



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Colección CBI

Libro de texto

Introducción a las Finanzas Matemáticas



Patricia Saavedra Barrera
Rubén Becerril Borja

Introducción a las Finanzas Matemáticas

Patricia Saavedra Barrera
Rubén Becerril Borja

Libro de texto



Casa abierta al tiempo

Dr. Gustavo Pacheco López
Rector General

Dra. Esthela Irene Sotelo Núñez
Secretaria General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dra. Edith Ponce Alquicira
Rectora de Unidad

Dr. Javier Rodríguez Lagunas
Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero
Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Introducción a las Finanzas Matemáticas

Primera edición: 2026

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, Núm. 186, Col. Leyes de Reforma 1 A Sección, Alcaldía
Iztapalapa, C.P. 09310, Ciudad de México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3734-8

Índice general

	Introducción	7
1	Teoría básica del interés	9
1.1	Interés	9
1.1.1	Inversiones anuales que se componen en distintos periodos	10
1.2	Valor presente y futuro de un monto	11
1.2.1	Banco ideal	13
1.2.2	Valor presente y futuro de un flujo de efectivo	13
1.2.3	Flujos de efectivo equivalentes	15
1.3	Inversiones financieras	15
1.3.1	Criterios para decidir entre dos inversiones	16
1.3.2	Tasa interna de retorno	16
1.3.3	Valor presente neto	17
1.3.4	Aplicaciones y extensiones	18
1.4	Depreciación de un activo fijo, inflación e impuestos*	18
1.4.1	Depreciación de un activo fijo	19
1.4.2	Inflación	19
1.4.3	Impuestos	20
1.5	Ejercicios	20
2	Instrumentos de renta fija	23
2.1	Introducción	23
2.2	Anualidades	26
2.2.1	Valor presente y futuro de una anualidad	26
2.2.2	Perpetuidades	28
2.3	Bonos	29
2.3.1	Rendimiento al vencimiento	29
2.3.2	Empresas calificadoras	31
2.3.3	Duración	31
2.3.4	Duración modificada	34

2.3.5	Convexidad	35
2.3.6	Inmunización de un portafolio	36
2.4	Ejercicios	38
3	Curva de estructura de tasas	41
3.1	Introducción	41
3.2	Tasas spot y tasas forward	43
3.2.1	Tasas spot	43
3.2.2	Tasas forward	44
3.3	Método de la alambrada	45
3.4	Ejercicios	46
4	Optimización de portafolios	49
4.1	Mercado accionario	50
4.2	Tratamiento de los datos históricos	50
4.3	Formulación matemática del problema	52
4.3.1	Marco teórico	52
4.3.2	Planteamiento del problema para dos activos	53
4.3.3	Conjunto factible	58
4.3.4	Planteamiento del problema para más de dos activos	60
4.4	Interpretación financiera	62
4.4.1	Teorema de dos fondos	62
4.5	Inclusión del activo libre de riesgo	64
4.6	Modelo CAPM*	67
4.7	Ejercicios	71
5	Riesgo de mercado	75
5.1	Introducción	75
5.1.1	Medidas de riesgo	76
5.2	Valor en riesgo (VaR)	77
5.2.1	VaR paramétrico	77
5.2.2	VaR histórico	79
5.3	VaR condicionado (CVaR)	80
5.4	Ejercicios	81
	Solución de ejercicios	83
	Bibliografía	85
	Índice alfabético	87

Introducción

Hoy en día es indispensable que cualquier adulto tenga un mínimo de conocimientos financieros que le permitan administrar sus ingresos, hacerse de un patrimonio y asegurarse un retiro digno. Para ello, es importante que se conozcan las ventajas y desventajas que le ofrece el sistema financiero en su vida diaria. De esta manera, las personas pueden evitar endeudarse con préstamos a tasas variables, o con la tarjeta de crédito, o invertir en esquemas fraudulentos. México es uno de los países con más baja bancarización, y en parte, esto se debe a la falta de una cultura financiera; por esa razón, es deseable que cualquier profesionista que egresa de la universidad tenga conocimientos no solo de cómo manejar sus finanzas personales, sino también de cómo manejar financieramente un negocio. De ahí que sea tan importante incluir en la curricula de las licenciaturas que se ofrecen en la UAM una UEA que sirva para introducir al alumnado a este tema.

Por otro lado, algunos de los instrumentos financieros que ofrecen actualmente la banca y las casas de bolsa a las empresas y a los particulares son sumamente sofisticados; y en el diseño, valuación y estimación del riesgo de estos instrumentos intervienen cada vez más métodos matemáticos que involucran conocimientos de procesos estocásticos, series de tiempo, estadística y análisis. Estos temas han revolucionado las finanzas para dar lugar a un nuevo campo llamado finanzas matemáticas. En la actualidad en las empresas, en la banca y el gobierno se contrata expertos en esta materia, profesionales que sean capaces de respaldar la toma de decisiones financieras; por lo tanto, la demanda de personal calificado que entienda y maneje este campo está creciendo de manera sustancial en el ámbito laboral. Aunado a esto, las crisis financieras recientes también han obligado a los bancos centrales a dictar políticas y metodologías comunes, por ejemplo, el caso de los distintos acuerdos de Basilea, para regular la exposición al riesgo de la banca, que establecen que todos los bancos y casas de bolsa deben contar de manera obligatoria con un grupo de expertos que implementen estas metodologías. En consecuencia, se ha ampliado el campo laboral para los egresados de una licenciatura o posgrado en matemáticas, y ahora se les puede encontrar trabajando en empresas paraestatales, en Banxico, en la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, o en bancos, en aseguradoras y casas de bolsa, entre otros negocios.

Estos cambios han repercutido en el diseño curricular de las licenciaturas en matemáticas en todo el país. En la UAM, desde hace veinte años, se ofrece una orientación en economía y finanzas tanto en la Licenciatura en Matemáticas como en la Maestría en Matemáticas Aplicadas e Industriales en la División de Ciencias Básicas e Ingeniería de Iztapalapa. Esta orientación se compone de cinco cursos optativos: tres en finanzas y dos en economía. Cualquier integrante del alumnado de CBI puede acreditar todos estos cursos.

Este texto tiene como objetivo introducir al alumnado a los siguientes temas: la teoría del

interés, la valuación de instrumentos de renta fija y renta variable y a la estimación del riesgo de mercado. En suma, se cubre la totalidad del contenido sintético de la UEA Métodos Matemáticos en Finanzas I. Cada tema se presenta de forma accesible, pero con rigor; para su comprensión únicamente se requiere tener conocimientos de cálculo de una y de varias variables, de álgebra lineal y conocimientos elementales de probabilidad y estadística.

El libro de Luenberger (1998), nos sirvió como guía para definir el contenido de este texto aunque la presentación, el tratamiento y la inclusión de algunos temas difiere en mucho del de ese autor. En este texto se incluyen algunas secciones marcadas con asterisco que, aunque no son indispensables para seguir el contenido del curso, nos pareció importante incluirlas para que el alumnado se percate de que hay otros factores que deben tomarse en cuenta cuando se realiza una inversión.

Los primeros tres capítulos tratan sobre algunos temas de lo que tradicionalmente se conoce como matemáticas financieras. En el capítulo 4 se introduce la teoría de riesgo-rendimiento de H. Markowitz aplicada a la optimización de portafolios. Aunque este material ya se había incluido en un texto escrito por P. Saavedra, ver Delgado y *col.* (2009), decidimos reescribirlo y presentar primero la teoría para un portafolio con dos activos y posteriormente, para el caso general. También se incluyó una sección sobre la importancia de diversificar las inversiones que es otra de las aportaciones de H. Markowitz. El modelo CAPM puede incluirse o no en el curso de licenciatura con el fin de contar con el tiempo suficiente para detenerse en el último capítulo que presenta el VaR y el VaR condicionado, que son los métodos más aceptados por el medio financiero para estimar el riesgo de mercado.

Se recomienda que a lo largo del curso, el alumnado utilice Excel, Python o R para el tratamiento estadístico y numérico de los datos. Por último, los ejemplos y ejercicios que acompañan este texto buscan aplicar los conceptos de finanzas a casos concretos y prácticos que sirvan al alumnado para adquirir una cultura financiera que le permita, entre otras cosas, manejar sus finanzas personales.

1. Teoría básica del interés

1.1 Interés

Definición 1.1.1 El **interés** es el valor del dinero a lo largo del tiempo. En términos del mercado de dinero, es lo que está dispuesto a pagar un banco por custodiar o guardar el dinero durante un periodo.

En general, si se cuenta con un monto A que se invierte en un depósito bancario que paga anualmente una tasa de interés $r > 0$, al final del año se obtiene

$$A + Ar = (1 + r)A.$$

■ **Ejemplo 1.1** Suponga que usted cuenta con 100 pesos que invierte a una tasa anual del 8 %, esto quiere decir que el banco está dispuesto a pagarle una cantidad suplementaria por guardar su dinero. Entonces, al final del año tendría

$$100 + (0.08 \times 100) = 108.00$$

■

Hay dos tipos de interés: interés simple e interés compuesto. Si un banco paga un interés simple significa que cada año que transcurre el inversionista retira el interés devengado y el siguiente año sólo invierte el monto original. De esta forma en n años se obtienen

$$A + Ar + Ar + \dots Ar = A(1 + nr).$$

Por otra parte, si el banco paga interés compuesto, el inversionista no retira el monto ganado a través del interés y cada año invierte la cantidad total. En este caso, en dos años se tiene

$$A + rA + r(A + rA) = (1 + r)A + r(1 + r)A = A(1 + r)^2,$$

mientras que en n años se obtiene

$$A(1 + r)^n.$$

Claramente se obtienen mayores beneficios con el interés compuesto; el crecimiento no es lineal sino exponencial. Actualmente los bancos pagan interés compuesto cuando no se retiran los intereses de la inversión.

1.1.1 Inversiones anuales que se componen en distintos periodos

Los bancos guardan el dinero durante periodos distintos a un año, pueden guardarlo por semana, por mes e incluso por día. Pero usualmente los plazos de los depósitos bancarios son de 28, 90 y 180 días, y de un año. En estos casos, si el interés no se retira al término del periodo, se invierten el capital y el interés por un periodo más, y si eso sucede a lo largo de un año, el banco nos paga un interés compuesto por cada periodo del año. Si el periodo consta de x días, se dice que durante el año se compone o es convertible cada x días. Pero hay que tener cuidado porque los bancos siempre manejan tasas anuales a las que llaman tasas nominales; sin embargo, aplican a las inversiones el interés por periodo, cuyo monto se denomina como tasa efectiva. Para determinar la tasa efectiva hay que dividir el interés anual entre el número de periodos que hay en todo el año. Por ejemplo, hay 13 periodos de 28 días al año; 4 periodos de 90 días y 2 periodos de 180 días. De esta forma, si se adquiere un depósito convertible a 28 días cuya tasa de interés nominal es r entonces la tasa efectiva es igual a $r/13$, para 90 días la tasa efectiva es de $r/4$ y para 180 de $r/2$, con r la tasa nominal correspondiente a cada instrumento.

■ **Ejemplo 1.2** Juan invierte 100 pesos en un depósito bancario convertible a 28 días, con una tasa nominal de 7.2% anual, por 13 periodos; ¿cuánto tendrá al final del año? ¿Qué pasaría si la misma inversión fuera a 90 o a 180 días con la misma tasa nominal anual?

Las ganancias para cada periodo de conversión son

$$\begin{aligned} 28 \text{ días: } 100 \left(1 + \frac{0.072}{13} \right)^{13} &= 100(1 + 0.00553846)^{13} = 107.44, \\ 90 \text{ días: } 100 \left(1 + \frac{0.072}{4} \right)^4 &= 100(1 + 0.018)^4 = 107.40, \\ 180 \text{ días: } 100 \left(1 + \frac{0.072}{2} \right)^2 &= 100(1 + 0.036)^2 = 107.30 \end{aligned}$$

Observe que la tasa nominal es la misma para cada una de las inversiones mientras que la tasa efectiva es distinta: 0.0055 para la de 28 días, 0.018 para la de 90 días y 0.036 para la de 180 días. Como podemos notar, se obtiene una mayor ganancia cuando se compone en más periodos.

¿Qué sucede si se compone un monto M de forma instantánea? El monto anual que se obtiene es:

$$M \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n = Me^r.$$

■ **Ejemplo 1.3** Pedro tiene 100 pesos que invierte en un depósito bancario que es convertible en forma instantánea o continua a una tasa nominal del 7.2%. El dinero que tendrá después de un año es

$$100 e^{0.072} = 107.47$$

Observe que éste es el máximo interés que recibe por ese monto.

■ ¿Cuánto crece un monto M que se invierte en forma continua a t años? En este caso, podemos calcularlo de la siguiente forma:

$$M \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right]^t = M \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} = Me^{rt}.$$

En finanzas se trabaja tanto con tasas discretas como continuas. Observe que la tasa continua nos da una cota superior de lo que se puede ganar anualmente con el interés compuesto por lo que es muy útil para cierto tipo de cálculos.



Para fines de cálculo, en finanzas se considera que se paga interés en 360 días al año. Los bancos no pagan el mismo interés para distintos periodos. Por ejemplo, el 18 de marzo de

2025, la tasa nominal más alta que se obtenía por un depósito bancario era de 9.52 % a 28 días, mientras que a 90 días era de 9.6 % y a 180 días de 9.72 %. Por lo general, las tasas de interés se incrementan a medida que el periodo se alarga; sin embargo, hay ocasiones en que disminuyen, debido a que los inversionistas tienen la expectativa de que las tasas decrezcan en los siguientes meses.

Para invertir un monto M se tienen varias alternativas. Una cuyo riesgo es mínimo, consiste en invertir en instrumentos gubernamentales a plazo fijo. En México, esa es la inversión con menor riesgo, dado que el riesgo que alguien no reciba el interés e incluso pierda el monto invertido ocurre únicamente si el gobierno mexicano se declara en bancarrota, lo cual es poco probable. Cuando se invierte a un año en un instrumento gubernamental con una tasa de interés $r > 0$, al término de ese periodo se obtiene $M(1+r)$. Como esta opción se encuentra al alcance de cualquiera, se dice que el tiempo hace crecer el dinero, siempre y cuando se invierta el dinero durante ese tiempo. De esta forma cobra sentido la frase: *el interés es el valor en el tiempo del dinero*.

1.2 Valor presente y futuro de un monto

En esta sección se presenta la forma en que cambia el valor del dinero cuando lo movemos en el tiempo. En finanzas se supone que el dinero siempre se invierte, nunca se deja ocioso como cuando lo metemos en un cajón o debajo del colchón. Dado que al invertir un monto M_0 a un año, al término de la inversión se tiene $M_0(1+r)$, con $r > 0$ la tasa anual asociada a una inversión gubernamental a un año, se considera que éste es el valor futuro a un año de M_0 . Entonces si ahora cuento con M_0 pesos su valor futuro dentro de un año es de $M_0(1+r)$ y el valor futuro a n años es $M_0(1+r)^n$.

Un razonamiento similar se puede aplicar para determinar cuánto se debe invertir hoy para tener un monto M_1 en el futuro. Por ejemplo, si se desea tener 1000 pesos dentro de un año, ¿cuánto se debe invertir al $t = 0$ a la tasa anual $r > 0$? Sea M_0 el monto a invertir para obtener $M_1 = \$1000$ dentro de un año. Entonces

$$M_1 = M_0(1+r) \Rightarrow M_0 = \frac{M_1}{(1+r)}.$$

Si deseamos obtener M_1 en n años, entonces

$$M_1 = M_0(1+r)^n \Rightarrow M_0 = \frac{M_1}{(1+r)^n}.$$

Si uno pregunta en los bancos y casas de bolsa cuánto se paga por una inversión anual, nos daremos cuenta que es muy diferente en cada institución y que depende del monto que se quiera invertir. Esto no sucede si uno invierte en los instrumentos gubernamentales. Por ello, para calcular el valor futuro o el valor presente de un monto a un año se usa la tasa gubernamental de una inversión a un año, y a ésta se le llama la tasa de referencia para inversiones anuales.

Definición 1.2.1 El **valor futuro** a n años de un monto M_0 es lo que se obtiene al invertir por n años dicho monto a una tasa anual de referencia $r > 0$. El valor futuro de M_0 se denota por $\text{VF}(M_0)$ y es igual a

$$\text{VF}(M_0) = M_0(1+r)^n.$$

Definición 1.2.2 Al proceso de calcular el monto original que se debe invertir para tener en un año un monto M_1 se le llama **traer a valor presente** el monto M_1 . En este caso a $\frac{1}{(1+r)}$ se le llama el factor de descuento, con r la tasa de interés nominal. El valor presente de un monto M_1 a un factor de descuento que se compone anualmente es

$$\text{VP}(M_1) = \frac{M_1}{(1+r)}.$$

Si desea calcular cuánto debe invertir el día de hoy para tener dentro de n años un monto M_1 lo

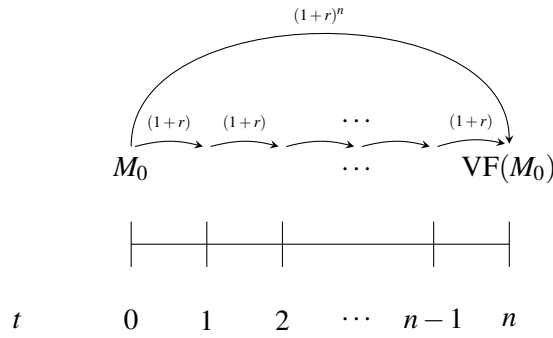


Figura 1.1: Valor futuro de un monto M_0

que se hace es traer a valor presente el monto M_1 que dista n años del presente lo que es igual a

$$VP(M_1) = \frac{M_1}{(1+r)^n}.$$

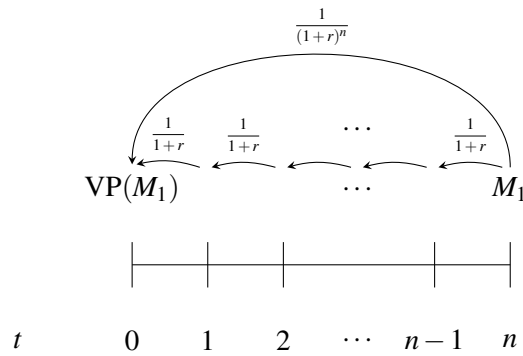


Figura 1.2: Valor presente de un monto M_1

■ **Ejemplo 1.4** Cuánto debo invertir el día de hoy para tener 1000 pesos dentro de un año con una tasa de interés anual del 7%.

$$VP(1000) = \frac{1000}{(1.07)} = 934.58$$

■

■ **Ejemplo 1.5** Siguiendo con el ejemplo anterior, ¿cuánto debe invertir al tiempo $t = 0$ para tener 1000 pesos dentro de cinco años?

$$VP(1000) = \frac{1000}{(1.07)^5} = 712.99$$

■

Para calcular el valor presente o futuro de un monto M_0 cuando se aplica una tasa de interés que se compone en periodos menores a un año, se toma como tasa de referencia la tasa nominal del instrumento gubernamental correspondiente a ese periodo. Si $r > 0$ es la tasa nominal convertible m veces al año, el valor presente y el valor futuro a un año son

$$VP_m(M_0) = \frac{M_0}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^m}, \quad (1.1)$$

$$VF_m(M_0) = M_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m. \quad (1.2)$$

También se puede calcular el valor presente y futuro de un monto M_0 cuando se aplica la tasa de interés continua, los cuales se denotan por VP^c y VF^c , respectivamente:

$$VP^c(M_0) = M_0 e^{-r},$$

$$VF^c(M_0) = M_0 e^r.$$

■ **Ejemplo 1.6** El valor presente de 1000 pesos cuando se invierten por un año si la tasa nominal a 28 días es del 7% es igual a

$$VP_{13}(1000) = \frac{1000}{(1 + \frac{0.07}{13})^{13}} = 932.57$$

■

■ **Ejemplo 1.7** Si se traen a valor presente los mismos 1000 pesos con una tasa continua del 7%, esto correspondería a

$$VP^c(1000) = 1000 e^{-0.07} = 932.39$$

■

Como era de esperarse, se requiere de una cantidad menor si se invierte en un instrumento que se compone durante el año más veces que otro.

1.2.1 Banco ideal

Para modelar el mercado de dinero se hace el supuesto de que los bancos trabajan en las siguientes condiciones ideales:

1. Los bancos dan créditos y préstamos a la misma tasa de interés.
2. No cobran comisión por las transacciones bancarias.
3. La misma tasa de interés se aplica a cualquier monto, siempre y cuando la inversión tenga la misma duración.
4. El efecto de cada transacción es independiente y es aditiva.

Cuando se asume que un banco cumple con las características anteriores, se dice que se trabaja con un banco ideal. Pero en el mundo real no se cumplen estas condiciones. Las tasas asociadas a los préstamos son superiores a las de los depósitos bancarios, siempre y cuando la duración de la inversión sea la misma.

1.2.2 Valor presente y futuro de un flujo de efectivo

Consideremos que tenemos un flujo de efectivo que consiste de n montos, ingresos menos gastos, que se harán en el futuro y nos interesa conocer al $t = 0$ el balance final. Supongamos que los montos se efectúan anualmente en los siguientes n años. Denote por

$$\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

el flujo de efectivo, con $x_i \in \mathbb{R}$. ¿Cuánto se tendría al efectuar el n -ésimo movimiento, si cada uno de los montos se invierte a través de un banco ideal? Supongamos que la tasa anual que se aplica es $r > 0$. Después de n años cada monto se habrá convertido en lo siguiente:

$$x_0 \rightarrow x_0(1+r)^n,$$

$$x_1 \rightarrow x_1(1+r)^{n-1},$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} \rightarrow x_{n-1}(1+r),$$

$$x_n \rightarrow x_n,$$

por lo que al tiempo $t = 0$ el valor futuro del flujo de efectivo será igual a

$$VF(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n x_i(1+r)^{n-i}.$$

lo que se ilustra en la figura 1.3.

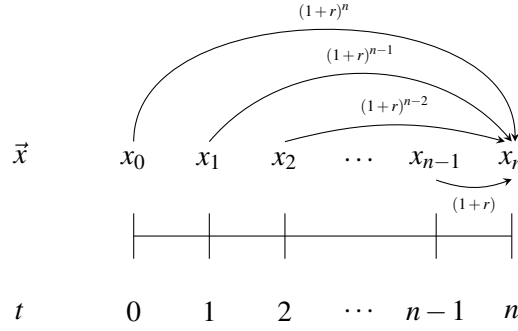


Figura 1.3: Valor futuro de un flujo de efectivo

■ **Ejemplo 1.8** Si $\vec{x} = (-2, 1, 1, 1)$ y $r = 0.07$, el valor futuro es

$$VF(\vec{x}) = -2(1.07)^3 + (1.07)^2 + (1.07) + 1 = 0.764814$$

En este caso, el flujo de efectivo tiene un valor futuro que deja una ganancia positiva. ■

También es posible responder a la pregunta: ¿cuál es el valor presente de un flujo de efectivo que efectuaré en el futuro?, es la suma de cada uno de los montos traídos a valor presente:

$$VP(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n \frac{x_i}{(1+r)^i}.$$

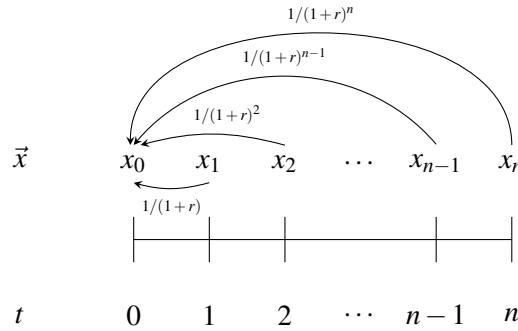


Figura 1.4: Valor presente de un flujo de efectivo

■ **Ejemplo 1.9** El valor presente del flujo $\vec{x} = (-2, 1, 1, 1)$ con $r = 0.07$ es

$$VP(\vec{x}) = -2 + \frac{1}{(1.07)} + \frac{1}{(1.07)^2} + \frac{1}{(1.07)^3} = 0.624316$$

Si en lugar de usar una tasa que se compone anualmente se usa una que se compone m veces al año, se tiene

$$VP_m(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n \frac{x_i}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^i},$$

$$VF_m(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n x_i \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-i},$$

con $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y donde cada x_i se paga en el i -ésimo periodo del año. También se puede aplicar la tasa de interés continua en diferentes tiempos de transacción t_i , para obtener el valor

presente y futuro de un flujo de efectivo $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} \text{VP}^c(\vec{x}) &= \sum_{i=0}^n x_i e^{-rt_i}, \\ \text{VF}^c(\vec{x}) &= \sum_{i=0}^n x_i e^{rt_{n-i}}. \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.10** Suponga que el siguiente flujo tiene periodicidad anual $\vec{x} = (-2, 3/2, 1)$ pero es convertible cada 28 días a una tasa nominal de $r = 0.07$. El valor presente del flujo es igual a

$$\begin{aligned} \text{VP}_{13}(\vec{x}) &= -2 + \frac{3/2}{\left(1 + \frac{0.07}{13}\right)^{13}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{0.07}{13}\right)^{26}} \\ &= -2 + \frac{3 \times 0.93257}{2} + 0.86968 = 0.26854 \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 1.11** El valor presente de $\vec{x} = (-2, 3/2, 1)$ con una tasa continua de 0.07, con $t_i = i$ años, es

$$\text{VP}^c(\vec{x}) = -2 + \frac{3 e^{-0.07}}{2} + e^{-0.14} = 0.26795$$

Observe que $\text{VP}^c(\vec{x}) \leq \text{VP}_m(\vec{x})$ y $\text{VF}_m(\vec{x}) \leq \text{VF}^c(\vec{x})$.

1.2.3 Flujos de efectivo equivalentes

Un banco ideal se puede usar para modificar un flujo de efectivo. Por ejemplo, si la tasa de interés anual es $r > 0$ y se tiene el siguiente flujo de efectivo $\vec{x} = (1, 0, 0)$, a los dos años se tendrá $(1+r)^2$. Este flujo puede transformarse en el flujo $\vec{y} = (0, 0, (1+r)^2)$ y el valor futuro o presente de ambos flujos es el mismo. Otra posibilidad es pedir al tiempo $t = 0$ un peso al banco y compensar ingresando el doble del valor de la deuda llevado a valor futuro: $\vec{z} = (-1, 0, 2(1+r)^2)$.

Definición 1.2.3 Se dice que dos flujos de efectivo $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ son **equivalentes** para el banco ideal, con tasa de interés por periodo $r > 0$, si el valor presente de ambos flujos es el mismo.

Observe que el valor presente permite comparar dos flujos de efectivo.

1.3 Inversiones financieras

Tradicionalmente el concepto de inversión se define como comprometer recursos el día de hoy con el fin de obtener ganancias o beneficios en el futuro. Si los recursos y beneficios están en términos monetarios, invertir es comprometer el día de hoy dinero para recibir más tarde un monto mayor. En algunas ocasiones la cantidad de dinero que se espera recibir es conocida, como sucede en los depósitos a plazo fijo, en otras, no se conoce lo que se ganará al realizar la inversión.

Otra forma de entender la inversión en un sentido más amplio es la siguiente: considere que le ofrecen invertir en un negocio que implica gastos e ingresos que dan lugar a un flujo de efectivo a lo largo de varios años. Desde este enfoque, invertir se entiende como la forma de organizar estos montos a lo largo del tiempo de tal forma que al final se obtenga el mayor beneficio.

Invertir implica analizar varias alternativas para decidir el monto y el momento en que deben efectuarse los distintos flujos de efectivo para obtener la mayor ganancia. Estas alternativas deben analizarse dentro del marco que define el mercado financiero. Este mercado tiene varios principios que deben tomarse en cuenta.

1. **Principio de comparación.** Entre dos inversiones al mismo plazo, se escoge la que dé mayores beneficios. Por ejemplo, ¿qué me conviene más, invertir en una cuenta de ahorros o cambiar el dinero a dólares?

2. **Arbitraje.** Este término se aplica cuando debido a un diferencial de precios se puede obtener una ganancia sin gastar un centavo. Por ejemplo, el Banco B_1 presta dinero al 10% anual mientras que el banco B_2 ofrece un depósito bancario al 10.5% anual. Puedo pedir prestado al banco B_1 para invertir en el banco B_2 y al término de un año me quedaría con el 0.5%.
3. **Proceso dinámico.** Los mercados financieros son dinámicos. Los precios, gastos e ingresos cambian a lo largo del tiempo, no permanecen constantes. Entonces los activos financieros dependen del tiempo y su desempeño por lo general no es determinista. Por lo tanto el proceso de inversión es dinámico y aleatorio. Los flujos deben verse como montos aleatorios cuya incertidumbre depende del tiempo.
4. **Aversión al riesgo.** Entre dos inversiones que dan el mismo beneficio, se prefiere aquella que tiene menor riesgo, entendiendo por riesgo la probabilidad de perder el monto invertido. La aversión al riesgo es personal.

1.3.1 Criterios para decidir entre dos inversiones

Dados dos flujos de efectivo $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ asociados a dos inversiones distintas, ¿cómo se decide cuál es la más conveniente? Para tomar esa decisión, se presentan a continuación dos procedimientos: la tasa interna de retorno y el valor presente neto. Actualmente, se manejan otras medidas más sofisticadas que, en principio, se basan en estas dos; para mayor información al respecto se sugiere la lectura del capítulo 5 de Baca (2013).

