir, para el conjunto $\{v_\theta, v_r, \omega_A, \tilde{p}\}$. Por lo tanto el sistema se encuentra cerrado y en principio, con condiciones iniciales y a la frontera apropiadas, tiene solución única.

5.4 Condiciones de salto, condiciones iniciales y a la frontera

Las condiciones de salto son balances en las interfases, consideradas como superficies de discontinuidad de las propiedades de interés. [Ver, por ejemplo, Slattery (1984)].

CS1 Condición de salto de masa total en la interfase $r = R(t)$:

$$\rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r = \rho_{sat} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r \quad (5.4.1)$$

CS2 Condición de salto de masa de la especie A en la interfase $r = R(t)$:

$$\rho_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r = \rho_{A,sat} (\mathbf{v}_A - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r, \quad (5.4.2)$$

CS3 Condición de salto de momentum en la interfase $r = R(t)$:

$$\rho_s \mathbf{v}_s (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r + \boldsymbol{\pi}_s \cdot \boldsymbol{\delta}_r = \rho_{sat} \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r + p \boldsymbol{\delta}_r + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\delta}_r \quad (5.4.3)$$

donde se asignan condiciones de saturación o equilibrio termodinámico entre las fases sólida y líquida. $\mathbf{u} = \frac{dR}{dt} \boldsymbol{\delta}_r$ es la velocidad de desplazamiento de la interfase, $\mathbf{v}_s = 0$ es la velocidad de las partículas o cuerpos puntuales de la sal sólida, en el límite acercándose a la interfase desde el interior de la fase sólida.

Entonces, de la ecuación (5.4.1) tenemos:

$$\frac{dR}{dt} = - \frac{\rho_{sat}}{\rho_s - \rho_{sat}} v_r, \quad (5.4.4)$$

y de la ecuación (5.4.2):

$$-\rho_s \frac{dR}{dt} = (\mathbf{n}_A - \rho_{A,sat} \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\delta}_r, \quad (5.4.5)$$

donde $\mathbf{n}_A = \rho_{A,sat} \mathbf{v}_A$. Efectuando los productos punto y despejando $\mathbf{n}_A \cdot \boldsymbol{\delta}_r = n_{A,r} = \rho_{A,sat} v_{A,r}$, tenemos también:

$$n_{A,r} = -(\rho_s - \rho_{sat} \omega_{A,sat}) \frac{dR}{dt}. \quad (5.4.6)$$

Por su definición, el **flux másico de A** se puede expresar como la suma de su parte convectiva más su parte difusiva fickeana, $\mathbf{n}_A = \rho_{A,sat} \mathbf{v} + \mathbf{j}_A$, cuya componente radial es:

$$n_{A,r} = \rho_{sat} \omega_{A,sat} v_r - \rho_{sat} \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial r}. \quad (5.4.7)$$

La ecuación (5.4.4) se sustituye en (5.4.6), la cual se iguala a (5.4.7) para despejar la componente radial de la velocidad media v_r , que resulta

$$v_r = -\gamma_1 \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial r}, \quad (5.4.8)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{1 - \rho_{sat}/\rho_s}{1 - \omega_{A,sat}}. \quad (5.4.9)$$

La Ecuación (5.4.8) es la primera conclusión de la aplicación de las condiciones de salto en la interfase. La descomposición de la condición de salto de momentum, Ecuación (5.4.3), en sus componentes normal y tangencial, multiplicando por el vector unitario δ_r y por el vector unitario δ_θ , respectivamente, produce el par de relaciones:

$$\pi_{s,rr} = \rho_{sat} v_r \left(v_r - \frac{dR}{dt} \right) + p + \tau_{rr} \quad (5.4.10)$$

y

$$\pi_{s,\theta r} = \rho_{sat} v_\theta \left(v_r - \frac{dR}{dt} \right) + \tau_{\theta r}. \quad (5.4.11)$$

respectivamente. La Ecuación (5.4.10) introduce los esfuerzos normales en la superficie sólida, $\pi_{s,rr}$, y los calcula como la suma de los esfuerzos inerciales, la presión y los esfuerzos extensionales del lado del líquido. Por su parte, la Ecuación (5.4.11) define los esfuerzos tangenciales en el sólido, $\pi_{s,\theta r}$, como iguales a los esfuerzos viscosos en el líquido, $\tau_{\theta r}$, bajo la condición de no-deslizamiento en la superficie, $v_\theta = 0$. Ahora podemos establecer las **condiciones a la frontera** como el siguiente conjunto de relaciones:

para $r = R(t)$

$$v_\theta(\theta, r, t) = 0, \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi; \forall t \quad (5.4.12)$$

$$v_r(\theta, r, t) = -\gamma_1 \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial r}, \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi; t > 0 \quad (5.4.13)$$

$$\omega_A(\theta, r, t) = \omega_{A,sat}, \text{ para } 0 \leq \theta \leq \pi; t \geq 0, \quad (5.4.14)$$

y cuando $r \rightarrow \infty$:

$$v_\theta(\theta, r, t) = v_r(\theta, r, t) = \omega_A(\theta, r, t) = 0; \tilde{p}(\theta = \pi/2, r, t) = 0. \quad (5.4.15)$$

Además, las **condiciones iniciales**, cuando $t = 0$, para $0 \leq \theta \leq \pi$, $r > R_0$, donde $R_0 = R(t)|_{t=0}$, son:

$$v_\theta(\theta, r, 0) = v_r(\theta, r, 0) = \omega_A(\theta, r, 0) = \tilde{p}(\theta, r, 0) = 0. \quad (5.4.16)$$

5.5 Adimensionalización y simplificación

El problema propuesto consiste de las ecuaciones de transporte (5.3.1) a (5.3.3) con las condiciones a la frontera (5.4.12) a (5.4.15) y las condiciones iniciales (5.4.16).

Considerando las escalas:

- R_0 = radio inicial de la esfera,
- $\delta = \delta(\theta)$ = espesor de la capa de fluido en movimiento sobre el casquete superior,
- $t_0 = \delta^2/\nu$ = tiempo característico del transporte viscoso de momentum,
- v_0 = velocidad de precipitación de la solución en el solvente y
- $p_0 = \rho_0 v_0^2$ = presión dinámica asociada a la convección natural,

que permiten definir variables adimensionales, denotadas por un acento breve, $\checkmark$, tales que

$$r = \delta \checkmark + R_0, \quad (5.5.1)$$

$$t = \frac{\delta^2}{\nu} \check{t}, \quad (5.5.2)$$

$$v_\theta = v_0 \check{v}_\theta, \quad (5.5.3)$$

$$\tilde{p} = \rho_0 v_0^2 \check{p}. \quad (5.5.4)$$

Considerando el sentido físico del parámetro δ ; al observar, en el hemisferio superior, que $\delta(\theta) \leq \delta_0 = \delta(\pi/2)$ y que un valor típico de δ_0 se ha dado en la Ecuación (5.1.6), vemos que el orden de $\delta_0/R_0 \approx 0.32$ y elaboramos el siguiente procedimiento:

1. Adimensionalizar la ecuación de continuidad total (5.3.1) para encontrar una propuesta razonable para la definición de $\check{v}_r$. Esto implica la simplificación $\check{y} + R_0/\delta \approx R_0/\delta$ para eliminar los efectos de curvatura radial y corresponde a la presencia de una delgada capa de fluido en movimiento rodeando la esfera, en la cual ocurre todo el proceso provocado por los cambios de concentración del fluido.
2. Adimensionalizar la ecuación de movimiento en dirección θ (Ecuación 5.3.4).
3. Adimensionalizar la ecuación de movimiento en dirección r (Ecuación 5.3.2), **utilizando el mismo factor** que se aplicó para adimensionalizar la ecuación de movimiento en dirección θ , con el propósito de ...

...poder comparar, sobre la misma base, la magnitud de cualquiera de los términos individuales, con los otros términos de cualquiera de las dos ecuaciones de movimiento.

4. Adimensionalizar la ecuación de continuidad de la especie A (5.3.3).
5. Comparar las magnitudes de los términos de cada ecuación y descartar los más pequeños en órdenes de magnitud, con relación a otros que les sean comparables, de acuerdo con la relación (9).

5.5.1 Normalización y cambio de coordenadas

Normalizando la fracción masa de la especie A, de modo que $0 \leq \check{\omega}_A \leq 1$, lo que se cumple si

$$\check{\omega}_A = \frac{\omega_A}{\omega_{A,sat}}, \quad (5.5.5)$$

y renombrando la componente de velocidad en la dirección normal a la superficie de la esfera, de modo que $\check{v}_r \rightarrow \check{v}_y$,

6. Normalizar y efectuar los cambios de variable necesarios para expresar el problema desarrollado hasta el paso anterior (punto 5.), así como las condiciones iniciales y a la frontera, para obtener:
 - Ecuación de continuidad total:

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\check{v}_\theta \sin(\theta)] + \frac{\partial \check{v}_y}{\partial \check{y}} = 0. \quad (5.5.6)$$

donde el orden de v_r es tal que $v_r = \frac{\delta}{R_0} v_0 \check{v}_y$

- Ecuación de movimiento en θ , eliminando términos con coeficientes δ/R_0 :

$$\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial \check{v}_\theta}{\partial \check{t}} + \check{v}_\theta \frac{\partial \check{v}_\theta}{\partial \theta} + \check{v}_y \frac{\partial \check{v}_\theta}{\partial \check{y}} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{v}_\theta}{\partial \check{y}^2} - \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta} + 4 \frac{\text{Gr}_A}{\text{Re}^2} \check{\omega}_A \sin(\theta). \quad (5.5.7)$$

- Ecuación de movimiento en $\check{y}$, eliminando términos con coeficientes δ/R_0 :

$$\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right) \frac{\partial \check{v}_y}{\partial \check{t}} - \check{v}_\theta^2 = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right) \frac{\partial^2 \check{v}_y}{\partial \check{y}^2} - \left(\frac{R_0}{\delta} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \check{y}} - 4 \frac{\text{Gr}_A}{\text{Re}^2} \check{\omega}_A \cos(\theta). \quad (5.5.8)$$

- Ecuación de continuidad de la especie A:

$$\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \check{t}} + \check{v}_\theta \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \theta} + \check{v}_y \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \check{y}} = \frac{2}{\text{ReSc}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{\omega}_A}{\partial \check{y}^2}. \quad (5.5.9)$$

- Condiciones iniciales, para $\tilde{t} = 0$:

$$\check{v}_\theta(\theta, \check{y}, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \check{y} > 0, \quad (5.5.10)$$

$$\check{v}_y(\theta, \check{y}, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \check{y} > 0, \quad (5.5.11)$$

$$\check{p}(\theta, \check{y}, 0) = 0 \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \check{y} > 0, \quad (5.5.12)$$

$$\check{\omega}_A(\theta, \check{y}, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \check{y} > 0, \\ 1 & \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \check{y} = 0. \end{cases} \quad (5.5.13)$$

- Condiciones a la frontera:

$$\check{v}_\theta(\theta, \check{y}_t, \tilde{t}) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \forall \tilde{t}, \quad (5.5.14)$$

$$\check{v}_y(\theta, \check{y}_t, \tilde{t}) = \frac{2\gamma_2}{\text{ReSc}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \check{y}}, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \tilde{t} > 0, \quad (5.5.15)$$

$$\check{\omega}_A(\theta, \check{y}_t, \tilde{t}) = 1, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \tilde{t} \geq 0, \quad (5.5.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \check{v}_\theta(\pi/2, b, \tilde{t}) &= \check{v}_y(\pi/2, b, \tilde{t}) = 0, \\ \check{p}(\pi/2, b, \tilde{t}) &= \check{\omega}_A(\pi/2, b, \tilde{t}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{donde } b = \lim_{\check{y} \rightarrow \infty} \check{y}, \quad (5.5.17)$$

$$(5.5.18)$$

donde

$$\gamma_2 = \gamma_1 \omega_{A,sat}, \quad (5.5.19)$$

$$\check{y}_t = \frac{R(t) - R_0}{\delta}, \quad (5.5.20)$$

$$\text{Re} = \frac{v_0 D_0}{\nu}, \quad (5.5.21)$$

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{\mathcal{D}_{AB}}, \quad (5.5.22)$$

$$\text{Gr}_A = \frac{\zeta_A g R_0^3 \omega_{A,sat}}{\nu^2}, \quad (5.5.23)$$

y D_0 = diámetro inicial de la esfera.

5.5.2 Eliminación de otros términos pequeños

Al obtener las ecuaciones (5.5.6) a (5.5.9), hemos eliminado términos multiplicados por el factor δ/R_0 , pues comparados con los otros términos, contienen un factor menor que uno, que los hace menos importantes en la ecuación correspondiente. Pensemos, ahora, que deseamos quedarnos con aquellos términos de las ecuaciones de movimiento, que sean de orden uno. Esto incluye a los términos convectivos que han quedado en las ecuaciones (5.5.7) y (5.5.8), pues sus coeficientes son la unidad. en la teoría de la capa límite, hay términos viscosos tan importantes como los convectivos. De la misma manera, el término viscoso de la ecuación (5.5.7) debe ser de orden uno, lo cual determina cierto rango de valores del número de Reynolds. En efecto, el rango de valores del número de Reynolds debe ser tal que el coeficiente del término viscoso sea del mismo orden que el coeficiente de los términos convectivos. Entonces, de la ecuación (5.5.7) tenemos que:

$$\frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 = O(1) \rightarrow \frac{2}{\text{Re}} = O \left(\frac{\delta}{R_0} \right)^2 \quad (5.5.24)$$

si este orden de magnitud del número de Reynolds se sustituye en la ecuación (5.5.8), tenemos una expresión con otros coeficientes de orden pequeño:

$$\left(\frac{\delta}{R_0} \right) \frac{\partial \check{v}_y}{\partial \tilde{t}} - \check{v}_\theta^2 = \left(\frac{\delta}{R_0} \right) \frac{\partial^2 \check{v}_y}{\partial \check{y}^2} - \left(\frac{R_0}{\delta} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \check{y}} - 4 \frac{\text{Gr}_A}{\text{Re}^2} \check{\omega}_A \cos(\theta), \quad (5.5.25)$$

y podemos eliminar, en consecuencia, el término transitorio y el término viscoso del balance de momentum en la dirección transversal.

5.6 Modelo local y modelo interfacial de esfera decreciente

5.6.1 Asimilación del modelo a la teoría de la capa límite

Sabemos que es el incremento de concentración del soluto, alrededor de la superficie de la esfera de alumbre, lo que genera el fenómeno convectivo, porque el flujo es debido, exclusivamente, al aumento de la densidad de la solución concentrada alrededor de la superficie de la esfera, con respecto a la densidad del agua. Hemos estimado dos longitudes características que pueden asociarse al flujo de la solución, a partir de la determinación aproximada de la velocidad de la solución que se desploma hacia el fondo del tanque contenedor, la cual se estimó como $v_0 \approx 0.013$ m/s.

La longitud característica $\sigma_0 \approx 5.64 \times 10^{-4}$ m corresponde al diámetro de un cuerpo fluido esférico, cuya densidad es la densidad de la película, es decir, la densidad promedio aritmético de la densidad del solvente y la densidad de una solución saturada; este cuerpo fluido se imagina como una gota que se precipita al fondo del recipiente, con una velocidad terminal igual a v_0 en un líquido estancado, en el régimen de flujo laminar.

La otra longitud característica que se estimó fue la de una capa límite laminar alrededor de una placa plana de longitud $L = \pi R_0/2$, es decir, la longitud recorrida por el ángulo θ desde $0 < \theta \leq \pi/4$, sobre la superficie inicial de la esfera de alumbre, la cual se denota por el valor $\delta_0 = 8.06 \times 10^{-3}$ m, ver sección

El promedio de ambas longitudes características se puede tomar como un valor indicativo del espesor de la capa en movimiento alrededor de la esfera sólida: $\delta_a = (\sigma_0 + \delta_0)/2 \approx 4.3 \times 10^{-3}$ m.

Sabemos que el tiempo característico de la convección es de seis segundos y, con el valor de δ_a y la ecuación (5.1.8), podemos estimar un tiempo de la difusión másica, el cual resulta 1.16×10^3 s. Luego, podemos comparar el tiempo de la difusión y comprobar que $\tau_S \approx 20\tau_D$, donde $\tau_S = 2.25 \times 10^4$ s fue dado por la ecuación (5.1.2). Así, podemos afirmar que ...

... el tiempo característico de la disminución de tamaño de la esfera transcurre muy lentamente, comparado con los tiempos característicos de los fenómenos de transporte de masa y del ímpetu por convección y por difusión, de modo que podemos considerar que ambos son estacionarios con relación a la disminución de tamaño de la esfera, la cual ocurre de manera transitoria.

5.6.2 Modelo local estacionario

Entonces la ecuación de continuidad queda sin cambio; además, todos los balances se expresan sin términos transitorios, para elaborar un modelo cuasiestacionario, en el que también se eliminan los términos de menor importancia, como ya ha sido señalado, de modo que las ecuaciones de transporte y sus CF quedan, finalmente, como:

- Ecuación de continuidad total:

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} [\check{v}_\theta \sin(\theta)] + \frac{\partial \check{v}_y}{\partial \check{y}} = 0. \quad (5.6.1)$$

- Ecuación de movimiento en θ :

$$\check{v}_\theta \frac{\partial \check{v}_\theta}{\partial \theta} + \check{v}_y \frac{\partial \check{v}_\theta}{\partial \check{y}} = \frac{2}{\text{Re}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{v}_\theta}{\partial \check{y}^2} - \frac{\partial \check{p}}{\partial \theta} + 4 \frac{\text{Gr}_A}{\text{Re}^2} \check{\omega}_A \sin(\theta). \quad (5.6.2)$$

- Ecuación de movimiento en $\check{y}$:

$$-\check{v}_\theta^2 = - \left(\frac{R_0}{\delta} \right) \frac{\partial \check{p}}{\partial \check{y}} - 4 \frac{\text{Gr}_A}{\text{Re}^2} \check{\omega}_A \cos(\theta). \quad (5.6.3)$$

- Ecuación de continuidad de la especie A:

$$\check{v}_\theta \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \theta} + \check{v}_y \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \check{y}} = \frac{2}{\text{ReSc}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial^2 \check{\omega}_A}{\partial \check{y}^2}. \quad (5.6.4)$$

- Condiciones a la frontera:

$$\check{v}_\theta(\theta, \check{y}_t) = 0, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5.6.5)$$

$$\check{v}_y(\theta, \check{y}_t) = -\frac{2\gamma_2}{\text{ReSc}} \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2 \frac{\partial \check{\omega}_A}{\partial \check{y}}, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (5.6.6)$$

$$\check{\omega}_A(\theta, \check{y}_t) = 1, \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (5.6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \check{v}_\theta(\pi/2, b) &= \check{v}_y(\pi/2, b) = 0, \\ \check{p}(\pi/2, b) &= \check{\omega}_A(\pi/2, b) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{donde } b = \lim_{\check{y} \rightarrow \infty} \check{y}, \quad (5.6.8)$$

donde los parámetros $\{\gamma_2, \check{y}_t, \text{Re}, \text{Sc}, \text{Gr}_A\}$ se han definido en las relaciones (5.5.19) a (5.5.23), y $D_0 = 2R_0$ es el diámetro inicial de la esfera.

5.6.3 Modelo interfacial de transferencia de masa

Las ecuaciones (5.6.1) a (5.6.4) forman un conjunto independiente del tiempo, de modo que, en este nivel de aproximación cuasiestacionario el acoplamiento se da, únicamente, por el valor de una constante. En efecto, regresando a las condiciones de salto, que dieron origen a las CF, podemos ahora combinar las ecuaciones (5.4.1), (5.4.2), (5.4.6) y (5.4.7), para llegar, finalmente, a una expresión para la rapidez temporal de cambio del radio de la esfera de alumbre:

$$u_r = \frac{dR}{dt} = \left(\frac{\rho_{sat}}{\rho_s} \right) \frac{\mathcal{D}_{AB}}{1 - \omega_{A,sat}} \frac{\partial \omega_A}{\partial r} \Big|_{r=R} = \left(\frac{\rho_{sat}}{\rho_s} \right) k_L \omega_{A,sat} = \text{constante}, \quad (5.6.9)$$

donde k_L = coeficiente de transferencia de masa, $[m/s]$.

Debido a que el modelo de transporte, dado por el conjunto de balances (5.6.1) a (5.6.4), es estacionario, el lado derecho de la ecuación (5.6.9) es una constante y por lo tanto...

... el cambio del radio de la esfera sólida resulta lineal en el tiempo.

Esta predicción sólo es adecuada para el inicio del experimento o en intervalos pequeños de tiempo y nos permite ver cómo

las consideraciones que permitieron reducir la complejidad del modelamiento, también limitaron su capacidad predictiva.

Sin embargo, en este punto llegamos ya a completar los elementos para proponer los dos modelos más adecuados a las diversas aplicaciones, como proponemos en la siguiente sección.

5.6.4 Modelo local cuasiestacionario

El conjunto de ecuaciones de balance que corresponden a un modelo cuasiestacionario para las variables $\{\check{v}_\theta, \check{v}_y, \check{p}, \check{\omega}_A\}$ se compone por la ecuación de continuidad (5.6.1), el balance de momentum en dirección θ (5.5.7), el balance de momentum en dirección y (5.6.3) y el balance de masa del soluto A (5.5.9). Es interesante notar que la incompresibilidad elimina el término de acumulación de masa, aunque lo que hace la parte estacionaria del modelo es la eliminación del término de acumulación de momentum en la dirección transversal, comparado con los tres términos que permanecen en el balance del ímpetu en la dirección transversal. Estos dos balances sin términos transitorios pueden ser usados para reducir el sistema a dos ecuaciones con términos transitorios en las variables $\{\check{v}_\theta, \check{\omega}_A\}$. Una reducción similar puede hacerse con el modelo estacionario, ecuaciones (5.6.1) a (5.6.4).

Ejercicios

5.6-1. Modelo estacionario local de dos ecuaciones.

- Deriva la ecuación de movimiento en dirección y con respecto a θ y la ecuación de movimiento en dirección θ con respecto a y , para obtener en ambas ecuaciones el término de la

presión en una segunda derivada cruzada: $\frac{\partial^2 \check{p}}{\partial \theta \partial y}$, sabiendo que $\check{p}$ es una función continua de ambas variables θ y y , y elimina algebraicamente dicho término.

- (ii) Integra la ecuación de continuidad, (5.6.1), para la componente $\check{v}_y$, desde la superficie de la esfera, situada en un valor $y_i = [R(t) - R_0]/\delta \leq 0$, hasta un valor cualquiera de la coordenada $y > 0$, y aplica las CF (5.6.5) y (5.6.6).
- (iii) Sustituye la variable $\check{v}_y$ en la ecuación resultante del punto (i), revisando que en este procedimiento hemos aplicado, de alguna manera, el método de la teoría de la capa límite.¹
- (iv) Sustituye también $\check{v}_y$ en el balance de masa del soluto, ecuación (5.6.4). El resultado, una vez complementado por las condiciones a la frontera, es un modelo estacionario de dos ecuaciones integrodiferenciales, para las variables $\{\check{v}_\theta, \check{\omega}_A\}$.

5.6-2. Modelo cuasiestacionario local de dos ecuaciones. Sigue el procedimiento del ejercicio anterior con las ecuaciones del modelo cuasiestacionario, ecuaciones (5.6.1), (5.5.7), (5.6.3) y (5.5.9), para llegar al modelo de dos ecuaciones transitorias integrodiferenciales para $\{\check{v}_\theta, \check{\omega}_A\}$.

5.6-3. Modelo estacionario integral de dos ecuaciones. Sigue el procedimiento de von Kármán, reseñado por Bird, en su sección 4.4, para obtener un modelo integral de las ecuaciones del modelo obtenido en el ejercicio 5.6-1. El resultado final podría llamarse *representación integral de von Kármán* del problema estacionario de flujo por convección libre alrededor de una esfera que se disuelve, a semejanza del balance de cantidad de movimiento de von Kármán, ecuación 4.4-13, pg. 153 del Bird.

5.6-4. Modelo simplificado estacionario integral de dos ecuaciones.

- (i) La simplificación, prometida en el título de este ejercicio, resulta de comparar los términos de la presión en los balances del ímpetu en la dirección θ y en la dirección y , notando que el término de la fuerza de gravedad, que es la fuerza causante del movimiento, tiene la misma magnitud en ambos balances, sólo que en fases complementarias, generadas por las funciones seno y coseno. Esto significa que ambas ecuaciones están en la misma escala y con base en la comparación de estos dos términos de gravedad, comparamos los términos de la presión $\check{p}$ (que es la presión interna en exceso de la presión modificada del solvente) de ambas ecuaciones, notando que, mientras en la ecuación (5.6.3) tiene un coeficiente $R_0/\delta \approx 20$, en la ecuación (5.6.2) su coeficiente es uno. Sobre esta base, podemos eliminar el término $\partial \check{p}/\partial \theta$ en la última ecuación, en vez de efectuar derivadas cruzadas para eliminar el término de la presión, como se hizo en el ejercicio 5.6-1.
- (ii) Seguir en todo lo demás el procedimiento del ejercicio 5.6-1.
- (iii) Seguir, a continuación, con el procedimiento del ejercicio 5.6-3, para obtener la representación integral de von Kármán.

5.6-5. Soluciones polinomiales del tipo Kármán-Pohlhausen. Modelo simplificado

- (i) Proponer soluciones polinomiales para $\check{v}_\theta$ y $\check{\omega}_A$ y desarrollar el método de Kármán-Pohlhausen para encontrar los coeficientes.²
- (ii) Encontrar una expresión para $\check{p}(y)$, la presión en exceso (o en defecto) a la contribución del solvente.
- (iii) Utilizar los resultados del problema de transporte estacionario de masa y de momentum, que se han obtenido del procedimiento anterior, para desarrollar una expresión para la disminución del radio de la esfera con respecto al tiempo, a partir de la ecuación (5.6.9).

¹Ver por ejemplo Bird, sección 4.4, en especial la ecuación (4.4-12) a partir de la (4.4-11).

²Ver p. ej. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, 1993, pg 293- o Schlichting, *Boundary Layer Theory*, 1979, Sección X.b.

6. Evaporación isobárica de un líquido volátil

6.1 Planteamiento

6.1.1 Descripción del sistema físico

Un recipiente cilíndrico de vidrio se coloca sobre una balanza digital, dentro de una campana de extracción de vapores. Se introduce un termómetro o un termopar al interior del recipiente, de modo que el bulbo del termómetro o la punta del termopar queden tan cerca del fondo, como sea posible, pero cuidando de no hacer contacto con el recipiente; es decir, el termómetro quedará suspendido en el interior del recipiente, sujetándolo con unas pinzas al soporte, como se aprecia en las figuras 21.1 y 21.2. Se tara la balanza con el recipiente vacío y a continuación se llena con un líquido volátil. La campana de extracción se habrá equipado con un termómetro y un anemómetro de remolino, para determinar la temperatura y la velocidad del aire alrededor del recipiente. Se cierra la ventana de la campana, dejando una abertura de unos 4 cm, para promover la circulación y extracción del aire y los vapores del líquido, ver figuras 21.1 y 21.2. El experimento se inicia cuando se enciende el extractor de aire de la campana.

6.1.2 Diagrama y notación

En la figura 6.1(a) se muestra un dibujo del recipiente, en el cual se han indicado los símbolos de las **cantidades físicas que se miden** durante el experimento. Además, la figura 6.1(b) es el diagrama correspondiente, en el cual se han marcado los símbolos de los **flujos de masa y energía**, así como la **masa y la energía interna del líquido**. Las cantidades mostradas en la figura 6.1 son:

A_i = área interfacial entre el líquido y el aire.

A_p = área de la pared lateral, que separa el líquido y el aire.

$m(t)$ = masa de líquido volátil dependiente del tiempo t .

Q_{ev} = calor asociado al cambio de energía interna en la evaporación del líquido.

Q_i = calor del aire ambiental a la acetona líquida a través de la interfase líquido-gas.

Q_p = calor del aire ambiental a la acetona líquida a través de la pared.

$T(t)$ = temperatura del líquido volátil, dependiente del tiempo t .

T_a = temperatura del aire ambiental.

$\hat{U}$ = energía interna específica de la acetona líquida.

$\bar{v}_a$ = velocidad del aire ambiental.

w_{ev} = flujo másico de líquido que se evapora.

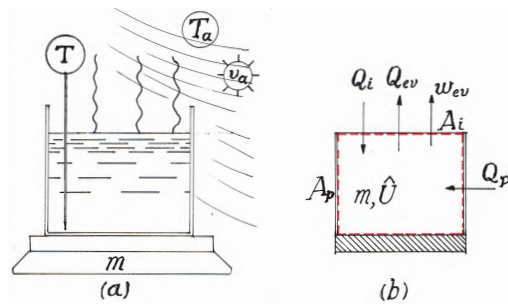


Figura 6.1: (a) Dibujo y (b) diagrama del recipiente con evaporación isobárica. El sistema es el líquido, que se ha señalado con una línea roja discontinua.

6.1.3 Objetivos

1. **Predecir la rapidez de la evaporación** de un líquido volátil, que está contenido en un recipiente abierto, expuesto a una corriente de aire.
2. **Predecir la rapidez del cambio de la temperatura del líquido**, durante el proceso de evaporación.
3. **Comprender la sensibilidad del modelo** a los cambios de las magnitudes de los parámetros de transporte y termodinámicos.

Para cumplir estos objetivos es necesario elaborar un modelo de transporte, como se detalla a continuación.

6.1.4 Balance de masa

Sistema:

El líquido volátil contenido en el recipiente, cuya masa, $m(t)$, se mide con una balanza. En la figura 6.1 el sistema se ha señalado con una línea roja punteada.

Aplicación:

El balance de masa es una aplicación directa del balance integral, ecuación (7.1-2), del texto de Bird *et al.* (2006), donde:

$$\frac{dm}{dt} = -w_{ev}$$

Rapidez de acumulación de la masa del líquido en el sistema = - *Flujo másico que sale del sistema por evaporación*
(6.1.1)

6.1.5 Balance de energía térmica

Sistema:

El líquido volátil contenido en el recipiente a la temperatura, $T(t)$, que se mide con un termómetro cuyo bulbo o sensor está situado cerca del fondo del recipiente, ver la figura 6.1.

Aplicación:

El balance de energía térmica es una aplicación directa del balance integral, ecuación (15.2-6), del texto de Bird *et al.* (2006), donde:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \frac{dU_T}{dt} & = & - & \hat{U}_{w_{ev}} & + & Q_p & + & Q_i \\
 \text{Rapidez de acumulación} & & & \text{Flujo de energía} & & \text{Calor agregado} & & \text{Calor agregado} \\
 \text{de la energía interna} & & & \text{interna que sale} & & \text{al sistema por} & & \text{al sistema des-} \\
 \text{total del líquido} & = & - & \text{del sistema} & + & \text{la pared} & + & \text{de la interfase} \\
 \text{en el sistema} & & & \text{por evaporación} & & \text{del recipiente} & & \text{líquido-aire}
 \end{array}
 \quad (6.1.2)$$

donde el término $\hat{U}_{w_{ev}} = Q_{ev}$, se ha indicado como el calor asociado al cambio de energía interna en la evaporación del líquido, en la figura 6.1.

Ejercicios

6.1-1. Balances de masa y energía térmica en un proceso de evaporación

Recordando tu experiencia en la realización de esta práctica:

- Elabora un dibujo que represente todos los elementos de interés que aparecen a tus sentidos, e identifica con símbolos **aquellos que se cuantifican** durante la realización de la experiencia.
- Elabora un diagrama donde señales el sistema de estudio y representes, mediante flechas y sus correspondientes símbolos, **los flujos de masa y de energía** que atraviesan las fronteras del sistema, así como **las cantidades totales** que se acumulan en el sistema durante el proceso de evaporación.
- Escribe los balances integrales de masa y de energía térmica completos, por ejemplo a partir de Bird *et al.*, 2006, ecuaciones mencionadas arriba; redúcelos al caso de la evaporación de un líquido volátil, en el sistema donde hayas realizado la práctica experimental e indica las razones para conservar o eliminar cada uno de los términos.

6.1.6 Expresiones para los flujos y la energía interna

Las ecuaciones (6.1.1) y (6.1.2) contienen un conjunto de términos que representan flujos de masa y de energía térmica, así como la energía interna del líquido. A continuación representaremos cada uno de ellos de acuerdo con las expresiones que se desarrollan en los textos de termodinámica y de fenómenos de transporte.

El flujo másico de líquido que se evapora está dado por

$$w_{ev} = \bar{k}_p A_i \rho_{A,sat} \quad (6.1.3)$$

La energía interna total del líquido está dada por

$$U_T = mc_v(T - T_b) \quad (6.1.4)$$

La energía interna por unidad de masa $\hat{U}$ del líquido **evaporado**, que es la suma del calor sensible desde la temperatura de referencia T_b , más el calor latente $\hat{\lambda}_{ev}$, ambos por unidad de masa, y está dada por

$$\hat{U} = c_v(T - T_b) + \hat{\lambda}_{ev}. \quad (6.1.5)$$

El flujo de energía térmica a través de la pared del recipiente está dado por

$$Q_p = U_p A_p (T_a - T). \quad (6.1.6)$$

El flujo de energía térmica a través de la interfase entre el líquido y el aire está dado por

$$Q_i = \bar{h}_i A_i (T_a - T). \quad (6.1.7)$$

Los coeficientes de transferencia y los parámetros termodinámicos empleados de la ecuación (6.1.3) a la ecuación (6.1.7) se enuncian, por orden de aparición, con sus unidades en el sistema internacional (SI) como sigue:

$\bar{k}_p$ = coeficiente de transferencia de masa en la superficie líquido-vapor, del lado del aire (m/s).

$\rho_{A,sat}$ = densidad parcial del vapor saturado en el aire (Kg/m³).

c_v = calor específico del líquido a volumen constante (J/Kg·K)¹.

T_b = temperatura base para el cálculo de la energía interna (°C).

$\hat{\lambda}_{ev}$ = calor latente de evaporación (J/Kg).

U_p = coeficiente global de transferencia de energía térmica a través de la pared lateral (W/m²·K).

$\bar{h}_i$ = coeficiente de transferencia de energía térmica en la superficie líquido-vapor, del lado del aire (W/m²·K).

Ejercicios

6.1-2. Flujos en la interfase líquido-aire y sus expresiones

- Partiendo del concepto general de resistencia, que se define estableciendo que una resistencia (térmica) R_T es la razón de una diferencia de potencial (térmico) ΔT entre el flujo (térmico) Q , correspondiente, es decir que $R_T = \Delta T / Q$, identifica explícitamente las resistencias térmicas de las expresiones (6.1.6) y (6.1.7).
- Compara las expresiones para las resistencias térmicas que resultan del punto anterior, explicando por qué una de ellas se representa en términos de un coeficiente de película $\bar{h}_i$, en tanto que la otra se representa en términos de un coeficiente global U_p . Discute si esto implica imponer la igualdad $T_i = T(t)$, en algún caso; es decir, si implica que la temperatura de la interfase entre el líquido y el aire T_i es igual a la temperatura del líquido.
- ¿Cómo se modificaría el modelo si la resistencia térmica del líquido fuera importante? ¿Sería necesario medir la temperatura de la interfase, T_i ?
- Define la resistencia total a la transferencia de masa R_m en la interfase, a partir de la Ecuación (6.1.3), discutiendo las implicaciones que tiene el hecho de utilizar únicamente el coeficiente de película $\bar{k}_p$ en dicha ecuación. ¿Es aceptable despreciar la resistencia química del lado del líquido si es un fluido puro, es decir, si está compuesto por una sola especie A?

