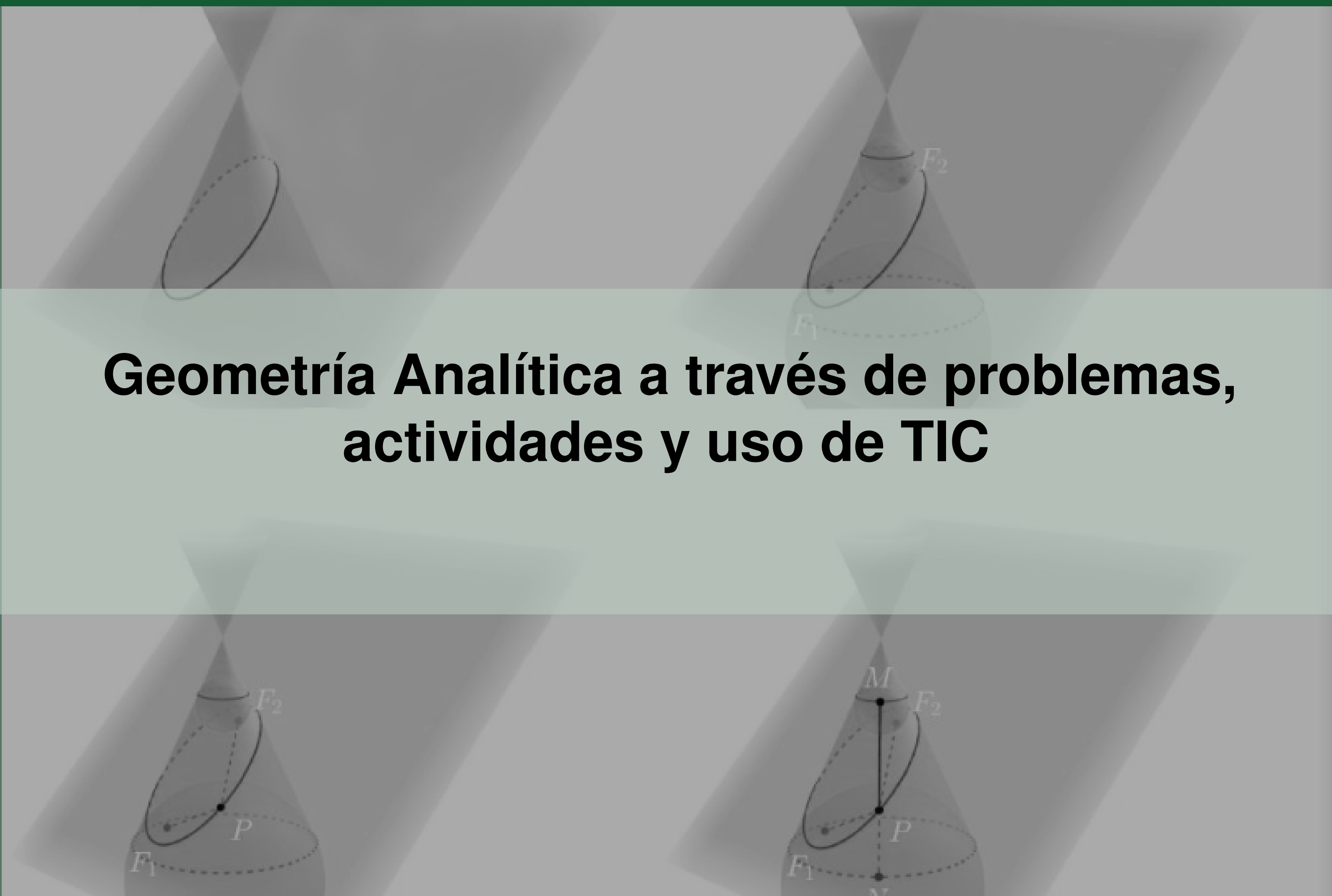
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Casa abierta al tiempo

Colección CBI

Libro de texto



Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de TIC

Gabriel López Garza

Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de TIC

Gabriel López Garza

Libro de texto

Casa abierta al tiempo

Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de TIC
Primera edición: 2021

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX, México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-2108-8

Impreso en México / Printed in Mexico

Prefacio

De la geometría griega a las computadoras

El presente texto cubre cabalmente el programa de Geometría Analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la UAM Iztapalapa y más. Puede usarse también en los cursos de Cálculo de varias variables para la parametrización de superficies, así como en los cursos de Álgebra Lineal como fuente de ejemplos y como un acercamiento geométrico al teorema de los ejes principales.

La geometría que trataremos requiere de la geometría euclidiana como conocimiento previo. Se supondrá a lo largo de este libro que el lector conoce los teoremas más importantes de congruencia y semejanza de triángulos, paralelismo y perpendicularidad de rectas, así como el teorema de Pitágoras sin que se exija ser un experto. Para el profesor, se requiere además que haya tenido noticia, de alguna forma, de la axiomática formal de la geometría y que sea capaz de comprender el método axiomático deductivo de la matemática. Se recomienda por ejemplo la axiomática establecida en el libro de David Hilbert [7], pero enfoques más elementales son suficientes, por ejemplo el del libro de René Benítez [2] o bien el del libro de Cárdenas [4]. En el capítulo 1 se enuncia y se da una demostración elemental del teorema de Pitágoras y en el capítulo 2, se da una demostración vectorial. Sin el teorema de Pitágoras no es posible comprender la Geometría Analítica. Además, se requieren una serie de conocimientos básicos en álgebra elemental y ciertas nociones de conjuntos. En el capítulo 1 se enumeran los teoremas del álgebra y se enuncian las definiciones de conjuntos que se mencionan y utilizan a lo largo del libro. Dado que se presuponen conocidos, no se estudian dichos temas a profundidad, pero se muestran algunos hechos básicos. El nivel de conocimientos de nuestro enfoque en álgebra y conjuntos es equivalente al del libro de Swokowsky [13]. Sin los conocimientos previos de álgebra, geometría elemental y trigonometría básica enumerados en el capítulo 1, será muy difícil tratar de emprender el estudio de la Geometría Analítica. Puede ser de utilidad, antes de emprender el estudio de la Geometría Analítica, realizar la evaluación diagnóstica ubicada al final del capítulo 1, la cual dará al lector una guía del nivel de conocimientos requeridos para el estudio de este libro. La evaluación diagnóstica debe ser realizada antes o durante la primera semana de actividades.

En este libro se introducen vectores desde el inicio. Es importante destacar este punto como una diferencia con enfoques clásicos de la Geometría Analítica, por ejemplo el del libro de Lehmann [10]. Como se sabe, los vectores son fundamentales en estudio de las ciencias e ingenierías y un acercamiento temprano, como se plantea aquí, es de gran utilidad.

Muchas otras diferencias de enfoques respecto a otros textos encontrará el lector en nuestro libro. Por ejemplo en el capítulo 3 se estudia la circunferencia antes que la recta. Esto es así, dado que a partir de la ecuación de la circunferencia, se fundamenta el estudio de la Trigonometría Analítica. Como conocimiento previo se requiere de las definiciones básicas de la trigonometría como la definición de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos, pero el estudio de la Trigonometría Analítica permite trabajar con ángulos de medida arbitraria en radianes e introducir fórmulas trigonométricas para suma y diferencia de ángulos de cualquier valor, las cuales son indispensables para un conocimiento adecuado de la ecuación de una recta y del ángulo entre rectas, entre otras aplicaciones. Estas fórmulas trigonométricas se estudian en el capítulo 3.

El estudio del espacio de tres dimensiones es tópico de cursos universitarios, en este libro se presenta en el capítulo 6. Nuestro enfoque se presenta de manera sencilla como una extensión de las propiedades del espacio $\mathbb{R}^2$ estudiadas desde el capítulo 1.

El último capítulo es una introducción al álgebra lineal desde el punto de vista de la geometría, se presentan los conceptos de vector propio, valor propio en el contexto de la diagonalización de matrices simétricas, matrices que surgen naturalmente en las cónicas y en las superficies cuadráticas.

Ningún enfoque contemporáneo puede dejar de lado el uso de computadoras, en este libro se usan ampliamente las tecnologías de información y comunicación (TIC), en particular se usa el software de uso libre y gratuito *GeoGebra*, el cual se puede encontrar en la página web, `https://www.geogebra.org/?lang=es`. Se han diseñado actividades didácticas a lo largo del libro que requieren el uso de este programa. De las múltiples ventajas que se pueden mencionar de *GeoGebra*, además de que es que es un programa de uso libre y gratuito, las más básicas son: el programa cuenta con abundantes ayudas y comandos en nuestro idioma; el programa puede instalarse en sistemas linux, mac y windows, pero también puede usarse en línea sin necesidad de instalarse. A lo largo de nuestro libro se dan instrucciones y ejemplos de como usar *GeoGebra*. La maravillosa herramienta que proveen las computadoras no puede sustituir, sin embargo, la experiencia de escribir y aprender con papel y lápiz la Geometría Analítica. No debe dejarse a lado la experiencia de obtener a mano nuestras propias gráficas, de la misma manera de la que quien desee mantenerse en buena forma física no puede evitar ejercitar su cuerpo. No olvide que la computadora es una herramienta, no un sucedáneo.

Sobre la perspectiva didáctica del libro podemos decir que incluye actividades que han sido pensadas y aplicadas en el aula como generadoras de situaciones de descubrimiento. Están dirigidas a lectores activos e inducen el desarrollo de actitudes autónomas respecto al estudio. La diferencia con enfoques clásicos de la geometría es que diversos temas en lugar de ser expuestos en forma de cátedra, son presentados utilizando guías para el descubrimiento y requieren la interacción inteligente del lector. Además, el libro incluye numerosos problemas que se han distribuido en tres niveles de dificultad: el nivel básico puede ser pensado para un lector que se aproxima a la Geometría Analítica por primera vez; los problemas de nivel medio y avanzado, son pensados para estudiantes de nivel universitario y fomentan el desarrollo de capacidades en la resolución y planteamiento de problemas. Muchos problemas son clásicos y hemos optado por incluir en la sección de problemas, versiones que aparecen en el libro de Kletenik [9], el cual ya no se edita. Los problemas incluidos han sido probados en el aula con estudiantes de nivel universitario. Los problemas de nivel básico requieren cada uno entre 10 y 15 minutos para un lector novicio. Por otra parte, los problemas de nivel medio y avanzado requieren entre 20 y 45 minutos cada uno.

Todas las gráficas que aparecen en este libro se han generado con *GeoGebra* y en las secciones de problemas y ejercicios se incluyen actividades que requieren de este programa o cualquier otro lo suficientemente poderoso como para generar gráficas, con animación incluida, en dos y tres dimensiones. Ya que se ha mencionado el software libre, este libro se ha escrito completamente en lenguaje LaTeX, el cual se usa actualmente en los libros de texto publicados por las mejores editoriales. ¡Apoyemos el software libre!

¿Qué es lo recomendable de este libro?

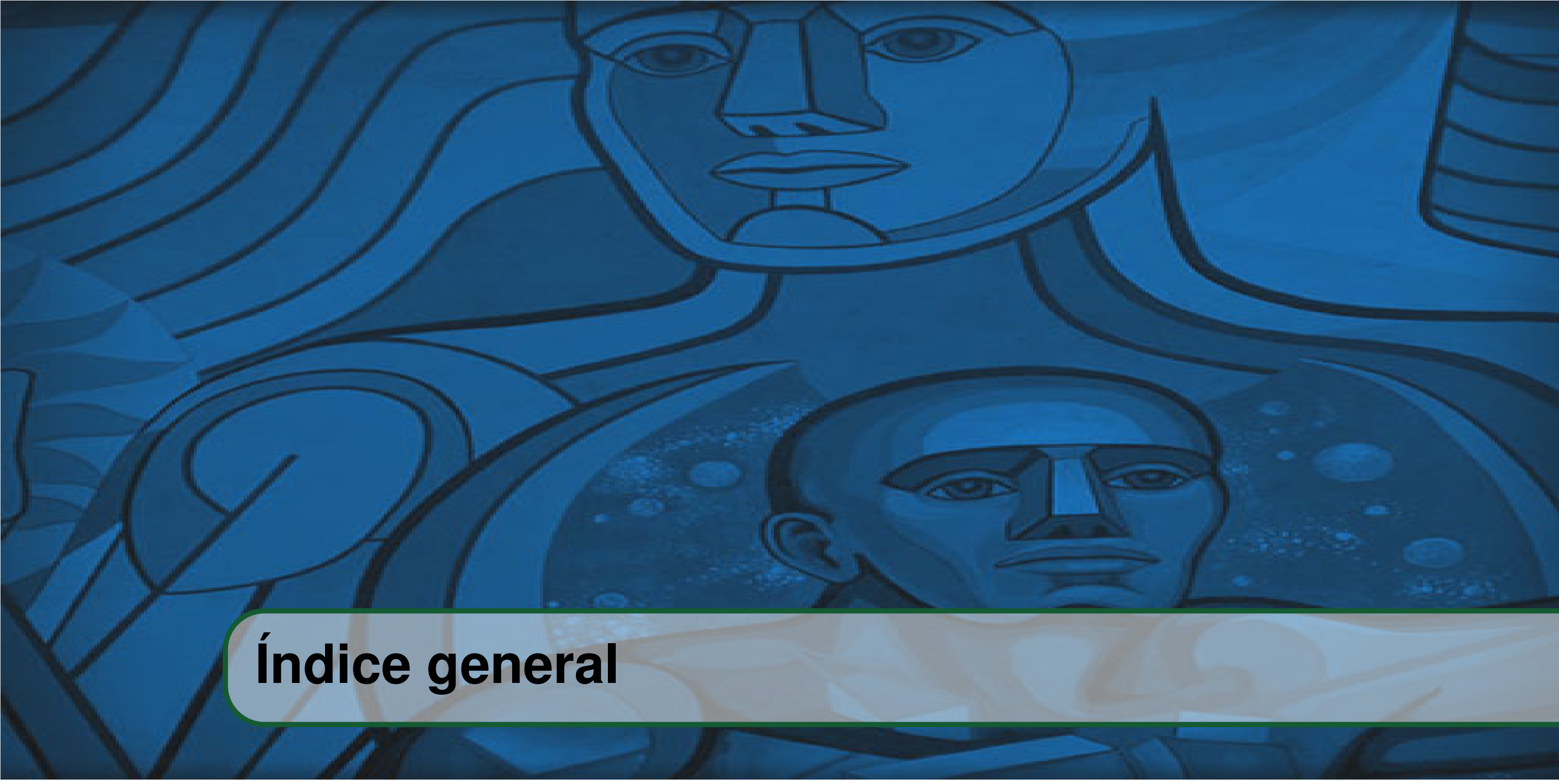
En resumen, enumeramos los siguientes aspectos que hacen de este libro una aproximación a la Geometría Analítica con un enfoque diferente, novedoso y aplicable en un amplio número de cursos.

- **Software.** Se introduce desde el primer capítulo el uso del software *GeoGebra*, el cual es de uso libre y gratuito.
- **Aplicabilidad en diferentes currícula.** Se incluyen los temas del programa de la UNAM para las preparatorias así como los del Colegio de Bachilleres. Además de geometría plana, también son tratados aquí temas del espacio de tres dimensiones, por lo que el libro puede emplearse en cursos de enseñanza media superior, pero también puede usarse en cursos universitarios o como libro de consulta para ingenieros y científicos. Ademas, el último capítulo del libro es una introducción al álgebra lineal desde la perspectiva de la Geometría

Analítica con lo cual nuestro libro se puede usar como material de apoyo en un curso de álgebra lineal aplicada.

- **Vectores.** Se introducen tempranamente los vectores en dos y tres dimensiones.
- **Didáctica.** El libro comprende actividades, ejercicios y problemas. Las actividades son planeadas como situaciones de descubrimiento. Los problemas tienen un rango que va de la dificultad elemental a la dificultad que requiere de saber experto. Todos los problemas de nivel básico e medio incluyen soluciones.
- **Indicaciones para profesores.** Con el símbolo N se incluyen notas, comentarios y sugerencias pensadas primeramente para profesores principiantes o lectores autodidactas. También pueden ser de utilidad para profesores no especialistas en matemáticas como indicaciones o guías para una mejor aplicación del texto en la práctica docente.
- **Enfoque autocontenido.** Todos los temas tratados aparecen desarrollados en el libro sin que sea necesario recurrir a otros textos, desde el primer capítulo con temas de construcciones con regla y compás, hasta el último capítulo el cual es una breve introducción al Álgebra Lineal.

Gabriel López Garza.



Índice general

1. Preliminares indispensables

1.1 Preliminares de geometría

Sin los conocimientos previos de álgebra, geometría elemental y trigonometría básica será muy difícil emprender el estudio de la Geometría Analítica. Al final del capítulo el lector encontrará una evaluación diagnóstica que le dará una guía del nivel de conocimientos requeridos para el estudio de este libro.

La evaluación diagnóstica debe realizarse antes de emprender el estudio de la Geometría Analítica o durante la primera semana de actividades.

Es recomendable comenzar el estudio de la Geometría Analítica con un repaso de los temas incluidos en este capítulo, sobre todo de aquellos en los que se detectan dificultades en la evaluación diagnóstica. También en este capítulo se enumeran las nociones de álgebra y conjuntos indispensables a lo largo del libro, el lector puede encontrar aquí las fórmulas, teoremas y construcciones con regla y compás, más importantes que serán usados y referidos reiteradamente.

1.1.1 Geometría sin coordenadas

No comenzaremos nuestro estudio enumerando los axiomas de la geometría euclidiana. En lugar de ello partiremos del problema geométrico de construcción de una recta perpendicular a una recta dada que pasa por un punto cualquiera de la recta. Este resultado nos permite ubicar en el plano euclidiano un par de ejes rectangulares a partir de los cuales *se construye toda la Geometría Analítica.* La introducción de coordenadas del plano cartesiano la haremos en la sección 2.2 del capítulo siguiente, allí el lector entenderá la importancia de utilizar ejes rectangulares como marco de referencia y podrá apreciar que *no es conveniente escoger cualquier tipo de rectas* sino aquellas que sean perpendiculares, es decir, rectas que se corten en un ángulo de 90°. A partir de allí surgirá la importancia del teorema de Pitágoras para medir distancia entre puntos, entre otras cosas, y con ello quedará firmemente cimentado todo el estudio de la geometría que es objeto de nuestro estudio.

Actividad 1.1 1) Realice una discusión colectiva de como obtener una recta perpendicular a una recta dada que pase por un punto cualquiera de la recta. Los estudiantes pueden utilizar papel transparente o acetatos para que realicen experimentos y, a partir de estos, sugieran como obtener la recta perpendicular. Esta primera actividad debe realizarse sin regla ni compás. 2) Dada una recta $\mathscr{R}$ y un punto P sobre la recta, use regla y compás para construir una recta perpendicular a $\mathscr{R}$ que pase por P. 3) Dé argumentos geométricos que demuestren que las rectas que obtuvo son efectivamente perpendiculares. ■

Solución de la actividad 1.1. Los estudiantes deben dibujar una recta sobre papel transparente y un punto sobre ella. No debe partirse de que es posible construir la perpendicular que pase por el punto, sino que debe discutirse si es posible tal construcción. Aquí la mejor solución sobre papel transparente consiste en doblar la hoja de tal manera que la recta quede sobre sí misma exactamente por el punto que se desea. Pero si los estudiantes no llegan a esta solución ello no impide que esta actividad siga desarrollándose sin mayores dificultades. De hecho, aquí lo que debe quedar claro es que el problema de construcción que tratamos no es trivial.
2) Para la construcción de la perpendicular, procedemos con una secuencia de pasos ilustrados en la figura 1.1.
Paso 1: Dibuje una recta $\mathscr{R}$ cualquiera en el plano y un punto P sobre ella.
Paso 2: Con centro en P trace una circunferencia cualquiera. Denote con A y B las intersecciones de la circunferencia construida con la recta $\mathscr{R}$.
Paso 3: Con centro en A construya una circunferencia que pase por B.
Paso 4: Con centro en B construya una circunferencia que pasa por A. Denote con P' la intersección de las dos circunferencias construidas en los pasos 3 y 4.
Paso 5: Construya la recta que pasa por P y el punto P' obtenido en el paso anterior. Denote con $\mathscr{R}'$ la recta obtenida.
3) Procedemos a demostrar que las rectas $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ obtenidas en el inciso 2), son perpendiculares. Por construcción el segmento PA es congruente con PB (son radios del mismo círculo). Por construcción los segmentos AP' y BP' son congruentes (son radios de circunferencias distintas pero congruentes, ¿por qué son congruentes las circunferencias?). El segmento PP' es congruente consigo mismo. Se concluye que los triángulos PAP' y BPP' son congruentes entre sí (argumente). Por lo tanto el ángulo APP' es congruente con el ángulo BPP' (¿por qué?) y, por lo tanto, estos ángulos son rectos (¿por qué). Se ha demostrado que las rectas $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ son perpendiculares. □

N El la sección 1.1.2 se introduce una guía para el programa computacional *GeoGebra* en el cual el lector puede utilizar las herramientas “compás”, “recta” y “punto”, para obtener las gráficas de la figura 1.1. Sin embargo, la maravillosa herramienta que proveen las computadoras no puede sustituir la experiencia de escribir y aprender con papel y lápiz la geometría, ni la Geometría Analítica. No olvide que la computadora es una herramienta más, no un sustituto de la enseñanza tradicional.

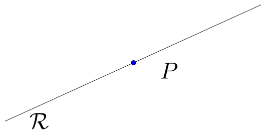
1.1.2 *GeoGebra* y construcciones con regla y compás

El programa *GeoGebra* se encuentra en la página web:

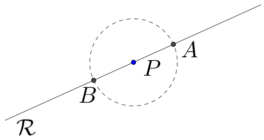
`https://www.geogebra.org/?lang=es`

GeoGebra puede utilizarse en línea o puede descargarse e instalarse en cualquier computadora para su libre uso. El programa incluye amplias ayudas y manuales escritos en español, además incluimos aquí algunas instrucciones básicas para comodidad del lector.

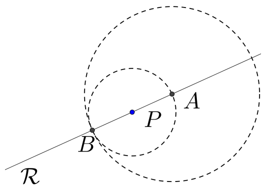
Cuando se accede a la página web de *GeoGebra* se encontrará una pantalla como la de la figura 1.2. Los recuadros superiores izquierdos de la figura 1.2 se reproducen en la figura 1.3. Estos recuadros dan opciones para crear figuras geométricas, para moverlas y muchas otras acciones. Partiendo de izquierda a derecha, el primer recuadro con el ícono de una flecha sirve para mover la gráfica completa, simplemente presionando el ratón con el botón izquierdo y manteniéndolo presionado hasta que la pantalla ocupe el lugar que se desee. El segundo recuadro, un punto con la



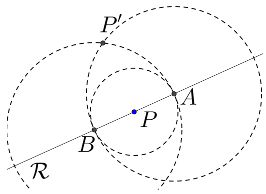
(a) Paso 1



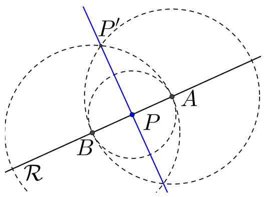
(b) Paso 2



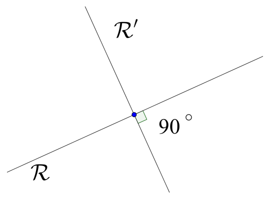
(c) Paso 3



(d) Paso 4



(e) Paso 5



(f) Rectas perpendiculares

Figura 1.1: Construcción de una recta perpendicular a una recta cualquiera.

letra A, genera puntos con etiquetas, presionando el recuadro enseguida se puede poner un punto en la pantalla presionando el botón izquierdo del ratón donde se desee. El tercer recuadro genera segmentos de recta, rectas y vectores. El cuarto recuadro genera rectas paralelas y perpendiculares. El cuarto recuadro genera rectas paralelas y perpendiculares. El quinto recuadro genera polígonos. El sexto genera circunferencias. El séptimo genera cónicas; el octavo genera ángulos; el noveno genera reflexiones de puntos y otras opciones. El décimo genera textos y opciones para la animación de gráficas. El onceavo y último recuadro mueve también la gráfica y contiene opciones para aproximar o alejar la gráfica y otras opciones para ocultar o mostrar etiquetas y otros comandos que serán explicados más adelante a lo largo del libro.

En el programa en línea, en el extremo inferior izquierdo aparece el icono de un teclado. Con este pueden insertarse comandos de entrada. Aquí se permiten símbolos matemáticos, letras griegas y muchas otras opciones. Es decir, en *GeoGebra* se generan los objetos geométricos ya sea con los recuadros superiores o bien, tecleando en el recuadro de entrada o por medio del teclado físico o virtual las ecuaciones de los objetos que se deseen graficar. El teclado virtual en la parte inferior de la figura 1.2 aparece sólo en la opción en línea de *GeoGebra* cuando se descarga el programa se introducen las ecuaciones en el recuadro inferior que dice “Entrada”. Note que el recuadro en la parte derecha nombrado “Aplicaciones GeoGebra”, tiene aplicaciones de uso de calculadora, hoja de cálculo, etcétera. El “ Graficador 3D” permite obtener gráficas de superficies tanto paramétricas como por medio de ecuaciones implícitas que se estudiarán en los capítulos dedicados a la geometría del espacio. Daremos instrucciones apropiadas a cada paso conforme avancemos en este libro. Por lo pronto exploramos el programa en la siguiente actividad.

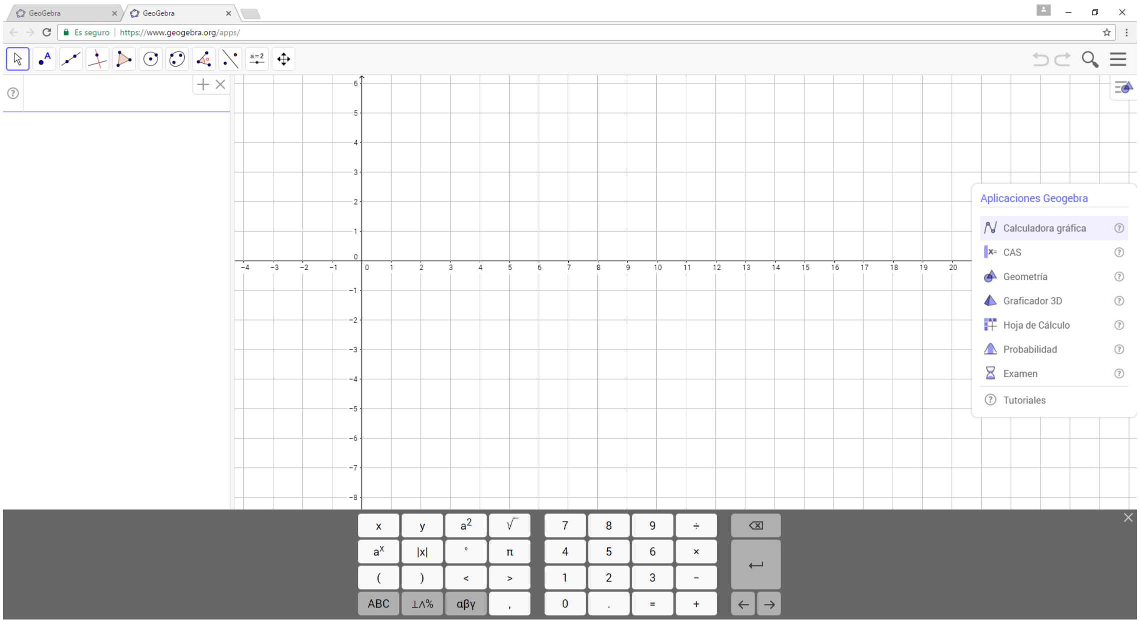


Figura 1.2: Pantalla del programa en línea *GeoGebra*.

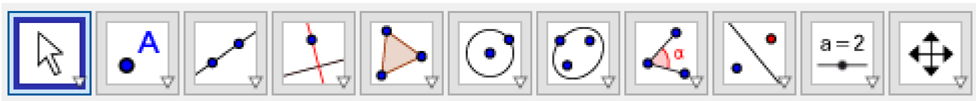


Figura 1.3: Recuadros superiores izquierdos del programa *GeoGebra*

Actividad 1.2 — Regla y copás en *GeoGebra*. En esta actividad haremos las construcciones más básicas de la geometría antigua, pero utilizando regla y compás computacional uniendo así tres mil años de tradición geométrica con el siglo XXI. Consideraremos el siguientes problema: *Dado un segmento de longitud arbitraria encuentre su punto medio utilizando solamente compás.* ■

Solución de la actividad 1.2. El segundo recuadro de la barra de herramientas de *GeoGebra* (ver figura 1.3) genera puntos. Utilícelo para obtener dos puntos distintos en la ventana "Vista Gráfica" de *GeoGebra*, los puntos tendrán las etiquetas A y B generadas automáticamente. Mediante las herramientas del tercer recuadro, construya un segmento que una los puntos A y B. Ahora siga los siguientes pasos.

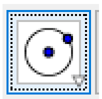


Figura 1.4: Botón que despliega menú de herramientas para generar círculos en *GeoGebra*.

Paso 1. Utilice la herramienta "Compás" que se despliega en el sexto recuadro de la barra de herramientas, el recuadro se muestra en la figura 1.4 y el menú desplegado en la figura 1.5, donde la herramienta compás aparece tercera en la lista desplegada comenzando de arriba hacia abajo.
Paso 2. Con el compás de *GeoGebra* con centro en A construya una circunferencia que pase por B.
Paso 3. Construya una segunda circunferencia con centro en B y que pase por A.
Paso 4. Con la herramienta "Punto" fije los puntos de intersección de las circunferencias obtenidas en los pasos 2 y 3. Los puntos aparecerán etiquetados como C y D.

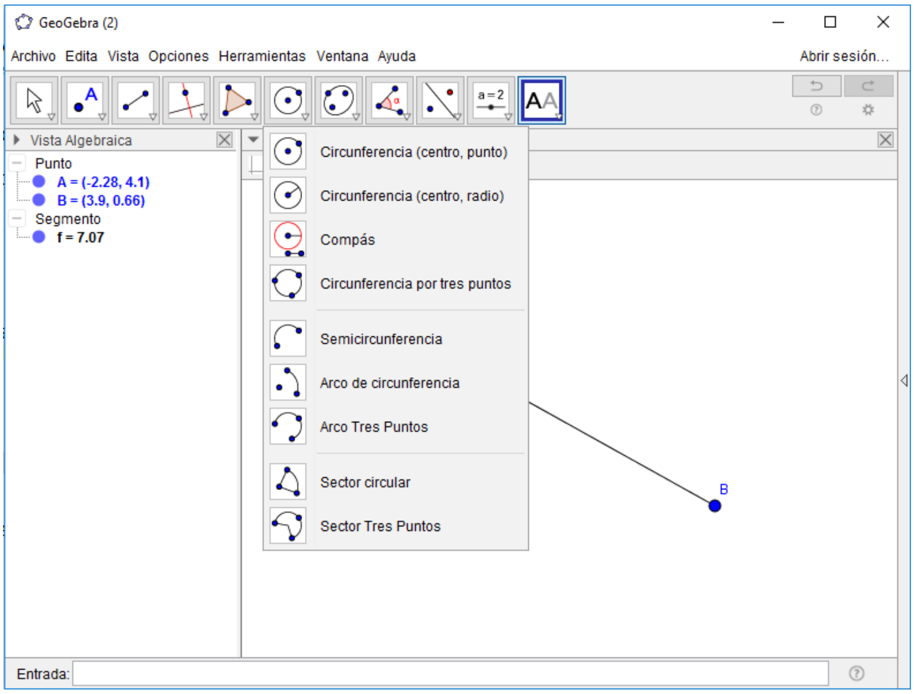


Figura 1.5: Menú de herramientas para generar círculos en *GeoGebra*.

Paso 5. Construya una recta que pase por C y D.

Paso 6. Ponga un punto en la intersección de la recta del paso anterior y el segmento AB. El punto tendrá la etiqueta E, tal punto es el punto medio buscado del segmento (¿por qué?).