1.3.2 Tasa interna de retorno

Definición 1.3.1 Sea $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un flujo de efectivo a lo largo de n periodos. La **tasa interna de retorno** (TIR) de un flujo de efectivo $\vec{x}$ es el número s que hace que el valor presente del flujo sea igual a cero, es decir, el valor $s \in \mathbb{R}$ que satisface la siguiente ecuación

$$0 = x_0 + \frac{x_1}{(1+s)} + \frac{x_2}{(1+s)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+s)^n}.$$

Dado que la incógnita s se encuentra en el divisor de cada término, para simplificarla se hace el siguiente cambio de variable

$$c = \frac{1}{(1+s)},$$

entonces el problema se transforma en tener que encontrar las raíces reales positivas del polinomio de grado n

$$x_n c^n + x_{n-1} c^{n-1} + \dots + x_1 c + x_0 = 0.$$

Teorema 1.3.1 Supóngase que $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un flujo de efectivo a lo largo de n periodos, con $x_0 < 0$ y $x_i \geq 0$, para $i = 1, \dots, n$, con al menos una $x_i > 0 \Rightarrow$ el polinomio $p(c)$ tiene una única raíz positiva.

Recuerde que si las condiciones del teorema no se cumplen, se puede transformar el flujo a otro equivalente que sí las cumpla.

Si se cumplen las hipótesis del teorema anterior y c es la raíz positiva, entonces

$$\text{TIR}(\vec{x}) = \frac{1}{c} - 1.$$

■ **Ejemplo 1.12** Sea $\vec{x} = (-2, 1, 1, 1)$ un flujo de efectivo anual a lo largo de 3 años. El polinomio asociado a resolver es:

$$p(c) = c^3 + c^2 + c - 2 = 0.$$

Al graficarlo (Figura 1.5) se observa que tiene una sola raíz real en el intervalo $[1/2, 1]$. Al aplicar el método de bisección se obtiene que $c \approx 0.81$, lo que implica que $\text{TIR}(\vec{x}) \approx 0.23$

■

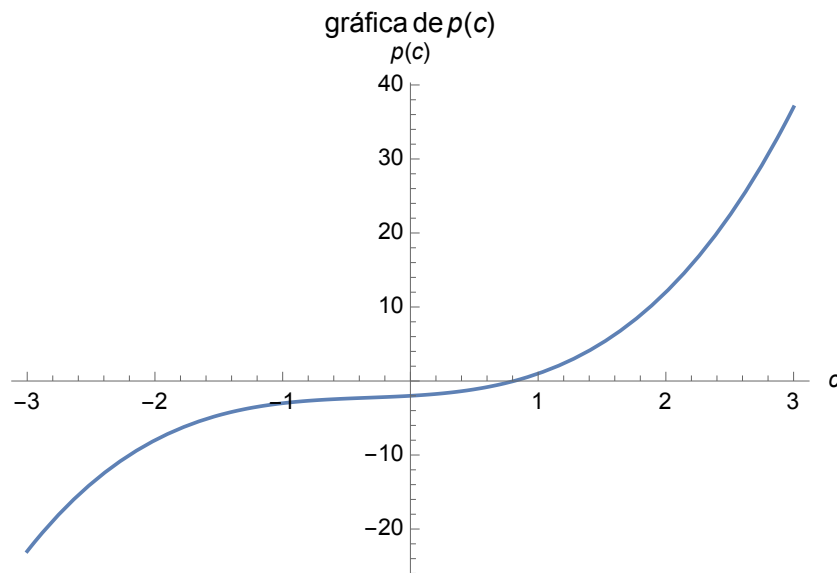


Figura 1.5: Gráfica del polinomio $p(c)$

La tasa interna de retorno no depende de una tasa de referencia sino únicamente de los montos que componen el flujo, por eso se llama interna. Es la tasa de interés que debería pagar un banco para que el valor presente neto de la inversión sea cero.

Una buena inversión es aquella que ofrece una tasa de retorno superior a la que ofrece un depósito bancario, pero en este caso hay que tomar en cuenta el riesgo que se corre. Entre dos flujos de efectivo, la inversión que mas conviene es la que tiene la tasa interna de retorno más alta, siempre que el riesgo sea el mismo.

1.3.3 Valor presente neto

Otro criterio es el valor presente neto que consiste en calcular el valor presente de un flujo de efectivo considerando tanto los montos positivos como negativos con respecto a una tasa de referencia. Si el valor presente neto es positivo, se trata de una buena inversión, y para elegir entre dos flujos de efectivo, conviene invertir en el que tenga el valor presente neto más grande.

Definición 1.3.2 Sea $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ un flujo de efectivo a lo largo de n periodos y que $r > 0$ es la tasa de referencia por periodo entonces el **valor presente neto** se define como:

$$\text{VPN}(\vec{x}) = x_0 + \frac{x_1}{(1+r)} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+r)^n}.$$

■ **Ejemplo 1.13** Sea $\vec{x} = (-2, 1, 1, 1)$ un flujo de efectivo anual a lo largo de 3 años y tómesese como tasa de referencia el 8% anual:

$$\text{VPN}(\vec{x}) = -2 + \frac{1}{1.08} + \frac{1}{(1.08)^2} + \frac{1}{(1.08)^3} = 0.5771$$

■

■ **Ejemplo 1.14** Se ofrece una inversión que consiste en lo siguiente: se compra un terreno en Michoacán con el objetivo de plantar árboles para después vender la madera. El costo inicial es de un millón de pesos; los árboles se pueden cortar después de un año. Con lo anterior se espera ganar el doble del costo inicial, pero si los árboles se cortan dos años después, el costo inicial se triplica. ¿Conviene el negocio? ¿Cuál opción es más conveniente? Considere que $r = 0.08$ anual.

El flujo de efectivo asociado a la primera opción es $\vec{x}_1 = (-1, 2)$, mientras que para la segunda

opción es $\vec{x}_2 = (-1, 0, 3)$. Así

$$\begin{aligned} \text{VPN}(\vec{x}_1) &= -1 + \frac{2}{1.08} = 0.8519, \\ \text{VPN}(\vec{x}_2) &= -1 + \frac{3}{(1.08)^2} = 1.5720 \end{aligned}$$

Si se calcula la tasa interna de retorno se tiene que para la primera inversión $c_1 = 0.5$ por lo que $\text{TIR}(\vec{x}_1) = 1$, mientras que $c_2 = 0.5773$ por lo que $\text{TIR}(\vec{x}_2) = .7321$, al usar el valor presente neto, es mejor cortar los árboles al segundo año, mientras que si se usa la TIR conviene cortar los árboles al primer año. Como se ve, estas metodologías no son equivalentes. ■

1.3.4 Aplicaciones y extensiones

Para el cálculo del valor presente neto conviene usar ingresos menos gastos para cada periodo.

■ **Ejemplo 1.15** Se ofrece rentar una mina en Hidalgo durante al menos diez años, que tiene varios yacimientos de oro para su explotación por al menos diez años. Se pueden extraer 10,000 onzas al año por un costo de 900 dólares la onza. El precio del oro en los mercados internacionales en 2022 se cotiza a 1852 dólares la onza y el pago anual por concepto de renta es de cuatro millones de dólares. Si se considera que la renta al igual que los costos de explotación y la tasa de interés del 8 % anual permanecerán constantes durante los siguientes diez años, ¿conviene invertir?

El monto por periodo es ingresos – gastos en millones de dólares, el cual es igual a

$$x_k = -4 + 0.01[1852 - 900] = 5.520$$

El flujo de efectivo de este negocio es $\vec{x} = (5.520, \dots, 5.520)$ y al aplicar la siguiente fórmula para una suma geométrica:

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \text{VPN}(\vec{x}) &= 5.520 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1.08)^k} = 5.520 \sum_{k=1}^{10} (0.925926)^k \\ &= 5.520 \left[\frac{1 - (0.925926)^{11}}{1 - 0.925926} - 1 \right] = 37.040, \end{aligned}$$

por lo que sí conviene invertir dado que el valor presente neto del negocio es de treinta y siete millones de dólares. ¿Si el costo total de la renta se paga al inicio del negocio, conviene invertir? En ese caso, $x_k = .01[1852 - 900] = 9.520$ millones de dólares y el flujo sería igual a $\vec{z} = (-40, 9.520, 9.520, \dots, 9.520)$

$$\begin{aligned} \text{VPN}(\vec{z}) &= -40 + 9.520 \sum_{k=1}^{10} (0.925926)^k \\ &= -40 + 9.520 \left[\frac{1 - (0.925926)^{11}}{1 - 0.925926} - 1 \right] = 23.88 \end{aligned}$$

La ganancia sería menor, pero aún sería un buen negocio. ■

1.4 Depreciación de un activo fijo, inflación e impuestos*

En esta sección se presentan algunos factores que afectan a los ingresos y ganancias y que deben tomarse en cuenta cuando se calcula el valor presente neto de un flujo de efectivo: el pago de impuestos, la depreciación del activo fijo y la inflación.

1.4.1 Depreciación de un activo fijo

El activo fijo de una empresa consiste en el equipo que requiere la empresa para operar. Cuando una empresa adquiere un activo fijo, el gasto total no se reporta sino hasta al año siguiente y no se hace en una sola exhibición sino que se va descontando poco a poco a lo largo de la vida útil del equipo. A este proceso se le llama considerar el costo de depreciación del equipo. Hay varias formas de calcular este costo, por lo que siempre se deben revisar las disposiciones que emita al respecto la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). En 2012 se aprobó la siguiente disposición:

Depreciación a aplicarse un año después de la compra y durante toda la vida útil del equipo:

$$\text{Depreciación anual} = \frac{\text{costo del activo} - \text{valor de desecho}}{\text{número de años de vida útil}}.$$

El valor de desecho de un equipo es su precio de venta cuando deja de ser útil.

1.4.2 Inflación

Definición 1.4.1 "La **inflación** es el aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios que deteriora el poder adquisitivo del dinero". La forma cuantitativa de medirla es a través de una tasa de descuento llamada la tasa de inflación: $\frac{1}{(1+f)}$, con $f > 0$. Si P_0 es el precio al tiempo $t = 0$ entonces dentro de un año el precio P_1 será:

$$P_1 = \frac{P_0}{(1+f)}.$$

Como la inflación repercute en el costo del dinero, siempre debe mencionarse si la inflación se incluye en los cálculos. Si no se toma en cuenta la inflación, se dice que una cantidad es a pesos actuales o nominales; en cambio, si se toma en cuenta, se dice que es a pesos constantes o reales. Por eso hay que tener cuidado con las tasas de interés, ya que la tasa de interés que nos ofrecen los bancos es nominal y no toma en cuenta la inflación. En realidad, la que importa es la tasa real, pues nos da una mejor idea del valor del dinero.

La tasa real se calcula de la siguiente forma: sea $r > 0$ la tasa de interés anual y $f > 0$ la tasa de inflación anual. Si ponemos un monto M_0 al $t = 0$ en el banco, el monto M_1 que tendremos al año será

$$M_1 = M_0 \frac{1+r}{1+f}.$$

Entonces la tasa real r' es la siguiente para el caso discreto

$$M_0(1+r') = M_0 \frac{1+r}{1+f} \Rightarrow r' = \frac{r-f}{1+f}.$$

Para el caso continuo:

$$M_0 e^{r'} = M_0 e^{r-f} \Rightarrow r' = r - f.$$

¿Cómo se calcula la tasa de inflación? Oficialmente el encargado de calcularla es el Banco de México. Para ello, considera el incremento del costo de la canasta básica que consiste en un número pequeño de productos de consumo popular. Obviamente este incremento es mucho menor de lo que han subido en promedio los precios de todos los productos. De hecho el Banco de México reporta dos tasas de inflación: la de la canasta básica y la subyacente que toma en cuenta la tendencia del incremento de los precios de un conjunto más amplio de productos, como los combustibles.

■ **Ejemplo 1.16** En mayo del 2022 se reportó una tasa de inflación del 7.58 % mientras que la tasa anual gubernamental a 28 días era del 7 % por lo que la tasa de interés no compensaba la pérdida del poder adquisitivo. ¡La tasa real era negativa! Mientras que en agosto de 2025 la tasa anual a 28 días era de 7.75 % y la tasa de inflación de 3.45 % lo que daba una tasa real $r' = 4.51 \%$. ■

1.4.3 Impuestos

Otro punto a considerar al calcular las componentes de un flujo son los impuestos, esto es, lo que se le paga al gobierno por las ganancias, por los ingresos y por el consumo. Hay que tener cuidado con el manejo de los impuestos porque los componentes de un flujo pueden tener distintas cargas impositivas. Y aunque en este curso no tomaremos en cuenta este tema, es importante señalar que actualmente los depósitos bancarios pagan un impuesto del 0.5 %. Este porcentaje puede variar y siempre hay que consultar la miscelánea fiscal vigente.

1.5 Ejercicios

Ejercicio 1.1 Calcule el monto que se acumula anualmente cuando se invierte un monto de 100 pesos al 8 % anual durante diez años. Grafique monto contra tiempo. ■

Ejercicio 1.2 ¿A qué tasa de interés anual se duplica el dinero a los diez años? ■

Ejercicio 1.3 Si la tasa de interés es del 10 % anual, ¿en cuántos años se duplica el monto? ■

Ejercicio 1.4 ¿Qué monto se debe depositar para obtener 10,000 pesos al término de 5 años cuando se compone anualmente al 8 %? ■

Ejercicio 1.5 ¿Cuánto se tendrá en diez años si 1,000 pesos se invierten a una tasa constante anual del 10 % que se compone anualmente, semestralmente, trimestralmente y finalmente en forma continua? Grafique monto contra tiempo en las cuatro formas de inversión. ■

Ejercicio 1.6 Haga una tabla comparando el crecimiento de un monto de 100 pesos al 8 % anual que se compone cada 28 días durante cinco años. ■

Ejercicio 1.7 Encuentre la cantidad que debe invertir, a una tasa de interés simple de 9 % anual, para acumular \$1,000 al final de tres años. Ahora encuentre la cantidad que debe invertir a una tasa de interés compuesto de 9 % anual para acumular \$1,000 al final de tres años y compare los resultados. ■

Ejercicio 1.8 Suponga que durante este año trabaja como ayudante de profesor por un sueldo mensual de 5,000 pesos y que quiere comprar un auto usado a plazos que le cuesta 80,000 pesos, con un préstamo familiar. Para lograrlo, debe pagar un enganche de 10,000 pesos y 24 mensualidades de 2,916.67 pesos. ¿Cuál es el valor presente de este flujo de efectivo si la tasa anual de referencia es del 7 %? ■

Ejercicio 1.9 Se sabe que \$600 invertidos por dos años generarán \$264 en interés bajo una cierta tasa de interés compuesto. Encuentre el valor futuro de \$2,000 invertidos a la misma tasa de interés compuesto durante tres años. ■

Ejercicio 1.10 Encuentre la tasa a la que se debe componer en forma continua un monto para que sea equivalente a una tasa que se compone anualmente al 12 %. ■

Ejercicio 1.11 ¿Cuál es la tasa efectiva semanal que paga el mismo rendimiento que una tasa anual del 8 % de un instrumento convertible cada 28 días. ■

Ejercicio 1.12 Una familia desea reunir 500,000 para pagar los gastos universitarios de su hijo que acaba de nacer. Si el fondo debe estar completo dentro de 20 años y si están dispuestos a ahorrar \$10,000 pesos al año durante los primeros diez años y $\$10,000 + x$ los siguientes diez, ¿cuál debe ser el valor de x si la tasa de interés es del 7% en promedio? ■

Ejercicio 1.13 Considere dos proyectos cuyos flujos se presentan en la siguiente tabla. Encuentre la tasa de retorno de cada uno de ellos y el valor presente neto con tasa de descuento del 5%. ¿Cuál proyecto sería el más rentable? ¿Por qué?

Año	0	1	2	3	4	5
Proyecto 1	-120	30	33	30	35	30
Proyecto 2	-150	42	45	30	42	45

Ejercicio 1.14 Le proponen dos inversiones representadas por los siguientes flujos de efectivo con periodo anual (los montos representan millones de pesos): $\vec{x} = (-5, 1, 2.5, 3)$ y $\vec{y} = (-4, 1, 2, 2.5)$. Calcule la TIR de ambos flujos para decidir cuál inversión conviene más. ¿Qué hubiera decidido si usa el valor presente neto con $r = 0.07$ anual? ■

Ejercicio 1.15 ¿Cuál es la tasa real de un instrumento gubernamental a 91 días en la tercera semana de agosto? Averigüe en la página de Banxico la tasa de inflación en esa fecha. ■

Ejercicio 1.16 ¿Cuánto recibe al invertir \$100,000 en un depósito bancario anual, si la tasa nominal es de 0.096? Averigüe en internet la tasa de impuesto vigente a depósitos bancarios. ■

2. Instrumentos de renta fija

Antes de entrar al tema de este capítulo, es importante conocer la estructura del sistema financiero mexicano, aunque sea a grandes rasgos. En la figura 2.1 se presenta un diagrama al respecto, en el cual se puede observar que la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) que depende del presidente de México, es la cabeza del sistema. A su lado está el Banco de México (Banxico), que es un organismo independiente del gobierno, cuya función es definir la política monetaria del país con el fin de mantener la inflación baja y estable, a través de la emisión de los instrumentos de inversión de la Tesorería de la Federación. Asimismo, Banxico se encarga de fijar el tipo de cambio peso-dólar para transacciones oficiales y de publicar la tasa de inflación oficial, entre otras cosas. El sistema financiero comprende las actividades del sector bancario y de valores, del sector de seguros y fianzas y, por último, del ahorro para el retiro. La SHCP tiene tres organismos que regulan las actividades de cada sector: la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) y la Comisión Nacional del Ahorro para el Retiro (CONSAR).

El sector que nos interesa en este curso es el sistema bancario y bursátil. Según su página oficial, "La CNBV es un órgano desconcentrado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), con facultades en materia de autorización, regulación, supervisión y sanción sobre los diversos sectores y entidades que integran el sistema financiero en México, así como sobre aquellas personas físicas y morales que realicen actividades previstas en las leyes relativas al sistema financiero. La Comisión se rige por la Ley de la CNBV". Las instituciones que componen el sistema financiero y bursátil son por ejemplo, los bancos de desarrollo, de crédito, la banca múltiple, las casas de bolsa y la bolsa de valores; vale la pena aprender cuáles son éstas, que atribuciones tienen y a quién rinden cuentas. Para conocer más del tema se puede consultar a Castelán (2013) y Fabozzi y col. (1996).

2.1 Introducción

Según Banxico, "un mercado financiero es un espacio físico o sistema virtual en el que convergen vendedores y compradores de instrumentos financieros para su intercambio". En este texto en particular nos interesan los mercados de dinero y de valores *securities* cuyas actividades están reguladas por la CNBV. El primero es donde se intercambian los instrumentos a corto plazo mientras que el segundo es en el que se adquieren o venden acciones de empresas que cotizan en bolsa, fondos de inversión emitidos por bancos y casas de bolsa o la compra y venta de bonos. En ambos mercados, la tasa de interés juega un papel fundamental y hay que monitorear constantemente su

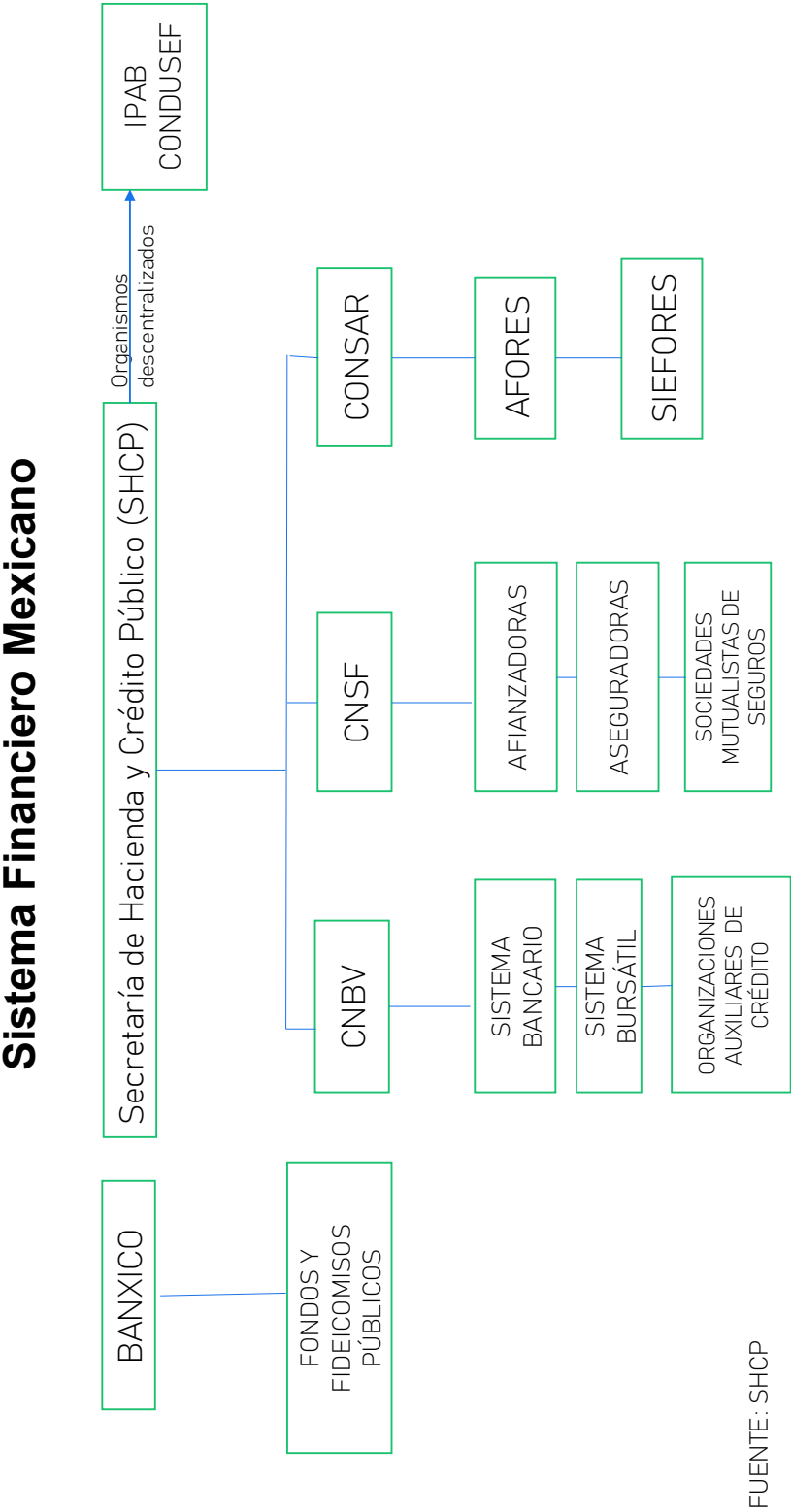


Figura 2.1: Estructura del sistema financiero mexicano.

valor. En ellos se comercian instrumentos financieros o activos como papel gubernamental, deuda gubernamental, bonos, pagarés bancarios, hipotecas, préstamos al consumo, tarjetas de crédito, acciones, etcétera. Estos activos no son bienes, sino papel, en el sentido de que no tienen un valor intrínseco sino que representan un valor.

Estos activos se clasifican en instrumentos de renta fija y de renta variable. Cuando el rendimiento de estos instrumentos se conoce desde el momento en que se adquieren, se les llama “instrumentos de renta fija” o “valores de renta fija”. Al resto cuyo rendimiento es variable se le llama “instrumentos de renta variable”.

En este capítulo se presentan los instrumentos de renta fija más utilizados por las empresas y los particulares. Para analizarlos hay que ampliar el concepto de interés que veníamos manejando por lo que se propone la siguiente definición.

Definición 2.1.1 La **tasa de interés** es lo que nos cuesta adquirir un préstamo monetario o la recompensa que recibimos al invertir en un instrumento financiero.

Definición 2.1.2 Los **valores de renta fija** son instrumentos financieros que se intercambian en mercados bien desarrollados que proporcionan rendimientos fijos, conocidos de antemano, por un periodo. Quien posee este instrumento tendrá un flujo de efectivo positivo (por ejemplo, un depósito) o negativo (por ejemplo, un préstamo).

Dado que los valores de renta fija garantizan un rendimiento, se puede decir que son libres de riesgo, a menos que quiebre la institución que los respalda. Las instituciones financieras que pueden emitir dichos valores son:

- Banco de México.
- Bancos.
- Instituciones financieras reconocidas por la SHCP.
- Instituciones de crédito.

Si alguna de estas instituciones financieras quiebra, los depósitos bancarios están protegidos por el gobierno, a través del IPAB (Instituto para la Protección del Ahorro Bancario), hasta por un monto de 400,000 UDIs (Unidades de Inversión). Las UDIs varían con el tiempo ya que están indexados a la inflación y se actualizan diariamente. Por ejemplo, a inicios del 2026, 400,000 UDIs eran equivalentes a 3,468,000 pesos. Los instrumentos más demandados son: pagarés bancarios, cuentas de ahorro, hipotecas, préstamos para compra de automóviles, préstamos por nómina, entre otros.

Los instrumentos de renta fija se pueden clasificar en instrumentos a corto plazo que tienen una duración máxima de un año; e instrumentos a largo plazo, cuya duración máxima excede un año. Los de corto plazo tienen asociadas tasas de interés a corto plazo, mientras que los de largo plazo se llaman bonos, pueden tener un vencimiento a 3, 5, 10, 20 o 30 años, y el monto que se recibe al vencimiento se denomina como principal. En principio, debido a que el dueño del bono no puede acceder a su dinero durante su vigencia, las tasas de interés asociadas deben ser mayores a las de los instrumentos de corto plazo.

Los valores gubernamentales están respaldados por Banxico. Los valores de corto plazo son los certificados de la Tesorería de la Federación conocidos como Cetes: los cuales son pagarés emitidos por el gobierno que sirven para recaudar fondos y se emiten periódicamente a través de una subasta. En la actualidad cualquier persona puede adquirir Cetes a través de la plataforma de CetesDirecto, de la SHCP. Hay Cetes a 28, 91, 182, 364 y 728 días. En cuanto a los valores de largo plazo, se puede escoger entre los Bonos D (Bonos de desarrollo del Gobierno federal) que tienen vencimientos a 1, 2, 3 y 5 años; los Bonos F que tienen vencimientos a 1 y 10 años; bonos a 3, 5, 10, 20 y 30 años y los UDIBonos a 3, 5, 10, 20 y 30 años. La cotización de estos instrumentos se puede encontrar en la página del Banco de México: <http://www.banxico.org.mx> la cual también ofrece un servicio de estadísticas muy útiles para estudiar el comportamiento dinámico de las tasas de interés asociadas a cada instrumento.

En los Estados Unidos hay instrumentos similares que emite la oficina del Tesoro de EU: pagarés, notas, bonos con cupón semestral y bonos cupón cero, entre otros. Estos se ofertan a través de subastas y para adquirir cada uno es necesario cubrir ciertos requerimientos. Son instrumentos

muy líquidos, es decir, se pueden comprar y vender fácilmente en el mercado antes de la fecha de vencimiento. Los pagarés del Tesoro tienen una duración de 3, 6 y 12 meses mientras que las notas del Tesoro tienen una madurez o vencimiento de 1 a 10 años. Para mayor información consultar la página: <https://home.treasury.gov/services/bonds-and-securities>.

Las empresas pueden emitir bonos a través de una institución financiera para allegarse recursos de los inversionistas. A estos bonos se les llama bonos corporativos y quienes los adquieren se les denomina como tenedores de bono. El rendimiento de la empresa afecta tanto a los accionistas que invirtieron capital en la empresa, como a los tenedores de bonos. En caso de quiebra de la empresa, los primeros que recuperan su dinero son los tenedores de bonos.

Otro instrumento importante, que está más relacionado con los préstamos, son las hipotecas. Las hipotecas son préstamos bancarios para la adquisición de bienes inmobiliarios como terrenos, departamentos, casas, entre otros. La propiedad que se adquiere con una hipoteca queda como respaldo o colateral del préstamo. Las hipotecas consisten en que una institución financiera le otorga a un comprador un monto para la compra de una propiedad a cambio del pago de un interés mensual por la duración de la deuda que puede ser a diez, quince o veinte años. Por lo general, el comprador pone una cantidad para la compra de la propiedad, conocido como anticipo o enganche, y el banco le presta el resto, conocido como principal. El comprador se obliga a pagar mensualmente un monto al banco, de forma tal que a la fecha de vencimiento se paga la totalidad del préstamo más los intereses.

2.2 Anualidades

Para poder calcular los valores de los instrumentos mencionados anteriormente se puede utilizar el concepto de anualidades, el cual se expone a continuación. En general, las anualidades son más útiles cuando se estudian instrumentos a largo plazo como se verá a continuación.

Una anualidad es una serie de pagos que se hacen a intervalos iguales de tiempo. Esto se puede ver cuando se pagan rentas, hipotecas, pagos a meses, pagos de un automóvil, etcétera. Originalmente, una anualidad consideraba solamente pagos por año, pero el mismo principio se puede aplicar para considerar otros periodos, por ejemplo, para los pagos a meses, o pagos semanales. El periodo durante el cual se realizan los pagos se llama el término de la anualidad.

El intervalo de tiempo entre pagos de la anualidad se llama el periodo de pago, mientras que el intervalo de tiempo entre momentos en que se genera el interés se llama el periodo de conversión de interés.

En nuestro caso solamente consideraremos anualidades en las que el periodo de pago y el periodo de conversión de interés son el mismo y los pagos son a montos iguales.

2.2.1 Valor presente y futuro de una anualidad

Considere una anualidad cuyos pagos de 1 unidad monetaria se realizan al final de cada periodo por n periodos.

Suponga que la tasa de interés es r por periodo. El valor presente de la anualidad se denota por $a_{\overline{n}|}$, donde n es el número de periodos. Por otra parte, el valor futuro de la anualidad se denota por $s_{\overline{n}|}$.