6.1-3. Formas de la energía interna

- La energía interna de un cuerpo se determina **a partir de un estado base**, en el cual dicha energía se considera cero. Discute cómo las ecuaciones (6.1.4) y (6.1.5) son congruentes con esta propiedad de un estado base.
- Responde cómo la elección de un estado base en particular debería incorporarse en los balances de energía térmica y si esta elección debería, o no, afectar **los resultados** de los balances de energía térmica.

6.2 Ecuaciones de gobierno para el líquido y su solución

6.2.1 El modelo transitorio

Las relaciones (6.1.3) a (6.1.7) se sustituyen en las ecuaciones de balance (6.1.1) y (6.1.2) para encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que contengan las variables dependientes m y T , cuyos coeficientes, que en general dependen de la temperatura, **serán estimados**

¹Los productos de unidades que aparecen después del símbolo /, están todos en el denominador.

para una temperatura representativa de todo el proceso y serán considerados constantes. Estas ecuaciones son:

$$\frac{dm}{dt} = -w_{ev} = -\bar{k}_p A_i \rho_{A,sat} = -\text{constante}, \quad (6.2.1)$$

donde se enfatiza la observación de que el flujo másico evaporado w_{ev} es una *constante* positiva. Además, la ecuación (6.1.2) resulta en

$$\frac{d}{dt}[mc_v(T - T_b)] = -[c_v(T - T_b) + \hat{\lambda}_{ev}]w_{ev} + U_p A_p (T_a - T) + \bar{h}_i A_i (T_a - T). \quad (6.2.2)$$

Consideremos que la masa $m(t)$ y la temperatura $T(t)$ son las únicas dos variables dependientes del tiempo. Tomaremos valores promedio en el tiempo de ejecución del experimento, para todas las otras cantidades, dependientes de la ejecución del experimento, que consideramos como parámetros de operación. Además, cuando podemos, como en el presente caso, proponer la incompresibilidad del líquido, su calor específico tiene un solo valor, es decir que $c_v = c_p$. Considerando que c_p es constante, a la temperatura promedio seleccionada, dividimos la ecuación (6.2.2) entre c_p y ordenamos sus términos con relación a la temperatura T , efectuando la derivada del producto $m(T - T_b)$ y sustituyendo la ecuación (6.2.1), para obtener, luego de despejar la derivada de T :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{UA}{mc_p} (T_a - T) - \frac{\hat{\lambda}_{ev}}{mc_p} w_{ev} \quad (6.2.3)$$

donde el factor $UA = U_p A_p + \bar{h}_i A_i$, toma en cuenta todo el intercambio de calor entre el líquido y los alrededores, debido a su diferencia de temperaturas. Así, el par de ecuaciones (6.2.1) y (6.2.3) puede resolverse secuencialmente, con la condición inicial:

$$m = m_0, T = T_0, \text{ al tiempo } t = 0 \quad (6.2.4)$$

Ejercicios

E.6.2-1. Estado base, calor sensible y calor latente

Un **planteamiento equivocado** del balance de energía térmica en un proceso de evaporación daría la siguiente ecuación del balance de energía térmica:

$$\frac{d}{dt}(mc_v T) = -w_{ev} \hat{\lambda}_{ev} + U_p A_p (T_a - T) + \bar{h}_i A_i (T_a - T).$$

- Identifica el significado de cada uno de los términos de este balance.
- A pesar de que la temperatura base es una constante T_b , cuya derivada es cero, encuentra la diferencia entre el término de acumulación propuesto en este ejercicio y el término correspondiente de la ecuación (6.2.2).
- Encuentra cómo es posible que los dos términos comparados en el punto anterior sean equivalentes en los **procesos donde no hay cambio temporal en la masa** del sistema, es decir, cuando $m = \text{constante}$.
- ¿Cómo sería el diseño de un experimento de evaporación donde la masa del líquido se mantuviera constante?
- Expresa el balance térmico (6.2.2) en el caso particular, pero frecuente, cuando $T_b = 0^\circ\text{C}$, y compara la expresión resultante con la ecuación errónea de este ejercicio, identificando el término faltante e indicando su significado.

E.6.2-2. Calor específico e incompresibilidad

¿Cómo la hipótesis de incompresibilidad de un líquido implica que su calor específico a volumen constante equivale a su calor específico a presión constante; es decir que $c_v = c_p$?

E.6.2-3. Eliminación del efecto de la temperatura base

Obtener la ecuación (6.2.3) a partir de los balances (6.7) y (6.2.2), considerando una temperatura base arbitraria T_b , así como la hipótesis de incompresibilidad.

6.2.2 Solución del modelo

En la sección 9.1 presentamos el método detallado para resolver las ecuaciones (6.2.1) y (6.2.3), sujetas a la CI (6.2.4). El procedimiento para resolver la EDO no-homogénea equivalente requiere un factor integrante, dando por resultado las ecuaciones (9.1.4) y (9.1.25) que son las siguientes expresiones para la masa y para la temperatura:

$$\frac{m(t)}{m_0} = 1 - \frac{w_{ev}}{m_0} t, \quad (6.2.5)$$

y

$$\frac{T(t) - \theta_0}{T_0 - \theta_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^B, \quad (6.2.6)$$

donde B está dada por (9.1.13) y θ_0 por (9.1.26), que son:

$$B = \frac{UA}{w_{ev} c_p}, \quad (6.2.7)$$

y

$$\theta_0 = T_a - \frac{w_{ev} \hat{\lambda}_{ev}}{UA}. \quad (6.2.8)$$

donde θ_0 es un parámetro con unidades de temperatura, que representa la temperatura del aire disminuida en el cambio de la temperatura producido por la razón de la rapidez de energía evaporada con respecto al calentamiento por las fronteras, requerido para elevar un grado Celsius la temperatura, en tanto que B es la razón de la rapidez de transmisión de energía térmica en las fronteras, con respecto al flujo de capacitancia térmica, ambas por unidad de cambio de temperatura.

Ejercicios**6.2-4. Evaporación adiabática.**

Suponiendo que es posible aislar térmicamente las paredes del recipiente y que también es posible despreciar el calor Q_i que se intercambia en la interfase líquido-aire, es decir, considerando que $UA = 0$, desarrolla una expresión para predecir la temperatura del líquido $T(t)$, como función del tiempo.

6.2-6. Evaporación isotérmica.

Suponiendo que en lugar del aislante perfecto del ejercicio anterior, se coloca una chaqueta y serpentines de calentamiento, así como una agitación suave del líquido, de manera que la evaporación procede a la temperatura constante T_0 . Encuentra el calentamiento $Q_P(t)$ a través de la chaqueta y los serpentines, como función del tiempo, en dos casos: (1) si se toma en cuenta el calor Q_i que se intercambia en la interfase líquido-aire y (2) si se desprecia Q_i .

6.3 Uso del modelo para evaluar experimentos

6.3.1 Determinación de datos a medir y a estimar

La organización de la captura de los datos, tanto al realizar el experimento como al buscar información ya disponible en los medios, requiere elaborar una *hoja de datos*. El punto de partida, cuando se conoce un modelo a ser evaluado contra los resultados de un experimento, como en el caso presente, requiere partir de la determinación de los parámetros usados en el modelo, ya sea utilizando mediciones experimentales o determinaciones mediante cálculos basados en relaciones y expresiones conocidas. Así pues, lo primero será decidir qué parámetros deben ser medidos y qué correlaciones se deben usar, para tener la información adecuada y suficiente, que es necesaria para la estimación numérica de la solución del modelo propuesto, ecuaciones (6.2.5) y (6.2.6).

6.3.2 Preparación de una hoja de datos

En la hoja de datos se concentrará y sistematizará la **búsqueda de toda la información** necesaria. Dicha búsqueda se inicia identificando y transcribiendo las *ecuaciones de trabajo* que, en la práctica de la evaporación isobárica, corresponde a las ecuaciones (6.2.5) y (6.2.6), complementadas por las ecuaciones (6.1.3), (6.2.7) y (6.2.8). A este conjunto de ecuaciones, todavía es necesario agregar la definición del inverso de la resistencia global a la transferencia de energía térmica, UA , definida al inicio del párrafo que sigue a la ecuación (6.2.3) y determinar el coeficiente global de calor a través de la pared U_p , así como los coeficientes promedio de transferencia de masa y de calor del lado del aire, $\bar{k}_p$ y $\bar{h}_i$, respectivamente, en la interfase líquido-aire, aspecto que se tratará en la siguiente sección.

La figura 6.2 es un ejemplo de la **hoja de datos** en forma tabular, para la evaporación isobárica de acetona. En ella se encuentra toda la información experimental que debe ser medida durante la realización de la práctica experimental. También se encuentra información relevante en los libros, manuales y redes, la cual se ha puesto en celdas con fondo gris claro, para diferenciarla de la información experimental. Esta hoja de datos se prepara antes de la realización del experimento, para llenar, durante el mismo, todas las celdas en fondo blanco, las cuales corresponden a determinaciones. En la tabla mostrada, el experimento duró dos horas, tomando datos cada 60 segundos, aunque sólo se muestran cada 360 segundos, por brevedad. Al final del experimento, se calculan los valores promedio de todas las variables, es decir del tiempo (que carece de interés), de la masa $\bar{m}$, de la temperatura del líquido, $\bar{T}$, de la temperatura del aire, $\bar{T}_a$, y de la velocidad del aire, $\bar{v}_a$, que, en este caso, no se reportó durante la realización del experimento, sino solamente al término del mismo, como se aprecia en la última fila de la tabla, de la figura 6.2.

6.3.3 Gráficas experimentales de evolución de la masa y la temperatura

La figura 6.3 es una gráfica de la evolución de la masa del líquido volátil durante dos horas de experimentación y la figura 6.4 representa la evolución de la temperatura del líquido, que corresponde a las dos horas de la evaporación. Para ambas figuras, se muestra el conjunto completo de los datos experimentales, tomados cada 60 segundos.

6.3.4 Estimaciones de las propiedades del sistema

Las ecuaciones de trabajo (6.2.5) y (6.2.6) contienen dos coeficientes y un exponente, que deben ser evaluados. Estos tres parámetros son w_{ev} , B y θ_0 , cuyas expresiones aparecen en la hoja de datos de laboratorio, figura 6.2, como ecuaciones auxiliares, y corresponden a las ecuaciones (6.1.3), (6.2.7) y (6.2.8), respectivamente. La evaluación de los tres parámetros requiere la estimación de un conjunto de propiedades termodinámicas y coeficientes de transporte, que dependen, a su vez, de las condiciones de operación y de las relaciones físicoquímicas de los fluidos y sus mezclas. Llamaremos *propiedades del sistema* al conjunto de todas las propiedades, coeficientes

		EVAPORACIÓN ISOBÁRICA DE ACETONA				
FECHA:						
INTEGRANTES DEL EQUIPO:						
ECUACIONES DE TRABAJO:		$m(t) = m_0 - w_{ev}t.$		$\frac{T(t) - \theta_0}{T_0 - \theta_0} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^B$		
ECUACIONES AUXILIARES:		$w_{ev} = \bar{k}_p A_i \rho_{A,sat}$		$B = \frac{UA}{w_{ev} c_p}$		
		$\theta_0 = T_a - \frac{w_{ev} \hat{\lambda}_{ev}}{UA}$		$UA = U_p A_p + \bar{h}_i A_i$		
CONDICIONES DE OPERACIÓN (SI)			PARÁMETROS GEOMÉTRICOS			
Presión barométrica (Pa)			Diámetro (m)			Altura del líquido (m)
Pa	78125.52		D interno	D externo	H inicial	H final
			0.166	0.169	0.023	0.018
PROPIEDADES DE LOS COMPONENTES						
PROPIEDADES ACETONA (SI)			PROPIEDADES AIRE (SI)			
PM	58.08 g/g-mol	PM	28.964 g/g-mol			
T eb (°C)	56.2 a 101330 Pa	v (m2/s)	0.00001505 a 20 °C			
ρ liq (Kg/m3)	789.98 a 20 °C	μ (Pa.s)	0.00001813 a 20 °C			
	784.4 a 25 °C	Pr (cp μ/k)	0.694179087			
	780.33 a 30 °C	cp (J/KgK)	1007			
k (W/m.K)	0.16 a 20 °C	k (W/m.K)	0.0263			
μ (Pa.s)	0.00032 a 20 °C	ρ (Kg/m3)	0.940008017 a 16.36 °C			
P vap (Pa)	24226.9104 a 20 °C					
λevap(J/mol)	29087.2 a Teb (K)	329.281	PROPIEDADES VIDRIO PYREX (SI)			
			k (W/m.K)	1.4 a 27 °C		
CORRIDA EXPERIMENTAL						
	t (s)	m_{exp} (Kg)	T_{exp} (C°)	T_a (C°)	$\bar{v}_a$ (m/s)	
	0	0.39627	20	20.4		
	360	0.38203	13.8	19.6		
	720	0.37198	10.5	19.1		
	1080	0.36334	8.8	19		
	1440	0.35416	7.3	19.6		
	1800	0.34552	6.4	19.4		
	2160	0.337	5.9	18.9		
	2520	0.32903	5.5	19.2		
	2880	0.32101	5	18.8		
	3240	0.3136	4.9	18.5		
	3600	0.30594	4.6	18.5		
PROMEDIOS	1800	0.34685	8.04	19.14	1.32	

Figura 6.2: Hoja de datos de laboratorio. La corrida completa contiene datos cada 60 segundos

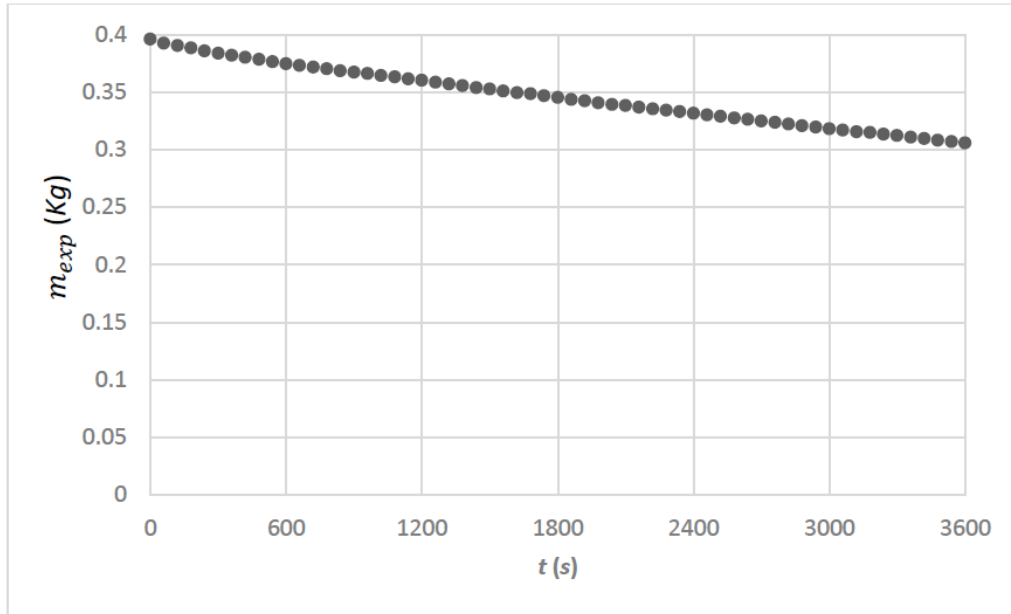


Figura 6.3: Evolución experimental de la masa del líquido, $m(t)$.

y parámetros físico-químicos, cuyos valores se usan en la estimación de los coeficientes y el exponente finales del modelo.

Uno de los aspectos, que merece particular consideración, son las temperaturas a las cuales deben ser evaluadas las propiedades que determinarán los valores de los coeficientes de transporte y de las propiedades termodinámicas requeridas y, finalmente, los valores de los parámetros de las ecuaciones de trabajo.

La interfase líquido-aire es de las fronteras llamadas *de dos fases*. En este caso se trata de dos fases fluidas y existe la posibilidad de que, en cada una de ellas, se forme una película de cierto espesor, desde la interfase hacia el interior de la fase fluida correspondiente. Cada película presenta

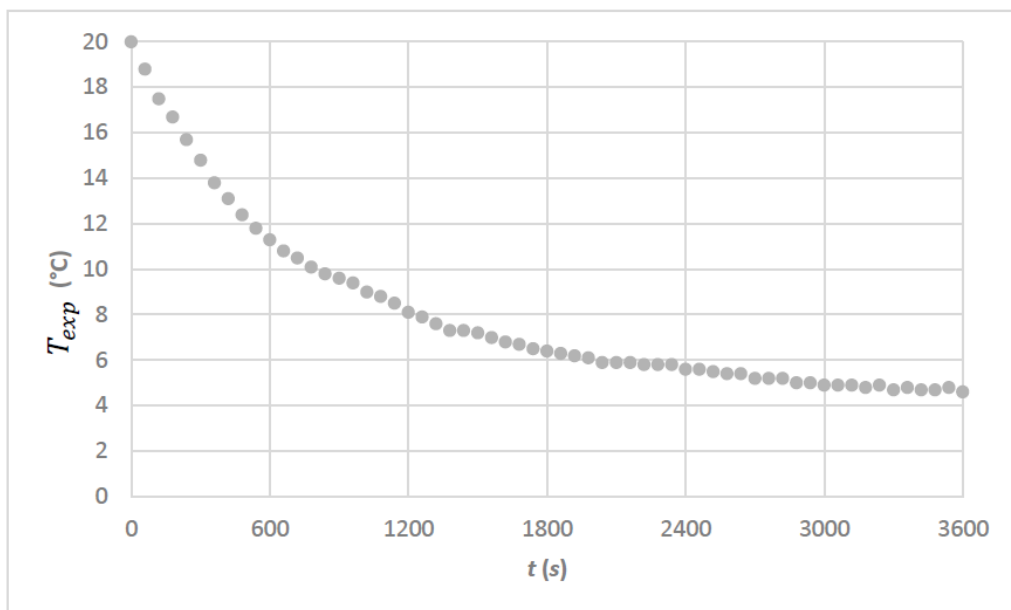


Figura 6.4: Evolución experimental de la temperatura del líquido, $T(t)$.

una resistencia convectiva al calor, y su temperatura cambia desde la temperatura en el seno de la fase fluida, lejos de la interfase, hasta la temperatura de la interfase, de acuerdo con el modelo de la película.

Así, para mantener las estimaciones razonablemente sencillas, las propiedades termodinámicas y de transporte se evalúan a una temperatura conocida como la **temperatura de película** de cada una de las fases, definida, **para la película del lado del aire**, como

$$T_{\text{peli},a} = \frac{T_i + T_a}{2}, \quad (6.3.1)$$

ver Bird *et al.* (2006), sección 14.2 e Incropera y de Witt (1999), sección 7.1. Aquí, T_i es la temperatura de la interfase líquido-aire, la cual, en nuestros experimentos, no fue medida. Esta situación presenta, aparentemente, una dificultad que puede ser resuelta de diversas maneras. Una de ellas es considerar que la resistencia al calor se concentra en una sola de las fases. Otra manera es suponer un valor de la temperatura de la interfase T_i , intermedio entre los valores de las dos fases, y estimar los dos coeficientes de película, uno para cada fase.

No hemos considerado necesario medir la temperatura interfaseal, T_i . Para estimar el calor en la interfase líquido-aire, asociamos a todo el líquido un solo valor de la temperatura $T(t)$, hasta su interfase con el aire. Esto equivale a elaborar un modelo con una sola película, del lado del aire, aglutinando en ella, toda la resistencia interfaseal al calor (y también a la transferencia de masa, como se verá a continuación). Así, la temperatura de película puede evaluarse a partir de la temperatura promedio del líquido, durante toda la duración del experimento, $\bar{T}$, tomada como la temperatura interfaseal, T_i , de modo que la definición (6.3.1) resulta:

$$T_{\text{peli},i} = \frac{\bar{T} + \bar{T}_a}{2} \quad (6.3.2)$$

Ejercicios

6.3-1. Coeficiente promedio de calor del lado del aire, $\bar{h}_i$.

Busca, en los libros de texto y en diversas referencias, opciones para estimar el coeficiente promedio de calor del lado del aire, $\bar{h}_i$; selecciona dos o tres opciones que representen mejor la situación física del experimento realizado y elige, entre ellas, la que consideres mejor.

6.3-2. Coeficiente promedio de calor del lado del líquido $\bar{h}_{li}$ y coeficiente global U_i

- Considera la resistencia al calor en la película del lado del líquido; identifica, en los libros de texto y diversas referencias, opciones para estimar el coeficiente promedio de calor del lado del líquido; selecciona dos o tres opciones que puedan representar la situación física del experimento realizado y elige, entre ellas, la que consideres mejor.
- Establece, en combinación con el resultado del ejercicio 6.3-1, el coeficiente global de calor o coeficiente global de transferencia de energía térmica de la interfase líquido-aire, U_i .

La evaporación isobárica también se conoce como *enfriamiento evaporativo* [por ejemplo, Incropera y de Witt (1999), subsección 6.8.2] y es un ejemplo típico donde se aplican las analogías entre la transferencia de masa y el calor, en la capa límite. De manera análoga a la transferencia de energía térmica, donde se ha propuesto el concepto de temperatura de película, podemos definir la **composición de película**, en unidades másicas (Kg/m^3) de cada una de las fases, como:

$$\rho_{\text{Apeli},a} = \frac{\rho_{A,i}(T_i) + \rho_{A,\infty}(T_a)}{2}, \quad (6.3.3)$$

expresada aquí **para la película del lado del aire**, donde $\rho_{A,i}(T_i)$ es la densidad parcial del componente volátil A en la interfase, del lado del aire, a la temperatura de la interfase, y $\rho_{A,\infty}(T_a)$ es la densidad parcial del componente volátil A en el seno del aire, a la temperatura del aire.

Al tratarse de un líquido puro, en la práctica realizada, es factible pensar que su composición es constante hasta la interfase; es decir, que no se genera una película con resistencia a la transferencia de masa del lado del líquido. En este caso, podemos proponer una composición de película, aglutinando toda la resistencia a la transferencia de masa, del lado del aire, es decir:

$$\rho_{A,pe\acute{l}i,i} = \frac{\rho_{A,sat}(\bar{T}) + \rho_{A,\infty}(\bar{T}_a)}{2} = \frac{\rho_{A,sat}(\bar{T})}{2}. \quad (6.3.4)$$

La última igualdad resulta de suponer que los vapores del líquido se diluyen completamente en un gran exceso de aire, succionado por el extractor de vapores de la campana, de manera que $\rho_{A,\infty} \approx 0$.

Ejercicios

6.3-3. Coeficiente promedio de transferencia de masa del lado del aire, $\bar{k}_i$.

- Justifica el uso de la ecuación (6.1.3) para estimar el flujo másico evaporado, en el caso de un líquido puro.
- Busca, en los libros de texto y diversas referencias, opciones para estimar el coeficiente promedio de transferencia de masa del lado del aire, $\bar{k}_i$; selecciona dos o tres opciones que representen mejor la situación física del experimento realizado y elige, entre ellas, la que consideres mejor.

6.3-4. Coeficiente promedio de transferencia de masa del lado del líquido, $\bar{k}_{li}$ y coeficiente global K_i

- Razonando de manera análoga al ejercicio 6.3-2, y suponiendo que el líquido fuera una mezcla binaria de un compuesto A en un disolvente B , establece las diferencias con respecto a la evaporación de un líquido puro, indicando cómo debería modificarse la ecuación (6.1.3) para ser una representación adecuada de la transferencia de masa.
- Para la mezcla líquida supuesta en el inciso (a), busca opciones para estimar el coeficiente promedio de transferencia de masa del lado del líquido, $\bar{k}_{li}$; selecciona las opciones más idóneas para la situación física y elige, entre ellas, la mejor.
- ¿Cuál sería una expresión adecuada para el coeficiente global de transferencia de masa K_i [ver por ejemplo Bird *et al* (2006), sección 22.4], y cuáles las expresiones más adecuadas para el coeficiente de película del lado del líquido $\bar{k}_{li}$? ¿Haría falta conocer las composiciones interfasiales $\rho_{A,li}(T_i)$ y $\rho_{A,i}(T_i)$ en un enfoque de coeficiente global K_i ?

Por otra parte, la otra frontera del líquido con el aire es la pared del recipiente. El calor a través de la pared fluye de modo que es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el aire y el líquido, con un coeficiente global de transferencia térmica U_p , de tal manera que el inverso del producto $U_p A_p$ equivale a la suma de las resistencias térmicas en serie, a través de la pared del recipiente que contiene el líquido volátil [ver por ejemplo, Incropera y de Witt (1999), sección 3.3 o Bird *et al* (2006), sección 10.6]. La resistencia térmica del aire es forzada por el extractor de la campana, que genera una corriente de aire a través de la misma campana. La resistencia del líquido volátil puede estimarse como una resistencia por convección natural en la película adyacente a la pared cilíndrica vertical del recipiente, ya que, en general, la densidad del líquido disminuye con el aumento de la temperatura, y el calentamiento desde el aire va a generar una película de líquido con menor densidad (mayor temperatura) en la película adyacente a la pared de vidrio; esto provoca convección natural por un efecto de flotación del líquido con menor densidad. Adicional a estas dos

resistencias convectivas está también la resistencia por conducción en la pared de vidrio y, si es el caso, la resistencia proporcionada por algún aislante térmico que cubra la pared.

Ejercicios

6.3-5. Coeficiente global de calor a través de la pared, U_p .

- Busca opciones para estimar los coeficientes promedio de calor interno y externo, $\bar{h}_{lp}$ y $\bar{h}_{ap}$, respectivamente; selecciona las opciones más cercanas a la situación física y elige, entre ellas, la que mejor represente cada caso.
- Estima el coeficiente global de transferencia de calor U_p , basado en el diámetro interno del recipiente, considerando también las resistencias por conducción en la pared de vidrio y, si es el caso, en el aislante térmico empleado.

6.3-6. Importancia relativa de las resistencias en la estimación de los coeficientes globales de calor, U_p y U_i .

- Estima la fracción de la resistencia total, $(U_p A_p)^{-1}$, que corresponde a cada una de las resistencias, tanto convectivas como por conducción del calor.
- En el caso de querer eliminar, por simplicidad de los cálculos, algunas de las resistencias, ¿Cuáles serían las dos primeras a ser eliminadas?
- Discute acerca de la simplificación hecha sobre el coeficiente a considerar en la transferencia de energía térmica en la interfase líquido-aire, partiendo del coeficiente global U_i , determinado en el ejercicio 6.3-2.

6.3-7. Estimación de propiedades, parámetros y coeficientes

- Elabora un listado con el conjunto de expresiones seleccionadas para estimar los parámetros a ser empleados en la evaluación del exponente B , ecuación (6.2.8) y de los coeficientes w_{ev} , ecuación (6.1.3) y θ_0 , ecuación (6.2.7), del modelo dado por las ecuaciones (6.2.5) y (6.2.6).
- Bajo cada uno de los parámetros anteriores, elabora una lista completa de las propiedades necesaria para estimarlo, indicando la temperatura y, en su caso, la composición, a las cuales debe ser evaluado.
- Desarrolla un método de cálculo de cada una de las propiedades necesarias, considerando la temperatura y la composición que deben tenerse en consideración al efectuar las estimaciones.
- Una vez evaluado el conjunto de las propiedades necesarias, sustituye sus valores, a su vez, en los parámetros que las requieren, y estos, finalmente, en los coeficientes y el exponente de las ecuaciones (6.2.5) y (6.2.6).

6.3.5 Resultados teóricos para las variables dependientes

Una vez realizados los ejercicios de la sección anterior, tendremos los valores de todas las propiedades termodinámicas, de las propiedades y de los coeficientes de transporte y, finalmente, podremos evaluar los dos coeficientes (w_{ev} , θ_0) y el exponente B , de las ecuaciones (6.2.5) y (6.2.6). Es conveniente analizar cómo la masa y la temperatura del líquido dependen y son modelados por las propiedades y coeficientes de transporte, así como por las propiedades termodinámicas de los componentes y mezclas, que hemos llamado las propiedades del sistema, al inicio de la sección 6.3.4, partiendo de los valores de las tres constantes de las ecuaciones mencionadas.

En un primer intento, las gráficas de la evolución de la masa del líquido, $m(t)$, y la temperatura del líquido, $T(t)$, tal como son calculadas por las ecuaciones de trabajo, aparecen en las figuras 6.5 y 6.6. Las líneas rojas en estas figuras son predicciones teóricas, **sin que intervengan en ellas las mediciones experimentales**, excepto por el uso de los valores de los parámetros geométricos y de las condiciones iniciales y ambientales de los experimentos. En estas figuras se presentan también la masa del líquido y su temperatura, tal como fueron medidos durante la realización de los experimentos (puntos azules).

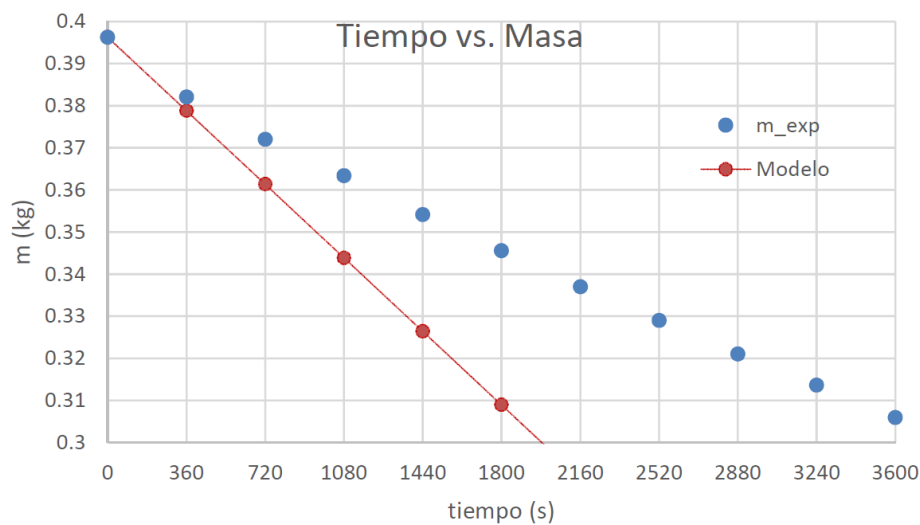


Figura 6.5: Predicción del modelo para la masa de líquido en la evaporación de la acetona (línea roja). Los datos experimentales (puntos azules) se presentan para comparación.

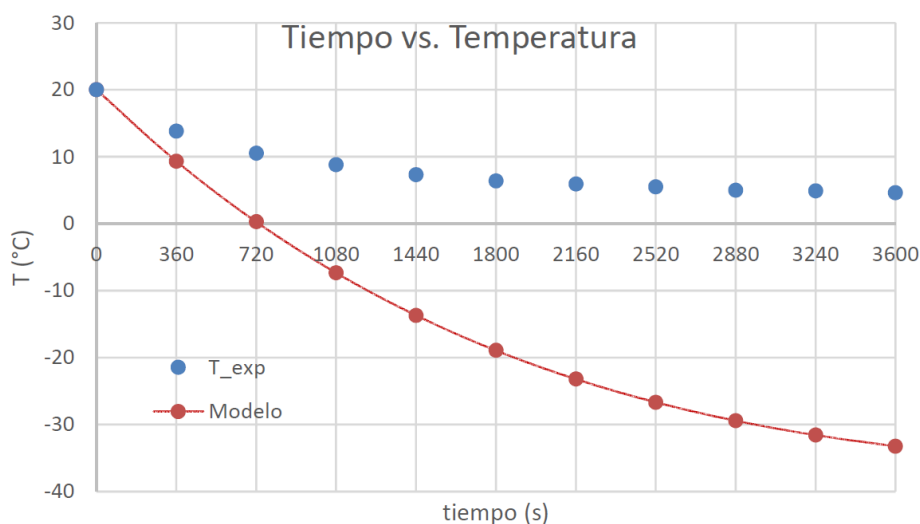


Figura 6.6: Predicción del modelo para la temperatura de líquido en la evaporación de la acetona (línea roja). Los datos experimentales (puntos azules) se presentan para comparación.

Ejercicios

6.3-8. Entendimiento del comportamiento del modelo

- Elabora una lista de propiedades del sistema, ordenándolas como geométricas, de operación, termodinámicas y de transporte.
- De acuerdo con los métodos de cálculo usados en la estimación de estas propiedades del sistema, y de acuerdo con las incertidumbres en tales estimaciones², considerando la información disponible en las referencias usadas, señala, de la lista anterior, aquellas cinco cuyas estimaciones tienen, a tu juicio, las mayores incertidumbres, y reordenálas de acuerdo con

²Puedes revisar el capítulo 20, *Modelos y experimentos* del libro compañero del presente, llamado *Indagaciones sobre mecánica de fluidos*, ver la referencia en la bibliografía.

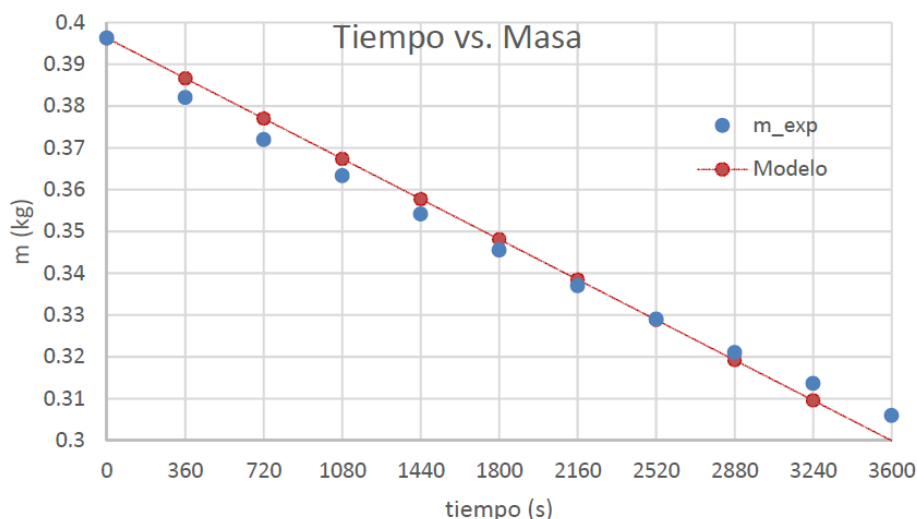


Figura 6.7: Predicción del modelo para la masa de líquido en la evaporación de la acetona (línea roja), disminuyendo el flujo evaporado. Los datos experimentales (puntos azules) se presentan para comparación.

dichas incertidumbres.