La construcción se muestra en la figura 1.6. □

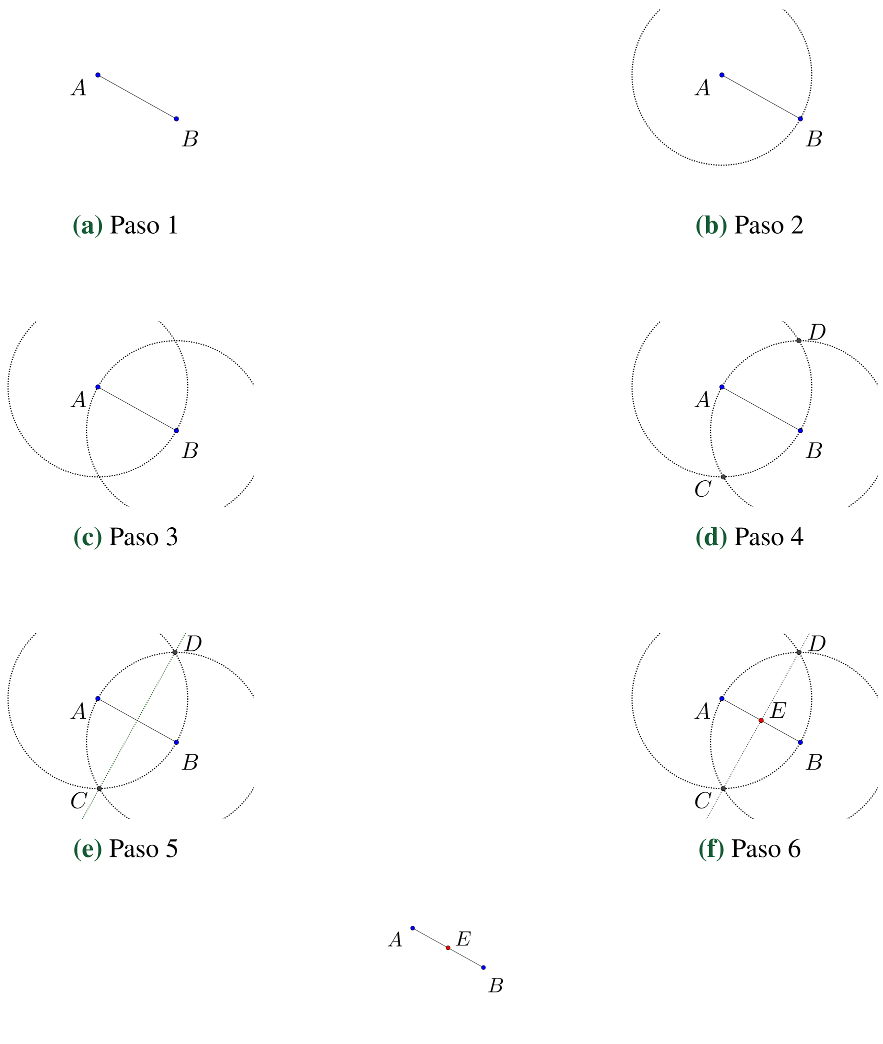
Ejercicio 1.1 Proporcione argumentos geométricos que validen las construcciones de la actividad 1.2. ■

Solución del ejercicio 1.1. Mostraremos que los triángulos AED y BED son congruentes. Los segmentos BD y AD son congruentes por ser radios de circunferencias congruentes. El segmento ED es congruente consigo mismo. El triángulo ABD es equilátero, ya que AB es congruente con los radios de ambas circunferencias por construcción y por lo tanto los ángulos ABD Y BAD. Por lo tanto los triángulos AED y BED son congruentes por tener dos lados y un ángulo congruentes. Se concluye que los segmentos AE y EB son congruentes (¿por qué?) y por lo tanto el punto E es el punto medio de AB. □

Ejercicio 1.2 Dada una recta $\mathscr{R}$ y un punto P exterior a la recta construya una perpendicular a $\mathscr{R}$ que pase por P. ■

Solución del ejercicio 1.2. Para resolver este ejercicio se debe utilizar lo aprendido en la actividad 1.1. Con centro en P construya una circunferencia que corte a $\mathscr{R}$ en dos puntos A y B. Con centro en A construya una circunferencia que pase por P. Con centro en B construya otra circunferencia que pase por P. Sea P' el punto de intersección de las circunferencias opuesto a P. La recta que pasa por P y P' es perpendicular a $\mathscr{R}$, ¡demuéstrelo! □

El estudio de la Geometría Analítica no se puede emprender sin el conocimiento del teorema de Pitágoras. En la siguiente sección lo enunciamos y damos una demostración elemental del trascendental teorema.



(a) Paso 1 **(b)** Paso 2 **(c)** Paso 3 **(d)** Paso 4 **(e)** Paso 5 **(f)** Paso 6 **(g)** Punto medio E

Figura 1.6: Construcción del punto medio de un segmento dado.

1.1.3 El teorema de Pitágoras

Entre los conocimientos previos más importantes para comprender la Geometría Analítica, está el teorema de Pitágoras. Existen numerosas demostraciones de este importante teorema, recomendamos que el lector revise alguna, por ejemplo, la que se encuentra en el libro de Serra [12] o la del libro de Benítez [2]. En nuestro libro, además de la siguiente demostración, se enuncia y demuestra una versión vectorial del teorema de Pitágoras en el teorema 2.4.

Teorema 1.1 — Teorema de Pitágoras. Sea T un triángulo rectángulo cuyos lados pasan por los puntos A, B, C. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ los lados adyacentes al ángulo recto del triángulo, llamados catetos y sea $\overline{AC}$ el lado opuesto al ángulo rectángulo, llamado hipotenusa. Denotamos con $\|\overline{AB}\|$, $\|\overline{BC}\|$ y $\|\overline{AC}\|$ las longitudes respectivas de los lados del triángulo. Entonces se cumple

$$\|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2 = \|\overline{AC}\|^2.$$

Recíprocamente, si en un triángulo T se cumple la relación anterior, entonces el triángulo es rectángulo, siendo en tal caso la hipotenusa de T el segmento $\overline{AC}$ y los catetos los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

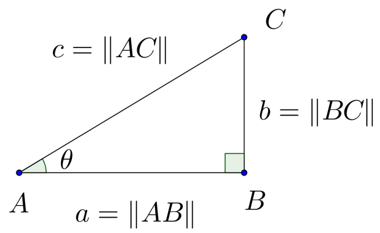


Figura 1.7: Triángulo ABC.

Presentaremos una demostración de una parte del teorema la cual puede ser al menos intuitivamente aceptable por los lectores a los que está dirigido este libro.

Demostración. En la figura 1.8 hay dos cuadrados, formados en parte por los triángulos que tienen catetos con longitud $a = \|\overline{AB}\|$, $b = \|\overline{BC}\|$ y longitud de la hipotenusa $c = \|\overline{AC}\|$. Ambos cuadrados tienen área $(a+b)^2$ ya que ambos tienen lados con longitud $a+b$, mientras que cada triángulo ABC tiene área $ab/2$. Notamos que el cuadrado de la izquierda está formado por el cuadrado c^2 y cuatro triángulos ABC de área $ab/2$, es decir, $(a+b)^2 = c^2 + 4(ab/2)$. Para el cuadrado de la derecha se tiene $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4(ab/2)$.

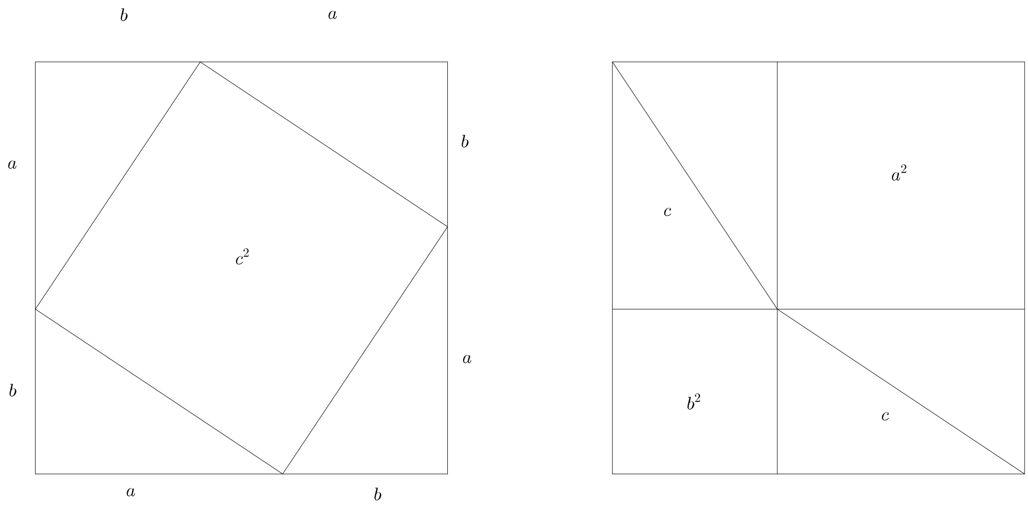


Figura 1.8: Demostración del teorema de Pitágoras

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= c^2 + 4(ab/2) \\ &= a^2 + b^2 + 4(ab/2). \end{aligned}$$

de donde se concluye (¿por qué?) que $a^2 + b^2 = c^2$. □

La aplicación típica del teorema de Pitágoras consiste en encontrar las dimensiones de un lado de un triángulo rectángulo dadas las otras dos. Como ilustración presentamos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.1** Se sabe que un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 unidades de longitud y uno de los catetos mide 3 unidades. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Solución. Sea c la medida de la hipotenusa del triángulo dado, b la longitud del cateto conocido y c la longitud del cateto desconocido. Utilizando el teorema de Pitágoras podemos encontrar el valor de a de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \\ a^2 &= c^2-b^2 \\ a &= \pm\sqrt{c^2-b^2}, \end{aligned}$$

dado que a es una medida de longitud, no puede ser negativa por lo que al sustituir los valores $c=5$ y $b=3$ en la ecuación anterior se tiene que $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$. ■

Un último tema de geometría básica que **como mínimo** debe conocer el lector antes de estudiar la Geometría Analítica es el de la trigonometría. Si bien la relevancia de los triángulos rectángulos quedaría establecida solo con el teorema de Pitágoras, además los triángulos rectángulos se utilizan para definir las funciones trigonométricas las cuales son indispensables en muchas áreas de la ciencia y en particular en la Geometría Analítica. Por lo que se requiere presentar cuidadosamente los triángulos rectángulos y todos sus componentes, para enseguida, recordar las definiciones de las funciones seno, coseno y tangente más elementales.

Definición 1.1 Sea T un triángulo rectángulo con lados de longitudes a, b, c como el de la figura 1.7. Supongamos que los lados a y b forman el ángulo recto de T, en este caso a y b se llaman *catetos* y el lado c, opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa.* Sea θ, el ángulo formado por a y c, se definen la siguientes relaciones:

- $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{b}{c}$.
- $\cos\theta=\dfrac{a}{c}$.
- $\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\dfrac{b}{a}$.

Las relaciones anteriores se llaman *funciones trigonométricas definidas sobre triángulos rectángulos*, las cuales sólo están definidas para ángulos θ mayores estrictamente que cero y menores que 90°.

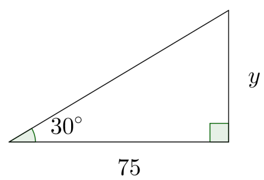
El hecho de que $0<\theta<90^\circ$ para los ángulos interiores de triángulos rectángulos, como debe saber el lector, es en parte consecuencia de que los ángulos internos de todo triángulo en geometría euclidiana suman 180°. En matemáticas superiores sin embargo, las funciones seno y coseno están definidas en todos los números reales. En el capítulo 3 introducimos las funciones trigonométricas definidas sobre el círculo unitario y de esta manera quedan extendidas a todo $\mathbb{R}$.

Las aplicaciones más elementales de trigonometría están dedicadas a “resolver triángulos”. Como una ilustración presentamos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.2** Encuentre el valor de y, en el triángulo de la figura mostrada.

Solución. Notamos que y es la longitud del cateto opuesto del triángulo de la figura y que 75 es la longitud del cateto adyacente. Por lo tanto, de la definición 1.1, se tiene que $\tan(30^\circ)=\dfrac{y}{75}$, de donde despejando,

$$y=75\tan(30^\circ)=75\frac{\sqrt{3}}{3}=25\sqrt{3}.$$



Por lo tanto el valor aproximado de la solución es $y\approx 43.3$. ■

N En este momento, una vez que hemos enumerado los resultados y definiciones de geometría sin los cuales no puede estudiarse la Geometría Analítica, es pertinente que el lector se pregunte cuales axiomas y teoremas de geometría básica se requieren para llegar a ellos y cuál es acaso el camino más corto. El camino más corto al teorema de Pitágoras, hasta donde conozco, es el emprendido por Birkhoff en [3]. Por otra parte, el teorema de construcción de perpendiculares requiere, como una simple revisión de la demostración de la actividad 1.1 puede revelar, la definición de ángulo recto, la definición de par lineal, los axiomas y teoremas básicos de congruencia de triángulos. Aproximaciones elementales a estas definiciones axiomas y teoremas se encuentran en [12], [2], [4], los cuales suelen ser económicos para llegar al teorema de existencia de la perpendicularidad. Por último, las funciones trigonométricas requieren algo más que sólo la definición 1.1, por supuesto, pero dado que en nuestro enfoque las fórmulas más usadas de trigonometría y muchas propiedades de las funciones trigonométricas son demostradas en la sección 3.2 no comentamos nada más sobre ellas en este capítulo.

1.2 Saberes indispensables de la circunferencia

Una primera actividad de descubrimiento de la circunferencia debe incluir dos cosas. Una es, cómo construir una circunferencia y la otra, la relación entre el diámetro y longitud de la circunferencia. Para este fin se sugiere la siguiente actividad.

Actividad 1.3 Esta actividad puede realizarse *en equipos de dos personas.* Se requiere del siguiente material: 50 cm de cuerda delgada, pero resistente o un compás; hoja de cartulina o rotafolio; pegamento; tres bolas del mismo tamaño, por ejemplo, tres bolas de pingpong o tres bolas de tenis.

1. Con la cuerda o el compás deben trazarse circunferencias de varios tamaños. Se llamará centro de la circunferencia al extremo de la cuerda que queda fijo. Se llama circunferencia al conjunto de puntos dibujado al mover la cuerda alrededor del centro. ¿La distancia entre el centro y la circunferencia permanece constante o varía?
2. Construya un cilindro que contenga verticalmente a tres bolas de un tamaño dado. La altura del cilindro debe ser exactamente la altura de las tres bolas. Enrolle la cuerda alrededor del cilindro, con ello obtendrá la medida de la circunferencia. Compare la circunferencia medida por la cuerda con la altura del cilindro. ¿Cuál es mayor? ¿La relación de tres diámetros con la medida de la circunferencia podría conservarse sin importar el tamaño de las bolas? Comparen los resultados con las medidas de otros equipos.

Los equipos deben escribir sus observaciones. ■

Solución de la actividad 1.3. Con las observaciones de los estudiantes, se puede llegar a conclusiones grupales. Escriba sus propias conclusiones y después de hacerlo, diga si está de acuerdo con las siguientes afirmaciones: a) Una circunferencia es el conjunto de puntos que está a una distancia constante de un punto fijo. b) Al dividir la medida de la circunferencia y el diámetro de la circunferencia se obtiene una constante un poco mayor que tres sin importar el tamaño de la circunferencia (ver figura 1.9). Efectivamente, el valor exacto de la constante es el número $\pi = 3.14159\ldots$ el cual es un número trascendente, en la sección 3.2.1 se da más información sobre esta importante constante. □

Vocabulario 1.1 Defina las palabras siguientes: circunferencia, centro de una circunferencia, radio, diámetro. Investigue el significado de número trascendente.

1.2.1 Propiedades importantes de la circunferencia

Una vez que el lector sabe construir un círculo y sabe de la relación del diámetro con la circunferencia o por lo menos a tenido un acercamiento como el inducido en la actividad 1.3. Se debe emprender el estudio de dos propiedades básicas al menos:

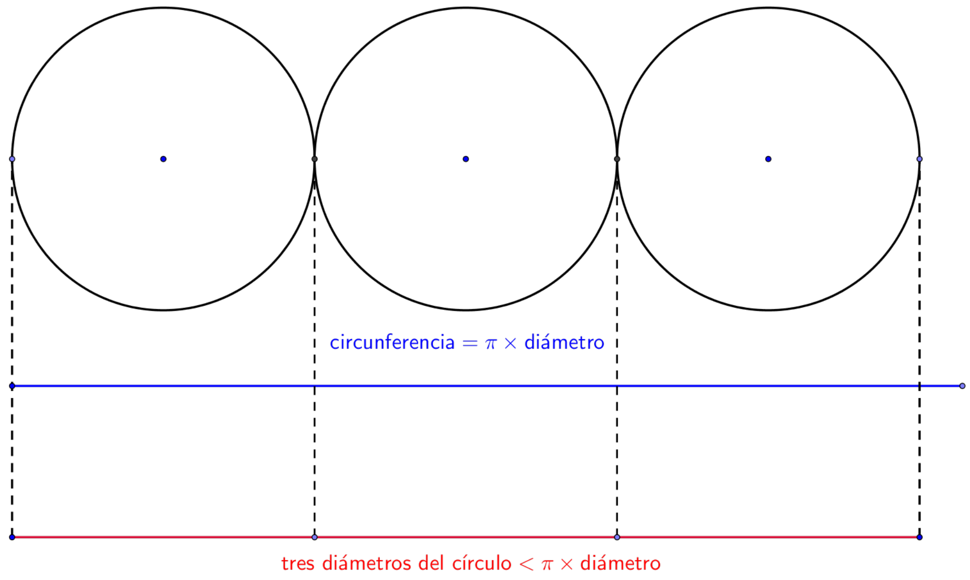


Figura 1.9: Relación entre el diámetro y la circunferencia del círculo

1. la propiedad geométrica de que el radio de una círculo es perpendicular a la tangente al círculo que pasa por el punto de intersección del radio y la circunferencia,
2. la propiedad de que todo ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco subtendido por el mismo ángulo.

Las demostraciones formales de estos hechos en un curso de geometría euclidiana no deben soslayarse y el lector puede encontrarlas en cualquier libro decente de geometría, por ejemplo en [2] o en [12]. Actividades de descubrimiento pueden hacerse fácilmente utilizando Geogebra y es altamente recomendable que antes del curso de Geometría Analítica, el lector haya por lo menos tenido un primer acercamiento a las propiedades mencionadas.

Lo más elemental que debe saberse antes del estudio de la Geometría Analítica es como dibujarla presentamos un ejercicio que debe realizarse antes de emprender el estudio analítico de la elipse.

Ejercicio 1.3 Una elipse puede generase con una cuerda anudada en sus extremos y dos barras de metal, o palos. Se fijan las barras separadas donde va a ser trazada la elipse de manera que queden perpendiculares a la superficie, los puntos donde están colocadas las barras se llaman *focos de la elipse*. Se debe cuidar que la longitud de la cuerda sea mayor que dos veces la distancia entre las barras. La cuerda se coloca con las barras en su interior y se tensa formado un triángulo. El punto que queda en el vértice que no toca las barras es un punto sobre la elipse. Puede trazarse una curva continua manteniendo la cuerda tensa. ¡Hágalo! Se deben dibujar elipses mediante este método antes de proseguir con el estudio de este capítulo. ¿Qué propiedad tienen los puntos de la elipse trazada respecto a la suma de sus distancias a los focos, varía o permanece constante? ■

Para construir una parábola debemos recordar lo aprendido en las actividades 1.1, 1.2 y en el ejercicio 1.2. Es decir, se debe saber cómo construir una perpendicular a una recta que pasa por un punto sobre la misma recta, también cómo construir con regla y compás el punto medio de un segmento dado y finalmente debe saberse como construir una perpendicular a una recta que pasa por un punto exterior a una recta. Con estos conocimientos podemos obtener algunos puntos sobre una parábola (no así la curva continua) utilizando regla y compás solamente, lo cual se muestra en la siguiente actividad.

Actividad 1.4 — Parábolas con regla y compás. Dada una recta $\mathscr{D}$ llamada directriz de la parábola y un punto F, llamado foco, que no se encuentra sobre la directriz, construya puntos sobre una parábola utilizando solamente regla y compás. ■

Solución de la actividad 1.4. La construcción se muestra en la figura 1.10, en la cual se siguieron los pasos que a continuación se describen.
Paso1. Construya una recta cualquiera $\mathscr{D}$ y un punto F fuera de la recta.
Paso 2. Construya la perpendicular a $\mathscr{D}$ que pasa por F (vea el ejercicio 1.2). Sea X_1 el punto de intersección de la recta $\mathscr{D}$ y la perpendicular. Encuentre el punto medio V del segmento que $\overline{X_1F}$ (vea la actividad 1.2) . El punto V se llama vértice de la parábola. Es muy importante observar que V equidista de foco y de la directriz.
Paso 3. Tome un punto X_2, distinto de X_1, sobre la directriz y construya una perpendicular que pase por X_2 perpendicular a $\mathscr{D}$ (vea la actividad 1.1).
Paso 4. Encuentre el punto medio del segmento $\overline{X_2F}$.
Paso 5. Por el punto medio del segmento $\overline{X_2F}$ construya una perpendicular $\overline{X_2F}^{\perp}$. La perpendicular a $\mathscr{D}$ que pasa por X_2 y la recta $\overline{X_2F}^{\perp}$, se intersecan en un punto P, el cual es otro punto de la parábola.
Paso 6. Repitiendo los pasos 2 a 5 con diferentes puntos X_i, $i = 3, 4, \ldots$ puede construirse una parábola uniendo tales puntos. Observe que la distancia de P a X_2, debe ser igual a la distancia de P a F (¿por qué?). Esta es una característica de todos los puntos sobre una parábola. □

1.3 Preliminares de Conjuntos

Los conjuntos con que trabajaremos en este libro son conjuntos formados con números reales. Los números reales serán denotados por $\mathbb{R}$. En este libro dedicado a la enseñanza media superior y superior, supondremos que el lector conoce muchas propiedades de $\mathbb{R}$. Los conjuntos y subconjuntos de números reales suelen especificarse enunciando una propiedad la cual satisfacen todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, los números pares son todos los números naturales los cuales satisfacen la propiedad de ser divisibles por el número dos. Otra forma de determinar un conjunto de números, es enumerar todos sus elementos, por ejemplo el conjunto formado por 0, 1, y 2. Utilizaremos la notación estándar para conjuntos. Por ejemplo, para un conjunto A, cuyos elementos x satisfacen la propiedad $p(x)$, escribimos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x)\}.$$

Lo cual se lee "A es el conjunto de x en los números reales tales que x satisface (la propiedad) $p(x)$."

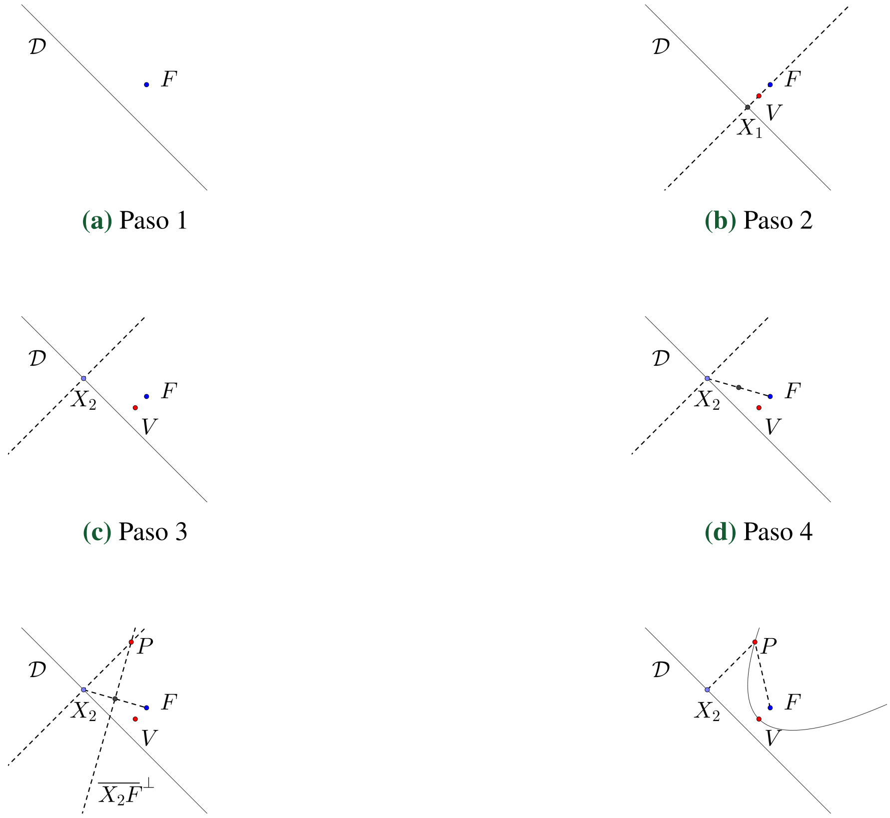
Notación 1.1. *Si x es elemento de un conjunto A decimos que x está en A o bien que x pertenece a A, o bien que x es elemento de A lo cual se denota*

$$x \in A.$$

Si X no está en el conjunto A, decimos que x no pertenece al conjunto, lo cual se denota

$$x \notin A.$$

■ **Ejemplo 1.3** Sea P el conjunto de todos los números pares, entonces $2 \in P$ y $8 \in P$, pero el número cinco no es par, lo cual se denota, $5 \notin P$ y se lee, "cinco no está en P". ■



(a) Paso 1 **(b)** Paso 2 **(c)** Paso 3 **(d)** Paso 4 **(e)** Paso 5 **(f)** Paso 6

Figura 1.10: Construcción de puntos sobre una parábola.

Definición 1.2 Se dice que un conjunto A está contenido en un conjunto B, lo cual se denota $A \subset B$, si y sólo si todo elemento x tal que $x \in A$, cumple que $x \in B$. Si para algún x se tiene $x \in A$ pero $x \notin B$, entonces $A \not\subset B$, lo cual se lee, “A no está contenido en B”.

Notación 1.2. *El conjunto de los números reales se denotará por* $\mathbb{R}$. *El conjunto de todos los números naturales se denota* $\mathbb{N}$.

■ **Ejemplo 1.4** El conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales está contenido en $\mathbb{R}$, efectivamente, todo numero natural es un número real. Por lo tanto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. ■

N Suele haber una confusión entre los estudiantes novicios entre la noción de subconjunto y la de pertenencia. Claramente $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, pero nunca $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Es importante que los estudiantes que hayan llegado a un curso de nivel medio superior de Geometría Analítica no cometan ninguna confusión entre las relaciones $\in$ y $\subset$.

En los estudiantes ocurre un primer encuentro del problema de la técnica contra la intuición matemática cuando se tiene que demostrar que dos conjuntos son iguales. Generalmente, un lector novato imagina que es suficiente mostrar la lista de los elementos (a veces de sólo algunos elementos) de dos conjuntos para probar que son iguales. La dificultad de este acercamiento ocurre con los conjuntos infinitos los cuales por supuesto no pueden ser descritos con una lista finita. Para demostrar la igualdad de conjuntos se requiere el siguiente axioma.

Axioma 1.1 — Axioma de extensión. Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si, $A \subset B$ y $B \subset A$.

■ **Ejemplo 1.5** Sea P el conjunto de todos los números naturales pares y sea $P' = \{n \in \mathbb{N} : \ n = 2m, `; m \in \mathbb{N}\}$. Muestre que $P = P'$.
Solución. Sea $n \in P$ entonces n es divisible por 2, por lo cual, por definición de divisibilidad, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2m$ por lo tanto $n \in P'$ y así, $P \subset P'$. Por otra parte si $n \in P'$ entonces n es de la forma $n = 2m$. Por lo tanto, al dividir por 2 se tiene $n/2 = m \in \mathbb{N}$, es decir, n es divisible por 2, lo que quiere decir que $n \in P$. Se concluye que $P' \subset P$. Como $P \subset P'$ y $P' \subset P$ y por lo tanto, por el axioma de extensión $P = P'$. ■

N Una vez que se ha establecido el axioma de extensión, toda vez que se requiera una demostración formal de la igualdad de dos conjuntos, digamos A y B deberá demostrarse la doble contensión: $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un problema fundamental del álgebra lineal es la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual desde el punto de vista geométrico es equivalente a la intersección de rectas o planos. Dado que las rectas y planos son conjuntos de puntos, requerimos la definición formal de intersección de conjuntos. Utilizaremos también de otras operaciones básicas de conjuntos, las cuales se definen a continuación.

Definición 1.3 Dados dos conjuntos A y B se define la intersección $A \cap B$ como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\},$$

la unión $A \cup B$ se define como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\},$$

la diferencia de conjuntos $A \setminus B$ se define como el conjunto

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

■ **Ejemplo 1.6** Sea P el conjunto de los números pares y sea I el conjunto de los números impares, encuentre los conjuntos $P \cap I$, $P \cup I$, $\mathbb{N} \setminus P$ y $\mathbb{N} \setminus I$.
Solución. Se concluye directamente de la definición 1.3 que

$$\mathbb{N} = P \cup I,$$

$$\mathbb{N} \setminus P = I,$$

$$\mathbb{N} \setminus I = P.$$

No existe ningún número natural que sea a la vez par e impar, lo cual se denota como

$$P \cap I = \emptyset,$$

El conjunto $\emptyset$ se denomina *conjunto vacío* y en términos de propiedades suele describirse con una propiedad universalmente falsa, por ejemplo $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq x\}$. ■

1.3.1 Producto cartesiano

En Geometría Analítica plana todos los objetos de estudio son puntos o bien conjuntos de puntos, los cuales se toman del conjunto $\mathbb{R}^2$. Los elementos de $\mathbb{R}^2$ son *pares ordenados* de números reales los cuales se denotan como (x, y). En realidad $\mathbb{R}^2$ es parte de una familia de conjuntos que puede ser definida de manera abstracta para conjuntos arbitrarios como en la siguiente definición.

Definición 1.4 Dados dos conjuntos A, B, se define el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \text{ y } y \in B\}.$$

Sean $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1,b_2)$ elementos de $A \times B$ se tiene que $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y solo si$a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$.

■ **Ejemplo 1.7** En particular, el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo es el conjunto denotado como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es posible extender el producto cartesiano para más de dos conjuntos, por ejemplo $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en este caso $\mathbb{R}^3$ está formado de ternas de números reales, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

El conjunto $\mathbb{R}^3$ está asociado con el espacio de tres dimensiones cuyo estudio se inicia en el capítulo 6. ■

N Se debe mencionar que el símbolo $\mathbb{R}^2$ se debe leer "erre dos" y el símbolo $\mathbb{R}^3$ se debe leer "erre tres". No es apropiado confundir el producto cartesiano con operaciones de números, por lo que se debe evitar referirse a "erre dos", por ejemplo, como "erre al cuadrado".

Para construir los espacios que utiliza la Geometría Analítica se provee a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (en general a $\mathbb{R}^N$, pero esto no se hace en este libro) de una estructura algebraica y de una métrica, lo cual se hará en los capítulos posteriores. Sin embargo, desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, lo que la Geometría Analítica estudia son relaciones entre puntos las cuales se definen formalmente a continuación.

Definición 1.5 — Relación. Sean A, B conjuntos arbitrarios. Una relación R en $A \times B$ es un subconjunto cualquiera del producto cartesiano $A \times B$.

Como hemos mencionado, el producto cartesiano que nos importa en Geometría Analítica es el producto de $\mathbb{R}$ consigo mismo. Así que siendo consecuente, las relaciones que nos interesan son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, es tradición en muchos libros tratar el producto cartesiano en abstracto. No seguiremos aquí esa tradición, dejaremos el estudio del producto cartesiano en abstracto para otro tipo de cursos más interesados en el álgebra que en la geometría. Por lo tanto, apegados a este objetivo nuestros ejemplos serán tomados de la geometría, como es el caso siguiente.

■ **Ejemplo 1.8** Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, ¿es E es una relación en $\mathbb{R}^2$?
Solución. Efectivamente todo elemento de E es de la forma (x,x) el cual está en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto todo elemento de E es elemento de $\mathbb{R}^2$ y por la definición 1.2 se tiene que $E \subset \mathbb{R}^2$. Por la definición 1.5, E es una relación en $\mathbb{R}^2$. ■

Definición 1.6 — Función. Una función $f : A \to B$ (se lee, "f de A en B") es una relación en $A \times B$, tal que si los pares (a,b_1) y (a,b_2) pertenecen a f entonces $b_1 = b_2$. El conjunto A se denomina domino de f. El conjunto de todos los elementos de B para los cuales existe un $a \in A$ tal que $(a,b) \in f$ se denomina imagen de f y se denota $\operatorname{im}(f)$. Si $\operatorname{im}(f) = B$ se dice que f es *sobreyectiva*. Una función para la cual se cumple que si los pares (a_1,b) y (a_2,b) están en f, entonces $a_1 = a_2$, se llama *inyectiva*. Una función $f : A \to B$ se dice biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva.

Se dice que existe una *correspondencia biunívoca* de un conjunto A con un conjunto B, si existe una función biyectiva $f : A \to B$.

■ **Ejemplo 1.9** Determine si las siguientes relaciones son funciones: a) $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$, b) $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}$.

Solución. a) Tenemos que, como ejemplo, los pares $(1,-1)$ y $(1,1)$ están en F_1 y $-1 \neq 1$ por lo tanto la relación F_1 no es relación porque no satisface el criterio de la definición 1.6. b) Supongamos que los pares (a,b_1) y (a,b_2) están en F_2 entonces se debe cumplirá que $a^2 = b_1$ y $a^2 = b_2$, por lo tanto $b_1 = b_2$ y por definición F_2 es función. ■

N El lector interesado en estudiar geometría para tener buenas bases para el estudio del Cálculo Diferencial puede encontrar la definición 1.6 un poco confusa ya que en Cálculo, suele llamarse función sólo a la regla de correspondencia que la define. En el ejemplo anterior dado que F_2 es función, en Cálculo se dice que y es función de x y que F_2 está definida por $y = F_2(x) = x^2$. Este enfoque se estudia en el capítulo 9. Si el estudio de funciones como conjuntos resulta confuso es mejor omitirlo y quedarse sólo con el del capítulo 9.