Una expresión para $a_{\overline{n}|}$ se obtiene observando que el valor presente de un pago de 1 unidad al final del primer periodo es v , donde $v = 1/(1+r)$; el valor presente de un pago de 1 unidad al final del segundo periodo es v^2 ; y así sucesivamente, hasta el valor presente de un pago de 1 unidad al final del n -ésimo periodo que es v^n . Así, el flujo de efectivo que se considera es $(0, 1, 1, \dots, 1)$ durante n periodos y el valor presente de dicho flujo de efectivo se puede calcular como

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+r)^i} = \sum_{i=1}^n v^i = v \sum_{i=1}^n v^{i-1} = v \sum_{i=0}^{n-1} v^i.$$

lo cual se observa en la figura 2.2.

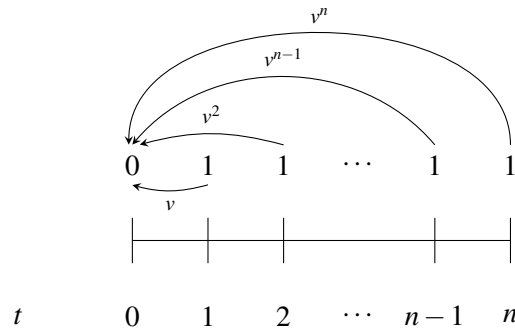


Figura 2.2: Valor presente de una anualidad

Haciendo uso de la fórmula para calcular el valor de una suma geométrica que se mencionó anteriormente:

$$a_{\overline{n}|} = v \frac{1 - v^n}{1 - v} = v \frac{1 - v^n}{rv} = \frac{1 - v^n}{r}.$$

Observe que, si ahora los pagos que se realizan al final de cada periodo son de x unidades monetarias, se tiene el flujo de efectivo $(0, x, x, \dots, x)$ durante n periodos y el valor presente de todos esos pagos es

$$\sum_{i=1}^n xv^i = x \sum_{i=1}^n v^i = xa_{\overline{n}|} = x \frac{1 - v^n}{r}.$$

De forma similar se puede encontrar una fórmula para el valor futuro $s_{\overline{n}|}$. El valor futuro de un pago de 1 unidad al final del primer periodo es $(1+r)^{n-1}$; el valor futuro de un pago de 1 unidad al final del segundo periodo es $(1+r)^{n-2}$; y así sucesivamente, hasta el valor futuro de un pago de 1 unidad al final del último periodo es 1. Así

$$s_{\overline{n}|} = \sum_{i=0}^{n-1} (1+r)^i = \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

como se ve en la figura 2.3, y como se vió antes, si la anualidad tiene pagos de x unidades en cada periodo, entonces el valor futuro de la anualidad es

$$\sum_{i=0}^{n-1} x(1+r)^i = x \sum_{i=0}^{n-1} (1+r)^i = xs_{\overline{n}|} = x \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

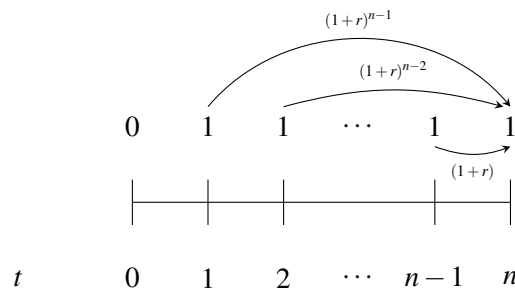


Figura 2.3: Valor futuro de una anualidad

■ **Ejemplo 2.1** Encuentre el valor presente de una anualidad que paga \$500 al final de cada semestre durante 20 años si la tasa de interés es del 9% convertible semestralmente.

Dado que el interés se obtiene cada medio año, entonces tenemos $2 \times 20 = 40$ periodos cuya tasa de interés es $0.09/2 = 0.045$, así el valor presente es:

$$500 \cdot a_{\overline{40}|} \approx 9200.79221$$

■ **Ejemplo 2.2** Si una persona invierte \$1000 al 8 % anual convertible trimestralmente, ¿cuánto se puede retirar al final de cada trimestre para agotar el fondo al transcurrir exactamente 12 años?

Sea x la cantidad retirada cada trimestre. Entonces:

$$x \cdot a_{\overline{48}|} = 1000,$$

o bien

$$x = \frac{1000}{a_{\overline{48}|}} = \frac{1000}{30.67311957} \approx 32.60183555$$

■ **Ejemplo 2.3** Compare los intereses que se pagarían por un préstamo de \$1000 durante un término de 10 años, si la tasa efectiva de interés es del 9 % anual, bajo los siguientes métodos de pago:

1. La cantidad prestada más el interés acumulado se paga al contado al final de los 10 años.
2. El interés se paga cada año conforme se acumula y el principal se paga al final de 10 años.
3. El préstamo se paga mediante pagos iguales durante los 10 años.

Aunque en todos los casos se paga el préstamo en 10 años, no se paga la misma cantidad en cada situación.

1. El valor futuro al final de los 10 años es

$$1000(1.09)^{10} = 2367.363675,$$

por lo que el interés es 1367.363675

2. Al final de cada año, se acumula $1000(0.09) = 90$ de interés, por lo que se pagan 900 de interés.
3. Sea x el pago que se realizará cada año. Entonces:

$$x \cdot a_{\overline{10}|} = 1000,$$

por lo cual

$$x = \frac{1000}{a_{\overline{10}|}} = \frac{1000}{6.417657701} \approx 155.8200899$$

El pago que se realiza cada año es 1558.200899 y por lo tanto, el interés es 558.200899

■

2.2.2 Perpetuidades

Una perpetuidad es una anualidad cuyos pagos se realizan en cada periodo futuro, sin que terminen en ningún momento.

El valor presente de una perpetuidad con pagos de 1 unidad monetaria al final de cada periodo se denota por $a_{\infty|}$, y se puede calcular como

$$a_{\infty|} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} v^n = \frac{v}{1-v} = \frac{v}{rv} = \frac{1}{r},$$

ya que $v < 1$, puesto que $r > 0$. Esto se ilustra en la figura 2.4.

No es posible calcular valores acumulados para perpetuidades, dado que los pagos no terminan en ningún momento.

■ **Ejemplo 2.4** Una herencia con valor de \$1,000,000 se deja a tres beneficiarios. El primer beneficiario recibe el interés que genera la herencia durante los primeros 10 años. El segundo beneficiario recibe el interés que genera la herencia durante los segundos 10 años. Finalmente, el tercero recibe el interés que genera la herencia después de los 20 años en perpetuidad. Si se asume que la herencia obtendrá 7 % de interés efectivo anual, calcule como se dividirían la herencia el día de hoy.

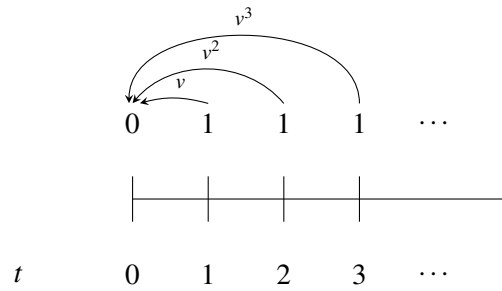


Figura 2.4: Valor presente de una perpetuidad

El primer beneficiario obtendría

$$1000000(0.07)a_{\overline{10}|} = 70000a_{\overline{10}|} \approx 491650.71$$

El segundo beneficiario obtendría

$$1000000(0.07)(a_{\overline{20}|} - a_{\overline{10}|}) \approx 249930.29$$

El tercer beneficiario obtendría

$$1000000(0.07)(a_{\infty} - a_{\overline{20}|}) \approx 258419.$$

Nótese que la suma de las tres cantidades es \$1,000,000. También notemos que el valor presente de la herencia al final de 20 años es

$$1000000(1.07)^{-20} \approx 258419,$$

que es precisamente lo que le corresponde al tercer beneficiario.

■

2.3 Bonos

Un bono es una obligación que adquiere el emisor de pagar un monto llamado principal o nominal a quien compra el bono, esto de acuerdo con las reglas acordadas al momento de la emisión. El bono paga el monto principal a la fecha de vencimiento o madurez del bono. Como se mencionó antes, los bonos pueden tener madureces de uno a 30 años. Para compensar el largo periodo de vigencia, algunos bonos hacen pagos fijos en ciertos periodos fijos que se llaman cupones, y éstos se pagan a lo largo de la vigencia del bono. Cuando un bono no tiene cupones se le llama bono cupón cero. Los cupones usualmente se pagan semestralmente o anualmente y su monto anual es un porcentaje del principal.

2.3.1 Rendimiento al vencimiento

El rendimiento al vencimiento de un bono es la tasa de interés implícita en la estructura de pago del bono. En otras palabras, es la tasa de interés a la cual el valor presente de los flujos del bono (cupones y principal) es exactamente igual al precio actual. En realidad, es la tasa interna de retorno del bono, aunque en este caso se llama el rendimiento al vencimiento o *yield to maturity*, y que se indica con λ .

Suponga que se ofrece un bono a un precio P con principal F y m cupones al año, con un monto de $\frac{C}{m}$ por cupón, y restan n periodos. Entonces el rendimiento del bono está dado por λ que satisface la siguiente ecuación

$$P = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^k} = \frac{F}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^n} + \sum_{k=1}^n \frac{\frac{C}{m}}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^k},$$

en donde utilizamos $\frac{\lambda}{m}$ como la tasa por periodo y c_k es el pago del bono correspondiente al k -ésimo periodo; es necesario recordar que en el último periodo el bono paga también el principal.

Observe que el primer término es el valor presente del principal del bono, mientras que el k -ésimo término de la suma es el valor presente del k -ésimo cupón que paga $\frac{C}{m}$. La fórmula de arriba se puede pensar en términos de anualidades. En particular, si a un bono le falta por pagar n cupones, con un monto C anual de cupones, y m cupones pagados por año tendrá un valor igual a

$$P = \frac{F}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^n} + \frac{C}{m} (a_{\overline{n}|}),$$

donde la anualidad considera a $\frac{\lambda}{m}$ como la tasa de interés.

■ **Ejemplo 2.5** ¿Cómo varía respecto a λ el valor de un bono sin cupones que paga \$1000 al vencimiento? Considere cuatro bonos, cuyas maduraciones son de 5, 10, 20 y 30 años, respectivamente.

■

$$P_j(\lambda) = \frac{1000}{(1 + \lambda)^j}, \quad j = 5, 10, 20, 30.$$

En la figura 2.5 se muestra la gráfica de λ vs. P que ilustra el comportamiento para distintas madureces. El precio del bono decrece cuando λ se incrementa y decrece más rápidamente cuando la madurez es más grande.

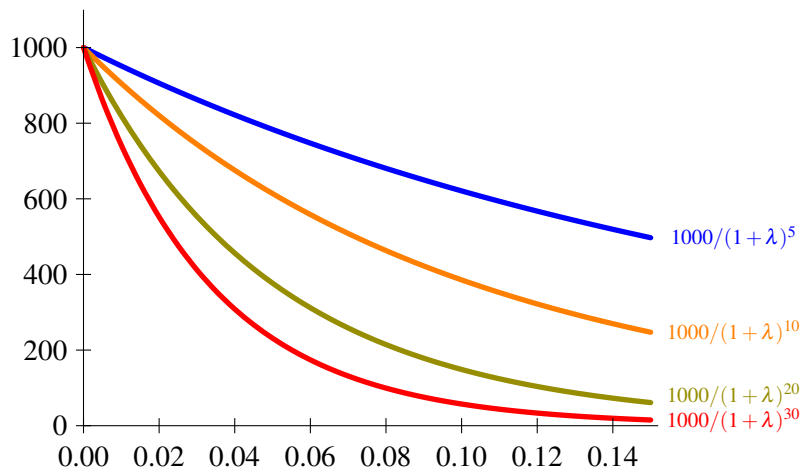


Figura 2.5: λ vs. precio de un bono para 5, 10, 20 y 30 años

■ **Ejemplo 2.6** Considere un bono a 30 años, cuyo principal es de 1000 pesos y paga cupones semestrales a una tasa del 10 % anual. Calcule su precio cuando el rendimiento al vencimiento es 0, 0.05, 0.10 y 0.20.

En este caso tenemos que $F = 1000$, $m = 2$, $n = 60$, $C = .10F = 100$.

■ Si $\lambda = 0$, entonces los valores presentes son iguales a los valores pagados. Así

$$P = F + \frac{C}{m}n = 4000.$$

■ Si $\lambda = 0.05$ entonces la tasa por periodo es igual a $r = \frac{0.05}{2}$ por lo cual

$$a_{\overline{60}|} = 30.90865649,$$

y tenemos

$$P = \frac{1000}{\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{60}} + \frac{100}{2} 30.90865649 = 1772.716412$$

- Si $\lambda = 0.1$ entonces $r = \frac{0.1}{2}$ por lo cual

$$a_{\overline{60}|} = 18.92928953,$$

y tenemos

$$P = \frac{1000}{\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^{60}} + \frac{100}{2} 18.92928953 = 1000.$$

Observe que cuando $\lambda = c$, el precio es igual al principal y en ese caso, al bono se le llama bono a la par.

- Si $\lambda = 0.2$ entonces $r = \frac{0.2}{2}$ por lo cual

$$a_{\overline{60}|} = 9.967157297,$$

y tenemos

$$P = \frac{1000}{\left(1 + \frac{0.2}{2}\right)^{60}} + \frac{100}{2} 9.967157297 = 501.6421351$$

■

2.3.2 Empresas calificadoras

¿Cómo decide un inversionista qué bono le conviene comprar? Para orientar a los compradores existen empresas que califican a los bonos a través de una clasificación. Hay tres empresas calificadoras, todas ellas de origen estadounidense: Fitch Ratings, Moody's y Standard & Poor's. En la siguiente tabla se especifica la clasificación que manejan Moody's y Standard & Poor's. A los bonos cuyo nivel es especulativo o inferior se les considera bonos chatarra o *junk bonds*.

Clasificación	Moody's	Standard & Poor's
Nivel alto	Aaa	AAA
	Aa	AA
Nivel medio	A	A
	Baa	BBB
Nivel especulativo	Ba	BB
	B	B
Peligro de quiebra	Ca	CCC
	C	CC
		C
		D

Se recomienda comprar bonos de nivel alto. Las calificadoras hacen esta clasificación tomando en consideración los estados financieros de la empresa, sus expectativas futuras de desarrollo y la situación del sector mercantil en la que se insertan sus productos. Por ejemplo, la situación del sector de construcción afecta la clasificación de CEMEX una de la principales cementeras de México.

2.3.3 Duración

Como se vio en la sección pasada, el precio de un bono a largo plazo es más sensible a cambios en el rendimiento. Para medir la sensibilidad a estos cambios, se usa el concepto de duración.

Definición 2.3.1 La **duración** de un bono es un promedio ponderado por el tiempo de los

valores presentes de los flujos recibidos, descontados a una tasa r dada. Es decir

$$D(r) = \frac{\sum_{j=0}^n t_j \text{VP}(t_j)}{\sum_{j=0}^n \text{VP}(t_j)}.$$

Definición 2.3.2 Si se utiliza el rendimiento de un bono λ como la tasa de interés (entonces cada cupón rinde $y = \lambda$) se tiene lo que se conoce como la **duración de Macaulay**:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n k \frac{c_k}{(1+y)^k}}{P}.$$

Proposición 2.3.1 La duración de Macaulay se puede calcular como

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{1+y+n(c-y)}{c((1+y)^n - 1) + y}.$$

Demostración Recordando que $v = \frac{1}{1+y}$ hacemos algunas manipulaciones algebraicas como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{k=1}^n k \frac{c_k}{(1+y)^k}}{P} = \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \sum_{k=1}^n \frac{k}{(1+y)^k}}{\frac{F}{(1+y)^n} + Ca_{\overline{n}|y}} \\ &= \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \left(a_{\overline{n}|y} + \frac{a_{\overline{n}|y} - nv^n}{y} \right)}{\frac{F}{(1+y)^n} + Ca_{\overline{n}|y}} = \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n + a_{\overline{n}|y} - nv^n}{y}}{\frac{F}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n}{y}} \\ &= \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \frac{\frac{1}{v} a_{\overline{n}|y} - v^n - nv^n}{y}}{\frac{F}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n}{y}} = \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \frac{\frac{1}{v} a_{\overline{n}|y} - nv^n}{y}}{\frac{F}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n}{y}} \\ &= \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \frac{\frac{1-v^n}{yv} - nv^n}{y}}{\frac{F}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n}{y}} = \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \frac{\frac{1-v^n - nyv^{n+1}}{yv}}{y}}{\frac{F}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n}{y}} \\ &= \frac{\frac{nF}{(1+y)^n} + C \frac{1-v^n - nyv^{n+1}}{y^2v}}{\frac{Fy + C(1-v^n)(1+y)^n}{y(1+y)^n}} = \frac{\frac{Fny^2v + C(1-v^n - nyv^{n+1})(1+y)^n}{y^2v(1+y)^n}}{\frac{Fy + C(1-v^n)(1+y)^n}{y(1+y)^n}} \\ &= \frac{Fny^2v - Cnyv + C(1-v^n)(1+y)^n}{yv(Fy + C(1-v^n)(1+y)^n)} = \frac{yv(Fny - Cn) + C(1-v^n)(1+y)^n + Fy - Fy}{yv(Fy + C(1-v^n)(1+y)^n)} \\ &= \frac{1}{yv} + \frac{Fny - Cn - \frac{F}{v}}{Fy + C((1+y)^n - 1)} = \frac{1+y}{y} + \frac{n(y-c) - (1+y)}{c((1+y)^n - 1) + y} \\ &= \frac{1+y}{y} - \frac{1+y+n(c-y)}{c((1+y)^n - 1) + y}, \end{aligned}$$

donde se utiliza el ejercicio 2.2 y el hecho de que $C = Fc$, con c la tasa cupón anual. ■

En caso de que el bono pague cupones m veces al año, entonces $y = \frac{\lambda}{m}$ y la duración de

Macauley se calcula como

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{k}{m} \frac{c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^k}}{P},$$

Proposición 2.3.2 Si el bono paga cupones m veces al año, entonces la duración de Macauley se puede calcular como

$$D = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc((1+y)^n - 1) + my}.$$

■ **Ejemplo 2.7** Encuentre la duración de las siguientes inversiones suponiendo una tasa efectiva de interés del 8%.

1. Un bono cupón cero a 10 años.
2. Un bono con cupones anuales del 8% a 10 años.
1. Para el primer bono no se recibe ningún pago durante los 10 años, hasta el décimo año, cuando se paga el principal del bono. Suponga que éste es igual a F , entonces para $t_i = i$ $VP(i) = 0$ para $i = 1, \dots, 9$ y

$$VP(10) = F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10},$$

con lo cual

$$D(0.08) = \frac{10F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10}}{F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10}} = 10.$$

2. Para el segundo bono, ahora sí se reciben cupones cada año y el principal es F , entonces

$$VP(i) = 0.08F \left(\frac{1}{1.08} \right)^i,$$

para $i = 1, \dots, 9$ y

$$VP(10) = 0.08F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10} + F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} D(0.08) &= \frac{\sum_{i=1}^{10} i VP(i)}{\sum_{i=1}^{10} VP(i)} = \frac{\sum_{i=1}^{10} 0.08iF \left(\frac{1}{1.08} \right)^i + 10F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10}}{\sum_{i=1}^{10} 0.08F \left(\frac{1}{1.08} \right)^i + F \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10}} \\ &= \frac{F \left[\sum_{i=1}^{10} 0.08i \left(\frac{1}{1.08} \right)^i + 10 \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10} \right]}{F \left[\sum_{i=1}^{10} 0.08 \left(\frac{1}{1.08} \right)^i + \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10} \right]} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{10} 0.08i \left(\frac{1}{1.08} \right)^i + 10 \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10}}{\sum_{i=1}^{10} 0.08 \left(\frac{1}{1.08} \right)^i + \left(\frac{1}{1.08} \right)^{10}}, \end{aligned}$$

de donde se ve que la duración no depende del valor del principal. Realizando los cálculos, se obtiene que

$$D(0.08) \approx 7.246887911$$

■

■ **Ejemplo 2.8** Calcule la duración de Macauley de un bono pagadero semestralmente durante 3 años con valor nominal de \$100, cuyo rendimiento es del 8% anual y que paga una tasa cupón del 7% anual.

En este caso, $m = 2$, $n = 3 \cdot 2 = 6$, $y = \frac{0.08}{2} = 0.04$ y $c = \frac{0.07}{2} = 0.035$, así

$$D = \frac{1+0.04}{2 \cdot 0.04} - \frac{1+0.04+6(0.035-0.04)}{2 \cdot 0.035((1+0.04)^6 - 1) + 2 \cdot 0.04} \approx 2.753717025$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la duración de Macauley no depende del valor del principal, y esto se puede comprobar en los cálculos

■

2.3.4 Duración modificada

La duración es útil, ya que mide directamente la sensibilidad del precio a cambios en el rendimiento. Otra forma de medir esto es la siguiente: considere el valor presente de los flujos

$$VP(t_k) = \frac{c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^k}.$$

La derivada respecto a λ es

$$\frac{dVP(t_k)}{d\lambda} = \frac{-\frac{k}{m}c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{k+1}} = -\frac{\frac{k}{m}}{1 + \frac{\lambda}{m}}VP(t_k),$$

por lo que para el precio del bono

$$P = \sum_{k=1}^n VP(t_k),$$

la derivada es

$$\frac{dP}{d\lambda} = -\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{m}}{1 + \frac{\lambda}{m}}VP(t_k) = -\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m}}DP = -D_M P,$$

donde se define a $D_M = \frac{D}{1 + \frac{\lambda}{m}}$ como la **duración modificada**, que es esencialmente la duración original, modificada por un factor de descuento. En caso de que m sea muy grande o λ sea muy pequeño, entonces $D_M \approx D$.

Proposición 2.3.3 — Fórmula de sensibilidad del precio. Dado que

$$\frac{dP}{d\lambda} = -D_M P,$$

entonces despejando P

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{d\lambda} = -D_M,$$

se obtiene una ecuación diferencial, donde

$$\frac{d}{d\lambda} \log P = -D_M,$$

y por ende

$$P = c_0 e^{-D_M \lambda}.$$

A partir de esta fórmula, se aproxima el cambio en el precio mediante la serie de Taylor alrededor de un valor λ_0 :

$$P(\lambda) \approx P(\lambda_0) + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot (\lambda - \lambda_0),$$

es decir

$$\Delta P = P(\lambda) - P(\lambda_0) \approx \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot (\lambda - \lambda_0) = -D_M(\lambda_0) \cdot P(\lambda_0) \cdot (\lambda - \lambda_0).$$

■ **Ejemplo 2.9** Considere un bono a la par a 30 años pagadero semestralmente con tasa cupón del 10% y valor nominal de \$100. Como se ha calculado anteriormente, la duración es de $D = 9.937877$, por lo tanto

$$D_M(0.10) = \frac{9.937877}{1.05} = 9.464644$$

Se sabe que el precio del bono es exactamente el valor del principal cuando el bono es a la par. Así, tenemos que

$$\frac{dP}{d\lambda}(0.10) = -D_M P = -946.4644$$

Si cambia el rendimiento al 11%, entonces

$$\Delta P = 100 - P(0.11) \approx -947 \cdot (0.01),$$

o bien

$$P(0.11) \approx 100 - 9.464644 = 90.5353552$$

■ **Ejemplo 2.10** Considere un bono cupón cero a 30 años con rendimiento del 10 %. Entonces $D = 30$ y

$$D_M = \frac{30}{1.10} = 27.$$

Ahora suponga que el rendimiento sube al 11 %. Entonces

$$\Delta P = P(0.11) - P(0.10) \approx -27 \cdot P(0.10) \cdot 0.01 = -0.27P(0.10),$$

es decir, se reduce el valor del bono en 27 %. Lo anterior muestra que los bonos cupón cero con vigencia a largo plazo son muy sensibles a variaciones en el rendimiento. ■

2.3.5 Convexidad

Una mejor aproximación a la obtenida en la sección anterior se realiza al incluir el término de segundo orden en la serie de Taylor. Ésta se puede dar en términos de la convexidad, que es la curvatura relativa en algún punto de la curva (en este caso, de la curva rendimiento-precio).

Definición 2.3.3 La **convexidad** se define como

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{d\lambda^2} \\ &= \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n \frac{d^2 \text{VP}(t_k)}{d\lambda^2} \\ &= \frac{1}{P} \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^2} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{m^2} \frac{c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^k}. \end{aligned}$$

Consideramos la serie de Taylor alrededor de λ_0 para $P(\lambda)$

$$P(\lambda) \approx P(\lambda_0) + \frac{dP}{d\lambda}(\lambda_0) \cdot (\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\lambda^2}(\lambda_0) \cdot (\lambda - \lambda_0)^2,$$

por lo cual

$$\Delta P = P(\lambda) - P(\lambda_0) \approx -D_M(\lambda_0)P(\lambda_0) \cdot (\lambda - \lambda_0) + \frac{P(\lambda_0)Q(\lambda_0)}{2} \cdot (\lambda - \lambda_0)^2.$$

■ **Ejemplo 2.11** Calcula la convexidad para el bono del ejemplo 2.8.

Tenemos que $y = \frac{\lambda}{m} = 0.04$, $c = 0.035$, $m = 2$, $n = 6$ y $F = 100$. Entonces

$$\text{VP}(t_i) = 0.035(100) \left(\frac{1}{1.04} \right)^i,$$

para $i = 1, \dots, 5$ y

$$\text{VP}(t_6) = 0.035(100) \left(\frac{1}{1.04} \right)^6 + 100 \left(\frac{1}{1.04} \right)^6.$$

Luego

$$P = \sum_{i=1}^n \text{VP}(t_i) = 100 \left[\sum_{i=1}^6 0.035 \left(\frac{1}{1.04} \right)^i + \left(\frac{1}{1.04} \right)^6 \right] = 100[0.97378932]$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{100[0.97378932]} \frac{1}{1.04^2} \left(\sum_{k=1}^6 \frac{k(k+1)}{2^2} \frac{0.035(100)}{1.04^k} + \frac{6 \cdot 7}{2^2} \frac{100}{1.04^6} \right) \\
 &= \frac{1}{100[0.97378932]} \frac{1}{1.04^2} \cdot 100 \left(\sum_{k=1}^6 \frac{k(k+1)}{4} \frac{0.035}{1.04^k} + \frac{21}{2} \frac{1}{1.04^6} \right) \\
 &= \frac{1}{0.97378932} \frac{1}{1.04^2} \left(\sum_{k=1}^6 \frac{k(k+1)}{4} \frac{0.035}{1.04^k} + \frac{21}{2} \frac{1}{1.04^6} \right) \\
 &\approx 8.154511119
 \end{aligned}$$

De manera similar a lo que ocurrió con la duración, el valor de la convexidad no depende del valor del principal, y esto se puede observar ya que en los cálculos anteriores el valor del principal, igual a 100, se cancela. ■

2.3.6 Inmunización de un portafolio

Es natural que una empresa tenga entradas y salidas de dinero a lo largo de varios periodos. Más aún, considere que dichas salidas de dinero son obligaciones que se deben cumplir; por ejemplo, una aseguradora que estima los pagos que debe hacer por siniestro cada año. ¿Cómo puede esa empresa garantizar que va a tener ese dinero en los periodos que lo requiere mediante el uso de bonos?: a través de un procedimiento llamado inmunización que consiste en adquirir dos bonos a distintas madurez cuyo valor presente sea igual al valor presente de las obligaciones, y asegurando que la duración del portafolio coincida con la fecha del vencimiento de las obligaciones. A continuación se presenta este procedimiento a detalle.

Si se tiene un portafolio formado por dos bonos A y B , entonces su valor presente es

$$P = P_A + P_B.$$

donde P_A y P_B son los precios (valores presentes) de los bonos.

La duración de cada bono es

$$\begin{aligned}
 D_A &= \frac{\sum_{k=0}^n t_k \text{VP}_A(t_k)}{P_A}, \\
 D_B &= \frac{\sum_{k=0}^n t_k \text{VP}_B(t_k)}{P_B},
 \end{aligned}$$

o bien

$$P_A D_A + P_B D_B = \sum_{k=0}^n t_k (\text{VP}_A(t_k) + \text{VP}_B(t_k)),$$

con lo cual podemos definir como la duración del portafolio a

$$D = \frac{P_A D_A + P_B D_B}{P} = \frac{\sum_{k=0}^n t_k (\text{VP}_A(t_k) + \text{VP}_B(t_k))}{P}.$$

En general, para m bonos tenemos

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + \cdots + P_m, \\
 D &= \frac{P_1}{P} D_1 + \cdots + \frac{P_m}{P} D_m.
 \end{aligned}$$

Si se quiere invertir para pagar un monto en un año, la opción más sencilla es invertir en un bono con madurez a un año, para obtener una cantidad exacta en el momento adecuado. No conviene

invertir en un bono a mayor plazo porque al venderlo después de un año, el monto que se reciba va depender de las tasas vigentes, y si éstas suben, el precio de venta será menor al precio de compra.

Por otra parte, si se desea invertir a 10 años, un bono a 10 años es lo más conveniente. Tratar de hacer esta misma inversión mediante bonos a un año, en la que se reinvierte el dinero obtenido cada año es riesgoso, ya que no se conoce la tasa de rendimiento de cada reinversión posterior.

¿Qué pasa si no hay un bono al plazo necesario, ya sea porque dicho instrumento no existe, o porque no hay disponibilidad de esos bonos en el momento de invertir?

Una primera suposición para poder cubrir las obligaciones a futuro es que se tenga suficiente dinero para comprar los instrumentos financieros. En otras palabras, que las entradas de dinero tienen al menos el mismo valor presente que las obligaciones futuras a la tasa de rendimiento de los bonos a considerar. Una simplificación adicional es suponer que, en general, los bonos tienen una tasa de rendimiento similar entre sí, por lo que se puede tomar una tasa de rendimiento promedio como la tasa que gobierna las operaciones.