- (c) Analiza si las discrepancias observadas entre los resultados teóricos y los valores experimentales (ver figuras 6.5 y 6.6) podrían ser explicadas por cambios en los valores de algunas de estas cinco propiedades del sistema seleccionadas. Entre ellas, distingue las dos más inciertas para elaborar pruebas posteriores.

6.3.6 Comparaciones de la teoría con el experimento

Siguiendo un procedimiento semejante al del ejercicio anterior, ha sido posible mejorar las predicciones del modelo, modificando solamente dos propiedades del sistema. En las figuras 6.7 y 6.8 se muestran los resultados.

Es importante señalar que las modificaciones al flujo evaporado dependen, en principio, de los cambios en tres parámetros, ver ecuación (6.1.3), como son (1) el coeficiente global de transferencia de masa K_i , el cual engloba los dos coeficientes de película en la interfase líquido-aire, $\bar{k}_p$ y $\bar{k}_{li}$, ver ejercicio 6.3-4. (2) El área de la superficie interfacial A_i y (3) la composición del vapor saturado de acetona $\rho_{A,sat}$, a la temperatura del líquido $T(t)$, la cual cambia en el curso del experimento.

Puesto que ha sido necesario disminuir el flujo evaporado para mejorar la predicción teórica, no carece de razón pensar que debe ser importante la resistencia de la película del lado del líquido; tan importante, posiblemente, como la resistencia de la película del lado del aire. En cuanto a los otros dos parámetros que modifican los valores del flujo evaporado: el área de la superficie interfacial no puede tener mucho cambio con mejores mediciones y la composición de los vapores saturados es conocida con buena certidumbre, por la ecuación de Antoine.

Por lo anterior, es conveniente modificar la estimación de las resistencias a la transferencia de masa en la superficie interfacial, incorporando la resistencia del lado del líquido y posiblemente mejorando la estimación de la resistencia del lado del aire.

Con respecto a la gráfica de la temperatura, no bastó con el aumento relacionado con la disminución del enfriamiento, que resultó como consecuencia de la disminución del flujo evaporado; fue necesario aumentar el término de calentamiento desde el aire ambiente.

Primero pudimos notar, en el experimento que estamos tomando como ejemplo, que el recipiente de vidrio se colocó directamente sobre la balanza, como aparece en la figura 21.2. La charola

de la balanza es de acero inoxidable y probablemente ha podido funcionar como una “aleta de calentamiento”, para transferir energía térmica del aire de los alrededores a la acetona, a través del fondo de vidrio. Si tomamos en cuenta este efecto, aunque sea de manera aproximada, ya que no se hicieron mediciones específicas, podemos extender el área de transferencia A_p para incluir el área de la superficie del fondo del recipiente. Así mejoramos, en parte, la predicción de la temperatura del líquido, aunque de manera insuficiente. Todavía es necesario disminuir la resistencia térmica, modificando los valores de los coeficientes de película a la transferencia de energía térmica.

Ejercicios

6.3-9. Mejoramiento de las predicciones del modelo

Partiendo de tu respuesta al ejercicio 6.3-8(c):

- Selecciona la primera propiedad a modificar en el modelo.
- Modifica el valor de la propiedad elegida para ver cómo afecta la discrepancia entre los resultados teóricos y los experimentales.
- Elige un valor que aproxima dicha discrepancia a su mínimo.
- Modifica el valor de la siguiente propiedad elegida en el ejercicio 6.3-8(c) para ver cómo afecta la discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales.
- Elige un nuevo valor de esta propiedad, que reduzca la discrepancia entre los resultados teóricos y los experimentales.
- Estima, de acuerdo con la información disponible y con tu experiencia práctica, ganada durante la realización del experimento, si es razonable proponer los nuevos valores de ambas propiedades, o qué otras pruebas habría que hacer para mejorar la concordancia entre la teoría y el experimento.

Nota.- El procedimiento de este ejercicio no garantiza la optimización del ajuste, pero es suficiente para ilustrar la importancia de la selección de los valores de las propiedades del sistema.

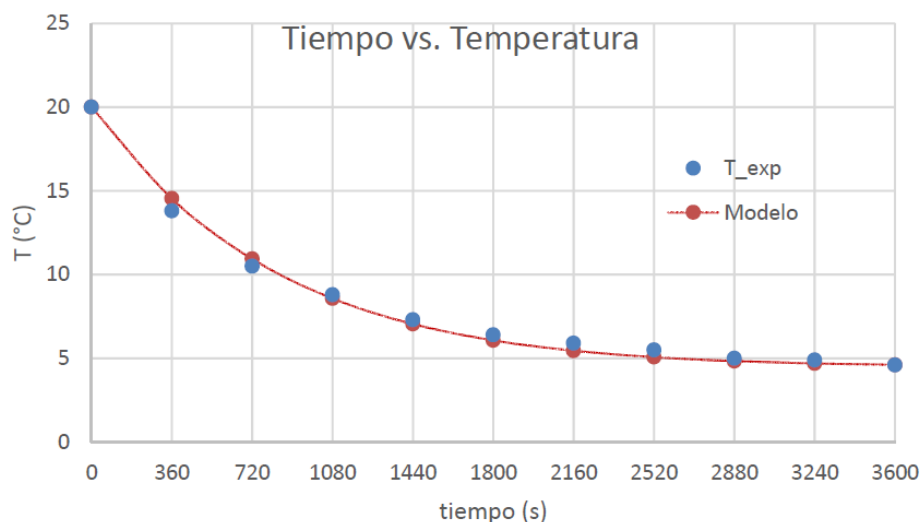


Figura 6.8: Predicción del modelo para la temperatura de líquido en la evaporación de la acetona (línea roja), aumentando el calentamiento desde el aire ambiente. Los datos experimentales (puntos azules) se presentan para comparación.

6.4 Crítica a la teoría y a los experimentos

Todos los experimentos tienen algo repetible y algo único e intransferible. Lo repetible se organiza para nuestro entendimiento, asociándole reglas que encontramos, o creemos encontrar, en el comportamiento de la naturaleza. De aquí surgen los enunciados que llamamos *leyes*, probablemente por la semejanza que vemos entre el comportamiento de la naturaleza y los comportamientos que nos permitimos las comunidades humanas, aunque su fondo filosófico puede ser más profundo. Estas leyes de la naturaleza son los principios generadores de las ciencias, y en el caso de los fenómenos de transporte, son los principios de conservación y de balance, como los balances de masa, de momentum y de energía; aunque con mayor flexibilidad podríamos incluir, también como leyes, las relaciones particulares que representan los comportamientos de los cuerpos, como son la ley de la viscosidad de Newton, la ley de Fourier y la de Fick, la ley del enfriamiento de Newton y la ley del gas ideal, entre muchas otras.

Lo único e intransferible de los experimentos reside en la experiencia, fundamento del aprendizaje significativo. En efecto, aún cuando el aprendizaje es intransferible, y nadie puede hacerlo por otro, también es comunitario, en el sentido de la colaboración de un grupo o un equipo de trabajo, donde la diversidad de puntos de vista puede encontrar su integración y acuerdo, a la vez que limita y extiende los significados de lo que se observa y analiza.

Así es como, en el ejemplo específico que hemos considerado para la realización de esta práctica, hemos mencionado algunas limitaciones y particularidades que podrían dar lugar a modificaciones posteriores, tanto del desarrollo teórico como del arreglo experimental. Las sugerencias son un terreno abierto a las modificaciones posteriores. Así, algunas de las mas notables son:

1. Analizar la magnitud de la dependencia de los cambios de las propiedades del sistema, con respecto a la temperatura, para considerar constantes sólo aquellas cuyos cambios son menores a una determinada cota, a un porcentaje o a algún otro criterio, por definir.
2. La evolución de la masa de líquido no corresponde exactamente a una línea recta, como sugiere la teoría, sino que presenta una leve concavidad, con mayor disminución al inicio, que a tiempos avanzados. ¿Se podrían proponer algunas hipótesis para explicar este comportamiento?
3. La superficie de la interfase líquido-aire queda a una distancia variable de la boca del recipiente, conforme se evapora el líquido. Además de que esta observación puede aportar una hipótesis al punto anterior, ¿sería compatible con la expresión usada para estimar los coeficientes de película del lado del aire, para la transferencia de masa y de energía térmica?
4. Las experiencias de algunos equipos de trabajo sugieren que la evolución de la temperatura, en sus observaciones, siguió una curva de decaimiento, con menor rapidez conforme pasaba el tiempo, tendiendo finalmente a un comportamiento isotérmico, que podríamos llamar de equilibrio térmico. ¿Se podría predecir la temperatura de equilibrio y encontrar su significado, a partir del modelo, ecuación (6.2.6)?
5. El modelo que considera la convección libre en el líquido es incompatible con el que considera que la única resistencia térmica importante en la interfase líquido-aire es la película del lado del aire, porque el líquido que asciende cerca de las paredes, por el efecto de flotación, tendría que impulsar al de las proximidades a la superficie interfacial, hacia el centro de esta superficie, estableciendo un patrón de recirculación del líquido, descendiendo por el centro y ascendiendo por la pared. ¿Cuánta importancia práctica tendrá la consideración de esta observación en las estimaciones del modelo?
6. Para evitar el flujo térmico por el fondo del recipiente, sería conveniente asentarlos sobre una gruesa capa de aislante, puesta sobre la balanza, por ejemplo, una placa de unicel.

Ejercicios

6.4-1. Incorporando otros puntos de vista a la crítica.

Incorpora tus propias sugerencias, que surgen de tus observaciones y dudas a los planteamientos y al tratamiento del problema, como se han expresado arriba.

6.4-2. Trabajo posterior, para responder a la crítica.

Cada uno de los puntos expresados en esta sección es objeto de trabajo posterior. Algunas acciones por emprender, correspondientes a las sugerencias de la sección, son:

1. (a) Estima la magnitud de los cambios de las propiedades del sistema, con respecto a la temperatura del inicio y del final del experimento, extendiendo el trabajo realizado en el ejercicio 6.3-7.
(b) Define el porcentaje de cambio de una propiedad como la magnitud de la diferencia de los dos valores estimados, dividida entre el valor estimado a la temperatura media del experimento.
(c) Identifica las propiedades con mayor porcentaje de cambio, para considerarlas dependientes de la temperatura.
(d) Estima la complejidad que introduce en el modelo la dependencia de dichas propiedades, con respecto a la temperatura. ¿Sería una práctica aceptable seguir considerando una de tales propiedades como parámetro del modelo, pero recalculando sus valores en función de los cambios de temperatura? Haz la prueba y discute los resultados con tu comunidad de aprendizaje³.
2. ¿Cuáles hipótesis podrían explicar la evolución levemente no-lineal de la masa de líquido?
3. ¿Cómo podrías incorporar el modelo de la película estancada a la estimación de los coeficientes de película del lado del aire, para tomar en cuenta que la distancia del nivel de líquido a la boca del recipiente es variable, conforme se evapora el líquido?
4. Predice la temperatura de equilibrio térmico y encuentra su significado, a partir del modelo, ecuación (6.2.6).
5. Incorpora un coeficiente de película del lado del líquido, en la interfase líquido-aire, y estima su influencia en los resultados del modelo.

6.4-3. Evaporación del agua al secarse las manos con aire.

Luego de lavarnos las manos, con frecuencia nos secamos con aire, ya sea el aire ambiente o utilizando un secador de aire caliente. Consideremos el primer caso.

1. Observa en cuánto tiempo se secan tus manos (a) sin moverlas y (b) agitándolas en el aire.
2. Elabora un modelo para predecir en cuánto tiempo se secarán tus manos, en los dos casos, (a) y (b).
3. Desarrolla todos los cálculos y estimaciones necesarias para predecir el tiempo de secado de tus manos.
4. Compara tu estimación con el tiempo de secado que ha transcurrido en la práctica.
5. Elabora y escribe tus conclusiones, estableciendo críticamente cuáles aspectos, y cómo, deberían revisarse y mejorarse.
6. ¿Cómo este ejercicio sería útil para diseñar un secador de manos?

³En dicha discusión, considera que hay modelos importantes, como el de la convección libre, donde se combina una ecuación de continuidad para el flujo incompresible (a densidad constante) con la aproximación de Boussinesq, donde la densidad se considera una función lineal de la temperatura. Ver la subsección 2.3.2.

7. Secado de materiales sólidos porosos

El aire y el agua, los dos fluidos más abundantes de la corteza terrestre, que nos rodean por todos lados y con los que estamos permanentemente en contacto, también son aquellos que más usamos para adecuar otros materiales a nuestras necesidades. Todas las civilizaciones han aprendido a manejar estos fluidos, junto con una diversidad de tierras y lodos, para fabricar objetos y resolver problemas.

La mezcla heterogénea de un material sólido finamente dividido y agua forma suspensiones y pastas, dependiendo de las proporciones de ambos componentes. La indicación de estas proporciones refiere a la composición de la mezcla: en general, las pastas tienen mayores proporciones de sólidos que las suspensiones, y mientras las pastas se encuentran en fase sólida, las suspensiones están en fase líquida. Hay materiales viscoelásticos que participan de las características de ambas fases: de sólidos y de líquidos.

Hay materiales **sólidos porosos consolidados**, que están formados por una matriz porosa de cierta estructura y rigidez, en tanto que otros son **sólidos porosos no-consolidados**, porque no presentan dicha matriz porosa, sus granos se encuentran separados o unidos por fuerzas muy pequeñas, como muchas arenas de playa o desierto. La mayor porción de una manzana, por ejemplo, está formada por una matriz porosa que es su mesocarpio o pulpa, saturada con jugos líquidos intracelulares e intercelulares, usualmente cerca de una situación de equilibrio termodinámico.

El secado es la separación del agua de un material sólido húmedo. Esto implica **transferir agua desde el sólido hacia otro medio**, que puede ser un gas. Lo más frecuente es transferir el agua del sólido al aire. Al secarnos las manos con un ventilador de aire caliente, por ejemplo, transferimos el agua al aire; al hacerlo con una toalla, la transferimos a otro sólido. El aire y la toalla son los medios del secado, nuestras manos son el sólido que interesa secar.

En este capítulo, analizaremos el secado transitorio de una muestra de un sólido poroso en un secador de charolas, señalando los conceptos más importantes, relacionados con la rapidez y el equilibrio termodinámico del transporte del agua de un sustrato poroso al aire.

7.1 Planteamiento

7.1.1 Definiciones y notación

Secado es el conjunto de acciones realizadas para eliminar agua de un sólido húmedo.

Al menos **tres componentes** están presentes en el secado: (1) **el sólido** a ser secado, (2) **el aire**, que es el medio que va a capturar el agua que se elimine del sólido y (3) **el agua**, que es el componente que se transfiere del sólido al aire, cuya concentración, expresada como $\frac{\text{masa de agua}}{\text{masa de sólido seco}}$, o como $\frac{\text{masa de vapor de agua}}{\text{masa de aire seco}}$, que llamamos **humedad**, son las variables más significativas del proceso de secado.

El secado se puede entender de manera más amplia, como la **operación de transferir agua de un material de interés a un medio de servicio**. Tanto el material como el medio pueden ser sólidos o fluidos. Así, podemos hablar de secar gas natural o fracciones de hidrocarburos líquidos, y hay sólidos como las lentejas de cloruro de calcio, que se usan en los desecadores de los laboratorios como medios de secado. Sin embargo, **nos limitaremos aquí a considerar el secado de sólidos con aire**.

Otras definiciones, asociadas al tema de **la humedad de los sólidos**, son:

- **Humedad total**, X_T , es el contenido total de agua de un sólido, expresado en $\frac{\text{Kg agua}}{\text{Kg sólido seco}}$.
- **Humedad acotada** es la cantidad de humedad en un sólido, la cual ejerce una presión de vapor menor a la presión de vapor normal del agua, a la misma temperatura.
- **Humedad no-acotada** es la cantidad de humedad **en exceso de la humedad acotada**, la cual ejerce una presión de vapor igual a la presión de vapor normal del agua, a la misma temperatura.
- **Humedad de equilibrio**, X^* , es la cantidad de humedad de un sólido, que puede permanecer en equilibrio con un medio secante de una humedad relativa dada, a una determinada temperatura.
- **Humedad libre**, $X = X_T - X^*$, es la humedad de un sólido, **en exceso de la humedad de equilibrio**. Es la humedad libre la que puede eliminarse del sólido por secado.

Por otra parte, **la humedad en el aire** se expresa también utilizando un conjunto de definiciones y conceptos asociados, como son:

- **Humedad absoluta**, ρ_a , es la masa de vapor de agua contenida en un volumen conocido y expresada en unidades de $\frac{\text{Kg de (vapor de) agua}}{\text{m}^3}$.
- **Humedad de saturación**, ρ_s , es la humedad absoluta en condiciones de saturación a una temperatura dada, llamada **punto de rocío**.
- **Humedad específica**, H_e , es la masa de vapor de agua que se requiere para saturar el espacio ocupado por un kilogramo de aire seco. Está expresada en unidades de $\frac{\text{Kg (vapor de) agua}}{\text{Kg aire seco}}$.
- **Humedad relativa**, H_r , es la humedad de una muestra, comparada con la humedad de saturación a la misma temperatura, expresada en porcentaje de la humedad absoluta, es decir, $H_r = \frac{\rho_a}{\rho_s} \times 100$.

Ejercicios

7.1.1-1. Humedad específica. Calcula la humedad de saturación a 30°C y $101,325 \text{ Pa}$. Expresa la respuesta anterior como humedad específica, en unidades de $\frac{\text{Kg agua}}{\text{Kg aire seco}}$.

Respuesta: $H_e = 0.02608 \text{ Kg vapor de agua/Kg aire seco}$.

7.1.1-2. Humedad relativa. Sale aire saturado a 30°C de un tunel de secado. (1) El aire se calienta a la temperatura de 40°C , sin variar su contenido de agua. Calcula su humedad relativa. (2)

El aire se enfría a 10°C , encuentra la cantidad de agua condensada por cada kilogramo de aire seco.

7.1.2 Elaboración de una hoja de datos

El secador de charolas a emplear se describe en el capítulo 22, donde se muestran fotografías de la unidad empleada en las experiencias, así como los procedimientos para llevar a cabo los experimentos. A partir de la lectura de dicho capítulo y de una visita al laboratorio, es importante **diseñar una hoja de datos de laboratorio**¹, que contenga la información necesaria y suficiente para realizar la experiencia de secado, de manera semejante a la elaboración de la hoja de datos mostrada en la figura 6.2, correspondiente a la evaporación de un líquido volátil.

Para saber qué parámetros deben ser medidos o calculados desde mediciones o información bibliográfica, es necesario **elaborar un modelo en el cual podamos localizar todos los parámetros y variables necesarias**. Esto nos conduce al análisis teórico, como aspecto inicial, hasta **establecer las ecuaciones de trabajo**, cuya inspección nos guiará para determinar los parámetros que necesitamos conocer y las variables que habremos de medir.

7.1.3 Objetivos

1. Diseñar una hoja de datos de laboratorio.
2. Elaborar un modelo que permita predecir el tiempo de secado de una raíz o fruta, para llegar al 20 % de su humedad inicial.
3. Estimar la sensibilidad del modelo de secado a los cambios de los valores, tanto de los parámetros de transporte, como del equilibrio termodinámico.
4. Calibrar los valores de los parámetros del modelo para predecir la rapidez de cambio de la temperatura media del sólido, durante el proceso de secado.

7.1.4 Diagrama y términos a medir o estimar

En la figura 7.1 se representa el secador de charolas como un túnel por el que pasa aire que es calentado aguas arriba por una resistencia eléctrica, como se muestra en las figuras 22.1 y 22.3. Se nota una ventana en la parte media, por donde se introduce la muestra, que luego se coloca en la charola que se muestra en la figuras 7.1 y 22.2. El diagrama pone el énfasis en los términos de calentamiento y las temperaturas. Así, los términos de calentamiento son:

Q_E = flujo térmico convectivo que entra al túnel de secado, después de agregar la energía de la resistencia eléctrica, colocada a la entrada, [W].

Q_S = flujo térmico convectivo que sale del túnel de secado, [W].

Q_P = pérdidas de energía térmica por la pared metálica lateral del secador, [W].

T_1 = temperatura del aire caliente en el borde de salida de la muestra, [$^{\circ}\text{C}$].

T_2 = temperatura del aire caliente en el borde de entrada de la muestra, [$^{\circ}\text{C}$].

T_3 = temperatura del aire caliente a la entrada del secador, aguas abajo de la resistencia de calentamiento, [$^{\circ}\text{C}$].

T_{bs} y T_{bh} temperaturas de bulbo seco y de bulbo húmedo medidas por un psicrómetro a la salida del secador, [$^{\circ}\text{C}$].

T_a = temperatura del aire ambiente, [$^{\circ}\text{C}$].

$m(t)$ = masa de la muestra, [Kg].

$T(t)$ = temperatura de la muestra, [$^{\circ}\text{C}$].

t = tiempo, [s].

Componentes:

α = aire,

¹Ver, en la subsección 21.2.5 del texto *Indagaciones sobre mecánica de fluidos*, por el autor del presente texto, algunas indicaciones sobre el contenido y la organización de esta *hoja de datos*.

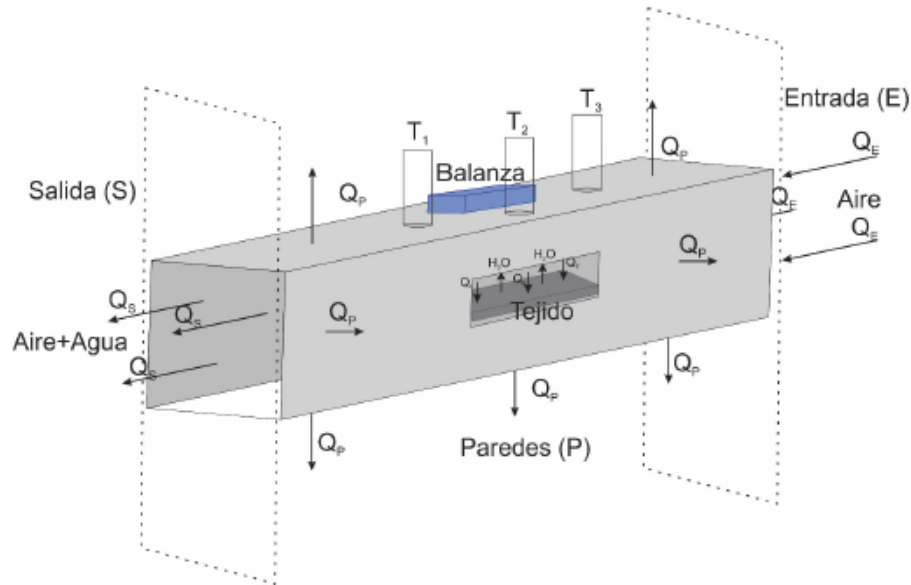


Figura 7.1: Diagrama de flujos térmicos y tomas de temperatura.

β = agua o humedad,

σ = sólidos.

X = **humedad libre en el sólido**, [Kg agua/Kg sólido seco].

$X_r = X/X_{sat} \times 100$ = **humedad relativa del sólido**, [%].

También usaremos la **humedad en el aire** para representar la composición de las mezclas de aire húmedo, dos son valores absolutos y dos son porcentajes:

Humedad específica: H_e = [Kg agua/Kg aire seco],

Humedad absoluta: ρ_a = [Kg de agua/m³],

Humedad de saturación: ρ_s = [Kg de agua/m³],

Humedad relativa: $H_r = \rho_a/\rho_s \times 100$,

Gran parte de la energía térmica se pierde a través de las paredes de lámina galvanizada. Esto puede ser considerado convenientemente, mediante un balance integral de energía térmica en todo el secador. Los términos de dicho balance se pueden apreciar en la figura 7.1, y se desarrollan en la siguiente sección.

7.2 El modelo cuasiestacionario

Hay procesos complejos donde ocurren simultáneamente dos o más dinámicas. Un proceso sencillo, donde podemos identificar dos dinámicas importantes, es el de vaciar un tanque a través de un tramo de tubo vertical que sale por el fondo del tanque. El proceso inicia al abrir la boca del tubo vertical al fondo del tanque. Entonces el líquido sale, por gravedad y el tanque principia a decrecer en la masa de líquido que contiene.

Al salir el líquido por el tubo, el fluido situado cerca de la pared del tubo ofrece mayor resistencia al movimiento que el fluido más cercano al centro del tubo, el cual se desploma con mayor facilidad. Como resultado de esta diferencia en la resistencia al movimiento se genera una distribución de la velocidad de flujo, gobernada por la competencia entre las fuerzas de resistencia viscosa y las fuerzas gravitacionales descendentes. Así, la dinámica del movimiento se propaga desde el centro del tubo hacia la pared del mismo. Además existe otra dinámica importante, también asociada con el flujo y tiene que ver con la masa de líquido que queda aún dentro del tanque, hasta que se vacía completamente. En cuanto al balance de masa en el tanque, el proceso es transitorio y

dura el tiempo que el tanque tarda en vaciarse². En cuanto a la dinámica de las fuerzas, su tiempo característico tiene que ver con la propagación del movimiento, desde el centro hasta la pared del tubo, es decir, con el tiempo de la difusión viscosa, donde $\nu = \mu/\rho$ [m²/s] es la viscosidad cinemática y R es el radio del tubo de salida, de tal manera que $t_\nu = R^2/\nu$ es un orden de magnitud de este tiempo de la difusión viscosa, en el cual el movimiento se propaga del centro a la pared del tubo³,

7.2.1 Balances integrales estacionarios sin muestra sólida

Antes de iniciar una experiencia de secado, hacemos funcionar el secador sin muestra en su charola, esperando el tiempo necesario para tomar datos el régimen estacionario. Estos datos servirán para establecer los términos de los balances estacionarios. Se eligen valores para el flujo de aire, en la apertura de la puerta corrediza, y para el flujo térmico, en la graduación del reóstato que alimenta la resistencia eléctrica. En condiciones estacionarias, sin muestra sólida, el balance térmico da:

$$Q_E - (Q_S + Q_P) = 0, \quad (7.2.1)$$

donde Q_E está evaluado después de incorporar el calentamiento proporcionado por la resistencia eléctrica. Este balance está complementado por el balance estacionario de masa del flujo de aire:

$$w_E - w_S = 0, \quad (7.2.2)$$

donde $w = \rho A \langle v \rangle$ es el flujo másico o velocidad másica de flujo del aire húmedo.

La ecuación (7.2.1) puede proporcionar un medio para evaluar las pérdidas de energía térmica por la pared del túnel. Despejando Q_P y aplicando la ecuación (7.2.2) a los flujos térmicos convectivos Q_E y Q_S , tenemos:

$$Q_P = Q_E - Q_S = w_S [c_{v,E}(T_E - T_b) - c_{v,S}(T_S - T_b)]. \quad (7.2.3)$$

Tomando en cuenta que **tanto el flujo másico como el flujo térmico a través del túnel de secado no se ven grandemente afectados por la presencia del material sólido** a secar, en la charola, suponemos que la estimación de Q_P por medio de la ecuación (7.2.3) es una aproximación razonable y corresponde a una **hipótesis de modelo cuasiestacionario**, ya que las perturbaciones en los flujos másico y térmico de entrada se amortiguan antes de afectar la dinámica de la muestra sólida. Estos balances estacionarios permiten estimar Q_P y se complementan con los balances transitorios de energía térmica y masa, para la muestra sólida, como se elaboran a continuación.

7.2.2 Balances integrales transitorios para el sólido

Una vez que se ha logrado alcanzar el régimen de operación estacionario, sin muestra sólida, en determinado momento, se introduce la muestra por la ventanilla corrediza de vidrio, cuidando que el termopar que nos indicará la temperatura de la muestra, no realice esfuerzos que pudieran alterar el peso medido por la balanza, pues ésta deberá estar libre para dar información fidedigna del cambio de la masa de la muestra sólida, conforme transcurre el tiempo.

A partir de la introducción de la muestra, la evolución de su masa $m(t)$ y de su temperatura $T(t)$ se irán siguiendo, así como los cambios de las temperaturas de bulbo seco y bulbo húmedo reportadas por el psicrómetro, T_{bs} y $T_{bh}(t)$, respectivamente. Es conveniente elegir un flujo de aire abundante, para que la temperatura de bulbo seco se acerque a una constante, lo cual nos lleva más

²Los procesos transitorios que no llegan a un estado estacionario a tiempos muy largos se analizan en el capítulo 4 del texto, compañero del presente, *Indagaciones sobre mecánica de fluidos* por el autor del presente texto.

³Los modelos cuasi-estacionarios se analizan en detalle en el capítulo 3 de la referencia de la nota precedente.

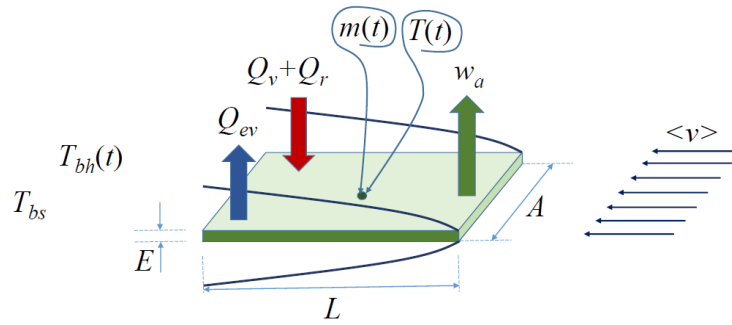


Figura 7.2: Muestra sólida y sus descriptores de los flujos másico y térmico.

cerca de las condiciones de cuasiestacionariedad, aunque también conviene no perder sensibilidad en la determinación de los cambios de la temperatura de bulbo húmedo.

Las relaciones fundamentales del modelo son los balances de masa y energía térmica que se elaboran a continuación, en la muestra sólida que puede apreciarse en la figura 7.2.

7.2.3 Balance de agua en el sólido poroso

$$\frac{dm_a}{dt} = -w_a$$

Rapidez de acumulación de la masa de agua en el sólido poroso = - Flujo másico de agua que se evapora en las superficies del sólido (7.2.4)

7.2.4 Balance de energía térmica en el sólido poroso

$$\frac{dU_T}{dt} = -Q_{ev} + Q_v + Q_r$$

Rapidez de acumulación de la energía interna total en el sólido poroso = - Flujo de energía interna que sale del sólido con el agua evaporada + Calentamiento por convección desde el aire a la superficie sólida + Calentamiento por radiación desde los alrededores a la superficie sólida. (7.2.5)

7.2.5 Términos de acumulación

La **rapidez de acumulación de masa** en la muestra sólida es una derivada temporal menor que cero, ya que una masa de agua es eliminada del sólido. La expresión se puede escribir como:

$$\frac{dm_a}{dt} = \frac{d}{dt}(m_{ss}X_T) = m_{ss}\frac{dX}{dt}$$

(7.2.6)

donde

m_{ss} = masa del sólido seco y

$X_T = X + X^*$ = humedad total del sólido, que equivale a la humedad libre más la humedad de equilibrio, que suponemos constante.

La expresión para estimar la **rapidez de acumulación de energía interna** en el sólido tiene una parte de calor sensible y otra de calor latente, ya que la evaporación de agua ocurre al interior del sólido, tanto como en su superficie. En este capítulo **sólo consideraremos cambios de temperatura, pero no de fases**, en el interior del sólido. Esto es adecuado al inicio del proceso de secado, pero

no cuando el secado ya se ha avanzado y parte de la estructura sólida ha evacuado su agua líquida y la interfase líquido-vapor se ha desplazado al interior del sólido. Entonces, a tiempos cortos:

$$\frac{dU_T}{dt} = \frac{d}{dt} [(m_{ss} + m_a) \bar{c}_v (T - T_b)], \quad (7.2.7)$$

donde

$\bar{c}_v$ = es el calor específico a volumen constante del sólido húmedo, que será conveniente aproximar a un valor medio constante para todo el proceso de secado y
 T_b = temperatura base para el cálculo de valores de las variables de estado extensivas, como la energía interna.

Convéncete de la importancia de incluir T_b en la ecuación (7.2.7). Realiza los ejercicios E.7.2-1 y E.7.2-2, así como el ejercicio E.6.2-1 de la subsección 6.2.1 para alimentar la discusión del punto.

7.2.6 Términos de flujo

El **flujo másico desde el sólido al aire** tiene que ver con dos resistencias en serie: una resistencia en el sólido y otra en el aire, y puede expresarse en función de un coeficiente global promedio de transferencia de masa:

$$w_a = m_{ss} \frac{S_T}{V} \bar{K}_X (X - BH_r^n) = \frac{2m_{ss}}{E} \bar{K}_X (X - BH_r^n), \quad (7.2.8)$$

donde

$\frac{S_T}{V} = 2 \frac{LA + AE + EL}{ELA} = 2 \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{L} + \frac{1}{A} \right) \approx \frac{2}{E}$ = área superficial total de la muestra sólida por unidad de volumen,

$\bar{K}_X$ = coeficiente global promedio de transferencia de masa, [m / s]

X = humedad libre en el sólido, [Kg agua / Kg sólido seco],

$X_{eq} = BH_r^n$ = expresión para el equilibrio termodinámico, del tipo *ley de Henry*.

El **flujo térmico por la evaporación del agua** es la suma del calor sensible más el calor latente que acompaña la evaporación del agua:

$$Q_{ev} = w_a \hat{U} = w_a [c_v (T - T_b) + \hat{\lambda}_{ev}], \quad (7.2.9)$$

donde

$\hat{\lambda}_{ev}$ = calor latente de evaporación, [J / Kg].

El **flujo térmico por convección** tiene que ver con la convección del flujo en dos niveles, la convección externa, en la capa límite formada en el aire, por la presencia del sólido, más la convección interna, es decir, en los poros saturados de vapor de agua, donde también hay conducción térmica en la matriz porosa del sólido. Todos estos efectos pueden asociarse a un **coeficiente global de transferencia térmica**, como:

$$Q_v = U_v S_T (T_a - T), \quad (7.2.10)$$

donde

U_v = coeficiente global de transferencia de energía térmica [W / m² K]

T_a = temperatura del aire, lejos de la superficie, aunque en la zona de la muestra; puede tomarse el promedio de T_1 y T_2 .

El **flujo térmico por radiación** puede ser importante cuando el calentamiento, proporcionado por las resistencias eléctricas, provoca un efecto de radiación importante a simple vista, como ocurre en las fotografías del capítulo 22. Sería recomendable linealizar el término de radiación⁴ e incorporarlo al término convectivo, sobre todo si se intenta una solución analítica al problema.

⁴Ver subsección 2.4.4.

Ejercicios

E.7.2-1. Linealización del flujo térmico por radiación. Elabora un modelo para el flujo térmico por radiación, en función de la diferencia de temperaturas elevadas a la cuarta potencia, utiliza el álgebra de productos notables para expresar esta diferencia como la diferencia de temperaturas por otros factores de sumas de temperaturas y lleva la expresión a una forma coincidente con la función de Q_v , ecuación (7.2.10), donde el coeficiente U_v será ampliamente dependiente de la temperatura.

E.7.2-2. Ecuaciones de trabajo. Sustituye los términos de acumulación y de flujo en los balances (7.2.4) y (7.2.5) y agrupa los términos siguiendo, en lo posible, los procedimientos del capítulo 21, para llegar a las ecuaciones de trabajo para el secado por lotes de un sólido poroso.