1.4 Preliminares de Números Reales

Los temas de álgebra incluidos en este capítulo son esenciales para el estudio de la Geometría Analítica, sin embargo **no deben ser estudiados en el curso de Geometría Analítica**, sino en varios cursos anteriores. Se enumeran en esta sección los temas más importantes como referencia y para que el lector pueda realizar un repaso de los saberes que se requerirán.

1.4.1 Propiedades de Campo

Para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades

i) $a+b = b+a$.
ii) $ab = ba$.
iii) $a+(b+c) = (a+b)+c$.
iv) $a(bc) = (ab)c$.
v) $a(b+c) = ab+ac$.
vi) Existe un elemento de $\mathbb{R}$ denotado 0 tal que $a+0 = 0+a = a$ y un elemento de $\mathbb{R}$ denotado 1 tal que $a1 = 1a = a$ para todo a en $\mathbb{R}$.
vii) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un elemento denotado por $-a$ tal que $a+(-a) = 0$. Para todo $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$, existe un elemento denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

Consecuencia inmediata de estas propiedades son las reglas dadas para los llamados *productos notables* los cuales llenan páginas y páginas de los llamados *libros de álgebra elemental*. Para este libro se requerirán únicamente, al menos que otra cosa sea especificada, los productos contenidos en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 Para todo $x,y,a,b \in \mathbb{R}$ se cumple

1. $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$.
2. $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$.
3. $(x\pm y)^2 = x^2 \pm 2xy+y^2$.
4. $(x\pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y+3xy^2 \pm y^3$.
5. $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$.
6. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$.

N Al procedimiento mediante el cual partiendo del lado derecho de las expresiones en el Teorema 1.2 se llega a las expresiones de lado izquierdo, se le llama **factorizar**. Al procedimiento que comienza en la izquierda, (es decir, en sentido el inverso al anterior mencionado), se le llama **desarrollar factores**. Se recomienda que el lector tenga memorizados ambos procedimientos para seguir sin ningún contratiempo cualquier curso de Geometría Analítica.

> La memorización de algunos resultados simples no es de ninguna manera desdeñable en una etapa del aprendizaje de las matemáticas, sino *al contrario, es un prerrequisito para un aprendizaje superior.* **Sin embargo tendencias seudopedagógicas evitan a toda costa la memorización, lo cual es tan absurdo, como la memorización por repetición sin sentido y sin justificación, de las antiguas escuelas.**

El procedimiento de completar cuadrados se usa extensivamente en la Geometría Analítica, particularmente en el estudio de las cónicas. Se requiere que el lector sea capaz de completar cuadrados con fluidez.

Lema 1.1 — Completar cuadrados. La expresión ax^2+bx+c puede escribirse como

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left[c-\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right].$$

Demostración. Desarrolle el lado derecho de la igualdad del lema de acuerdo al teorema 1.2 en el punto 3 y simplifique. ■

Ejercicio 1.4 Complete todos los pasos de la demostración anterior. ■

■ **Ejemplo 1.10** Complete cuadrados en la expresión $2x^2+7x-1$.

Solución. En lugar de utilizar la fórmula del lema 1.1, conviene realizar el procedimiento siguiente paso a paso:

1) Se agrupan los términos que incluyen a x:

$$2x^2+7x-1 = (2x^2+7x)-1.$$

2) Se factoriza el coeficiente de x^2 de la expresión entre paréntesis:

$$(2x^2+7x)-1 = 2\left(x^2+\frac{7}{2}x\right)-1.$$

3) Se suma y se resta el número $2\left(\frac{7}{4}\right)^2$,

$$2\left(x^2+\frac{7}{2}x\right)-1 = 2\left(x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)-1-2\left(\frac{7}{4}\right)^2.$$

4) Notamos que ahora el término $\left(x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)$ es un binomio cuadrado perfecto que corresponde al número 3, del teorema 1.2. Factorizamos y simplificamos para obtener el resultado:

$$2\left(x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)-1-2\left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{114}{16}.$$

Recapitulamos todos los pasos anteriores en una sola ecuación:

$$\begin{aligned}
2x^2+7x-1 &= (2x^2+7x)-1 \\
&= 2\left(x^2+\frac{7}{2}x\right)-1 \\
&= 2\left(x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)-1-2\left(\frac{7}{4}\right)^2 \\
&= 2\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{114}{16}.
\end{aligned}$$

Se concluye con una expresión idéntica a la de la fórmula del lema 1.1 (¡verifíquelo!). ■

N Debemos insistir que el procedimiento de completar cuadrados es indispensable para resolver problemas referentes a cónicas y por lo que los estudiantes deben ser capaces de completar cuadrados fluidamente para lograr un desempeño apropiado al estudiar Geometría Analítica.

Ejercicio 1.5 Utilice la fórmula del lema 1.1 para comprobar que la solución obtenida en el ejemplo 1.10 es correcta. ■

1.4.2 Orden en los números reales

Es muy importante poder comparar números reales y diferenciarlos como positivos o negativos, por lo que el siguiente axioma es fundamental.

Axioma 1.2 El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ contiene un subconjunto $\mathbf{P}$ llamado *conjunto de números positivos* con las siguientes propiedades:

i) Si a y $b \in \mathbf{P}$, entonces $a+b \in \mathbf{P}$ y $ab \in \mathbf{P}$.
ii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta: $a \in \mathbf{P}$, o bien $-a \in \mathbf{P}$ o bien $a = 0$.

Se puede ahora proceder a definir los signos $>, <, \leq$, etcétera.

Definición 1.7 Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a > b$ significa que $a - b \in \mathbf{P}$; $a < b$ significa que $b > a$; $a \geq b$ significa que $a > b$ o bien que $a = b$.

Las propiedades del ordenamiento en $\mathbb{R}$ quedan resumidas en el siguiente teorema.

Teorema 1.3 Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

i) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
ii) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
iii) Si $a > b$ y $c > 0$ entonces $ac > bc$.
iv) Si $a > b$ y $c < 0$ entonces $ac < bc$.

Con las propiedades de orden podemos definir los intervalos de números reales como sigue.

Definición 1.8 Se definen los siguientes conjuntos de números, llamados *intervalos* de la manera siguiente:

a) el intervalo abierto $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
b) el intervalo cerrado $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
c) los intervalos semiabiertos $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ y $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
d) los intervalos semiinfinitos $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $(-\infty,b) =$

$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ y $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.
A veces suele denotarse el conjunto de todos los números reales como un intervalo infinito $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

■ **Ejemplo 1.11** Sean $I_1 = (-1,1)$, $I_2 = [-2,3]$, $I_3 = (0,5)$ intervalos de números reales. Encuentre los conjuntos $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cup I_2$, $I_2 \setminus I_3$.
Solución. Tenemos que $I_1 \cap I_2 = (-1,1) \cap [-2,3] = (-1,1)$. Por otra parte $I_1 \cup I_2 = (-1,1) \cup [-2,3] = [-2,3]$ (¿por qué?). Finalmente $I_2 \setminus I_3 = [-2,3] \setminus (0,5) = [-2,0]$, compruébelo. ■

N Los intervalos se usan numerosamente en Cálculo Diferencial. En nuestro libro se usan principalmente en los ejemplos de funciones del capítulo 9.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real será utilizado extensamente en el siguiente capítulo podemos con lo visto hasta ahora definirlo formalmente.

Definición 1.9 El *valor absoluto* $|a|$ de un número real a se define mediante

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Lema 1.2 Para todo número real a se cumple que $|a| = \sqrt{a^2}$.

Demostración. Sea a un número real cualquiera entonces $a^2 \geq 0$, así $\sqrt{a^2} \geq 0$. Así, si $a \geq 0$, $|a| = a = \sqrt{a^2} \geq 0$. Si $a < 0$, entonces como $\sqrt{a^2} \geq 0$ se tiene $\sqrt{a^2} = -a = |a|$. ■

Dados dos números reales x, y se define la distancia entre ellos $d(x,y) \geq 0$, mediante la fórmula, $d(x,y) = |x-y| = |y-x|$.

■ **Ejemplo 1.12** Encuentre la distancia entre -2 y 2.
Solución. Se tiene que $d(-2,2) = |2-(-2)| = |4| = 4$. ■

1.4.3 Fórmula cuadrática

Con el procedimiento del lema 1.1 para completar cuadrados, es posible resolver la ecuación de segundo grado.

Teorema 1.4 — Fórmula cuadrática. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ tiene:

i) dos soluciones reales, llamadas raíces de la ecuación, si $b^2 - 4ac > 0$ dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{1.3}$$

ii) una solución real si $b^2 - 4ac = 0$ dada por $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$,

iii) ninguna raíz real si $b^2 - 4ac < 0$.

Demostración. Por el lema 1.1 podemos escribir

$$
\begin{aligned}
0 = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[c - \left(\frac{b^2}{4a}\right)\right] \\
\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left[\left(\frac{b^2}{4a}\right) - \frac{4ac}{4a}\right] \\
\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\iff x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

La fórmula (1.4) da dos soluciones si $b^2 - 4ac > 0$ ya que en tal caso $\sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{R}$. ■

N Si $b^2 - 4ac < 0$ en el teorema 1.4 se obtienen dos raíces complejas dadas por $x = \dfrac{-b \pm \mathbf{i}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, donde $\mathbf{i} = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, el campo de los números complejos.

■ **Ejemplo 1.13** Resuelva la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$.
Solución. Utilizamos la fórmula cuadrática para obtener:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4)(1)(-1)}}{2} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos raíces distintas, $x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. ■

1.4.4 Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones son muy importantes en Geometría Analítica, presentamos aquí sistemas de dos variables los cuales son estudiados en la enseñanza secundaria o más tardar en el primer curso álgebra de bachillerato. Un sistema de ecuaciones en las variables x, y es un sistema de la forma

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\
a_{21}x + a_{22}y = b_2
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son constantes dadas y en este libro son siempre números reales. Si $b_1 = b_2 = 0$ el sistema (1.5) se llama **sistema homogéneo**. Un par (x, y) se dice solución del sistema (1.5) si el par satisface ambas ecuaciones del sistema. Si un *sistema homogéneo* (1.5) tiene como solución el par $(0, 0)$ se dice que tiene **solución trivial**.

Métodos de solución de sistemas

Como se ha mencionado, en este capítulo sólo se enumeran los temas que se requieren para comenzar a estudiar la Geometría Analítica. Sobre la solución de sistemas solo mencionamos dos métodos, el método de sustitución y la regla de Cramer. Sin embargo, se requiere que el lector conozca todos los métodos posibles.

Método de sustitución. Si $a_{11} \neq 0$, se resuelve la primera ecuación del sistema (1.5) para la variable x:

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} \tag{1.6}$$

y se sustituye el valor de x en (1.6) en la segunda ecuación de (1.5) para obtener el valor de y:

$$a_{21}\frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} + a_{22}y = b_2$$

$$\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}}$$

$$y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \tag{1.7}$$

si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Con el valor de y obtenido en (1.7) se obtiene el valor de x sustituyendo esta solución en (1.6).

Regla de Cramer. La cantidad $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se llama **determinante del sistema** y se denota por

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Si se sustituye (1.7) en (1.6) se obtiene

$$\begin{aligned} x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} &= \frac{b_1 - a_{12}\frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{a_{11}} \\ &= \frac{b_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{12}(b_2a_{11} - b_1a_{21})}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\ &= \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

La regla de Cramer se puede enunciar en términos de determinantes como: *Si el determinante del sistema (1.8) es diferente de cero, entonces (1.5) tiene solución única dada por (1.7) y (1.9), lo cual puede escribirse como*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.10}$$

■ **Ejemplo 1.14** Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, mediante la regla de Cramer.

$$a)\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

Solución. a) La fórmula de la regla de Cramer da

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2} = 0, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Para b) se tiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{5}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{11}.$$

La solución $(0,0)$ del sistema a) suele llamarse, solución trivial como ya se mencionó. ■

Ejercicio 1.6 Realice los cálculos del ejemplo anterior, compruebe que las soluciones obtenidas en realidad son soluciones de los sistemas respectivos. ■

Evaluación diagnóstica

La evaluación diagnóstica es muy importante para conocer el nivel de conocimientos previos que son prerrequisitos para el estudio de ciertos temas. La siguiente evaluación incluye los temas de geometría, trigonometría y álgebra necesarios para el estudio de la Geometría Analítica. Al final se da una guía de respuestas para que el lector autodidacta o bien el profesor que use nuestro libro como texto tenga un muestra de la calidad y nivel de los conocimientos que se requieren mínimamente.

N Como única ocasión en este capítulo *no se incluyen problemas ni ejercicios*, de manera diferente a como se realiza en el resto del libro. Es importante remarcar que el presente capítulo es meramente introductorio y, salvo la introducción al programa *GeoGebra* de la sección 1.1.2, consiste en una enumeración de los conocimientos previos que cualquier lector debe tener antes de avocarse al estudio de la Geometría Analítica. En lugar de ejercicios, se ha diseñado un ejemplo de evaluación diagnóstica, la cual debe ser modificada y adaptada a la situación real que cada profesor enfrente en el aula.

Evaluación diagnóstica

Responda detalladamente, incluya dibujos y diagramas que ilustren sus respuestas cuando es pertinente.

1. Enuncie el teorema de Pitágoras y responda los siguientes reactivos.
   a) Un triángulo rectángulo tiene hipotenusa con longitud 5, y un cateto mide 3, ¿cuánto mide el otro cateto?
   b) Un triángulo tiene por medidas de sus lados 1,1 ,2 ¿este tríangulo es rectángulo?
2. Considere el triángulo T cuyos lados miden 3,4,5. Designamos con θ el ángulo formado con la hipotenusa y el cateo que mide 3. Determine, $\tan\theta$, $\cos\theta$.
3. Desarrolle los siguientes productos, sin realizar las operaciones.
   a) $(x-1)(x+1)$.
   b) $(3x-2)(-5x+1)$.
   c) $(x-2)^2$
4. Factorice las siguientes expresiones
   a) x^2-2.
   b) $x^2+\sqrt{2}x+1/2$
   c) x^2-2x-3
5. Complete cuadrados en las siguientes expresiones
   a) x^2+x+5.
   b) y^2-5xy.
6. Determine $|-8|$. Calcule la distancia de -2 a 4 en la recta real, use el valor absoluto.
7. Utilice la fórmula cuadrática para resolver las siguientes ecuaciones.
   a) $4x^2+3x-1=0$.

   b) $x^2+x+1=0$.
   c) $x^2-5x+25/4=0$.
   d) $3x^2-3x-2=0$.
8. Resuelva los siguientes sistemas
   a) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 6x+4y=1. \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -2x+4y=1. \end{cases}$
   c) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -6x-4y=0. \end{cases}$

Guía de respuestas para la evaluación diagnóstica

1. No basta que el enunciado del teorema de Pitágoras incluya la fórmula $a^2+b^2=c^2$, si no se explica en una figura que a, b y c son respectivamente los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo. Normalmente *los estudiantes creen que el teorema de Pitágoras es sólo una fórmula* y no mencionan que el triángulo debe ser rectángulo ni utilizan las palabras "hipotenusa, cateto opuesto, cateto adyacente". Sin estas palabras el enunciado no puede ser considerado correcto. **Ningún lector podrá comprender la fórmula de distancia entre puntos en dos y tres dimensiones, si no conoce cabalmente el teorema de Pitágoras.**
2. Sin el conocimiento de la tangente de un ángulo no se podrá comprender la idea de la pendiente de una recta, sin el coseno no se podrá comprender el ángulo entre vectores. Se tiene $\tan\theta = 3/4$, $\cos\theta = 4/5$. Respuestas incorrectas pueden significar desconocimiento. Sin embargo, el desconocimiento de estos temas no es tan grave como el desconocimiento del teorema de Pitágoras, dado que en el capítulo 3, se establecen definiciones más generales de las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria.
3. a) $(x-1)(x+1)=x^2-1$. b) $(3x-2)(-5x+1)=-15x^2+13x-2$. c) $(x-2)^2=x^2-2x+1$. Errores de signos en estos productos pueden implicar desconocimiento de los estudiantes se recomienda un mayor análisis en caso de respuestas erróneas. **No podrá comprenderse como se obtienen las ecuaciones de las cónicas si el lector no domina estos productos.**
4. a) $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. b) $x^2+\sqrt{2}x+1/2=(x-\sqrt{2}/2)^2$. c) $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$. Si el lector no es capaz de encontrar factorizaciones que incluyan raíces, probablemente no comprende en realidad el proceso de factorización, o probablemente desconoce el uso de raíces o ambas cosas. En todo caso le será difícil el estudio de las ecuaciones de curvas y superficies en Geometría Analítica. **Si el lector no es capaz de realizar los procesos de factorización y desarrollo de productos notables con fluidez le será casi imposible alcanzar el ritmo que requiere el estudio de la Geometría Analítica en un curso universitario.**
5. a) $x^2+x+5=(x+1/2)^2+19/4$. b) $y^2-5xy=(y-5/2x)^2-25/4x^2$. Si el lector no es capaz de completar cuadrados no podrá identificar las ecuaciones de cónicas ni de superficies cuadráticas.
6. $|-8|=8$, la distancia de -2 a 8 es $|-2-8|=10$. Sin el conocimiento de el valor absoluto, ni la idea del valor absoluto como medida de distancias en la recta, el lector no podrá generalizar ni comprender el concepto de distancia entre puntos en el plano ni en el espacio.
7. a) $x=-1, 1/4$. b) No tiene soluciones en $\mathbb{R}$, $x=(-1\pm\sqrt{-3})/2$. c) $x=-5/2$. d) $x=(3\pm\sqrt{33})/6$. Sin la fórmula cuadrática no podrán resolverse una multitud de problemas del libro.
8. Hay las tres posibilidades: a) no tiene solución, b) $x=-1/8$, $y=3/16$ c) infinitas soluciones $x=t$, $y=-3/2t$, $t\in\mathbb{R}$. Si el lector no es capaz de resolver al menos a) y b) tendrá serias dificultades para entender la intersección de rectas, planos y otros temas.

2. Plano cartesiano

2.1 Coordenadas en una línea

Antes de pasar a estudiar el plano cartesiano estudiaremos un objeto más simple, la línea recta. En una recta los únicos objetos de estudio son la recta misma, puntos aislados y segmentos de recta. La esencia de la Geometría Analítica consiste en establecer una correspondencia entre números y objetos geométricos. Tal correspondencia en la recta, requiere del siguiente postulado.

Postulado 2.1 — Birkhoff. Para cualesquiera puntos A, B en una línea recta l existe una correspondencia biyectiva[1] entre los números reales y la recta, tal que al punto A le corresponde el número x_A y al punto B le corresponde el punto x_B, de tal manera que el valor absoluto[2] $|x_A - x_B|$, corresponde a la distancia entre A y B en la recta l.

N El lector, ya conoce esta correspondencia de manera intuitiva, a cada punto sobre la recta le corresponde un y sólo un número real y, recíprocamente, a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. Sin embargo, si se desea estudiar la Geometría Analítica de manera formal, este hecho debe ser establecido como un postulado como lo hace Birkhoff en [3]. Observe que dicho Postulado fundamenta la Geometría Analítica y constituye su esencia.

Dada una recta l podemos localizar el punto correspondiente al número cero sobre la recta. Convenimos en asignar los números negativos a los puntos localizados a la izquierda del 0 y en asignar los números positivos los localizados a la derecha del 0 de tal forma que $x < y$, si y solo si$x$ está a la izquierda de y. Dados dos puntos en la recta l se define la distancia entre ellos de la manera siguiente.

Definición 2.1 — Distancia entre dos puntos en una recta. Sea l una recta y sean $x, y \in \mathbb{R}$ puntos sobre la recta. Se define la distancia $d(x, y)$ entre ellos, lo cual se lee, *distancia de* x a y,

[1] En la definición 1.6 se introduce el concepto de correspondencia biyectiva o biunívoca.
[2] Para una definición del valor absoluto $|a|$ de un número real a, consulte el capítulo 1.

como

$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x-y)^2}.$$

■ **Ejemplo 2.1** Por ejemplo, si $x=-2, y=-3$ tenemos $d(-2,-3) = |-2-(-3)| = |-2+3| = |1| = 1$. Si $x=-8, y=1$ en este caso $d(-8,1) = |-8-1| = |-9| = 9$. ■

Ejercicio 2.1 En equipos pequeños, los estudiantes deben inventar ejemplos con números reales que ilustren las siguientes preguntas:

1. Si se conoce $d(x,y)$ ¿qué puede decirse de $d(y,x)$?
2. ¿Qué número corresponde a $d(x,x)$?
3. ¿Puede ocurrir que $d(x,y) < 0$?

Escriba sus conclusiones en forma de una *proposición matemática.* ■

2.2 El plano cartesiano

Dadas dos rectas l_1, l_2 que se intersecan en un punto, (podemos suponer que el punto de intersección corresponde al número cero de cada una de ellas) formamos el producto cartesiano $l_1 \times l_2$ como se definió en el capítulo anterior. Dado que cada recta tiene una correspondencia biunívoca con $\mathbb{R}$ se tiene que

$$l_1 \times l_2 \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Notación 2.1. *Se denota $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el símbolo $\mathbb{R}^2$ se lee "erre dos". A los pares (x,y) les llamaremos puntos del plano cartesiano.*

Coordenadas

Dado cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$ del plano cartesiano formado con $l_1 \times l_2$ podemos trazar una recta l_2' que pase por x en l_1 paralela a l_2 y una recta l_1' que pase por y en l_2 paralela a l_1. La intersección de l_1' y l_2' corresponde a la localización geométrica del punto $P = (x,y)$ en el sistema de coordenadas dado por l_1 y l_2.

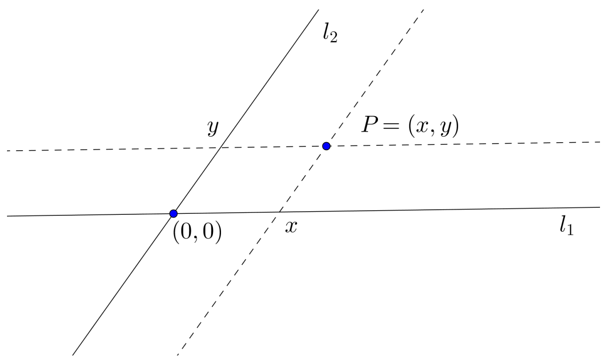


Figura 2.1: Ejes coordenados l_1, l_2 correspondientes a la actividad 2.1.

Actividad 2.1 Divídase el grupo en equipos. Cada equipo debe establecer un sistema de coordenadas con un par de rectas l_1, l_2 que se intersecten. Para la realización del taller deben tomarse en cuenta las siguientes consideraciones: 1) Como un primer paso, las rectas que consideren los equipos **no deben ser perpendiculares.** Posteriormente, en el pizarrón debe dibujarse un sistema de coordenadas **rectangulares**, es decir, un sistema formado por un par de rectas que se cortan en un ángulo recto. 2) Realice una discusión grupal para determinar si los sistemas son mejores unos que otros. ¿Cuáles serían los criterios para determinar cuál es mejor? 3) Una vez terminada la actividad anterior, la siguiente actividad consiste en medir distancias entre puntos. ¿Cómo debe hacerse? **No debe llegarse en este momento a ninguna fórmula.** Se trata solamente de un primer acercamiento. ■

Solución de la actividad 2.1. Los ejes que se obtengan en los diferentes equipos pueden ser como los mostrados en la figura 2.1. Note que **no son son perpendiculares**. El objetivo de este taller es que se concluya que los mejores ejes para medir distancias son los perpendiculares debido al teorema de Pitágoras. Observe que en ejes no perpendiculares para medir distancia entre puntos se requiere la ley de los cosenos, pero no se necesita obtener ninguna fórmula por el momento. □

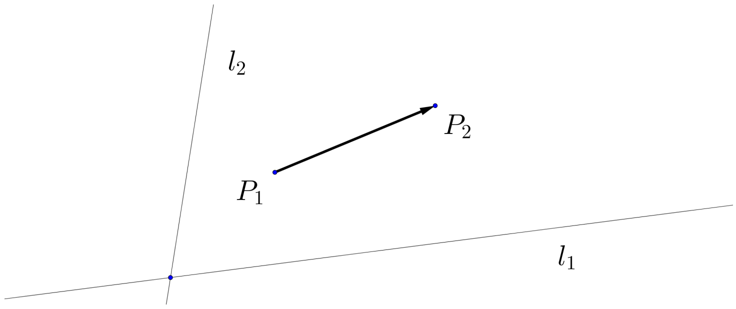


Figura 2.2: Segmento orientado en un plano cartesiano sin coordenadas rectangulares.

2.3 Segmentos orientados

Olvidemos por un momento el plano y preguntémonos cuál sería la geometría sobre un objeto más simple, *la línea recta*. Dada una recta l y dados dos puntos sobre ella $x, y \in \mathbb{R}$ podemos construir dos segmentos con diferente orientación: el segmento que va de x a y y el segmento que va de y a x. Utilizaremos una punta de flecha para distinguir entre ellos de la manera siguiente: si el punto inicial del segmento es x y el final y pondremos una punta de flecha que termine en y.

Notación 2.2. Denotaremos con $\overline{xy}$ el segmento que comienza en x y termina en y. Recíprocamente, denotaremos con $\overline{yx}$ el segmento que comienza en y y termina en x.

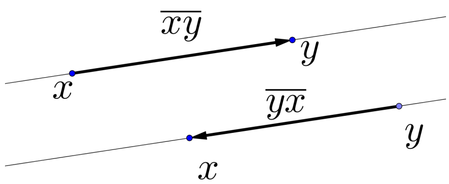


Figura 2.3: Segmentos orientados sobre rectas.

Similarmente, regresando al plano, dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ denotamos el segmento que comienza en P_1 y termina en P_2 por $\overline{P_1P_2}$ y lo representamos con una flecha que inicia en P_1 y termina en P_2 (véase la figura 2.2). Cada punto $P = (x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ tendrá asignado un segmento orientado construido a partir de $(0,0)$ y que termina en (x,y). A este segmento orientado se le llamará *vector de posición* del punto $P=(x,y)$. En general, a los segmentos orientados les llamaremos *flechas* o vectores.

N Las flechas, es decir, los segmentos orientados son vectores en el sentido de elementos de un espacio vectorial. Desde un punto de vista técnico, lo que se tiene es una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{R}^2$ y el plano afín. A cada punto del plano cartesiano se le pone en correspondencia con el segmento orientado construido a partir del origen de coordenadas y el punto en cuestión y, recíprocamente, a cada flecha del plano afín se le pone en correspondencia con el segmento que se construye partiendo del origen y terminando en el punto de coordenadas correspondientes a las componentes del vector. Esta correspondencia a causado innumerables confusiones entre los estudiantes novicios. Estas confusiones se podrían evitar usando notaciones diferentes para flechas y puntos. En GeoGebra las flechas se denotan con letras minúsculas y el programa los escribe algebraicamente en forma de columna, a los puntos se les denota con letras mayúsculas y los escribe en forma de renglón. Los libros soviéticos, algunos, denotan las flechas con paréntesis rectangulares y los puntos con paréntesis redondos. Sin embargo la larga lista de textos que no introduce ningún cambio de notación entre flechas y puntos es avasalladora. Dada la fuerza del isomorfismo entre el plano afín y el producto cartesiano, tradicionalmente se omiten diferentes notaciones. *Aquí seguiremos la tradición de no usar notaciones diferentes entre flechas y puntos*. A pesar de todo, muchos principiantes se confunden dado que las flechas del plano afín "son libres" y pueden moverse por todo el plano mientra que los puntos son fijos.

2.3.1 Suma de vectores

Dado un segmento orientado o vector cualquiera con punto inicial $P_1=(x_1,y_1)$ y punto final $P_2=(x_2,y_2)$, podemos construir un segmento orientado cuyo punto inicial sea $(0,0)$, que tenga la misma longitud y que apunte en la misma dirección del vector $\overline{P_1P_2}$. Para ello, simplemente construimos el vector de posición del punto (x_2-x_1,y_2-y_1). De esta manera a cada flecha de $\mathbb{R}^2$ le corresponde un punto, obtenido por el vector de posición del vector cuyo punto inicial ha sido trasladado al origen de coordenadas $(0,0)$. Recíprocamente, como hemos mencionado ya, a cada punto le corresponde un vector de posición. Por lo tanto, **no distinguiremos con una notación diferente** para flechas y puntos en este libro. Por ejemplo, cuando se diga *dibuje el vector* $(2,1)$, entenderemos que se dibujará **el vector de posición del punto correspondiente** $(2,1)$. Establecido lo anterior podemos definir la suma de vectores y el producto de un número por un vector.

Definición 2.2 Sean (x_1,y_1), (x_2,y_2) vectores en $\mathbb{R}^2$. Se define la suma de vectores como

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2).$$

Si r es un número real y (x,y) un vector, se define el producto de un escalar por un vector como $r(x,y)=(rx,ry)$. El vector cero se define como $\overline{0}=(0,0)$.

■ **Ejemplo 2.2** Dados los vectores $a=(1,2)$ y $b=(-1,3)$ encuentre su suma y encuentre el vector $3(-1,3)$.

Solución. La suma se calcula simplemente sumando componente a componente

$$(1,2)+(-1,3)=(1+(-1),2+3)=(0,5)$$

Para el producto $3(-1,3)$ se tiene $3(-1,3)=(3\cdot(-1),3\cdot 3)=(-3,9)$. ■

Actividad 2.2 1) ¿Puede decirse que la suma de vectores es conmutativa? ¿es asociativa? 2) Si $r,s\in\mathbb{R}$ ¿cómo calcularía $r(s(x,y))$? 3) Si v es cualquier vector, ¿qué resulta de las operaciones

$v+\overline{0}$, $\overline{0}+v$ y $v+(-1)v$? ■

Solución de la actividad 2.2. 1) Pueden hacerse varios ejercicios, por ejemplo los vectores del ejemplo anterior tenemos $a+b=(0,5)$ ¿Qué resulta de sumar $b+a$? ¿Qué resulta en general para cualesquiera vectores a,b?
2) En el ejemplo 2.2 podemos ver que $3b=(-3,9)$, calcule $-2(3b)$. ¿Podemos concluir que dados dos números reales r,s y cualquier vector a se cumple que $r(sa)=(rs)a$?
3) El vector $\overline{0}=(0,0)$ es neutro, es decir, para cualquier vector v se cumple que

$$v+\overline{0}=\overline{0}+v=v,$$

Compruebe lo anterior con el vector $v=(-5,3)$. □

Actividad 2.3 1) Dibuje el vector con punto inicial $P_0=(1,2)$ y punto final $P_1=(4,3)$. Calcule el vector $-\overline{P_0P_1}$ dibuje este vector y diga que relación tiene con $\overline{P_1P_0}$. 2) ¿La operación diferencia o resta de vectores puede ser definida a partir de la suma y del producto de un vector por un número real? ¿Cómo puede definirse? 3) Calcule la diferencia del vector con punto inicial P_1 y punto final P_0. ¿Qué relación tiene con el vector $\overline{P_0P_1}$? Haga los dibujos correspondientes. ■

Solución de la actividad 2.3. 1) El vector $\overline{P_0P_1}$ se muestra en la figura 2.4. El vector $-\overline{P_0P_1}$ es paralelo y tiene dirección opuesta al vector $\overline{P_0P_1}$.

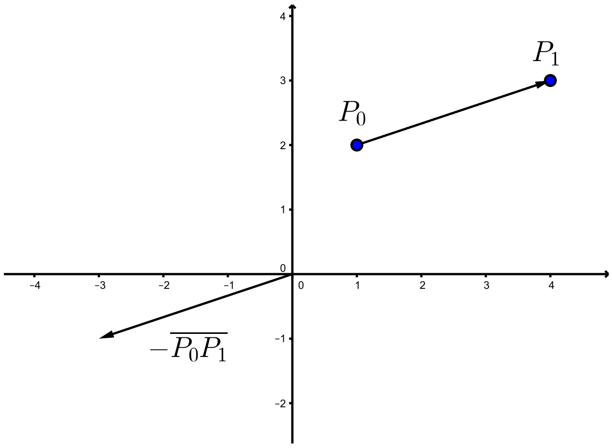


Figura 2.4: Vectores de la actividad 2.3.

2) Dados dos vectores a y b, la diferencia o resta de vectores se puede definir a partir de la suma y el producto por un escalar como

$$a-b=a+(-b).$$

3) El vector $\overline{P_1P_0}$ satisface $\overline{P_1P_0}=-\overline{P_0P_1}$. □

2.3.2 Suma de vectores y flechas

Un buen ejercicio geométrico consiste en encontrar la relación entre la suma y diferencia de vectores con la construcción de un triángulo cuyos lados son los vectores involucrados. Por ejemplo, si se desea encontrar de manera geométrica la suma del vector $a=(a_1,a_2)$ con el vector $b=(b_1,b_2)$, consideramos cualquier punto P del plano, sobre P nos movemos en dirección paralela al eje x, a_1 unidades a la derecha si $a_1>0$ y a la izquierda si $a_1<0$, a partir de este punto nos movemos a_2 unidades verticalmente, hacia arriba si $a_2>0$ y hacia abajo si $a_2<0$. Queda así construido el segmento $\overline{PQ}$ cuyo punto inicial es P y cuyo punto final es $P+a=Q$. Sobre le punto Q se construye el vector $Q+b=R$ y el segmento dirigido $\overline{QR}$. La suma $a+b$ queda entonces representada por el vector $\overline{PR}$, ver la figura 2.5.