Observe que también es importante buscar un portafolio de forma tal que, si cambia la tasa de rendimiento en el mercado (lo cual seguramente sucederá al transcurrir el tiempo), se evite estar en la situación de no cubrir las obligaciones. Para ello, dado que la duración está relacionada con la primera derivada del precio del bono, igualar la duración del portafolio y la duración de las obligaciones es equivalente a pedir que la derivada de la diferencia de los precios sea igual a 0. De esta forma se busca obtener un mínimo que garantice que se cuenta con los recursos para cubrir las obligaciones de cambios relativamente pequeños, (para checar esto, habría que calcular las convexidades del portafolio y de las obligaciones, o bien, modificar ligeramente la tasa de rendimiento y observar que, efectivamente, estamos en un mínimo). En caso de que la tasa de rendimiento cambie significativamente, lo que se suele hacer es una reinmunización, que consiste en vender el portafolio que se tiene actualmente, y volver a realizar este proceso de inmunización a la nueva tasa de rendimiento vigente en el mercado.

■ **Ejemplo 2.12** Una empresa debe pagar \$1,000,000 en 10 años. Para ser capaz de satisfacer esta obligación, tiene disponibles los siguientes bonos, todos con cupones pagables anualmente:

	Tasa cupón	Maduración	Tasa de rendimiento
Bono 1	6 %	30 años	9 %
Bono 2	11 %	10 años	9 %
Bono 3	9 %	20 años	9 %

Evidentemente, si se tuviera a la mano un bono cupón cero a 10 años, esa sería la opción más sencilla. En este caso hay que encontrar alguna combinación de dos de estos bonos para cubrir la deuda. Aunque es posible realizar el análisis para más de dos bonos, usualmente esto implica considerar otras ecuaciones o desigualdades; por ejemplo, en el caso de tres bonos, se podría incluir a la convexidad, pero esto ya no es tan sencillo de hacer y ya está fuera del alcance de este texto.

Primero calcule los precios de cada uno de los bonos, suponiendo que cada uno de ellos tiene valor nominal de \$100 (en caso de que sea otro el valor nominal, se puede hacer el mismo análisis; de hecho, las cantidades de cada bono obtenidas con otro valor nominal son las que obtendremos multiplicadas por un factor de escala proporcional):

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{100}{1.09^{30}} + 6a_{\overline{30}|} = \frac{100}{1.09^{30}} + 6 \frac{1 - \frac{1}{1.09^{30}}}{0.09} = 69.17903787, \\
 P_2 &= \frac{100}{1.09^{10}} + 11a_{\overline{10}|} = \frac{100}{1.09^{10}} + 11 \frac{1 - \frac{1}{1.09^{10}}}{0.09} = 112.8353154, \\
 P_3 &= \frac{100}{1.09^{20}} + 9a_{\overline{20}|} = \frac{100}{1.09^{20}} + 9 \frac{1 - \frac{1}{1.09^{20}}}{0.09} = 100.
 \end{aligned}$$

En el caso del tercer bono, al ser iguales la tasa cupón y la tasa de rendimiento, el precio es igual al valor nominal.

También se calcula las duraciones de cada bono:

$$D_1 = \frac{1 + 0.09}{0.09} - \frac{1 + 0.09 + 30(0.06 - 0.09)}{0.06((1 + 0.09)^{30} - 1) + 0.09} = 11.8811038,$$

$$D_2 = \frac{1 + 0.09}{0.09} - \frac{1 + 0.09 + 10(0.11 - 0.09)}{0.11((1 + 0.09)^{10} - 1) + 0.09} = 6.745277837,$$

$$D_3 = \frac{1 + 0.09}{0.09} - \frac{1 + 0.09}{0.09((1 + 0.09)^{20} - 1) + 0.09} = 9.950114779,$$

además, el valor presente de \$1,000,000 a una tasa del 9 % es:

$$\frac{1000000}{1.09^{10}} = 422410.8069,$$

Sean x, y, z la cantidad a comprar de los bonos 1, 2, y 3, respectivamente.

CASO 1: Si se compran los bonos 1 y 2, el sistema a resolver es:

$$422410.8069 = 69.17903787x + 112.8353154y$$

$$10 = 11.8811038 \frac{69.17903787}{422410.8069}x + 6.745277837 \frac{112.8353154}{422410.8069}y,$$

o bien

$$422410.8069 = 69.17903787x + 112.8353154y$$

$$10 = 0.001945791x + 0.001801813y,$$

el cual tiene solución $x = 3869.585673$, $y = 1371.171716$

CASO 2: Si se adquieren los bonos 1 y 3, el sistema a resolver es:

$$422410.8069 = 69.17903787x + 100z$$

$$10 = 11.8811038 \frac{69.17903787}{422410.8069}x + 9.950114779 \frac{100}{422410.8069}z,$$

o bien

$$422410.8069 = 69.17903787x + 112.8353154z$$

$$10 = 0.001945791x + 0.002355554z,$$

el cual tiene solución $x = 157.744972$, $z = 4114.981944$

CASO 3: En el caso de usar los bonos 2 y 3, el sistema a resolver es:

$$422410.8069 = 112.8353154y + 100z$$

$$10 = 6.745277837 \frac{112.8353154}{422410.8069}y + 9.950114779 \frac{100}{422410.8069}z,$$

o bien

$$422410.8069 = 69.17903787x + 100z$$

$$10 = 0.001945791x + 0.002355554z,$$

el cual tiene solución $y = -58.27156464$, $z = 4289.858973$

Entre estas opciones, la tercera no es viable dada la cantidad negativa del bono 2; la primera opción es mejor que la segunda, ya que incluye al bono 2, el cual no tiene una duración tan grande (y por lo tanto, los cambios respecto al rendimiento son menos pronunciados). Es fácil observar, mediante un pequeño cambio a la tasa de rendimiento, que los portafolios obtenidos son un mínimo, como se deseaba. ■

Para profundizar los temas expuestos en este capítulo, se sugieren los libros de Bodie y Merton (1998), Hull (2021), Kellison (2005) y Luenberger (1998).

2.4 Ejercicios

Ejercicio 2.1 Demuestre la siguiente relación entre el valor presente y el valor futuro de una anualidad:

$$s_{\overline{n}|} = (1 + r)^n a_{\overline{n}|}.$$

Ejercicio 2.2 Muestre que si la tasa de interés es i , el valor presente del flujo de efectivo $(1, 2, 3, \dots, n)$ se puede calcular como

$$a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - nv^n}{i}$$

Sugerencia: Note que el flujo de efectivo se puede escribir como la suma de dos flujos $(1, 1, \dots, 1)$ y $(0, 1, 2, \dots, n-1)$. A partir de esto, si A es el valor presente del flujo original, éste se puede calcular como la suma de los valores presente de los dos flujos, y también se puede encontrar $(1+i)A$. Calcule iA y despeje A para obtener la expresión deseada.

Ejercicio 2.3 ¿Qué monto debe pagar mensualmente para que al término de cinco años pague una deuda de 60,000 pesos al 8 % anual?

Ejercicio 2.4 Le prestan 100,000 pesos para pagar un gasto imprevisto. ¿Cuántos meses debe pagar para reembolsar la totalidad de la deuda si sólo puede pagar 5,000 pesos mensuales y la tasa de interés vigente es del 7.5 % anual?

Ejercicio 2.5 Usted solicita un préstamo bancario para adquirir un auto cuyo costo es de 120,000 pesos pagaderos a tres años con una tasa de interés anual del 9 %. Si da un enganche de 15,000 pesos y no considera los gastos administrativos, ¿cuánto debe pagar mensualmente? ¿Cuál será el interés acumulado?

Ejercicio 2.6 José le presta a Luis un millón de pesos pagaderos a 4 años con un interés anual del 10 %. ¿Cuánto debe pagarle cada año Luis a José? A los 10 meses Luis se da cuenta de que no va poder juntar la anualidad cada año por lo que le propone a José darle 110,000 pesos durante los siguientes 10 años. ¿Le conviene a José el nuevo acuerdo?

Ejercicio 2.7 Calcule el valor de un bono con principal F y cupones anuales con valor λF , durante n años.

Ejercicio 2.8 Realice una tabla cuyas filas sean los rendimientos al vencimiento del 3 %, 5 %, 8 %, 9 %, 10 %, 13 % y 15 %, y cuyas columnas sean maduraciones de 1, 5, 10, 20 y 30 años, para un bono con principal de \$1,000 y cupones anuales al 9 %.

Ejercicio 2.9 Determine cuál es el precio de un bono con cupones anuales al 8 % con principal de 1,000 pesos, madurez a 18 años con un rendimiento al vencimiento del 9 %. Encuentre también su duración modificada.

Ejercicio 2.10 Su asesor financiero le sugiere comprar 10 bonos a 3 años con principal de 1000 pesos que pagan un cupón anual del 10 % a un precio de 890 pesos por bono. ¿Le conviene adquirirlos cuando la tasa es del 11 %? ¿Por qué?

Ejercicio 2.11 Si adquirió un bono a 5 años el 20 de octubre del 2022 con $\lambda = 8.8\%$ y principal 1000 pesos, ¿le conviene venderlo tres años después en el mercado secundario si le ofrecen 990 pesos por el bono? ■

Ejercicio 2.12 Calcule la duración de Macaulay de un bono a la par pagadero semestralmente durante 30 años con valor nominal de \$100, cuya tasa cupón es del 10%. Hágalo mediante las dos fórmulas. ■

Ejercicio 2.13 Calcule el precio de un bono con valor principal de \$100 con cupones de \$5 y con madurez de 5 años si se supone que se compone al 8% anual o al 5% anual. Grafique el precio del bono como función de r . ¿Cuánto vale el bono cuando $r = 0$? ¿Y cuando $r \rightarrow \infty$? ■

Ejercicio 2.14 Un bono con valor principal de \$100 y cupones de \$8 anuales se intercambia a la par. ¿Cuál es el rendimiento al vencimiento del bono? ■

Ejercicio 2.15 Calcule la convexidad para el bono del ejercicio 2.12. ■

Ejercicio 2.16 Calcule la convexidad de un bono cupón cero a n años. ■

Ejercicio 2.17 Encuentre la convexidad de un bono cupón cero con madurez T que se compone de forma continua. ■

Ejercicio 2.18 Considere cuatro bonos cuyos pagos en cada año se muestran en la siguiente tabla y que se negocian para tener un rendimiento al vencimiento del 15%.

	Bono A	Bono B	Bono C	Bono D
Año 1	100	50	0	$0 + 1000$
Año 2	100	50	0	0
Año 3	$100 + 1000$	$50 + 1000$	$0 + 1000$	0

1. Determine el precio de cada bono.
2. Determine la duración de cada bono. ¿Cuál bono es más sensible a los cambios en el rendimiento?
3. Si se adeudan \$20,000 al final de dos años, construya un portafolio que lo inmunice la deuda.
4. Si decide usar el bono C, ¿cuál otro bono escogería?

3. Curva de estructura de tasas

3.1 Introducción

Este capítulo trata sobre el comportamiento de las tasas de interés nominales asociadas a los instrumentos gubernamentales de renta fija con el fin de tener un procedimiento para valuar cualquier instrumento de este tipo que tenga una temporalidad o madurez distinta a la usual y que sea emitido por cualquier institución financiera o corporativa.

Considere la siguiente tabla con información que proviene de la página de Banxico del 1 de julio de 2022 sobre las tasas de interés asociadas a algunos instrumentos gubernamentales cuyas subastas se llevaron a cabo del 16 de junio al 30 de junio del 2022.

Instrumento	Tasa nominal	Fecha de emisión
Cetes 28 días	0.0756	30 de junio de 2022
Cetes 90 días	0.0824	30 de junio de 2022
Cetes 180 días	0.0897	30 de junio de 2022
Cetes 360 días	0.0973	30 de junio de 2022
Bono 5 años	0.0941	30 de junio de 2022
Bono 10 años	0.0922	23 de junio de 2022
Bono 30 años	0.0934	16 de junio de 2022

Si se grafican las tasas contra el vencimiento o la madurez y uniendo los puntos con rectas se obtiene una curva a la que se le denomina la curva de estructura de tasas del 30 de junio de 2022, como se aprecia en la figura 3.1.

Se puede observar que esta curva se comporta de forma distinta para las tasas asociadas a los instrumentos de renta fija a corto plazo que para las tasas asociadas a los instrumentos de más largo plazo. De $M = 0$ a $M = 1$ la curva es creciente, pero a partir de ese momento disminuye y vuelve a remontar lentamente sin alcanzar a la tasa asociada a $M = 1$. Por lo general, las tasas a largo plazo reaccionan más lentamente a los cambios de los mercados y se espera que sean más altas que las de corto plazo, premiando así a los inversionistas que invierten a más largo plazo. En condiciones de estabilidad la curva de estructura de tasas es creciente respecto a la madurez. El 1 de julio de 2022 las tasas a corto plazo reflejaban el incremento de la inflación a 7.65% y el incremento de las tasas a corto plazo en Estados Unidos. Si no se incrementan las tasas a largo plazo, esto se puede interpretar como que el mercado espera que las tasas a corto plazo disminuyan en el futuro.

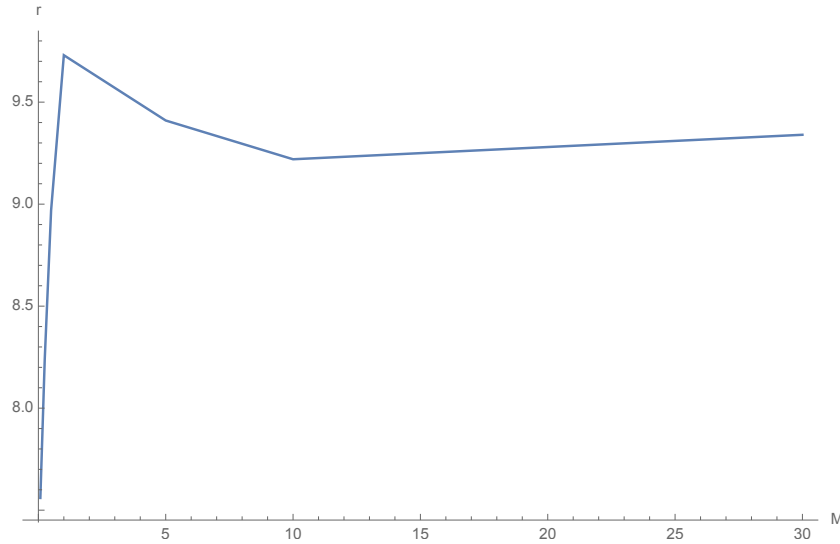


Figura 3.1: Curva de estructura de tasas del 30 de junio de 2022

La curva de estructura de tasas presenta un retrato del comportamiento de las tasas en un momento determinado, pero hay que estar conscientes de que las tasas son dinámicas y dependen del tiempo.

La utilidad de la curva de estructura de tasas es que sirve de referencia para saber qué rendimiento deben tener otros instrumentos que se ofrezcan en el mercado en esa misma fecha. En principio, otro instrumento no gubernamental debería ofrecer una tasa superior tomando en consideración el riesgo del instrumento, pero para las inversiones a corto plazo los Cetes son los que ofrecen los mejores rendimientos. En el caso de los bonos corporativos su rendimiento siempre es superior al que ofrece Banxico para compensar al inversionista por el riesgo que conlleva invertir en ellos.

Otra aplicación de esta curva es que permite estimar la tasa que debería tener un instrumento cuyo vencimiento no sea convencional. Por ejemplo, un pagaré a 4 meses o un bono a 8 años. Para determinar la tasa se usan varios procedimientos como el de interpolación, splines o el método de la alambrada. A continuación se presentan algunos de estos procedimientos.

1. **Interpolación:** el objetivo es construir un polinomio $p(x)$ de grado n cuya gráfica una a los puntos (t_i, r_i) , $i = 0, \dots, n$, es decir que cumpla que $p(t_i) = r_i$ para cada i . Cuando un polinomio cumple lo anterior se dice que interpola a los datos y los datos se conocen como puntos de interpolación. Una vez construido el polinomio, se evalúa para cualquier tiempo $t \in [t_1, t_n]$. Este método tiene el inconveniente que a medida que se aumentan los puntos de interpolación, el polinomio oscila de forma más pronunciada entre cada uno de ellos. Observe que construir el polinomio es equivalente a resolver un problema lineal de $n + 1$ incógnitas que son las a_i , $i = 0, \dots, n$, tal que el polinomio

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

satisfaga

$$p(t_i) = r_i, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones $V\vec{a} = \vec{r}$ con $V_{ij} = t_i^{j-1}$, $1 \leq i, j \leq n+1$, $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ y $\vec{r} = (r_1, \dots, r_{n+1})$. La matriz V se conoce como la matriz de Vandermonde y es invertible siempre y cuando $t_i \neq t_j$ para $i \neq j$.

■ **Ejemplo 3.1** Construir el polinomio que interpola los datos de la tabla anterior. Estimar la tasa para 120 días y para un bono a 3 años. Se tienen 7 datos por lo que el polinomio es de grado 6.

$$\begin{aligned} p(t) &= -7.69 \times 10^{-7} t^6 + 4.516 \times 10^{-5} t^5 - 0.000887 t^4 + 0.0076886 t^3 \\ &= 0.0719876 + 0.0487547 t - 0.030288 t^2. \end{aligned}$$

Para 120 días, $t = 120/360 = 0.3333$, $p(0.3333) = 0.0851478$ y $p(3) = 0.09178$, ambos resultados son razonables. Pero la gráfica en la Figura 3.2 muestra que los puntos interpolados no se inscriben en forma suave.

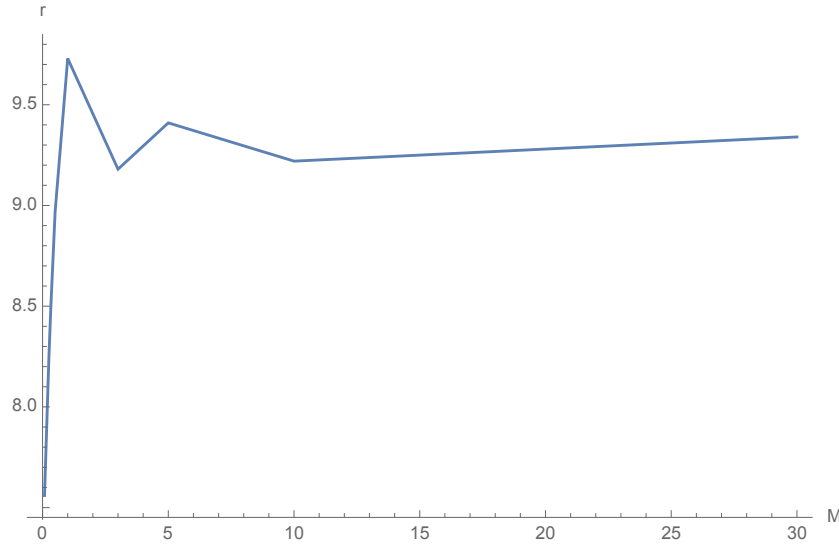


Figura 3.2: Curva con puntos interpolados

2. **Interpolación lineal:** Cuando se trabaja con tasas anuales a largo plazo lo que se usa es interpolación lineal para evitar las oscilaciones de los polinomios de alto grado. Este método consiste en lo siguiente: denote como r y P la tasa anual que se busca y su plazo, respectivamente. Seleccione los plazos que acotan inferiormente y superiormente a P y que denotaremos como P_c y P_l , respectivamente, y por r_c y r_l las tasas correspondientes, entonces

$$r = r_c + (r_l - r_c) \frac{(P - P_c)}{(P_l - P_c)}. \quad (3.1)$$

■ **Ejemplo 3.2** Use los datos del ejemplo anterior y estime por el método de interpolación lineal la tasa asociada a un bono a 3 años. El plazo de un Cete a un año y de un bono a 5 años acotan al plazo del bono a tres años:

$$r = 0.0973 + (0.0941 - 0.0973)(2/4) = 0.0957,$$

esta estimación es mejor a la obtenida en el ejercicio anterior ya que es consistente con los datos observados. ■

3. **Método de la alambrada:** este es el procedimiento más utilizado para estimar las tasas a corto plazo en la banca y casas de bolsa y, para su aplicación se requiere usar las tasas forward que se verán en la siguiente sección, por lo que se presentarán al final del capítulo.

3.2 Tasas spot y tasas forward

3.2.1 Tasas spot

Si se trabaja con la curva de estructura de tasas del día de hoy, que corresponde a $t = 0$, se dice que esa es la cotización de las tasas spot o tasas al día.

Definición 3.2.1 Para definir una **tasa spot** a partir de la curva de estructura de tasas:

1. La tasa spot s_j anual asociada al instrumento j con madurez t_j es aquella que al aplicarse a un monto M_0 se tendrá al vencimiento

$$M_1 = M_0(1 + s_j)^{t_j}.$$

2. Si la tasa spot s_j se compone al año m veces con vencimiento t_j , entonces

$$M_1 = M_0 \left(1 + \frac{s_j}{m} \right)^{mt_j}.$$

3. Si se utiliza una tasa spot s_j que se compone en forma continua, ésta cumple

$$M_1 = M_0 e^{s_j t_j}.$$

Definición 3.2.2 La curva de estructura de tasas también sirve para definir el **factor de descuento** v_j .

1. El factor de descuento v_j anual asociada al instrumento j con madurez t_j es

$$v_j = \frac{1}{(1 + s_j)^{t_j}}.$$

2. Si la tasa spot s_j se compone al año m veces, entonces el factor de descuento al periodo t_j es

$$v_j = \frac{1}{\left(1 + \frac{s_j}{m} \right)^{mt_j}}.$$

3. Si se utiliza una tasa spot s_j que se compone en forma continua, entonces el factor de descuento es

$$v_j = e^{-s_j t_j}.$$

3.2.2 Tasas forward

Definición 3.2.3 Las **tasas forward** son tasas de interés que se aplican cuando la inversión se lleva a cabo en el futuro bajo términos acordados en el presente (es decir, en $t = 0$).

Suponga que deposita en $t = 0$ un monto a dos años a una tasa spot bianual con rendimiento anual $r_2 > 0$. Al término de dos años obtendrá

$$M_2 = M_0(1 + r_2)^2.$$

Otra posibilidad es invertirlo a un año a una tasa spot anual con rendimiento $r_1 > 0$ con lo que obtendrá $M_1 = M_0(1 + r_1)$ y posteriormente, invertir M_1 a la tasa anual de referencia que se ofrezca en ese momento. Esta tasa se desconoce al tiempo $t = 0$ y para distinguirla de la tasa spot r_1 , se le denomina la tasa forward f_1 . Esta tasa debe ser tal que al término del segundo año el monto M_1 sea igual al monto M_2 por lo que

$$M_2 = M_0(1 + r_2)^2,$$

$$M_2 = M_1(1 + f_1) = M_0(1 + r_1)(1 + f_1).$$

Igualando los lados derechos, tenemos que

$$(1 + r_1)(1 + f_1) = (1 + r_2)^2,$$

de donde despejando f_1

$$f_1 = \frac{(1 + r_2)^2}{(1 + r_1)} - 1.$$

Algo similar se hace si la tasa anual es convertible a m periodos al año. Por ejemplo, si se tiene un monto M_0 que se invierte a una tasa anual r_1 , convertible cada 90 días, entonces

$$M_1 = M_0 \left(1 + \frac{r_1}{4} \right)^4.$$

En cambio, si se invierte a la tasa r_2 anual que se compone cada 180 días y después se deposita a la tasa forward que se compone cada 180 días a partir del día 180

$$M_1 = M_0 \left(1 + \frac{r_2}{2} \right) \left(1 + \frac{f_1}{2} \right),$$

por lo cual

$$M_0 \left(1 + \frac{r_1}{4}\right)^4 = M_0 \left(1 + \frac{r_2}{2}\right) \left(1 + \frac{f_1}{2}\right),$$

de donde

$$f_1 = 2 \left[\frac{\left(1 + \frac{r_1}{4}\right)^4}{\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)} - 1 \right].$$

Las tasas forward que se aplican en el mercado son distintas si son para préstamos o para réditos. La tasa debe estar acorde con la curva de estructura de tasas del día en que se hace el cálculo. Denote por f_{t_1, t_2} la tasa que se inicia al tiempo t_1 y que termina al tiempo t_2 con $t_2 > t_1 > 0$, que es consistente con una curva de tasas spot y que se calcula de la siguiente forma dependiendo de cómo se componga:

1. Cuando se componen en forma anual la tasa forward que se inicia al i -ésimo año y termina en el j -ésimo año:

$$(1 + r_j)^j = (1 + r_i)^i (1 + f_{i,j})^{j-i}$$

$$f_{i,j} = \left[\frac{(1 + r_j)^j}{(1 + r_i)^i} \right]^{\frac{1}{j-i}} - 1,$$

con r_i la tasa asociada al instrumento con madurez i .

2. Si todas las tasas se componen m veces al año

$$\left(1 + \frac{r_j}{m}\right)^{mj} = \left(1 + \frac{r_i}{m}\right)^{mi} \left(1 + \frac{f_{i,j}}{m}\right)^{m(j-i)}$$

$$f_{i,j} = m \left[\frac{\left(1 + \frac{r_j}{m}\right)^j}{\left(1 + \frac{r_i}{m}\right)^i} \right]^{\frac{1}{j-i}} - m.$$

■ **Ejemplo 3.3** Se desea invertir 1000 pesos por un año con el siguiente esquema de inversión: los primeros 180 días se invierte en un depósito a 180 días con una tasa spot del 8.5 % anual convertible cada 180 días y los restantes 180 días se invierten a la tasa forward correspondiente. ¿Cuál es la tasa forward anual que debe considerarse si la tasa spot por un año es del 9 % anual? ■

$$f_1 = 2 \left[\frac{(1 + 0.09)}{\left(1 + \frac{0.085}{2}\right)} - 1 \right] = 2 \left[\frac{1.09}{1.0425} - 1 \right] = 0.0911271.$$

3.3 Método de la alamburada

Este método se utiliza para estimar tasas a corto plazo que se componen en plazos menores a un año. Suponga que en $t = 0$ se desea calcular la tasa que debe ofrecer un bono emitido por una empresa a una madurez distinta a la que se ofrecen los instrumentos gubernamentales. Ese día se construye la curva de estructura de tasas. A partir de estos datos, se calcula la tasa que le corresponde por medio del método de la alamburada. Éste consiste en un algoritmo de tres pasos:

1. De los datos se seleccionan los plazos que acotan inferiormente y superiormente al plazo que interesa y que se denota por P . El primero se denomina plazo corto P_c y el otro como plazo largo P_ℓ y las tasas asociadas r_c y r_ℓ , respectivamente. Con estas tasas se estima la tasa forward que se inicia en P_c con duración $P_\ell - P_c$ y que se denota por $f_{P_\ell - P_c}$. Esta tasa debe cumplir la siguiente relación:

$$1 + \frac{r_\ell}{\frac{360}{P_\ell}} = \left(1 + \frac{r_c}{\frac{360}{P_c}}\right) \left(1 + \frac{f_{P_\ell - P_c}}{\frac{360}{P_\ell - P_c}}\right),$$

despejando $f_{P_\ell - P_c}$ se obtiene

$$f_{P_\ell - P_c} = \frac{360}{P_\ell - P_c} \left[\frac{(1 + r_\ell \frac{P_\ell}{360})}{(1 + r_c \frac{P_c}{360})} - 1 \right].$$

2. Calcule ahora la tasa forward que se inicia en P_c con vencimiento en P y que se denota por $f_{P - P_c}$

$$\left(1 + \frac{f_{P - P_c}}{\frac{360}{P - P_c}} \right)^{\frac{P_\ell - P_c}{P - P_c}} = 1 + f_{P_\ell - P_c} \frac{P_\ell - P_c}{360},$$

al despejar $f_{P - P_c}$ se obtiene

$$f_{P - P_c} = \left[\left(1 + f_{P_\ell - P_c} \frac{P_\ell - P_c}{360} \right)^{\frac{P - P_c}{P_\ell - P_c}} - 1 \right] \frac{360}{P - P_c}.$$

3. Por último, la tasa de P_c días y la de $P - P_c$ calculadas en el paso anterior se convierten a tasas anualizadas, obteniéndose así la tasa anual r_p a P días

$$1 + \frac{r_p}{\frac{360}{P}} = \left(1 + \frac{r_c}{\frac{360}{P_c}} \right) \left(1 + \frac{f_{P - P_c}}{\frac{360}{P - P_c}} \right).$$

Al despejar la tasa r_p se obtiene:

$$r_p = \frac{360}{P} \left[\left(1 + r_c \frac{P_c}{360} \right) \left(1 + f_{P - P_c} \frac{P - P_c}{360} \right) - 1 \right].$$

■ **Ejemplo 3.4** A partir de los datos de la Figura 4.1, calcule la tasa a 120 días con el algoritmo anterior.

1. Primer paso: $120 \in [90, 180]$ por lo que $P_c = 90$ con $r_c = 0.0824$ y $P_\ell = 180$ con $r_\ell = .0897$.

$$f_{P_\ell - P_c} = \frac{360}{90} \left[\frac{(1 + 0.0897 \frac{180}{360})}{(1 + 0.0824 \frac{90}{360})} - 1 \right] = 0.095042132$$

2. Calcule ahora $f_{P - P_c}$ con $P = 120$ y duración $P - P_c = 30$:

$$f_{P - P_c} = \left[\left(1 + f_{P_\ell - P_c} \frac{90}{360} \right)^{\frac{30}{90}} - 1 \right] \frac{360}{30} = 0.094299163$$

3. Por último, calcule la tasa r_p anualizada. Compruebe que $r_p \in [r_c, r_\ell]$. ■

3.4 Ejercicios

Ejercicio 3.1 Estos son los datos del 4 de septiembre del 2025 de algunos instrumentos gubernamentales. Grafique la curva de estructura de tasas y dé una explicación sobre su forma. Contrástela con la curva del 30 de junio del 2022. Construya el polinomio de interpolación y gráfiquelo. Si lo usa para estimar la tasa asociada a los 300 días y a los 7 años, ¿qué tan buena es la estimación?