E.7.2-3. Hoja de datos. Elabora una hoja de datos considerando los valores a usar, de acuerdo con la información disponible, desarrollando los procedimientos adecuados para calcular valores aplicables a mezclas, como es el caso. Merece especial atención la relación del equilibrio termodinámico tipo ley de Henry, para la humedad entre el sólido y el aire. Tabula una corrida experimental.

E.7.2-4. Experimentación y discusión. lleva a cabo experimentos de secado de una tela de fieltro humedecida y de rodajas de papa, zanahoria, berenjena u otros vegetales adecuados, para analizar los resultados, a la manera del capítulo 21. Desarrolla experimentos independientes para estimar parámetros de equilibrio cuyos valores en las referencias no sean satisfactorios de acuerdo a la calidad que tú requieres.

8. Intercambiadores de calor

8.1 Clasificación y notación

Los intercambiadores de calor son piezas de equipo, cuya finalidad es

el transporte de energía térmica entre dos fluidos que se encuentran a temperaturas diferentes, a través de una pared sólida o de una interfase.

Los intercambiadores de calor, de flujos separados por una pared, se clasifican por la forma geométrica de la superficie a través de la cual se encuentran en contacto térmico.

Intercambiador de tubos concéntricos	{ flujo en paralelo flujo a contracorriente
Intercambiador de flujo cruzado	{ flujo mezclado flujo no mezclado
Intercambiador de tubo y coraza	{ un solo paso o múltiples pasos, por los tubos y por la coraza.
Intercambiadores compactos	{ Superficies extendidas de tubos, aletas y placas de varias formas

En todas las estimaciones y cálculos para el diseño y la operación de los intercambiadores de calor es importante considerar la **resistencia debida a las incrustaciones en la superficie de la pared que separa ambos fluidos, R_i** . El cálculo del **coeficiente global de transferencia de calor U** , debe tomar en cuenta la suma de **todas las resistencias** en serie, desde el **fluido frío**, a la

temperatura T_f , hasta el **fluido caliente**, a la temperatura T_c , de modo que

$$\frac{1}{UA} = \frac{1}{U_c A_c} = \frac{1}{U_f A_f} = \frac{1}{(\eta_0 h A)_f} + R_{i,f} + R_p + R_{i,c} + \frac{1}{(\eta_0 h A)_c}, \quad (8.1.1)$$

donde el coeficiente global está basado en un área de transferencia que puede ser la del lado del fluido frío, A_f , o la del lado del fluido caliente, A_c ; las resistencias debidas a las incrustaciones en la pared del tubo se calculan como

$$R_i = \frac{R''_i}{\eta_0 A}, \quad (8.1.2)$$

donde

R''_i = Factor de impurezas ó resistencia por área de ensuciamiento, en $[m^2 \cdot K/W]$.

η_0 = Eficiencia superficial, adimensional.

A = Área superficial donde ocurre la incrustación, $[m^2]$.

Valores típicos de R''_i se encuentran reportados en varios manuales y sitios.¹ Aquí mencionamos sólo algunos valores como referencia a sus órdenes de magnitud, de $\{10^{-4} - 10^{-3}\} [m^2 K/W]$.

Tabla 8.1. Factores de impurezas	
Fluido	$R''_i [m^2 K/W]$
Aceites y agua no tratada	0.0007-0.0009
Agua tratada	0.0002-0.0004
Líquidos orgánicos y gases	0.0003-0.0004

En los valores representativos del coeficiente global de transferencia de calor participan ambos fluidos, el de temperatura alta y el de baja. Frecuentemente, al menos uno de ellos es agua. Valores representativos de U para diversos pares de fluidos, se encuentran en la tabla 8.2.

Tabla 8.2. Valores representativos de U	
Pares de fluidos	$U [W/m^2 K]$
Agua con agua y condensadores de amoníaco con agua por los tubos.	1000
Condensadores de vapor, con agua por los tubos	$1000 \leq U \leq 6000$
Agua con aceites y condensadores de alcohol con agua por los tubos	$100 \leq U \leq 700$

Notación

Los subíndices que se usan en los arreglos de intercambiadores de calor, para denotar los pares de fluidos a través del aparato, son un detalle que debe cuidarse. Existen cuatro criterios o aspectos a considerar, cada uno de ellos vincula al par de fluidos correlativamente. En la tabla 8.3, con referencia a la figura 8.1, concentramos estos aspectos de la notación.

Tabla 8.3. Subíndices correlativos para los dos fluidos de un intercambiador de calor									
Criterio →		Temperatura		Flujo		Pared♣		Lugar	
Dicotomía	+	Caliente	c	Entrada	e	Interior/Tubos	t (minúsculas)♠	Izquierda	1
Dicotomía	−	Fría	f	Salida	s	Exterior/Coraza	T (mayúsculas)	Derecha	2

♣ Además, usamos el subíndice p para indicar pared y el subíndice i para incrustación.

♠ Esta notación se aplica solamente a las temperaturas de ambos fluidos en intercambiadores de tubos y coraza, combinada con el criterio de lugar, o de flujo, o de temperatura.

¹ Ver por ejemplo Incropera de Witt, capítulo 11.

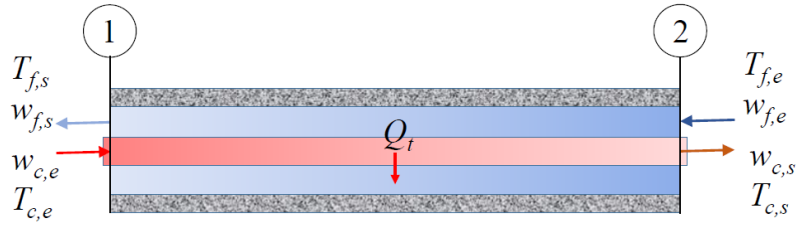


Figura 8.1: Intercambiador de doble tubo con notación de las corrientes y los puntos de definición, operando a contracorriente. Con respecto a su localización, las variables toman los subíndices 1 ó 2, según corresponda. No es necesario usar más de dos subíndices para una variable.

8.2 Análisis del intercambiador de calor usando la *DTML*

8.2.1 Balances térmicos integrales

Balance del fluido caliente:

$$Q_t = w_c C p_c (T_{c,e} - T_{c,s}) \quad (8.2.1)$$

Balance del fluido frío:

$$Q_t = w_f C p_f (T_{f,s} - T_{f,e}) \quad (8.2.2)$$

Balance integral a través de la pared:

$$Q_t = UA \overline{\Delta T}, \quad (8.2.3)$$

donde $\overline{\Delta T}$ = valor promedio representativo de las diferencias de temperatura de entrada y salida de ambos fluidos.

8.2.2 Análisis diferencial con flujo en paralelo

En los flujos en paralelo, ambos fluidos entran por el mismo lugar geométrico, digamos, por el plano 1, a la izquierda. Los perfiles axiales de temperatura, así como un elemento diferencial de longitud axial, se muestran en la figura 8.2, de donde podemos efectuar los balances térmicos:

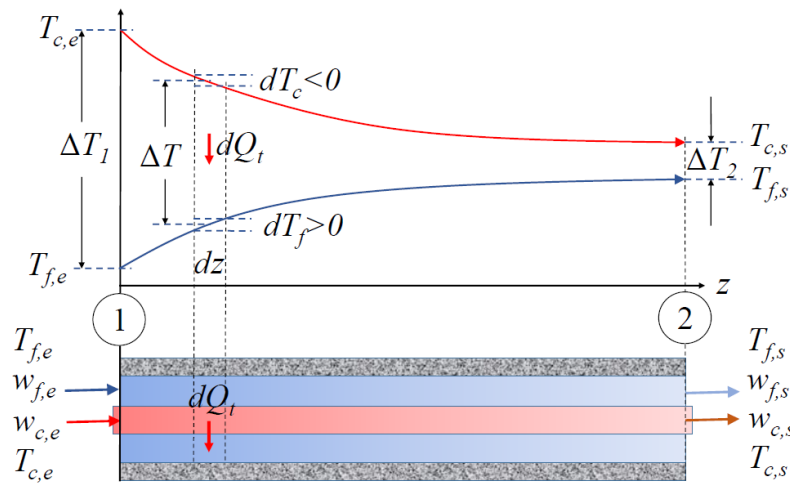


Figura 8.2: Intercambiador de doble tubo con flujo en paralelo.

$$\begin{aligned}
dT_c &< 0 \\
dT_f &> 0 \\
dQ_t &= -w_c C p_c dT_c = -C_c dT_c \\
dQ_t &= w_f C p_f dT_f = C_f dT_f \\
dQ_t &= U \Delta T dA \\
\Delta T &= T_c - T_f \\
d(\Delta T) &= dT_c - dT_f \\
d(\Delta T) &= -\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) dq \\
d(\Delta T) &= -\left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) U \Delta T dA \rightarrow \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -U \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f}\right) dA
\end{aligned}$$

integrando entre 1 y 2:

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \quad (8.2.4)$$

pero

$$C_c = w_c C p_c = \frac{Q_t}{T_{c,e} - T_{c,s}}; \quad C_f = \frac{Q_t}{T_{f,s} - T_{f,e}}$$

entonces

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left(\frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{Q_t} + \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{Q_t} \right)$$

que al ser sustituido da:

$$\begin{aligned}
Q_t &= UA \left(\frac{(T_{c,s} - T_{f,s}) - (T_{c,e} - T_{f,e})}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \right) \\
Q_t &= UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} = UA \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = UA(DTML) = UA \Delta T_{ml}
\end{aligned} \quad (8.2.5)$$

8.2.3 Análisis diferencial con flujo a contracorriente

$$\begin{aligned}
dT_c &< 0 \\
dT_f &< 0 \\
dQ_t &= -C_c dT_c = -C_f dT_f
\end{aligned}$$

entonces

$$d(\Delta T) = -\left(\frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_f}\right) dq$$

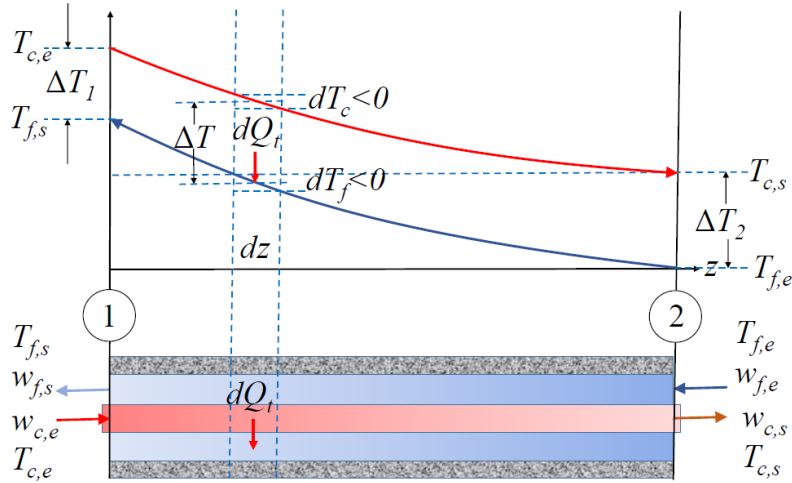


Figura 8.3: Intercambiador de doble tubo con flujo a contracorriente.

de donde

$$\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = -UA \left(\frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_f} \right)$$

$$Q_t = UA \left[\frac{(T_{hc,s} - T_{c,e}) + (T_{f,s} - T_{f,e})}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \right]$$

$$Q_t = UA \left[\frac{(T_{c,s} - T_{f,e}) - (T_{c,e} - T_{f,s})}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \right]$$

$$Q_t = UA \left[\frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}} \right] = UA \left[\frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} \right] = UA(DTML) = UA\Delta T_{ml} \quad (8.2.6)$$

8.2.4 Flujo cruzado y pasos múltiples

Aunque las configuraciones de los intercambiadores de calor, de flujo cruzado y de tubos y coraza con varios pasos de tubos y varios de coraza, son más complejas que las de simples doubles tubos concéntricos, ver figura 8.4, se puede mostrar² que los métodos de cálculo basados en el prototipo del intercambiador de doble tubo a contracorriente es suficiente para aproximar el desempeño de los intercambiadores más complejos, si se considera un factor de corrección F , para la determinación de la *DTML*, de modo que

$$DTML = F(DTML)_{CF}, \quad (8.2.7)$$

donde F es la razón de la diferencia de temperatura media efectiva, para el arreglo específico del que se trate, dividida entre la *DTML* que corresponde al flujo a contracorriente o contraflujo, la cual se denota por $(DTML)_{CF}$.

²Por ejemplo, Levenspiel (1993) hace una exposición excelente del significado físico de los parámetros P y R , y del factor F .

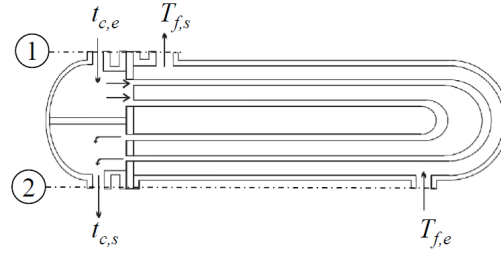


Figura 8.4: Intercambiador de tubos y coraza con dos pasos de tubos y uno de coraza. La notación usa todos los criterios definidos en la tabla 8.3: en el plano 1, la entrada del fluido caliente por los tubos y la salida del fluido frío por la coraza. En el plano 2, la entrada del fluido frío por la coraza y la salida del fluido caliente por los tubos

El factor F se calcula gráficamente, para una diversidad de configuraciones que se reportan en muchos libros de texto.³ El factor $F = F(P, R)$, es función de dos cantidades adimensionales, P y R , que son razones de diferencias de temperatura que definimos a continuación:

$$P = \frac{t_s - t_e}{T_e - t_e} = \begin{array}{l} \text{diferencia de temperatura de los tubos} \\ \text{entre diferencia de temperatura máxima posible.} \end{array}$$

$$R = \frac{T_e - T_s}{t_s - t_e} = \begin{array}{l} \text{diferencia de temperatura de la coraza} \\ \text{entre diferencia de temperatura de los tubos.} \end{array}$$

8.3 Método de cálculo de Intercambiadores de Calor por $DTML$

Para el **diseño de un intercambiador**, a partir del requerimiento de los flujos másicos w_c y w_f , se elige una configuración geométrica que aproxime la velocidad media a los valores típicos recomendados para gases y líquidos. Luego se propone un arreglo de flujo. A continuación,

dados $C_c, C_f, T_{c,e}, T_{f,e}$ y $(T_{c,s}$ ó $T_{f,s})$,
se requiere encontrar el área de calentamiento, A .

El procedimiento es directo:

1. Usando la temperatura de salida conocida, $(T_{c,s}$ ó $T_{f,s})$, se encuentra Q_t usando la ecuación (8.2.1) ó (8.2.2).
2. En la otra de las dos ecuaciones anteriores, se despeja la temperatura de salida desconocida.
3. Con las cuatro temperaturas, ya conocidas, se calcula la $DTLM$.
4. Por otra parte, con los flujos másicos y las propiedades de flujo y térmicas, se estiman los coeficientes de película, según el detalle de la información conocida y supuesta.
5. Con la información anterior se encuentra U .
6. Si se ha elegido un intercambiador de tubos y coraza, en el paso anterior se encuentra U_{CF} . Luego se calculan los valores de P y R , para encontrar, con ellos, el valor de F con la gráfica correspondiente. Con este valor, se encuentra U , usando la ecuación (8.2.3).
7. De la ecuación (8.2.3), se despeja el área A de la superficie total, sabiendo ya que $\overline{\Delta T} = DTLM$.

³Ver por ejemplo, Incropera, de Witt (1999); Levenspiel (1993).

En realidad, el procedimiento tiene una parte iterativa porque, una vez conocida A , se pueden proponer diversas formas de satisfacer ese valor, por ejemplo, diversas relaciones entre el diámetro y la longitud de los tubos, o entre el diámetro, la longitud y el número de tubos, de acuerdo a la configuración elegida, o entre el número de rendijas y su separación, en intercambiadores compactos, relación ancho/longitud, etc... Se requiere, entonces, afinar el cálculo de U conociendo las velocidades medias de flujo de ambos fluidos, para recalcular el área A . Sin embargo, los cálculos térmicos, basados en las ecuaciones 8.2.1 y (8.2.2), que llevan al conocimiento de la $DTML$, dependen solo de propiedades termodinámicas y no requieren iteraciones.

Para la **operación de un intercambiador existente**, una vez propuestos flujos w_c y w_f y conocidos C_c , C_f , $T_{c,e}$, $T_{f,e}$ y A ,

encontrar las temperaturas $T_{c,s}$ y $T_{f,s}$, a la salida del intercambiador.

Primero se estima el valor de UA , evaluando los coeficientes de película h_c y h_f , así como otras resistencias, de acuerdo a la ecuación (8.1.1), y el estimado de U se multiplica por el área, A .

El procedimiento es iterativo, en su parte térmica:

1. Se supone un valor de temperatura de salida, ($T_{c,s}$ ó $T_{f,s}$).
2. Se estima el valor de Q_t con el valor supuesto de la temperatura de la salida.
3. Se sigue el procedimiento de diseño para el valor supuesto de ($T_{c,s}$ ó $T_{f,s}$), hasta obtener un valor de la $DTML$.
4. Con el valor conocido de UA se calcula un nuevo valor de Q_t , utilizando la ecuación (8.2.3).
5. Si el nuevo valor de Q_t es diferente del anterior, con el nuevo valor se calculan nuevas propuestas para ($T_{c,s}$ y $T_{f,s}$).
6. Se repiten los pasos 3, 4 y 5, comparando en cada vuelta, el valor del Q_t nuevo, con el anterior, hasta su convergencia satisfactoria.
7. La convergencia no está garantizada, si no se alcanza, se propone otra temperatura de salida para intentar un nuevo ciclo, posiblemente convergente.

Si el intercambiador es compacto o de tubos y coraza, considera la corrección de la media logarítmica por medio del cálculo del factor F , explicado en la subsección precedente.

8.4 Análisis de intercambiadores de calor por el método eficiencia-*NUT*

$$C_{min} = \min\{C_c, C_f\}$$

$$C_{max} = \max\{C_c, C_f\}$$

$$Q_{t,max} = C_{min}(T_{c,e} - T_{f,e})$$

$$\varepsilon = \frac{Q_t}{Q_{t,max}} = \frac{C_c(T_{c,e} - T_{c,s})}{C_{min}(T_{c,e} - T_{f,e})} = \frac{C_f(T_{f,s} - T_{f,e})}{C_{min}(T_{c,e} - T_{f,e})} \quad (8.4.1)$$

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} \quad (8.4.2)$$

Para cada tipo de intercambiador de calor se puede mostrar que

$$\varepsilon = f_1\left(NUT, \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \quad \text{ó} \quad NUT = f_2\left(\varepsilon, \frac{C_{min}}{C_{max}}\right)$$

Ejemplo: Sea $C_{min} = C_c$ para un intercambiador en paralelo, entonces

$$\varepsilon = \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}}, \quad \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{c,e} - T_{c,s}}$$

y de la Ec.(8.2.4)

$$\ln \left(\frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} \right) = -\frac{UA}{C_{min}} \left(1 + \frac{C_{min}}{C_{max}} \right) \quad (8.4.3)$$

entonces

$$\frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = \exp \left\{ -NUT \left(1 + \frac{C_{min}}{C_{max}} \right) \right\} \quad (8.4.4)$$

pero el lado izquierdo es:

$$\begin{aligned} \frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} &= \frac{T_{c,s} - T_{c,e} + T_{c,e} - T_{f,e} + T_{f,e} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} \\ &= -\varepsilon + 1 + \frac{T_{f,e} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} = 1 - \varepsilon - \underbrace{\frac{C_{min}}{C_{max}} \frac{T_{c,e} - T_{c,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}}}_{\varepsilon} \\ \frac{T_{c,s} - T_{f,s}}{T_{c,e} - T_{f,e}} &= 1 - \varepsilon \left(1 + \frac{C_{min}}{C_{max}} \right) = 1 - \varepsilon(1 + C_r) \end{aligned}$$

entonces (8.4.4) da

$$1 - \varepsilon(1 + C_r) = \exp[-NUT(1 + C_r)]$$

de donde

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NUT(1 + C_r)]}{1 + C_r}$$

donde

$$C_r = \frac{C_{min}}{C_{max}}$$

O también, de (8.4.3)

$$\ln[1 - \varepsilon(1 + C_r)] = -NUT(1 + C_r)$$

de donde

$$NUT = -\frac{\ln[1 - \varepsilon(1 + C_r)]}{1 + C_r}$$

Para otros intercambiadores de calor:

Tabla 11.3 → Relaciones para ε (dado NUT)

Tabla 11.4 → Relaciones para NUT (dada ε)

8.5 Método de cálculo de intercambiadores de calor por $\varepsilon - NUT$

Para el **diseño de un intercambiador**, una vez seleccionado el tipo y su arreglo de flujo y ...

... dados C_c , C_f , $T_{c,e}$, $T_{f,e}$ y ($T_{c,s}$ ó $T_{f,s}$),
encontrar el área de calentamiento, A .

El procedimiento es directo:

1. Identificar C_{min} y C_{max} .
2. Calcular $\{Q_{t,max}, C_r\}$.
3. Calcular la eficiencia ε , ecuación (8.4.1).
4. Identificar y aplicar la expresión para el cálculo del NUT , correspondiente al arreglo de flujo, Tabla 11.4 de Incropera-de Witt o equivalente.
5. Encontrar el producto $UA = C_{min}NUT$.
6. Determinar las resistencias térmicas a partir de las condiciones de flujo, para estimar el coeficiente global de calentamiento U .
7. Encontrar el área de calentamiento A .

Para la **operación de un intercambiador existente**, una vez ...

...dados C_c , C_f , $T_{c,e}$, $T_{f,e}$ y A ,
encontrar las temperaturas $T_{c,s}$ y $T_{f,s}$, a la salida del intercambiador.

El procedimiento es, también, directo:

1. Identificar C_{min} y C_{max} .
2. Calcular C_r .
3. Determinar las resistencias térmicas a partir de las condiciones de flujo, para estimar el coeficiente global de calentamiento U .
4. Encontrar el NUT , ecuación (8.4.2)
5. Identificar y aplicar la expresión para el cálculo de la eficiencia, ε , correspondiente al arreglo de flujo del caso evaluado, Tabla 11.3 de Incropera-de Witt o equivalente.
6. Despejar y calcular $T_{c,s}$ y $T_{f,s}$, de las dos igualdades de la ecuación (8.4.1).

9. Soluciones analíticas de modelos de transporte

Quiero expresar mi agradecimiento a la memoria del Maestro y Matemático Francisco Hugo Martínez Ortiz, por haber contado con su invaluable ayuda para preparar este capítulo. A su generosidad sin límites al prodigar sus conocimientos unía aquella sencillez y alegría que tanto apreciábamos en él.

9.1 Evaporación isobárica de un líquido volátil

9.1.1 Ecuaciones de balance y condiciones iniciales

Las Ecuaciones (6.2.1) y (6.2.3) representan los balances transitorios de masa y energía térmica, en una forma que resulta apropiada para desarrollar su solución analítica. Estas ecuaciones son:

$$\frac{dm}{dt} = -w_{ev} = -\bar{k}_p A_i p_{A,sat} = -\text{constante}, \quad (9.1.1)$$

y

$$\frac{dT}{dt} = \frac{UA}{mc_p} (T_a - T) - \frac{\hat{\lambda}_{ev}}{mc_p} w_{ev}, \quad (9.1.2)$$

y están sujetas a las condiciones iniciales:

$$m = m_0, T = T_0, \text{ al tiempo } t = 0. \quad (9.1.3)$$

La masa $m(t)$ y la temperatura $T(t)$ son las únicas dos variables dependientes del tiempo. Todas las otras cantidades serán consideradas como parámetros. Entonces:

9.1.2 Método de solución

Si integramos el balance de masa, Ecuación (9.1.1), empleando la condición inicial (9.1.3), encontramos un decaimiento lineal de la masa de líquido en el tiempo:

$$m(t) = m_0 - w_{ev}t. \quad (9.1.4)$$

Por otra parte, la Ecuación (9.1.2) puede reordenarse para la temperatura T quedando:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{UA}{mc_p}T = \frac{UAT_a - w_{ev}\hat{\lambda}_{ev}}{mc_p} \quad (9.1.5)$$

que tiene la forma de una EDO de primer orden no-homogénea, que en general se representa por

$$\frac{dT}{dt} - p(t)T = f(t), \quad (9.1.6)$$

donde, para la Ecuación (9.1.5) tenemos las expresiones particulares:

$$p(t) = -\frac{UA}{mc_p} \quad (9.1.7)$$

$$f(t) = \frac{UAT_a - w_{ev}\hat{\lambda}_{ev}}{mc_p} \quad (9.1.8)$$

La EDO cuasi-lineal no-homogénea de la forma (9.1.6) se puede resolver encontrando primero la solución a la correspondiente EDO homogénea, más un método de factor integrante o variación de parámetros, para dar cuenta de la no-homogeneidad.

Ejercicios

9.1-1. Ecuaciones diferenciales en una variable independiente

- (a) ¿Dónde se localiza la característica que permite identificar a la Ecuación (9.1.5) como una EDO de primer orden?
- (b) ¿Dónde se localiza la característica que permite identificar a la Ecuación (9.1.5) como cuasi-lineal?
- (c) ¿Dónde se localiza la característica que permite identificar a la Ecuación (9.1.5) como no-homogénea?

9.1.3 Desarrollo

Resolvemos la EDO homogénea:

$$\frac{d\theta}{dt} = p(t)\theta \quad (9.1.9)$$

quedando de la forma:

$$\ln \theta = \int p(t)dt = -\frac{UA}{c_p} \int \frac{dt}{m} \quad (9.1.10)$$

cuya integración, considerando el cambio lineal de la masa, Ecuación (9.1.4), da

$$\ln \theta = \frac{UA}{w_{ev}c_p} \ln m \quad (9.1.11)$$

de donde resulta que

$$\theta = m^B \quad (9.1.12)$$

donde, el exponente

$$B = \frac{UA}{w_{ev}c_p} \quad (9.1.13)$$

es la razón de la rapidez de transmisión de energía con respecto al flujo de capacitancia térmica, ambas por unidad de cambio de temperatura.

La solución para la ecuación no-homogénea (9.1.5) se aborda a partir de la solución a la homogénea (9.1.12), buscando un factor integrante $F(t)$, tal que

$$T(t) = \theta(t)[F(t) + c] = m^B(F + c) \quad (9.1.14)$$

sea solución de (9.1.5). Entonces, derivando (9.1.14) resulta que

$$\frac{dT}{dt} = m^B \frac{dF}{dt} + Bm^{B-1} \frac{dm}{dt} (F + c) = m^B \left(\frac{dF}{dt} - w_{ev}B \frac{F + c}{m} \right), \quad (9.1.15)$$

donde se ha usado la Ecuación (9.1.1) para la derivada de m .

Por otra parte, reagrupando la Ecuación (9.1.5) y sustituyendo en ella (i) el parámetro B , definido por la Ecuación (9.1.13), (ii) la expresión (9.1.14) para T y (iii) tomando en cuenta la Ecuación (9.1.12), se encuentra la expresión:

$$\frac{dT}{dt} = m^B \left(\frac{f}{m^B} - w_{ev}B \frac{F + c}{m} \right). \quad (9.1.16)$$

Ahora bien, al comparar (9.1.15) y (9.1.16), vemos que la función integrante $F(t)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{f}{m^B} = \frac{UAT_a - w_{ev}\hat{\lambda}_{ev}}{c_p(m_0 - w_{ev}t)^{B+1}}, \quad (9.1.17)$$

donde se ha sustituido f de la ecuación (9.1.8) y m de la ecuación (9.1.4). Integrando resulta que

$$F(t) = C \int \frac{dt}{(m_0 - w_{ev}t)^{B+1}}, \quad (9.1.18)$$

donde

$$C = \frac{UAT_a - w_{ev}\hat{\lambda}_{ev}}{c_p}. \quad (9.1.19)$$

Resolviendo la integral en (9.1.18) podemos ver que

$$F(t) = \frac{C}{Bw_{ev}m^B}, \quad (9.1.20)$$

de lo cual concluimos que la solución (9.1.14) a la ecuación no-homogénea (9.1.5) es:

$$T(t) = cm^B + \frac{C}{w_{ev}B}, \quad (9.1.21)$$

la cual está sujeta a la condición inicial (9.1.3) que determina el valor de c , es decir:

$$c = m_0^{-B} \left(T_0 - \frac{C}{w_{ev}B} \right). \quad (9.1.22)$$

Por lo cual, la temperatura de la ecuación (9.1.21) resulta:

$$T(t) = (T_0 - \theta_0) \left(\frac{m}{m_0} \right)^B + \theta_0, \quad (9.1.23)$$

donde

$$\theta_0 = \frac{C}{w_{ev}B}, \quad (9.1.24)$$

es un parámetro de temperatura.

9.1.4 Solución

Finalmente, en términos de los parámetros originales, la expresión para la temperatura resulta:

$$\frac{T(t) - \theta_0}{T_0 - \theta_0} = \left(\frac{m}{m_0} \right)^B, \quad (9.1.25)$$

en tanto que, sustituyendo las constantes B y C en la ecuación (9.1.24), resulta que el parámetro θ_0 se puede expresar, en parámetros originales, como:

$$\theta_0 = T_a - \frac{w_{ev}\hat{\lambda}_{ev}}{UA}, \quad (9.1.26)$$

donde puede verse que θ_0 , en unidades de temperatura, representa la diferencia debida a la razón de las rapidezces de enfriamiento por evaporación con respecto al calentamiento por transmisión en las fronteras, con respecto a la temperatura del aire.

Ejercicios

9.1-2. Evaporación adiabática. Suponiendo que es posible aislar térmicamente las paredes del recipiente y que también es posible despreciar el calor Q_i que se intercambia en la interfase líquido-aire, es decir, considerando que $UA = 0$, desarrolla una expresión para predecir la temperatura del líquido $T(t)$, como función del tiempo.

9.1-3. Evaporación isotérmica. Suponiendo que en lugar del aislante perfecto del ejercicio anterior, se coloca una chaqueta y serpentines de calentamiento, así como una agitación suave del líquido, de manera que la evaporación procede a la temperatura constante T_0 . Encuentra el calentamiento $Q_P(t)$ a través de la chaqueta y los serpentines, como función del tiempo, en dos casos: (1) si se toma en cuenta el calor Q_i que se intercambia en la interfase líquido-aire y (2) si se desprecia Q_i .

9.2 Difusión axial y contradifusión equimolar en un tubo capilar

En esta sección se trata de los métodos de solución de los modelos que representan tanto la **fase transitoria incipiente** de la difusión de un soluto A en un solvente B , como la **etapa transitoria completa**, en un solo tubo capilar del aparato para determinar el coeficiente de difusión binaria en líquidos. Ver la descripción y funcionamiento del instrumento en el capítulo 18 y el desarrollo teórico en el capítulo 4.

9.2.1 Balance de masa del soluto A en un tubo capilar

El **modelo diferencial para la difusión del soluto A en la membrana** consta de la EDP [ver ecuación (4.2.4)]:

$$\frac{\partial x_A}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 x_A}{\partial z^2} \quad (9.2.1)$$

con la **condición inicial** (CI), ecuación (4.2.5)

$$x_A(z, 0) = x_{A0}^c; \quad 0 < z, \quad (9.2.2)$$

y dos **condiciones a la frontera** (CF), que en la **fase incipiente de la etapa transitoria** son la ecuación (4.2.6)

$$x_A(0, t) = x_A^v(t); \quad t \geq 0 \quad (9.2.3)$$

y la ecuación (4.2.7)

$$x_A(z \rightarrow \infty, t) = x_{A0}^c; \quad t \geq 0. \quad (9.2.4)$$

En la **etapa transitoria desarrollada** la primera condición a la frontera permanece idéntica, en tanto que la segunda cambia a la ecuación (4.2.8):

$$x_A(z_0, t) = x_A^c(t); \quad t \geq 0. \quad (9.2.5)$$

Las CF (9.2.3) y (9.2.5) son **no-homogéneas**, aunque las concentraciones $x_A^c(t)$ y $x_A^v(t)$ no son arbitrarias, sino conectadas a través de un balance de masa total de soluto al inicio y a cualquier tiempo del experimento. Este balance se propone ignorando la masa de soluto contenida en el interior de los poros, de modo que:

$$x_A^c(t) = x_{A0}^c + \frac{V_v}{V_c} x_{A0}^v - \frac{V_v}{V_c} x_A^v(t). \quad (9.2.6)$$

donde

V_c = Volumen de líquido en la celda.

V_v = Volumen de líquido en el vaso.

9.2.2 Solución para la etapa transitoria incipiente en un tubo capilar

Al inicio del proceso difusivo en la membrana, con sus orificios capilares inicialmente llenos de la mezcla líquida de la bujía, cuya fracción molar inicial es x_{A0}^c , la superficie externa de la membrana se expone al fluido del vaso, que consideraremos de aquí en adelante como el solvente puro, es decir que $x_{A0}^v = 0$. Así pues, el proceso difusivo en el capilar resulta del transporte de soluto, desde esta superficie hacia el seno del solvente, que lentamente irá cambiando su composición al incorporar el flujo de soluto que sale de los tubos capilares. Simultáneamente, moléculas de solvente en la boca de los orificios capilares, se introducirán en estos, generando un contraflujo igual en magnitud al flujo de soluto, pero en sentido contrario, por lo que $N_A + N_B = 0$ en los tubos capilares.

La existencia de este contraflujo de solvente es una buena hipótesis de trabajo, puesto que no es posible detectar una disminución de volumen en la mezcla en la bujía, a través de todo el experimento, sin embargo, es recomendable determinar experimentalmente los cambios de la concentración de soluto en la bujía, durante el curso del experimento. Así, resulta que el transporte de soluto en los orificios capilares es un problema difusivo que satisface la ecuación (9.2.1), con la CI (9.2.2) y las CF (9.2.3) y (9.2.4). Vemos aquí que el dominio de la solución es el semiplano $z \geq 0$, en cuyo caso es posible proponer el método de combinación de variables o método de semejanza.