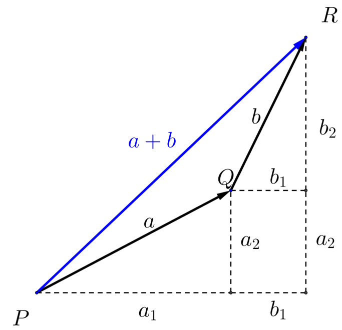


Figura 2.5: Suma de vectores

Para representar la resta de vectores se procede como en el párrafo anterior, es decir, a partir de cualquier punto P construimos el segmento $\overline{PQ}$ con $Q=P+a$. A partir de Q se construye ahora el punto R' con poniendo $R'=Q-b$. Entonces el vector $a-b$ esta dado por el segmento orientado $\overline{PR'}$ como se muestra en la figura 2.6.

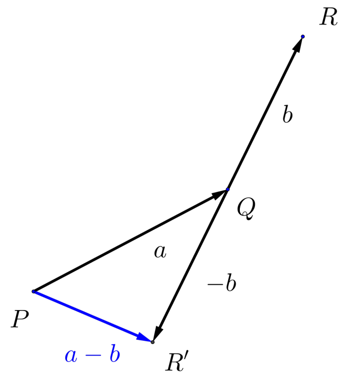


Figura 2.6: Resta de vectores

2.4 Distancia entre puntos en $\mathbb{R}^2$ y longitud de vectores

La distancia entre dos puntos puede definirse con referencia a cualesquiera ejes coordenados sin importar que sean no rectangulares, de acuerdo a la siguiente

Definición 2.3 Dados dos puntos cualesquiera P_1, P_2 del plano, se define la distancia entre ellos $d(P_1, P_2)$ como la longitud del segmento rectilíneo que los une.

De aquí en adelante usaremos sólo coordenadas rectangulares, lo cual significa que las rectas que determinan los ejes de coordenadas se cortan en un ángulo recto, es decir, se cortan en un ángulo de $\pi/2$ radianes, o bien 90°. A la recta horizontal le llamaremos eje de las x y a la vertical eje de las y. Al eje de las x se le llama también *eje de las abscisas* y al eje de las y se les llama *eje de las ordenadas.*

Una vez que se tienen ejes coordenados rectangulares la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano se puede medir por medio del teorema de Pitágoras, teorema 1.1, en el capítulo 1.

Actividad 2.4 La distancia entre puntos que si se unen forman segmentos paralelos a los ejes, puede calcularse fácilmente. Una vez que se comprende como calcular estas distancias puede conocerse la distancia entre dos puntos que no forman segmentos paralelos a los ejes. Las siguientes actividades facilitarán al lector el entendimiento de la fórmula general. 1) Encuentre una manera simple de calcular la distancia entre los puntos $(3,1)$ y $(3,-2)$. Encuentre también la distancia entre $(-2,-1)$ y $(-4,-1)$. Dibuje planos cartesianos rectangulares y localice los puntos en ellos, proceda *sólo después de haber hecho las gráficas* a calcular la distancia. 2) Se desea calcular la distancia entre los puntos $A=(-2,1)$ y $C=(3,4)$ por medio del teorema de Pitágoras. Para ello construimos un triángulo rectángulo como el que se muestra en la figura 2.8. Se desea entonces calcular la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$. ¿Cómo puede calcularse la longitud de los catetos? ¿Cuál es la longitud de los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$? No olvide hacer un dibujo que corresponda a esta actividad.

El taller deberá tener una duración máxima de 20 minutos. ■

Solución de la actividad 2.4. 1) Para calcular distancias entre puntos que forman segmentos paralelos a los ejes de coordenadas se proyecta el segmento en el eje paralelo correspondiente y sobre el eje, se miden las distancias. Por ejemplo, la distancia entre $(3,1)$ y $(3,-2)$ es $|1-(-2)|=3$, como se muestra en la figura 2.7.

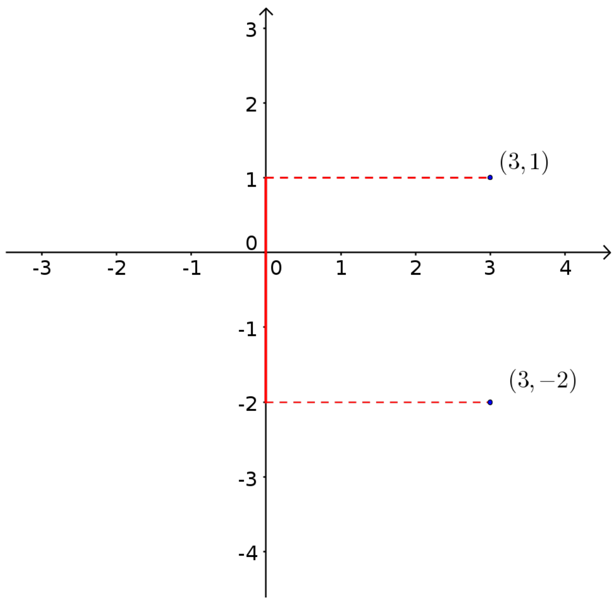


Figura 2.7: El segmento formado por $(3,1)$ y $(3,-2)$ se proyecta sobre el eje y.

2) Para calcular la longitud del cateto $\overline{AB}$, se hace como en el inciso anterior, se proyecta dicho segmento sobre el eje de las x. Entonces se procede a calcular la longitud entre los puntos -2 y 3, sobre dicha línea tal distancia es $|-2-3|=5$. La longitud del cateto $\overline{BC}$ es la longitud entre los puntos 1 y 4 sobre el eje y, la cual está dada por $|1-4|=|-3|=3$. Por el teorema de Pitágotas 1.1, se tiene

$$\|\overline{AC}\|^2 = \|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2$$

De donde se llega al resultado $\|\overline{AC}\| = \sqrt{\|\overline{AB}\|^2 + \|\overline{BC}\|^2} = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$. □

Una vez que se han concluido las actividades del taller procedemos a presentar la fórmula de la distancia entre dos puntos en el siguiente teorema.

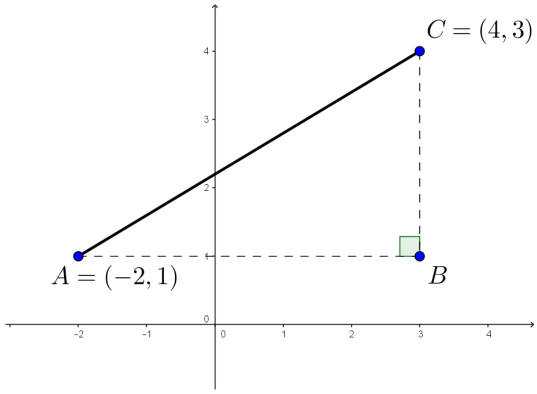


Figura 2.8: Distancia entre los puntos A y C

Teorema 2.1 — Distancia entre dos puntos. Dados dos puntos cualquiera $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ del plano $\mathbb{R}^2$ con un sistema coordenadas rectangular, la distancia entre ellos $d(P_1, P_2)$ está dada por la fórmula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{2.1}$$

Demostración. Supongamos primero que los puntos se encuentran sobre una recta paralela al eje x, por ejemplo, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_1 = (x_2, y_1)$, es decir, $y_1 = y_2$. Entonces la distancia entre los puntos se obtiene proyectando el segmento $\overline{P_1P_2}$ sobre el eje x por lo que su distancia es $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$ como se desea. Por un argumento similar si los puntos P_1, P_2 están sobre una recta paralela al eje y se tiene $d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 - y_2)^2}$. Si los puntos P_1, P_2 no están sobre una recta paralela a ninguno de los ejes, podemos construir un triángulo rectángulo con el segmento paralelo al eje y que pasa por $P_1 = (x_1, y_1)$ y el punto $P_o = (x_1, y_2)$ y con el segmento paralelo al eje x que pasa por $P_2 = (x_2, y_2)$ y $P_o = (x_1, y_2)$. Se mostró en la primera parte de esta prueba que $d(P_2, P_o) = |x_1 - x_2|$ y $d(P_2, P_o) = |y_1 - y_2|$. Se concluye por medio del teorema de Pitágoras que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

como se quería demostrar. ■

Ejercicio 2.2 Proceda a hacer un dibujo que ilustre la demostración del teorema 2.1. ■

Si se tiene un vector con punto inicial P_0 y punto final P_1, la longitud del vector es la distancia entre P_0 y P_1, de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 2.4 La norma o longitud del vector $v = \overline{P_0P_1}$, denotada por $\|v\|$ es la longitud del segmento que une P_0 y P_1. Es decir,

$$\|v\| = \|\overline{P_0P_1}\| = d(P_0, P_1).$$

Ejercicio 2.3 Ilustre con un dibujo el vector R que resulta de la resta de los vectores de posicion de dos puntos P_1, P_2, ¿Cuando se cumple que $\|R\| = d(P_1, P_2)$? ■

Actividad 2.5 Dados los puntos $P_0 = (-4,-5)$ y $P_1 = (2,1)$ construya los vectores $\overline{P_0P_1}$ y $\overline{P_1P_0}$. 1) ¿Qué se puede decir de $\|\overline{P_0P_1}\|$ con respecto de $\|\overline{P_1P_0}\|$. 2) Si $r \in \mathbb{R}$ que se puede decir de $\|r\overline{P_0P_1}\|$. Realice los cálculos con $r = 2,3,-5$. 3) ¿Cuál es la norma del vector $\overline{0}$? La actividad de este taller no debe exceder 15 minutos. ■

Solución de la actividad 2.5. 1) La norma debe se la misma independientemente de la dirección de los vectores ¡compruébelo! 2) Por ejemplo $\|2\overline{P_0P_1}\| = \|(12,12)\| = 2\sqrt{72} = 2\|\overline{P_0P_1}\|$. 3) Se tiene que $\|(0,0)\| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$. □

Terminado el taller, es pertinente presentar los resultados en la siguiente forma:

Teorema 2.2 — Propiedades de la norma. Sean $r \in \mathbb{R}$ cualquier número real y $v \in \mathbb{R}^2$ cualquier vector, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\|v\| \geqslant 0$.
2. $\|v\| = 0$, si y solo si$v = \overline{0}$.
3. $\|rv\| = |r|\|v\|$

Demostración. Las propiedades de la norma de un vector son consecuencia directa de propiedades similares para la distancia entre puntos. Por ejemplo, si $v = \overline{P_0P_1}$ con $P_0 = (x_0,y_0)$ y $P_1 = (x_1,y_1)$, entonces

$$\|rv\| = \|r\overline{P_0P_1}\| = d(rP_1,rP_2) = \sqrt{r^2((x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2)} = |r|\|v\|.$$

las demás partes de la demostración se dejan como ejercicio. ■

Interpretación geométrica de la multiplicación por un escalar

El teorema anterior implica que al multiplicar un vector por un número real (escalar) r aumenta el tamaño del vector si $|r| > 1$ o disminuye el tamaño del vector si $|r| < 1$. Pero si recordamos que un vector puede representarse por una flecha, no debemos olvidar que al multiplicar por un escalar, **además se invierte la dirección del vector** si $r < 0$, vea la figura 2.9.

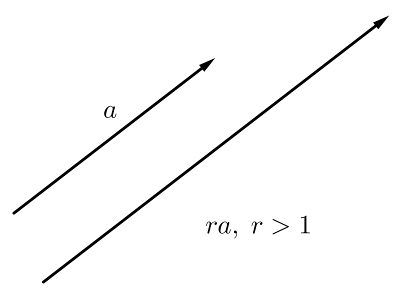


Figura 2.9: Multiplicación de un vector por un escalar.

Considerado lo anterior se tiene la siguiente definición.

Definición 2.5 El vector a es paralelo a b si y sólo si, existe un número real r, tal que $a = rb$.

Actividad 2.6 De acuerdo con la definición 2.5 ¿qué ocurre con el vector $\overline{0} = (0,0)$?¿Qué se puede decir de este vector con respecto a todos los demás con respecto al paralelismo? Si un vector a es paralelo a un vector b ¿es b paralelo a a? Argumente sus respuestas. ■

Solución de la actividad 2.6. El vector cero es paralelo a todos los vectores de acuerdo a la definición anterior. Efectivamente, si a es cualquier vector, entonces $\overline{0} = ra$ con $r = 0$, es decir, $\overline{0} = 0a$.

Supongamos que a y b no son el vector cero. Si a es paralelo a b entonces existe r tal que $a = rb$ como $\overline{0} \neq a$ y $\overline{0} \neq b$ entonces $r \neq 0$. Así podemos multiplicar por el inverso de r, es decir, podemos multiplicar por $1/r \in \mathbb{R}$ para obtener $b = 1/ra$. Por lo tanto b es paralelo a a. □

N Después de haber trabajado con ejemplos concretos dando valores al número r los estudiantes deben poder dar argumentos para justificar cada una de las respuestas anteriores.

2.4.1 El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

No debe ser difícil para el lector verificar que $\mathbb{R}^2$ con la operación suma y la operación producto por un escalar satisface las siguientes propiedades

i) Si $a,b \in \mathbb{R}^2$ entonces $a+b = b+a$.
ii) Si $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ entonces $a+(b+c) = (a+b)+c$.
iii) Existe $\overline{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}^2$, se tiene $a+\overline{0} = a$.
iv) Para todo $a \in \mathbb{R}^2$, existe un elemento denotado $-a \in \mathbb{R}^2$ tal que $a+(-a) = \overline{0}$.
v) Si $r,s \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^2$, entonces $s(ra) = (sr)a$ y $(s+r)a = sa+ra$.
vi) Si $r, \in \mathbb{R}$ y $a,b \in \mathbb{R}^2$, entonces $r(a+b) = ra+rb$.
vii) Si $a \in \mathbb{R}^2$, entonces $1a = a$.

Claramente $\overline{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ y si $a = (a_1,a_2)$, se tiene $-a = (-a_1,-a_2) = (-1)a$.

Ejercicio 2.4 Dados $a = (-1,3), b = (-4,8), c = (5,2)$ y $r = -2, s = 3$ verifique que se cumplen las propiedades i) a vii). ■

N El concepto de *espacio vectorial* es muy importante en las matemáticas universitarias. En general dado un conjunto $\mathbb{V}$ y $\mathbb{R}$ donde se han definido la operación suma en $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ y producto por un escalar en $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$, se dice que el par $\{\mathbb{V},\mathbb{R}\}$, junto con las dos operaciones suma y producto por un escalar, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ si se cumplen las propiedades i) a vii) para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{V}$ y $r,s \in \mathbb{R}$.

En un primer curso **no se recomienda** introducir el concepto de espacio vectorial en general. Sin embargo es pertinente aclarar que la definición precisa de vector, debe darse simplemente en la forma: *un vector es un elemento de un espacio vectorial* $\{\mathbb{V},\mathbb{R}\}$. La noción de flecha ayuda a comprender los aspectos geométricos relacionados con los vectores y es ampliamente usada en ciencias e ingeniería, pero el aspecto abstracto y algebraico de los espacios vectoriales es el que realmente es de primordial importancia en matemáticas avanzadas. Es decir, el hecho de que las flechas sean vectores es importante desde el punto de vista de aplicaciones, pero en general los vectores no son flechas, el concepto de vector es mucho más general e incluso, cabe mencionar, hay vectores de dimensión infinita los cuales **no** pueden representarse geométricamente de ninguna manera.

2.4.2 Vectores perpendiculares

El concepto de ortogonalidad (o perpendicularidad) de vectores es fundamental en geometría. Para desarrollar cierta intuición sobre este concepto se sugiere trabajar en las actividades siguientes.

Actividad 2.7 1) ¿Puede ocurrir que dados dos vectores $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ se tenga que $\|a+b\| = \|a-b\|$? Construya ejemplos si su respuesta es afirmativa o contraejemplos si su respuesta es negativa. 2) Si ocurre que $\|a+b\| = \|a-b\|$ se tiene

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

eleve al cuadrado, desarrolle los binomios y simplifique para llegar a

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

No olvide hacer dibujos que ilustren sus ejemplos. ■

Solución de la actividad 2.7. 1) La figura 2.10 corresponde a esta actividad. Por ejemplo, los vectores $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$ cumplen que $i+j = (1,1)$ y $i-j = (1,-1)$ por lo que $\|i+j\| = \|i-j\| = \sqrt{2}$.
2) Si suponemos que $\|a+b\| = \|a-b\|$ entonces

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} &= \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\\
(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2 &= (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\\
a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2 &= a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2\\
4(a_1b_1+a_2b_2) &= 0.
\end{aligned}$$

lo cual implica lo que se quiere demostrar. □

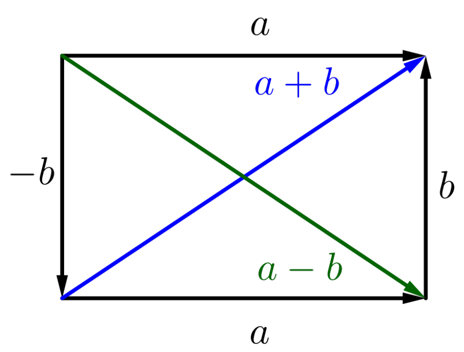


Figura 2.10: Figura correspondiente a la actividad 2.7.

Una vez realizada la actividad anterior se puede proceder a enunciar la definición siguiente.

Definición 2.6 Dos vectores a y b son ortogonales si y sólo si $\|a+b\| = \|a-b\|$.

■ **Ejemplo 2.3** Verifique que los vectores $a = (2,3)$ y $b = (-3,2)$ son ortogonales.
Solución. Calculamos directamente $\|a+b\| = \|(2,3)+(-3,2)\| = \|(-1,5)\| = \sqrt{26}$. Por otra parte $\|a-b\| = \|(2,3)-(-3,2)\| = \|(5,1)\| = \sqrt{26}$. Por lo tanto los vectores son ortogonales. ■

Definición 2.7 Dados dos vectores $a=(a_1,a_2)$ y $b=(b_1,b_2)$ se define el producto interior (o producto punto) de a y b como

$$a\cdot b = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Con las definiciones anteriores se tiene el siguiente teorema

Teorema 2.3 Dos vectores a y b son ortogonales si y solo si$a\cdot b=0$.

Demostración. Si $\|a+b\|=\|a-b\|$ entonces, como se hizo en la actividad 2.7, se llega a que $a\cdot b=a_1b_1+a_2b_2=0$. El recíproco se sigue de

$$\begin{array}{rcl} a_1b_1+a_2b_2 &=& 0\\ 4(a_1b_1+a_2b_2) &=& 0\\ 2(a_1b_1+a_2b_2) &=& -2(a_1b_1+a_2b_2)\\ a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2+2(a_1b_1+a_2b_2) &=& a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-2(a_1b_1+a_2b_2)\\ \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} &=& \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}. \end{array}$$

Se concluye que $\|a+b\|=\|a-b\|$. ■

Actividad 2.8 El producto interior tiene las siguientes propiedades:
1. $a\cdot b=b\cdot a$.
2. Para $r\in\mathbb{R}$, $(ra)\cdot b=r(a\cdot b)$.
3. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.
4. $a\cdot a\geqslant 0$; $a\cdot a=0$ implica $a=\overline{0}$.

Verifique que se cumplen las propiedades 1 a 4. ■

Solución de la actividad 2.8. Sean $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ y $c=(c_1,c_2)$. Las propiedades son un cálculo directo a partir de las expresiones para a,b,c y la definición de producto interno. Por ejemplo la propiedad 4, si $a\cdot a=0$

$$0=a\cdot a=(a_1,a_2)\cdot(a_1,a_2)=a_1^2+a_2^2,$$

pero esto sólo es posible si $a_1^2=0$ y $a_2^2=0$, es decir $a=(0,0)$. Claramente $a\cdot a\geq 0$.

Se recomienda ampliamente que el lector verifique las propiedades 1 a 3. □

El teorema de Pitágoras en forma vectorial

Con las herramientas matemáticas desarrolladas hasta ahora podemos dar una demostración vectorial del teorema de Pitágoras.

Teorema 2.4 — Teorema de Pitágoras. Los vectores a y b son ortogonales si y sólo si

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2.$$

Demostración. Notamos que para cualquier vector $v=(v_1,v_2)$ se tiene $v\cdot v=v_1^2+v_2^2=\|v\|^2$. Para el caso $v=a+b$ se tiene $\|a+b\|^2=(a+b)\cdot(a+b)$. Aplicamos ahora las propiedades del producto interior vistas en la actividad 2.8 para obtener

$$\begin{aligned}\|a+b\|^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b\\ &= \|a\|^2+2a\cdot b+\|b\|^2.\end{aligned}$$

De esta manera $\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2$ si y solo si$a\cdot b=0$, es decir si y sólo si los vectores a y b son ortogonales. ■

N Observe que a diferencia del teorema de Pitágoras presentado en el capítulo 1, el teorema 2.4 es bicondicional.

Ejercicio 2.5 Los ejercicios siguientes son muy importantes para consolidar los conocimientos adquiridos hasta ahora. Se recomienda que se realicen como actividad extraescolar, pero también pueden realizarse en un taller grupal de ejercicios. 1) Use las propiedades del producto interior de vectores para demostrar que $(a+b)\cdot(a-b)=\|a\|^2-\|b\|^2$. 2) ¿Qué puede decirse de un vector cuando se sabe que es ortogonal a sí mismo? ■

Solución de ejercicio 2.5. 1) Notamos que

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot(a+b)-b\cdot(a+b)\\ &= a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b\\ &= \|a\|^2-\|b\|^2.\end{aligned}$$

2) Si a es ortogonal a sí mismo entonces $a\cdot a=\|a\|^2=0$. Por lo tanto $a=\overline{0}$ por la propiedad 4 de la actividad 2.8.

2.4.3 Planteamiento de problemas

Los problemas de esta sección serán en general, de mayor dificultad que otros ejemplos de este capítulo, se recomienda para el mejor aprovechamiento de los estudiantes que realicen la actividad sugerida antes de que revisen la solución de los problemas.

Actividad 2.9 — División de un segmento en una razón dada. Consideramos un segmento $\overline{PQ}$ con puntos extremos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$. Se desea encontrar las coordenadas del punto $M=(x,y)$ dada la razón $r=\dfrac{\|PM\|}{\|MQ\|}$.

El lector debe utilizar diagramas y dibujos para lograr un buen desempeño. Se pueden seguir las siguientes sugerencias, pero esta actividad puede dejarse enteramente al criterio de los estudiantes.

1. Utilice triángulos semejantes para determinar r con las coordenadas de P,Q,M. Dibuje los triángulos.
2. ¿Puede despejarse la coordenada x en alguna de estas razones? ¿Y la coordenada y?
3. ¿Cómo se encuentran las coordenadas del punto medio, es decir, que número debe ser r para que M divida al segmento a la mitad?

El taller no debe exceder media hora y pueden participar tres o más estudiantes por equipo. ■

Solución de la actividad 2.9. Formamos los triángulos MRQ y PR_MM, donde $R=(x_2,y)$ y $R_M=(x,y_1)$, los cuales son semejantes (el lector debe ser capaz de argumentar esta afirmación). Como

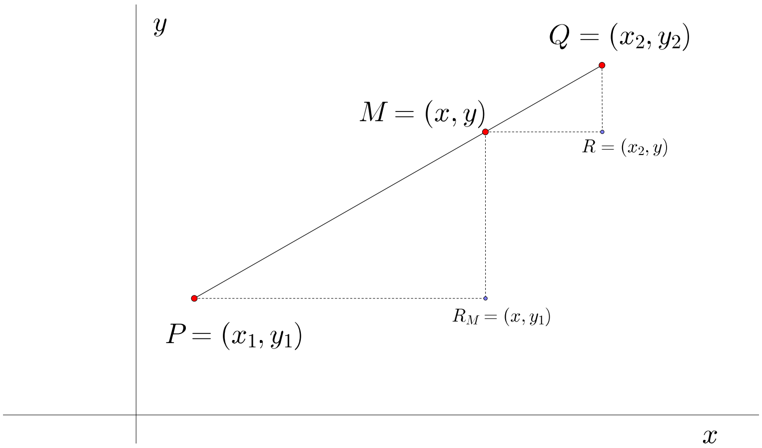


Figura 2.11: Diagrama del ejemplo 2.9.

triángulos semejantes tiene lados proporcionales y las hipotenusas satisfacen $r = \dfrac{||\overline{PM}||}{||\overline{MQ}||}$, por lo tanto

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

y

$$r = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

Es posible despejar x de la relación $r = \frac{x-x_1}{x_2-x}$, siempre y cuando $r \neq -1$, de la siguiente forma:

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$x + rx = rx_2 + x_1$$

$$(1 + r)x = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}. \tag{2.2}$$

similarmente se obtiene

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}. \tag{2.3}$$

Por ejemplo, para dividir un segmento a la mitad se pone $r = 1$ (¿por qué?) y así las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{PQ}$ son

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Debe notarse que razones negativas, salvo $r = -1$, proporcionan puntos que quedan fuera del segmento. □

Ejercicio 2.6 1) Dados los puntos $P = (3, -2), Q = (-5, 5)$ en el segmento $\overline{PQ}$ encuentre las coordenadas de los puntos que lo dividen: a) a la mitad; b) en un tercio. 2) Encuentre el número r que divide cualquier segmento de tal manera que

$$\frac{||\overline{MQ}||}{||\overline{PM}||} = \frac{||\overline{PM}||}{||\overline{PQ}||}.$$

Encuentre las coordenadas de M si P,Q son los puntos del inciso anterior. 3) ¿Qué pasa si $r<0$ y distinto de -1 experimente con $r=-1/2$ con los puntos del inciso 1.

Este ejercicio se resuelve usando *GeoGebra* en la actividad 2.11, pero primeramente debe intentar resolverse sin el uso de computadoras. ■

Proyección ortogonal, componentes, desigualdades importantes

La siguiente actividad requiere de una mayor madurez matemática del lector que el resto de las actividades de este capítulo y *puede ser omitida en un primer curso de Geometría Analítica.*

Actividad 2.10 — Proyección ortogonal, desigualdad del triángulo. Dados dos vectores a y b, distintos de cero, no ortogonales ni paralelos, es posible construir un triángulo rectángulo con hipotenusa a y base paralela a b, es decir, base sb, donde $s \in \mathbb{R}$ es un número por determinar. Se desea de esta manera construir un triángulo con catetos b y $c = a - sb$ tal que c sea ortogonal a b.

1. Exprese en forma vectorial por medio del producto punto la condición b ortogonal a $c = a - sb$.
2. De la relación anterior despeje s, observe que dado que a y b no son ortogonales $a \cdot b \neq 0$.
3. Compruebe que el triángulo buscado con hipotenusa a tiene lados $\dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}b$ y $a - \dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}b$. Realice un dibujo del triángulo correspondiente con $a = (-3,2)$ y $b = (1,-1)$.
4. Compruebe que el vector $\dfrac{b}{\|b\|}$ tiene norma uno.
5. El número $\dfrac{a\cdot b}{\|b\|}$ se llama componente del vector a en la dirección de b y se denota por $comp_b a$. Se tiene entonces
$$a\cdot b = \|b\| comp_b a.$$
Si θ es el ángulo formado por los vectores a y b ¿cuál es el valor de $comp_b a$ en términos de $\|a\|$ y $\cos\theta$?
6. Compruebe que
$$a\cdot b = \|a\|\|b\|\cos\theta.$$
7. *Desigualdad de Schwarz.* Hemos construido un triángulo rectángulo con hipotenusa a y cateto adyacente b, dados, y con cateto opuesto $c = a - \dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}b$.
   a) Utilice el teorema de Pitágoras y las propiedades de la norma de vectores para mostrar que
   $$\left|\frac{a\cdot b}{\|b\|}\right|^2 = \left\|\frac{a\cdot b}{\|b\|^2}b\right\|^2 = \|a\|^2 - \|c\|^2.$$
   b) Muestre que $\|a\|^2 - \|c\|^2 < \|a\|^2$ y concluya que $\left|\dfrac{a\cdot b}{\|b\|}\right| < \|a\|$ y de aquí
   $$|a\cdot b| < \|a\|\|b\|.$$
   c) Compruebe que si a y b son paralelos entonces se cumple que
   $$|a\cdot b| = \|a\|\|b\|.$$
   d) El siguiente teorema esta incompleto, utilice la información obtenida en este proyecto para escribirlo correctamente.

Teorema 2.5 — Desigualdad de Schwarz. Para cualesquiera vectores a, b en $\mathbb{R}^2$ se cumple la desigualdad

$$\cdots \leqslant \cdots$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si.......

8. *La desigualdad del triángulo.* Muestre que $a \cdot b \leqslant |a \cdot b|$ y utilice la desigualdad de Schwarz para demostrar la llamada **desigualdad del triángulo**

$$\|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|,$$

para este fin, escriba $\|a+b\|^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ y desarrolle el lado derecho de esta igualdad.

■

N Recuerde que el proyecto anterior puede ser difícil para los estudiantes que por primera vez cursan Geometría Analítica y *puede omitirse sin detrimento alguno en los cursos de preparatoria.*

Solución de la actividad 2.10. 1) El vector b es ortogonal a $c = a - sb$ si y solo si

$$\begin{aligned} b\cdot(a-sb) &= 0 \\ a\cdot b - sb\cdot b &= 0 \\ a\cdot b - s\|b\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

2) De la igualdad anterior se tiene que $s = \dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2}$.
3) Se deja como ejercicio.
4) Tomamos el producto interior de $b/\|b\|$ consigo mismo

$$\frac{b}{\|b\|}\cdot\frac{b}{\|b\|} = \frac{b\cdot b}{\|b\|^2} = \frac{\|b\|^2}{\|b\|^2} = 1,$$

por lo tanto $b/\|b\|$ es un vector unitario.
5) Sabemos que $\dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2} = \dfrac{comp_b\, a}{\|b\|}$ así $a\cdot b = \|b\| comp_b a$.
6) Puede verse geométricamente que $comp_b a = \|a\|\cos\theta$ de donde con la igualdad del inciso anterior se llega a

$$a\cdot b = \|a\|\|b\|\cos\theta.$$

Los puntos 7 y 8 se dejan como ejercicio. □

N Dados los vectores $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$, las componentes sobre estos vectores de cualquier vector $a = (a_1, a_2)$ están dadas por

$$comp_i\, a = a\cdot i = a_1, \qquad comp_j\, a = a\cdot j = a_2,$$

dado que los vectores i, j tienen norma uno. Estas componentes respecto a los vectores i, j se denominan simplemente componentes del vector a, en mucho libros de texto. Al vector $\dfrac{a\cdot b}{\|b\|^2} b$, se le llama *proyección ortogonal* (o simplemente “proyección”) de a sobre b y se denota $\mathrm{proy}_b\, a$ (ver figura 2.12).

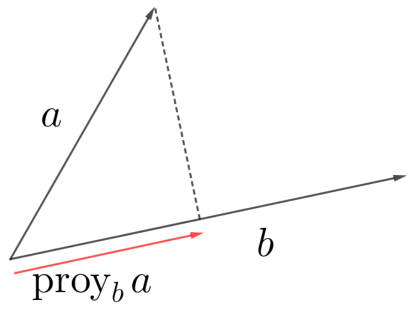


Figura 2.12: Ilustración de un vector proyección de a sobre b.

2.5 *GeoGebra* y vectores

Como hemos señalado en la sección 1.1.2 del capítulo 1, el programa *GeoGebra* se encuentra en la página web:

`https://www.geogebra.org/?lang=es`

en dicha sección el lector podrá revisar las instrucciones básicas de instalación del programa *GeoGebra*, así como varias indicaciones para generar puntos, rectas y muchos objetos geométricos más. En el siguiente taller estudiaremos las instrucciones para generar vectores y operaciones con vectores vistas en el presente capítulo utilizando *GeoGebra*.

Actividad 2.11 Los puntos en *GeoGebra* se etiquetan con letras latinas mayúsculas, las flechas con letras minúsculas.

1. Utilice el teclado de Geogebra para general los puntos $P = (1,1)$, $Q = (\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, $R = (0, \pi)$.
2. Genere los vectores de posición (flechas) correspondientes a los puntos P, Q, R.
3. Con los vectores $a = (1,1)$, $b = (-2,1)$ genere el vector $c = a + b$. Dicho vector aparece como vector de posición del punto $P = (-1,2)$ ¿Cómo podría generar un vector paralelo a b tal que comience en el punto final de a y termine en el punto final de c.
4. Multiplique el vector $a = (1,1)$ por un número positivo mayor que uno y por un número positivo menor que uno ¿qué sucede? ¿Qué sucede si se multiplica a por un número negativo?
5. Realice el ejercicio 1.4 utilizando las herramientas de *GeoGebra*.
6. Verifique con *GeoGebra* que los vectores $a = (2,3)$ y $b = (-3,2)$ son ortogonales mediante la herramienta de trazo de ángulos de *GeoGebra*.
7. Realice el ejercicio 2.6 con las herramientas de geogebra.Verifique que sus respuestas sean correctas con la herramienta "Distancia o longitud" que se encuentra en el recuadro "ángulo".