Instrumento	Tasa nominal
Cetes 28 días	0.0735
Cetes 90 días	0.0763
Cetes 180 días	0.0783
Cetes 360 días	0.0822
Bono a 5 años	0.0849
Bono a 10 años	0.0914
Bono a 20 años	0.0971

Ejercicio 3.2 Deduzca la expresión (3.1). ■

Ejercicio 3.3 Use los datos del ejercicio 3.1 y estime por el método de interpolación lineal la tasa para 7 años. Compare con la que obtuvo por interpolación. ■

Ejercicio 3.4 Calcule la tasa forward a un año si la tasa spot a uno y dos años es 0.0759 y 0.0789, respectivamente. ■

Ejercicio 3.5 Si la tasa forward a un año es 0.0833 y la tasa a dos años es 0.0855, ¿cuál sería la tasa spot a un año? ■

Ejercicio 3.6 Si la tasa a 91 días es de 0.0736 y la tasa a 182 días es de 0.0750, estime la tasa forward que se inicia en 120 días y termina en 182 días. ■

Ejercicio 3.7 Use los datos del ejercicio 3.1 y estime por el método de la alambrada la tasa para 300 días. Compare con la que obtuvo por interpolación. ■

Ejercicio 3.8 Determine la curva de estructura de tasas del día de hoy asociada a los siguientes instrumentos gubernamentales (use la información que proporciona Banxico). Compare con la curva de estructura de tasas asociada a la tabla de la sección 3.1. Dé una explicación sobre la forma que tiene la curva.

Instrumento	Tasa nominal
Cetes 28 días	
Cetes 90 días	
Cetes 180 días	
Cetes 360 días	
Bono a 5 años	
Bono a 10 años	
Bono a 30 años	

Estime $r(T)$ para $T = 150$ días y 3 años por el método mas conveniente. Justifique su elección. ■

4. Optimización de portafolios

En el segundo capítulo se expusieron los instrumentos de renta fija cuyo rendimiento se conoce de antemano. Por ejemplo, los bonos emitidos a través de Banxico cuyo rendimiento se conoce al momento de adquirirlos y está garantizado si se conservan hasta su vencimiento. Únicamente cuando se venden anticipadamente en el mercado secundario, se corre el riesgo de no recuperar lo que se invirtió, debido a las variaciones en la tasa de interés. En cambio, los bonos corporativos, emitidos por las empresas, aunque su rendimiento es conocido, tienen el riesgo de incumplimiento en el caso de que la empresa quiebre. De ahí la importancia de adquirir bonos con calificación alta.

En este capítulo se analizan los instrumentos de inversión de renta variable cuyo rendimiento no se conoce al momento de invertir y que puede ser distinto a lo esperado. Por ejemplo, la compra y venta de acciones que cotizan en el mercado accionario, las hipotecas y préstamos con interés variable y la compra al mayoreo de bienes de consumo con el fin de revenderlos después. Cuando se invierte en ellos, con la expectativa de que sus precios suban para así hacer una ganancia al venderlos, nadie puede asegurar que eso sucederá, ya que éstos pueden subir o bajar dependiendo de muchos factores. Al invertir en instrumentos de renta variable es posible tanto obtener una ganancia como perder parte o todo el dinero que se invirtió. Por ello, se conocen también como activos con riesgo y hay que tener cuidado cuando se invierte en ellos.

En el caso de invertir en acciones, es necesario definir una estrategia para seleccionar aquellas que minimicen el riesgo y garanticen una ganancia mayor a la que ofrece, por ejemplo, un depósito bancario o buscar maximizar la ganancia sin rebasar un nivel de riesgo. En ambos casos definir la estrategia implica resolver un problema de optimización que se conoce en la literatura con el nombre de optimización de portafolios. Un portafolio consiste en un conjunto de activos con o sin riesgo. En nuestro caso nos concentramos en portafolios integrados con acciones que se adquieren en las dos bolsas que operan en México: la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y la Bolsa Institucional de Valores (BIVA). Según cifras de 2024, hay 133 empresas que cotizan en la BMV. Dado un monto M_0 , ¿cómo seleccionar las acciones y cuánto invertir en cada una de ellas?: eso es lo que se determina al resolver el problema de optimización.

El primero en plantear la importancia de seleccionar los activos, tomando en cuenta tanto su riesgo como su rendimiento, fue Harry Markowitz cuando publicó su teoría de riesgo-rendimiento en 1952, lo que lo hizo merecedor del Premio Nobel de Economía en 1990, ver Markowitz (1952).

El objetivo de este capítulo es determinar la composición de un portafolio de inversión bajo los supuestos de la teoría de riesgo-rendimiento y señalar la importancia de diversificar la inversión. Se busca también que el lector se familiarice con la forma en que hoy en día se proporcionan las cotizaciones en la BMV y en BIVA como con el tratamiento estadístico de esta información.

4.1 Mercado accionario

La BMV y recientemente BIVA son empresas privadas que manejan la compra y venta de las acciones de aquellas empresas que han decidido vender parte de su capital social a los inversionistas. Una acción es un título que representa una parte proporcional del capital social de una empresa. Las acciones pueden ser ordinarias o privilegiadas. Las privilegiadas tienen más beneficios, ya que tienen acceso al reparto de utilidades de la empresa. Las que se adquieren en la BMV y en BIVA son ordinarias. Las empresas cotizan en la bolsa de su preferencia para allegarse recursos a través de la venta de esas acciones. Esto conlleva obligaciones, ya que las empresas deben informar periódicamente al mercado sobre sus estados financieros para que los accionistas puedan decidir si les conviene comprar o vender las acciones de la empresa. El mercado define el precio de una acción a través del proceso de compra-venta. Ambas bolsas funcionan de las 9:00 a las 14:00 hrs. de lunes a viernes durante 252 días al año. Se puede tener acceso a los precios diarios de las acciones en internet, con solo preguntar en un buscador el precio de la acción que nos interesa. Tanto Yahoo como Google tienen esa información; cuando se solicita, aparece una tabla con el precio que alcanzó ese día a las 14:00 hrs., que se denomina como precio de cierre, y la cotización mínima y máxima durante esa jornada. También es posible tener acceso a los precios diarios de cierre a lo largo de una semana, mes o año que se denominan como precios diarios históricos. Los particulares no invierten directamente, cuando les interesa invertir lo hacen a través de una casa de bolsa o de un banco. El mercado accionario es regulado y supervisado por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), ver Figura 2.1.

El rendimiento de una acción se calcula de una manera muy similar a la de un depósito bancario. Suponga que deposita $M_0 = 100$ pesos a un interés anual $r > 0$. Al término de un año, el monto que tendrá es $M_1 = M_0(1 + r)$. El rendimiento es el cambio relativo del monto y es igual al interés

$$r = \frac{M_1 - M_0}{M_0} > 0.$$

Sea P_0 el precio de una acción al momento de la compra y P_1 el precio un año después. El rendimiento R anual de una acción es igual a

$$R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}.$$

Observe que en este caso R toma valores en todo los reales y no solo en los reales positivos ya que R puede ser negativo lo que implica que hay una pérdida. Hay otra diferencia sustancial entre trabajar con los rendimientos de un instrumento de renta fija que con los de un instrumento de renta variable. En el primer caso r es conocida al momento de la inversión mientras que R se desconoce al no tener certeza del valor que tomará P_1 . Por ello, al modelar el comportamiento de dichos instrumentos se supone que P_1 y, en consecuencia, R son variables aleatorias. En finanzas se prefiere trabajar con los rendimientos logarítmicos que se denotan por $\tilde{r}$

$$\tilde{r} = \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right). \quad (4.1)$$

Observe que R es la aproximación lineal de $\tilde{r}$. Si P_1 es una variable aleatoria también lo es $\tilde{r}$. De aquí en adelante, a los rendimientos logarítmicos les llamaremos simplemente rendimientos y se denotarán por r .

Cuando se desea invertir en una acción de una empresa, lo primero que se debe hacer es informarse sobre su desempeño en el mercado accionario y son los datos diarios históricos los que proporcionan esta información. A continuación se presenta una propuesta para el tratamiento estadístico de estos datos.

4.2 Tratamiento de los datos históricos

Suponga que desea invertir en la acción de Liverpool el 1 de junio 2023 y cuenta con el precio diario de cierre del 1 de junio del 2022 al 31 de mayo del 2023. Denote por P_j la j -ésima

observación de los precios con $j = 1$ hasta 252. Estos datos son un ejemplo de una serie de tiempo financiera. Se denomina con este término tanto a un conjunto de datos observados periódicamente a lo largo del tiempo, como a una clase particular de procesos estocásticos que consisten en una sucesión discreta de variables aleatorias. Hay una diferencia importante entre una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y una serie de tiempo. En una serie de tiempo las variables pueden estar correlacionadas entre sí y su distribución variar en el tiempo. En este texto dado que no nos interesa determinar un modelo matemático que describa el comportamiento dinámico de los datos, por simplicidad, se supone que son una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. A continuación se presentan las gráficas de los precios y rendimientos de la acción Liverpool.

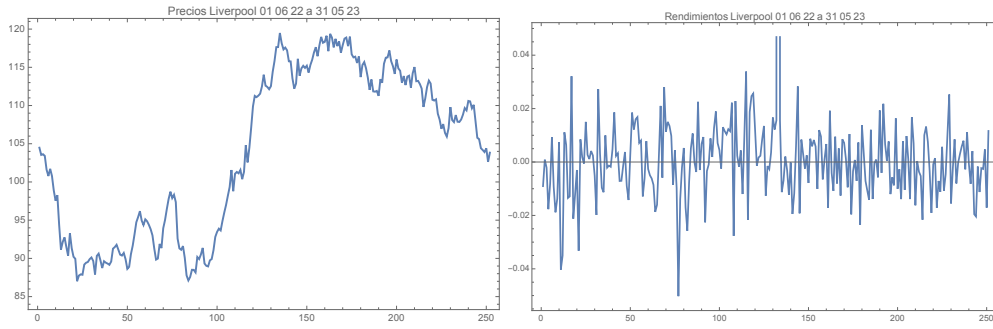


Figura 4.1: Precios y rendimientos de la acción Liverpool

Como se observa en la Figura 4.1, la gráfica de los precios tiene una tendencia decreciente al inicio para posteriormente, remontar hasta alcanzar casi los 120 pesos; después muestra una tendencia suave a la baja. En cuanto a la gráfica de los rendimientos ya no se observa tendencia alguna, solo subidas y bajadas alrededor de un valor cercano al cero. Los picos más pronunciados corresponden a los rendimientos positivos o negativos que más se alejan del promedio, por lo que a mayor número de picos, mayor la desviación estándar de los datos. En finanzas a la desviación estándar se le denomina volatilidad y juega un papel muy importante. Si se supone que los rendimientos tienen distribución normal, la volatilidad da una idea muy precisa del riesgo. A mayor volatilidad, mayor riesgo.

A continuación se estima la media μ y la varianza σ^2 de una muestra, con M observaciones, a través de la media y la varianza muestral que se definen de la siguiente forma y que se denotan como $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$, respectivamente:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^{M-1} \ln \left(\frac{P_{j+1}}{P_j} \right), \quad (4.2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-2} \sum_{j=1}^{M-1} \left[\ln \left(\frac{P_{j+1}}{P_j} \right) - \hat{\mu} \right]^2. \quad (4.3)$$

Al suponer que los rendimientos son normales, si el portafolio consiste de varios activos, en particular de N acciones, es importante estimar, a través de sus covarianzas, si sus rendimientos dependen unos de los otros. Para ello, hay que calcular las componentes de la matriz Σ de varianza-covarianza de los rendimientos, cuyos elementos son igual a $\Sigma_{ij} = \text{Cov}(r_i, r_j)$, para $i, j = 1$ hasta n . Como se desconocen estos valores se pueden estimar a través de la covarianza muestral:

$$\overline{\text{Cov}}(r_i, r_j) = \frac{1}{M-2} \sum_{k=1}^{M-1} \left(\ln \left(\frac{P_i^{k+1}}{P_i^k} \right) - \bar{r}_i \right) \left(\ln \left(\frac{P_j^{k+1}}{P_j^k} \right) - \bar{r}_j \right), \quad (4.4)$$

con P_i^k el k -ésimo precio del activo i .

Para la acción Liverpool $M = 252$, $\hat{\mu} = 1.1188 \times 10^{-5}$, $\hat{\sigma}^2 = 0.0001652$ y la volatilidad muestral es $\hat{\sigma} = 0.01285$.

- Para estimar a partir de los datos diarios el valor esperado y la varianza de los rendimientos semanales, mensuales o anuales de una acción basta con multiplicar la media y la varianza muestral por el número de días hábiles en dicho periodo. Sin embargo, para estimar la volatilidad muestral en cada uno de esos periodos se debe multiplicar por la raíz del número de días hábiles.

Distribución de los rendimientos

La pregunta que surge es cómo se distribuyen los rendimientos de una acción. Dado que estos pueden ser negativos o positivos y toman valores en los reales, una candidata natural es la distribución normal. Para comprobar esta hipótesis se tiene a la mano dos métodos. El primero es gráfico a través del análisis del histograma y del QQ-plot de los rendimientos. La gráfica QQ-plot es la comparación cuantil contra cuantil de la distribución empírica de los datos contra la distribución teórica. En este caso se contrastó con la distribución normal. El segundo método es más preciso y se basa en pruebas de bondad de ajuste del tipo Kolmogorov-Smirnov o Shapiro-Wilk.

En la Figura 4.2 se presentan el histograma y el QQ-plot de los rendimientos de la acción de Liverpool. El histograma recuerda a la distribución normal mientras que el QQ-plot deja algunas dudas ya que si los datos se distribuyeran como una normal, todas las observaciones deberían estar alineadas a lo largo de la diagonal. Sin embargo, observe que en ambos extremos los datos se separan de la diagonal, lo que indica que la distribución de la que provienen tiene colas más pesadas que una normal. Al aplicar la prueba de Kolmogorov-Smirnov a los rendimientos de la acción Liverpool, ver Ross (1997), se rechaza la hipótesis nula: los datos no se distribuyen como una normal. Hay que señalar que en la prueba se usaron la media y la desviación estándar muestral como los parámetros de la normal.

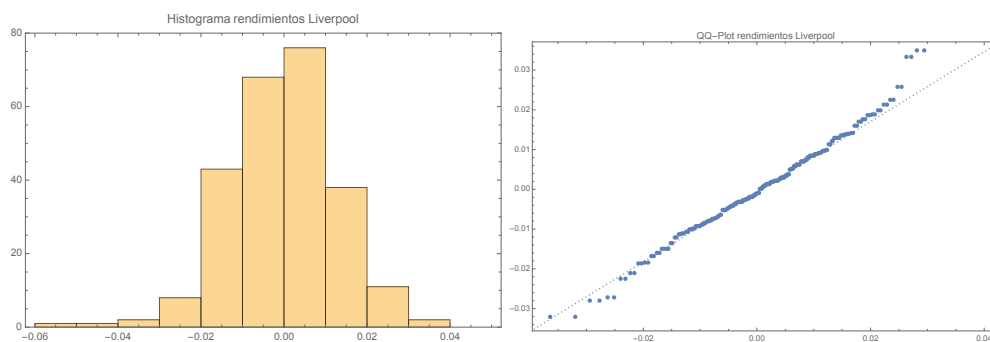


Figura 4.2: Histograma y QQ-plot de los rendimientos de la acción Liverpool

Este ejemplo muestra que no todos los rendimientos de las acciones se distribuyen normalmente. Sin embargo, en el resto del capítulo se considera que los rendimientos tienen una distribución normal, supuesto que hizo Markowitz en su modelo de riesgo-rendimiento.

- Algunos comentarios sobre el tamaño que debe tener la muestra. El tamaño depende de lo que se desea hacer con los datos. Si se desea tener información que refleje la situación actual de los mercados para integrar un portafolio de inversión a corto plazo, entonces los datos históricos de un año o año y medio atrás es un buen número. Si lo que se desea es un portafolio robusto que responda a distintos escenarios, entonces se requiere de un mayor número de datos. Cabe señalar que estimar con una buena precisión el valor de la media con la media muestral requiere de un considerable número de observaciones, a diferencia de la estimación de la varianza con la varianza muestral. Para conocer más al respecto, ver Luenberger (1998).

4.3 Formulación matemática del problema

4.3.1 Marco teórico

En el mercado accionario hay participantes a quienes se denominan como agentes financieros que compran y venden acciones. El modelo de mercado con el que se trabaja tiene las siguientes

reglas:

1. Es un mercado ideal en el que los bancos prestan y dan créditos a la misma tasa de interés.
2. Principio de comparación: entre dos portafolios al mismo plazo, se prefiere al que tenga los rendimientos más altos.
3. Principio de aversión al riesgo: Entre dos portafolios con el mismo rendimiento, se prefiere al de menor riesgo.
4. Principio de no arbitraje: no se puede tener un portafolio de inversión cuyo precio inicial P^0 sea cero, pero cuyo precio $P^1 \geq 0$ y su valor esperado sean estrictamente mayor que cero; o sea que sin invertir un centavo no es posible que se tenga una ganancia positiva.
5. Para simplificar el modelo se supone que se pueden comprar fracciones de acciones.
6. Por realismo se permiten ventas en corto, es decir, que se puede pedir prestado para comprar ciertas acciones. En este caso, para distinguir el dinero prestado del propio, las cantidades prestadas que se inviertan se denotan con signo negativo. Cuando se invierte en una acción un monto positivo, se dice que se toma una posición larga, mientras que se toma una posición corta cuando el monto es negativo.

4.3.2 Planteamiento del problema para dos activos

Primero se trabaja con un portafolio de dos acciones, para entender la estructura del modelo, y así poder generalizarlo posteriormente a un portafolio con n acciones.

■ **Ejemplo 4.1** Suponga que el precio de dos acciones se comporta de la siguiente manera:

	Probabilidad	r_1	r_2
Escenario 1	0.5	10 %	-5 %
Escenario 2	0.5	-5 %	10 %

es decir, se sabe que al pasar un periodo de inversión, se cumple el escenario 1 con probabilidad 0.5 o se cumple el escenario 2 con probabilidad 0.5. Evidentemente, no conviene asignar todo nuestro dinero solamente a una de las dos acciones, puesto que en un escenario hay una ganancia, pero en el otro hay una pérdida (sin importar cuál acción se elija). Por ello, hay que diversificar e invertir en ambas acciones.

En este caso, si se divide el dinero en partes iguales, si ocurre el escenario 1, se gana el 10 % de lo invertido en la acción 1, pero se pierde 5 % de lo invertido en la acción 2. Si se invierte M en total, entonces las ganancias son:

$$1.1 \frac{M}{2} + 0.95 \frac{M}{2} = 1.025M,$$

con lo cual se obtiene 2.5 % de ganancia del total. Si ocurre el escenario 2, ocurre algo análogo, y en este caso, debido al comportamiento de las acciones, se obtiene también el 2.5 % de ganancia. Como se puede observar, en este ejemplo siempre se gana, y se reduce el riesgo de pérdida a 0.

Este ejemplo es un caso muy particular en el cual las acciones involucradas están perfectamente correlacionadas de forma negativa y por ello es posible garantizar que el riesgo se reduce a 0.

■

En general, no se puede reducir el riesgo a 0, pero la meta seguirá siendo reducirlo tanto como sea posible.

Dado que la cantidad a invertir en un portafolio cambia en cada situación, y esto se puede describir como un porcentaje del total a invertir, lo más conveniente es trabajar con ponderaciones o porcentajes, para describir la asignación relativa de fondos en el portafolio. En el caso de dos acciones dichas ponderaciones se definen como

$$w_1 = \frac{x_1 P_1^0}{V^0},$$

$$w_2 = \frac{x_2 P_2^0}{V^0},$$

donde x_1 y x_2 son el número de acciones de tipo 1 y 2 que se compran, P_1^0 y P_2^0 son los precios de las acciones 1 y 2 al tiempo 0, y V^0 es el valor del portafolio al tiempo 0. Dado que se invierte el total de los fondos a considerar, V^0 también representa la cantidad de dinero que se invierte en el portafolio.

El precio del portafolio es exactamente la suma de la cantidad comprada de cada acción por su precio, entonces

$$w_1 + w_2 = \frac{x_1 P_1^0 + x_2 P_2^0}{V^0} = \frac{V^0}{V^0} = 1.$$

Si se permiten ventas en corto, entonces una de las w_i puede ser negativa y la otra puede ser mayor que 1.

■ **Ejemplo 4.2** Suponga que los precios de dos acciones el día de hoy son $P_1^0 = 30$ y $P_2^0 = 40$. Integre un portafolio con valor de $V^0 = 1000$ comprando $x_1 = 20$ participaciones de la acción 1 y $x_2 = 10$ participaciones de la acción 2. Las ponderaciones son:

$$w_1 = \frac{20 \cdot 30}{1000} = 0.6,$$

$$w_2 = \frac{10 \cdot 40}{1000} = 0.4$$

Si los precios de las acciones al tiempo final cambian a $P_1^1 = 35$ y $P_2^1 = 39$, entonces el portafolio valdrá $V^1 = 20 \cdot 35 + 10 \cdot 39 = 1090$. Dicha cantidad ya no se reparte 60%/40%, sino

$$w_1 = \frac{20 \cdot 35}{1090} \approx 0.6422,$$

$$w_2 = \frac{10 \cdot 39}{1090} \approx 0.3578,$$

aunque la cantidad de participaciones de cada acción no cambió. ■

■ **Ejemplo 4.3** Suponga que se construye otro portafolio con las mismas acciones con valor de $V^0 = 1000$, pero ahora se toma una posición larga en la primera acción (es decir, compramos una cantidad positiva de la primera acción) y una posición corta en la segunda acción (es decir, compramos una cantidad negativa de la segunda acción), por ejemplo, mediante asignaciones $w_1 = 1.2$ y $w_2 = -0.2$, esto quiere decir que el portafolio consiste en

$$x_1 = w_1 \frac{V^0}{P_1^0} = 1.2 \cdot \frac{1000}{30} = 40$$

$$x_2 = w_2 \frac{V^0}{P_2^0} = -0.2 \cdot \frac{1000}{40} = -5$$

participaciones de cada acción. Si los precios cambian como en el ejemplo anterior, entonces el portafolio valdrá

$$V^1 = 40 \cdot 35 + (-5) \cdot 39 = 1205,$$

con lo que este portafolio tuvo un mayor rendimiento que el del ejemplo anterior. Sin embargo, esto no quiere decir que tuviera un menor riesgo, ya que ocurrieron dos efectos que nos ayudaron: primero, al tomar una posición larga en la primera acción como el precio de la primera acción aumentó, se obtuvo una ganancia; segundo, al tomar una posición corta en la segunda acción como el precio de la segunda acción disminuyó, también se obtuvo una ganancia (en este segundo caso, lo que ocurre es que al vender las acciones al tiempo 0 a un precio mayor al que se adquirieron al tiempo final, $t = 1$, se ganó la diferencia). Pero esto fue fortuito, ya que de haber cambiado los precios al revés, si la primera acción hubiera bajado de precio y la segunda acción hubiera subido de precio, se hubiera tenido pérdidas en ambas inversiones. ■

Más aún, al permitir ventas en corto, el riesgo que se puede correr es infinito. Esto se debe a que, aunque es poco probable, una acción puede subir de precio sin límite, por lo cual la pérdida

sería la diferencia entre el nuevo precio y el precio original, que también puede crecer sin límite. En comparación, al tomar una posición larga en una acción, lo peor que puede pasar es que el precio de una acción disminuya hasta 0, con lo cual perderíamos todo lo invertido en la misma, pero no más.



En la vida real se suelen poner restricciones o candados en las ventas en corto para prevenir pérdidas infinitas, pero no siempre es el caso. Esto se puede ver con el ejemplo de lo ocurrido con las acciones de GameStop en Estados Unidos, en julio de 2020; las ventas en corto que realizaron algunas firmas de inversión las llevaron a la quiebra, debido a las pérdidas millonarias que sufrieron, como consecuencia de que se haya elevado el precio de dichas acciones. En este caso, el precio no creció sin límite, pero fue suficiente para que, al combinarse con el hecho de que se vendieron en corto una gran cantidad de acciones, las firmas de inversión no tuvieran forma de adquirir nuevamente todas las acciones que habían tomado prestadas. Una versión hollywoodense de este hecho, se puede ver en la película *Dumb Money* (titulada aquí *El Poder de los Centavos*), que se entiende mejor una vez que se conocen más a fondo la terminología financiera y los riesgos que conllevan las inversiones en acciones.

Observe que $\frac{V^1}{V^0} = 1 + r$, es el rendimiento relativo del portafolio y depende de los precios de las acciones mediante los cocientes

$$\frac{P_1^1}{P_1^0} = 1 + r_1,$$

$$\frac{P_2^1}{P_2^0} = 1 + r_2,$$

y las asignaciones w_1 y w_2 . Por ello, el rendimiento del portafolio solamente depende de r_1 , r_2 , w_1 y w_2 .

Proposición 4.3.1 El rendimiento r_p de un portafolio que consiste de dos acciones está dado por:

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2.$$

Demostración Se sabe que

$$x_1 = w_1 \frac{V^0}{P_1^0},$$

$$x_2 = w_2 \frac{V^0}{P_2^0},$$

$$V^0 = x_1 P_1^0 + x_2 P_2^0.$$

Calcule el valor del portafolio como

$$\begin{aligned} V^1 &= x_1 P_1^0 (1 + r_1) + x_2 P_2^0 (1 + r_2) \\ &= V^0 w_1 (1 + r_1) + V^0 w_2 (1 + r_2) \\ &= V^0 (w_1 (1 + r_1) + w_2 (1 + r_2)) \\ &= V^0 (w_1 + w_1 r_1 + w_2 + w_2 r_2) \\ &= V^0 (1 + w_1 r_1 + w_2 r_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r_p = \frac{V^1 - V^0}{V^0} = \frac{V^0 (w_1 r_1 + w_2 r_2)}{V^0} = w_1 r_1 + w_2 r_2. \quad \blacksquare$$

Dado que r en general será una variable aleatoria, se calcula el rendimiento esperado como

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2).$$

■ **Ejemplo 4.4** Considere los siguientes escenarios:

	Probabilidad	r_1	r_2
Escenario 1	0.2	-10 %	-30 %
Escenario 2	0.5	0 %	20 %
Escenario 3	0.3	10 %	50 %

Los rendimientos esperados de cada acción son:

$$\begin{aligned} E(r_1) &= 0.2(-0.1) + 0.5(0) + 0.3(0.1) = 0.01, \\ E(r_2) &= 0.2(-0.3) + 0.5(0.2) + 0.3(0.5) = 0.19 \end{aligned}$$

Suponga que $w_1 = 0.6$ y $w_2 = 0.4$. El rendimiento esperado del portafolio será

$$E(r_p) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) = 0.6(0.01) + 0.4(0.19) = 0.082$$

■

Para calcular la varianza de r_p se requiere conocer tanto las varianzas de r_1 y r_2 , así como la covarianza entre r_1 y r_2 .

Proposición 4.3.2 La varianza del rendimiento r_p de un portafolio está dada por

$$\text{Var}(r_p) = w_1^2 \text{Var}(r_1) + w_2^2 \text{Var}(r_2) + 2w_1 w_2 \text{Cov}(r_1, r_2).$$

Demostración

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_p) &= \text{Var}(w_1 r_1 + w_2 r_2) \\ &= \text{Var}(w_1 r_1) + \text{Var}(w_2 r_2) + 2 \text{Cov}(w_1 r_1, w_2 r_2) \\ &= w_1^2 \text{Var}(r_1) + w_2^2 \text{Var}(r_2) + 2w_1 w_2 \text{Cov}(r_1, r_2). \end{aligned}$$

■

La volatilidad de un portafolio va a estar dada por $\sqrt{\text{Var}(r_p)}$ (aunque en ocasiones el análisis se realizará utilizando directamente $\text{Var}(r_p)$).

Por lo tanto, un portafolio formado por dos acciones cumple las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu_p &= w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2, \\ \sigma_p^2 &= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 c_{1,2}, \end{aligned}$$

donde μ_p, μ_1, μ_2 son los valores esperados de los rendimientos del portafolio, la acción 1 y la acción 2, respectivamente; $\sigma_p^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ son las varianzas de los rendimientos del portafolio, la acción 1 y la acción 2, respectivamente; y $c_{1,2}$ es la covarianza entre los rendimientos de la acción 1 y la acción 2.

Se denota el coeficiente de correlación de los rendimientos de la acción 1 y la acción 2 por $\rho_{1,2}$ que es igual a

$$\rho_{1,2} = \frac{c_{1,2}}{\sigma_1 \sigma_2},$$

el cual no está bien definido si $\sigma_1 \sigma_2 = 0$, lo cual sólo ocurre si alguna de las acciones es libre de riesgo, que no es el caso.