Método de combinación de variables

Propongamos que la solución al problema dado por (9.2.1) a (9.2.4) **se puede reducir al de una EDO, si existe una combinación de las variables independientes z y t** , de modo que la fracción molar $x_A(z, t)$ se puede expresar en función de la combinación de las dos variables independientes $\eta(z, t)$, de modo que $x_A(\eta)$ es la solución buscada. Para que dicha solución exista, es necesario que el problema (9.2.1) a (9.2.4) se traduzca en uno equivalente, con η como única **variable independiente**, dada por la relación entre z y t :

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}. \quad (9.2.7)$$

Esta variable η se puede encontrar proponiendo que es una función potencial de la forma $\eta(z, t) = Cz t^n$, la cual se puede sustituir en el modelo de difusión a tiempos cortos, dado por las ecuaciones (9.2.1) a (9.2.4), para concluir que los parámetros $n = -1/2$ y $C = 1/\sqrt{4\mathcal{D}}$, transforman (9.2.1), su condición inicial (9.2.2) y sus dos condiciones a la frontera (9.2.3) y (9.2.4), de modo que η está definida por (9.2.7), mientras que la **variable dependiente** se define como:

$$\varphi(\eta) = \frac{x_A}{x_{A0}^c}, \quad (9.2.8)$$

la ecuación (9.2.1) se convierte en la EDO:

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\varphi}{d\eta} = 0, \quad (9.2.9)$$

la CI (9.2.2) resulta

$$\varphi(\eta \rightarrow \infty) = 1, \quad (9.2.10)$$

y las CF (9.2.3) y (9.2.4) dan, respectivamente:

$$\varphi(0) = \frac{x_A^v(t)}{x_{A0}^c} = \varphi_v(t), \quad (9.2.11)$$

y

$$\varphi(\eta \rightarrow \infty) = 1. \quad (9.2.12)$$

Aquí apreciamos que las relaciones que se derivan de la CI y de la última CF son idénticas, haciendo posible aplicar el método de combinación de variables al problema (9.2.9), con CF no-homogénea (9.2.11) y CF al infinito (9.2.10), o idénticamente (9.2.12).

Integración

Podemos ahora integrar la ecuación (9.2.9). La primera integración da

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2) \quad (9.2.13)$$

al integrar nuevamente y aplicar la CF (9.2.11) resulta

$$\varphi(\eta) - \varphi_v(t) = C_1 \int_0^\eta \exp(-u^2) du \quad (9.2.14)$$

Aplicaremos ahora la CF (9.2.12) para encontrar la constante C_1 :

$$C_1 = \frac{1 - \varphi_v(t)}{\int_0^\infty \exp(-u^2) du}. \quad (9.2.15)$$

Se conoce el valor de la integral del denominador, que es $\sqrt{\pi}/2$, por lo que, al aplicar (9.2.15) en (9.2.14), encontramos que

$$\frac{\varphi(\eta) - \varphi_v(t)}{1 - \varphi_v(t)} = \text{fer}(\eta) \quad (9.2.16)$$

donde $\text{fer}(\eta)$ es la función error de η que se define como la función:.

$$\text{fer}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-u^2) du \quad (9.2.17)$$

Solución en variables originales

Ahora, la solución para la etapa transitoria temprana en el tubo capilar, ecuación (9.2.16) se puede escribir en variables originales como:

$$\frac{x_A\left(\frac{z}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) - x_A^v(t)}{x_{A0}^c - x_A^v(t)} = \text{fer}\left(\frac{z}{\sqrt{4\mathcal{D}t}}\right) \quad (9.2.18)$$

9.2.3 Solución para la etapa transitoria desarrollada en un tubo capilar

El procedimiento para la solución de este problema de **difusión transitoria desarrollada** es el de **separación de variables**, a diferencia del método apropiado al problema de la difusión transitoria incipiente, que se resolvió por combinación de variables. La idea central de ambos métodos es similar en un sentido muy amplio: **transformar un problema expresado como una EDP a otro en términos de una o varias EDOs, cuyas soluciones se consideran más accesibles, usando métodos estandarizados**. La diferencia central entre ambos procedimientos consiste en la forma de lograr dicha transformación. En el caso previo, es decir, en el problema de la fase transitoria incipiente, **encontrando una combinación de las variables independientes** que permita expresar el problema en términos de dicha combinación; en el caso presente, de la fase transitoria desarrollada, **proponiendo una solución en términos de dos funciones, dependientes cada una de ellas de una sola de las variables independientes**. Seguir este procedimiento es necesario, ya que ahora el dominio de la solución no es un plano semi-infinito, sino un intervalo finito $0 \leq z \leq z_0$, y resulta imposible reducir las tres condiciones límite (dos condiciones a la frontera y una condición inicial) a solamente dos condiciones compatibles, como se hizo para obtener las soluciones (4.2.8) y (4.2.17).

Solución cambiando variables para obtener CF homogéneas

Las CF (9.2.3) y (9.2.5) se pueden reducir a **condiciones homogéneas**, aunque esto se logra a costa de obtener una EDP no-homogénea. En efecto, si determinamos la recta que pasa por las dos fronteras, tenemos que

$$\frac{x_A^L(z, t) - x_A^v(t)}{x_A^c(t) - x_A^v(t)} = \frac{z}{z_0}, \quad (9.2.19)$$

es la recta deseada, donde $x_A^L(z, t)$ es la función lineal entre las fronteras en $z = 0$ y $z = z_0$. Definimos ahora la nueva variable dependiente $\varphi(z, t)$ como:

$$\varphi = x_A - x_A^L = x_A(z, t) - x_A^v(t) - \frac{z}{z_0}[x_A^c(t) - x_A^v(t)], \quad (9.2.20)$$

que puede sustituirse en la ecuación (9.2.1), tomando en cuenta la relación (9.2.6), y haciendo en particular $x_{A0}^v = 0$, el modelo de difusión resultante consiste de **la EDP no-homogénea**:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left[1 - \frac{z}{z_0} \left(1 + \frac{V_v}{V_c} \right) \right] \frac{dx_A^v}{dt}, \quad (9.2.21)$$

la condición inicial CI:

$$\varphi(z, 0) = \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) x_{A0}^c, \quad (9.2.22)$$

y las condiciones a la frontera homogéneas CFH son:

$$\varphi(0, t) = 0; t \geq 0 \quad (9.2.23)$$

$$\varphi(z_0, t) = 0; t \geq 0. \quad (9.2.24)$$

Solución al problema homogéneo

Usaremos el método de **separación de variables** para resolver primero el problema de difusión homogéneo:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \quad (9.2.25)$$

CI:

$$u(\zeta, 0) = (1 - \zeta) x_{A0}^c, \quad (9.2.26)$$

CF:

$$u(0, \theta) = 0; \theta \geq 0 \quad (9.2.27)$$

$$u(1, \theta) = 0; \theta \geq 0, \quad (9.2.28)$$

donde las variables independientes son adimensionales, es decir que $\zeta = z/z_0$ y $\theta = \mathcal{D}t/z_0^2$. El método de separación de variables consiste en proponer que $u(\zeta, \theta) = Z(\zeta)T(\theta)$. Al sustituir $u(\zeta, \theta)$ en (9.2.25) - (9.2.28), obtenemos un problema separado en dos EDO con sus CF correspondientes. Para la función $Z(\zeta)$:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad (9.2.29)$$

CF:

$$Z(0) = 0; Z(1) = 0, \quad (9.2.30)$$

en tanto que para la función $T(\theta)$ da:

$$T' + \lambda^2 T = 0. \quad (9.2.31)$$

La solución general para (9.2.29) es de la forma

$$Z_n(\zeta) = a_n \text{sen}(\lambda_n \zeta), \quad (9.2.32)$$

y debe satisfacer las CF (9.2.30), de modo que $Z_n(1) = a_n \text{sen}(\lambda_n) = 0$, lo cual se satisface para valores $\lambda_n = n\pi$ para $n = 1, 2, \dots$. Entonces, para cada uno de estos valores de λ_n tenemos una solución y por el **principio de superposición de las soluciones**, también

$$Z(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n\pi \zeta), \quad (9.2.33)$$

es solución. Además, la solución general para (9.2.31) es una exponencial de la forma $T_n(\theta) = \exp(-n^2 \pi^2 \theta)$, de manera que la solución para $u(\zeta, \theta) = Z(\zeta)T(\theta)$ es

$$u(\zeta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 \theta} \text{sen}(n\pi \zeta), \quad (9.2.34)$$

que debe satisfacer, todavía, la condición inicial (9.2.26), de modo que

$$u(\zeta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(n\pi \zeta) = (1 - \zeta) x_{A0}^c \quad (9.2.35)$$

Debido a la ortogonalidad del espacio de las funciones $\text{sen}(m\pi \zeta)$, para $m = 1, 2, \dots$, podemos filtrar uno cualquiera de los coeficientes a_n , quedando:

$$a_n = 2x_{A0}^c \int_0^1 (1 - \zeta) \text{sen}(n\pi \zeta) d\zeta = \frac{2x_{A0}^c}{n\pi} \quad (9.2.36)$$

Modificación de la solución para el problema no-homogéneo

Consideremos ahora la ecuación no-homogénea (9.2.21) y sea $w(\zeta, \theta)$ una solución, de modo que

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + [B\zeta - 1] \frac{dx_A^v}{d\theta}, \quad (9.2.37)$$

donde

$$B = \left(1 + \frac{V_v}{V_c}\right) \quad (9.2.38)$$

CI:

$$w(\zeta, 0) = (1 - \zeta) x_{A0}^c, \quad (9.2.39)$$

CF:

$$w(0, \theta) = 0; \theta \geq 0 \quad (9.2.40)$$

$$w(1, \theta) = 0; \theta \geq 0, \quad (9.2.41)$$

Sea además

$$F(\zeta, \theta) = [B\zeta - 1] \frac{dx_A^v}{d\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\theta) \text{sen}(n\pi\zeta) \quad (9.2.42)$$

de donde, por la ortogonalidad del espacio de funciones $\text{sen}(n\pi\zeta)$,

$$F_n(\theta) = 2 \frac{dx_A^v}{d\theta} \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta \quad (9.2.43)$$

y la solución $w(\zeta, \theta)$ se puede proponer:

$$w(\zeta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\theta) \text{sen}(n\pi\zeta) \quad (9.2.44)$$

que al ser sustituida en la EDP da un sistema infinito de EDO para las $c_n(\theta)$:

$$\frac{dc_n}{d\theta} + n^2 \pi^2 c_n(\theta) = 2 \frac{dx_A^v}{d\theta} \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta, \quad (9.2.45)$$

sujetas a la condición inicial (9.2.39), que puede expresarse, para cualquier c_n como:

$$w(\zeta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) \text{sen}(n\pi\zeta) = (1 - \zeta) x_{A0}^c, \quad (9.2.46)$$

de donde las funciones $c_n(0)$ son equivalentes a las constantes (9.2.36). En efecto, por la ortogonalidad del espacio de las eigenfunciones, tenemos:

$$c_n(0) = 2x_{A0}^c \int_0^1 (1 - \zeta) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta = a_n. \quad (9.2.47)$$

Ahora es posible resolver (9.2.45), sujeta a la CI (9.2.47), con ayuda del factor de integración $e^{\int n^2 \pi^2 d\theta} = e^{n^2 \pi^2 \theta}$. Operando sobre la ecuación (9.2.45) tenemos:

$$e^{n^2 \pi^2 \theta} \frac{dc_n}{d\theta} + n^2 \pi^2 e^{n^2 \pi^2 \theta} c_n(\theta) = 2 \frac{dx_A^v}{d\theta} e^{n^2 \pi^2 \theta} \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta, \quad (9.2.48)$$

y agrupando

$$\frac{d}{d\theta} \left(e^{n^2 \pi^2 \theta} c_n(\theta) \right) = 2 \frac{dx_A^v}{d\theta} e^{n^2 \pi^2 \theta} \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta, \quad (9.2.49)$$

que se puede integrar, utilizando la condición (9.2.47) para dar:

$$e^{n^2 \pi^2 \theta} c_n(\theta) - a_n = 2 \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta \int_0^\theta \frac{dx_A^v}{dy} e^{n^2 \pi^2 y} dy. \quad (9.2.50)$$

La última integral se puede efectuar por partes, resultando:

$$e^{n^2 \pi^2 \theta} c_n(\theta) - a_n = 2 \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta \left(x_A^v(\theta) e^{n^2 \pi^2 \theta} - n^2 \pi^2 \int_0^\theta x_A^v(y) e^{n^2 \pi^2 y} dy \right), \quad (9.2.51)$$

de donde resulta,

$$c_n(\theta) = a_n e^{-n^2 \pi^2 \theta} + 2 \int_0^1 (B\zeta - 1) \text{sen}(n\pi\zeta) d\zeta \left(x_A^v(\theta) - n^2 \pi^2 e^{-n^2 \pi^2 \theta} \int_0^\theta x_A^v(y) e^{n^2 \pi^2 y} dy \right), \quad (9.2.52)$$

que finalmente se puede expresar, realizando la última integral en $d\zeta$, e introduciendo el factor que multiplica la integral en dy , dentro de la misma, como:

$$c_n(\theta) = a_n e^{-n^2 \pi^2 \theta} + 2 \frac{(-1)^{n+1} (B-1) - 1}{\pi n} \left(x_A^v(\theta) - n^2 \pi^2 \int_0^\theta x_A^v(y) e^{-n^2 \pi^2 (\theta-y)} dy \right), \quad (9.2.53)$$

Solución en variables originales

Para expresar la solución en las variables originales es necesario considerar la solución no-homogénea $w(\zeta, \theta)$, de la ecuación (9.2.44) y regresar a la definición de $\varphi(\zeta, \theta)$, dada por (9.2.20), para expresar finalmente la fracción molar $x_A(\zeta, \theta)$ como:

$$x_A(\zeta, \theta) = \varphi + x_A^L = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\theta) \text{sen}(n\pi\zeta) + x_A^v(\theta) + [x_{A0}^c - Bx_A^v(\theta)]\zeta, \quad (9.2.54)$$

donde las funciones $c_n(\theta)$ satisfacen la ecuación (9.2.52), en tanto que las constantes a_n están dadas por (9.2.36).

Ejercicios

9.2-1. Repetir el ejercicio que condujo a la ecuación (9.2.54), para las condiciones de la etapa transitoria desarrollada en un tubo capilar, pero considerando que al inicio la concentración de soluto en el vaso no es cero, sino algún valor constante cuya fracción molar es $x_{A0}^v \neq 0$. Esta consideración no modifica las CF (9.2.3) ni (9.2.5); en cambio, hay que sustituir completo el balance de masa total de soluto, ecuación (9.2.6) en la definición de ϕ , ecuación (9.2.20) y en todas las expresiones donde se ha supuesto que al inicio la concentración de soluto en el vaso es cero.

9.3 Transitorios de concentración en el vaso de una celda de difusión de líquidos

9.3.1 Para la fase transitoria incipiente

Para satisfacer el balance de masa de soluto en el vaso, ecuación (4.6.1), en las condiciones de la fase transitoria incipiente, es necesario expresar N_{A0} , definida en la ecuación (4.6.2), en términos de la derivada parcial de la fracción molar $x_A(z, t)$, con respecto a z . Esto puede hacerse aprovechando el desarrollo de la solución al modelo de la fase transitoria incipiente, partiendo del cambio de variables η y $\phi(\eta)$ dado por las ecuaciones (9.2.7) y (9.2.8), respectivamente, de donde podemos proponer que

$$\frac{\partial x_A}{\partial z} = x_{A0}^c \frac{d\phi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{x_{A0}^c C_1}{\sqrt{4\mathcal{D}t}} \exp(-\eta^2), \quad (9.3.1)$$

donde se ha sustituido la relación (9.2.13) en la segunda igualdad. Además, la constante C_1 está definida por la ecuación (9.2.15), que al ser utilizada, junto con la CF (9.2.11), que define la función $\phi_v(t)$, da por resultado que

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x_{A0}^c - x_A^v}{x_{A0}^c}, \quad (9.3.2)$$

que puede ser reemplazada en (9.3.1) y evaluada cuando $z = 0$, para dar

$$\left. \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{x_{A0}^c - x_A^v}{\sqrt{\pi\mathcal{D}t}} \exp(-\eta^2) \Big|_{\eta=0} = \frac{x_{A0}^c - x_A^v}{\sqrt{\pi\mathcal{D}t}}. \quad (9.3.3)$$

La sustitución de esta ecuación en (4.6.2) y en el balance (4.6.1) permite su posterior integración directa, que se desarrolla en la sección 4.6, como el modelo para la etapa transitoria incipiente.

9.3.2 Para la etapa transitoria completa

La solución de la **etapa transitoria** completa, está dada por la ecuación (4.4.6), que puede ser derivada con respecto a z , y considerada en el límite cuando $z = 0$, para obtener:

$$\left. \frac{\partial x_A}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial x_A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{x_{A0}^c}{z_0} - B \frac{x_A^v(\theta)}{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{z_0} c_n(\theta), \quad (9.3.4)$$

donde $\theta = \mathcal{D}t/z_0^2$ es un tiempo adimensional. Para el transitorio desarrollado, la ecuación (9.3.4) se sustituye en la ecuación (4.6.2), y ésta en la ecuación (4.6.1), para obtener la ecuación integro-diferencial (EID):

$$\frac{dx_A^v}{d\theta} + \kappa_0 B x_A^v(\theta) - \kappa_0 x_{A0}^c = \kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} \pi n c_n(\theta), \quad (9.3.5)$$

donde

$$\kappa_0 = \frac{n_{or} \pi r_{or}^2 z_0}{V_v}, \quad (9.3.6)$$

es la razón del volumen de todos los tubos capilares de la membrana con respecto al volumen del vaso. La ecuación (9.3.5) está sujeta a la condición inicial:

$$x_A^v(\theta) = 0, \text{ al tiempo } \theta = 0. \quad (9.3.7)$$

Representando explícitamente la EID (9.3.5), para $x_A^v(\theta)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx_A^v}{d\theta} + \kappa_0 B x_A^v(\theta) - \kappa_0 x_{A0}^c &= 2\kappa_0 x_{A0}^c \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \theta} \\ &+ 2\kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} (B-1) - 1] \left(x_A^v(\theta) - n^2 \pi^2 \int_0^{\theta} x_A^v(y) e^{-n^2 \pi^2 (\theta-y)} dy \right) \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{dx_A^v}{d\theta} + \kappa_0 B x_A^v(\theta) - \kappa_0 x_{A0}^c &= \pi \kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-n^2 \pi^2 \theta} + 2\kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n (1-B) - 1] x_A^v(\theta) \\ &- 2\pi^2 \kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n (1-B) - 1] n^2 \int_0^{\theta} x_A^v(y) e^{-n^2 \pi^2 (\theta-y)} dy \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_A^v}{d\theta} + \kappa_0 \left(B - 2 \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n (1-B) - 1] \right) x_A^v(\theta) &= \kappa_0 x_{A0}^c + \pi \kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-n^2 \pi^2 \theta} \\ &- 2\pi^2 \kappa_0 \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n (1-B) - 1] n^2 \int_0^{\theta} x_A^v(y) e^{-n^2 \pi^2 (\theta-y)} dy \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

9.4 Difusión térmica transitoria en una barra metálica

El **modelo diferencial para la difusión axial de energía térmica** en una barra cilíndrica consta de la EDP:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (9.4.1)$$

con la condición inicial:

$$T(z, 0) = T_0; 0 < z < z_0, \quad (9.4.2)$$

la condición a la frontera:

$$q_z(0, t) = q_0; t \geq 0 \quad (9.4.3)$$

y la nueva condición a la frontera:

$$T(z_0, t) = T_0; \forall t, \quad (9.4.4)$$

Antes de explorar la solución, vamos a hacer un cambio de variables para expresar el problema en la forma homogénea. Sean las variables independientes $\zeta = z/z_0$ y $Fo = \alpha_T t / z_0^2$, es el número de Fourier, que equivale a un tiempo adimensional. También, sea la temperatura adimensional

$$\Theta(\zeta, Fo) = \frac{T - T_0}{q_0 z_0 / k}, \quad (9.4.5)$$

de donde resulta el problema de condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2}, \quad (9.4.6)$$

con la CI:

$$\Theta(\zeta, 0) = 0, \quad (9.4.7)$$

y las CF:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}(0, Fo) = -1 \quad (9.4.8)$$

y

$$\Theta(1, Fo) = 0. \quad (9.4.9)$$

El método de solución es ahora por **separación de variables**. La idea central es reducir un problema expresado como una EDP a otro en términos de EDOs, descomponiendo el problema en dos funciones, dependientes cada una de ellas de una sola de las variables independientes. Seguir este procedimiento es necesario ahora que el dominio de la solución ya no es el plano semi-infinito, sino un intervalo finito $0 \leq \zeta \leq 1$.

Este problema se resuelve por el método de separación de variables, aplicando previamente cambios de variables, para poder expresarlo con CF en su forma homogénea. Sea

$$\Phi(\zeta, Fo) = 1 - \zeta - \Theta. \quad (9.4.10)$$

Entonces el problema (9.4.6) a (9.4.9) equivale a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2}, \quad (9.4.11)$$

con la condición inicial:

$$\Phi(\zeta, 0) = 1 - \zeta, \quad (9.4.12)$$

y las condiciones a la frontera:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(0, Fo) = 0 \quad (9.4.13)$$

y

$$\Phi(1, Fo) = 0. \quad (9.4.14)$$

Buscaremos una solución por el método de separación de variables. Sea la función $\Phi(\zeta, Fo)$ tal que

$$\Phi(\zeta, Fo) = Z(\zeta)F(Fo), \quad (9.4.15)$$

lo cual nos conduce al problema equivalente, en términos de dos EDO:

$$\begin{aligned} Z'' + \lambda^2 Z &= 0 \\ Z(1) &= 0 \\ Z'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9.4.16)$$

y

$$\begin{aligned} F' + \lambda^2 F &= 0 \\ Z(\zeta)F(0) &= 1 - \zeta. \end{aligned} \quad (9.4.17)$$

Al resolver (9.4.16), vemos que

$$Z_n(\zeta) = B_n \cos(\lambda_n \zeta) \quad (9.4.18)$$

es la n -ésima solución, donde $\lambda_n = (2n-1)\pi/2$; para $n = 1, 2, \dots$. Por el principio de superposición de soluciones, sabemos que también

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right), \quad (9.4.19)$$

también es solución. Además, (9.4.17) también es función de las λ_n , con el factor integrante $e^{\lambda_n^2 Fo}$, de modo que

$$F_n(Fo) = e^{-\lambda_n^2 Fo} \quad (9.4.20)$$

es solución de (9.4.17) y, finalmente, la solución general es

$$\Phi(\zeta, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 Fo} \cos(\lambda_n \zeta), \quad (9.4.21)$$

la cual está sujeta a la CI (9.4.12), de donde

$$\Phi(\zeta, 0) = 1 - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\lambda_n \zeta). \quad (9.4.22)$$

Por la ortogonalidad del espacio de funciones coseno, encontramos las expresiones para los coeficientes c_n :

$$c_n = \frac{\int_0^1 (1 - \zeta) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right) d\zeta}{\int_0^1 \cos^2\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right) d\zeta} = \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad (9.4.23)$$

de modo que (9.4.21) resulta

$$\Phi(\zeta, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 Fo} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right). \quad (9.4.24)$$

En términos de las variables originales, la solución (9.4.24) resulta:

$$T(\zeta, Fo) = T_0 + \frac{q_0 z_0}{k} \left[1 - \zeta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 Fo} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\zeta\right) \right]. \quad (9.4.25)$$

Esta solución, cuando el tiempo, $Fo \rightarrow \infty$, equivale a la línea recta

$$T(\zeta, Fo \rightarrow \infty) = T_0 + \frac{q_0 z_0}{k} (1 - \zeta), \quad (9.4.26)$$

que es la solución en el régimen estacionario, de modo que su flujo de calor por conducción es constante a través de toda la barra.

$$q_z = -k \frac{dT}{dz} = -\frac{k}{z_0} \frac{dT}{d\zeta} = q_0. \quad (9.4.27)$$

10. Celda de conducción térmica axial

10.1 Elementos de diseño del instrumento

Para estudiar el proceso de difusión térmica en materiales sólidos es necesario **establecer una diferencia de temperaturas constante**, medida con dos termopares colocados cerca de dos caras opuestas del material seleccionado, separando los termopares **una longitud L** . Además se requiere conocer el **flux de energía térmica**, $q_z = Q/A$, el cual es constante cuando corresponde a dicha diferencia de temperaturas, donde Q es el **calor o flujo de energía térmica** y A es el **área de la superficie transversal** a la dirección del flujo térmico. La relación entre la diferencia de temperaturas ($T_1 - T_2$) y el flux de energía térmica q_z proporciona el coeficiente de conductividad térmica k , de acuerdo a la **ley de Fourier**:

$$k = \frac{q_z}{\frac{T_1 - T_2}{L}} \quad (10.1.1)$$

La relación (10.1.1) vale en particular para **flujos unidimensionales (1D)**, pero es conveniente señalar que, en general, el flux de energía térmica es un vector y tiene, en el espacio físico tridimensional (3D) en el que nos movemos, tres componentes independientes: $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$. El flux de energía térmica coincide con la dirección espacial de **la mayor disminución de la temperatura**, es decir con la dirección del vector $-\nabla T$:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (10.1.2)$$

Para obtener un flux 1D de energía térmica, será necesario aislar térmicamente las otras dos direcciones independientes. Por ejemplo, podemos elegir que el objeto sólido tenga la forma de un paralelepípedo. Coloquemos, cerca del centroide de una de sus caras, el origen del sistema coordenado y definamos los tres ejes coordenados de modo que queden alineados con la forma del sólido, como se ve en la figura 10.1(a).

Recubramos con un sólido aislante las cuatro caras laterales del paralelepípedo, dejando descubiertas dos caras opuestas, es decir la superior y la inferior. Calculemos el espesor del aislante,

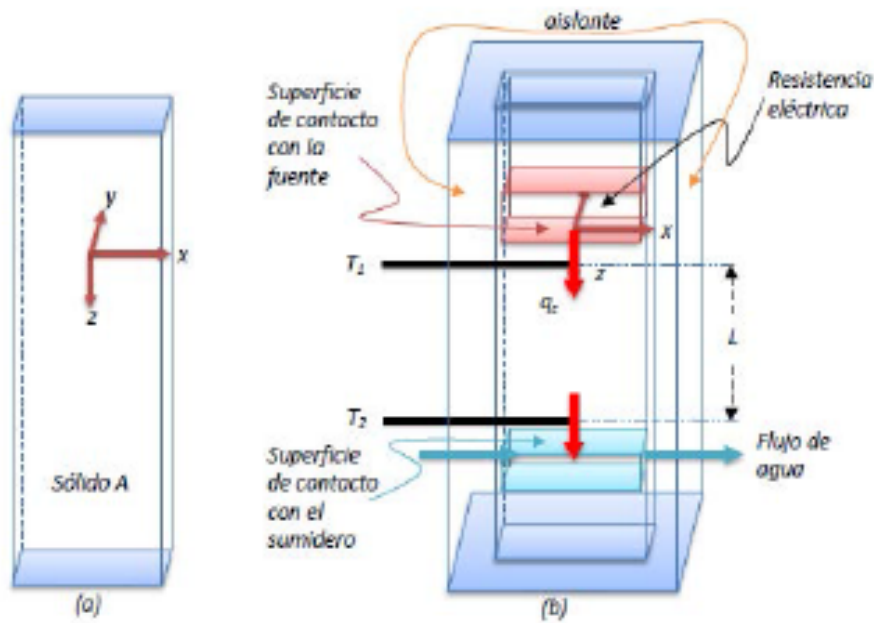


Figura 10.1: (a) Objeto sólido paralelepípedo y **sistema coordenado**. (b) Elementos generadores de un flujo térmico 1D: **paredes laterales aislantes** y caras con **fuelle** de energía térmica (resistencia eléctrica) y **sumidero** de energía térmica (flujo de agua). Calor unidimensional q_z y termopares a temperaturas T_1 y T_2 .

para que el calor que lo traspasa sea menor al 1 % de la energía térmica a ser suministrada, o a algún otro porcentaje elegido de acuerdo a la precisión deseada del instrumento, o considerando algún otro criterio de diseño. Ver Figura 10.1(b).

En la cara superior del sólido coloquemos una **fuelle de energía térmica**, de magnitud constante, como una resistencia eléctrica. En la cara opuesta coloquemos un **sumidero de energía térmica**, de magnitud constante, como un recipiente o baño térmico con flujo constante de un fluido de enfriamiento. Ver figura 10.1(b).

Sería importante corroborar si todo el calor suministrado por la resistencia eléctrica ha fluido a través del sólido hasta el baño térmico o qué porcentaje se ha disipado por las paredes aisladas. Para responder estas preguntas sería conveniente utilizar un **sólido de referencia**, cuya conductividad térmica sea conocida, para que así, la relación (10.1.1) se utilice para **determinar** q_z , conociendo la **diferencia de temperaturas** entre dos puntos del sólido de referencia, así como la **distancia** entre dichos puntos.

Lo anterior hace necesario seccionar el cuerpo sólido en tres rebanadas, una en contacto con la resistencia eléctrica y otra en contacto con el baño térmico, ambas hechas del **material de referencia**. La sección intermedia es para colocar la **muestra** cuya conductividad térmica deseamos determinar. Esto da lugar a un arreglo de tres resistencias en serie, que se aprecia en la figura (10.2). Con este nuevo arreglo es posible comprobar las principales hipótesis de los sistemas de resistencias en serie, como el hecho de que el calor sea constante a través de las tres secciones del arreglo.

En efecto, para un objeto de tres secciones con aislamiento perfecto, se tendría:

$$q_z = k_R \frac{T_1 - T_2}{L_A} = k \frac{T_3 - T_4}{L_B} = k_R \frac{T_5 - T_6}{L_C}, \quad (10.1.3)$$

donde k_R es la conductividad térmica del material de referencia, y las temperaturas y longitudes están indicadas en la Figura 10.2, siendo las longitudes L_A , L_B y L_C las separaciones entre los

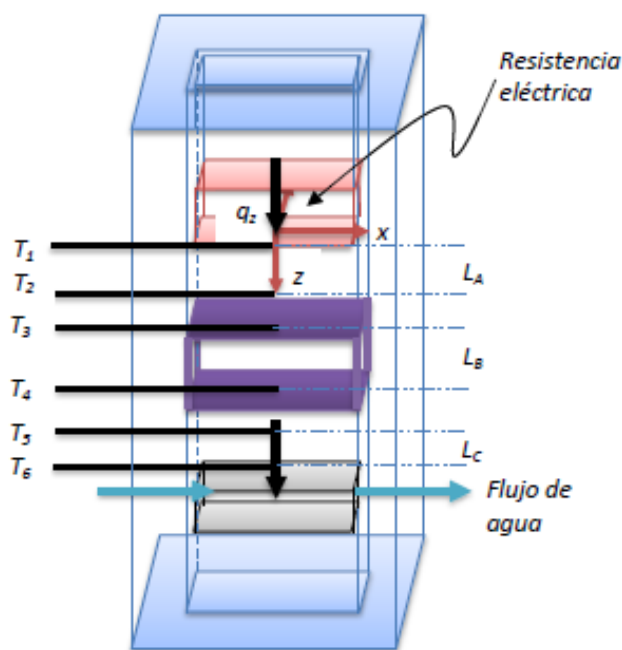


Figura 10.2: Arreglo de tres rebanadas sólidas. La rebanada intermedia corresponde a un sólido de conductividad térmica a determinar; las rebanadas superior e inferior, hechas de un material de referencia, sirven para verificar que el calor es constante, a régimen estacionario.

termopares 1 y 2, 3 y 4 y 5 y 6, respectivamente. De la primera igualdad se puede conocer el calor q_z , que se puede verificar con las mediciones en la otra sección del material de referencia. El calor así conocido se puede utilizar para encontrar la conductividad térmica de la muestra k .

10.2 Operación del instrumento

10.2.1 Descripción del instrumento

El instrumento a ser usado muestra los elementos importantes para el diseño, como se ve de lo anteriormente expuesto, aunque modificando aspectos sin importancia, como la sustitución de un cuerpo con forma de paralelogramo por una barra cilíndrica. Se construye con tres secciones: una sección de calentamiento en la parte superior, la cual está fabricada en latón, con un diámetro de 25 mm, que además cuenta con una instalación de calentamiento eléctrico de tipo cartucho en su extremo superior, ver Figura 10.3. La sección inferior es de enfriamiento y al igual que la superior está fabricada en latón, con diámetro de 25 mm. El enfriamiento se realiza por medio de un flujo de agua, que se hace pasar a través de una cavidad practicada en esta sección. La sección intermedia es intercambiable, en ella se colocan las rodajas de los sólidos cuya conductividad se desea determinar. Su espesor debe ser de 30 mm y su diámetro puede ser también de 25 mm u otro menor.

Las tres secciones están en contacto y su superficie externa está recubierta por un material aislante, para minimizar las pérdidas de energía térmica. El recubrimiento tiene unas perforaciones que corresponden a orificios en las barras. En estos orificios se introducen firmemente los termopares, que tienen una cubierta metálica con cuerda de tornillo, para que queden bien sujetos. En la figura 10.3(a) se ven los termopares colocados y en la figura 10.3(b) se reportan las distancias a las que se encuentran dichos termopares, así como el orden en el que se colocan usualmente.

A lo largo de las tres secciones se pueden colocar 8 termopares. Los primeros tres en la parte superior (T1, T2 y T3) están posicionados a lo largo de la sección de calentamiento. Mientras que

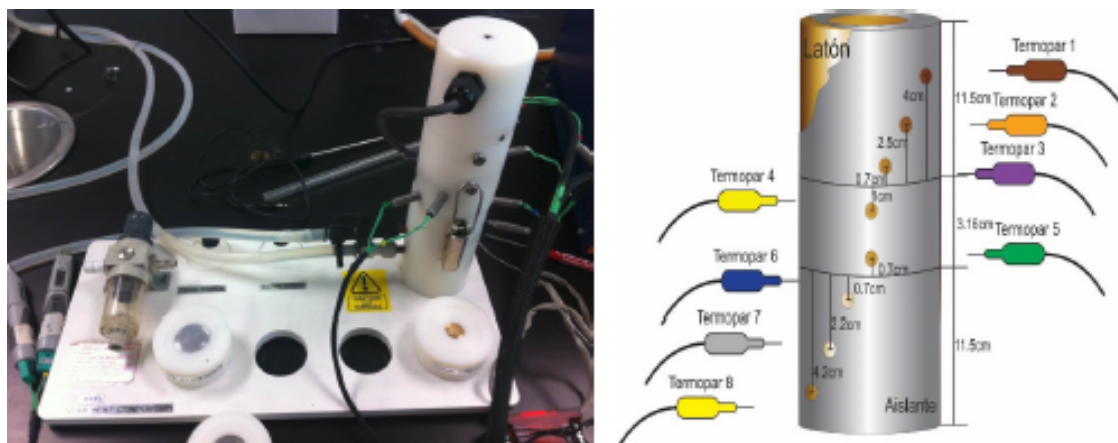


Figura 10.3: (a) Instrumento para determinar la conductividad térmica de un material sólido. (b) Diagrama del instrumento anterior, mostrando algunas dimensiones importantes.

dos termopares (T4 y T5) corresponden a la sección intermedia o sección de prueba, donde se coloca la muestra cuya conductividad deseamos determinar y finalmente los termopares (T6, T7 y T8) están posicionados a lo largo de la sección de enfriamiento. En este instrumento, todos los termopares están colocados en intervalos uniformes de 15 mm.

Los complementos del dispositivo experimental son una fuente de poder variable, para fijar la energía térmica suministrada, una tarjeta de adquisición de datos, como interfase para capturar la evolución de la temperatura de los termopares, una computadora acoplada a la tarjeta y una bomba peristáltica para la regulación del flujo de agua de enfriamiento.