No olvide que el uso de computadoras en esta etapa del aprendizaje es sólo una herramienta más y no sustituye al aprendizaje que se logra con el trabajo directo con papel y lápiz, sino que lo complementa. ■

Solución de la actividad 2.11. 1) Con el teclado, los puntos en *GeoGebra* se producen con letras mayúsculas. El teclado virtual posee las teclas para raíz cuadrada y π con el teclado físico se puede generar la raíz escribiendo `sqrt` seguida de un paréntesis. Por ejemplo $\sqrt{2}$ se genera con el teclado físico escribiendo `sqrt`(2). La constante $\pi = 3.14159\ldots$ se genera con el teclado físico escribiendo simplemente `pi`.

2) Los flechas (vectores de posición) correspondientes a los puntos del inciso 1), se logran escribiendo con el teclado los mismos puntos requeridos pero con letras minúsculas o bien con el tercer recuadro “dos puntos y línea que los une” posicionando el ratón en el punto inicial del vector oprimiendo el botón izquierdo y luego repitiendo esta operación con el punto final del vector, ver figura 2.13.

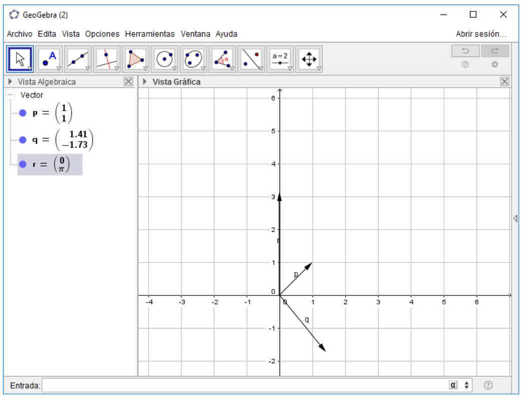


Figura 2.13: Solución de la actividad 2.11 ejercicio 2).

3) Escriba en el recuadro “Entrada”, $a=(1,1)$ y presione la tecla de retorno se generará la flecha que va de $(0,0)$ al punto $(1,1)$ con la etiqueta “a”. Haga lo mismo para b una vez que se genera esta flecha, escriba en el recuadro “Entrada”, $c=a+b$ y presione la tecla de retorno, aparecerá la flecha c con punto inicial el punto $(0,0)$ y punto final $(-1,2)$. Para generar un vector con punto inicial el punto $A=(1,1)$ y punto final $(-1,2)$ use la herramienta “vector” que se despliega oprimiendo el botón izquierdo del ratón sobre el recuadro “dos puntos y línea que los une” se generarán los puntos con etiquetas A y B y un vector llamado u paralelo a b como en la figura 2.14.

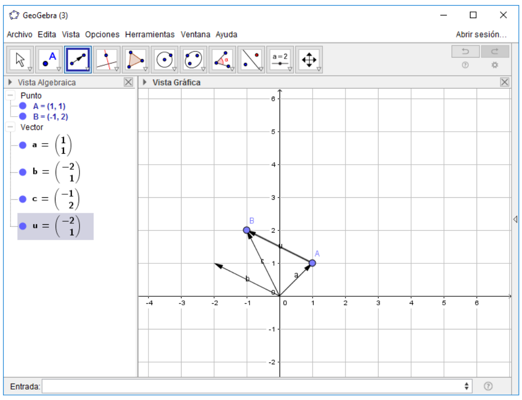


Figura 2.14: Solución de la actividad 2.11 ejercicio 3).

4) Multiplicar un vector por un número positivo mayor que uno aumenta su longitud, por un número positivo menor que uno contrae su longitud, ¡compruébelo! Multiplicar por números negativos invierte la dirección del vector (es decir gira el vector 180 grados).
5) Escriba en el recuadro “Entrada” $a=(-1,3)$, presione la tecla retorno del tablero, repita lo anterior con $b=(-4,8)$ y $c=(5,2)$. La propiedad i) de espacio vectorial se verifica por ejemplo escribiendo en el recuadro “Entrada” $a+b$ y oprimiendo la tecla retorno aparecerá el vector etiquetado u el cual, como el lector puede verificar, es $a+b$y después repitiendo lo anterior con

$b+a$ aparecerá el vector etiquetado v sobre u. En el panel izquierdo, se verán los vectores escritos como vectores columna. En la figura 2.15 se presentan las gráficas correspondientes a este ejercicio las cuales se han movido y achicado, para obtener una gráfica similar use la rueda del ratón ¡experimente! Las propiedades ii) a vii) se pueden verificar abriendo nuevas ventanas para cada propiedad ¡hágalo!

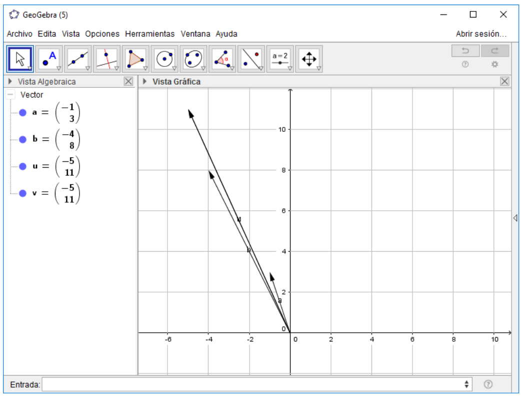


Figura 2.15: Solución de la actividad 2.11 ejercicio 5).

6) Genere los vectores $a=(2,3)$ y $b=(-3,2)$ como se ha hecho en los puntos anteriores. Vaya al recuadro "ángulo" y presione el botón izquierdo del ratón. Posicione el ratón sobre el vector a verá que cuando esté correctamente posicionado cambia el tono del vector, entonces presione el botón izquierdo; repita lo anterior con el vector b, aparecerá en verde un cuadrado con la etiqueta correspondiente a la medida 90° como en la figura 2.16.

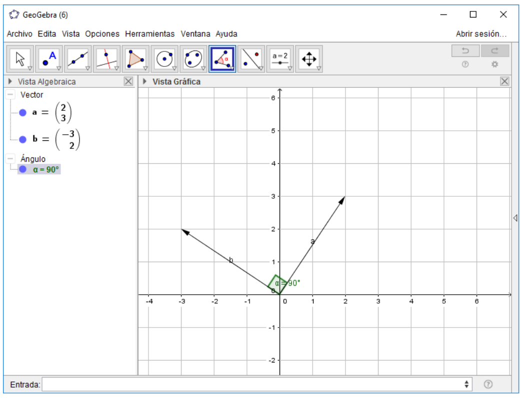


Figura 2.16: Solución de la actividad 2.11 ejercicio 6).

7) Genere los puntos $P=(3,-2)$ y $Q=(-5,5)$ con el teclado en *GeoGebra*. las ecuaciones (2.2) y (2.3) pueden usarse para este ejercicio, pruebe por ejemplo con $r=-1/2$. Es decir, escriba el punto

$$M=\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)=\left(\frac{3+(-1/2)(-5)}{1-1/2},\frac{-2+(-1/2)(5)}{1-1/2}\right)=(11,-9).$$

Use la herramienta en el recuadro "ángulo" correspondiente "Medida o longitud" y obtenga la medida del segmento $\overline{QP}$ y del segmento $\overline{QM}$ ¿Cuál es la razón de estas medidas? ¿Qué puede concluirse de lo que pasa si $r=-1/2$. La gráfica 2.17 corresponde a este punto. *No olvide usar la rueda del ratón para obtener las escalas de la figura mostrada.* □

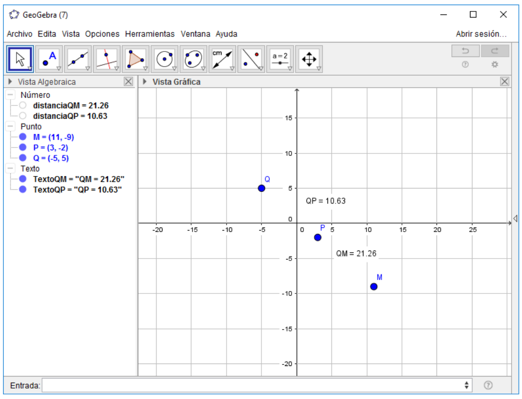


Figura 2.17: Solución de la actividad 2.11 ejercicio 7).

2.6 Problemas y ejercicios del capítulo

Es importante que el lector realice una autoevaluación de los conocimientos logrados en el proceso de estudio de este capítulo. Por otra parte, los problemas incluidos en la sección de "problemas y ejercicios" debe realizarse al concluir cada subtema del capítulo.

2.6.1 Autoevaluación

El ejercicio de autoevaluación requiere de una seria autocrítica por parte del lector. Después de haber respondido los siguientes reactivos el lector debe buscar por sí mismo las respuestas y evaluarlas. Aquellos reactivos incorrectos requieren de un mayor estudio individualizado.

Autoevaluación

Responda de manera detallada cada reactivo, utilice diagramas y dibujos para ilustrar conceptos y ejemplos.

1. Enuncie el teorema de Pitágoras en la forma vectorial. ¿Puede demostrarlo?
2. Se puede decir que dos vectores a, b son ortogonales si y sólo si................
3. ¿Cómo puede comprobar que dos vectores dados son paralelos?
4. ¿Cómo puede saberse analíticamente si dos vectores son o no ortogonales?
5. Si $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ calcule la distancia de a a b, $d(a, b)$.
6. Siempre es importante mantener una bitácora, parte de esta debe ser un vocabulario que incluya las palabras que el lector considere nuevas para él mismo. Se sugiere que comience con el siguiente:

   Vocabulario 2.1 Antes de leer este capítulo ¿conocía el lector las palabras *abscisa, ordenada, ortogonal.*? Escriba estas palabras y sus definiciones. Haga los dibujos que ilustren los conceptos definidos.

7. Describa lo que significa la proyección de un vector geométricamente.
8. La suma de vectores es conmutativa ¿explique?
9. ¿Qué significa desde el punto de vista geométrico multiplicar un vector por -1?
10. ¿Qué es la componente de un vector?

2.6.2 Problemas y ejercicios

Para una cabal comprensión de la matemática se debe alcanzar ciertas etapas del conocimiento. En esta sección se proponen tres niveles o etapas:

a) La primera etapa o **nivel básico** requiere del lector que sea capaz de comprender y de aplicar fórmulas básicas, en este capítulo: suma de vectores, producto por un escalar, producto punto, etcétera.
b) La segunda etapa o **nivel medio** en la que el lector, una vez que la primera etapa ha sido asimilada, es capaz de plantear y resolver problemas empleando directamente las definiciones, teoremas y fórmulas de este capítulo.
c) La tercera etapa o **nivel avanzado** o nivel de dominio, en la que el lector es capaz de plantear y resolver problemas de substancial grado de dificultad y cuya relación con los temas del capítulo muchas veces no es inmediata, ni obvia.

De acuerdo con la anterior subdivisión se proponen los siguientes problemas.

Nivel básico

Sección 2.1

1. Resuelva el ejercicio 2.1.
2. Considere la recta numérica para resolver los siguientes problemas. Posteriormente compruebe sus respuestas utilizando las herramientas de *GeoGebra*.
   a) Localice los puntos $P=-2$, $Q=-\sqrt{2}$, $S=\pi$.
   b) Calcule la distancia de P a Q
3. Determine la distancia entre los puntos a y b si
   a) $a=-1$ y $b=3$.
   b) $a=-4$ y $b=-2$.
   c) $a=\sqrt{2}$ y $b=3$.

Soluciones. a) $d(-1,3)=|3-(-1)|=4$. b) $d(-4,-2)=|-2-(-4)|=2$. c) $d(3,\sqrt{2})=|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2}$

Sección 2.2

1. En papel cuadriculado localice los puntos $P_1=(-3,2)$, $P_2=(1,4)$, $P_3=(-2,-5)$ y $P_4=(1,-6)$. Después dibuje los vectores de posición que corresponden a tales puntos. Posteriormente compruebe con *GeoGebra*.

Sección 2.3

1. Considere los vectores $a=(1,-3), b=(2,5), c=(-2-7)$. Calcule
   a) $a+b$
   b) $3a-c+5b$
   c) $3(b-2a)+6a$
   Verifique que sus soluciones sean correctas utilizando las herramientas de *GeoGebra.*
2. Sean a,b vectores en $\mathbb{R}^2$. Resuelva las siguientes ecuaciones
   a) $5(3,-1)+7a=(-3,4)$
   b) $-5b=(-2,6)$
   c) $2[(5,-1)-a]=2a+(1,0)$
   Soluciones. $a=(-18/7,9/7)$. $b=(2/5,-6/5)$. $a=(9/4,-1/2)$.
3. Considere los vectores $a=(1,-3), b=(2,1/2), c=(-1,7)$. Calcule
   a) $a-b+c$
   b) $3a-c+5b$
   c) $3(b-2a)+6a$
   d) $a\cdot(a+b)$
   e) $\|b-c\|$
   Verifique que sus soluciones sean correctas utilizando las herramientas de *GeoGebra.*

Sección 2.4

1. Divida el segmento formado por $(-1,2)$ y $(3,-2)$ a la mitad y en un tercio de su longitud. Realice una gráfica a mano que ilustre sus resultados compruebe graficando con *GeoGebra*.

2. Determine cuáles pares de vectores son paralelos, cuáles perpendiculares o ninguna de las dos cosas.
   a) $(2,4)$ y $(-1/5,-2/5)$
   b) $(-18,12)$ y $(2,3)$
   c) $(0,1)$ y $(-1,0)$
   Soluciones. 2a) Son paralelos. 2b) son ortogonales. 2c) Ortogonales.
3. Calcule la suma y la resta de los vectores $(5,2)$ y $(-4,3)$de manera geométrica y algebráicamente, por medio de cálculos. Compruebe con las herramientas de *GeoGebra*.
4. Si $a=(-1,1)$, $b=(3,2)$ y $c=(4,6)$ calcule
   a) $a\cdot b$.
   b) $(a-c)\cdot b$.
   c) $(a+b)\cdot c-\|a\|^2$.
   d) $\|b-c\|$.
   Soluciones. 4a) -1. 4b) -25. 4c) 24. 4d) $\sqrt{17}$.
5. Si $a=(1,4)$ y $b=(-2,3)$ calcule la longitud de
   a) $-3(a-b)$
   b) $b/\|b\|$
   Soluciones. 5a) $3\sqrt{10}$. 5b) 1.
6. Compruebe gráfica y analíticamente si es que los vectores son ortogonales. Use las herramientas de *GeoGebra*.
   a) $(1,5),(-4,1)$
   b) $(2,3),(9,-6)$

Nivel medio

Sección 2.1

1. Sobre la recta numérica localice los puntos que satisfacen las siguientes relaciones
   a) $|x|=3$.
   b) $|x-1|=2$.
   c) $|x-1|>0$
   d) $x+2\leq 2$.
   Soluciones. 1a) $x=3$ y $x=-3$. 1b) $x=3$ y $x=-1$. 1c) $x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$. 1d) $x\in(-\infty,0]$.
2. Calcule la coordenada del punto A sobre la recta numérica si se conoce que $B=0$ y $|AB|=2$.
   Soluciones. 2) $A=2$ y $A=-2$.

Sección 2.2

1. Halle las coordenadas del punto P', simétrico respecto al eje y del punto $P=(-1,-3)$. Compruebe usando la herramienta simetría axial de *GeoGebra*.
   Soluciones. 1) $P'=(1,-3)$.
2. Halle las coordenadas del punto P' simétrico respecto al eje x del punto $P=(2,3)$. Compruebe usando la herramienta simetría axial de *GeoGebra*.
   Solución. 2) $P'=(2,-3)$.
3. Determine en cuáles cuadrantes puede estar situado el punto $P=(x,y)$ si
   a) $xy<0$.
   b) $x-y=0$.
   Soluciones. 3a) 2o y 4o cuadrantes. 3b) 1o y 3er cuadrantes.

Sección 2.3

1. Trace el segmento orientado que parte del origen si se sabe que la proyección sobre el eje x, es $x=2$ y la proyección sobre el eje y, es $y=-5$. Verifique su respuesta con *GeoGebra*.
2. La proyección sobre el eje x de un segmento es -12. Si el segmento tiene 13 unidades de longitud y tiene su origen en el punto $P=(3,-2)$, halle las coordenadas del extremo Q del

segmento si forma con el eje y un ángulo agudo.
Solución. 2) $Q = (-9,3)$.

Sección 2.4

1. El centro de gravedad de una varilla rectilínea homogénea está situado en el punto $M = (1,4)$. Uno de los extremos de la varilla está en el punto $P = (-2,2)$. Determine las coordenadas del otro extremo Q de la varilla.
Soluciones. 1) $Q = (4,6)$.
2. Determine las coordenadas de los extremos de un segmento que está dividido en tres partes iguales por los puntos $(2,-1)$ y $(3,1)$.
Solución. 2) $(1,-3)$ y $(4,3)$.
3. Muestre que el triángulo con vértices $(1,1),(2,3)$ y $(5,-1)$ es rectángulo.
4. Determine analíticamente si los siguientes pares de vectores son paralelos o no
   a) $(1,1),(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$
   b) $a = (4,7), b = (12,-20)$
Soluciones. 4a) paralelos $r = 2\sqrt{2}$. 4b) No existe r tal que $a = rb$.
5. Suponga que a,a',b,b' son distintos de cero. Si a es paralelo a a', b paralelo a b' y a paralelo a b entonces a' es paralelo a b'. Ilustre este resultado geométricamente.
6. Muestre que si $d = b + c$ y b es paralelo a a, entonces d es paralelo a a, si y solo si$c$ es paralelo a a. Ilustre este hecho con una gráfica.

Nivel avanzado

1. Por el punto $(4,2)$ se ha trazado una circunferencia tangente a los dos ejes de coordenadas. Determine las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio. (*Sugerencia: Observe que no se requiere la ecuación de la circunferencia.*)
Soluciones. 1) Sea $C = (x,y)$ el centro de la circunferencia. Dado que la circunferencia es tangente al eje x y al eje y, si r es el radio de la circunferencia, debemos tener $r = |x| = |y|$. También r es la distancia de C a $(4,2)$ y así $x = \pm y$. Si $x = y$ se tiene que $C = (10,10)$ y $C = (2,2)$ son soluciones. Puede verse que $x = -y$ no da soluciones en $\mathbb{R}$.
2. Dados los puntos $M = (2,2)$ y $N = (5,-2)$ halle en el eje y un punto P tal que el ángulo MPN sea recto.
Solución. 2) Sea $P = (0,y)$ tal que $\overline{MP}$ sea ortogonal a $\overline{NP}$, entonces $(2,y-2)\cdot(5,y+2) = 0$, resuelva la ecuación.
3. Los vértices de un cuadrilátero son $A = (-3,12)$, $B = (3,-4)$, $C = (5,-4)$ y $D = (5,8)$. Calcule la razón en la que la diagonal AC divide la diagonal BD.
Solución. 3) $1/3$.
4. Resuelva los puntos 7 y 8 de la actividad 2.10.

3. La circunferencia

La mayoría de los libros de Geometría Analítica posponen el estudio de la circunferencia hasta que se haya visto la línea recta. En este libro estudiaremos primero la circunferencia dado que es mucho más simple en varios aspectos que la línea recta y dado que utilizaremos su ecuación para estudiar la trigonometría analítica y algunas relaciones trigonométricas que serán imprescindibles, por ejemplo, para calcular el ángulo entre rectas.

El lector debe asegurarse de que conoce las propiedades básicas de la circunferencia presentadas en el capítulo 1 y entonces podrá estudiarla en el contexto de la geometría analítica de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 3.1 Se llama circunferencia al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que se encuentra a una distancia constante $r > 0$ de un punto fijo C. Al punto C se le llama centro de la circunferencia y a la distancia r se le llama radio de la circunferencia.

N El hecho de los puntos de una circunferencia estén a una distancia constante del centro puede expresarse como “los puntos de la circunferencia **equidistan** del centro”. Equidistar proviene de las palabras latinas *equi* = igual y *distare* = estar a una distancia dada. *Equidistar* significa entonces, estar a una distancia igual.

3.1 Ecuación de la circunferencia

Consideramos ahora una circunferencia con centro en el punto $O = (0,0)$ y radio r. Sea $P = (x,y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia. De acuerdo a la fórmula de distancia entre dos puntos (2.1) y la definición 3.1 se debe tener

$$d(O,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r \tag{3.1}$$

Al desarrollar y elevar al cuadrado se obtiene la ecuación

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2.} \tag{3.2}$$

De esta manera un punto está sobre la circunferencia de radio r si las coordenadas x y y del punto satisfacen la ecuación y recíprocamente, si un par de números x_1, y_1 satisfacen la ecuación (3.2) entonces el punto (x_1, y_1) está sobre la circunferencia.

■ **Ejemplo 3.1** Determine si los puntos $(1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(3,1)$ están sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución. Como $1^2+0^2=1$, el punto $(1,0)$ *está* sobre la circunferencia. Por otra parte, como $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *está* sobre la circunferencia. Finalmente, como $3^2+1^2=10\neq 1$ el punto $(3,1)$ **no está** sobre la circunferencia. ■

Es muy importante que el lector obtenga por sí mismo las ecuaciones de las curvas estudiadas, para el caso de la circunferencia, la ecuación con el centro en un punto cualquiera. La siguientes actividades guiarán al lector para que logre este objetivo.

Ejercicio 3.1 Se recomienda que esta actividad se desarrolle de manera individual y que los resultados se expongan de manera grupal.

1. Sea $P_0=(x_0,y_0)$ el centro de una circunferencia de radio r y sea $P=(x,y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia. Use la definición 3.1 y la fórmula de distancia entre dos puntos (2.1) para obtener una relación semejante a (3.1).
2. Desarrolle los binomios y eleve al cuadrado la raíz en la relación obtenida en el inciso anterior para obtener la ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{3.3}$$

La ecuación (3.3) se conoce como ecuación canónica de la circunferencia con centro en (x_0,y_0) y radio r. ■

Solución del ejercicio 3.1. 1) Tenemos que $d(P_0,P)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$, por la definición 3.1 y la fórmula para la distancia entre dos puntos. 2) Elevando al cuadrado la ecuación anterior se tiene la ecuación (3.3). □

■ **Ejemplo 3.2** Determine si la ecuación $x^2+y^2-2x+y-1=0$ corresponde a una circunferencia.

Solución. Dado que la ecuación $x^2+y^2-2x+y-1=0$ contiene los términos $2x$, $-y$, si se trata de una circunferencia deberá corresponder a una circunferencia de la forma (3.3). Al completar cuadrados[1] se obtiene

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+y-1 &= (x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})-1-1-\frac{1}{4} \\ &= (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De donde se llega a $(x-1)^2+(y+1/2)^2=9/4$, lo que corresponde a una circunferencia con centro en $(1,-1/2)$ y radio $r=\sqrt{9/4}=3/2$. ■

■ **Ejemplo 3.3** ¿La ecuación $x^2+y^2-2x+y+5/4=0$, corresponde a algún lugar geométrico?

[1] Para el tema de completar cuadrados vea el capítulo 1.

Solución. Al completar cuadrados la ecuación $x^2+y^2-2x+y+5/4=0$, se puede escribir como

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+y+\frac{5}{4} &= (x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})+\frac{5}{4}-1-\frac{1}{4} \\ &= (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x-1)^2+(y+1/2)^2=0$, lo que corresponde al punto $(1,-1/2)$, es decir, la ecuación es satisfecha solamente por un punto y **no corresponde a una circunferencia.** ■

■ **Ejemplo 3.4** Determine el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $x^2+y^2-2x+y+6/4=0$?
Solución. Al completar cuadrados en la ecuación $x^2+y^2-2x+y+6/4=0$, se tiene

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x+y+\frac{6}{4} &= (x^2-2x+1)+(y^2+y+\frac{1}{4})+\frac{6}{4}-1-\frac{1}{4} \\ &= (x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x-1)^2+(y+1/2)^2=-1/4$, lo que no puede ocurrir en los números reales ya que **la suma de dos cantidades mayores o iguales a cero no puede ser negativa.** Por lo tanto el conjunto que corresponde a la ecuación es el conjunto vacío, $\emptyset$. ■

Ejercicio 3.2 1. Determine si las siguientes ecuaciones definen una circunferencia
   a) $x^2+y^2-3/2x+5/4y-21=0$.
   b) $x^2+y^2+4x+6y+20=0$.
   c) $(x-1)^2+(y-1/6)^2+7=0$.
2. Encuentre la ecuación de la circunferencia con centro en $(1,-1)$ y radio $r=1$.
3. Dibuje la circunferencia que pasa por $(-3,2)$ y con centro en $(6,3)$. ¿Cuál es su ecuación correspondiente?

Indicaciones sobre las soluciones de este ejercicio se encuentran en la sección “problemas y ejercicios del capítulo”. ■

La actividad del comienzo del capítulo junto con los ejemplos y ejercicio anteriores ayudan a ver que el siguiente teorema resulta justificado.

Teorema 3.1 La ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia si y solo si$D^2+E^2-4F>0$.

Demostración. Una circunferencia con centro en (x_0,y_0) y radio $r>0$ tiene por ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

Al elevar al cuadrado se tiene

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y-r^2+x_0^2+y_0^2=0.$$

Poniendo $D=-2x_0$, $E=-2y_0$ y $F=-r^2+x_0^2+y_0^2$ se tiene que

$$D^2+E^2-4F=4x_0^2+4y_0^2-4(-r^2+x_0^2+y_0^2)=4r^2>0.$$

Recíprocamente de la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ se obtiene al completar cuadrados que

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F = (x^2+Dx+(D/2)^2)+(y^2+Ey+(E/2)^2) \\ +F-(D/2)^2-(E/2)^2=0,$$

de donde

$$\begin{aligned}(x^2+Dx+(D/2)^2)+(y^2+Ey+(E/2)^2) &= -F+(D/2)^2+(E/2)^2 \\ (x+D/2)^2+(y+E/2)^2 &= \frac{1}{4}(D^2+E^2-4F).\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa una circunferencia con centro en $(-D/2,-E/2)$ y radio $r=1/2\sqrt{D^2+E^2-4F}$, si $D^2+E^2-4F>0$; representa un punto, si $D^2+E^2-4F=0$; finalmente, representa al conjunto vacío, si $D^2+E^2-4F<0$. ■

Ejercicio 3.3 Lea con cuidado la demostración anterior. Verifique que los cálculos son correctos rehaciéndolos incluyendo todos los detalles. ■

3.2 Trigonometría Analítica

En esta sección utilizaremos la ecuación de la circunferencia para introducir la medida en radianes para las funciones trigonométricas y para deducir algunas de las identidades trigonométricas más utilizadas en Geometría Analítica, las cuales se requieren extensamente al tratar la ecuación de la recta, por ejemplo.

N Queremos advertir que esta sección no pretende ser un curso completo sobre trigonometría, sino que sólo trata de cubrir algunos aspectos indispensables para la Geometría Analítica. Dado que para las demostraciones de las identidades trigonométricas se utiliza la ecuación de la circunferencia se debe estudiar esta sección antes que el estudio de la ecuación de una recta. Si el lector está familiarizado con la trigonometría básica y con los ángulos medidos en radianes puede omitir esta sección.

3.2.1 La circunferencia unitaria

A la circunferencia de radio $r=1$, la cual tiene por ecuación $x^2+y^2=1$ se le llama *circunferencia unitaria.* En la actividad 1.3 se encontró cierta evidencia de que al dividir la longitud de la circunferencia entre el diámetro de la misma, se obtiene una constante. Puede demostrarse, por ejemplo por medio de las herramientas del cálculo diferencial, que efectivamente **tal razón es una constante universal denotada por** π (se lee “pi”). El número π es un número irracional, es decir, no es cociente de números enteros[2]. Como consecuencia de no ser racional el desarrollo decimal de π=3.1415926..., no termina nunca, ni es periódico[3]. Si l denota la longitud total de una circunferencia dada y si el diámetro de la misma se denota por $2r$ donde r es radio de la circunferencia, el que π sea constante implica que

$$\pi = \frac{l}{2r}$$

para cualquier circunferencia dada, o bien

$$l = 2\pi r.$$

[2]El número π es todavía más complicado, ya que es trascendente y el patrón de sus dígitos no se repite.

[3]De hecho, actualmente se conocen millones de dígitos de la expansión de π.

Así para la circunferencia unitaria, $r = 1$ y entonces $l = 2\pi$ es la longitud de su circunferencia.

Ahora estableceremos una correspondencia entre puntos de la circunferencia unitaria y la longitud correspondiente a partir del punto $(1,0)$ desde el cual comenzamos a medir. Denotamos por θ las longitudes de arco de circunferencia. Se establece que las longitudes positivas $\theta > 0$ se miden a partir de $(1,0)$ en sentido contrario de las manecillas del reloj y que las longitudes negativas se miden a partir de $(1,0)$ al moverse en el sentido de las manecillas del reloj.

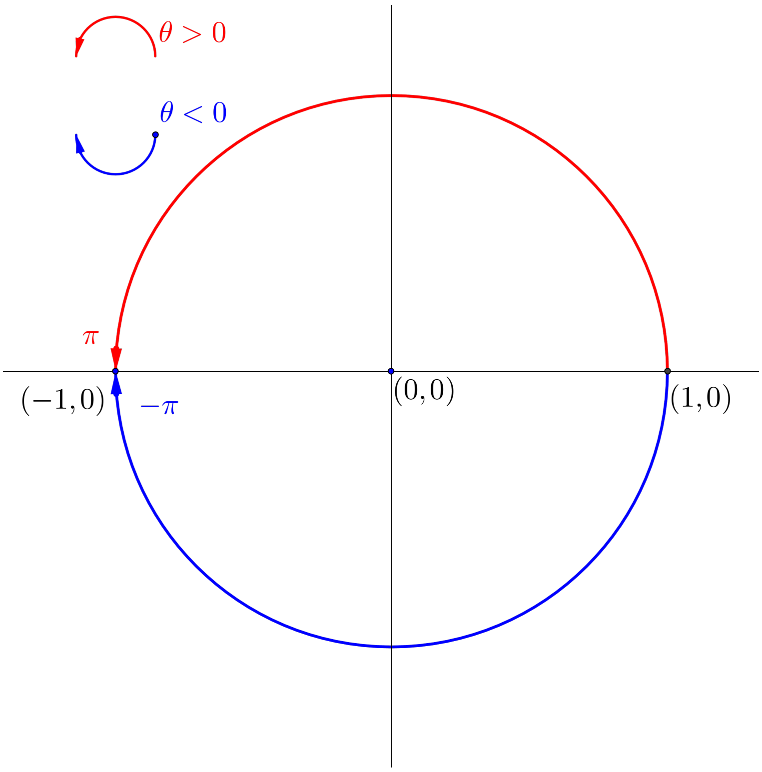


Figura 3.1: Descripción de los radianes positivos y negativos.

Al partir del punto $I = (1,0)$, cuando se llega al punto $J = (0,1)$ se habrá recorrido un cuarto de circunferencia con lo que a J le corresponde la longitud $\pi/2$. Al llegar al punto $(-1,0)$ habremos recorrido media circunferencia, por lo que a este punto le corresponde la longitud π (véase la figura 3.1). De esta misma manera al llegar al punto $(0,-1)$ habremos recorrido una circunferencia de $3/2\pi$. Al llegar al punto $(1,0)$ otra vez habremos recorrido una circunferencia completa de longitud 2π. A las unidades de longitud de arco se les llama **radianes**, por lo que al recorrer la circunferencia completa se habrán recorrido 2π radianes.

Si a partir de $(1,0)$ nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj al llegar a $(-1,0)$ habremos recorrido una distancia de $-\pi$. De esta manera moviéndonos en el sentido de las manecillas del reloj al punto $(-1,0)$ le corresponde $-\pi$, etcétera. En general para cualquier número real θ, positivo, negativo o cero le corresponde un punto sobre la circunferencia unitaria. Si se piensa la longitud θ como un segmento o una cuerda, debe pensarse que al enrollar la cuerda sobre el círculo unitario se encuentra el punto de coordenadas (x,y) al cual le corresponde a θ.

En la enseñanza elemental se miden ángulos con grados, lo cual corresponde a la división de la circunferencia en 360°. Sin embargo, esta medida no es conveniente en matemáticas superiores por varias razones. En el siguiente taller se mencionan algunas de ellas.

Ejercicio 3.4 Al estudiar ángulos es decir, un par de segmentos de recta unidos en uno de sus extremos, la abertura entre ellos se puede medir en grados, por medio de un transportador o en radianes usando el círculo unitario. Algunas comparaciones son importantes.