■ **Ejemplo 4.5** Considere los siguientes datos:

	Probabilidad	r_1	r_2
Escenario 1	0.2	-10 %	5 %
Escenario 2	0.4	0 %	30 %
Escenario 3	0.4	20 %	-5 %

Se desea comparar el riesgo de un portafolio con $w_1 = 0.4$ y $w_2 = 0.6$ con el riesgo de invertir en cada acción por separado. Se tiene que

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0.2(-0.1) + 0.4(0) + 0.4(0.2) = 0.06, \\ \mu_2 &= 0.2(0.05) + 0.4(0.3) + 0.4(-0.05) = 0.11, \\ \sigma_1^2 &= 0.2(-0.1)^2 + 0.4(0)^2 + 0.4(0.2)^2 - 0.06^2 = 0.0144, \\ \sigma_2^2 &= 0.2(0.05)^2 + 0.4(0.3)^2 + 0.4(-0.05)^2 - 0.11^2 = 0.0254, \\ c_{1,2} &= 0.2(-0.1 - 0.06)(0.05 - 0.11) + 0.4(0 - 0.06)(0.3 - 0.11) \\ &\quad + 0.4(0.2 - 0.06)(-0.05 - 0.11) \\ &= -0.0116, \\ \rho_{1,2} &= \frac{-0.0116}{\sqrt{0.0144}\sqrt{0.0254}} = -0.6065406116,\end{aligned}$$

con lo cual se calcula la varianza del rendimiento del portafolio

$$\sigma_p^2 = 0.4^2(0.0144) + 0.6^2(0.0254) + 2(0.4)(0.6)(-0.0116) \approx 0.00588$$

y observe que la varianza σ_p^2 es menor que σ_1^2 y σ_2^2 y por monotonicidad, el riesgo del portafolio es menor que el riesgo de cada acción por separado. ■

La siguiente proposición demuestra la ventaja de diversificar el portafolio.

Proposición 4.3.3 La varianza σ_p^2 de un portafolio no excede al máximo de las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 de cada una de las acciones si no se permiten ventas en corto. Es decir

$$\sigma_p^2 \leq \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}.$$

Demostración Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$. Ya que no se permiten ventas en corto, $w_1, w_2 \geq 0$, y

$$w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 \leq (w_1 + w_2)\sigma_2 = \sigma_2.$$

Además, tenemos que $-1 \leq \rho_{1,2} \leq 1$, por lo cual

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \\ &\leq w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 \\ &= (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2 \leq \sigma_2^2.\end{aligned}$$

■

■ **Ejemplo 4.6** Ahora considere un portafolio con $w_1 = -0.5$ y $w_2 = 1.5$ utilizando los datos del ejemplo 4.5. La varianza del rendimiento de este portafolio es

$$\sigma_p^2 = (-0.5)^2(0.0144) + 1.5^2(0.0254) + 2(-0.5)(1.5)(-0.0116) \approx 0.2795$$

la cual es mayor que σ_1^2 y σ_2^2 . Aquí se observa nuevamente que el riesgo de un portafolio con ventas en corto puede exceder el de las acciones por separado, debido al riesgo mismo de las ventas en corto. ■

Observe que el riesgo o volatilidad del portafolio del ejercicio anterior es alto, pero esto era de esperarse, ya que en este caso el rendimiento esperado es del 50%, que es muy alto, y por ello, se requiere incurrir en un riesgo mayor. De hecho, como se verá a continuación, si se permiten ventas en corto, siempre es posible construir un portafolio tal que su rendimiento esperado sea igual o mayor a cualquier valor que deseemos, pero en general se tendrá que, a mayor rendimiento esperado, mayor el riesgo.

4.3.3 Conjunto factible

La colección de portafolios que se puede obtener al invertir en dos activos se llama el conjunto factible. Cada portafolio se puede representar como un punto con coordenadas (σ_p, μ_p) en el plano.

Dicho conjunto factible son los puntos (σ_p, μ_p) tales que

$$\begin{aligned}\mu_p &= w_1\mu_1 + w_2\mu_2, \\ \sigma_p^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2c_{1,2}.\end{aligned}$$

con $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ y $w_1 + w_2 = 1$.

En este caso, se parametriza mediante $s = w_1$, con lo cual $w_2 = 1 - s$ y

$$\begin{aligned}\mu_p &= s\mu_1 + (1-s)\mu_2, \\ \sigma_p^2 &= s^2\sigma_1^2 + (1-s)^2\sigma_2^2 + 2s(1-s)c_{1,2}.\end{aligned}$$

con $s \in \mathbb{R}$.

Primero calcule el portafolio con mínimo riesgo, es decir, de mínima varianza.

Proposición 4.3.4 Si $\rho_{1,2} < 1$ o $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces σ_p^2 se minimiza cuando

$$s^* = \frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}}.$$

con valores de la media y varianza del rendimiento

$$\begin{aligned}\mu^* &= \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}}, \\ \sigma^{2*} &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - c_{1,2}^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}}.\end{aligned}$$

Si $\rho_{1,2} = 1$ y $\sigma_1 = \sigma_2$ entonces todos los portafolios factibles tienen la misma varianza $\sigma_p^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Demostración Derive σ_p^2 respecto a s e iguale a cero:

$$\frac{d}{ds}\sigma_p^2 = 2s(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}) - 2(\sigma_2^2 - c_{1,2}) = 0$$

y despejando s se obtiene que

$$s^* = \frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}},$$

donde el denominador es diferente de cero si $\rho_{1,2} < 1$ ya que

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2} > \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \geq 0,$$

o si $\sigma_1 \neq \sigma_2$ entonces

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2} \geq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0.$$

La segunda derivada es

$$\frac{d}{ds}\sigma_p^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}) > 0$$

en cualquiera de los casos anteriores.

Sustituyendo s^* en las expresiones para μ_p y σ_p^2

$$\begin{aligned}\mu^* &= \left(\frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} \right) \mu_1 + \left(1 - \frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} \right) \mu_2 \\ &= \frac{\sigma_2^2\mu_1 - c_{1,2}\mu_1 + \sigma_1^2\mu_2 - c_{1,2}\mu_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2 - (\mu_1 + \mu_2)c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{2*} &= \left(\frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} \right)^2 \sigma_1^2 + \left(1 - \frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} \right)^2 \sigma_2^2 \\
&\quad + 2 \left(\frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} \right) \left(1 - \frac{\sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}} \right) c_{1,2} \\
&= \frac{(\sigma_2^2 - c_{1,2})^2 \sigma_1^2 + (\sigma_1^2 - c_{1,2})^2 \sigma_2^2 + 2(\sigma_2^2 - c_{1,2})(\sigma_1^2 - c_{1,2})c_{1,2}}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2})^2} \\
&= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^4 - 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 c_{1,2} + \sigma_1^2 c_{1,2}^2 + \sigma_2^2 \sigma_1^4 - 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 c_{1,2} \\
&\quad + \sigma_2^2 c_{1,2}^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 c_{1,2} - 2\sigma_1^2 c_{1,2}^2 - 2\sigma_2^2 c_{1,2}^2 + 2c_{1,2}^3}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2})^2} \\
&= \frac{\sigma_1^4 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^4 - 2\sigma_1^2 \sigma_2^2 c_{1,2} - \sigma_1^2 c_{1,2}^2 - \sigma_2^2 c_{1,2}^2 + 2c_{1,2}^3}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2})^2} \\
&= \frac{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - c_{1,2}^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2})}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2})^2} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - c_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}}.
\end{aligned}$$

■

La curva descrita por los puntos (σ_p, μ_p) es una rama de una hipérbola como se ve en el siguiente resultado.

Proposición 4.3.5 Suponga que $-1 < \rho_{1,2} < 1$ y $\mu_1 \neq \mu_2$. Entonces para todo portafolio p en el conjunto factible, $x = \sigma_p$, $y = \mu_p$ satisfacen la ecuación de la hipérbola

$$x^2 - A^2(y - \mu_0)^2 = \sigma_0^2,$$

donde $\mu_0 = \mu^*$, $\sigma_0^2 = \sigma^{2*} > 0$ y

$$A^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2c_{1,2}}{(\mu_1 - \mu_2)^2} > 0.$$

Las asíntotas de la hipérbola son $y = \mu_0 \pm \frac{1}{A}x$.

Demostración $\mu_p = s\mu_1 + (1-s)\mu_2$, por lo cual $s = \frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$.

Al sustituir en la ecuación de la hipérbola propuesta, se observa que $x = \sigma_p$, $y = \mu_p$ la satisfacen. Como $-1 < \rho_{1,2} < 1$ y $\mu_1 \neq \mu_2$ entonces $A^2 > 0$ y $\sigma_0^2 > 0$. ■

Proposición 4.3.6 Si $\rho_{1,2} = 1$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces $\sigma_p = 0$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
w_1 &= -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \\
w_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2},
\end{aligned}$$

donde hay ventas en corto, ya que exactamente uno de estos valores es negativo.

Si $\rho_{1,2} = -1$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces $\sigma_p = 0$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \\
w_2 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2},
\end{aligned}$$

donde w_1 y w_2 son ambos positivos.

Demostración Sustituya en cada caso σ_p^2 y factorice el trinomio cuadrado perfecto. ■

Corolario 4.3.7 Suponga que $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Se tienen cinco casos:

1. Si $\rho_{1,2} = 1$ entonces existe un portafolio factible V con $\sigma_p = 0$ si se permiten ventas en corto, cuando $\sigma_1 < \sigma_2$. Si $\sigma_1 = \sigma_2$ entonces todos los portafolios en el conjunto factible tienen la misma $\sigma_p = \sigma_1 = \sigma_2$.
2. Si $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{1,2} < 1$ entonces existe un portafolio factible tal que $\sigma_p < \sigma_1$ si se permiten ventas en corto. Si no se permiten ventas en corto, entonces $\sigma_p \geq \sigma_1$ para todo portafolio factible.
3. Si $\rho_{1,2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ entonces $\sigma_p \geq \sigma_2$ para todo portafolio factible.
4. Si $-1 < \rho_{1,2} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ entonces existe un portafolio factible sin ventas en corto tal que $\sigma_p < \sigma_1$.
5. Si $\rho_{1,2} = -1$ entonces existe un portafolio factible con $\sigma_p = 0$ sin ventas en corto.

Se deja la demostración como ejercicio. Para complementar este enfoque, ver Capiński y Zastawniak (2003).

4.3.4 Planteamiento del problema para más de dos activos

En esta sección se generaliza el planteamiento del problema de determinar el portafolio óptimo de N acciones que cotizan en la BMV.

Suponga que decide invertir en N activos de la BMV cuyo rendimiento esperado es $E(r_i)$ y su varianza σ_i^2 para $i = 1$ hasta N . Estos activos pueden o no estar correlacionados. Sea C la matriz de N por N con componentes $C_{ij} = \text{Cov}(r_i, r_j)$ que se conoce como la matriz de varianza-covarianza. El problema del portafolio óptimo consiste en determinar la composición que debe tener un portafolio para que la varianza del portafolio sea mínima y su rendimiento sea igual a un rendimiento dado. Como en la sección anterior, las incógnitas del problema son los porcentajes w_i de un monto que se invierten en cada acción i , para $i = 1$ hasta N , cuando se permiten las ventas en corto, es decir cuando las $w_i \in \mathbb{R}$.

El rendimiento del portafolio r_p y la varianza del portafolio σ_p^2 están dados por

$$r_p = \sum_{i=1}^N w_i r_i,$$

$$\sigma_p^2 = E[(r_p - E(r_p))^2] = E \left[\left(\sum_{i=1}^N w_i r_i - E(r_p) \right)^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j E[r_i - E(r_i)] E[r_j - E(r_j)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \text{Cov}(r_i, r_j).$$

Dado que por lo general se desconoce tanto los valores esperados de los rendimientos como la matriz de varianza-covarianza se trabajará en esta sección con las medias muestrales $\hat{r}_i$ y las varianzas $\hat{\sigma}_i^2$ y covarianzas $\widehat{\text{Cov}}(r_i, r_j)$ muestrales, dadas por las expresiones (4.2), (4.3) y (4.4). Denote a la matriz de varianza-covarianza muestral como $\hat{C}$. Observe que $\hat{C}$ es una matriz simétrica y supondremos que es positiva definida.

Si se supone que los rendimientos de los activos tienen distribución normal, la varianza del portafolio σ_p^2 es una buena propuesta para estimar el riesgo. Bajo este supuesto, el problema de optimización para N activos es el siguiente: dado $r_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \widehat{\text{Cov}}(r_i, r_j) w_i w_j \\ &\text{sujeto a} \quad \sum_{i=1}^N \hat{r}_i w_i = r_0, \\ &\quad \quad \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1, \end{aligned}$$

el $1/2$ se introduce por comodidad.

El problema se resuelve fácilmente si se usa notación matricial. Sean $\mathbf{w}^t = (w_1, \dots, w_N)$, $\mathbf{1}^t = (1, \dots, 1)$ y $\mathbf{r}^t = (\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_N)$ vectores en R^N entonces el problema se formula vectorialmente de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \frac{1}{2} \mathbf{w}^t \hat{C} \mathbf{w} \\ &\text{sujeto a} \quad \hat{\mathbf{r}}^t \mathbf{w} = r_0, \\ &\quad \quad \quad \mathbf{1}^t \mathbf{w} = 1. \end{aligned}$$

Observe que este problema tiene como función objetivo una función cuadrática y tiene dos restricciones lineales. Este problema se resuelve por el método de multiplicadores de Lagrange y hay que introducir un multiplicador por cada restricción; denote como p_1 y p_2 a los multiplicadores asociados a cada restricción, respectivamente. La función a minimizar en R^N es

$$G(\mathbf{w}, p_1, p_2) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^t \hat{C} \mathbf{w} - p_1(\hat{\mathbf{r}}^t \mathbf{w} - r_0) - p_2(\mathbf{1}^t \mathbf{w} - 1).$$

Al calcular las derivadas parciales de G respecto a $\mathbf{w}$, p_1 y p_2 e igualando a cero se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineal:

$$\hat{C} \mathbf{w} - p_1 \hat{\mathbf{r}} - p_2 \mathbf{1} = 0, \quad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{r}}^t \mathbf{w} = r_0, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{1}^t \mathbf{w} = 1. \quad (4.7)$$

Al ser la matriz $\hat{C}$ positiva definida, es invertible y el sistema admite una solución única. Despejando $\mathbf{w}$ de (4.5) se obtiene

$$\mathbf{w} = p_1 \hat{C}^{-1} \hat{\mathbf{r}} + p_2 \hat{C}^{-1} \mathbf{1}. \quad (4.8)$$

Para determinar los valores de p_1 y p_2 , se substituye $\mathbf{w}$ en las ecuaciones (4.6) y (4.7) del sistema para obtener un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$F p_1 + G p_2 = r_0,$$

$$G p_1 + H p_2 = 1,$$

con $F = \hat{\mathbf{r}}^t \hat{C}^{-1} \hat{\mathbf{r}}$, $G = \hat{\mathbf{r}}^t \hat{C}^{-1} \mathbf{1}$ y $H = \mathbf{1}^t \hat{C}^{-1} \mathbf{1}$. Al resolver el sistema se obtiene que si $D = FH - G^2$ es distinto de cero,

$$p_1 = \frac{(Hr_0 - G)}{D} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{(F - Gr_0)}{D}. \quad (4.9)$$

Observe que D es distinto de cero cuando no todos los rendimientos muestrales son iguales. Resta solo por calcular la varianza del portafolio óptimo

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{w}^t \hat{C} \mathbf{w} = \mathbf{w}^t \hat{C} (p_1 \hat{C}^{-1} \hat{\mathbf{r}} + p_2 \hat{C}^{-1} \mathbf{1}) = p_1 \mathbf{w}^t \hat{\mathbf{r}} + p_2 \mathbf{w}^t \mathbf{1} \\ &= p_1 r_0 + p_2 1 = \frac{(Hr_0^2 - 2Gr_0 + F)}{D}. \end{aligned}$$

Por lo que dado un rendimiento r se puede calcular la varianza del portafolio óptimo si se conocen F , G y H . Observe que estas constantes dependen únicamente de los datos del problema: $\hat{\mathbf{r}}$ y de $\hat{C}$.

La pregunta que surge es dados $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{C}$, cual es el rendimiento r del portafolio que tiene varianza mínima. Para ello se deriva σ_p^2 respecto a r para obtener

$$\frac{d\sigma^2}{dr} = 2 \frac{Hr - G}{D} = 0 \Rightarrow r = \frac{G}{H}.$$

La volatilidad de este portafolio es igual a $\frac{1}{\sqrt{H}}$. Denote por σ_{MV} y r_{MV} la volatilidad y el rendimiento de este portafolio. Observe que al calcular los multiplicadores de Lagrange asociados a r_{MV}

$$p_1 = \frac{(Hr_{MV} - G)}{D} = 0 \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{(F - Gr_{MV})}{D} = \frac{1}{H}.$$

La composición del portafolio de mínima varianza $\mathbf{w}_{MV}$ se obtiene substituyendo los multiplicadores de Lagrange correspondientes en la expresión (4.8)

$$\mathbf{w} = p_1 \hat{\mathbf{C}}^{-1} \hat{\mathbf{r}} + p_2 \hat{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{H} \hat{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{1} \Rightarrow \hat{\mathbf{C}} \mathbf{w}_{MV} = \frac{1}{H} \mathbf{1}.$$

Por lo que resolviendo el sistema anterior se obtiene la composición del portafolio de mínima varianza. Otro portafolio que se puede determinar fácilmente es aquel que tiene a $p_2 = 0$ y que su rendimiento se denota por r_e . En este caso

$$r_e = \frac{F}{G}, \quad \sigma_e = \frac{\sqrt{F}}{|G|} \quad \text{y} \quad p_1 = \frac{1}{G}.$$

La composición del portafolio $\mathbf{w}_e$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\hat{\mathbf{C}} \mathbf{w}_e = \frac{1}{G} \hat{\mathbf{r}}.$$

4.4 Interpretación financiera

Como se ha visto hasta ahora dado los rendimientos muestrales y la matriz de varianza-covarianza de N activos se puede determinar el rendimiento y la volatilidad de todos los portafolios factibles o sea aquellos que satisfacen las restricciones del problema de optimización. A Markowitz se le ocurrió visualizar este conjunto en el plano, al que llamó el conjunto de riesgo-rendimiento. A cada portafolio $\mathbf{w}$ le asoció la pareja $(\sigma_{\mathbf{w}}, r_{\mathbf{w}})$ en el plano donde el eje de las abscisas representa a la volatilidad del portafolio y el de las ordenadas a su rendimiento. Por otro lado, dado un rendimiento r^* podemos determinar el portafolio óptimo que tiene el menor riesgo y de esta manera podemos hallar la curva en el plano de riesgo-rendimiento que satisfacen las parejas (σ^*, r^*) . ¿Qué forma tiene esta curva? Para responder la pregunta, se resuelve para r la expresión

$$\sigma_p^2 = \frac{(Hr^2 - 2Gr + F)}{D},$$

lo que es equivalente a resolver la siguiente ecuación de segundo grado

$$Hr^2 - 2Gr + (F - \sigma^2 D) = 0,$$

cuya solución es:

$$r(\sigma) = \frac{G}{H} \pm \sqrt{\frac{D}{H} \left(\sigma^2 - \frac{1}{H} \right)}.$$

La gráfica de esta función es una hipérbola en el lado derecho del plano, dado que $\sigma > 0$, con vértice en (σ_{MV}, r_{MV}) . El resto de los portafolios factibles se encuentran en el interior de la curva.

En la Figura 4.3 se presenta la gráfica de un conjunto de riesgo-rendimiento del ejemplo 4.7 que se analizará más adelante. Observe que dado un rendimiento, los portafolios sobre la curva tienen riesgo mínimo por lo que reciben el nombre del conjunto de portafolios de varianza mínima. Note también que dada una volatilidad, hay un portafolio sobre la curva que tiene el máximo rendimiento. Todos los portafolios de varianza mínima que están en la porción de la curva que va del vértice a la parte superior de la curva tienen rendimiento máximo por lo que reciben el nombre de portafolios eficientes y a esa parte de la curva se le llama la frontera eficiente. Estos son los portafolios en los que debe de invertir un inversionista, siempre tomando en consideración su aversión al riesgo.

4.4.1 Teorema de dos fondos

Cualquier $\mathbf{w}$ que satisfaga la ecuación (4.5) se puede escribir en términos del portafolio de mínima varianza $\mathbf{w}_{MV}$ y del portafolio $\mathbf{w}_e$ ya que

$$\mathbf{w} = (p_1 G) \vec{w}_e + (p_2 H) \vec{w}_{MV}, \quad (4.10)$$

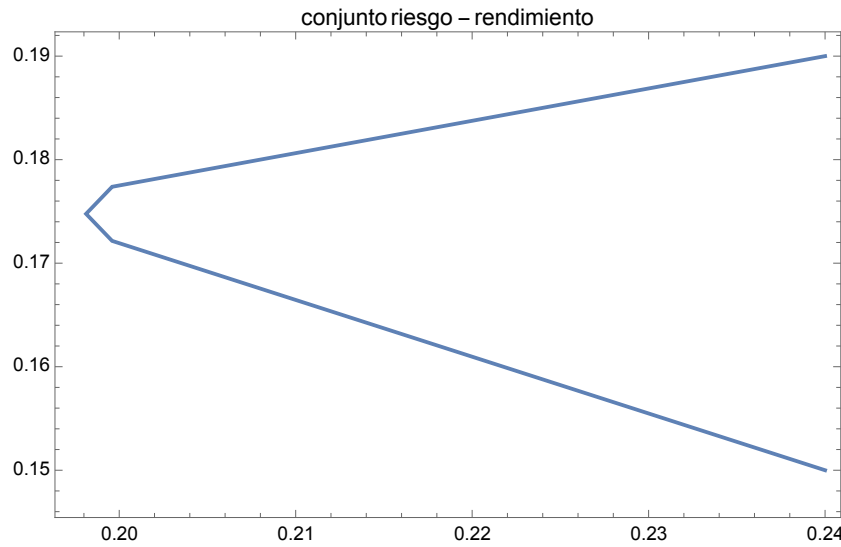


Figura 4.3: Conjunto de riesgo-rendimiento del ejemplo 4.7

con p_1 y p_2 los multiplicadores de Lagrange que corresponden al rendimiento de $\mathbf{w}$. Esto implica que cualquier portafolio sobre la frontera se puede escribir como combinación lineal de los portafolios $\mathbf{w}_e$ y $\mathbf{w}_{MV}$. Observe que $\mathbf{w}$ satisface también la ecuación (4.7) ya que $(p_1 G) + (p_2 H) = 1$.

Este resultado no sólo se cumple para los portafolios $\mathbf{w}_e$ y $\mathbf{w}_{MV}$ sino también para cualesquiera dos portafolios $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, con rendimientos r_1 y r_2 , del conjunto de varianza mínima. Estos portafolios junto con sus correspondientes multiplicadores de Lagrange satisfacen el sistema de ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) por lo que cualquier portafolio $\mathbf{w}$ de la forma

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{w}_2, \quad \alpha \in R$$

también lo satisface. En particular, si se aplica esta propiedad a los portafolios en la frontera eficiente se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1 — Teorema de dos fondos. Dados dos portafolios $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ en la frontera eficiente, cualquier otro portafolio en dicha frontera se puede escribir como combinación lineal de estos dos, es decir

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{w}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{w}_2.$$

Como consecuencia, para invertir en la BMV basta con seleccionar dos fondos de inversión en el mercado que estén sobre la frontera eficiente y seleccionar α tomando en consideración el riesgo que se está dispuesto a correr.

■ **Ejemplo 4.7** Se tienen tres activos para los cuales $\widehat{\text{Cov}}(r_i, r_j) = 0$ si $i \neq j$, (es decir, son no correlacionados) y con rendimientos estimados $\hat{r}_1 = 0.18$, $\hat{r}_2 = 0.20$ y $\hat{r}_3 = 0.15$. Suponga que $\hat{\sigma}_1^2 = 0.14$, $\hat{\sigma}_2^2 = 0.12$ y $\hat{\sigma}_3^2 = 0.10$. Entonces si se quiere encontrar el portafolio de mínima varianza, el problema a resolver es

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \frac{1}{2} [0.14w_1^2 + 0.12w_2^2 + 0.10w_3^2] \\ &\text{sujeto a } 0.18w_1 + 0.20w_2 + 0.15w_3 = r_0, \\ &\quad \sum_{i=1}^3 w_i = 1. \end{aligned}$$

El portafolio de mínima varianza $\mathbf{w}_{MV}$ es: $w_1 = 0.28037$, $w_2 = 0.32710$, $w_3 = 0.39253$, con rendimiento $r_{MV} = 0.17477$ y volatilidad o desviación estándar igual a $\sigma_{MV} = 0.19812$

El portafolio $\mathbf{w}_e$ tiene componentes $w_1 = 0.28877$, $w_2 = 0.37433$ y $w_3 = 0.33690$, con rendimiento $r_e = 0.17738$ y volatilidad $\sigma_e = 0.19959$, tiene mayor rendimiento, pero también mayor volatilidad. En la figura 4.3 se representa el conjunto de riesgo-rendimiento para este ejemplo. ■

Diversificación

En esta sección se ilustra la conveniencia de diversificar la inversión entre varios activos en lugar de concentrarlo en un único activo. Supóngase que se tienen N activos no correlacionados con el mismo rendimiento esperado $E(r)$ y el mismo riesgo σ^2 y que se integra un portafolio con la siguiente posición $w_i = 1/N$, para $i = 1, \dots, N$.

$$E(r_p) = E\left(\sum_{i=1}^N \frac{r_i}{N}\right) = E(r).$$

En cambio,

$$\sigma_p^2 = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N \frac{r_i}{N}\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}.$$

Si $N \rightarrow \infty$, $\sigma^2 \rightarrow 0$. Si no están correlacionados conviene, sin lugar a dudas, diversificar. Observe que en el ejemplo anterior tanto la volatilidad del portafolio w_{MV} como el de w_e son menores a las volatilidades de cada uno de los activos.

¿Qué sucede si están correlacionados los activos? Suponga ahora que integra un portafolio similar pero ahora la $\text{Cov}(r_i, r_j) = 0.4\sigma^2$ entonces en los rendimientos no hay cambio, pero en la varianza del portafolio sí lo hay por lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N \frac{r_i}{N}\right] = \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N \sigma^2 + \sum_{i,j=1; i \neq j}^N 0.4\sigma^2 \right] \\ &= \frac{1}{N^2} (N\sigma^2 + 0.4(N^2 - N)\sigma^2) = \frac{0.6\sigma^2}{N} + 0.4\sigma^2. \end{aligned}$$

En este caso cuando $N \rightarrow \infty$, $\sigma^2 \rightarrow 0.4\sigma^2$. Al diversificar se puede reducir el riesgo hasta un cierto valor, pero no desaparecerlo. En este caso, todos los activos que se escogieron estaban todos positivamente correlacionados. Lo que conviene para reducir el riesgo es combinar activos que estén positivamente y negativamente correlacionados entre sí.

4.5 Inclusión del activo libre de riesgo

Se va a estudiar cómo integrar un portafolio con n activos con riesgo y un activo sin riesgo. Sea r_ℓ el rendimiento de un depósito bancario, su riesgo σ_ℓ es igual a cero porque su rendimiento está asegurado. En este caso la inclusión del activo sin riesgo va a simplificar la frontera eficiente a una recta que pasa por $(0, r_\ell)$.

Como motivación, se considera un portafolio muy sencillo que consiste de dos activos: uno con riesgo, con rendimiento r_1 y volatilidad σ_1 , y otro libre de riesgo. Observe que todos los posibles portafolios en el plano de riesgo-rendimiento están dados por la recta que une a los puntos $(0, r_\ell)$ y (σ_1, r_1) . En este caso $w_1 = 1 - w_\ell$, con $w_\ell \leq 1$, por lo que el rendimiento del portafolio $r_p = w_\ell r_\ell + (1 - w_\ell)r_1$ depende linealmente de w_ℓ . El riesgo del portafolio es $\sigma_p = \sigma_1(1 - w_\ell)$ que solo depende de w_ℓ y del activo con riesgo porque $\text{Cov}(r_\ell, r_1) = 0$.

Ahora si considera N activos con riesgo y un activo sin riesgo, todos los posibles portafolios estarían definidos por todas las rectas que pasan por $(0, r_\ell)$ y que conectan a un portafolio en la región de portafolios admisibles del problema de optimización con ventas en corto. Pero de todos esos posibles portafolios el que interesa debe estar en la frontera eficiente y de éstos, el que se busca es el que es tangente a la frontera eficiente porque es el que tiene más alto rendimiento. A este portafolio se le llama el portafolio tangente y se denota por (σ_T, r_T) su volatilidad y rendimiento, respectivamente. Entonces, cuando se incluye el activo sin riesgo la frontera eficiente es una recta y cualquier portafolio se va a determinar mediante el portafolio tangente y el activo sin riesgo.

Teorema 4.5.1 — Teorema de un fondo. La frontera eficiente del problema que incluye al activo sin riesgo está dada por la recta que une al portafolio tangente con el punto $(0, r_\ell)$. Cualquier portafolio sobre la frontera eficiente se escribe como combinación lineal de este

portafolio y del activo sin riesgo.