El sistema de captura de los termopares no es estrictamente necesario para determinar la conductividad térmica de la muestra, puesto que se hace en el régimen estacionario. Sin embargo, el uso del sistema de captura permite realizar observaciones del proceso de difusión o conducción de energía térmica en la etapa transitoria.

10.2.2 Procedimiento de operación

1. De acuerdo con los objetivos propuestos, elije o fabrica la muestra sólida que se debe insertar en la sección intermedia, montando la muestra en el cilindro aislante correspondiente y cuidando que los orificios de la muestra coincidan con los del aislante.
2. Conecta los termopares a la tarjeta de adquisición de datos, cuidando usar un adaptador de señales, si es necesario modificar el voltaje, de acuerdo a las características de la tarjeta.
3. Conecta la tarjeta de adquisición de datos a la computadora, por un puerto USB.
4. Ejecuta el software necesario para reconocer las señales de los termopares.
5. Conecta la bomba peristáltica y ajusta el control de flujo a un valor intermedio.
6. Calibra el flujo de agua, utilizando una probeta y un cronómetro. Un flujo de 1.5 litros/minuto es adecuado para el aparato de la figura 10.3.
7. Ajusta la configuración para la adquisición de datos.
8. Inicia el registro de las temperaturas (seleccionando el botón *adquisición de datos*).
9. Inicia el calentamiento ajustando el voltaje del calentador a una posición intermedia. (Valores adecuados de estos parámetros son un voltaje de unos 12 V y una intensidad de corriente de 1.2 A, para el equipo mostrado en la figura 10.3).
10. Observa los cambios de las temperaturas de los puntos de medición hasta que se llegue a la etapa estacionaria del proceso de calentamiento.
11. En la etapa estacionaria, verifica el flujo de agua de enfriamiento, así como sus temperaturas de entrada y salida, luego interrumpe la captura de datos.

12. Repite los puntos 6 a 11 de este procedimiento, seleccionando otros voltajes (o cambiando el flujo de agua de enfriamiento). Toma en cuenta que la condición inicial de cada experimento subsecuente será el estado estacionario precedente y que cada etapa transitoria de difusión de energía térmica tiene una duración aproximada de 30 minutos.

10.3 Principios físicos del funcionamiento

1. El calentamiento eléctrico en el extremo de la sección superior genera un flujo térmico hacia el conjunto de resistencias, que se aproxima a un flujo constante, conforme transcurre el tiempo.
2. El calor o flujo térmico eleva sensiblemente la temperatura de la zona de latón más próxima a la resistencia eléctrica, de manera inmediata.
3. El calor se propaga axialmente, por el mecanismo de conducción en el latón, elevando la temperatura en porciones del material, cada vez mayores y pasando a la sección intermedia, que generalmente tiene una conductividad térmica distinta. **El proceso es difusivo** y sabemos que abarca la totalidad de las tres secciones del sólido **instantáneamente**. De esta manera, la energía se propaga a las tres secciones. Es decir de la sección de calentamiento a la intermedia y de ésta a la de enfriamiento, simultáneamente. Dado que los termopares tienen una sensibilidad limitada y que también existen resistencias térmicas en las regiones de contacto con los termopares, en la respuesta observada **puede observarse cierto retardo**. Sin embargo, los termopares tienen sensibilidad suficiente para que a través de ellos se puedan obtener perfiles de temperatura a lo largo de la barra, así como sus cambios conforme transcurre el tiempo.
4. El agua de enfriamiento es un sumidero de calor. Si el aislamiento fuera “perfecto” la elevación de su temperatura debería ser equivalente a la energía suministrada a la sección de calentamiento, por la resistencia eléctrica, **en la etapa estacionaria** del proceso. Las diferencias podrían interpretarse como pérdidas a través de un aislamiento que no es perfecto y como fugas en los accesorios (conducción de calor en las fundas de los termopares, etc.).

10.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Determinar la conductividad térmica de algunos ladrillos como el ladrillo de construcción normal, ladrillo refractario, adobe y block de cemento, sustituyendo los cilindros metálicos del instrumento por cilindros de ladrillo tallado y lijado para ajustar el cuerpo lo más exactamente posible. Tener especial cuidado en el contacto de las caras planas con los cuerpos de calentamiento y enfriamiento.
2. Repetir el objetivo anterior para algunos vegetales como la papa, la zanahoria, la jícama, la manzana, etc., definiendo e indicando el error al aproximar la conductividad térmica de cada uno de ellos a la conductividad térmica del agua.
3. Elaborar el modelo de calentamiento unidireccional transitorio, resolverlo y comparar la evolución de la temperatura con los valores experimentales, utilizando en el modelo el valor de la conductividad térmica encontrado experimentalmente.

11. Celda de conducción térmica radial en un disco

11.1 Elementos de diseño

El **flux en la dirección radial de un sistema cilíndrico tiene la particularidad de disminuir**, conforme el radio aumenta. Esto se debe a que el área transversal a la dirección de la coordenada radial aumenta proporcionalmente al radio. Entonces, un dado flujo térmico radial constante, $Q_0 = (2\pi rE)q_r$, donde E es el espesor del disco, permite mostrar, al despejar el **flux q_r , que es proporcional a $1/r$** .

Para estudiar el proceso de **difusión térmica en la dirección radial**, es necesario utilizar un buen conductor de la energía térmica, como un metal, con la forma de un cilindro, aislando perfectamente las dos caras circulares para **evitar los flujos térmicos axiales** en los extremos. También se introduce una fuente térmica cilíndrica en el eje axial del cilindro, que **tenga su misma longitud efectiva** en la dirección axial, para que caliente uniformemente en toda su extensión. Esta condición es importante, también para evitar la componente axial del flujo térmico en el sólido. Además, en el **extremo opuesto** al eje axial, es decir, en la cara lateral del sólido, con espesor E , se coloca un sumidero de energía térmica, por ejemplo una chaqueta o tubo de enfriamiento con circulación de agua. Ver figura 11.1(a). Esto también debería evitar la componente angular del flux térmico, es decir que $q_\theta = 0$, sin embargo, en la realidad de nuestro equipo de laboratorio, dicha condición no se satisface, como podemos asegurar al ver la figura 11.1(b), puesto que no se completa la región circular del tubo de refrigeración. **Si el baño térmico no cubre la totalidad de la cara lateral del sólido**, se genera una **componente angular del flujo térmico** en las proximidades a la zona que no es bañada, la cual tendrá mayor temperatura que la región que tiene buen contacto con el tubo refrigerante.

11.2 Operación del instrumento

11.2.1 Descripción

Un aparato que sirve para la determinación del calentamiento radial por conducción consta de un **disco fabricado de latón** de 3.2 mm de espesor y 110 mm de diámetro, que se muestra en la Figura 11.1. El disco tiene un núcleo central de cobre de 14 mm de diámetro. Este núcleo es

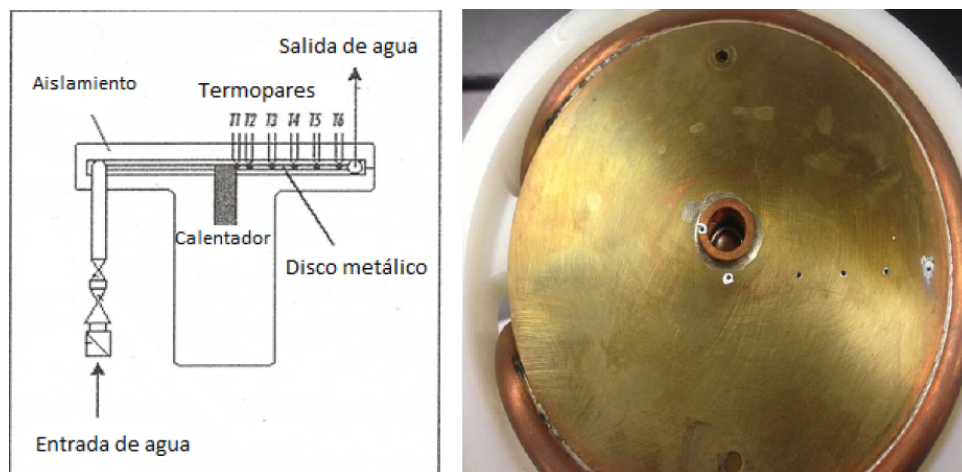


Figura 11.1: (a) Esquema del aparato para la difusión radial de energía térmica. (b) Disco metálico mostrando la distribución de orificios para la colocación de termopares.

calentado por un elemento eléctrico de calentamiento de tipo cartucho. En su radio externo, el disco está soldado a un tubo de cobre por el que circula agua de enfriamiento. Los elementos periféricos complementarios del dispositivo son una unidad de servicio de calentamiento, que abreviamos con las siglas (USC), una bomba peristáltica (para la alimentación del agua, aunque podría ser agua de la llave), una tarjeta de adquisición de datos como interfase para transformar la señal y una PC, compatible con la tarjeta de adquisición de datos. El sistema completo puede apreciarse en la figura 11.1.

En este sistema experimental, seis termopares tipo K están situados a diferentes radios en el disco para indicar la temperatura desde el núcleo central de calentamiento a la periferia del disco, conforme transcurre el tiempo. Es necesario conocer las posiciones de los termopares. En el aparato mostrado en la figura 11.1, las posiciones radiales de los termopares son: T1: 7 mm, T2: 10 mm, T3: 20 mm, T4: 30 mm, T5: 40 mm, T6: 50 mm. Para la instalación y manejo del software, solicitar el instructivo correspondiente.

El aparato descrito permite realizar observaciones del proceso de conducción radial (o difusión radial) de la energía térmica en las etapas transitoria y estacionaria, cuyas temperaturas cambian con el voltaje suministrado al núcleo central y con el flujo de agua refrigerante.

11.3 Operación

1. Conecta el sistema de medición de temperaturas y de calentamiento desde la USC al disco de conducción radial.
2. Ejecuta el software, seleccionando el archivo *Ejercicio C: Régimen transitorio de transferencia de energía térmica*, de la carpeta de rutinas.
3. Enciende la bomba peristáltica y ajuste el control de flujo a un valor intermedio.
4. Calibra el flujo de agua, utilizando una probeta y un cronómetro. Un flujo de 1.5 litros/minuto es adecuado para el aparato de la figura 11.1.
5. Ajusta la configuración para la adquisición de datos.
6. Inicia el registro de las temperaturas (seleccionando el botón *adquisición de datos*).
7. Inicia el calentamiento ajustando el voltaje del calentador a una posición intermedia. (Valores adecuados de estos parámetros son un voltaje de unos 12 V y una intensidad de corriente de 1.2 A, para el equipo mostrado en la figura 11.1.
8. Observa los cambios de las temperaturas de los puntos de medición hasta que se llegue a la

etapa estacionaria del proceso de calentamiento.

9. En la etapa estacionaria, verifica el flujo de agua de enfriamiento, así como sus temperaturas de entrada y salida e interrumpe la captura de datos.
10. Repite los puntos 4 a 8 de este procedimiento, seleccionando otros voltajes, o cambiando el flujo de agua de enfriamiento. Toma en cuenta que **la condición inicial de cada experimento subsecuente será el estado estacionario precedente**. En el aparato mostrado en la figura 11.1, cada etapa transitoria de difusión de energía térmica tiene una duración aproximada de 30 minutos, verifícalo.

11.4 Principios físicos del funcionamiento

1. El calentamiento eléctrico del núcleo central genera un flujo de energía térmica que se supone constante desde el inicio de la experiencia.
2. Este flujo térmico eleva inmediatamente la temperatura de la región más próxima del disco metálico.
3. Si no hubiéramos observado el disco sin su aislante, afirmaríamos que el calentamiento se propaga radialmente, por un mecanismo de conducción en el metal, abarcando porciones cada vez mayores del disco metálico. El proceso es difusivo y por lo mismo, decimos que, teóricamente, afecta la totalidad del metal de manera instantánea, pero los termopares tienen una sensibilidad limitada y existen también resistencias térmicas en las regiones de contacto de los termopares, que retardan la respuesta observada.
4. El agua de enfriamiento es un sumidero de la energía térmica suministrada. La elevación de su temperatura debería ser equivalente a la energía suministrada al núcleo central, cuando se haya alcanzado la etapa estacionaria del proceso. Cualquier diferencia podría entenderse como pérdidas a través de un aislamiento insuficiente y como posibles fugas en los accesorios (conducción en las fundas de los termopares, etc.).

11.5 Algunos objetivos de las experiencias

1. Elabora la solución analítica para el calentamiento radial transitorio de un disco plano, con superficies circulares perfectamente aisladas y borde axial a temperatura constante.
2. Compara los resultados de la solución analítica con las determinaciones experimentales, en los valores del radio que coinciden con los puntos de medición de las temperaturas, para un conjunto dado de tiempos
3. Verifica que las temperaturas medidas por los termopares en el régimen estacionario, coinciden con la solución estacionaria y equivalen a un calentamiento radial proporcional al inverso del radio.
4. Elabora un modelo estacionario para el caso bidimensional, más apegado a las observaciones, ya que el agua de enfriamiento no alcanza a dar la vuelta completa que corresponde al perímetro total del borde axial.
5. Indaga si la corrección anterior es tan importante como para requerir modelos bidimensionales, o por el contrario, si la excelente conducción térmica en el latón nos permite asegurar que el modelo radial unidimensional es una buena aproximación para representar la conducción en el disco de latón de la figura 11.1.

12. Celda de resistencias en serie

12.1 Descripción

Una celda para medir las resistencias térmicas en serie es un recipiente hecho de un material sólido al cual deseamos determinar su conductividad térmica, o emplear la celda para estimar un conjunto de resistencias en serie. Su pared lateral es muy gruesa, de manera que es posible colocar termopares, los cuales se introducen por orificios sesgados, hasta llegar, uno de ellos muy cerca de la superficie interior y el otro muy cerca de la superficie exterior, como se ve en la figura 12.1. El recipiente tiene una tapa de material aislante con un orificio en el centro para introducir un termopar.

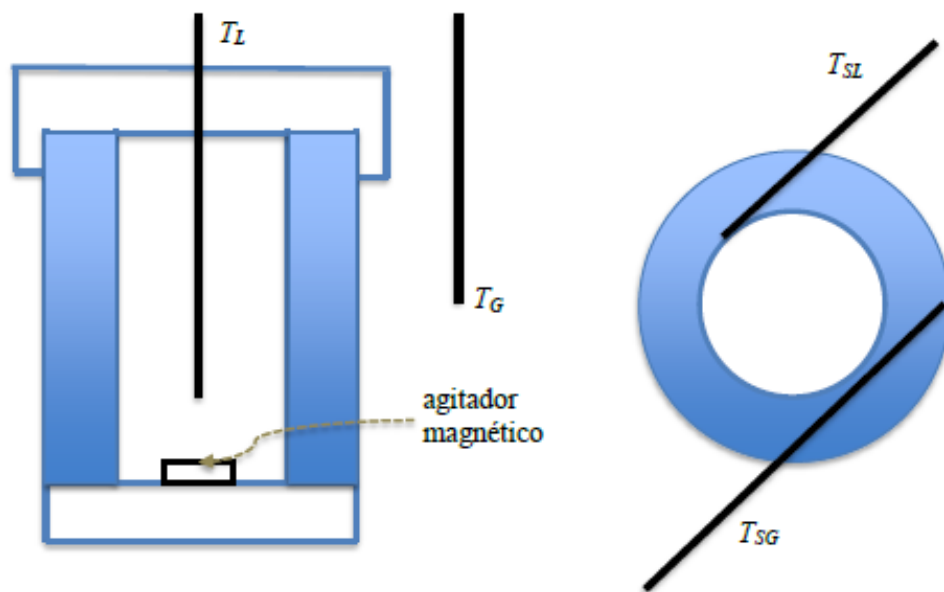


Figura 12.1: Diagrama de la celda y posiciones de los termopares. El cuerpo lateral es metálico, el fondo y la tapa son aislantes.

12.2 Operación

1. Se calienta agua u otro líquido, de acuerdo a la temperatura máxima que se desea operar.
2. Se colocan termopares en los orificios de la celda, cuidando que hagan contacto con la pared sólida. Se pueden mojar en un líquido conductor para mejorar el contacto.
3. Sobre una parrilla de agitación, se vierte el líquido caliente en la celda y se coloca un agitador magnético en el fondo.
4. Se ajusta la tapa, cuidando que el termopar no interfiera el movimiento del agitador.
5. Se toman lecturas “iniciales” de la temperatura que indican, al menos cuatro termopares, colocados de la siguiente manera: uno al centro de la celda (T_L), uno muy cerca de la pared interior (T_{SL}), uno muy cerca de la pared exterior (T_{SG}) y uno en el aire ambiente (T_G), cercano a la celda.
6. Se enciende el agitador magnético
7. Se toman las lecturas de los primeros tres termopares, al principio con intervalos de 10 o 20 segundos y conforme los cambios son más lento, con intervalos mayores.
8. La temperatura ambiente se toma 2 o 3 veces durante la corrida.

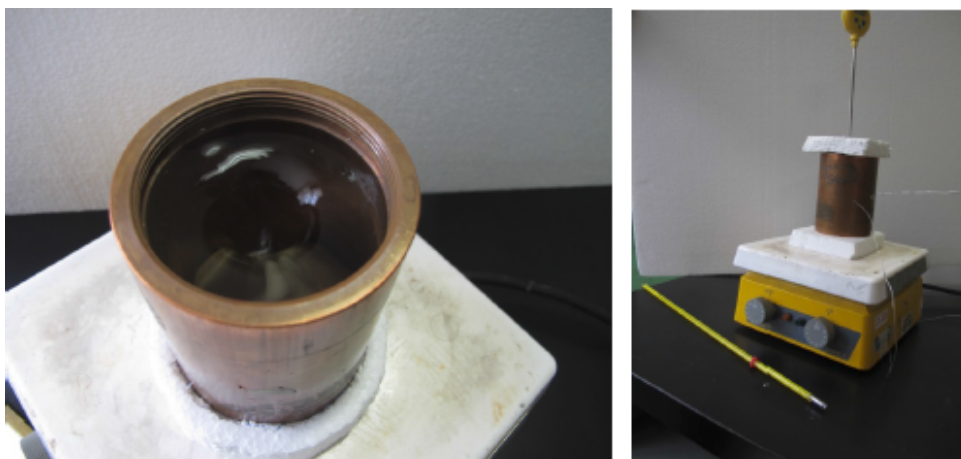


Figura 12.2: (a) Agitación del fluido, se observa la superficie del líquido ligeramente cónica, y (b) Parrilla de agitación, celda, aislante, termómetro y dos termopares. Nótese que el fondo del recipiente también es metálico, pero el fondo se considera perfectamente aislado por el unicel.

12.3 Principios físicos del funcionamiento

Al verter el agua caliente en la celda da inicio el proceso de transferencia de energía térmica a través de la pared del recipiente. A partir de este momento la temperatura del líquido bajará hasta igualarse a la temperatura ambiente. Si el fondo y la tapa son aislantes térmicos, todo el cambio de temperatura se puede asociar a la pared lateral; de otro modo (si el fondo y/o la tapa son del mismo material de la pared lateral) habrá que tomar en cuenta la transferencia en el fondo y/o en la tapa.

Cuando el fondo y/o la tapa son del material de la pared lateral, el modelamiento del recipiente se dificulta enormemente. Considerando este caso, enumera el conjunto de términos adicionales de flujos de calor que habrían de ser tomados en cuenta y el conjunto de condiciones de frontera adicionales.

La agitación ayuda a mantener uniforme la temperatura del líquido y reduce el espesor de la película interna. La temperatura cambia desde la indicada por el termopar en el centro de la tapa hasta la de la superficie interna de la pared, es decir, en la resistencia convectiva del líquido.

¿Cómo se relaciona la velocidad angular y el tamaño del agitador magnético con la resistencia térmica del líquido en la superficie interna de la pared de la celda?

La siguiente resistencia es la de la pared sólida, por conducción. Los termopares en los orificios permiten estimar las temperaturas muy cerca de las superficies interna y externa.

La resistencia convectiva externa está en la película de aire cercana a la pared de la celda. Sus temperaturas son la de la superficie externa de la pared y la del aire ambiente. El incremento de temperatura en la pared genera un flujo convectivo de aire, por convección natural si no hay corrientes de aire en el laboratorio y se combina con convección forzada cuando hay corrientes, que pueden ser incluso promovidas por el movimiento de las personas cerca del instrumento. Para indagar la influencia de estos movimientos es posible intensificarlos y controlarlos con un ventilador, midiendo la velocidad con un anemómetro de rehilete.

12.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Evaluar los cambios debidos a la resistencia convectiva interna, por medio de la velocidad de agitación del líquido.
2. Evaluar los cambios debidos a la resistencia convectiva externa, desde una situación de convección natural, sin flujo de aire, hasta una de convección forzada, impulsando el aire ambiente hacia la celda, con un ventilador.
3. Tomando en consideración que el fondo del cilindro es también metálico, aunque descansa sobre una placa de un aislante que no permite el calentamiento axial, ¿las longitudes axiales de las áreas de calentamiento en las superficies interior y exterior deben ser iguales o distintas?

13. Aleta de enfriamiento

13.1 Descripción

Las aletas de enfriamiento son cuerpos conductores con grandes áreas de contacto. Sirven para disipar en el aire ambiente, el calor que se propaga desde la base de la aleta.

Fabricamos una aleta de enfriamiento muy sencilla con una barra cilíndrica larga (con razón de aspecto $L/D > 20$) de aluminio o de otro metal de mayor conductividad térmica. En la pared plana de uno de sus extremos colocamos una resistencia eléctrica también plana, haciendo íntimo contacto en la superficie y aislando completamente las otras caras de la resistencia, para que toda la energía térmica suministrada sea equivalente al flujo de energía térmica que ingresa en la base de la aleta, ver figura 13.1.

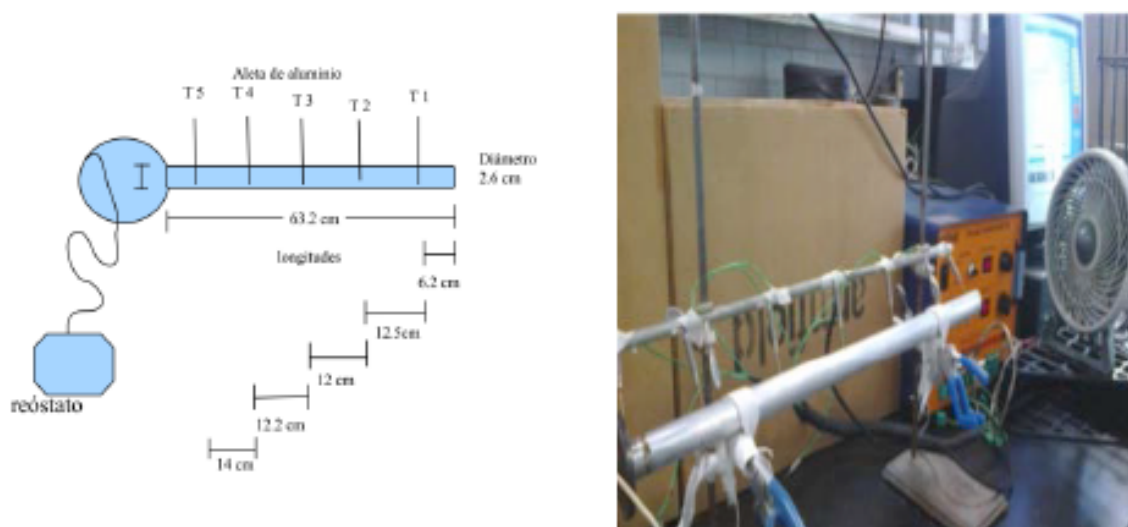


Figura 13.1: (a) Esquema de aleta cilíndrica con dimensiones. (b) Aleta con la resistencia en el extremo izquierdo, el arreglo de los termopares, la unidad de servicio de calentamiento (USC) al fondo y un ventilador.

La barra metálica se encuentra suspendida entre dos soportes y se observa un conjunto de termopares, distribuidos a lo largo de la aleta. El suministro de energía es regulado con un reóstato, para introducir distintas cantidades de energía eléctrica a la resistencia, en la base de la aleta, y se usa un ventilador para producir corrientes forzadas de aire, que inciden en la misma aleta. La velocidad del aire se mide con un anemómetro de rehilete en sus proximidades.

El instrumento, permite realizar observaciones de los perfiles de temperatura a lo largo de la aleta, conforme transcurre el tiempo, dependiendo de la cantidad de energía que se suministre a la resistencia, a partir de un tiempo inicial. Esto permite capturar información experimental para analizar las etapas transitoria y estacionaria, así como determinar el efecto de la velocidad del aire, y diferentes efectos posteriores al estado estacionario, ya que se puede modificar el efecto de la convección forzada, al aplicar una corriente de aire distinta con el ventilador, o al modificar el voltaje suministrado a la base de la aleta.

Los complementos del dispositivo experimental son la USC, una tarjeta de adquisición de datos como interfase para transformar la señal y una PC, compatible con la tarjeta de adquisición de datos.

13.2 Operación

Para una operación adecuada, considera las siguientes indicaciones:

1. Arma tu dispositivo experimental y coloca los termopares.
2. Conecta los termopares a la USC y posteriormente los conectores de la tarjeta de adquisición de datos a la USC, para lograr la interfase de los termopares con la tarjeta.
3. Conecta la tarjeta, vía un puerto USB, a la computadora.
4. Ejecuta el software del equipo, seleccionando el archivo *Ejercicio C: Régimen transitorio de transferencia de energía térmica*, de la carpeta de rutinas.
5. Ajusta la configuración de la adquisición de datos.
6. Enciende el ventilador y dirij la corriente de aire hacia la aleta, ya sea como corriente cruzada o como corriente paralela.
7. Elije la potencia a la que va a trabajar y enciende el reóstato.
8. Simultáneamente inicia el registro de las temperaturas, seleccionando el botón “adquisición de datos” que cambiará de color.
9. Observa los cambios de las temperaturas de los puntos de medición hasta llegar a la etapa estacionaria del proceso de calentamiento.
10. Determina la velocidad con el anemómetro.
11. Cambia la dirección del ventilador (o apágalo para analizar el efecto de la convección natural, o aléjalo para tener otra velocidad del flujo incidente, o modifica el voltaje del reóstato).
12. Repite los pasos 7 a 11 de este procedimiento, adaptando las operaciones, para cubrir un conjunto de condiciones de operación de acuerdo a la propuesta experimental que hayan acordado estudiar y desean corroborar experimentalmente.

13.3 Principios físicos del funcionamiento

1. Suponiendo un aislamiento perfecto en la zona de la resistencia, el calentamiento en la base de la aleta es equivalente a la potencia suministrada con el reóstato.
2. El flujo de energía térmica en la base de la aleta avanza axialmente, por conducción en la aleta cilíndrica, elevando su energía interna hasta el extremo opuesto a la base. A la vez, parte del incremento de energía interna, que se manifiesta en la elevación de la temperatura, se transfiere al aire por la superficie lateral de la aleta.

El calentamiento del aire desde la superficie lateral de la aleta, debe producir un enfriamiento del metal en esta superficie y sus proximidades, lo cual nos hace suponer que existe una

distribución radial de temperatura en la aleta, es decir, que la temperatura T , no depende solamente de la posición axial, z , sino también de la radial, es decir que $T = T(r, z)$. El valor del número de Biot permite determinar cuándo es posible despreciar los cambios radiales de temperatura y proponer simplemente que la distribución es axial.

- *¿Qué (magnitudes de los) mecanismos de transporte de energía térmica en la superficie lateral de la aleta se comparan en el número de Biot y cuál debe ser su valor para que el cambio radial de la temperatura sea despreciable?*
 - *¿Qué podrías hacer si no se cumple el criterio anterior?*
3. Al cambiar la potencia eléctrica por medio del reóstato, se activa un proceso transitorio que se manifiesta en los cambios de temperatura observados, de cada uno de los termopares en la aleta, hasta llegar a un nuevo estado estacionario, cuando ya ninguno de los termopares cambia su temperatura conforme transcurre el tiempo. Al cambiar la distancia del ventilador a la aleta, apagarlo o incorporar un segundo ventilador, generamos también procesos transitorios, que con el tiempo desembocan en nuevos estados estacionarios.
 - *¿Qué diferencias existen entre los estados estacionarios y los estados de equilibrio termodinámico?*
 - *¿Por qué referirse al estado estacionario como “estado estable” y al estado transitorio como “estado inestable” son errores conceptuales, muy frecuentes en las traducciones de libros de texto al castellano? (Revisa el concepto de “estabilidad”).*
 4. El perfil estacionario de temperaturas a lo largo de la aleta depende del calentamiento eléctrico en la base, del coeficiente de transferencia de calor hacia el aire y de las propiedades térmicas del material (capacitancia y conductividad).
 5. Los perfiles transitorios de temperatura dependen además de la condición inicial y del tiempo transcurrido.

13.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Define la **efectividad de la aleta** desde un punto de vista experimental y realiza experimentos para estimar sus valores.
2. Define la **eficiencia de la aleta** y discute cómo estimar el calentamiento máximo que podría aportar la aleta, bajo una condición de operación determinada.
3. Utiliza el perfil estacionario de temperatura en la aleta para estimar el coeficiente de calentamiento h , para diversas condiciones de frontera en la punta de la aleta.
4. Con la mejor estimación de h del inciso anterior, determina teóricamente la efectividad y la eficiencia de la aleta y compara sus valores con los que propusiste a partir de datos experimentales. Discute la diferencia de los resultados.

14. Aislamientos de tuberías

14.1 Descripción

Una sencilla tubería de acero galvanizado, con un diámetro nominal, por ejemplo, de 1 pulgada, provista de un medidor de flujo de vapor a la salida de la caldera y de un medidor de flujo de condensado a la salida del tubo (ver figura 14.1), es un instrumento apropiado para estudiar las pérdidas de energía térmica hacia el ambiente.



Figura 14.1: Tubería de acero galvanizado, parcialmente recubierta con un aislante térmico.

Un tramo de la tubería se encuentra cubierto con un material aislante y tiene colocados tres termopares tipo K (ver figura 14.2): uno con su sensor muy cerca de la pared externa del tubo de

acero, otro en medio de la capa de aislante, y el tercero en la superficie externa del aislante, en contacto con el aire. Finalmente, otro en el aire ambiente. Es útil también verificar la temperatura de la pared externa de la tubería, muy cerca de los puntos inicial y final de la región aislada, lo cual puede hacerse con un termómetro de radiación infrarroja.



Figura 14.2: Porción de la tubería recubierta con aislante, mostrando las posiciones axiales de tres termopares, localizados en tres posiciones radiales distintas.

14.2 Operación

En una tubería larga, se selecciona un tramo de un metro o más y se cubre con el material aislante (ver figura 14.2). Se abre la llave del vapor y se hace circular vapor de agua saturado procedente de la caldera, a una presión fija, por ejemplo $5 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$. La tubería descarga en un recipiente con el cual se mide el flujo del agua condensada. Se espera a que la lectura de los termopares ya no cambie con el tiempo y entonces se toman sus valores. También se determina la temperatura de la superficie desnuda de la tubería en los puntos inicial y final de la parte aislada, así como los flujos de vapor y de condensado.

Luego, manteniendo el flujo de vapor constante, se quita el aislante y se espera, al menos, el mismo tiempo que anteriormente se empleó para tomar las lecturas en el régimen estacionario. Comparando los valores, se puede estimar el flujo térmico al ambiente, disminuido por el efecto del aislante.

14.3 Principios físicos del funcionamiento

El vapor saturado, proveniente de la caldera, calienta las paredes y éstas el ambiente. La energía térmica del vapor disminuye, causando su condensación, de modo tal que el calor transferido a través de la pared, debe ser equivalente al que se ha requerido sustraer para lograr el flujo de condensados medido a la salida del tubo. Al repetir la experiencia con y sin aislante, la diferencia en el flujo de condensado indica la diferencia del flujo térmico debido al aislante. La temperatura de la superficie exterior del recubrimiento aislante disminuye proporcionalmente al espesor del mismo.

14.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Determinar la temperatura de la superficie externa, cuando el espesor está fijo (problema de operación)
2. Estimar el espesor que produce una temperatura requerida en la superficie externa (problema de diseño).
3. Encontrar el espesor óptimo del aislante, es decir, aquel que optimiza el espesor del aislamiento térmico, considerando los costos del aislante y los de la pérdida de energía térmica.

15. Transitorios de temperatura en sólidos cuasiesféricos

15.1 Descripción

Geoméricamente, un cuerpo esférico es cualquier cuerpo cuya superficie se encuentra a una distancia constante de un punto interior único llamado centro.

Un cuerpo aproximadamente esférico, como una manzana o una papa, es preparado insertando termopares o termómetros hasta diversas posiciones radiales, uno en el centro y al menos otros dos: uno a la mitad entre centro y la superficie y otro atravesando casi todo el cuerpo, hasta una posición muy cercana a la superficie opuesta a la inserción, cuidando no perforar dicha superficie, ver figura 15.1. El objeto se sumerge en un calorímetro o baño térmico agitado a temperatura constante, distinta de la temperatura ambiente, y se captura la temperatura de los tres termómetros, simultáneamente, conforme transcurre el tiempo, verificando que la temperatura del baño térmico permanezca constante.

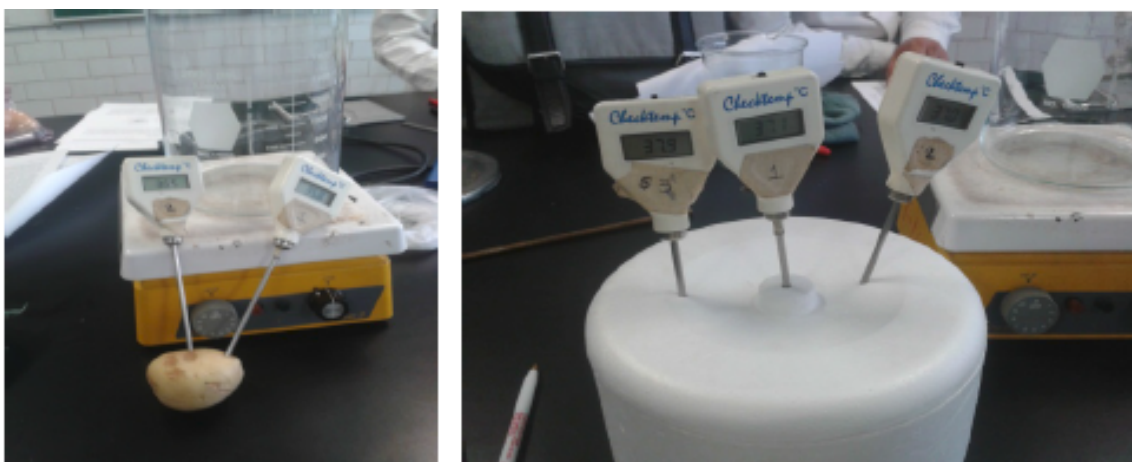


Figura 15.1: (a) Sólido aproximadamente esférico con dos termómetros insertados. (b) Calorímetro cerrado con un sólido preparado con tres termómetros en su interior.



Figura 15.2: Elementos para la determinación del coeficiente de conductividad térmica del sólido.