1. ¿Conoce medidas negativas en grados? ¿Conoce medidas en grados mayores de $360°$? ¿Conoce medidas en valores irracionales de grados, por ejemplo $\sqrt{2}^{\circ}$, es esto posible?
2. ¿Cuál es la relación entre grados y los radianes, es decir, las unidades en términos de la longitud de arco de la circunferencia unitaria? Es decir, ¿Cuántos radianes corresponden a $360°$?
3. Las funciones seno, coseno, etcétera se definen sobre triángulos, ¿tiene sentido hablar del $\operatorname{sen}(500°)$? Argumente por qué para triángulos rectángulos los valores que pueden tomar los ángulos para las funciones seno y coseno se encuentran restringidos a $0 < \theta < \pi/2$.

La discusión de esta actividad puede incluir al grupo completo. ■

Solución del ejercicio 3.4. El inciso 1) debe discutirse grupalmente. 2) A la medida de 2π radianes le corresponden $360°$.
3) La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$ por lo que **no tiene sentido hablar de funciones trigonométricas para ángulos mayores de este valor para ningunos triángulos.** □

3.2.2 Las funciones trigonométricas

Definiremos ahora las funciones trigonométricas sobre el círculo unitario. De esta forma, podremos definirlas para todos los valores reales $\theta \in \mathbb{R}$, mientras que, como se discutió en la actividad 3.4, cuando se definen sólo para triángulos rectángulos, los valores que pueden tomar los ángulos se encuentran restringidos a $0 < \theta < \pi/2$.

Definición 3.2 Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera, sea (x,y) el punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ al que le corresponde el arco de circunferencia θ. Se definen las funciones trigonométricas por medio de la fórmulas

$$\operatorname{sen}\theta = y \tag{3.4}$$
$$\cos\theta = x \tag{3.5}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \tag{3.6}$$

■ **Ejemplo 3.5** Al arco $\theta = 5\pi/4$ le corresponde el punto $(x,y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ sobre la circunferencia. Encuentre $\operatorname{sen}5\pi/4$, $\cos 5\pi/4$ y $\tan 5\pi/4$.
Solución. De acuerdo con la definición 3.2, se tiene $\cos 5\pi/4 = x = -\sqrt{2}/2$, $\operatorname{sen}5\pi/4 = y = -\sqrt{2}/2$ y, finalmente, $\tan 5\pi/4 = y/x = -\sqrt{2}/2/(-\sqrt{2}/2) = 1$. ■

Periodicidad de las funciones trigonométricas

En la forma en que hemos construido las funciones trigonométricas, puede verse que después de recorrer una vuelta completa sobre la circunferencia, las funciones vuelven a tomar los mismos valores. De esta forma, para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \tag{3.7}$$
$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta. \tag{3.8}$$

Debido a esta propiedad se dice que **las funciones trigonométricas son periódicas** de periodo 2π. Al número 2π se le conoce como **periodo** de las funciones seno y coseno.

■ **Ejemplo 3.6** Evalúe $\cos(9\pi/2)$ utilizando la periodicidad de la función coseno.

Solución. Dado que $9\pi/2 = 4\pi + 1\pi/2$ se tiene

$$\cos(9\pi/2) = \cos(4\pi + \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0.$$

Claramente, en general se tiene que $\cos(\theta + 2m\pi) = \cos\theta$ para cualquier entero m. ∎

Funciones impares y pares

Podemos ver mediante un argumento geométrico simple sobre la circunferencia unitaria que para las funciones seno y coseno se cumple que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad (3.9)$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta. \qquad (3.10)$$

Efectivamente en la siguiente figura puede observarse que $\operatorname{sen}(-\theta)$ está por debajo del eje x y por lo tanto es negativo y de magnitud igual al $\operatorname{sen}\theta$. Por otra parte se tiene que $\cos\theta$ y $\cos(-\theta)$ están del mismo lado del eje y y por lo tanto son ambos positivos y de la misma longitud. Como

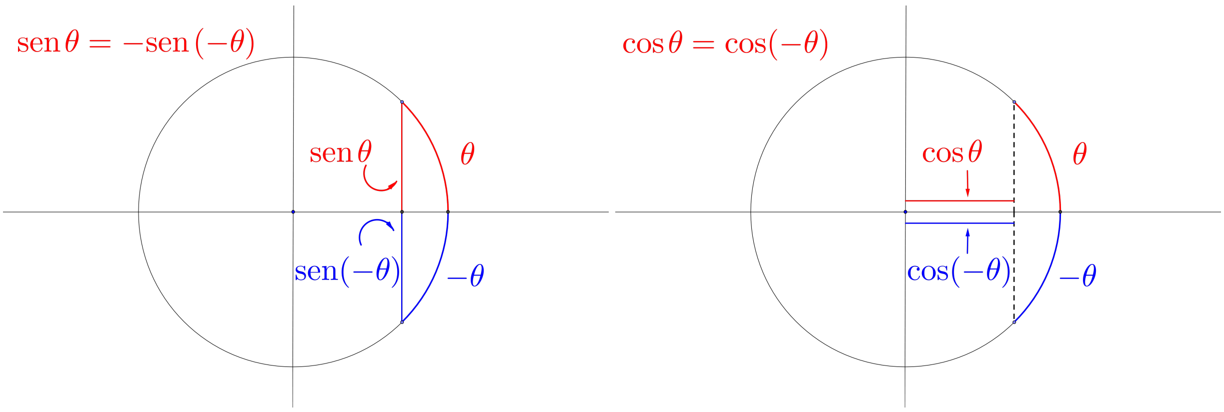


Figura 3.2: Identidades de paridad de las funciones seno y coseno.

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ se dice que **la función seno es impar**, y como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ se dice que **la función coseno es par**. Las identidades (3.9) y (3.10) se conocen como identidades de paridad de las funciones seno y coseno respectivamente y estas implican que

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta,$$

como puede fácilmente verificar el lector, lo cual quiere decir que la función tangente es impar.

Recíprocas de las funciones trigonométricas

Ahora definimos las funciones trigonométricas recíprocas.

Definición 3.3 Los inversos multiplicativos de las funciones trigonométricas definen las funciones, cosecante, secante y cotangente, respectivamente:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Para que el lector se familiarice con las funciones trigonométricas y sus recíprocas se recomienda el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.5 Al parámetro $\theta = 0$ le corresponde el punto $(x,y) = (1,0)$, a $\theta = \pi/6$, le corresponde el punto $(x,y) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ encuentre los valores de las funciones seno , coseno y tangente de estos ángulos, por medio de las definiciones 3.2 y 3.3.

Compruebe que la función cosecante es impar, la función secante par y la función cotangente impar, mediante las identidades de paridad (3.9) y (3.10). ■

Identidades trigonométricas

Al definir las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ se tiene que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, $x = \cos\theta$ y $y = \operatorname{sen}\theta$, de donde es inmediato que

$$\boxed{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1, \qquad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}.} \tag{3.11}$$

N La notación $\cos^2\theta$, recordamos, quiere decir que se eleva al cuadrado el coseno, es decir,

$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2.$$

La notación $\cos\theta^2$ quiere decir que θ se eleva al cuadrado y después se toma el coseno. **Estas notaciones no deben confundirse**.

El siguiente lema se deduce fácilmente de la identidad (3.11).

Lema 3.1 Para los valores de θ donde están definidas las funciones tangente y cotangente respectivamente, se cumplen las identidades

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{3.12}$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta. \tag{3.13}$$

Demostración. Para $\theta \neq \pm(2n+1)\pi/2$ se sabe que $\cos\theta \neq 0$ se puede entonces dividir ambos lados de la identidad (3.11) por $\cos\theta$ para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ 1 + \tan^2\theta &= \sec^2\theta, \end{aligned}$$

donde la segunda identidad se obtiene de la definición 3.3. La segunda parte se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 3.6 El siguiente ejercicio ayudara a memorizar las identidades de esta sección.

1. Demuestre la identidad (3.13).
2. Si se sabe que $\cos\theta = 0.8$ encuentre los valores de todas las demás funciones trigonométricas en θ por medio de identidades.
3. Si se sabe que θ es un ángulo agudo tal que $\tan\theta = 4$ calcule el valor de todas las demás funciones trigonométricas en ese ángulo.

Verifique los resultados de los problemas 2 y 3 por medio de una calculadora, no olvide usar el *modo radianes.* ■

3.2.3 Fórmulas de suma y diferencia de ángulos

La fórmula de distancia entre puntos es suficiente para demostrar las identidades trigonométricas para suma y diferencia de ángulos, las cuales aparecerán con frecuencia a lo largo de este libro. Primero demostramos la identidad para el coseno de una diferencia de ángulos.

Lema 3.2 Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple la identidad

$$\boxed{\cos(u-v) = \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v.} \tag{3.14}$$

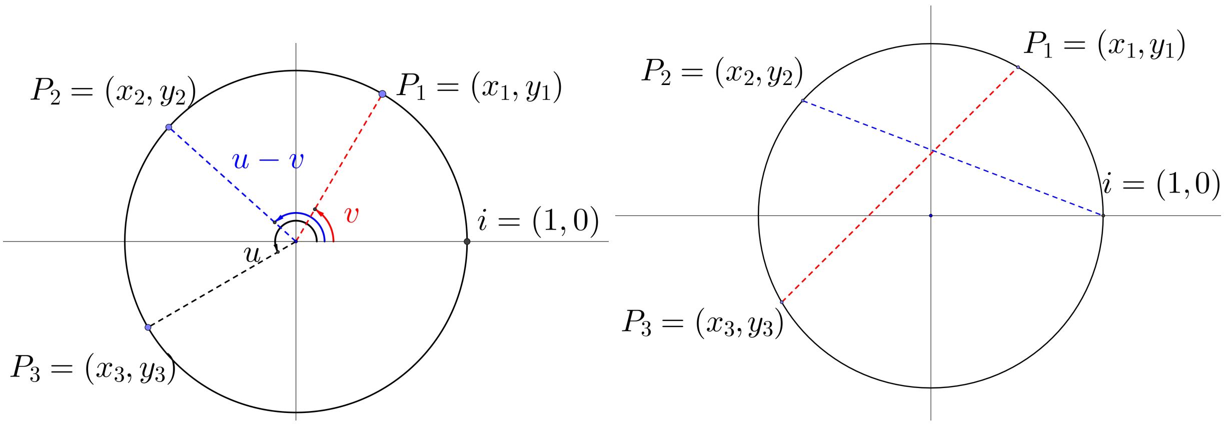


Figura 3.3: Diferencia de ángulos y arcos de circunferencia.

La siguiente demostración fue tomada del libro de Cynthia Young [15].

Demostración. Para comenzar consideramos el caso $0 < v < u < 2\pi$. Denotamos con $i = (1,0)$, el punto sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el cual se encuentra en la intersección con el semieje positivo x. Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ el punto correspondiente al arco v, sea $P_3 = (x_3, y_3)$ el punto correspondiente al arco u y sea $P_2 = (x_2, y_2)$ el arco correspondiente a $u - v$. Por construcción, el arco iP_2 es igual al arco P_1P_3, por lo tanto también se tiene que los segmentos $\overline{iP_2}$ y $\overline{P_1P_3}$ tienen la misma longitud, lo cual implica que

$$\sqrt{(x_2-1)^2 + (y_2-0)^2} = \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2}$$

Al elevar al cuadrado y simplificar se tiene

$$\begin{aligned}
x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 &= x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3 + y_1^2 \\
(x_2^2 + y_2^2) + 1 - 2x_2 &= (x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3 \\
1 + 1 - 2x_2 &= 1 + 1 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1 \\
x_2 &= x_3x_1 + y_3y_1.
\end{aligned}$$

Dado que estamos sobre la circunferencia unitaria $x_2 = \cos(u-v)$, $x_3 = \cos u$, $x_1 = \cos v$, $y_3 = \operatorname{sen} u$ y $y_1 = \operatorname{sen} v$, de donde se obtiene la identidad que se desea demostrar. ∎

Ejercicio 3.7 La fórmula para $\cos(u+v)$ puede derivarse de la fórmula (3.14) si escribimos $u + v = u - (-v)$ y se utilizan las fórmulas de paridad de las funciones trigonométricas (3.9) y (3.10):

$$\cos(u+v) = \cos(u-(-v)) = ?$$

Obtenga la fórmula

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \tag{3.15}$$

la cual es básica en trigonometría. ■

Solución. Como se indica en el ejercicio tenemos dada la fórmula (3.14) y dado que la función seno es impar

$$\begin{aligned}\cos(u+v) &= \cos(u-(-v))\\ &= \cos u\cos(-v)+\operatorname{sen} u\operatorname{sen}(-v)\\ &= \cos u\cos v-\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v.\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido la fórmula (3.15).

Cofunciones

La identidad $\cos(v-\pi/2)=\operatorname{sen} v$ implica que las gráficas de las funciones coseno y seno son idénticas si desplazamos el coseno, $\pi/2$ unidades a la derecha. La función obtenida desplazando a una función conocida cierto número de unidades se le llama *co-función*, de donde proviene la palabra "coseno".

■ **Ejemplo 3.7 — Fórmulas para co-funciones.** Muestre que la fórmula

$$\cos(v-\pi/2)=\cos(\pi/2-v)=\operatorname{sen} v,$$

es correcta. ¿Qué pasa si se desplaza la función seno $\pi/2$ unidades a la derecha?, ¿es razonable la fórmula $\operatorname{sen}(\pi/2-v)=\cos v$?

Solución. Aplicamos la fórmula (3.14) para obtener

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos v+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} v.$$

Ahora, dado que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ se obtiene

$$\cos(\pi/2-v)=\operatorname{sen} v. \tag{3.16}$$

Finalmente, dado que la función coseno es par se tiene

$$\cos(\pi/2-v)=\cos(-(v-\pi/2))=\cos(v-\pi/2).$$

Por otra parte, para la función seno tenemos

$$\operatorname{sen}(\pi/2-v)=\operatorname{sen}(-(v-\pi/2))=-\operatorname{sen}(v-\pi/2)=\cos v$$

por lo cual, se cumple la fórmula en cuestión. ■

El lector puede verificar graficando con *GeoGebra* que las identidades anteriores son verdaderas.

Actividad 3.1 El objetivo de este ejercicio es obtener la fórmula para suma y diferencia de ángulos de las funciones seno y tangente. Procederemos paso a paso.

1. De la fórmula (3.16) del ejemplo 3.7, se tiene

$$\operatorname{sen}(u+v)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(u+v)\right),$$

expanda la fórmula del lado derecho de la identidad anterior de una forma apropiada para obtener la fórmula

$$\operatorname{sen}(u+v)=\operatorname{sen} u\cos v+\operatorname{sen} v\cos u. \tag{3.17}$$

2. Encuentre una fórmula para $\operatorname{sen}(u-v)$, similar a la anterior.
3. Obtenga las fórmulas correspondientes para $\tan(u\pm v)$ dividiendo la función seno apropiada por la función coseno correspondiente.

Es muy importante que el lector llegue por sí mismo a la fórmula

$$\boxed{\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v},} \tag{3.18}$$

la cual es fundamental en estudio del ángulo entre rectas. ■

Solución de la actividad 3.1. 1) De la fórmula (3.16) se sigue fácilmente que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u+v) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(u+v)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-v\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cos v+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\operatorname{sen} v\\ &= \operatorname{sen} u\cos v+\cos u\operatorname{sen} v.\end{aligned}$$

Para la fórmula de $\sin(u-v)$ usamos la fórmula (3.17) como sigue

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u-v) &= \operatorname{sen}(u+(-v))\\ &= \operatorname{sen} u\cos(-v)+\cos u\operatorname{sen}(-v)\\ &= \operatorname{sen} u\cos v-\cos u\operatorname{sen} v,\end{aligned}$$

dado que $\cos(-v)=\cos v$ y $\operatorname{sen}(-v)=-\operatorname{sen} v$.

Para la fórmula de la tangente (3.18) tenemos

$$\begin{aligned}\tan(u-v) &= \frac{\operatorname{sen}(u-v)}{\cos(u-v)}\\ &= \frac{\operatorname{sen} u\cos v-\cos u\operatorname{sen} v}{\cos u\cos v+\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} u\cos v-\cos u\operatorname{sen} v}{\cos u\cos v}}{\frac{\cos u\cos v+\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}{\cos u\cos v}}\\ &= \frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}.\end{aligned}$$

Verifique los detalles de esta deducción. □

Fórmulas del ángulo doble

Finalmente, requeriremos también las fórmulas del ángulo doble para simplificar los cálculos para la rotación de ejes coordenados.

Lema 3.3 Para toda $u\in\mathbb{R}$ se cumplen las identidades:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2u &= 2\operatorname{sen} u\cos u, && (3.19)\\ \cos 2u &= \cos^2 u-\operatorname{sen}^2 u. && (3.20)\\ &= 2\cos^2 u-1 && (3.21)\\ &= 1-2\operatorname{sen}^2 u. && (3.22)\end{aligned}$$

Demostración. Se llega a la demostración por medio de la actividad 3.2. ■

■ **Ejemplo 3.8** Escriba $\operatorname{sen} 3x$ en términos de $\operatorname{sen} x$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x+x) \\ &= \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x \\ &= 2\operatorname{sen} x \cos^2 x + (1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x \\ &= 2\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen}^2 x) + (1-2\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x \\ &= 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x, \end{aligned}$$

donde la última línea de las igualdades anteriores se obtiene después de simplificar y cancelar términos. ■

Actividad 3.2 1) Escriba $2u = u+u$ en las fórmulas para coseno y seno de suma de ángulos y obtenga las identidades (3.19) y (3.20) del lema 3.3.
2) Compruebe las identidades (3.21) y (3.22) mediante la identidad pitagórica.
3) Del sistema

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos u &= \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

Obtenga las fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}} \tag{3.23}$$

$$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}. \tag{3.24}$$

Observe que los signos delante de las raíces cuadradas dependen del cuadrante en el que se encuentre $u/2$. ■

Solución de la actividad 3.2. 1) Con la fórmula (3.15) obtenemos la fórmula (3.20) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos(u+u) \\ &= \cos u \cos u - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} u \\ &= \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u. \end{aligned}$$

La fórmula (3.19) se deja como ejercicio.

2) Dado que $u = u/2 + u/2$ la fórmula (3.25) implica

$$\cos 2\left(\frac{u}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

Tenemos así el sistema de identidades

$$\begin{cases} 1 & = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos u & = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases}$$

sumamos las dos identidades del sistema para obtener

$$1 + \cos u = 2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right),$$

de donde resolvemos para el coseno al cuadrado para tener

$$\boxed{\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}.}$$

La fórmula (3.23) se deja como ejercicio.

3.3 Planteamiento de problemas

En esta sección incluimos ejemplos más elaborados que los hechos hasta ahora a lo largo del capítulo. Se requiere un mayor esfuerzo de parte de los estudiantes para resolverlos. *Estos problemas no serán de ninguna utilidad si el lector no trata de resolverlos por sí mismo antes de ver la solución.*

Actividad 3.3 Determine la longitud de la cuerda común a las circunferencias

$$\begin{aligned} x^2+y^2-10x-10y&=0\\ x^2+y^2+6x+2y-40&=0. \end{aligned}$$

Antes de ver la solución del ejercicio el lector debe hacer dibujos correspondientes, encontrar los centros de las circunferencias involucradas, dar argumentos analíticos del por qué se cortan las circunferencias. Posteriormente proceda como se indica:

1. ¿Qué se desea calcular? ¿Cómo puede hacerse?
2. Discuta como se puede saber si dos circunferencias se cortan sin hacer referencia a los dibujos, sino a los sistemas de ecuaciones.
3. Resuelva el sistema por suma y resta y encuentre las coordenadas de los puntos de intersección.
4. Encuentre la distancia entre los puntos, encontrado en el inciso anterior.
5. Finalmente compare sus procedimientos y resultados con los que se dan a continuación.

Haga un autoevaluación de su solución. Si sus resultados son incorrectos ¿qué fallo? ¿Se trata de errores graves o simples equivocaciones? Reflexione. ■

Solución de la actividad 3.3. Para resolver esta problema debemos encontrar los puntos de intersección de las circunferencias. Al completar cuadrados en la primera ecuación se obtiene $x^2+y^2-10x-10y=0$ si y solo si$(x-5)^2+(y-5)^2=50$, por lo que la circunferencia tiene centro en $(5,5)$ y radio $r=\sqrt{50}$. Al completar cuadrados en la segunda ecuación se tiene $x^2+y^2+6x+2y-40=0$ si y solo si$(x+3)^2+(y+1)^2=50$, de esta forma la circunferencia tiene centro en $(-3,-1)$ y radio $r=\sqrt{50}$. Notamos que la distancia entre los radios es $\sqrt{(5-(-3))^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{100}=10<2r=2\sqrt{50}$, por lo que efectivamente las circunferencias se intersecan. La gráfica de las circunferencias puede verse en la figura 3.4. Se desea calcular la distancia entre los puntos P_1 y P_2 de intersección de las dos circunferencias dadas para ello se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-10y=0\\ x^2+y^2+6x+2y-40=0. \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera para obtener

$$16x+12y=40$$

de donde $y=(40-16x)/12=-4x/3+10/3$, ya que los puntos de intersección pertenecen obviamente a ambas circunferencias se debe tener que al sustituir $y=-4x/3+10/3$, en cualquiera de ellas se debe mantener la igualdad, por ejemplo, al sustituirla en la segunda ecuación $x^2+y^2+6x+2y-40=0$ se tiene

$$\begin{aligned} x^2+(-4x/3+10/3)^2+6x+2(-4x/3+10/3)-40&=0\\ x^2+256x^2-1280x+1600+6x-80-32x-40&=0\\ 25x^2-50x-200&=0. \end{aligned}$$

De donde se obtienen dos soluciones $x=-2,4$ y de aquí las respectivas $y=6,-2$. Por lo tanto debemos encontrar la distancia entre los puntos $P_1=(-2,6)$ y $P_2=(4,-2)$. Por lo tanto $d(P_1,P_2)=\sqrt{(4-(-2))^2+(-2-6)^2}=\sqrt{100}=10$. □

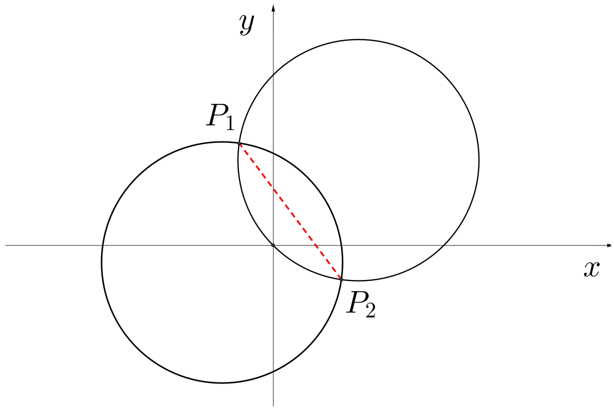


Figura 3.4: Gráfica del ejemplo 3.3.

3.3.1 Autoevaluación

El ejercicio de autoevaluación requiere de una seria autocrítica por parte del lector. Después de haber respondido los siguientes reactivos el lector debe buscar por sí mismo las respuestas y evaluarlas. Aquellos reactivos incorrectos requieren de un mayor estudio, individualizado. El lector debe ser capaz de buscar otros enfoques y más ejercicios por sí solo los cuales puedan paliar las dificultades encontradas.

1. ¿Qué puede decirse de la razón de la longitud de una circunferencia dividida por su radio?
2. Defina circunferencia.
3. ¿Por qué puede afirmarse que $\cos(-u)=\cos u$? ¿Y que relación se tiene de $\operatorname{sen}(-\theta)$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$?
4. Complete las siguientes identidades trigonométricas:
   a) $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=\cdots$
   b) $\cos 2\theta=\cdots$
   c) $\operatorname{sen} 2\theta=\cdots$
5. Explique cuáles diferencias hay entre medir los ángulos en radianes y medirlos en grados ¿puede convertir radianes a grados?

3.4 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico

1. Resuelva el ejercicio 3.2. Utilice *GeoGebra*[4] para verificar sus respuestas, **es muy importante que primero encuentre las ecuaciones a mano y sólo después use la computadora**

[4]Para una introducción a *GeoGebra* vea la sección 2.5 del capítulo 2.

para verificar sus respuestas. Para encontrar una circunferencia que pasa por dos puntos posicione el ratón sobre el recuadro círculo (ver figura 3.5). Utilice la opción “Circunferencia (centro, punto)” las ecuaciones de las figuras producidas aparecerán en el recuadro izquierdo nombrado “Vista algebraica”. Para generar una circunferencia dado el centro y radio use la opción “Circunferencia (centro, radio)” que se encuentra presionando el botón izquierdo del ratón en el ícono de la figura 3.5. Para comprobar si una ecuación determina una circunferencia, escriba la ecuación en el campo “Entrada” y después presione la tecla de “entrada”, la ecuación con los cuadrados completados aparecerá en el recuadro “Vista algebraica”.

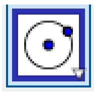


Figura 3.5: Ícono de *GeoGebra* para producir circunferencias.

2. Determine la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos
   a) el centro de la circunferencia está en el origen de coordenadas y tiene radio 2,
   b) la circunferencia pasa por $P=(2,6)$ y tiene centro en $C=(-1,2)$,
   c) el centro de la circunferencia es el punto $C=(2,-3)$ y tiene radio $r=3$.

   Soluciones. 2a) $x^2+y^2=4$. 2b) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. 2c) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$.
3. Determine la región del plano de todos los puntos que satisfacen la desigualdad $x^2+y^2+3x-3y<0$. Para comprobar su respuesta puede usar *Geogebra* escribiendo la desigualdad en el recuadro entrada y después presione la tecla de “entrada”. Verá la región sombreada. ¿Por qué aparece el círculo con una línea punteada?
4. ¿Cómo está situado el punto $P=(-2,3)$ con respecto a las siguientes circunferencias
   a) $x^2+y^2=1$.
   b) $x^2+y^2=13$
   c) $x^2+y^2=16$.

   Soluciones. 4a) Fuera de la circunferencia. 4b) Sobre de la circunferencia. 4c) Dentro de la circunferencia.
5. Utilizando la identidad pitagórica y otras identidades, calcule los valores que faltan en la siguiente tabla

Función	$\theta=\pi/4$	$\theta=\pi/6$	$\theta=\pi/6$	$\theta=-\pi/4$	$\theta=-\pi/3$	$\theta=-\pi/6$
$\operatorname{sen}\theta$	$\sqrt{2}/2$					
$\cos\theta$		$\sqrt{3}/2$				
$\tan\theta$			$\sqrt{3}$			
$\sec\theta$						
$\csc\theta$						
$\cot\theta$						

6. Utilice la tabla anterior y la fórmula para suma de ángulos para encontrar
   a) El valor de $\cos(75^\circ)=\cos(30^\circ+45^\circ)$.
   b) El valor de $\operatorname{sen}\pi/12$ si $\pi/12=\pi/3-\pi/4$.

7. Compruebe que
$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\cos x\cdot\frac{\operatorname{sen}h}{h}-\operatorname{sen}x\cdot\frac{1-\cos h}{h}$$
Esta última fórmula es muy importante en los cursos de Cálculo Diferencial.
8. a) Deduzca las fórmulas del ejercicio 3.6. b) Deduzca la fórmula (3.19). c) Obtenga la fórmula (3.23).
9. Muestre que las siguientes identidades son correctas
   a) $\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}+\cot x=\csc x$.
   b) $\operatorname{sen}x\cos^2 x-\operatorname{sen}x=-\operatorname{sen}^3 x$.
   c) $\operatorname{sen}x+\cot x\cos x=\csc x$.
10. Utilice las fórmulas del ángulo doble para resolver las ecuaciones.
   a) $2\cos x+\operatorname{sen}2x=0$.
   b) $\operatorname{sen}3x=3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3 x$.

Nivel Medio

1. Determine cuáles de las ecuaciones siguientes determinan una circunferencia, y encuentre el radio y las coordenadas del centro, cuando estos existan.
   a) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.
   b) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$.
   c) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$.

   Soluciones. 1a) circunferencia. 1b) vacío. 1c) un punto.
2. Halle la distancia mínima del punto $(6,-8)$ a la circunferencia $x^2+y^2=9$.

   Soluciones. $d=7$.
3. Cuáles líneas determinan las ecuaciones siguientes:
   a) $y=+\sqrt{5-x^2}$.
   b) $y=-\sqrt{4-x^2}$.
   c) $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$.

   Soluciones.
   3a) Semicircunferencia superior con centro en el origen y radio $\sqrt{5}$. 3b) Semicircunferencia inferior con centro en el origen y radio $r=2$. 3c) Semicircunferencia derecha con centro en $(-5,-3)$ y radio $r=7$.
4. Encuentre una fórmula para $\tan(u+v)$ procediendo como en la actividad 3.1.
5. Determine la ecuación del conjunto de puntos $P=(x,y)$ cuya razón de distancias a los puntos fijos $P_0=(x_0,y_0)$ y $P_1=(x_1,y_1)$ es a/b. Estudie los casos $a=b$ y $a\neq b$.
6. Halle la ecuación que satisfacen todos los puntos $P=(x,y)$ tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ sea igual a 6.

   Solución. Circunferencia $x^2+y^2=2$.
7. Dada una circunferencia, por ejemplo $x^2+y^2=1$, el conjunto de todos los puntos contenidos en su interior, se llama *círculo* o *disco*. Determine con argumentos matemáticos cuál de los siguientes conjuntos corresponde a un círculo: a) $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2<1\}$, b) $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2>1\}$, c) $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$. Utilice *GeoGebra* para verificar sus argumentos.
8. Utilice los resultados del ejercicio anterior para resolver las desigualdades siguientes. Realice un dibujo que represente los conjuntos solución de las desigualdades, compruebe que sus resultados son correctos con *GeoGebra*.
   a) $x^2+y^2-4x+6y\leq 0$.
   b) $x^2+y^2-6x>0$.
   c) $x^2+y^2-x+2y<0$.

   Solución. a) exterior de la circunferencia incluyéndola, b) exterior de circunferencia sin incluirla. c) Interior de circunferencia sin incluirla.

9. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas para $x \in [0, 2\pi)$.
   a) $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$.
   b) $\cos x - \sqrt{2} = -\cos x$.
   c) $3\tan^3 x - 1 = 0$.
   d) $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

   Solución.
   a) $x = \pi/6, 5\pi/6$. b) $x = \pm\pi/4$. c) $x = \pi/6, 5\pi/6$. d) $x = \pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$.

Nivel Avanzado

En los siguientes problemas use *GeoGebra* para obtener las gráficas de sus resultados.

1. Determine el ángulo formado por la intersección de las dos circunferencias $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ y $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$. **Indicación.** No se requiere las ecuaciones de las rectas tangentes, use vectores solamente.

   Solución. 1. $\pi/2$.
2. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por los puntos de intersección de las circunferencias

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25, \qquad (x-2)^2 + (y+4)^2 = 9$$

   Soluciones. $13x^2 + 13y^2 + 3x + 71y = 0$.
3. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (1,1)$, $B = (1,-1)$ y $C = (2,0)$.

   Soluciones. $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
4. Muestre que las fórmulas siguientes son correctas.
   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.
   b) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.
   c) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.
   d) $\cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

   Sugerencia. Ponga $x = u + v$, $y = u - v$, use las fórmulas de cos y sen, para suma y diferencia de ángulos y, finalmente escriba u y v en términos de x, y.

4. La línea recta

Con buenos fundamentos de trigonometría el lector no debe tener problemas para comprender la ecuación de la recta. Además de la trigonometría, para un desempeño óptimo en los contenidos de este capítulo, el lector debe poseer algunos conocimientos básicos de geometría elemental, tales como:

- Las definiciones de rectas paralelas y perpendiculares.
- Ángulos opuestos por el vértice son iguales.
- Igualdad entre sí de: ángulos alternos internos, ángulos correspondientes, etcétera.
- Por dos puntos cualquiera del plano pasa una y sólo una recta.
- Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela.
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- Definición de ángulos suplementarios y complementarios.

El profesor debe asegurarse mediante una evaluación diagnóstica cuál es el nivel de conocimientos de los estudiantes de los temas anteriores y actuar en consecuencia. Un conocimiento nulo de los temas enumerados se verá reflejado en un mínimo rendimiento de los estudiantes en muchos de los temas de esta capítulo.

4.1 Pendiente de un segmento

Consideramos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 \neq x_2$. Si el segmento $\overline{P_1P_2}$ corta al eje x, el segmento forma un ángulo agudo θ con el eje x en el semiplano donde $y \geqslant 0$. Tal ángulo agudo es el que se considera que forma el segmento con el eje x para medir. Si, partiendo del punto de intersección, el ángulo agudo está del lado derecho del eje x entonces el ángulo se considera positivo, ya que se mide hacia arriba en el sentido contrario de las manecillas del reloj como en la figura 4.1. Si el ángulo agudo está del lado izquierdo del eje x a partir del punto de intersección, entonces se considera negativo ya que se mide a partir del eje x hacia arriba en el sentido de las manecillas del reloj como en la figura 4.2. Como $x_1 \neq x_2$ se tiene que $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Si $y_1 = y_2$, entonces el segmento es paralelo al eje x y el ángulo que forman el segmento y el eje, es cero. Si el segmento no interseca al eje x, el ángulo se mide prolongando el segmento de tal manera que la prolongación intersecte el eje x, se procede entonces a medir el ángulo de la prolongación con el eje x como se indicó arriba en este párrafo.