¿Cómo se construye el portafolio tangente? Dado el punto $(0, r_\ell)$ trazar la recta que solo toca a la frontera eficiente en un punto (σ_p, r_p) y trazar otra recta horizontal que pasa por $(0, r_\ell)$. El punto que se busca en la frontera eficiente debe maximizar el ángulo entre estas dos rectas. Denote por α al ángulo que maximiza a $\text{Tang}(\alpha)$. Como el portafolio de interés está en la frontera eficiente del problema de optimización con ventas en corto, está integrado únicamente con los activos con riesgo por lo que $\mathbf{w}_T = (w_1, \dots, w_N)$ con $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. Suponga que $\hat{C}$ es la matriz de varianza-covarianza muestral de los activos con riesgo y que $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector de las medias muestrales de los rendimientos y que $\mathbf{1}' = (1, \dots, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Tang}(\alpha) &= \frac{r_p - r_\ell}{\sigma_p} = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{r}_i w_i - r_\ell}{(\sum_{i=1, j=1}^N \hat{C}_{ij} w_i w_j)^{1/2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N w_i (\hat{r}_i - r_\ell)}{(\sum_{i=1, j=1}^N \hat{C}_{ij} w_i w_j)^{1/2}} = \frac{\mathbf{w}_T^t (\hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1})}{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)^{1/2}} \end{aligned}$$

En el último paso se usó que $\sum_{i=1}^N w_i = 1$. Derivando con respecto a cada w_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Tang}(\alpha)}{\partial w_i} &= \frac{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)^{1/2} (\hat{r}_i - r_\ell) - \mathbf{w}_T^t (\hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1}) \frac{1}{2} (\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)^{-1/2} 2 (\hat{C} \mathbf{w}_T)_i}{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)} \\ &= \frac{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)^{1/2} (\hat{r}_i - r_\ell) - \frac{\mathbf{w}_T^t (\hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1}) ((\hat{C} \mathbf{w}_T)_i)}{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)^{1/2}}}{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)} = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$0 = \frac{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T) (\hat{r}_i - r_\ell) - (\mathbf{w}_T^t (\hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1})) (\hat{C} \mathbf{w}_T)_i}{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)^{3/2}}$$

es decir

$$(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T) (\hat{r}_i - r_\ell) = (\mathbf{w}_T^t (\hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1})) (\hat{C} \mathbf{w}_T)_i$$

para $i = 1, \dots, n$. Sea

$$\lambda = \frac{\mathbf{w}_T^t (\hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1})}{(\mathbf{w}_T^t \hat{C} \mathbf{w}_T)}$$

entonces la expresión anterior se escribe como

$$r_i - r_\ell = \lambda (\hat{C} \mathbf{w}_T)_i.$$

Sea $\mathbf{w}_T = \lambda \mathbf{v}$ para una constante λ , entonces para encontrar el portafolio tangente se hace lo siguiente:

1. Resuelva $\hat{C} \mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}} - r_\ell \mathbf{1}$.
2. Sea

$$\mathbf{w}_T = \frac{\mathbf{v}}{\sum_i v_i},$$

de esta forma $\sum_i w_i = 1$.

3. El resto de los portafolios en la frontera eficiente se obtienen como $a + (1 - a) \mathbf{w}_T$, con $0 \leq a \leq 1$. Su rendimiento es $a r_\ell + (1 - a) r_T$ y su volatilidad $(1 - a) \sigma_T$.

■ **Ejemplo 4.8** Considere tres activos con riesgo, no correlacionados, con rendimientos $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, y $r_3 = 3$ y con la misma volatilidad $\sigma_i = 1$ para $i = 1, \dots, 3$. Suponga que $r_\ell = 0.5$ y aplique el algoritmo anterior. Al aplicar el algoritmo anterior se tiene que

$$\mathbf{v} = (1 - 0.5, 2 - 0.5, 3 - 0.5) = (0.5, 1.5, 2.5)$$

por lo cual

$$\sum_{i=1}^3 v_i = 4.5$$

A partir de esto, calcule

$$\mathbf{w}_T = \left(\frac{0.5}{4.5}, \frac{1.5}{4.5}, \frac{2.5}{4.5} \right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9} \right)$$

de donde se obtiene que

$$r_T = \mathbf{r}^t \mathbf{w}_T = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{22}{9},$$

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2 w_{iT}^2 = 1 \cdot \frac{1}{81} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{25}{81} = \frac{35}{81}.$$

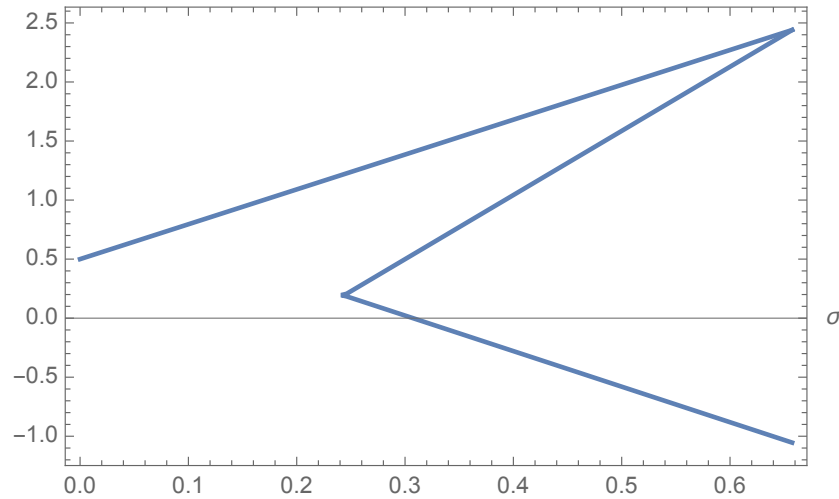


Figura 4.4: La línea recta es la frontera eficiente del ejemplo 4.8

En la Figura 4.4 se grafica la frontera eficiente cuando se incluye el activo sin riesgo que es la recta que une al punto $(0, 0.5)$ con el punto $(\frac{\sqrt{35}}{9}, \frac{22}{9})$ que está sobre la frontera eficiente de los activos con riesgo.

El modelo de riesgo-rendimiento es uno de los modelos más sencillos para integrar un portafolio de inversión. Sus principales hipótesis establecen que los rendimientos de los activos con riesgo son normales y que tanto los rendimientos como la matriz de varianza-covarianza se pueden estimar con bastante precisión. Los rendimientos son dinámicos por lo que se debe tener mucho cuidado al utilizar este método. Si se integra el portafolio para intervalos cortos, de dos o tres días, y los cambios en los rendimientos son pequeños, el modelo dará resultados satisfactorios. De hecho, este modelo es la base del modelo CAPM que es utilizado por muchas instituciones financieras para calcular sus posiciones diarias. En el planteamiento del problema para N activos puede incluirse como restricción que no haya ventas en corto, lo que implica agregar la restricción de que los pesos $w_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, N$. En este caso se debe aplicar el Teorema de Kuhn y Tucker para problemas de optimización con restricciones de desigualdad. Para mayor información, se sugiere el libro Peressini y *col.* (1988).

Para un análisis más sofisticado se da por supuesto que los precios siguen un proceso estocástico browniano geométrico. El portafolio óptimo dinámico se calcula por medio de un problema de optimización estocástica que da lugar a un problema en ecuaciones en derivadas parciales, ver Björk (2004). para mayor información.



El modelo de riesgo-rendimiento se puede utilizar para integrar portafolios más diversos que no solo contengan acciones; se pueden incluir bienes de consumo como trigo, maíz, un barril de petróleo u oro. También se pueden incluir tipos de cambio oficiales como es el Fix o índices de mercados accionarios como el IPC o NYSE US o Dow Jones, siempre que se tenga acceso a sus precios históricos diarios. El procedimiento es el mismo, se calculan los rendimientos diarios a partir de los precios, ver los ejercicios 4.11 y 4.12.

4.6 Modelo CAPM*

Como se vio en la sección anterior, cuando se incluye el activo sin riesgo con rendimiento r_ℓ , la frontera eficiente en el plano riesgo-rendimiento es una recta que pasa por $(0, r_\ell)$ y por (σ_T, μ_T) , que denota el riesgo y el rendimiento del portafolio tangente que se encuentra en la frontera eficiente del problema clásico de Markowitz. Esta idea es retomada por el modelo CAPM en el que se propone que el portafolio de mercado sea el que juegue el papel del portafolio tangente.

El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) fue propuesto a principios de los años sesenta por William Sharpe, Jack Treynor, John Lintner y Jan Mossin, ver Sharpe (1964), y tiene como fundamento el modelo de Markowitz. Supone que se cumplen las siguientes hipótesis:

1. Los inversionistas miden el riesgo de su portafolio en términos de la volatilidad σ_p del mismo.
2. Todos tienen acceso a la misma información: $\mathbf{r}$ y C .
3. Los inversionistas solo se distinguen por su aversión al riesgo.
4. Los mercados de capitales son perfectos: los activos son divisibles, no hay costos de transacción ni impuestos, y las tasas para depósitos o préstamos son las mismas.
5. Todos identifican como portafolio tangente al portafolio de mercado o ideal cuya volatilidad y rendimiento denotaremos por σ_M y μ_M , respectivamente.
6. Los precios de los activos A_i se determinan por un argumento de equilibrio respecto a la oferta y la demanda.

El portafolio de mercado está integrado por todos los activos que hay en el mercado accionario. El peso w_i de un activo A_i se calcula a partir del peso que tienen la acción A_i en el mercado accionario y que se denomina como peso de capitalización y que se calcula de la siguiente manera: sea N_i el número total de acciones A_i que se ofertan en la bolsa y sea P_i el costo de la acción i , entonces

$$w_i = \frac{N_i P_i}{\sum_{j=1}^n N_j P_j}.$$

Suponga que el mercado accionario consiste en tres acciones A_1 , A_2 y A_3 y se cuenta con la siguiente información:

Activo	Núm. acciones	Peso en acciones	Precio	Capital	Peso en capital
A_1	10,000	1/8	6	60,000	3/20
A_2	30,000	3/8	4	120,000	3/10
A_3	40,000	1/2	5.5	220,000	11/20

Bajo estos supuestos el portafolio de cada inversionista es una combinación lineal del portafolio de mercado y del activo sin riesgo, es decir el rendimiento del portafolio está dado por:

$$\mu_V = \alpha r_\ell + (1 - \alpha) \mu_M.$$

Esta recta en el plano riesgo-rendimiento tiene como pendiente

$$m = \frac{\mu_M - r_\ell}{\sigma_M}$$

por lo que cualquier otro rendimiento de un activo i que esté sobre esta recta debe satisfacer

$$\mu = r_\ell + \frac{\mu_M - r_\ell}{\sigma_M} \sigma$$

con μ y σ el rendimiento y el riesgo de dicho activo, respectivamente. A m se le llama el precio de mercado del riesgo.

Como se vio en la sección anterior, (σ_M, μ_M) es el punto de tangencia del portafolio de mercado M , cuya composición está dada por $\mathbf{w}_M$. Considere cualquier otro portafolio V , en la curva de riesgo-rendimiento y denote sus coordenadas por (σ_V, μ_V) .

Por el teorema de dos fondos cualquier otro portafolio P se puede escribir como combinación lineal de $\mathbf{w}_M$ y V :

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{x^2 \sigma_V^2 + (1-x)^2 \sigma_M^2 + 2x(1-x) \text{Cov}(r_V, r_M)}, \\ \mu_P &= x\mu_V + (1-x)\mu_M.\end{aligned}$$

Al derivar respecto a x :

$$\frac{\partial \sigma_P}{\partial x} = \frac{2x\sigma_V^2 - 2(1-x)\sigma_M^2 + 2(1-x)\text{Cov}(r_V, r_M) - 2x\text{Cov}(r_V, r_M)}{2\sigma_P}.$$

Al evaluar en $x = 0$

$$\left. \frac{\partial \sigma_P}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{-2\sigma_M^2 + 2\text{Cov}(r_V, r_M)}{2\sigma_M} = \frac{-\sigma_M^2 + \text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M}.$$

Si se hace lo mismo para μ_P , se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \mu_P}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_V - \mu_M.$$

La pendiente de la recta en el punto (σ_M, μ_M) es

$$\frac{\left. \frac{\partial \mu_P}{\partial x} \right|_{x=0}}{\left. \frac{\partial \sigma_P}{\partial x} \right|_{x=0}} = \frac{\mu_V - \mu_M}{\frac{-\sigma_M^2 + \text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M}} = \frac{\mu_M - r_\ell}{\sigma_M},$$

de donde

$$\mu_V - \mu_M = \frac{\mu_M - r_\ell}{\sigma_M} \frac{\text{Cov}(r_V, r_M) - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

o bien

$$\begin{aligned}\mu_V &= \mu_M + (\mu_M - r_\ell) \left(\frac{\text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M^2} - 1 \right) \\ &= r_\ell + \frac{\text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M^2} (\mu_M - r_\ell).\end{aligned}$$

Denote por

$$\beta_V = \frac{\text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M^2}$$

el factor beta del portafolio V y del razonamiento anterior se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.6.1 — CAPM. Suponga que r_ℓ es menor que μ_{MVP} . Entonces el valor esperado de cualquier portafolio factible es

$$\mu_V = r_\ell + \beta_V (\mu_M - r_\ell).$$

El término $\beta_V (\mu_M - r_\ell)$ es la prima de riesgo para cualquier portafolio factible.

Si V está en la recta entre $(0, r_\ell)$ y (σ_M, μ_M) entonces esta prima y $m\sigma_V$ deben ser iguales. La diferencia está en que la prima de riesgo se aplica a cualquier portafolio factible, y no solamente a los que están sobre la recta.

Cuando se aproxima el rendimiento r_V del portafolio factible V mediante una función lineal que dependa del rendimiento del portafolio de mercado M , $\beta r_M + \alpha$, entonces el error de aproximación es

$$\varepsilon = r_V - (\beta r_M + \alpha).$$

Para determinar el α y β que mejor aproximan linealmente a r_V (i.e. la que minimiza la varianza de ε) se usa regresión lineal, en cuyo caso

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_V, \\ \alpha &= \mu_V - \beta_V \mu_M = r_\ell(1 - \beta_V),\end{aligned}$$

esto ya que

$$\begin{aligned}f(\alpha, \beta) &= \text{Var}(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n (r_{V_k} - (\beta r_{M_k} + \alpha))^2 p_k \\ &= E(r_V^2) + \beta^2 E(r_M^2) + \alpha^2 - 2\beta E(r_V r_M) - 2\alpha E(r_V) + 2\alpha\beta E(r_M),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= 2\alpha - E(r_V) + 2\beta E(r_M) = 0, \\ \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= 2\beta E(r_M^2) - 2E(r_V r_M) + 2\alpha E(r_M) = 0.\end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene que

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{E(r_V r_M) - E(r_V)E(r_M)}{E(r_M^2) - E(r_M)^2} = \frac{\text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M^2} = \beta_V, \\ \alpha &= E(r_V) - \frac{E(r_V r_M) - E(r_V)E(r_M)}{E(r_M^2) - E(r_M)^2} E(r_M) \\ &= \mu_V - \frac{\text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M^2} \mu_M = \mu_V - \beta_V \mu_M.\end{aligned}$$

Así, cuando α y β se calculan de esta forma y dado que $\mu_V = r_\ell + \beta_V(\mu_M - r_\ell)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= r_V - \mu_V - \beta_V(r_M - \mu_M) \\ &= r_V - (r_\ell + \beta_V(\mu_M - r_\ell)) - \beta_V(r_M - \mu_M) \\ &= r_V - r_\ell - \beta_V \mu_M + \beta_V r_\ell - \beta_V r_M + \beta_V \mu_M \\ &= r_V - r_\ell - \beta_V(r_M - r_\ell).\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}E(\varepsilon_V) &= E(r_V - r_\ell - \beta_V(r_M - r_\ell)) \\ &= E(r_V) - E(r_\ell) - E(\beta_V(r_M - r_\ell)) \\ &= \mu_V - r_\ell - \beta_V E(r_M) + \beta_V r_\ell \\ &= \mu_V - (r_\ell + \beta_V(\mu_M - r_\ell)) \\ &= \mu_V - \mu_V = 0,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\varepsilon_V, r_M) &= \text{Cov}(r_V - r_\ell - \beta_V(r_M - r_\ell), r_M) \\ &= \text{Cov}(r_V, r_M) - \cancel{\text{Cov}(r_\ell, r_M)}^0 - \text{Cov}(\beta_V(r_M - r_\ell), r_M) \\ &= \text{Cov}(r_V, r_M) - \beta_V \text{Cov}(r_M, r_M) - \cancel{\text{Cov}(-\beta_V r_\ell, r_M)}^0 \\ &= \text{Cov}(r_V, r_M) - \frac{\text{Cov}(r_V, r_M)}{\sigma_M^2} \sigma_M^2 = 0.\end{aligned}$$

Así

$$r_V - \mu_V = \varepsilon_V + \beta_V(r_M - \mu_M),$$

por lo que

$$\text{Var}(r_V - \mu_V) = \text{Var}(\varepsilon_V) + \text{Var}(\beta_V(r_M - \mu_M)),$$

o bien

$$\sigma_V^2 = \text{Var}(\varepsilon_V) + \beta_V^2 \sigma_M^2,$$

donde σ_V^2 mide el riesgo del portafolio V , $\beta_V^2 \sigma_M^2$ es el riesgo sistemático debido a la relación entre el portafolio V y el mercado, el cual está medido por β_V , mientras que $\text{Var}(\varepsilon_V)$ es el riesgo diversificable.

Note que si $V = M$, entonces $\text{Var}(\varepsilon_V) = \text{Var}(\varepsilon_M) = 0$.

La fórmula

$$\mu_V = r_\ell + \beta_V(\mu_M - r_\ell)$$

muestra el equilibrio del mercado. Si cambiara el rendimiento esperado μ_V o el factor β_V , de forma que

$$\mu_V > r_\ell + \beta_V(\mu_M - r_\ell)$$

entonces los inversores buscarán incrementar su posición en la acción que modificó los valores, ya que ofrece mayor rendimiento a la compensación por riesgo sistémico. Esto llevará a que la demanda aumente y, por lo tanto, aumente el precio de la acción y, en consecuencia, se reduzca su rendimiento esperado. Si en cambio

$$\mu_V < r_\ell + \beta_V(\mu_M - r_\ell)$$

los inversores buscarán reducir su posición en la acción, lo que reducirá su precio ya que hay una oferta excesiva, y esto aumenta su rendimiento esperado.

De esta forma, tenemos lo siguiente:

1. Si $\beta_i = 0$ entonces $\mu_i = E(r_i) = r_\ell$.
2. Si $\beta_i < 0$ entonces $\mu_i = E(r_i) < r_\ell$. Este activo reduce el riesgo del portafolio cuando se combina con otros activos correlacionados con el portafolio de mercado.
3. Si $0 < \beta_i < 1$ entonces el activo i se moverá como el portafolio del mercado, pero tendrá menores rendimientos.
4. Si $\beta_i > 1$ se moverá como el portafolio del mercado, pero tendrá mayores rendimientos que el portafolio de mercado.

En el modelo CAPM la β mide el riesgo del activo i . El índice de precios y cotizaciones de la bolsa mexicana de valores IPC juega el papel del portafolio del mercado y su precio se cotiza diariamente en la bolsa como cualquier otro activo por lo que la media, su varianza y la covarianza con otros activos de sus rendimientos se puede estimar a partir de los datos históricos.

■ **Ejemplo 4.9** Para cierto activo i tenemos que $r_\ell = 0.075$, $\mu_M = 0.12$ y $\sigma_M = 0.15$, si $\text{Cov}(r_i, r_M) = 0.045$, calcule el factor beta y el rendimiento esperado del activo. ¿Conviene invertir en dicho activo?

Se sabe que

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{0.045}{0.15^2} = 2.$$

Por otra parte,

$$\mu_i = E(r_i) = r_\ell + \beta_i(\mu_M - r_\ell) = 0.075 + 2(0.12 - 0.075) = 0.165,$$

como se observa, el factor beta es mayor a 1, por lo que el activo tendrá mayores rendimientos que el portafolio de mercado. Eso también se puede ver ya que $r_\ell < \mu_i$. Esto quiere decir que sí conviene invertir en dicho activo. ■

■ **Ejemplo 4.10** Supongamos que $r_\ell = 0.00021$ y considere los siguientes datos diarios.

Fecha	Precio Liverpool	IPC
1 de diciembre de 2021	85.03	50,752.12
2 de diciembre de 2021	86.43	50,956.15
3 de diciembre de 2021	86.28	51,413.06
6 de diciembre de 2021	88.23	50,842.35
7 de diciembre de 2021	91.04	51,009.75
8 de diciembre de 2021	88.91	51,121.00
9 de diciembre de 2021	87.97	51,305.44
10 de diciembre de 2021	87.50	51,240.19
13 de diciembre de 2021	86.82	51,218.97
14 de diciembre de 2021	88.05	51,481.70
15 de diciembre de 2021	86.98	51,291.03

1. Calcule los rendimientos logarítmicos de Liverpool y el IPC. Calcule la media y la volatilidad muestral de cada rendimiento y la covarianza de estos rendimientos. Calcule los rendimientos con la fórmula

$$\ln\left(\frac{P^1}{P^0}\right).$$

Luego promedie sobre el número de rendimientos obtenidos. Para Liverpool el rendimiento logarítmico promedio es $\hat{\mu}_L = 0.00226741$, mientras que para el IPC el rendimiento logarítmico promedio es $\hat{\mu}_{IPC} = 0.00141154$, para calcular la covarianza muestral, se tiene que

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

con lo cual $\text{Cov}(\hat{r}_L, \hat{r}_{IPC}) = -3.64977 \times 10^{-6}$.

Finalmente, para calcular la volatilidad muestral se tiene que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1},$$

con lo cual $\hat{\sigma}_L^2 = 0.000312348$, y $\hat{\sigma}_{IPC}^2 = 3.46504 \times 10^{-5}$, de donde $\hat{\sigma}_L = 0.017673377$ y $\hat{\sigma}_{IPC} = 0.005886457$

2. Calcule el factor beta del rendimiento de Liverpool cuando se toma al IPC como el rendimiento del mercado. ¿Qué observa?
Al calcular la β_L se obtiene

$$\beta_L = \frac{\text{Cov}(\hat{r}_L, \hat{r}_{IPC})}{\hat{\sigma}_{IPC}^2} = \frac{-3.64977 \times 10^{-6}}{3.46504 \times 10^{-5}} = -0.105331396$$

Observe que los rendimientos promedio de Liverpool están correlacionados negativamente con el IPC, es decir, son positivos cuando los rendimientos del IPC son negativos y viceversa. ■

Para profundizar en algunos de los temas tratados en este capítulo se recomienda el texto de Capiński y Kopp (2014).

4.7 Ejercicios

Ejercicio 4.1 Calcule el valor de un portafolio V^1 cuyo valor inicial es $V^0 = 1000$ que consiste en dos acciones con asignaciones $w_1 = 0.25$ y $w_2 = 0.75$, los precios de cada una el día de hoy son $P_1^0 = 45$ y $P_2^0 = 33$ y al tiempo final $P_1^1 = 48$ y $P_2^1 = 32$. ■

Ejercicio 4.2 Encuentre el rendimiento de un portafolio que consiste en dos acciones con asignaciones $w_1 = 0.3$, $w_2 = 0.7$, para cada uno de los siguientes escenarios:

	r_1	r_2
Escenario 1	10 %	-5 %
Escenario 2	-5 %	10 %

Ejercicio 4.3 Encuentre el rendimiento esperado del portafolio del ejercicio 4.2 suponiendo que la probabilidad de que ocurra el escenario 1 es 0.2 y de que ocurra el escenario 2 es 0.8 (sugerencia: por la linealidad de la esperanza, no es necesario que haga todos los cálculos otra vez. Utilice los resultados encontrados en el ejercicio 4.2).

Ejercicio 4.4 Calcule las asignaciones w_1 y w_2 de un portafolio formado por dos acciones si el rendimiento esperado del portafolio es $E(r) = 0.1$ dada la siguiente información:

	Probabilidad	r_1	r_2
Escenario 1	0.1	-10 %	10 %
Escenario 2	0.3	0 %	-5 %
Escenario 3	0.6	15 %	20 %

Ejercicio 4.5 Use los datos del Ejemplo 4.5 y encuentre los porcentajes w_1 y w_2 para que $\mu_p = 0.5$, calcule el riesgo σ_p de este portafolio.

Ejercicio 4.6 Demostrar el Corolario 4.3.7.

Ejercicio 4.7 Retome el ejemplo 4.7, pero considere que el activo 1 y 2 están negativamente correlacionados con el activo 3 de la siguiente forma:

$$\text{Cov}(r_1, r_3) = \text{Cov}(r_2, r_3) = -.10$$

y $\text{Cov}(r_1, r_2) = .10$, determine w_{MV} , r_{MV} y σ_{MV} . ¿Disminuye la volatilidad del portafolio de mínima varianza respecto al que se obtuvo en el ejemplo?

Ejercicio 4.8 Muestre que para un portafolio V formado de n activos con pesos $w_1, \dots, w_n$ se tiene que el factor beta del portafolio cumple

$$\beta_V = w_1\beta_1 + \dots + w_n\beta_n$$

donde $\beta_1, \dots, \beta_n$ son los factores betas correspondientes a cada activo.

Se sugiere que para los siguientes ejercicios se use Excel o Python. Se busca con ellos que el lector se familiarice con la manipulación de datos reales.

Ejercicio 4.9 Hay un inversionista con un millón de pesos que el 1 de julio de 2025 quiere integrar un portafolio con acciones de 4 empresas: Grupo Bimbo, Cemex, El Puerto de Liverpool y Grupo Financiero Banorte.

1. Baje de internet los datos históricos diarios de los seis últimos meses de los precios de las acciones de cada empresa y gráfíquelos.

2. Calcule los rendimientos logarítmicos y gráfíquelos.
3. Calcule la media, la varianza y covarianza muestral de los rendimientos diarios.
4. Grafique un histograma con cada uno de los rendimientos y decida si los rendimientos se comportan conforme a una distribución normal.
5. Realice una prueba Kolmogorov-Smirnov para comprobar si la distribución es normal.

Ejercicio 4.10

1. Use los datos del ejercicio anterior para determinar la composición tanto del portafolio de mínima varianza como la de un portafolio sobre la frontera eficiente cuando se permiten ventas en corto. Grafique el conjunto de riesgo-rendimiento.
2. ¿Cuál es el portafolio óptimo con rendimiento diario $r^* = 0.001923$ que corresponde a un rendimiento anual del 10%. Expresé este portafolio como combinación lineal de los dos portafolios que determinó en el inciso 1.

Ejercicio 4.11 Calcule el portafolio tangente correspondiente a los datos del ejercicio 4.9 cuando $r_\ell = 0.001442$, que corresponde a un interés del 7.5 % anual, cuando se permiten ventas en corto. Grafique la frontera eficiente.

Ejercicio 4.12 Busque los datos del IPC del último mes, genere sus rendimientos y estime su media, varianza y covarianza muestral. Si considera que el IPC es el portafolio de mercado, determine lo que se le pide en cada inciso con los datos de las acciones del ejercicio 4.9.

1. Calcule las β_i de cada acción y dé una interpretación sobre las mismas. Use las β_i para decidir cuáles activos deberían reducir su participación en el portafolio.
2. Calcule la β del portafolio de mínima varianza y de otro sobre la frontera eficiente. Compare las betas obtenidas con la varianza del portafolio y proponga una conclusión.

Ejercicio 4.13 Un activo importante es el Fix que es el tipo de cambio oficial peso-dólar y que publica diariamente Banxico en los días hábiles. Es un activo con riesgo porque es un promedio ponderado del tipo de cambio en varias plazas del país. En la página de Banxico se puede encontrar los datos históricos para estimar la media y la varianza muestral. Con esta información determine lo siguiente:

1. Grafique el tipo de cambio Fix con los datos históricos del año anterior. Calcule su rendimiento logarítmico. Calcule la media y la varianza muestral.
2. Grafique su histograma y su QQ plot. ¿Se comportan como una distribución normal? Aplique una prueba de bondad de ajuste.
3. Calcule la β usando al IPC como el portafolio de mercado.
4. Considere un portafolio en el que una parte se invierte en el IPC y otra en el FIX el 6 de enero del año en curso. Calcule la matriz de varianza-covarianza muestral. Con estos datos, calcule el portafolio de mínima varianza y otro en la frontera eficiente. Grafique la región de riesgo-rendimiento.
5. Use la tasa anual de Cetes a 28 días del 6 de enero como la tasa libre de riesgo y calcule la tasa efectiva diaria correspondiente. Calcule el portafolio tangente y la frontera eficiente.

Ejercicio 4.14 Suponga que hay un fondo de inversión llamado Inveroro cuyo precio depende de la cotización del oro internacional. Considere los datos del año pasado y calcule lo siguiente:

1. Los datos en dólares transfórmelos a pesos, use la cotización del Fix del 6 de enero, y

- calcule y grafique los rendimientos logarítmicos. Calcule también la media y la varianza muestral.
2. Grafique su histograma y su QQ plot. Se comportan como una distribución normal. Aplique una prueba de bondad de ajuste.
 3. Calcule la β correspondiente.
 4. Considere un portafolio con dos activos: el Fix e Inveroro que se invierte a partir del 6 de enero del año en curso. Calcule la matriz de varianza-covarianza muestral.
 5. Calcule el portafolio de mínima varianza y otro en la frontera eficiente. Grafique la región de riesgo-rendimiento.
 6. Calcule la β del portafolio de mínima varianza. ¿Cómo es la beta de este portafolio respecto a la beta de cada uno de los activos que integra el portafolio?
- 

5. Riesgo de mercado

5.1 Introducción

En 1975 en la ciudad de Basilea, Suiza, los jefes de Estado de los diez países mas industrializados crearon un comité integrado por los gobernadores de los bancos centrales con el fin de uniformizar los criterios que se utilizan en la supervisión de las instituciones financieras con carteras internacionales. A este comité se le conoce como el Comité de Basilea. En 1988 emitió los primeros acuerdos de Basilea I que se referían, entre otros puntos, al capital mínimo que debe tener una institución financiera para cubrirse de su exposición al riesgo de crédito, riesgo relacionado con los préstamos que otorga un banco a particulares y empresas. En 1996 se ampliaron los acuerdos para incluir el riesgo de mercado y se fijó el año 2000 como fecha límite para implementar procedimientos financieros rigurosos para estimar el riesgo que corren estas instituciones al invertir los fondos de sus clientes, en los préstamos que otorgan y en las operaciones que llevan a cabo regularmente. En 2004 se presentaron a la opinión pública los Acuerdos de Basilea II que definen los procedimientos estándar que deben implementar las instituciones financieras para supervisar su exposición a distintos riesgos a los que se enfrentan cotidianamente.