La temperatura del calorímetro puede ser la de una mezcla de hielo y agua o la de un baño con cabezal de temperatura constante, para temperaturas superiores a la temperatura ambiente.

Si se dispone de una USC, se utilizan termopares, que se conectan a ella y la captura se efectúa con el apoyo una tarjeta de adquisición de datos, como interfase para transformar la señal, y una PC, compatible con la tarjeta. Si no se cuenta con una USC, se capturan los datos manualmente, elaborando previamente la hoja de datos correspondiente.

15.2 Operación

1. Inserta los termopares, midiendo la dirección y la profundidad de la inserción, para determinar las distancias radiales a las que se medirá la temperatura.
2. Conecta los termopares a la USC, siguiendo el procedimiento detallado para el instrumento y ajusta la configuración de la adquisición de datos. Alternativamente, prepara la hoja de datos para capturar manualmente las temperaturas.
3. Verifica que todos los termopares en el sólido marquen la temperatura ambiente y que la temperatura del baño permanezca constante, unos 20°C por arriba o por debajo de la temperatura del cuerpo.
4. Inicia el registro de las temperaturas, seleccionando el botón “adquisición de datos” que cambiará de color, si este registro se hace con la USC. Alternativamente, verifica que las temperaturas del cuerpo y del baño sean distintas y permanezcan constantes. Toma los datos de esta condición inicial.
5. Sumerge completamente el cuerpo esférico, con sus termopares, en el baño térmico.
6. Inicia manualmente el registro de las temperaturas y los tiempos, con suficiente frecuencia en la etapa inicial, para que la temperatura del termopar cercano a la superficie no cambie demasiado, de una lectura a otra (queremos ver el régimen transitorio).
7. Registra los cambios de las temperaturas en los puntos de medición hasta llegar cerca de la etapa estacionaria del proceso de calentamiento o enfriamiento.
8. De ser necesario, utiliza una rodaja del material del sólido para determinar su coeficiente de difusividad térmica experimentalmente, como se muestra en la figura 15.2 .

15.3 Principios físicos del funcionamiento

Cuando un cuerpo esférico, a temperatura constante, se sumerge en un fluido en reposo o perfectamente agitado, que se mantiene a otra temperatura constante, la esfericidad del cuerpo hace posible que la transferencia de calor ocurra con igual extensión en toda la superficie. El flujo de calor es en la dirección normal a la superficie del cuerpo, es decir, en la dirección radial. El resultado del transporte de energía térmica, es el cambio continuo de la temperatura en el interior del cuerpo, de modo que las superficies isotérmicas son también esféricas y van desplazándose hacia el centro de la esfera.

- Una vez que el cuerpo, en toda su extensión, ha llegado a una temperatura uniforme dentro del calorímetro, se puede realizar una segunda experiencia extrayéndolo con los termómetros o termopares insertados, cada uno en su sitio en el interior del cuerpo esférico y fijados a la tapa del calorímetro. Se puede secar la superficie sólida con una toalla de papel, con cuidado para no aflojar los termopares insertados, y capturar el proceso del regreso de la temperatura del sólido a la temperatura ambiente. Se puede usar un ventilador para acelerar la velocidad del proceso.
- También es posible sustituir el cuerpo esférico por cuerpos aproximadamente cilíndricos, como zanahorias o pepinos, preferentemente con relaciones de aspecto $L/R > 20$.
 1. ¿Por qué la última condición sobre R/L es importante y a qué distancia axial habría que colocar los termopares?
 2. ¿Cómo se podría extender la experiencia cuando las relaciones de aspecto de los cuerpos aproximadamente cilíndricos no satisfacen la condición señalada arriba? es decir, ¿dónde colocar termopares y cómo incorporar los **efectos multidimensionales**?

15.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Compara las temperaturas medidas a distintos tiempos con las que corresponden a las soluciones gráficas del calentamiento de objetos esféricos de los libros de texto.
2. Determina experimentalmente la capacidad calorífica del sólido y estima su energía térmica a determinado tiempo, por el método de sumergirlo en un baño térmico aislado, para observar la temperatura final del sólido, cuando es igual a la del líquido. Compara esta determinación con la solución gráfica de los libros de texto.

16. Intercambiadores de calor

16.1 Descripción

En todo intercambiador de calor existen dos corrientes fluidas: el fluido caliente, que entra a una temperatura elevada y sale a una temperatura menor y el fluido frío, que entra a una temperatura baja y sale a una temperatura mayor. También es posible que el intercambio de energía interna no sea debido exclusivamente al calor sensible (cambio de temperatura de ambas corrientes), sino total o parcialmente al calor latente, cuando alguna de las dos corrientes cambia de fase. El acondicionamiento y regulación de estos flujos en el laboratorio requiere, independientemente del intercambiador de calor que se esté utilizando, una *unidad de acondicionamiento, medición, control y captura de información* (UAMCI), con la cual se controlan y miden las temperaturas y los flujos volumétricos de los dos fluidos (ver figura 16.2). Además, acoplamos una tarjeta de adquisición de datos a esta unidad, para capturar la información en una computadora. Así, cada prototipo de intercambiador de calor es un módulo que se monta en la UAMCI, para una experiencia y se sustituye por otro con gran facilidad.

La entrada y la salida del fluido caliente o del frío pueden ser intercambiadas, dando lugar a modos de operación a contracorriente o en paralelo. El intercambiador de tanque agitado puede operar con tres fluidos: uno circulando por el serpentín, generalmente de calentamiento, otro contenido en el tanque agitado, que puede operar por lotes o en flujo continuo y uno más por la chaqueta, que puede ser de calentamiento o enfriamiento. Esto da una mayor versatilidad y complejidad al intercambio de calor en este módulo.

16.2 Operación

Se monta un intercambiador de calor en la UAMCI, conectando las mangueras de entradas y salidas de flujo, de acuerdo al modo de operación que se quiera experimentar, ver figura 16.3. Se debe asegurar que el fluido frío tenga un flujo volumétrico constante. Esto se puede lograr forzándolo con una bomba peristáltica conectada desde un recipiente de alimentación.

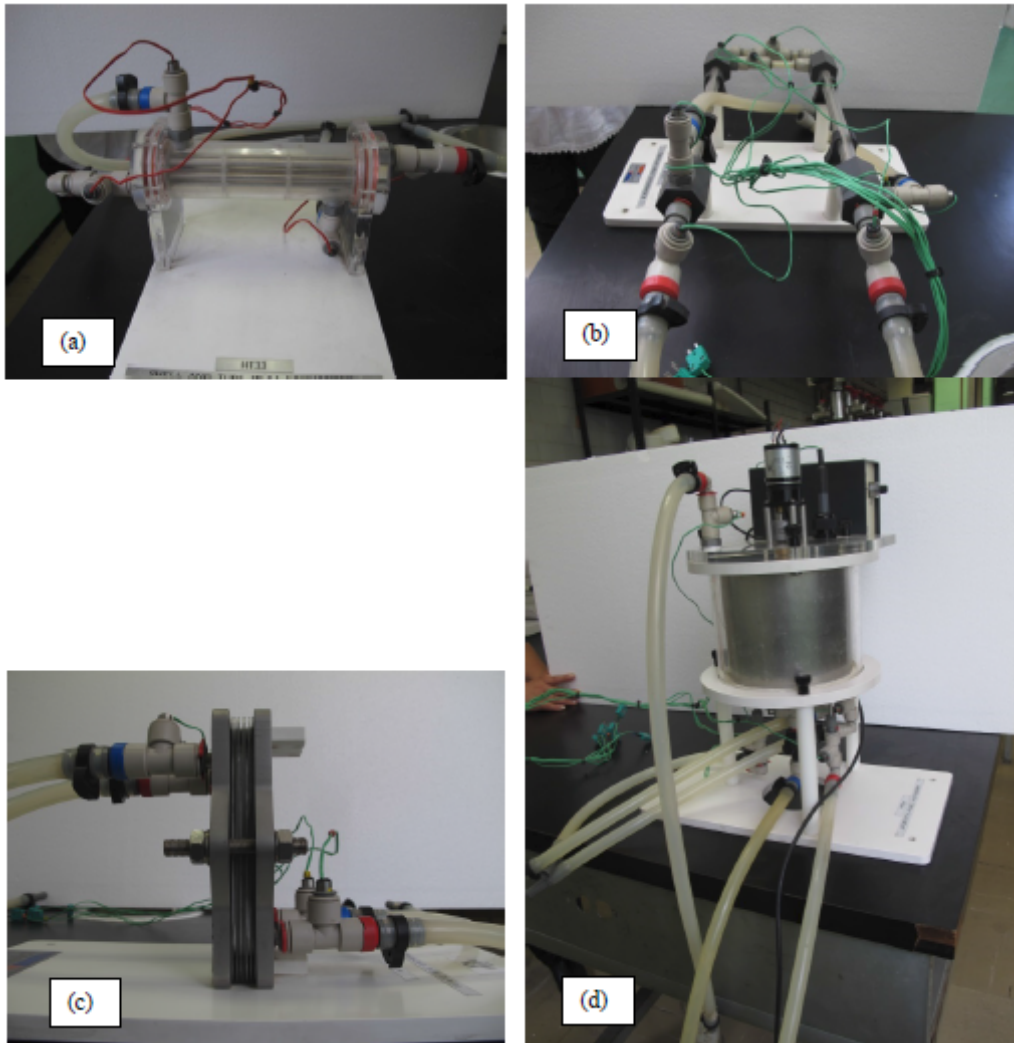


Figura 16.1: Módulos intercambiadores de calor: (a) de tubos y coraza, (b) de tubos concéntricos, (c) de superficies extendidas y (d) de tanque agitado con serpentín y chaqueta.

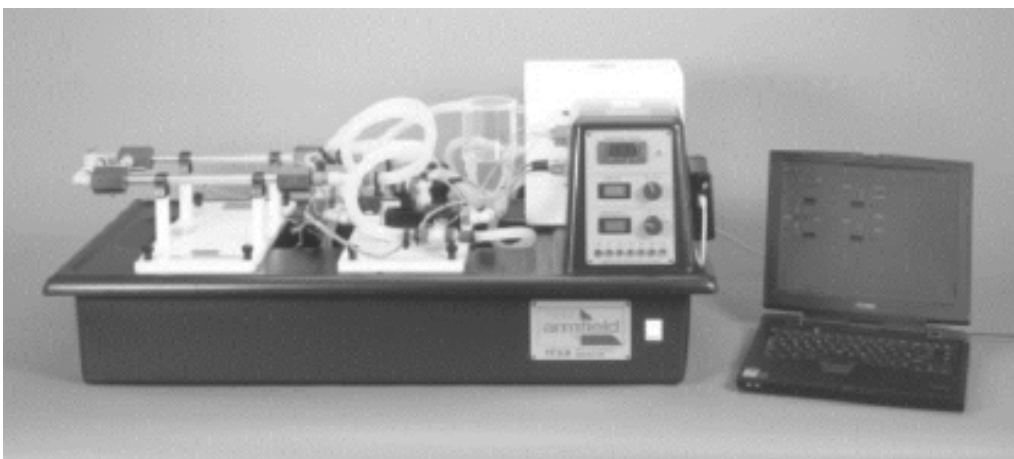


Figura 16.2: Unidad de acondicionamiento, medición, control y captura de información (UAMCI), acoplada al intercambiador de tubos concéntricos.

16.3 Principios físicos del funcionamiento

Como referencia, consideremos el módulo del intercambiador de tubos concéntricos. El intercambio de energía interna a través de la pared entre el fluido caliente y el frío, ocurre venciendo sucesivamente la resistencia por convección de la película del fluido caliente, la resistencia por conducción en la pared sólida y la resistencia por convección en la película del fluido frío. La resistencia total es, entonces, la suma de las tres resistencias anteriores, como corresponde a un esquema de resistencias en serie.

- ¿La suma de estas tres resistencias cambiará si la operación del intercambiador se realiza a contracorriente o en paralelo, con los mismos flujos volumétricos y las mismas temperaturas iniciales, en ambos casos?
- ¿De qué dependen, entonces, los valores de las resistencias?
- ¿De qué depende, entonces, el mayor intercambio observado en la operación a contracorriente?

En el análisis global del intercambiador, la energía interna perdida por el fluido caliente, entre la entrada y la salida, debe ser igual a la energía interna ganada por el fluido frío, también entre la entrada y la salida, y debe también ser igual al calor total que atraviesa la pared del tubo. En estas dos igualdades, que representan el principio de conservación de la energía, se basan todos los métodos de diseño de los intercambiadores de calor. En las experiencias del laboratorio podemos poner a prueba los conceptos anteriores. Si encontramos discrepancias, hemos de tener presente, además de los errores asociados a la medición, la posibilidad de pérdidas de energía interna hacia el ambiente.

- ¿Cuándo sería preferible hacer circular el fluido caliente por la región anular y el fluido frío por el tubo interno?
- ¿Cuándo lo contrario?

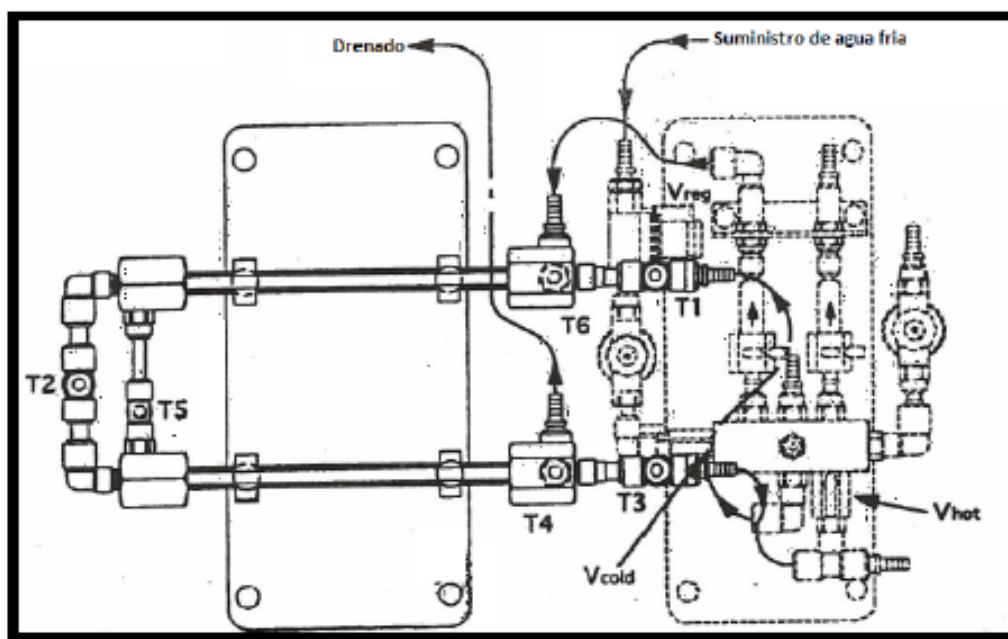


Figura 16.3: Diagrama que muestra la localización de los termopares y de los flujos de entrada y salida, con el intercambiador de tubos concéntricos. Tomado del instructivo del equipo Armfield.

16.4 Algunos objetivos de las experiencias

Se pueden estimar coeficientes globales de transferencia de energía térmica, comparar eficiencias de modos de operación, verificar los métodos de diseño, analizar transitorios como arranque y apagado, comparar con resultados de simulaciones numéricas, etc... Varios de estos objetivos pueden requerir la información particular suministrada por los fabricantes en los manuales de los módulos, como diámetros y áreas de transferencia, materiales de construcción y otros detalles. Los manuales del fabricante deben estar disponibles para su consulta en el laboratorio.

17. Celda de Stefan para la difusión de un vapor en aire

17.1 Descripción

Una “T” de tubo de vidrio, conocida como tubo de Stefan, se compone de un tubo capilar dispuesto verticalmente, cerrado en el fondo y conectado a un tubo transversal de mayor diámetro, en la parte superior (ver figura 17.1). El tubo de Stefan se coloca en un baño de agua a temperatura constante, equipado con un controlador de temperatura, un termómetro y un catetómetro para medir la posición del menisco (ver figura 17.2). La sustancia de trabajo es un líquido volátil como acetona, éter o alcohol etílico. Una corriente de aire pasa a través de la rama horizontal, lavando cualquier residuo de los vapores del líquido volátil que se evapora en la rama vertical.

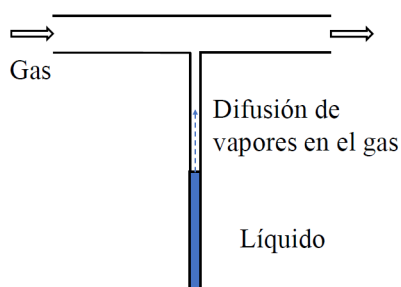


Figura 17.1: Esquema del tubo de Stefan para la difusión de vapores.

17.2 Operación

1. Un extremo de la rama horizontal del tubo de Stefan se deja abierta al aire ambiente y el otro se conecta a una corriente continua de aire por medio una manguera, ya sea impulsada por una toma de aire comprimido o succionando el aire ambiente con una toma de vacío.
2. Se inserta el tubo de Stefan en su sitio y se enfoca con el telescopio del catetómetro, hasta que se distinga claramente. Se nivela el baño.

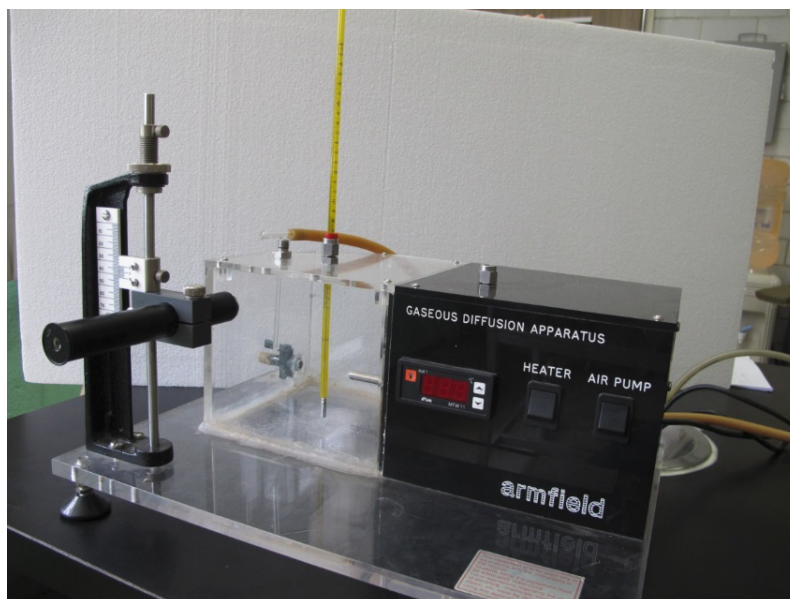


Figura 17.2: Aparato de difusión de Stefan con catetómetro, baño de temperatura constante, tubo de Stefan, termómetro de mercurio y unidad de calentamiento.

3. Con una jeringa, el fondo del capilar se llena inicialmente con el líquido volátil, hasta una altura unos 2 cm debajo de la rama horizontal.
4. El tubo de Stefan se sumerge en el baño térmico a una temperatura constante, cercana a la temperatura ambiente.
5. Inmediatamente, con el telescopio del catetómetro se visualiza la marca del ocular, que se localiza coincidiendo con el nivel del menisco del líquido en el capilar, al desplazar verticalmente el catetómetro, en su corredera.
6. Se mide la altura del nivel del líquido al inicio de la experiencia.
7. Cuando se conecta el flujo de aire por el tubo transversal se inicia la cuenta del tiempo.
8. Se mide la posición del menisco que va disminuyendo conforme transcurre el tiempo.

A partir de estas medidas se puede determinar el valor del coeficiente de difusividad binaria de los vapores del soluto elegido en aire.

17.3 Principios físicos del funcionamiento

A la temperatura del baño, la presión de vapor del líquido volátil es elevada y la evaporación del mismo es relativamente rápida. Los vapores evaporados se difunden en la parte superior del capilar hasta alcanzar la salida a la rama horizontal, donde son arrastrados por la corriente de aire, provocando que su concentración sea prácticamente cero. Esto hace que el sistema no alcance el equilibrio termodinámico, sino que se mantenga el proceso difusivo en el capilar. El flujo de vapor evaporado es equivalente a la cantidad de líquido que desaparece del capilar, el cual es medido por el descenso del menisco.

1. *¿Sería razonable proponer la hipótesis de soluciones diluidas?*
2. *¿Cómo modificarías el arreglo de la celda de Stefan para trabajar con un solvente que no sea el aire?*
3. *¿Cómo modificarías el diseño de la celda de Stefan para facilitar la inyección del líquido en el tubo capilar?*

17.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Determinar el valor del coeficiente de difusividad binaria de los vapores de un soluto en el aire.
2. Determinar el coeficiente de difusividad binaria como función de la temperatura.
3. Preparar mezclas binarias de compuestos volátiles no reactivos y determinar los valores de sus coeficientes de difusividad binaria a partir de la condición de saturación en la superficie líquido-vapor, para ambos solutos.
4. Proponer el modelo de difusión de Stefan-Maxwell para la difusión ternaria de la mezcla del inciso anterior, resolverlo y ajustar los resultados del modelo a los valores experimentales de los coeficientes binarios de difusividad.
5. Discutir un procedimiento experimental para evaluar la condición de frontera de saturación en la superficie líquido-vapor.
6. ¿Podrá existir difusión en fase líquida? y si esto ocurre, ¿cuál será la condición de frontera que sustituye a la condición de saturación en la superficie líquido-vapor?

18. Celda de difusión de un soluto en fase líquida

18.1 Descripción

Un instrumento para medir la difusión de un soluto en un solvente se muestra en la figura 18.1. Consta de una celda en forma de bastón, con entrada de embudo en el extremo más largo y con una membrana o diafragma de plato perforado en el otro (ver figura 18.2). La celda contiene una solución concentrada del soluto a una concentración conocida. El solvente puro se encuentra en un vaso cuyo volumen es mucho mayor que el de la celda. El vaso está provisto de un sensor de conductividad eléctrica y de un agitador magnético. Este conjunto está situado sobre una parrilla de agitación, como se aprecia en la figura 18.1.

18.2 Operación

1. Considera los valores típicos del coeficiente de difusividad binaria, subsección 3.5.1, para estimar el tiempo requerido por el experimento para poder aplicar una hipótesis de cuasi-estacionariedad en el modelo, que conduzca a determinar el coeficiente de difusión binaria. Recurrir al desarrollo teórico elaborado en la sección 4.6.
2. Prepara una hoja de datos, cubriendo el tiempo requerido en el punto anterior.
3. Dependiendo del soluto a ser empleado, prepara una solución de una concentración conocida. Algunos ejemplos de soluto son el cloruro de sodio o el de potasio, el sulfato doble de aluminio y potasio (alumbre), la sacarosa y la glucosa, entre otros. El seguimiento de la concentración en el solvente, por medio de un sensor de conductividad eléctrica, está restringido a las soluciones iónicas fuertes (las tres primeras) en agua, requiriéndose refractometría para las dos últimas, que contienen azúcares. También puede experimentarse con una solución de resina damar en aguarrás bidestilado, cuidando el lavado profundo de los instrumentos, con aguarrás, tinnher y acetona, al terminar la experiencia.
4. Coloca la celda vacía en el vaso vacío, fija el tope de la rama larga de la celda y marca en el exterior del vaso la posición superior del plato perforado.
5. Retira la celda vacía, cuidando no mover más la posición del tope y llena el vaso con solvente, hasta la marca trazada en el punto anterior.

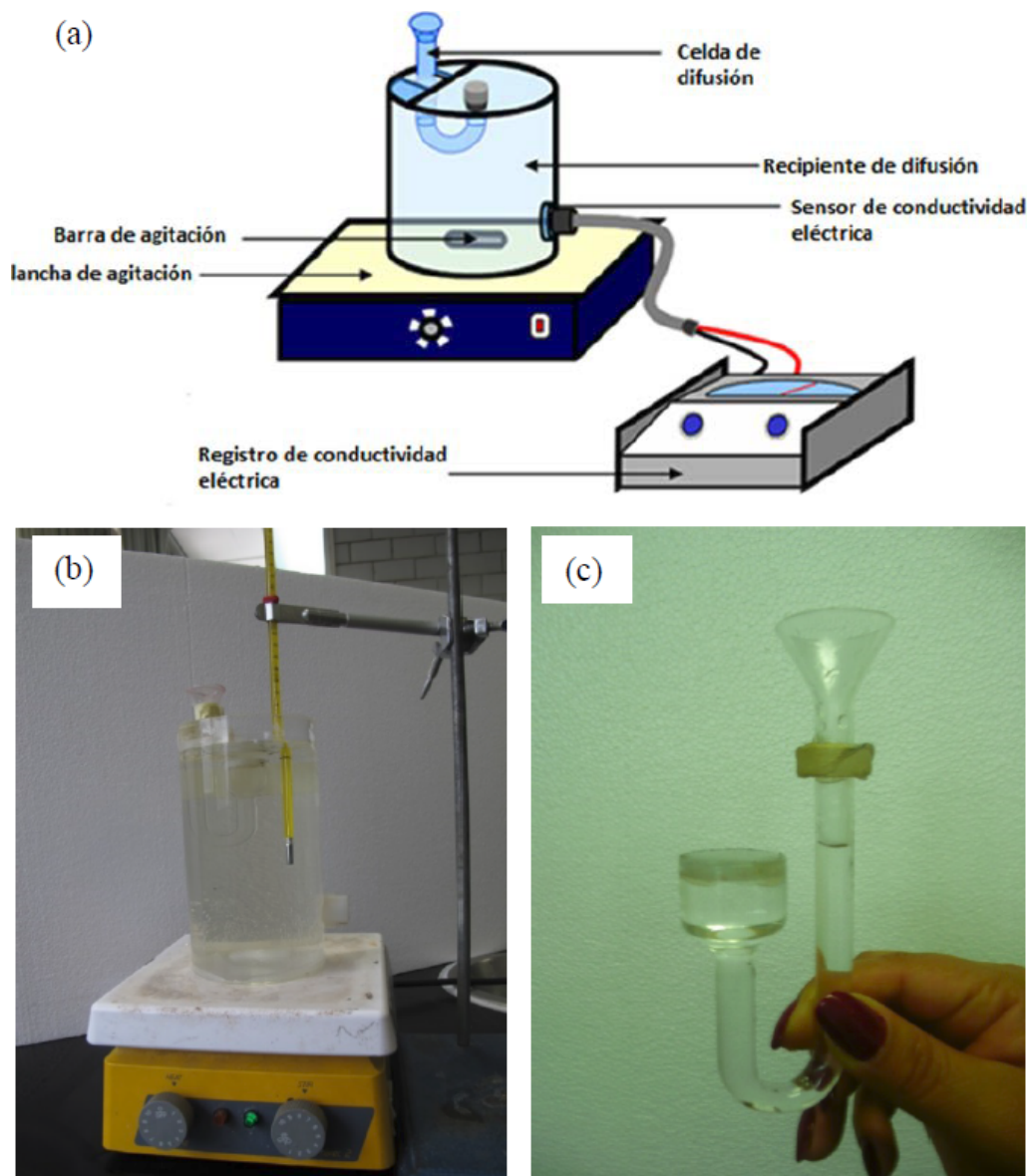


Figura 18.1: Instrumento para la difusión de líquidos en líquidos: (a) Piezas del instrumento. (b) Recipiente en la plancha de agitación con celda de difusión y termómetro. (c) celda de difusión con solución concentrada.

6. Llena la celda con la solución concentrada ya preparada, cuidando que no queden burbujas dentro de la celda, debajo del plato perforado, lo cual reduciría el área efectiva de transferencia.
7. Retira el exceso de solución arriba del plato perforado con un papel filtro o absorbente, cuidando que no escurra por la pared externa de la celda.
8. Inicio del experimento: Introduce verticalmente la celda en el vaso, cuidando que el nivel del solvente quede entre dos y tres milímetros arriba de la superficie superior del plato perforado (ver figura 18.3).
9. Activa el agitador magnético y simultáneamente empieza a correr el tiempo del experimento. En la etapa inicial toma datos con mayor frecuencia, de acuerdo con los cambios que indica el registro de conductividad eléctrica.

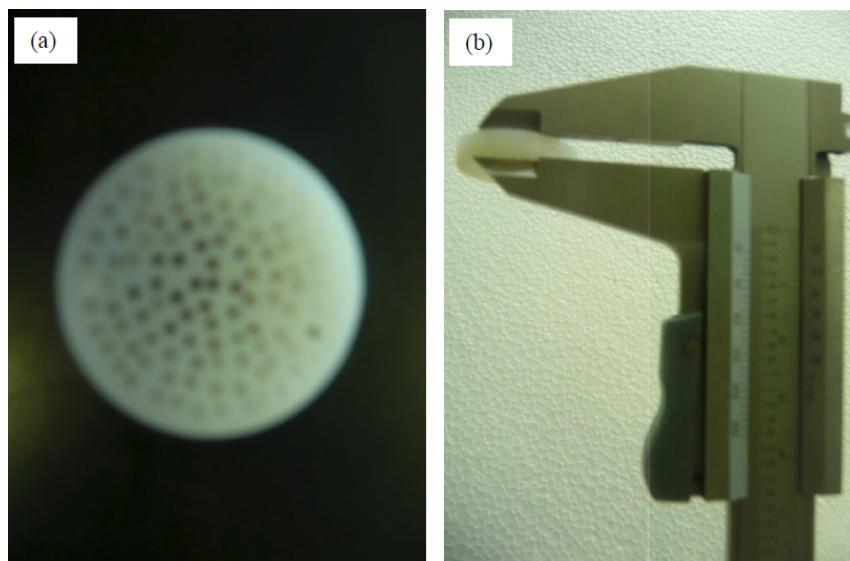


Figura 18.2: Plato perforado: (a) vista superior. (b) vista y dimensión laterales.

10. Después de un período inicial de tiempo, cuando ya has capturado unas diez lecturas de datos, disminuye la frecuencia de muestreo a la quinta parte de la frecuencia anterior, toma otros diez datos y disminuye nuevamente la frecuencia, ahora a la mitad de la frecuencia actual. Esto no es imperativo, pues de acuerdo con la dinámica de tu experimento, puedes generar tu propia estrategia de intervalos de tiempo de muestreo. Lo importante es que puedas tener suficientes datos para utilizarlos con dos modelos transitorios: el de los tiempos cortos y el cuasiestacionario. Así finaliza la experiencia de difusión, que pudo haber sido de varios días de duración.
11. En los dos rangos de valores (a tiempos cortos y cuasiestacionario) se realizan calibraciones, partiendo del último dato del sensor, como la concentración más elevada y diluyendo para obtener unas cinco a diez concentraciones intermedias, en cada una de las dos zonas. También pudiera ser adecuado realizar una sola calibración, cuidando que el número de datos de concentración sea semejante para las dos regiones. *¿Por qué es importante esta consideración? ¿Cuál de las dos estrategias de calibración es preferible? ¿qué has establecido como criterio para determinar tu preferencia?*

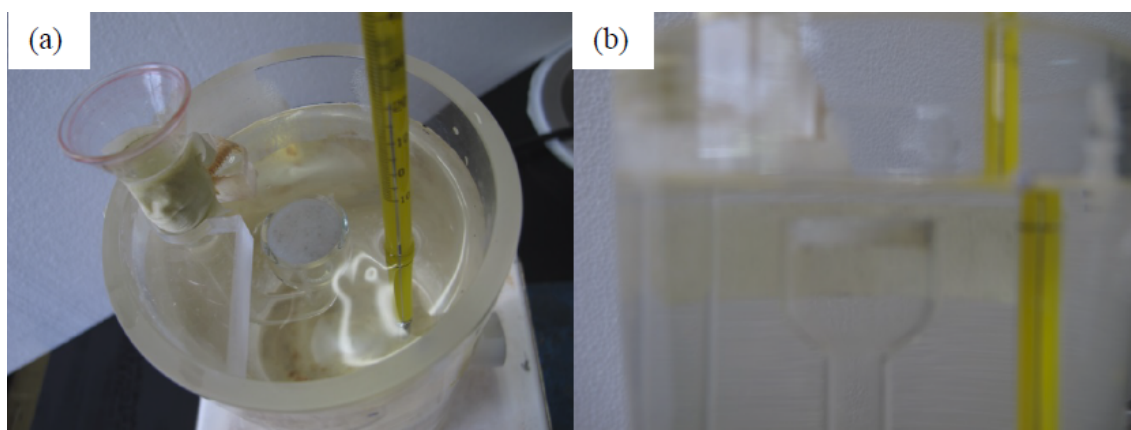


Figura 18.3: Inmersión de la celda en el vaso. (a) Vista superior. (b) Vista lateral.

18.3 Principios físicos del funcionamiento

1. Al llenar la celda con la solución concentrada, el tubo en U, colocado verticalmente tendrá, en ambas superficies de líquido, la presión atmosférica. Una de estas superficies es la salida del diafragma de plato perforado [ver figuras 18.2 y 18.1(c)]
2. Al retirar el exceso de solución de la parte superior del plato perforado, con el papel absorbente, llegamos a lo que será la condición inicial del experimento, es decir, los capilares del plato perforado estarán saturados de la solución concentrada.
3. Al introducir la celda en el vaso, hasta la posición mostrada en la figura 18.3b, la solución concentrada se encuentra en contacto con el solvente puro en los extremos superiores de los orificios capilares, a la presión atmosférica (esta es una buena aproximación, en el orden de unos 3 mm de agua).
4. Al accionar el agitador magnético y tomar el primer dato de concentración, con el sensor elegido (nuestro transductor) iniciamos el experimento y disparamos el cronómetro.
5. El proceso de transferencia de masa es puramente difusivo en los tubos capilares (los orificios), puesto que la presión en ambos lados del tubo en U es esencialmente la atmosférica más la hidrostática. La difusión es binaria y es conveniente pensar en las siguientes posibilidades:
 - a) *El soluto se mezcla en la superficie superior del plato perforado con el solvente del vaso, en la película de 2 a 3 mm de espesor, arriba del plato perforado.*
 - b) *El solvente se difunde desde el vaso, al interior de los orificios capilares, expulsando al soluto por contradifusión binaria, hacia el volumen de solvente en el vaso.*
 - c) *¿Será posible que el solvente se introduzca por difusión hasta la película por debajo del plato perforado, alterando la composición de la solución concentrada en esa película? ¿cómo podría ser posible esto, y en el caso positivo, en cuánto tiempo comenzaría a cambiar la concentración de la solución concentrada de la celda?*
 - d) *¿Cuáles son las posibles condiciones a la frontera en las superficies superior e inferior del plato perforado? ¿Cómo se relacionan con la discusión del punto anterior?*
 - e) *Para una de estas condiciones a la frontera, ¿cuál es la solución analítica de un modelo cuasi-estacionario?*
 - f) *¿Se puede resolver el problema de difusión proponiendo un coeficiente de difusión efectivo, a la manera de los estudios de difusión en medios porosos?*
 - g) *¿Cómo se modificaría el planteamiento anterior y cuál sería la solución, si esto es posible?*
 - h) *¿Es correcto, en el punto anterior, proponer la hipótesis de soluciones diluidas?*

18.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Revisar los modelos y los procedimientos de integración que llevan a las soluciones dadas por las ecuaciones (4.6.7) y (4.6.12). La primera es adecuada para transitorios incipientes, en tanto que la segunda es aplicable a transitorios completos.
2. A partir de los órdenes de magnitud, mínimo y máximo, de los coeficientes de difusividad de la tabla de la sección 3.5.1, estimar la duración de la fase transitoria incipiente, $0 < t < \tau_I$, así como la duración de la etapa transitoria “completa”, $0 < t < \tau_T$ y considerando ambos valores límites, determinar los intervalos de tiempo de muestreo para tomar alrededor de siete a diez datos experimentales abarcando la fase transitoria incipiente y alrededor, también, de siete a diez datos abarcando la etapa transitoria completa. Elaborar la hoja de datos de laboratorio incluyendo los valores de los tiempos de muestreo.
3. Ajustar los valores de los primeros datos a la solución (4.6.7) y ajustar los valores de los datos para los intervalos de tiempo mayores a la solución (4.6.12), para encontrar, en ambos casos, los coeficientes de difusividad.