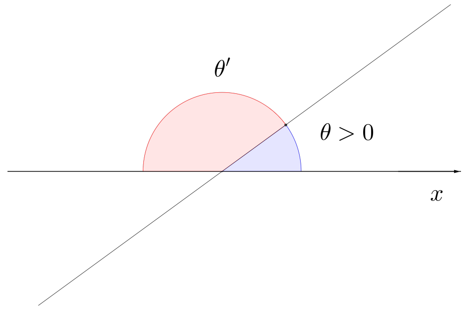


Figura 4.1: Caso 1. Medición de ángulos de segmentos de recta con el eje x. Por definición, se considera que el ángulo formado con el eje x es θ, no θ'.

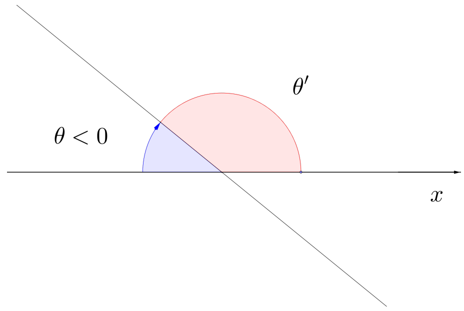


Figura 4.2: Caso 2. Medición de ángulos de segmentos de recta con el eje x. Por definición, se considera que el ángulo formado con el eje x es el ángulo agudo θ, no θ'.

Consideremos el caso en el que el segmento no corta al eje x y es tal que $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$, es decir el caso en el que el segmento que une P_1 y P_2, *no es paralelo a ninguno de los ejes.* Si prolongamos el segmento lo suficiente para que corte el eje x, tendremos por geometría elemental que la prolongación del segmento forma dos ángulos suplementarios[1] con el eje en el semiplano positivo, uno mayor que $\pi/2$ y otro menor que $\pi/2$ al cual, como se sabe, es un ángulo agudo. Este ángulo es el que se considera para definir la pendiente.

Definición 4.1 Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 \neq x_2$. Se define la **pendiente** m del segmento que une P_1 y P_2 como la tangente del ángulo agudo θ formado por el segmento con el eje x :

$$\boxed{m = \tan\theta.} \tag{4.1}$$

Lema 4.1 Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que $x_1 \neq x_2$, entonces la pendiente m de la definición 4.1 está dada por

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} \tag{4.2}$$

Demostración. Se tiene de la definición 4.1 y de las propiedades del valor absoluto que

$$|m| = |\tan\theta|.$$

[1] Ángulos suplementarios suman 180°.

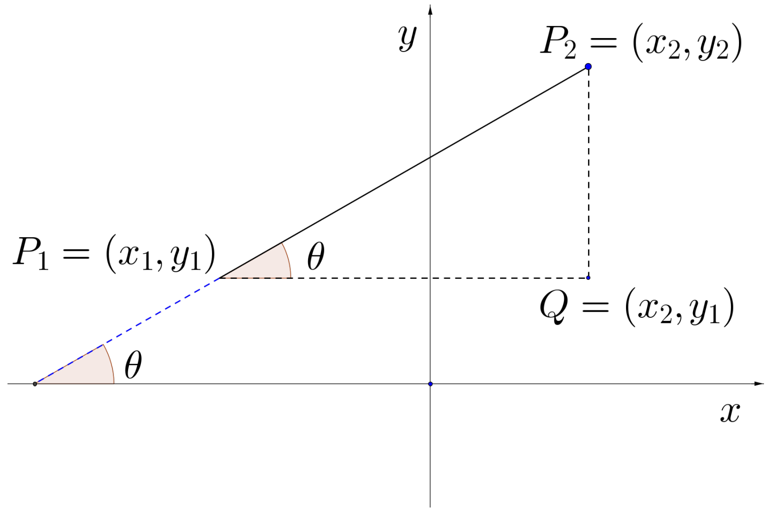


Figura 4.3: Caso $y_2 \geqslant y_1$ y $x_2 > x_1$, cálculo de la pendiente para un segmento con $\theta > 0$.

Dado que $|\tan\theta|$ puede obtenerse con los catetos del triángulo rectángulo formado por los segmentos $\overline{P_1Q}$ y $\overline{Qp_2}$ donde $Q = (x_2, y_1)$. Tenemos dada la definición de la función tangente:

$$|\tan\theta| = \frac{d(P_2, Q)}{d(Q, P_1)} = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}.$$

Ahora resta solamente analizar los diferentes casos, para quitar los signos de valor absoluto. Tenemos cuatro posibilidades:
i) **Caso** $y_2 \geqslant y_1$ **y** $x_2 > x_1$**.** Este caso corresponde a la figura 4.3 y se tiene $\theta \geqslant 0$, por lo que $\tan\theta \geqslant 0$ y por lo tanto $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, como afirma el lema.
ii) **Caso** $y_2 \geqslant y_1$ **y** $x_2 < x_1$**.** Este caso corresponde la figura 4.4 y se tiene $\theta \leqslant 0$, por lo que $\tan\theta \leqslant 0$, lo cual también se obtiene con el cociente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ya que en este caso $x_2 - x_1 < 0$.

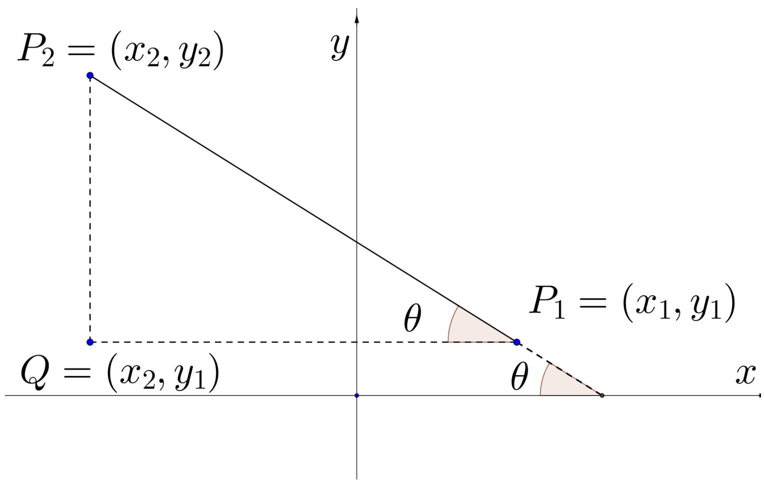


Figura 4.4: Caso $y_2 \geqslant y_1$ y $x_2 < x_1$, cálculo de la pendiente para un segmento con $\theta < 0$.

iii) **Caso** $y_2 \leqslant y_1$ **y** $x_2 > x_1$**.** Este caso se tiene $\theta \leqslant 0$, pero $y_2 - y_1 \leqslant 0$ y $x_2 - x_1 > 0$. Por lo tanto nuevamente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

iv) **Caso** $y_2 \leqslant y_1$ **y** $x_2 < x_1$**.** En este caso nuevamente $\theta \geqslant 0$, $\tan\theta \geqslant 0$ lo cual nuevamente da $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ya que si $y_2 - y_1 < 0$ y $x_2 - x_1 < 0$, y el cociente de dos números negativos es un número positivo, o bien, si $y_2 = y_1$ entonces $m = 0$, como corresponde. ■

Ejercicio 4.1 Calcule la pendiente de los segmentos PQ, QP, QR, donde $P = (1,2)$; $Q = (9,3)$ y $R = (-2,5)$. Haga una gráfica que corresponda a este ejercicio. ■

Ejercicio 4.2 Para este ejercicio el grupo debe dividirse en cuatro tipos de equipos, los equipos no deben tener más de cuatro estudiantes. Esta actividad tiene por objetivo que los estudiantes comprendan los detalles de la demostración del lema 4.1.

1. A cada equipo debe asignarse uno de los casos del lema 4.1. Los estudiantes deben dar ejemplos de coordenadas que ilustren cada caso, por ejemplo para el caso i) $P_1 = (1,1)$ y $P_2 = (3,3)$. Los estudiantes deben hacer dibujos con sus ejemplos y calcular m.
2. Los estudiantes deben mostrar grupalmente sus ejemplos.
3. Debe realizarse la siguiente discusión: ¿Qué pasa si definimos $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$? ¿Se altera el resultado o da lo mismo que calcularla con la fórmula (4.1)?

Para este taller es muy importante que se dé una discusión donde se confronten puntos de vista diferentes, si desde el principio hay algún consenso en los estudiantes el profesor puede participar disintiendo del consenso de manera deliberada, con la intención de obtener del taller los resultados más generales posibles. ■

N Es muy importante para el proceso de aprendizaje de la definición de pendiente, que el lector se dé cuenta que no importa que punto se llame P_1 y cuál P_2, el resultado será **correcto**, siempre y cuando una vez establecido cuál es cuál, se tome

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

en ese orden, **tomando primero** y_2 en el numerador y x_2 en el denominador y **no de ninguna otra forma.** Este hecho no es fácil de asimilar y algunos estudiantes tendrán una resistencia natural para aprenderlo. Se debe ser paciente cuando se detecten errores y procurar actividades de descubrimiento individualizadas, con ejemplos concretos. Debe tenerse en cuenta que sólo cuando exista disposición por parte del lector para detectar y corregir sus propios errores podrá lograrse algún avance.

Después de un análisis y discusión del lema 4.1 se puede proceder a definir la línea recta como lo haremos en la siguiente sección.

4.2 Ecuación de la línea recta

La esencia de la Geometría Analítica es, como ya hemos mencionado, asociar con una línea dada una ecuación y recíprocamente. Para encontrar la ecuación de una recta dada se parte de la siguiente definición.

Definición 4.2 — Línea recta en $\mathbb{R}^2$. Una línea recta en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos del plano tales que la pendiente m de cualesquiera dos puntos diferentes en tal conjunto es constante.

Para determinar la ecuación de una línea recta tenemos que distinguir el caso en el que el ángulo formado con el eje x es $\theta = \pi/2$ del caso en el que $\theta \neq \pi/2$. En el último caso el ángulo θ considerado, naturalmente, es el *ángulo agudo* formado por la recta con el eje x.

Caso $\theta = \pi/2$. Observe que si $\theta = \pi/2$ entonces $\tan \pi/2$ **no está definida,** por este motivo **no es posible asignarle a las rectas verticales pendiente alguna.** Sin embargo, en este caso la recta es paralela al eje y y la coordenada x de todo punto sobre la recta permanece constante, digamos, $x = c$ donde $c \in \mathbb{R}$ es un número fijo. *Tiene sentido entonces establecer la ecuación cartesiana de las rectas verticales como*

$$x = c.$$

■ **Ejemplo 4.1** La recta $x = -3$, es la recta paralela al eje y que pasa por el punto $(-3,0)$. La recta con ecuación $x = 0$ corresponde al eje y. ■

Caso $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. En esta caso existen varias posibilidades, a saber: i) Se conoce el ángulo θ formado por la recta y el eje x, o bien la pendiente m, y se conoce un punto $P_o = (x_o, y_o)$ sobre la recta. ii) Se conoce un vector paralelo a la recta y un punto $P_o = (x_o, y_o)$ sobre la recta.

i) Sea $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ el ángulo agudo que forma la recta con el eje x, entonces $m = \tan \theta$. Sea $P_o = (x_o, y_o)$ un punto dado sobre la recta. Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera sobre la recta se debe tener

$$m = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

por el lema 4.1. Tenemos entonces la ecuación

$$\boxed{y - y_o = m(x - x_o).} \tag{4.3}$$

La ecuación (4.3) se conoce como **ecuación de la recta en la forma punto pendiente.** Por otra parte, si (x_2, y_2) es un punto que satisface la ecuación (4.3) entonces se tiene que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y, por la definición 4.2 el punto pertenece a la recta.

ii) Sea $P_o = (x_o, y_o)$ un punto sobre la recta y $a = (\alpha, \beta)$ un vector paralelo a la recta. Si $P = (x, y)$ es un punto cualquiera sobre la recta debemos tener que existe un número t tal que

$$P - P_0 = ta,$$

debido a la definición de vectores paralelos. De esta manera

$$\boxed{(x, y) = (x_o, y_o) + t(\alpha, \beta),} \tag{4.4}$$

la ecuación (4.4) se conoce como **ecuación vectorial de la recta.** Al variar t sobre todo el conjunto $\mathbb{R}$ se obtiene la recta completa, es decir, la recta puede describirse como el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x_o, y_o) + t(\alpha, \beta), \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

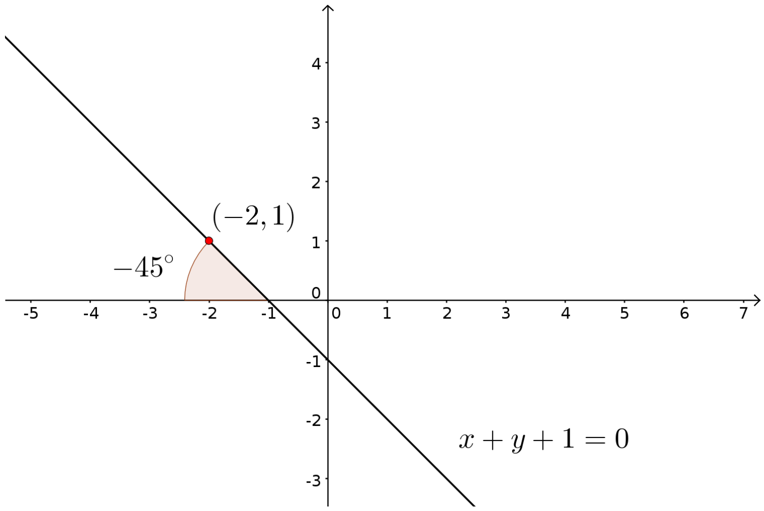
Igualando componente a componente se tienen las llamadas **ecuaciones paramétricas de la recta**

$$\begin{cases} x = x_o + t\alpha, \\ y = y_o + t\beta, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.5}$$

■ **Ejemplo 4.2** Supongamos que una recta forma un ángulo de $-45°$ con el eje x y que la recta pasa por $(-2, 1)$. Encuentre la ecuación de la recta.

Solución. Tenemos $m = \tan(-45°) = -1$. Entonces podemos usar la ecuación (4.3) para obtener

$$y - 1 = m(x - (-2)) = (-1)(x + 2)$$



o bien simplificando

$$x+y+1=0.$$

Generalmente es deseable escribir la ecuación de la recta como lo hemos hecho, es decir con todos los miembros de la ecuación del lado izquierdo y cero del lado derecho. Esta forma se conoce como **forma general de la ecuación de la recta**, como veremos más adelante en la sección 4.2.1. ■

■ **Ejemplo 4.3** Encuentre las *ecuaciones paramétricas* de la recta paralela al vector $(1,1)$ y que pasa por el punto $(-1,2)$. Encuentre también la ecuación cartesiana de la recta en la *forma general.*
Solución. Utilizamos la ecuación vectorial de la recta (4.4) para obtener

$$(x,y)=(-1,2)+t(1,1)=(-1+t,2+t)$$

de donde las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Para obtener la ecuación cartesiana se despeja t de las dos ecuaciones

$$\begin{cases} t=x+1 \\ t=y-2, \end{cases}$$

Como $t=t$ se tiene

$$x+1=y-2$$

O bien la ecuación en la forma general $x-y+3=0$. ■

Después de las consideraciones anteriores aparecen varias combinaciones posibles para calcular la ecuación de una recta. También los resultados clásicos de la geometría euclidiana pueden formularse en el lenguaje de la Geometría Analítica. Por ejemplo, el postulado de la geometría eucludiana, *por dos puntos cualesquiera pasa una y sólo una recta,* puede formularse como un teorema en el contexto de la Geometría Analítica.

Teorema 4.1 Sean $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ dos puntos cualquiera del plano, entonces existe una recta dada por la definición 4.2 y sólo una, que pasa por ellos.

Partiendo de este teorema se encuentra la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

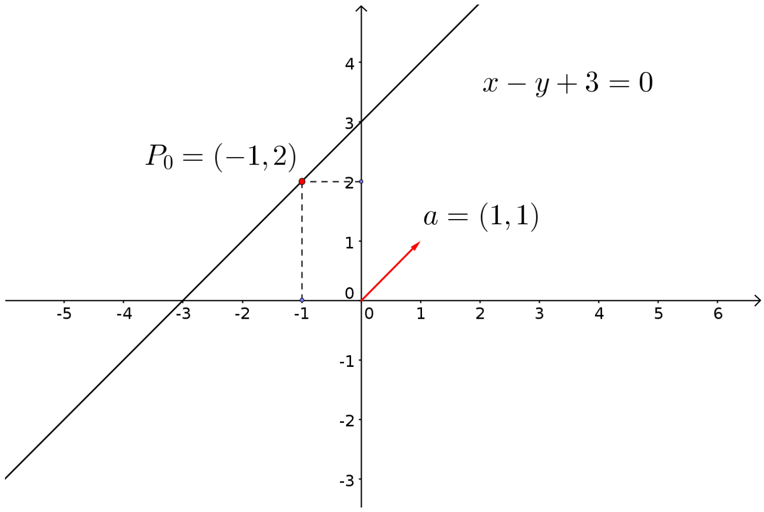


Figura 4.5: Gráfica del ejemplo 4.3

Corolario 4.1 Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ dos puntos cualquiera del plano $\mathbb{R}^2$. La *ecuación cartesiana* de la recta que pasa por P_1 y P_2 es

$$\begin{cases} y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), & \text{si } x_1 \neq x_2, \\ x = x_1, & \text{si } x_1 = x_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Demostración del Corolario 4.1. Por el teorema 4.1 existe una y sólo una recta que pasa por P_1 y P_2. Supongamos para comenzar que $x_1 \neq x_2$. Sea $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ entonces de acuerdo al caso i) de la discusión anterior, se tiene que el conjunto de puntos (x,y) que satisfacen $y - y_1 = m(x - x_1)$ están en la recta que pasa por P_1 y P_2. Los demás detalles de la demostración se dejan como ejercicio. ■

N Es claro que para la construcción del plano cartesiano se parte de una axiomática donde estén dados la existencia y unicidad de rectas que pasen por dos puntos distintos dados, en tales axiomáticas las rectas no se definen (por ejemplo, ni en la de Euclides ni en la de Birkhoff ni en un largo etcétera). Lo que estamos haciendo con el teorema 4.1, es definir recta en el contexto de la geometría cartesiana por lo cual se debe demostrar que tal objeto coincide con las rectas euclidianas, es decir, los objetos de la definición 4.2 los cuales satisfacen la ecuación (4.6), deben satisfacer los axiomas que fundamentan la geometría. De esta forma, el teorema 4.1 dice que el objeto que satisface la definición 4.2, es el mismo objeto llamado "recta" de la axiomática sin coordenadas.

Lo mismo debe decirse del teorema de Pitágoras. Es claro que para construir el plano cartesiano se parte de que se cumple el teorema de Pitágoras, por ejemplo, para calcular la distancia entre dos puntos, el teorema 2.4 es una reformulación vectorial del famoso teorema, por lo cual debe demostrarse dentro del contexto de la geometría analítica.

Una vez aclarado lo anterior, el lector avezado debe notar que no se ha incurrido en ninguna petición de principio en el enfoque del presente libro.

Ejercicio 4.3 Demuestre el teorema 4.1. **Sugerencia.** ¿Qué debería ocurrir para que no fuera cierto? Obtenga una contradicción con la definición de *pendiente*. ■

■ **Ejemplo 4.4** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -2)$ y $(3, 2)$.

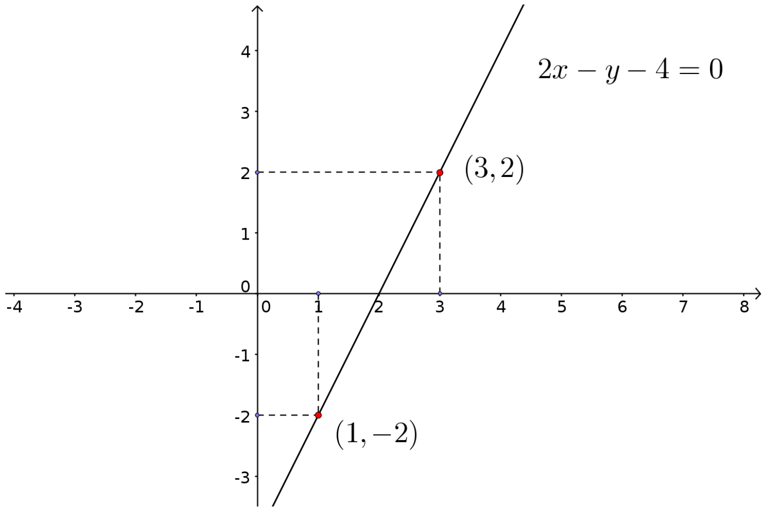


Figura 4.6: Gráfica de la recta del ejemplo 4.4

Solución. Recuerde de la discusión del tema *la pendiente entre dos puntos* que no importa cuál punto se etiquete como P_1 y cuál como P_2. Por ejemplo, sean $P_1=(3,2)$ y $P_2=(1,-2)$. Entonces

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-2}{1-3}=2.$$

Por lo tanto la ecuación de la recta dada por (4.6) es

$$y-2=2(x-3).$$

Al simplificar se tiene $2x-y-4=0$. ■

Ejercicio 4.4 Repita el ejemplo anterior poniendo $P_2=(3,2)$ y $P_1=(1,-2)$ (es decir, al revés del ejercicio anterior). Compruebe que se llega a la misma ecuación: $2x-y-4=0$. ■

Actividad 4.1 — Otras formas de la ecuación de la recta. En esta actividad exploraremos otras maneras de expresar la ecuación de la recta, las cuales pueden obtenerse fácilmente partiendo de las ya conocidas. También, utilizaremos herramientas de *Geogebra* para comprobar los resultados.

1) **Forma pendiente, ordenada al origen.** Si se conoce la pendiente m de una recta y se sabe que la recta pasa por el punto $(0,b)$, encuentre la ecuación de la recta por medio de la fórmula (4.3). Compruebe que la fórmula es

$$y=mx+b$$

llamada *ecuación de la recta en la forma pendiente, ordenada al origen*. Grafique la recta considerando un número $b\neq 0$, en abstracto. El número b se conoce como *ordenada al origen de la recta*. Encuentre la ecuación de la recta con pendiente $m=-2$ y ordenada al origen $b=-3,0,3$, Dibuje la gráfica de la recta que obtuvo. ¿Qué sucede si mantiene por ejemplo, $b=0$ y varía $m=-1,0,1,2$? Realice una animación con *GeoGebra* que ejemplifique que sucede si se mueven los parámetros m y b, manteniendo uno de ellos fijo. Escriba sus conclusiones.

2) **Ecuación simétrica de la recta.** Si una recta pasa por los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ con a y b distintos de cero, use la fórmula (4.6) para obtener la ecuación de la recta $ay=-bx+ab$.

Multiplique por términos adecuados para obtener la ecuación

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

La ecuación anterior se llama de la *ecuación simétrica de la recta*. Por medio de la ecuación $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$, grafique la recta correspondiente encontrando las intersecciones de la recta con los ejes coordenados. ■

N Es importante que el profesor tome ciertas precauciones para que la proliferación de formas diferentes de la ecuación de la recta **no abrume al lector**. Lo esencial aquí es que las diversas formas pueden aplicarse dependiendo las hipótesis del problema que se considere, pero a fin de cuentas todas pueden llevarse a la forma general. Si se desea que el lector pase de una a otra forma con fluidez deberá entonces dedicarse un tiempo considerablemente largo a actividades que lo propicien, en nuestro enfoque, esto no es uno de nuestros objetivos.

Según mi experiencia personal, se debe hacer énfasis en la ecuación vectorial de la recta, ya que esta se generaliza a dimensiones superiores, (en particular se generaliza a $\mathbb{R}^3$) mientras que la ecuación cartesiana no se generaliza a dimensiones superiores, lo cual suele confundir al lector (por ejemplo, algunos estudiantes pueden creer que en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $y=x$ representa una recta, mientras que, como es sabido, representa un plano). En los cursos de Geometría Analítica, previos al curso de cálculo, se debe dar prioridad a la ecuación de la recta en la forma general ya que no da prioridad a ninguna variable sobre la otra, lo que se hace también con las cónicas, este enfoque es preferible en un curso elemental, pero no en un curso avanzado.

Solución de la actividad 4.1. 1) De la fórmula (4.3) si ponemos $(x_0,y_0)=(0,b)$ la ecuación de la recta que pasa por $(0,b)$ y de pendiente m es

$$\begin{aligned} y-b &= m(x-0) \\ y=mx+b, \end{aligned}$$

como se deseaba comprobar.

Para realizar una gráfica en *GeoGebra* en la que se puedan mover los parámetros utilice el botón "deslizador" cuyo ícono se muestra en la figura 4.7. Después de oprimir el botón izquierdo

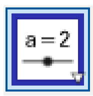


Figura 4.7: Ícono "deslizador" de *GeoGebra*.

del ratón sobre el botón "deslizador" presione el botón izquierdo doblemente sobre la pantalla, aparecerá el recuadro mostrado en la figura 4.8 Escriba la letra "m" en el recuadro "Nombre" y enseguida oprima "OK" se generará un deslizador en la pantalla con la letra "m". Genere de la misma manera un deslizador con la letra " b". Finalmente escriba en el recuadro "Entrada" la ecuación $y=mx+b$ y presione la tecla "entrada" del tablero. Moviendo el deslizador al valor $m=-2$ y $b=3$ se generará una gráfica como la de la figura 4.9 Ahora mueva los deslizadores y registre sus observaciones.
2) Con la fórmula (4.6), poniendo $P_2=(a,0)$ y $P_1=(0,b)$ obtenemos

$$\begin{aligned} y-0=\frac{0-b}{a-0}(x-a) \\ &\iff ay=-bx+ab \\ &\iff bx+ay=ab. \end{aligned}$$

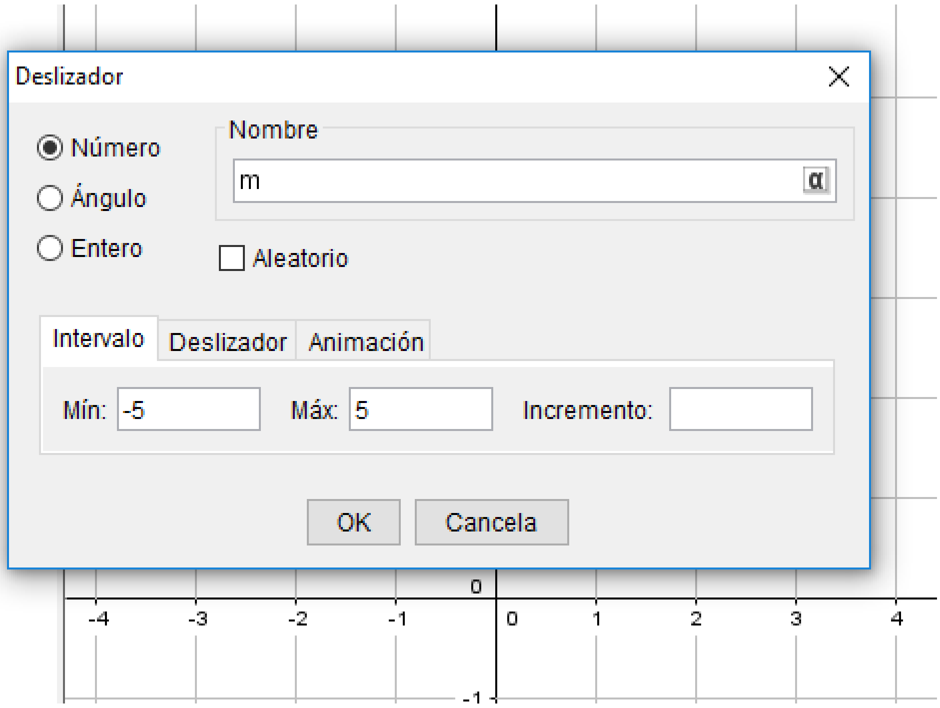


Figura 4.8: Pantalla para deslizadores de *GeoGebra*.

Al dividir ambos miembros de la última ecuación por ab se obtiene la ecuación simétrica de la recta. $\square$

4.2.1 Ecuación de la recta en la forma general

En esta parte estableceremos la correspondencia entre rectas y una *ecuación lineal* llamada ecuación de la recta en la forma general.

Teorema 4.2 La ecuación

$$Dx + Ey + F = 0 \tag{4.7}$$

corresponde a una recta en el plano $\mathbb{R}^2$ si: o bien $D \neq 0$, o bien $E \neq 0$, o bien ambos coeficientes D y E son distintos de cero. Recíprocamente, una recta en el plano $\mathbb{R}^2$ tiene una ecuación de la forma (4.7) donde al menos uno de los coeficientes D o E es distinto de cero.

Demostración. Si $E = 0$, entonces $D \neq 0$ y podemos dividir ambos miembros de la ecuación $Dx = -F$ por D, para obtener $x = -F/D$, pero $-F/D = c$ es una constante y por lo tanto la ecuación corresponde a una recta vertical de acuerdo la definición 4.2 ya que cualesquiera dos puntos sobre ella forman un ángulo de $90°$ con el eje x. Recíprocamente una recta vertical tiene por ecuación $x = c$, lo cual corresponde a la ecuación (4.7) con $D = 1$, $E = 0$ y $F = -c$.

Si $E \neq 0$, pero $D = 0$ un análisis similar al del párrafo anterior indica que $y = -F/E = c$, lo cual corresponde a una recta horizontal ya que cualesquiera dos puntos sobre ella forman un ángulo de cero grados con el eje x. Recíprocamente, una recta horizontal tiene por ecuación $y = c$, lo cual se sigue inmediatamente de la ecuación (4.3). La ecuación $y = c$ es de la forma (4.7), claramente, con $D = 0$, $E = 1$ y $F = -c$.

Finalmente, si $D \neq 0$ y $E \neq 0$ se tiene $y = -E/Dx - F/D$, lo cual corresponde a una recta con pendiente $m = -E/D$ y ordenada al origen $b = -F/D$, de acuerdo a la actividad 4.1. Recíprocamente, al tomar dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ sobre una recta que no sea vertical ni horizontal

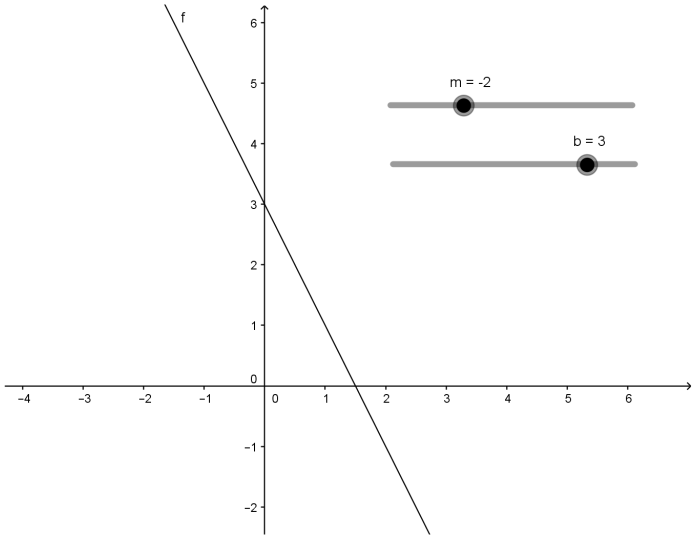


Figura 4.9: Pantalla con deslizadores y recta de la actividad 4.1.

se tiene que cualquier punto (x,y) sobre la recta, satisface la ecuación $y-y_1 = m(x-x_1)$ donde $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ de donde $mx-y+(y_1-mx_1) = 0$ es de la forma de la ecuación (4.7) con $D = m \neq 0$, $E = -1$ y $F = y_1 - mx_1$. ■

■ **Ejemplo 4.5** Dibuje la gráfica de la línea correspondiente a la ecuación

$$3x+2y-1 = 0.$$

Solución. De acuerdo al teorema 4.2 la ecuación $3x+2y-1 = 0$ corresponde a una línea recta en el plano $\mathbb{R}^2$. Para graficarla basta encontrar dos puntos sobre la recta, ya que dos puntos determinan de manera única una recta. Si hacemos $x = 0$ en la ecuación $3x+2y-1 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 2y &= 1 \\ y &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo tanto el punto $(0,1/2)$ está sobre la recta. Si ahora hacemos $y = 0$ y despejamos x en la ecuación $3x+2y-1 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

por lo tanto el punto $(1/3,0)$ está sobre la recta. La gráfica se muestra en la figura 4.10. ■

4.2.2 Posiciones relativas entre rectas

En esta sección estudiaremos el paralelismo y ortogonalidad entre rectas. Serán importantes tanto la ecuación general como la ecuación vectorial de la recta. comenzamos con una definición.