Entre estos riesgos están los siguientes:

1. Riesgo de mercado: es el riesgo que conllevan las variaciones de los precios de las acciones que se cotizan en un mercado de valores y que integran un portafolio. Este riesgo también se aplica cuando se trabaja con bienes de consumo: petróleo, trigo, oro, etcétera. También se considera en este rubro a portafolios de bonos, sin riesgo de incumplimiento, con distintas madureces y tasas de rendimiento.
2. Riesgo de crédito: este es el riesgo que conlleva un portafolio integrado por créditos hipotecarios o créditos a empresas, o un portafolio con bonos corporativos con riesgo de incumplimiento. Este último riesgo consiste en el riesgo que la empresa que emitió el bono se declare insolvente para pagar a los tenedores de bonos.
3. Riesgo de liquidez: este riesgo sucede cuando un banco o una casa de bolsa tienen todos sus activos invertidos o comprometidos y no puede pagar los retiros ni las transacciones de sus clientes.
4. Riesgo operativo: es el riesgo que corre una institución financiera por errores que cometen sus empleados o por el incumplimiento de sus procedimientos.

Como respuesta a la crisis de las hipotecas subprime de 2008, el 16 de diciembre del 2010 se firmaron los Acuerdos de Basilea III que consisten en un conjunto de propuestas que deben implementar las instituciones bancarias con el fin de que éstas incrementen tanto la calidad de

su capital como su liquidez para evitar el problema del contagio entre las instituciones cuando se incrementa las tensiones en el sistema financiero. En diciembre 2017 se publicaron los Acuerdos de Basilea IV que buscan fortalecer la resiliencia del sistema financiero a través de estandarizar las metodologías tanto para la evaluación de los riesgos de mercado, crédito y operativo como para el cálculo de los requerimientos de capital de las instituciones bancarias.

El encargado de supervisar la implementación de estos acuerdos en México es la CNBV y en su página oficial se puede descargar un documento con la metodología que deben adoptar las instituciones bancarias que operan en México para cumplir con dichos acuerdos,

Este capítulo trata sobre el riesgo de mercado e introduce las medidas de riesgo VaR y CVaR que son las medidas recomendadas en los Acuerdos de Basilea II y IV, respectivamente para medir dicho riesgo. Estas medidas se presentan en el contexto de un portafolio de acciones.

Sean

$$V_0 = \sum_{i=1}^n m_i P_i^0,$$

$$V_1 = \sum_{i=1}^n m_i P_i^1,$$

el valor del portafolio al tiempo inicial y final, respectivamente, con P_i^j el precio de una acción al tiempo $j = 0, 1$. V_0 es conocido mientras que V_1 es una variable aleatoria. Hasta ahora se han visto dos maneras de medir el riesgo de un portafolio: si se supone que los rendimientos son normales entonces la volatilidad del portafolio σ es una buena medida del riesgo, como en el modelo clásico de Markowitz; por otro lado, las β_i nos dan una idea del riesgo que conlleva invertir en el activo i respecto al portafolio de mercado.

5.1.1 Medidas de riesgo

¿Qué propiedades serían deseables que cumpliera una medida de riesgo? Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad, con Ω el conjunto de eventos, F una sigma-álgebra y P una medida de probabilidad. Sea $L : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ una variable aleatoria y sea $\tilde{X}$ un espacio vectorial integrado por las variables aleatorias L y $\mathcal{M}$ un cono convexo de $\tilde{X}$, es decir es un subconjunto de $\tilde{X}$ en el que se satisface: si $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$, entonces $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$ y si $L_1 \in \mathcal{M}$ y $\delta > 0$, entonces $\delta L_1 \in \mathcal{M}$.

Definición 5.1.1 Sea $\rho : \mathcal{M} \subset \tilde{X} \rightarrow [0, \infty)$ una función que satisface:

1. Invarianza bajo traslaciones: si se agrega un monto determinista al portafolio se reduce el riesgo del portafolio:

$$\rho(L + \ell) \leq \rho(L) + \ell$$

para $\ell \in \mathbb{R}$.

2. Homogeneidad:

$$\rho(\theta L) \leq \theta \rho(L)$$

para $\theta \in \mathbb{R}^+$.

3. Subaditividad:

$$\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2).$$

4. Monotonicidad:

$$\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$$

si $L_1 \leq L_2$.

Si ρ cumple lo anterior se dice que es una **medida de riesgo coherente**.

■ **Ejemplo 5.1** Observe que σ_p no satisface las condiciones 1, 2 y 3. El factor β tampoco es una medida de riesgo coherente, pues la monotonicidad no se cumple. ■

Para dar un ejemplo de una medida de riesgo coherente, se introducirá primero el Valor en riesgo, que se denota por VaR, para después definir el Valor en riesgo condicionado (CVaR) o *expected shortfall* que cumple con las propiedades de una medida de riesgo coherente.

5.2 Valor en riesgo (VaR)

El VaR es una medida de riesgo para cuantificar la exposición al riesgo de pérdida en una inversión. Se utiliza en la banca desde 1993 ante la necesidad de monitorear diariamente su exposición al riesgo. En 1996 el Comité de Basilea lo incorporó a los procedimientos que se deberían utilizar para medir el riesgo de mercado. Consiste en lo siguiente: dado un horizonte de tiempo T y un nivel de confianza α , estima el tamaño de las posibles pérdidas de una inversión. En particular, se aplica para evaluar el riesgo al integrar un portafolio con acciones que cotizan en bolsa.

La pérdida L de un portafolio de inversión es:

$$\begin{aligned} L &= -(V_1 - V_0) = -\sum_{i=1}^n (m_i P_i^1 - m_i P_i^0) \\ &= -\sum_{i=1}^n m_i P_i^0 \frac{(P_i^1 - P_i^0)}{P_i^0} \approx -\sum_{i=1}^n m_i P_i^0 \ln \left(\frac{P_i^1}{P_i^0} \right) \\ &= -V_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i P_i^0}{V_0} r_i \right) = -V_0 \sum_{i=1}^n w_i r_i, \end{aligned}$$

donde V_0 es la posición del portafolio al tiempo $t = 0$ y r_i es el rendimiento logarítmico del activo i que son los factores de riesgo. Se multiplica por menos para que las pérdidas sean positivas y las ganancias negativas y que al graficar la distribución, las pérdidas aparezcan del lado derecho de la gráfica.

Definición 5.2.1 Dado un horizonte de tiempo T y un nivel de confianza α , el **valor en riesgo** (VaR) se define como

$$\text{VaR}(\alpha) = \inf\{k_c \in \mathbb{R} \mid P(L > k_c) \leq 1 - \alpha\}.$$

El $\text{VaR}(\alpha)$ nos da el cuantil para el cual la probabilidad de que las pérdidas del portafolio sean menores o iguales a k_c es menor o igual a α . El cálculo del VaR depende de las hipótesis que se hagan sobre la distribución de los rendimientos del portafolio. Observe que el VaR no es una medida de riesgo coherente porque no cumple la subaditividad.

En este texto se presentan dos métodos para estimar el VaR y el CVaR: el método de varianza-covarianza, que supone rendimientos normales, y el método histórico, que trabaja directamente con las pérdidas del portafolio sin suponer distribución alguna.

En suma el VaR tiene varias propiedades atractivas: se puede aplicar a cualquier portafolio sin importar su composición; toma en cuenta las correlaciones en los cambios de los precios de los activos del portafolio; el riesgo se representa mediante un solo número y es fácil de calcular. Sin embargo, tiene sus inconvenientes, entre los que se encuentra no tener la propiedad de subaditividad, que viola el principio de diversificación en finanzas.

5.2.1 VaR paramétrico

Si se supone que los rendimientos son normales, la pérdida del portafolio también es una variable aleatoria normal cuyos parámetros se estiman por medio de los datos:

$$\begin{aligned} \mu_L &= E[L] = -V_0 \sum_{i=1}^n w_i E[r_i] \approx -V_0 \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i = \hat{\mu}_L \\ \sigma_L^2 &= V_0^2 \bar{w}' \Sigma \bar{w} \approx V_0^2 \bar{w}' \hat{\Sigma} \bar{w}, \end{aligned}$$

con $\bar{r}_i$ la media muestral de los i -ésimos rendimientos, Σ la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos y $\hat{\Sigma}$ la matriz de varianza-covarianza muestral.

Si los datos históricos son diarios y $V_0 = 1$, el cálculo del VaR a un día se hace de la siguiente forma: Sea

$$Z = \frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \sim N(0, 1).$$

Por definición

$$P(Z \leq \text{VaR}(\alpha)) = \alpha = \Phi(\text{VaR}(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\text{VaR}(\alpha)} e^{-y^2/2} dy,$$

con Φ la normal acumulada que es una función invertible. Por lo tanto,

$$\text{VaR}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha),$$

con Φ^{-1} la inversa de la normal acumulada. Como $P(L \leq \sigma_L \text{VaR}(\alpha) + \mu_L) = \alpha$ entonces

$$\text{VaR}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_L + \mu_L.$$

Si se utiliza la media $\hat{\mu}_L$ y la varianza muestral $\hat{\sigma}_L^2$ se obtiene una estimación del VaR que se denotará por $\widehat{\text{VaR}}$

$$\widehat{\text{VaR}}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) \hat{\sigma}_L + \hat{\mu}_L.$$

En la Figura 5.1 se ilustra el cálculo del VaR al 95 % y al 99 % cuando las pérdidas se distribuyen como una Normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$.

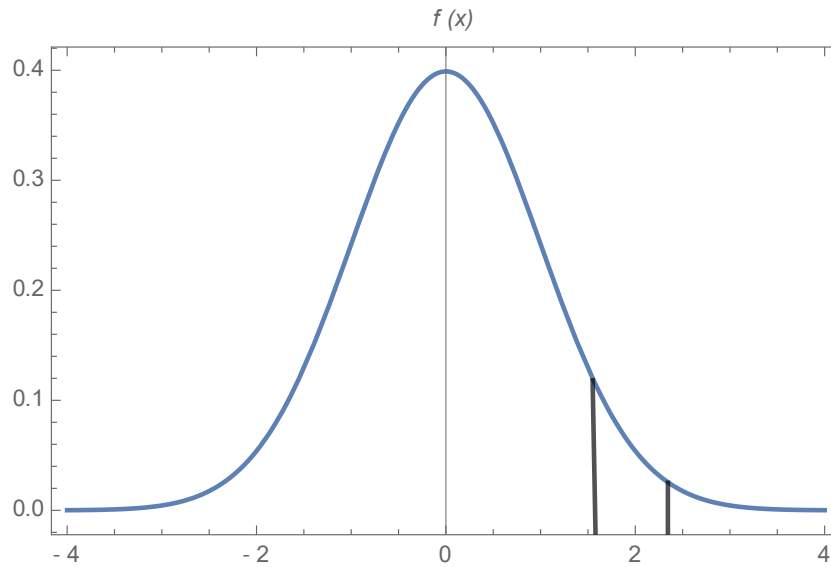


Figura 5.1: La intersección de las rectas verticales con el eje de las x nos dan el VaR al 95 % y 99 %, respectivamente, cuando las pérdidas tienen una distribución $N(0, 1)$.

Cuando se calcula el VaR de un portafolio para un horizonte de tiempo, se supone que la composición del portafolio permanece constante, lo cual es un supuesto difícil de cumplir para periodos largos. En el caso de portafolios con acciones, el horizonte de tiempo que se toma usualmente es de un día o una semana. Pero si el portafolio se compone de créditos, es razonable el horizonte de un año.

El cálculo del VaR para un horizonte de tiempo T y con un portafolio con valor inicial V_0 es

$$\text{VaR}(\alpha) = V_0 \left(\Phi^{-1}(\alpha) \sigma_L \sqrt{T} + \mu_L T \right).$$

En ocasiones se mide la diferencia entre el VaR y la media de las pérdidas, lo cual se denomina como VaR^{mean} . En el caso del riesgo de mercado, en donde el horizonte de tiempo es pequeño, no hay mucha diferencia entre una y otra medida, pero en riesgo de crédito es importante hacer la distinción.

Definición 5.2.2

$$\text{VaR}^{\text{mean}}(\alpha) = \text{VaR}(\alpha) - \mu_L = V_0 (\Phi^{-1}(\alpha) \sigma_L) \sqrt{T}.$$

■ **Ejemplo 5.2** Suponga que tiene un portafolio con posición inicial $V_0 = 100000$ pesos y cuyas pérdidas semanales se distribuyen como una normal con parámetros $\mu = 0.01$ y volatilidad $\sigma = 0.10$, determine el VaR y el VaR^{mean} a un nivel de confianza del 95 % y 99 % a 5 días.

Dado que $\Phi^{-1}(0.95) = 1.66$ y $\Phi^{-1}(0.99) = 2.32$, tenemos que

$$\text{VaR}(.95) = 100000(\Phi^{-1}(0.95)0.10\sqrt{5} + 0.05) = 42118.73,$$

$$\text{VaR}(.99) = 100000(\Phi^{-1}(0.99)0.10\sqrt{5} + 0.05) = 56876.78,$$

$$\text{VaR}^{\text{mean}}(.95) = 100000(\Phi^{-1}(0.95)0.10)\sqrt{5} = 37118.73,$$

$$\text{VaR}^{\text{mean}}(.99) = 100000(\Phi^{-1}(0.99)0.10)\sqrt{5} = 51876.78$$

■

■ **Ejemplo 5.3** Considere los rendimientos de las siguientes acciones: $A_1 = \text{Liverpool}$, $A_2 = \text{Walmart}$, $A_3 = \text{Chedraui}$ y $A_4 = \text{Elektra}$ del 1 de diciembre al 15 de diciembre de 2021.

Fecha	A_1	A_2	A_3	A_4
1 de diciembre de 2021	0.01633	0.00601	0.03883	-0.00108
2 de diciembre de 2021	-0.00174	-0.00257	-0.03510	-0.00061
3 de diciembre de 2021	0.02235	0.00386	0.00319	-0.00085
6 de diciembre de 2021	0.03135	-0.00343	-0.00346	0.00065
7 de diciembre de 2021	-0.02367	0.04599	0.02710	0.00051
8 de diciembre de 2021	-0.01063	-0.00672	0.01622	-0.00221
9 de diciembre de 2021	-0.00524	0.01380	0.00586	0.00051
10 de diciembre de 2021	-0.00791	0.01079	-0.01406	0.00004
13 de diciembre de 2021	0.01407	0.01426	0.05168	-0.00158
14 de diciembre de 2021	-0.01223	-0.00079	0.01432	-0.00159
15 de diciembre de 2021	0.00252	0.01876	-0.02786	-0.00224

Dado el portafolio: $w = (1/4, 4/10, 1/4, 1/10)$ estime la muestra de las pérdidas. Estime la media y la volatilidad de las pérdidas diarias y calcule el $\text{VaR}(0.95)$ y $\text{VaR}(0.99)$ para un horizonte de un día.

La media y volatilidad muestral de las pérdidas son: $\hat{\mu} = -0.004396$ y $\hat{\sigma} = 0.008781$,

$$\text{VaR}(0.95) = -0.004396 + (1.66)(0.008781) = 0.01018$$

$$\text{VaR}(0.99) = -0.004396 + (2.32)(0.008781) = 0.01598$$

Es de esperarse que siempre sea más alto el $\text{VaR}(0.99)$ que el $\text{VaR}(0.95)$. Por último, cabe señalar que el supuesto de normalidad no se cumple en general, puesto que las pérdidas exhiben colas pesadas. De hecho, el procedimiento de varianza-covarianza subestima el VaR y el CVaR (ver Embrechts y col. (2005)).

■

5.2.2 VaR histórico

Esta metodología es no paramétrica ya que no supone una distribución de los rendimientos y trabaja con la distribución empírica definida por los propios datos.

Dada una muestra de rendimientos de un portafolio $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$ y una posición $\vec{w}$, se genera una muestra de las pérdidas $\{L_1, \dots, L_n\}$ asociadas a este portafolio y, a partir de ellas, se construye la función de distribución empírica de la siguiente forma: primero se ordenan en forma ascendente las pérdidas observadas y se construye una función de frecuencias relativas

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[l_i \leq x]},$$

con $I_{[l_i \leq x]}$ la función indicadora que vale 1 si la observación $l_i \leq x$, o 0 en otro caso.

Definición 5.2.3 Sea $\hat{F}$ una distribución empírica y sea $p \in (0, 1)$. El **estimador empírico del cuantil** p de $\hat{F}$ se define por

$$x_p = \min \{x \in \mathbb{R} \mid \hat{F}(x) \geq p\}.$$

Observe que $x_\alpha \approx \text{VaR}(\alpha)$.

■ **Ejemplo 5.4** Considere los datos del ejemplo 5.3 y el portafolio $w = (1/4, 4/10, 1/4, 1/10)$. Calcule las pérdidas y ordénelas de menor a mayor. Estime $x_{0.90}$.

Las pérdidas ordenadas son $-0.01961, -0.01502, -0.012482, -0.00714, -0.00628, -0.00373, 7.10428 \times 10^{-5}, 0.00083, 0.00220, 0.002785$ y 0.01001 , a partir de esto, podemos ver que $x_{0.90} = 0.002785$

El mayor atractivo de este método es que es completamente no paramétrico, es decir, no se supone que las pérdidas tengan una distribución específica. Sin embargo, la variabilidad de los estimadores depende de la muestra que se obtenga. Es por ello que una estimación puntual no es suficiente. Este procedimiento se puede complementar mediante métodos de remuestreo como los métodos Bootstrap con los cuales se pueden calcular intervalos de confianza para el VaR a partir de la muestra de datos. El inconveniente de este método reside en su dependencia muestral. En particular, requiere de una muestra grande de observaciones para dar una estimación buena, como se observa en el ejemplo 5.3. Además, genera únicamente escenarios que ocurrieron en el pasado, lo que es un problema en el área de finanzas donde lo importante es prever las expectativas futuras del mercado, ver Embrechts y col. (2005) y Crouhy y col. (2001).

5.3 VaR condicionado (CVaR)

Definición 5.3.1 El **valor en riesgo condicionado** CVaR es la pérdida promedio dado que se rebasó el VaR, es decir

$$\text{CVaR}(\alpha) = E[L \mid L > \text{VaR}(\alpha)].$$

Se puede checar que el CVaR sí es una medida de riesgo coherente. Es por ello que en los acuerdos de Basilea IV se recomienda utilizarla para la evaluación del riesgo de cualquier portafolio de activos. El CVaR también se le denomina como la pérdida esperada o *expected shortfall*.

Teorema 5.3.1 Si L se distribuye como una normal con media μ_L y varianza σ_L^2 entonces

$$\text{CVaR}(\alpha) = \mu_L + \frac{\sigma_L}{1 - \alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)).$$

Para calcular el CVaR paramétrico cuando se considera que los rendimientos son normales, observe que si L se distribuye como una normal con media μ_L y varianza σ_L^2 entonces su $\text{CVaR}(\alpha)$ puede calcularse a partir del CVaR de una variable estandarizada de la siguiente forma:

$$\text{CVaR}(\alpha) = \mu_L + \sigma_L E\left[\frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \mid \frac{L - \mu_L}{\sigma_L} \geq \Phi^{-1}(\alpha)\right].$$

Por lo que basta calcular el $\text{CVaR}(\alpha)$ para cuando las pérdidas se distribuyen como una normal con media 0 y varianza 1. Sea $Z = \frac{L - \mu_L}{\sigma_L}$

$$\begin{aligned} E[Z \mid Z > \Phi^{-1}(\alpha)] &= \frac{E[Z \cdot I_{[Z > \Phi^{-1}(\alpha)]}]}{P(Z > \Phi^{-1}(\alpha))}, \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

$$\text{con } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

En el caso de trabajar con las estimaciones de μ y σ muestrales

$$\widehat{\text{CVaR}}(\alpha) = \hat{\mu}_L + \frac{1}{1-\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \hat{\sigma}_L.$$

CVaR histórico

Para calcular el CVaR histórico usando la distribución empírica de las pérdidas simplemente se deben promediar las observaciones ordenadas $L_{(i)}$ que quedan por encima de x_p . Sean m el número de observaciones que quedan por encima de x_p

$$\text{CVaR}_H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m L_{(i)}.$$

■ **Ejemplo 5.5** Considere los datos del ejemplo anterior. Entonces

$$\text{CVaR}(0.95) = 0.01372$$

$$\text{CVaR}(0.99) = 0.01901$$

mientras que $\text{CVaR}_H(0.99) = 0.01001$ ■

Para mayor información sobre este tema, puede consultar Embrechts y *col.* (2005) y Jorion (2001) y para profundizar en la modelación del riesgo se sugiere consultar a Mota y Núñez (2013).

5.4 Ejercicios

Ejercicio 5.1 Demuestre que tanto la varianza como la β del modelo CAPM no son medidas de riesgo coherente. ■

Ejercicio 5.2 Construya un contraejemplo que muestre que el VaR no es una medida de riesgo coherente. ■

Ejercicio 5.3 Demuestre que el CVaR es una medida de riesgo coherente. ■

Ejercicio 5.4 Suponga que un portafolio tiene pérdidas con distribución normal con media diaria del 0.00015 y varianza diaria del 0.0005. Si invierte 10,000 pesos en este portafolio a una semana,

1. ¿cuál es el VaR y el CVaR a un nivel de confianza $\alpha = .95$?
2. varíe la varianza en un $\pm 20\%$ y haga los mismos cálculos, ¿qué observa?

Ejercicio 5.5 Use los datos del ejemplo 5.3 para calcular las pérdidas del portafolio uniforme. ■

1. Estime la media y la volatilidad muestral diaria de las pérdidas y calcule el VaR y CVaR paramétrico a un día con un nivel de confianza del 95 % cuando se invierten 100,000 pesos.
2. Estime ahora el VaR y el CVaR por el método histórico.

En los siguientes ejercicios se recomienda usar Excel, Python o R para facilitar los cálculos.

Ejercicio 5.6 Use los datos del ejercicio 4.9 del capítulo 4 para generar una muestra de las pérdidas de dos portafolios. El primero es el portafolio uniforme en el que las w_i son iguales, el segundo es el portafolio de mínima varianza calculado en dicho ejercicio.

1. Estime la media y varianza muestral de las pérdidas de ambos portafolios y calcule el $\text{VaR}(\alpha)$ y $\text{CVaR}(\alpha)$, cuando se supone que los rendimientos son normales y $\alpha = 0.95, 0.99$ para uno y cinco días.

2. Estime el VaR y CVaR por el método histórico de ambos portafolios. Compare sus resultados con el inciso anterior cuando invierte 10,000 pesos. ■

Ejercicio 5.7 Use los datos del ejercicio 4.14 del capítulo 4 para generar una muestra de las pérdidas de dos portafolios. El primero es el portafolio de mínima varianza calculado en dicho ejercicio y el segundo propóngalo usted para que el CVaR sea mas pequeño. Justifique su elección.

1. Estime la media y varianza muestral de las pérdidas de ambos portafolios y calcule el $\text{VaR}(\alpha)$ y $\text{CVaR}(\alpha)$, cuando se considera que los rendimientos son normales y $\alpha = 0.95, 0.99$ para uno y cinco días.
2. Estime el VaR y CVaR por el método histórico de ambos portafolios. Compare sus resultados con el inciso anterior cuando invierte 100,000 pesos. ■

Solución de ejercicios

Capítulo 1

- 1.2 7.18 %
- 1.4 \$6805.83
- 1.7 Interés simple: \$787.40, interés compuesto: \$772.18
- 1.9 $VF = 3456$
- 1.11 Tasa semanal: 0.001534924
- 1.13 Proyecto 1: $TIR = 9.88 \%$, $VPN = 16.72$, proyecto 2: $TIR = 11.18 \%$, $VPN = 26.54$, se elige el proyecto 2.
- 1.16 \$109,100

Capítulo 2

- 2.2 \$1,216.58
- 2.4 \$3,338.97
- 2.6 $P = F$
- 2.8 $P = 912.44$
- 2.10 0.001534924
- 2.13 $\lambda = 0.08$
- 2.15 $\frac{n(n+1)}{(1+\lambda)^2}$

Capítulo 3

- 3.1 Tasa a 300 días: 0.07750; tasa a 7 años: -0.4157
- 3.3 Tasa a 7 años: 0.0875
- 3.4 $f = 0.0819$
- 3.6 $f_{182-120} = 0.011253$
- 3.7 Tasa a 300 días: 0.07790

Capítulo 4

4.1 $V^1 = 993.93$

4.2 Escenario 1: $r_p = -0.005$, escenario 2: $r_p = 0.055$

4.3 $E(r) = 0.043$

4.4 $w_1 = \frac{3}{7}, w_2 = \frac{4}{7}$

4.5 $w_1 = -\frac{43}{3}, w_2 = \frac{46}{3}, \sigma_p = 3.745$

4.7 $\mathbf{w}_{MV} = (0.1613, 0.3226, 0.5161), r_{MV} = .17096, \sigma_{MV} = .056$, sí disminuye la volatilidad.

Capítulo 5

5.4 1. $\text{VaR} = 837.5, \text{CVaR} = 1013.36$

2. Si la varianza se incrementa en 20 %, entonces $\text{VaR} = 916.72$ y $\text{CVaR} = 1109.37$
Si la varianza disminuye en 20 %, entonces $\text{VaR} = 749.87$ y $\text{CVaR} = 907.17$

5.5 1. Paramétrico: $\text{VaR} = 1018.03$ y $\text{CVaR} = 1326.88$

2. Histórico: $\text{VaR} = \text{CVaR} = 1000.5$

Bibliografía

- Baca, G. (2013). *Evaluación de Proyectos*. McGraw-Hill.
- Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.
- Bodie, Z. y Merton, R. (1998). *Finanzas*. Prentice Hall.
- Capiński, M. J. y Kopp, E. (2014). *Portfolio Theory and Risk Management*. Cambridge University Press.
- Capiński, M. J. y Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag.
- Castelán, A. (2013). *Sistema Financiero Mexicano: Bases Fundamentales para el Estudiante Universitario*. Editorial Académica Española.
- Crouhy, M., Galai, D., y Mark, R. (2001). *Risk Management*. McGraw-Hill.
- Delgado, J., Escarela, G., y Saavedra, P. (2009). *Taller de Modelado. Manos a la Obra*. Colección CBI. UAM-Iztapalapa.
- Embrechts, P., Frey, R., y McNeil, A. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton Series in Finance.
- Fabozzi, F. J., Modigliani, F., y Ferri, M. G. (1996). *Mercados e Instituciones Financieras*. Prentice Hall.
- Hull, J. C. (2021). *Options, Futures, and other Derivatives*. Pearson.
- Jorion, P. (2001). *Value at Risk*. McGraw-Hill.
- Kellison, S. G. (2005). *The Theory of Interest*. McGraw-Hill.
- Luenberger, D. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.
- Markowitz, H. M. (1952). *Portfolio Selection*. Journal of Finance Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.
- Mota, B. y Núñez, J. (2013). *Teoría y Aplicaciones de la Administración de Riesgos*. UAM-Porrúa.

- Peressini, A., Sullivan, F., y Uhl, J. (1988). *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer-Verlag.
- Ross, S. M. (1997). *Simulation*. Academic Press.
- Sharpe, W. F. (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. *Journal of Finance*, 19, pp. 425–442.

Índice alfabético

- Activo libre de riesgo, 64
- Anualidad, 26
- Banco ideal, 13
- Bondes, 25
- Bono, 25, 29
 - clasificación de, 31
- Cetes, 25
- Convexidad, 35
- Curva de estructura de tasas, 41
- CVaR, 80
- Depreciación, 19
- Duración, 31
 - de Macaulay, 32
 - modificada, 34
- Flujo de efectivo, 13
 - equivalente, 15
- Impuestos, 20
- Inflación, 19
- Inmunización de un portafolio, 36
- Interés, 9
 - compuesto, 9
 - convertible, 10
 - simple, 9
- Interpolación, 42
- Método de la alambrada, 43, 45
- Medidas de riesgo, 76
- Mercado ideal, 53
- Modelo CAPM, 67
- Perpetuidad, 28
- Portafolio, 36, 53
 - conjunto factible, 58
 - de mínima varianza, 58
 - de mercado, 67
 - factor beta de un, 68
 - optimización de un, 49
 - ponderaciones de un, 53
 - prima de riesgo de un, 68
 - tangente, 64
- Precio de un bono, 29
- Rendimiento al vencimiento, 29
- Riesgo
 - diversificable, 70
 - sistemático, 70
- Sensibilidad del precio de un bono, 34
- Tasa
 - de descuento, 44
 - de interés, 25
 - de interés efectiva, 10
 - de interés nominal, 10
 - de interés nominal convertible, 12
 - de referencia, 11
 - forward, 44
 - spot, 43
- Tasa interna de retorno, 16
- Teorema
 - de dos fondos, 62
- Teorema de un fondo, 64
- TIR, 16

Udibonos, 25

Valor en riesgo, 75

condicionado, 80

histórico, 79

paramétrico, 77

Valor futuro

de un flujo de efectivo, 13

de un monto, 11

de una anualidad, 26

Valor nominal de un bono, 29

Valor presente

de un flujo de efectivo, 14

de un monto, 11

de una anualidad, 26

de una perpetuidad, 28

Valor presente neto, 17

Valor principal de un bono, 29

Valores gubernamentales, 25

VaR, 75

condicionado, 80

histórico, 79

paramétrico, 77

Ventas en corto, 53

Volatilidad

muestral, 52

VPN, 17

Yield to maturity, 29