4. Elaborar un análisis de errores y determinar las cifras significativas de los dos coeficientes de difusividad, para encontrar si ambos pueden ser considerados aproximaciones a un sólo valor del coeficiente de difusividad.
5. Comparar los resultados anteriores con estimaciones teóricas del coeficiente de difusividad y establecer las conclusiones de la experiencia.

19. Disolución de un sólido esférico

19.1 Descripción

Una esfera de alumbre (sulfato doble de aluminio y potasio dodecahidratado, $AlK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$), sostenido en una redecilla de polietileno, se sumerge en un recipiente amplio, lleno de agua destilada, provisto de un sensor de conductividad eléctrica y de un agitador magnético, como se aprecia en la figura 19.1. La superficie de la esfera en contacto con el solvente se disuelve lentamente, provocando una disminución del diámetro de la esfera, conforme transcurre el tiempo.

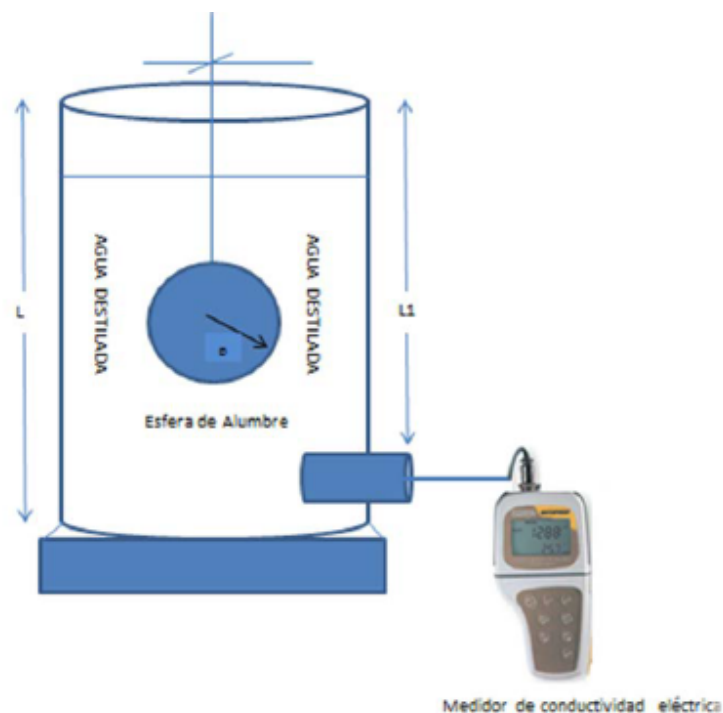


Figura 19.1: Diagrama de un vaso donde se disuelve una esfera sólida de alumbre en agua.

19.2 Operación

1. Se lija un trozo grande de alumbre, aproximándolo a una forma esférica, con un diámetro aproximado de unos 4 a 7 cm.
2. Se introduce la esfera en una redecilla de polietileno y se sujeta con unas pinzas de tres dedos, arriba del recipiente cargado ya con agua [ver figura 19.2(a)].

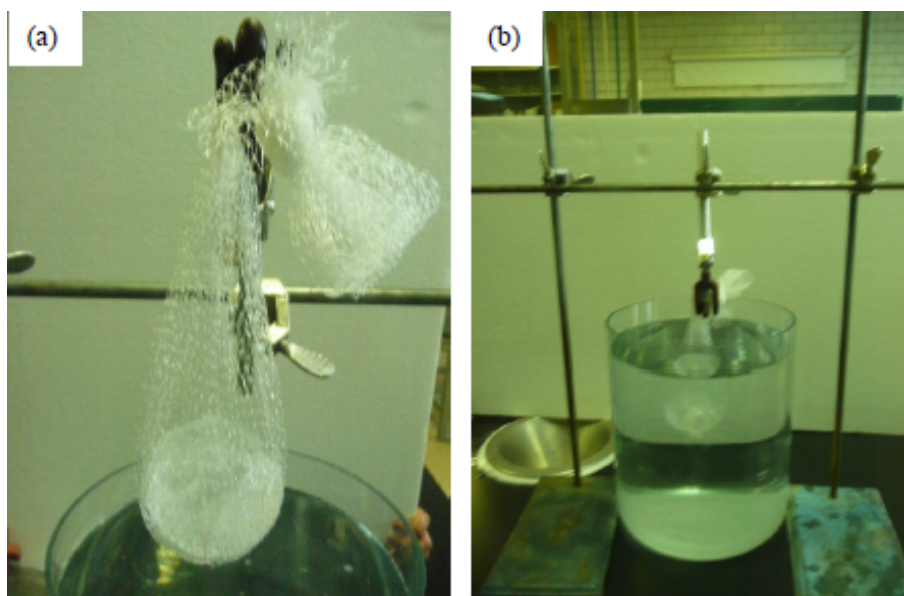


Figura 19.2: Diagrama de un vaso donde se disuelve una esfera sólida de alumbre en agua.

3. Al tiempo inicial del experimento, se gira la pinza que sostiene la redecilla, sumergiendo la esfera de alumbre en el centro del recipiente, como se aprecia en el diagrama de la figura 19.1 y en la figura 19.2(b) en la cual no se ha introducido el sensor de conductividad eléctrica.
4. Si no se coloca un agitador magnético, la disolución procede generando un patrón de convección libre, natural o espontánea, si se cuenta con un agitador magnético en el fondo del recipiente, o con un impulsor de flecha accionado por un motor externo, se introduce un efecto de convección forzada, sobrepuesto al de la convección libre y casi siempre más importante que este último. En este caso la rapidez de disolución de la esfera es mayor que en el primero.

19.3 Principios físicos del funcionamiento

El alumbre es una sal que se disuelve totalmente en el agua no saturada, formando una solución iónica. La saturación se alcanza como condición de frontera, en la superficie de la esfera. Las soluciones de alumbre tienen una densidad mayor que la densidad del agua. El aumento de la densidad de la solución cercana al sólido genera un patrón de convección natural, generando un flujo que desciende al fondo del recipiente, debajo de la esfera, y provocando una recirculación que abarca a todo el fluido del recipiente. Los cambios detectados por el sensor de conductividad eléctrica dependen de la posición donde se haya colocado el sensor.

19.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Observar los patrones de recirculación natural y estimar el valor de la velocidad descendente
2. Monitorear la conductividad eléctrica en un punto como función del tiempo

3. Elaborar una gráfica de conductividad eléctrica vs. concentración de alumbre y otra de concentración de alumbre vs. densidad de la solución.
4. Elaborar un modelo de la convección libre en la zona inferior a la esfera, para predecir la velocidad media de la solución que se precipita al fondo del recipiente.
5. Encontrar el valor del coeficiente global de transferencia sólido-líquido del alumbre, a partir de la teoría de la capa límite alrededor de una placa plana, por un solo lado.

20. Torre de absorción empacada

20.1 Descripción

La torre de absorción está fabricada en acrílico, con dimensiones de 75 mm de diámetro y 1.4 m de longitud, por cada sección. La torre tiene dos secciones empacadas con anillos Rasching de vidrio de 10 x 10 mm, ocupando un volumen de 7 L, ver figura 20.1. La presión se mide en tres sitios, donde están situadas las bridas, con dos manómetros que están en el tablero de instrumentos, uno es de agua y el otro de mercurio, para cubrir dos rangos de presión. Se bombea agua del tanque colector a la torre, pasando por un medidor de flujo. El gas se toma de un cilindro a presión y se mide su flujo volumétrico.

20.2 Operación

Se introduce el gas, que es una mezcla de CO_2 y aire. Se puede ajustar la composición de la mezcla por medio de las válvulas de los rotámetros. Un compresor transporta la mezcla a la parte inferior de la columna, en ella se separa una parte del CO_2 a contracorriente con el agua. El CO_2 es absorbido por el agua que desciende por la columna y se acumula en un depósito colector. Para separar el CO_2 absorbido en el agua, se transporta la disolución desde el depósito colector hasta un depósito a vacío y se titula.

- ¿Con qué solución se acostumbra titular la concentración de CO_2 en agua?
- ¿Qué factores intervienen en la selección de la concentración de la solución tituladora?

20.3 Principios físicos del funcionamiento

El flujo descendente de agua, a contracorriente con la mezcla gaseosa en la columna empacada con anillos Rasching (ver figura 20.2), proporciona un contacto íntimo entre las fases líquida y gaseosa, al aumentar el área interfacial donde ocurre la transferencia de masa.

- ¿Cuáles serán los efectos del aumento del flujo (descendente) de agua?
- ¿Cuáles serán los efectos del incremento del flujo (ascendente) de la fase gaseosa?
- ¿En qué consiste y en qué condiciones ocurrirá el fenómeno conocido como inundación de la columna?



Figura 20.1: Torre de absorción con su tablero de instrumentación.



Figura 20.2: Anillos Rasching de vidrio de 10 x 10 mm, en las secciones empacadas de la columna.

20.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Elaborar balances integrales estacionarios de masa para las componentes químicas.
2. Determinar el valor del coeficiente volumétrico de transferencia de masa para CO_2 .
3. Estimar el área interfacial líquido-gas específica efectiva, para la transferencia de masa.
4. Determinar el coeficiente interfacial de transferencia de masa.
5. Responder las preguntas de la sección 20.3.

21. Evaporación isobárica

21.1 Descripción

Un conjunto de recipientes cilíndricos de vidrio, de distintos diámetros (por ejemplo de 5, 10 y 15 cm.), pero con capacidades totales lo más semejantes posible (por ejemplo, alrededor de 250 o 300 ml.), se colocan en sendas balanzas digitales, graduadas hasta las centésimas de gramo, en el interior de una campana de extracción de gases. A cada recipiente se le coloca un termómetro de bulbo, muy cerca del fondo, pero sin tocarlo, para que el termómetro no altere el peso marcado por la balanza. Los termómetros se fijan en posiciones de manera que puedan ser leídos desde el exterior de la campana, sin tener que abrirla. El conjunto de recipientes puede replicarse con otro similar, pero recubierto con un material aislante para evitar la transferencia de calor desde el medio ambiente a través de las paredes y el fondo (ver figura 21.1). Cerca de los recipientes pueden colocarse uno o dos termómetros más, para registrar la temperatura ambiente.

Se pueden estudiar otros efectos modificando los recipientes o los líquidos a evaporar. Usualmente puede emplearse la acetona grado técnico o el alcohol etílico, pero otros líquidos volátiles, como el éter etílico o el éter isopropílico, también son adecuados. No usar alcohol metílico, por los daños a la salud que sus vapores pueden causar (indagar cuáles son). Un recipiente de gran porosidad, como el barro sin barniz, permite estimar el efecto del incremento del área de transferencia (ver figura 21.2).

21.2 Operación

1. Se arregla el conjunto de recipientes de acuerdo a la descripción anterior y a los objetivos de la experiencia (ver figuras 21.1 y 21.2).
2. Se taran las balanzas a cero, con los recipientes vacíos colocados sobre ellas.
3. Se vierten 250 ml. del líquido volátil seleccionado en tantas probetas como recipientes se hayan dispuesto para realizar el experimento.
4. Se vacía simultáneamente el contenido de cada probeta en cada uno de los recipientes.
5. Se baja el vidrio de la campana de extracción, dejando una rendija de unos 2 cm en la parte inferior.

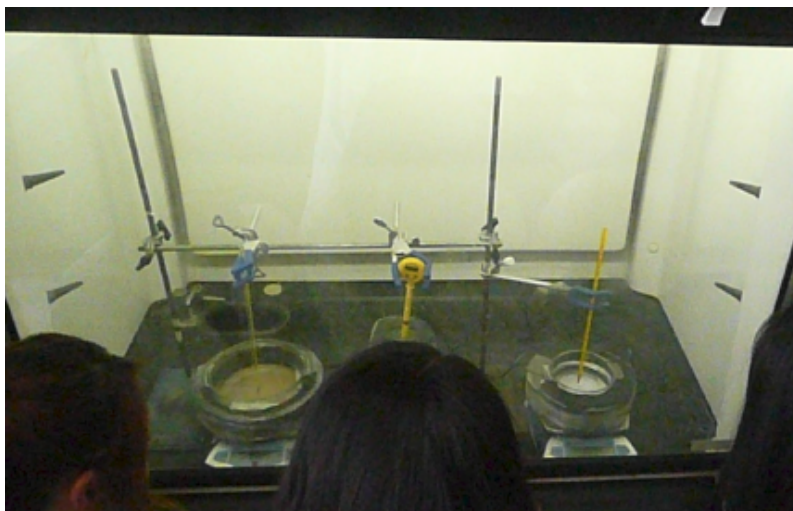


Figura 21.1: Tres recipientes de distinto diámetro con paredes aisladas, en su arreglo con balanzas y termómetros.

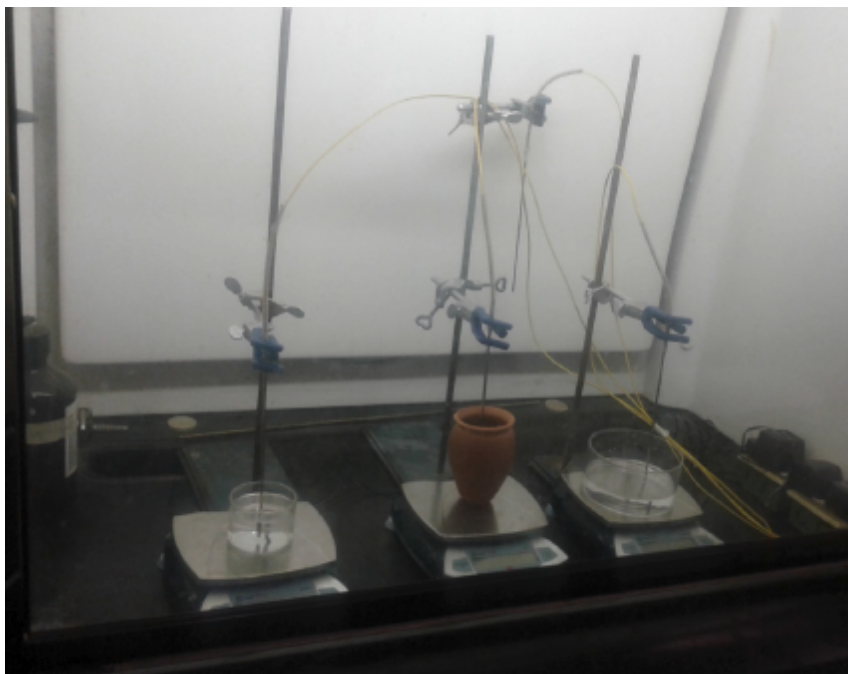


Figura 21.2: Un recipiente de pared altamente porosa y dos con pared desnuda.

6. Se toman los datos de la masa inicial de líquido en cada balanza y la temperatura inicial en cada termómetro, así como la temperatura ambiente inicial.
7. Se enciende el extractor de vapores y simultáneamente se activa un cronómetro.
8. Conforme transcurre el tiempo, se toman datos simultáneos del tiempo, la masa y la temperatura de cada recipiente, según sea necesario para ir obteniendo la historia de su disminución. También de vez en vez se hace una lectura de la temperatura ambiente. Dependiendo de la volatilidad del líquido y de la temperatura ambiente, el experimento puede tomar alrededor de unos 40 minutos a 2 horas.

21.3 Principios físicos del funcionamiento

La evaporación es un proceso de cambio de fase. Cuando se realiza en condiciones de equilibrio termodinámico, el vapor tiene mayor entalpía específica que el líquido, por lo que la evaporación isobárica implica al menos dos fenómenos de transporte: (1) la transferencia de masa en el cambio de fase, combinada con (2) la transferencia de energía asociada al calor latente de evaporación.

Una pregunta muy importante a responder es:

¿De dónde ha tomado el vapor la energía (el calor latente) que ha requerido para evaporarse?

Una respuesta directa a esta pregunta no sería tan provocativa como invitarles a lavarse las manos y secarlas luego sin usar toallas, sino evaporando los residuos de líquido agitando las manos en el aire. ¿Qué sienten en sus manos? ¿por qué se han enfriado? ¿cómo ha ocurrido esto?

En resumen, el calor latente que requiere el proceso de evaporación se toma del calor sensible del material, lo que provoca su enfriamiento, o más precisamente, el enfriamiento del líquido remanente (hasta su completa desaparición). Este es el principio básico que permite los ciclos de refrigeración.

Otra pregunta, relacionada con la anterior es ¿porqué, al destapar una bebida gaseosa, saturada de CO_2 nos sabe más refrescante que otra bebida sin gas disuelto? ¿cómo podemos preparar un litro de agua potable saturada de CO_2 ?

Otra pregunta interesante se refiere a la diferencia entre los recipientes de paredes aisladas y los de paredes sin aislante, pues ¿cómo influye la presencia del aislante en las paredes?, la pregunta se puede precisar en tres (o más) partes: A iguales masas evaporadas en dos recipientes iguales:

1. ¿Cuál recipiente tendrá su líquido a menor temperatura, el de paredes aisladas o el de paredes desnudas?
2. ¿En cuál de los dos recipientes la evaporación procede con mayor rapidez?
3. ¿En el recipiente aislado la evaporación es adiabática y podemos estimar, en consecuencia, un aproximado al calor latente de evaporación? ¿qué datos debemos obtener para calcular dicho aproximado?
4. En el recipiente de paredes expuestas ¿podemos estimar el calentamiento proporcionado por el ambiente a través de las paredes, en comparación con el comportamiento del recipiente aislado?

Al dar respuestas a las preguntas anteriores se debe tener presente

1. el comportamiento en la superficie interfacial entre el líquido y el aire, la cual no está aislada y en la cual se lleva a cabo el cambio de fase,
2. que conforme se agota el líquido, un calor sensible constante que fuera aportado a la evaporación implicaría mayor enfriamiento del escaso líquido remanente. Esto revela la importancia de un balance entre el enfriamiento y la evaporación.
3. ¿Puede establecerse alguna proporcionalidad entre la rapidez de la evaporación y el área de transferencia? y
4. ¿interfiere con esta proporcionalidad el hecho de tener paredes aisladas o desnudas?

21.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Determinar el efecto del valor del área interfacial líquido vapor en la rapidez de evaporación del líquido volátil.
2. Evaluar el proceso de calentamiento, considerando: (1) enfriamiento por la pared de vidrio y aislamiento perfecto de la interfase líquido-vapor, o (2) aislamiento perfecto de la pared de vidrio aislada (usar recipientes aislados) y enfriamiento por la interfase líquido-vapor, o (3) procesos de enfriamiento por las paredes aisladas o desnudas y por la interfase líquido-vapor.
3. Estimar la condensación y mezclado de agua de la humedad ambiente por la superficie interfacial líquido-vapor y su posible influencia en los cambios de temperatura en la etapa avanzada del proceso de evaporación. Favorecer la presencia de agua en el aire ambiente colocando una charola abierta con agua, cerca de la rendija de entrada del aire a la campana de extracción; el agua podría calentarse levemente para aumentar la humedad ambiente, a una temperatura ligeramente superior a la del ambiente y es conveniente medir las temperaturas de bulbo seco y bulbo húmedo cerca de la zona de las bocas de los recipientes de acetona.
4. Evaporar mezclas no reactivas de dos solventes volátiles abre un amplio panorama a la indagación del comportamiento de este proceso con mezclas reales y sus aproximaciones ideales. Se pueden estudiar los coeficientes de difusividad de estas mezclas ternarias considerando el último objetivo propuesto en el capítulo 18, en combinación con el procedimiento del presente experimento.

22. Secador de charolas con aire caliente

22.1 Descripción

El secador de charolas es un túnel o caja alargada de lámina galvanizada que tiene dos de sus extremos opuestos abiertos. En uno de ellos tiene un ventilador y una resistencia eléctrica, para impulsar y calentar el aire que entra al secador, como se aprecia en la figura 22.1. También tiene en esta entrada una puerta corrediza que permite regular el flujo de aire impulsado por el ventilador. La resistencia tiene un reóstato, para regular el voltaje que produce su calentamiento y ambos, la resistencia y el ventilador-abertura de la rendija, colaboran en regular la temperatura del flujo de aire.



Figura 22.1: Entrada de aire al secador de charolas.

En una de sus caras laterales, el secador de charolas tiene otra puerta corrediza, que descubre la región donde se coloca la muestra sobre una charola (ver la figura 22.2). Podemos secar rodajas de frutas, como manzana o pera, u otros vegetales como papa o zanahoria. Es también muy sencillo colocar una tela húmeda, que irá desprendiéndose del agua y perdiendo peso. La pérdida de peso se



Figura 22.2: Cara lateral con puerta corrediza para colocar la muestra.

determina por medio de una balanza digital, colocada afuera del secador y arriba de la charola. Esta balanza carga la charola con la muestra.

En la cara opuesta a la entrada del aire está la salida, permanentemente abierta (ver figura 22.3). Desde esta cara puede verse más claramente la charola, sostenida por dos varillas metálicas que deben sujetarse a una barra transversal fuera del secador, la cual descansará sobre la balanza.

Además, en la cara superior hay varios orificios pequeños, para introducir termómetros o termopares.

22.2 Operación

1. Se coloca la balanza sobre la cara superior del secador, arriba de una placa aislante que puede ser de unicel, se coloca sobre ella la barra transversal y se atornillan las varillas que sostienen la charola, comprobando que ésta queda completamente libre de obstrucciones y rozamientos que podrían alterar el peso registrado por la balanza.
2. Se abre parcialmente de la puerta corrediza del ventilador y se conecta el mismo.
3. Se conecta el reóstato a la alimentación eléctrica y se enciende la resistencia eléctrica.
4. Se regula el voltaje del reóstato y la abertura de la puerta corrediza de la entrada del aire, hasta lograr una condición de operación estacionaria deseada. (Se obtiene una condición estacionaria cuando las temperaturas medidas en diversos orificios ya no cambian notoriamente

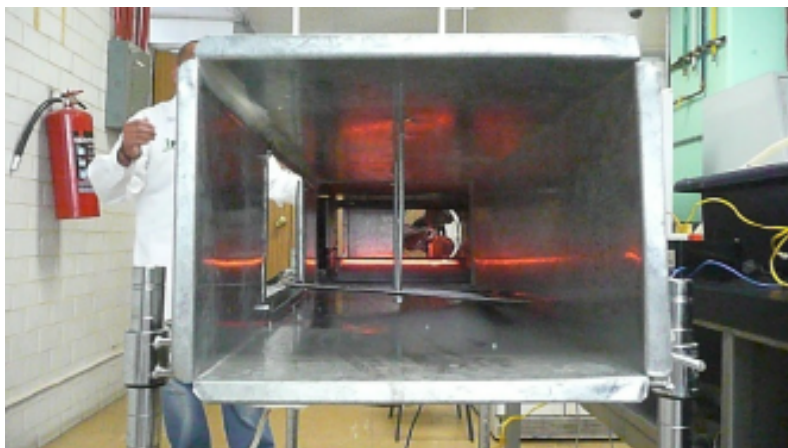


Figura 22.3: Salida del aire. En el interior se ve la charola con sus varillas de soporte.

- en el tiempo).
5. Se enciende la balanza y se tara con todo y la charola.
 6. Se toman algunos conjuntos de datos aproximadamente simultáneos. Cada conjunto de datos puede llamarse **un punto experimental**, que incluye el tiempo, la temperatura, aguas arriba y aguas debajo de la charola, la masa medida por la balanza, las temperaturas de bulbo seco y de bulbo húmedo a la salida del secador y el flujo de aire, también a la salida del secador, con un anemómetro de hélice.
 7. Se coloca, ágilmente, la muestra sobre la charola.
 8. Se cierra la ventanilla de vidrio, se registra su masa y el inicio del tiempo del experimento, disparando el cronómetro.
 9. Conforme transcurre el tiempo, se toman puntos experimentales. Es conveniente encontrar un **intervalo de tiempo fijo**, entre punto y punto, determinado por el **cambio de la lectura de la balanza**, para poder seguir con claridad la evolución de la masa de la muestra sólida.
 10. Se toman datos hasta llegar al régimen estacionario, o hasta alcanzar una lectura predeterminada de la masa. Se reconoce el régimen estacionario cuando los puntos experimentales ya no cambian. Principalmente, que la masa del sólido permanece constante.
 11. Podría iniciarse con un experimento de secado sin calentamiento, encendiendo el ventilador, pero no la resistencia eléctrica. Esto permitiría apreciar el efecto de disminución de la temperatura de la muestra, debido a la evaporación del agua, así como el efecto térmico, encendiendo la resistencia posteriormente.

22.3 Principios físicos del funcionamiento

Al incidir el aire caliente sobre la muestra de la charola, se generan tres capas límite: la de movimiento, la de temperatura y la de humedad. Entre la muestra y el aire ocurre la transferencia simultánea de momentum, energía térmica y masa: La muestra detiene al aire en la película fluida que la rodea, generando una capa límite de movimiento. El aire se enfría, no solo porque la muestra entra fría y se va calentando, sino también porque el agua de la muestra se está evaporando, lo cual requiere de una entalpía latente del cambio de fase, que también contribuye al balance de la energía térmica de la muestra. Finalmente, la evaporación de agua genera una capa límite de humedad alrededor de la muestra.

En otro nivel de descripción, una gran porción de la energía térmica se pierde a través de las paredes de lámina galvanizada. Esto puede ser convenientemente considerado mediante un balance integral de energía térmica, en todo el secador. Los términos de dicho balance se pueden apreciar en la Figura 7.1, donde Q_E , Q_S , Q_P y Q_F son el calor a la entrada, el calor a la salida, las pérdidas de energía térmica por las paredes y el calor suministrado a la muestra, respectivamente.

22.4 Algunos objetivos de la experiencia

1. Comparar la velocidad de secado, principiando por el secado sin calentamiento, observando, con diversos flujos de aire, la velocidad de enfriamiento de la muestra. Relacionar esta velocidad con el calor latente y comparar los resultados con la disminución de la masa medida por la balanza.
2. Agregar calentamiento, por medio de la resistencia eléctrica y encontrar la relación entre el aumento de la temperatura de la muestra y la velocidad de secado.
3. Incorporar el efecto de la radiación por medio de un coeficiente efectivo de radiación, dependiente de la temperatura en grados absolutos.

23. Métodos

Los métodos de trabajo para el aprendizaje significativo de los procesos de transporte, tanto los que tratan temas de la mecánica de fluidos como los relativos al calentamiento y al transporte de especies químicas, incorporan actividades que empiezan por afinar nuestra atención al ponernos en contacto con aquello que llamamos *sistema*. Podríamos identificar los sistemas en nuestra vida, no solamente en los equipos del laboratorio, sino en muchas situaciones de nuestra vida cotidiana, donde ocurre nuestro propio fluir en medio de la gente. Así, hay en todo punto oportunidades para aprender de las situaciones en las cuales nos ocurre estar presentes, si las tomamos consciente y atentamente en consideración, así como sus contextos. Nuestro aprendizaje tiene infinitas oportunidades de suceder, porque **aprender es ante todo una actitud hacia la vida**. Por ello no está restringido por barreras infranqueables, más bien puede estar unido por puentes que podemos transitar, o que podemos esforzarnos por aprender cómo transitar libremente, de ida y vuelta, desde una actitud poética imaginativa, incluso fantasiosa, hasta la indagación de hechos que permitan descripciones que puedan ser representadas a partir de principios generales, que otros seres humanos, a quienes llamamos científicos, han relacionado con lo que ellos mismos pudieron observar e imaginar. La aplicación de dichos principios generales nos hace posible proponer conclusiones y elaborar predicciones sobre el comportamiento de los sistemas que nos acercan a diversas realidades, facetas de algo que las envuelve a todas ellas en lo que podemos llamar nuestra cosmovisión, es decir, la cosmovisión de nuestra civilización, en la cual vivimos inmersos desde nuestra infancia, sin apenas darnos cuenta de ello.

Sin embargo, en el aprendizaje sobre el calentamiento y el movimiento de diversas especies químicas de una mezcla, es importante disciplinar nuestros métodos para avanzar en los objetivos a lograr, que consisten en aclarar y confirmar los conocimientos teóricos, que se vean fortalecidos y a la vez limitados por la formación que adquirimos, con la ayuda de las experiencias en los sistemas del laboratorio. Adquirir esta formación en ingeniería, sin duda nos permitirá tener confianza en el manejo de nuevas situaciones de la práctica profesional y limitará dicha confianza, para que nuestras decisiones se mantengan dentro de los límites de lo razonable, con plena responsabilidad.

Por lo anterior, nuestro aprendizaje debe ser significativo y disciplinado y los métodos que he seguido, para ayudar a lograrlo, son aquellos que he tratado de proponer en la tercera parte de un

libro, compañero del presente, llamado *Indagaciones sobre mecánica de fluidos*, editado por la División de Ciencias Básicas e Ingeniería, de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Dicho libro de texto se encuentra, como el presente, en versión electrónica, con libre acceso para toda persona. La tercera parte consta de cuatro capítulos, del capítulo 19 al 22, cuyos contenidos, que tratan acerca de:

1. Aprendizaje significativo
2. Modelos y experimentos
3. Elaboración de proyectos experimentales y
4. Elaboración de reportes experimentales,

son los mismos que requerimos para el tratamiento de nuestras experiencias e indagaciones sobre el calentamiento y la transferencia de especies químicas. Por ello no fue necesario escribir otra vez esos capítulos, sino invitarte a hojear el libro mencionado y tenerlo a la mano para recurrir a los métodos, cada vez que lo requieras o lo consideres necesario.

El aprendizaje significativo tiene la virtud de permitirnos acceder a una forma de conocimiento, que podríamos llamar *conocimiento vivo*, el cual no trata de erudición o manipulación adecuada de conocimientos, procedimientos y estrategias, sino que implica nuestra conexión plena y continua con el objeto que indagamos y esta conexión revela una forma de percepción que facilita la comprensión del sentido de las cosas, que nutre y hace crecer la conciencia de esa parte de nuestra cosmovisión, que relacionamos con la ciencia y con sus aplicaciones.

Referencias

1. **Abbagnano, N. (2004)** Diccionario de Filosofía. Cuarta edición en español. Fondo de Cultura Económica. México.
2. **Bertalanffy, L. (1986)** Teoría General de los Sistemas. Fondo de Cultura Económica. México.
3. **Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N. (2012)** Fenómenos de Transporte, Limusa, México.
4. **Borishenko, A.I. y Tarapov, I.E. (1968)** Vector and Tensor Analysis with Applications. Dover, N.Y.
5. **Criado-Sancho, M.; Casas Vázquez, J. (2004)** Termodinámica química y de los procesos irreversibles. Addison Wesley, Madrid.
6. **Callen, H.B. (1985)** Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. Segunda edición. Wiley, Singapur.
7. **Cussler, E.L. (2007)** Diffusion. Mass Transfer in Fluid Systems. Tercera edición. Cambridge University Press. Cambridge.
8. **de Groot, S.R. y Mazur, P. (1984)** Non-Equilibrium Thermodynamics. Dover. N.Y.
9. **García Colín, L. (1990)** Termodinámica de Procesos Irreversibles. Universidad Autónoma Metropolitana. México.
10. **Greiner, W.; Neise, L.; Stöcker, H. (1995)** Thermodynamics and Statistical Mechanics. Springer-Verlag, N.Y.
11. **Gyarmati, I. (1970)** Non-equilibrium Thermodynamics. Field Theory and Variational Principles. Springer, Berlín.
12. **Huang, K. (1987)** Statistical Mechanics. Wiley, Singapur.
13. **Incropera, F.P.; De Witt, D.P. (1999)** Fundamentos de transferencia de calor, 4ª edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, México.
14. **Krishna, R. (2015)** Uphill diffusion in multicomponent mixtures. *Chemical Society Reviews*, 44(10), 2812-2836.
15. **León-Portilla, M. (1980)** Toltecáyotl. Aspectos de la cultura náhuatl. Fondo de Cultura Económica, México.
16. **León-Portilla, M. (1961)** Los antiguos mexicanos, a través de sus crónicas y cantares, Fondo

- de Cultura Económica, México.
17. **Levenspiel, O. (1993)** Flujo de fluidos e intercambio de calor, Editorial Reverté, Barcelona.
 18. **Levi, E. (1965)** Mecánica de los Fluidos. Introducción a la hidráulica moderna. Universidad Nacional Autónoma de México. México.
 19. **Lobo Oehmichen, R.A. (2007)** Principios de Transferencia de Masa. (Segunda edición), Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. México.
 20. **López Austin, A. (2020)** Los mitos del tlacuache. (Cuarta edición), Universidad Nacional Autónoma de México. México.
 21. **Morin, E. (1990)** Introducción al Pensamiento Complejo. Gedisa, Barcelona.
 22. **Navarrete Linares, F. (2019)** ¿Quién conquistó México? Penguin Random House Grupo Editorial, México.
 23. **Prigogine, I. (1967)** Introduction to thermodynamics of irreversible processes. (Tercera edición), John Wiley & Sons, NY.
 24. **Reid, R.C.; Prausnitz, J.M.; Poling, B.E. (1987).** The properties of gases and liquids. McGraw-Hill, N.Y.
 25. **Roy, A.S. (1976)** A perspective on electrochemical transport phenomena. *Adv. Heat Transfer*, **12**, 195-282.
 26. **Sánchez, V. (1996)** Toltecas del nuevo milenio. Lectorum. México.
 27. **Slattery, J.C. (1999)** Advanced Transport Phenomena. Cambridge University Press.
 28. **Soria López, A. (2022)** Fundamentos del Flujo de Fluidos. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. México.
 29. **Soria López, A. (2026)** Indagaciones sobre Mecánica de Fluidos. Elementos teórico-experimentales para la integración de aprendizajes. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. México.
 30. **Truesdell, C. (1973)** Termodinámica racional. Reverté. Barcelona.
 31. **Truesdell, C; Toupin, R. (1960)** The classical field theories. En Principles of classical mechanics and field theory. *Handbuch der Physik*, III/1. S. Flügge (ed.) Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
 32. **Velázquez, L. (2019)** La civilización del Anáhuac: filosofía, medicina y ciencia. Editorial Notas Universitarias. CDMX, México.