Definición 4.3 Para rectas no paralelas al eje y, se entiende por el *ángulo que forman con el eje x*, el ángulo águlo *agudo* que forman con este eje que queda del lado derecho del punto de intersección de la recta con el eje. El ángulo se considera positivo si está en el semiplano con $y > 0$ y se considera negativo en caso contrario. Los ángulos positivos se miden en sentido

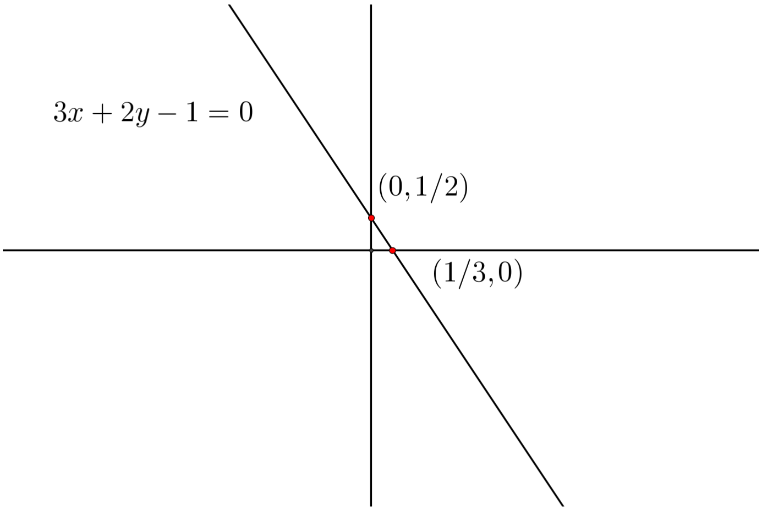


Figura 4.10: Figura correspondiente al ejemplo 4.5.

contrareloj y los negativos en sentido contrario. Rectas paralelas al eje x, por definición forman un ángulo de cero radianes. Las rectas paralelas al eje y, forman un ángulo de $\pi/2$ radianes. Los ángulos siempre se miden a partir del eje x en sentido positivo o negativo que les corresponda. De esta forma, si θ es el ángulo de una recta con el eje x, entonces $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$.

Dos rectas son paralelas si y sólo si forman el mismo ángulo con el eje x.

N Ángulos opuestos por el vertice por supuesto tienen la misma medida y se les asigna el mismo sentido extendiendo la definición 4.3 en caso necesario.

Lema 4.2 Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Demostración. Dos rectas diferentes son paralelas si y sólo si forman el mismo ángulo θ con el eje x, lo cual ocurre si y sólo si tienen la misma pendiente $m = \tan\theta$, dado que definimos la pendiente de las rectas para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ y en este intervalo la función tangente es inyectiva. ■

N En varios enfoques a las rectas paralelas al eje y se les asigna la pendiente $m = \infty$. Esto tiene sentido si se asigna a la tangente el valor $\tan(\pi/2) = \infty$. Una vez establecido esto, se puede formular el lema 4.2 de la forma "Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente". Sin embargo la discusión del porqué se escoge tal valor de la tangente y no $\tan(\pi/2) = -\infty$ requiere cierto cuidado, por lo que preferimos mantener el enfoque elemental, es decir, mantenemos un enfoque sin tratar el símbolo $\pm\infty$ como si fuera un número real.

Lema 4.3 Dos rectas son paralelas si y sólo si, sus vectores de dirección son paralelos.

Demostración. Dadas dos rectas $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) : (x,y) = P_1 + ta_1, t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(x,y) : (x,y) = P_2 + sa_2, s \in \mathbb{R}\}$ las rectas son paralelas si y sólo si forman el mismo ángulo θ con el eje x. El ángulo de $\mathscr{R}_1$ con el eje x está dado por la fórmula $\cos\theta = \dfrac{a_1 \cdot i}{\|a_1\|}$ donde $i = (1,0)$ es el vector unitario en la dirección del eje x. Por otra parte si a_1 y a_2 son paralelos, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 = \beta a_2$.

Supongamos primero que $\beta > 0$. Se tiene entonces que

$$\frac{a_2 \cdot i}{\|a_2\|} = \frac{\frac{1}{\beta} a_1 \cdot i}{\left\| \frac{1}{\beta} a_1 \right\|} = \frac{a_1 \cdot i}{\|a_1\|} = \cos\theta.$$

Por lo tanto las rectas forman el mismo ángulo con el eje x. La parte que falta de este lema: $\beta < 0$ y $\beta = 0$ se deja como ejercicio. ■

Recordamos que el ángulo θ entre dos vectores a, b está dado por la fórmula $a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos\theta$ y así dos vectores son perpendiculares si $\theta = \pi/2$ y en tal caso $a \cdot b = 0$ (ver también teorema 2.3). Para la perpendicularidad u ortogonalidad de dos rectas se tiene de manera natural la siguiente definición.

Definición 4.4 Dos rectas $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) : (x,y) = P_1 + ta_1, t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(x,y) : (x,y) = P_2 + sa_2, s \in \mathbb{R}\}$ son **ortogonales o perpendiculares** si y solo si$a_1 \cdot a_2 = 0$.

N Observe que dos rectas son perpendiculares si el ángulo formado por sus vectores de dirección a_1 y a_2 es $\pi/2$.

■ **Ejemplo 4.6** Determine si las rectas $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) : (x,y) = (3,-1) + t(1,1), t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{R}_2 = \{(x,y) : (x,y) = s(-1,1), s \in \mathbb{R}\}$ son perpendiculares.
Solución. Los vectores de dirección de $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ son $a_1 = (1,1)$ y $a_2 = (-1,1)$ respectivamente. Se cumple entonces que

$$a_1 \cdot a_2 = (1,1) \cdot (-1,1) = -1 + 1 = 0.$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares. ■

Cuando está definida la pendiente de las rectas (es decir, cuando ninguna de las rectas es vertical) la ortogonalidad queda caracterizada por el siguiente lema.

Lema 4.4 Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a menos uno.

Demostración. Sean $y = m_1 x + b_1$ y $y = m_2 x + b_2$ dos rectas. Estas rectas tienen ecuaciones vectoriales $(x,y) = (0,b_1) + t(m_1,1)$, $t \in \mathbb{R}$ y $(x,y) = (0,b_2) + s(m_2,1)$, $s \in \mathbb{R}$, como puede comprobar el lector. El ángulo entre las rectas está dado por el producto punto:

$$(m_1,1) \cdot (m_2,1) = m_1 m_2 + 1$$

por lo tanto las rectas son perpendiculares si y solo si$(m_1,1) \cdot (m_2,1) = 0$ lo cual ocurre si y sólo si, $m_1 m_2 = -1$, que es lo que se quería demostrar. ■

■ **Ejemplo 4.7** Muestre que las rectas $3x - 2y + 5 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$ son perpendiculares.
Solución. Ponemos las ecuaciones de las rectas en la forma pendiente, ordenada al origen, de donde se obtienen las ecuaciones $y = 3/2x + 5/2$ y $y = -2/3x + 1/3$, respectivamente. De aquí, el producto de las pandientes de las rectas es $(3/2)(-2/3) = -1$. Por lo tanto, por el lema 4.4, las rectas son perpendiculares. ■

Algunos detalles de la demostración así como la deducción trigonométrica del lema 4.4 se trabajan en el siguiente taller.

Actividad 4.2 Algunos detalles de la demostración así como la demostración trigonométrica del lema 4.4 se trabajan en el siguiente taller.

1. Argumente porqué una ecuación vectorial de la recta $y = mx + b$, es
$$(x,y) = (0,b) + t(m,1), \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. De la fórmula
$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v},$$
encuentre la identidad trigonométrica para $\cot(u - v)$.
3. Compruebe por medio de la identidad que obtenida en el ejercicio anterior que dos rectas son ortogonales si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

La discusión de lo obtenido en estas actividades debe incluir a todo el grupo. ■

Solución de la actividad 4.2. 1) Dada la ecuación $y = mx + b$, tomamos $x = 0$, lo cual da $y = b$ así, un punto sobre la recta es $(0,b)$. Necesitamos un vector de dirección de la recta, para este fin encontramos otro punto sobre la recta, por ejemplo con $x = 1$, $y = m + b$ de esta manera $P_1 = (1, m + b)$ es otro punto sobre la recta. Entonces un vector de dirección de la recta es
$$a = P_1 - P_0 = (1, m + b) - (0,b) = (1,m).$$
Por lo tanto una ecuación vectorial de la recta $y = mx + b$ es
$$(x,y) = P_0 + ta = (0,b) + t(m,1), \qquad t \in \mathbb{R}$$
como se deseaba mostrar.
2) Por definición
$$\operatorname{cotan}(u - v) = \frac{1}{\tan(u - v)} = \frac{1 + \tan u \tan v}{\tan u - \tan v}.$$
3) Por la identidad anterior si $u - v = \pi/2$ entonces $\operatorname{cotan}(u - v) = 0$ lo cual ocurre si y sólo si $1 + \tan u \tan v = 0$, pero $\tan u = m_1$ y $\tan v = m_2$ de donde dos rectas son ortogonales si y solo si$m_1 m_2 = -1$. □

4.2.3 Normal a una recta en $\mathbb{R}^2$ y ángulo entre rectas

Consideramos una recta $Dx + Ey + F = 0$ y un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ sobre ella, entonces las coordenadas de P_0 satisfacen la ecuación $Dx_0 + Ey_0 + F = 0$, al restar las ecuaciones obtenemos
$$D(x - x_0) + E(y - y_0) = 0.$$
Notamos primero que la ecuación anterior implica que el vector $(x - x_0, y - y_0)$ es ortogonal al vector (D,E). Si además recordamos que el vector $(x - x_0, y - y_0)$ es paralelo a la recta resulta que el vector (D,E) es ortogonal a todo vector paralelo a la recta, por lo que se le llama vector normal a la recta. Tiene entonces sentido la siguiente definición.

Definición 4.5 Sean $Dx + Ey + F = 0$ y $D'x + E'y + F' = 0$ las ecuaciones de dos rectas en $\mathbb{R}^2$. Se define el ángulo θ entre las rectas, como el ángulo entre sus normales, es decir,
$$\cos\theta = \frac{(D,E) \cdot (D',E')}{\sqrt{D^2 + E^2}\sqrt{(D')^2 + (E')^2}}. \tag{4.8}$$

Recordamos que las ecuaciones $Dx+Ey+F=0$ y $D'x+E'y+F'=0$ corresponden a dos rectas si y solo si$D^2+E^2\neq 0$ y $(D')^2+(E')^2\neq 0$.

■ **Ejemplo 4.8** Calcule el ángulo entre las rectas $4x-9y+11=0$ y $3x+2y-7=0$.
Solución. La recta $4x-9y+11=0$ tiene normal $(4,-9)$ y la recta $3x+2y-7=0$ tiene normal $(3,2)$, por lo tanto el ángulo entre las rectas es

$$\cos\theta=\frac{(4,-9)\cdot(3,2)}{\sqrt{4^2+(-9)^2}\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{12-18}{\sqrt{(97)(13)}}=\frac{-6}{\sqrt{1261}}$$

al tomar coseno inverso se tiene $\theta=-99.7275°$ véase la figura 4.11. ■

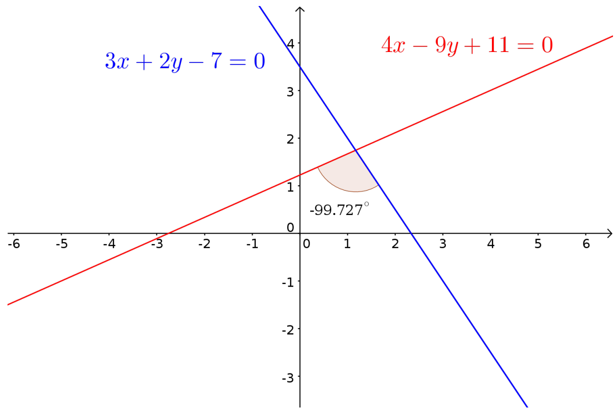


Figura 4.11: Figura correspondiente al ejemplo 4.8.

Actividad 4.3 — Fórmula clásica del ángulo entre rectas. Utilice la fórmula para la tangente de una diferencia de ángulos para determinar el ángulo entre rectas conocidas sus pendientes. ■

Solución de la actividad 4.3. Sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos rectas dadas por las ecuaciones $y=m_1x+b_1$ y $y=m_2x+b_2$, respectivamente. Sean v, u los ángulos que forman las rectas $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ con el eje x respectivamente. Entonces el ángulo entre las rectas es $\theta=u-v$. Por la fórmula para la tangente de una diferencia de ángulos se tiene

$$\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v},$$

Pero $\tan u=m_1$ y $\tan v=m_2$ de esta forma se tiene

$$\tan\theta=\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}$$
$$=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$
$$\iff \qquad \theta=\arctan\left(\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right). \tag{4.9}$$

La fórmula 4.9 es la fórmula clásica para el ángulo entre rectas

$$\boxed{\theta=\arctan\left(\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right).}$$

Sin embargo se requiere cuidado para determinar si el ángulo θ así definido es el mismo de la definición 4.5, o su suplementario. □

4.2.4 Teoremas geométricos

Algunos teoremas puramente geométricos pueden demostrarse fácilmente por medio de la Geometría Analítica, por ejemplo:

Teorema 4.3 Dos rectas no paralelas en el plano $\mathbb{R}^2$ se intersecan en un y solamente en un punto.

Demostración. La demostración de este teorema dentro del contexto de la Geometría Analítica, es decir, utilizando la definición 4.2 y mediante las herramientas de la teoría de conjuntos, puede resultar excesiva para estudiantes novicios y queda como un ejercicio para quienes pudieran estar interesados. (Véase la sección de ejercicios si requiere indicaciones para la demostración). ■

Este teorema es equivalente a la parte a) del siguiente teorema, lo cual da uno de los resultados fuertes de la relación entre el álgebra y la Geometría Analítica, nos referimos a la interpretación geométrica de la solución de sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.4 El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2, \end{cases} \tag{4.10}$$

a) no tiene solución si y sólo si, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ y no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 = kc_2 = k(a_{21}x + a_{22}y)$,
b) tiene infinitas soluciones si y sólo si, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 = kc_2 = k(a_{21}x + a_{22}y)$.
c) tiene solución única si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, en esta caso la solución está dada por

$$x = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{4.11}$$

$$y = \frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{4.12}$$

Demostración. a) Supongamos que a_{12} y a_{22} son distintas de cero (el caso igual a cero se estudia en la actividad 4.4) . Podemos escribir entonces

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{c_1}{a_{12}}, \tag{4.13}$$

y

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{c_2}{a_{22}}. \tag{4.14}$$

entonces las rectas son paralelas si y sólo si, tienen pendientes iguales, es decir, las rectas son paralelas si y sólo si

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

es decir, son paralelas si y solo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Claramente, si las rectas son paralelas y no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 = kc_2$ no existe ningún punto $(x, y) \in \mathbb{R}$ que pertenezca al mismo tiempo a ambas rectas, por definición de rectas paralelas, y por lo tanto el sistema (4.10) no tiene solución. b) Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 = kc_2$, entonces las dos rectas son una sola recta ya que una ecuación es múltiplo de la otra, en este caso todos los puntos sobre la recta son solución del sistema (4.10) y recíprocamente. c) Por otra parte, si las rectas no son paralelas entonces $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ y entonces el sistema (4.10) tiene solución única, como veremos. Si restamos (4.14) de (4.13) y despejamos x (lo cual puede hacerse ya que estamos suponiendo que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$) se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\right)x &= \frac{c_1}{a_{12}} - \frac{c_2}{a_{22}} \\ \iff \quad \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{12}a_{22}}x &= \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{12}a_{22}} \\ \iff \quad x &= \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Si sustituimos el valor obtenido de x en (4.13) o en (4.14) se obtiene

$$y = \frac{a_{11}c_2 - a_{21}c_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{4.16}$$

De esta manera como las rectas no son paralelas se obtiene una solución única dada por las fórmulas (4.15) y (4.16) y recíprocamente. ■

N La solución anterior se puede poner en términos de determinantes para los estudiantes que los conocen y constituye lo que se denomina la regla de Cramer (ver el capítulo 1). Los determinantes se introducen en este libro enseguida.

Notación 4.1. *A un arreglo rectangular de números*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

se le llama **matriz***, el tamaño de la matriz es el número de renglones por el número de columnas, en este ejemplo se trata de una matriz de 2×2. El número*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{4.18}$$

se conoce como determinante de la matriz A y se denota por $\det A$ *o bien $|A|$. El sistema (4.10) tiene asociada una matriz A, en tal caso el determinante (4.18) se llama* **determinante del sistema.**

Con la notación anterior, la solución del sistema (4.10) está dada por la llamada **regla de Cramer**.

Teorema 4.5 — Regla de Cramer. Si el determinante (4.18) es diferente de cero, entonces el sistema (4.10) tiene solución única dada por (4.15) y (4.16), lo cual puede escribirse como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4.19}$$

■ **Ejemplo 4.9** Encuentre la intersección de las rectas

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0, \\ -7x + 5y - 1 = 0. \end{cases}$$

Solución. Escribimos las ecuaciones en la forma

$$\begin{cases} 5x-2y=-3, \\ -7x+5y=1 \end{cases}$$

y procedemos a utilizar la regla de Cramer (4.5) para obtener

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}}=-\frac{13}{11}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}}=-\frac{16}{11}$$

lo cual da las coordenadas del punto de intersección de las rectas (ver figura 4.12). ■

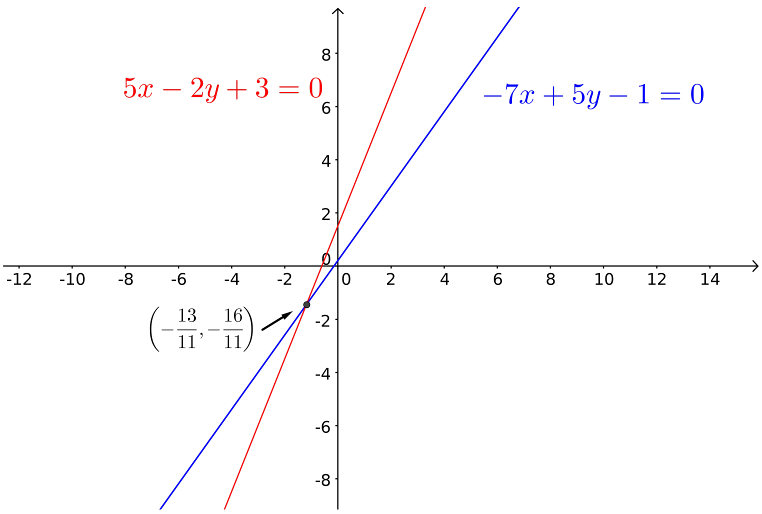


Figura 4.12: Figura correspondiente al ejemplo 4.9.

Actividad 4.4 Estudie el teorema 4.4 en los casos a) $a_{12}=0$ y $a_{22}=0$, b) $a_{12}=0$ y $a_{22}\neq 0$. ¿Cuáles serían las fórmulas a las que se llega para x y y? Esta actividad puede realizarse con equipos de dos personas. ■

Solución de la actividad 4.4. a) Si $a_{12}=0$ y $a_{22}=0$ entonces se tienen las rectas $a_{11}x=c_1$ y $a_{21}x=c_2$ las cuales son ambas paralelas al eje y y, por lo tanto, paralelas entre sí. Las rectas son una misma recta si $c_1=kc_2=ka_{21}x$ en este caso todos los puntos sobre la recta son soluciones del sistema. Si las rectas son distintas como son paralelas, el sistema no tiene solución. Claramente si $a_{12}=0$ y $a_{22}=0$, entonces $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$

b) Supongamos que $a_{12}=0$ y $a_{22}\neq 0$ en el teorema 4.4. Se tiene entonces el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x \qquad\quad = c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=c_2, \end{cases} \tag{4.20}$$

Si $0=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}$ entonces, $a_{11}=0$ lo cual por congruencia lleva a que necesariamente $c_1=0$. Por lo tanto se tiene sólo la recta $a_{21}x+a_{22}y=c_2$ y con $k=0$ se tiene $c_1=kc_2$. Si $0\neq a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}$ entonces por la regla de Cramer el sistema tiene solución única y en el caso $a_{12}=0$ y $a_{22}\neq 0$ se tiene $x=\dfrac{c_1}{a_{11}}$ y $y=\dfrac{a_{11}c_2-a_{21}c_1}{a_{11}a_{22}}$, con lo cual quedan determinadas las fórmulas buscadas. □

Ejercicio 4.5 Determine si las siguientes rectas se intersecan. De ser así, encuentre las coordenadas del punto de intersección.

1. Las rectas $y-2x+1=0$, y la recta $(x,y)=(3,2)+s(1,1)$, $s\in\mathbb{R}$.
2. $4x-3y=5$ y la recta $x=2$.
3. $(x,y)=(3,2)+t(0,1)$ $t\in\mathbb{R}$ y la recta $(x,y)=(1,1)+s(0,1)$ $s\in\mathbb{R}$.

Note que la regla de Cramer **no siempre** es el método más sencillo para determinar la intersección entre rectas. ∎

4.3 Planteamiento de problemas

En esta sección plantearemos y resolveremos problemas de mayor dificultad a los que aparecen como ejemplos a lo largo del capítulo. Recordamos que estos problemas sólo serán de utilidad si los estudiantes intentan resolverlos por sí mismos antes de consultar la solución que se da después de las actividades grupales correspondientes a cada problema.

Distancia de un punto a una recta

Sea $P_0=(x_0,y_0)$ un punto fuera de la recta $Dx+Ey+F=0$. Se desea encontrar una fórmula para la longitud del segmento formado por P_0 y el punto de intersección P_l de la perpendicular bajada desde P_0 a la recta considerada.

Actividad 4.5 Deben plantearse al lector las siguientes preguntas: ¿Cómo se puede construir una perpendicular a una recta dada que pase por un punto dado? ¿Tiene sentido llamar a la distancia entre P_0 y P_l *distancia entre la recta* $Dx+Ey+F=0$ *y* P_0? ¿Por qué?

Para calcular la fórmula que se desea, pueden realizarse las siguientes actividades:

1. Encuentre la pendiente de una recta perpendicular a $Dx+Ey+F=0$.
2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P_0 y tiene por pendiente la calculada en el problema anterior.
3. Encuentre la intersección de la recta del inciso anterior y la recta $Dx+Ey+F=0$ denotemos este punto por P_l.
4. Calcule la distancia entre P_0 y P_l. Esta distancia es la fórmula buscada.

En la solución del problema se da un método diferente al empleado en esta actividad, pero debe llegarse a la misma fórmula. ∎

Existen mucha formas de resolver este problema. Daremos una solución vectorial que es diferente a la dada por la actividad 4.5, pero además el problema puede resolverse utilizando la proyección ortogonal vista en la actividad 2.10, pero no es necesario que el lector recuerde a cabalidad lo allí realizado.

Solución de la actividad 4.5. Sabemos que un vector perpendicular a la recta $Dx+Ey+F=0$ es (D,E). Por lo que la ecuación vectorial de la recta que pasa por $P_0=(x_0,y_0)$ es

$$(x,y)=(x_0,y_0)+t(D,E),\quad t\in\mathbb{R}$$

Para encontrar la intersección de esta recta con la recta $Dx+Ey+F=0$ basta encontrar t_0 que satisfaga (¿por qué?) la ecuación

$$D(x_0+t_0D)+E(y_0+t_0E)+F=0$$

de donde se obtiene t_0:

$$t_0=\frac{-Dx_0-Ey_0-F}{D^2+E^2}$$

El punto P_l sobre la recta $Dx+Ey+F=0$ que está en la intersección con la perpendicular que pasa por P_0 tiene coordenadas $P_l=(x_0,y_0)+t_0(D,E)$ por lo que la distancia entre P_0 y P_l es simplemente

$$\begin{aligned} d(P_0,P_l) = \|t_0(D,E)\| &= \left\| \frac{-Dx_0-Ey_0-F}{D^2+E^2}(D,E) \right\| \\ &= \frac{|-Dx_0-Ey_0-F|}{D^2+E^2}\sqrt{D^2+E^2} \\ &= \frac{|Dx_0+Ey_0+F|}{\sqrt{D^2+E^2}}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

La fórmula (4.21) se conoce como **fórmula de la distancia de un punto $P_0=(x_0,y_0)$ a la recta** $Dx+Ey+F=0$. □

N Para los lectores que no tengan buenos fundamentos de geometría euclidiana es imprescindible que se convenzan de que siempre puede construirse una perpendicular a una recta dada. Una actividad que propicia que se asimile este saber, consiste en dibujar en papel transparente una recta y un punto, y por medio de un doblez del papel construir la perpendicular. Realice dicha actividad si trabaja con estudiantes sin fundamentos sólidos en geometría . Proponga que los estudiantes enuncien como un teorema la existencia de una perpendicular a una recta que pasa por un punto dado. Realice una actividad don los estudiantes comparen entre ellos mismos los diversos métodos y resultados que hayan obtenido.

Ejercicio 4.6 Compruebe que la fórmula (4.21) es realmente la distancia más corta de P_0 a cualquier otro punto de la recta dada. Note que se requieren solamente argumentos que utilicen teoremas de triángulos. ■

■ **Ejemplo 4.10** Calcule la distancia del punto $(-1,2)$ a la recta $3x+2y=7$.
Solución. Mediante la fórmula (4.21) se tiene que la distancia del punto a la recta está dada por

$$\frac{|3(-1)+2(2)-7|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Se debe tener cuidado en que la ecuación de la recta esté escrita en la forma $Dx+Ey+F=0$, es decir se debe escribir la ecuación de la recta igualada a cero. En este ejemplo debemos escribir $3x+2y-7=0$, **de otra manera, no se obtendrán respuestas correctas** al utilizar la fórmula. ■

4.4 Rectas y circunferencias

Dada una circunferencia y una recta ocurre una de las siguientes cosas:

- La recta y la circunferencia no se intersecan.
- La recta y la circunferencia se cortan en dos puntos.
- La recta y la circunferencia se tocan en un punto, llamado **punto de tangencia.**

Exploramos la posibilidad de tangencia en el siguiente ejemplo.

Intersecciones de rectas y circunferencias

Problema: Determine la pendiente m de la recta que pasa por $(0,3)$ para que sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$.

Actividad 4.6 Los estudiantes deben responder las siguientes preguntas individualmente:

1. ¿Cuál forma de la ecuación de la recta es la más conveniente para resolver este problema?
2. ¿Qué debe ocurrir para que se intersecten la recta y la circunferencia?
3. Sea $P=(x,y)$ el punto de intersección de la recta y la circunferencia. Plantee una ecuación

para la variable x que determine la coordenada de la intersección. Resuelva la ecuación, calcule la coordenada y determine la intersección.

La siguiente actividad puede incluir a todo el grupo: Encuentre las condiciones para que la recta $y = mx+3$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$. Calcule el valor de m para tener tangencia. ■

Solución de la actividad 4.6. La recta buscada tiene una ecuación de la forma $y = mx+3$ ya que el punto $(0,3)$ es la ordenada al origen de la recta y donde m es un parámetro por determinar. Sustituimos $y = mx+3$ en la ecuación de la circunferencia para obtener

$$x^2+(mx+3)^2-10x+2(mx+3)+18=0$$

Simplificando se obtiene

$$(1+m^2)x^2+(8m-10)x+33=0.$$

la cual es una ecuación cuadrática en la variable x por medio de la fórmula cuadrática se obtiene

$$x = \frac{-(8m-10) \pm \sqrt{(8m-10)^2-4(1+m^2)(33)}}{2(8m-10)}$$

Para que la recta $y = mx+3$ corte a la circunferencia $x^2+y^2-10x+2y+18=0$ en dos puntos se debe tener que $0 < (8m-10)^2-4(1+m^2)(33)$ y para que la recta sea tangente (¿por qué?) se debe tener

$$0 = (8m-10)^2-4(1+m^2)(33).$$

Se desarrolla la ecuación anterior para obtener ahora una cuadrática en la variable m, la cual, después de simplificar (compare con sus propios resultados) se reduce a

$$17m^2+40m+8=0.$$

Se tiene entonces que

$$m = \frac{-20 \pm 2\sqrt{66}}{17}.$$

Es decir, hay dos rectas tangentes

$$y = \left(\frac{-20+2\sqrt{66}}{17}\right)x+3 \qquad \text{y la recta} \qquad y = \left(\frac{-20-2\sqrt{66}}{17}\right)x+3.$$

Con lo cual queda completa la actividad. □

El siguiente ejercicio es un teorema clásico de la geometría euclidiana. La demostración analítica es interesante y utiliza conceptos vistos en este capítulo.

Ángulo inscrito en una semicircunferencia

En esta parte demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 4.6 — Thales. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Actividad 4.7 1) ¿Qué significa que un ángulo sea inscrito? 2) Haga un dibujo que ilustre la afirmación del teorema 4.6. 3) Se afirma que la demostración del teorema 4.6 no pierde generalidad si la circunferencia tiene centro en el origen ¿por qué esto es verdadero? Construya una semicircunferencia de radio r e inscriba un ángulo dentro de ella y denote por P el vértice del ángulo. 4) Muestre que los segmentos que forman el ángulo son perpendiculares calculando las pendientes de las rectas que lo forman y use la fórmula $m_1m_2 = -1$ para comprobar la

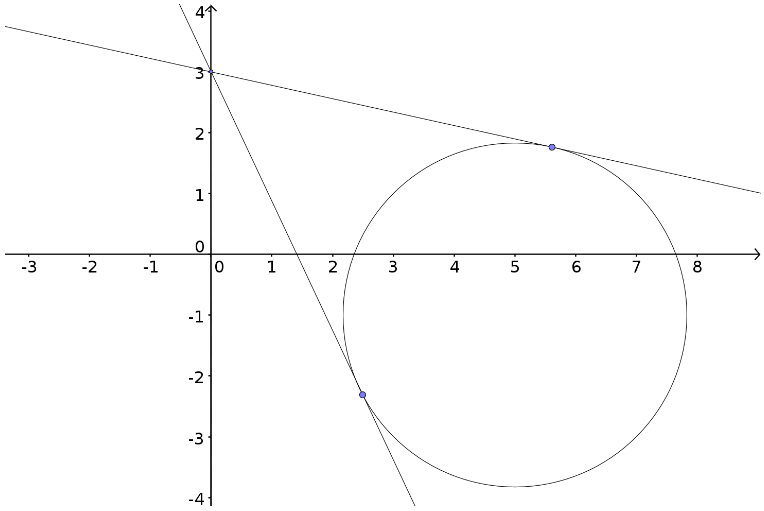


Figura 4.13: Gráfica que corresponde al ejemplo 4.4.

perpendicularidad. ■

Solución de la actividad 4.7. Consideramos la semicircunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ con $y \geqslant 0$. Sea $P = (x_o, y_o)$ un punto cualquiera sobre la semicircunferencia. Los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$, donde $A = (-r, 0)$ y $B = (0, r)$ forman un ángulo inscrito en la semicircunferencia. El Teorema afirma que la medida del ángulo APB es $\pi/2$. El teorema queda demostrado si la recta que pasa por A y P es perpendicular a la recta que pasa por P y B. La recta que pasa por $A = (-r, 0)$ y $P = (x_o, y_o)$ tiene pendiente

$$m_1 = \frac{y_o}{x_o + r};$$

la recta que pasa por P y $B = (r, 0)$ tiene pendiente

$$m_2 = \frac{y_o}{x_o - r}.$$

tenemos así que

$$m_1 m_2 = \frac{y_o}{x_o + r}\frac{y_o}{x_o - r} = \frac{y_o^2}{x_o^2 - r^2}$$

pero como P pertenece a la circunferencia se tiene que $x_o^2 + y_o^2 = r^2$ o bien $x_o^2 - r^2 = -y_o^2$. Por lo tanto

$$m_1 m_2 = \frac{y_o^2}{-y_o^2} = -1,$$

con lo cual queda demostrado el teorema. □

Ejercicio 4.7 Con la notación de la solución de actividad 4.7 muestre que los vectores $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ son ortogonales. ■

Solución del ejercicio 4.7. Efectivamente $\overline{AP} = P - A = (x_o + r, y_o)$ y $\overline{PB} = B - P = (r - x_o, -y_o)$, entonces calculando el producto interior

$$\begin{aligned}(x_o + r, y_o) \cdot (r - x_o, -y_o) &= r^2 - x_o^2 - y_o^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

la última igualdad se cumple dado que $P = (x_o, y_o)$ esta sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. Al ser ortogonales $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ se cumple el teorema 4.6. □

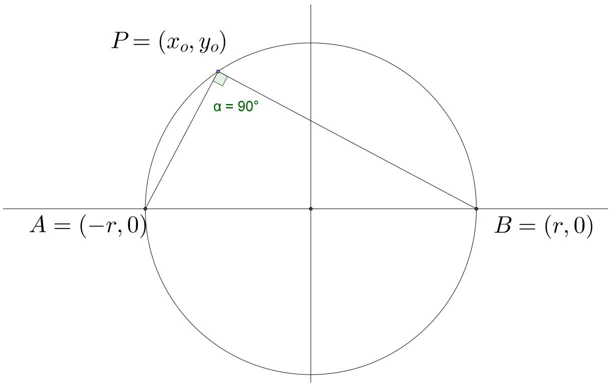


Figura 4.14: Figura correspondiente al teorema de Thales.

N Observe que la demostración del teorema 4.6 mediante el uso de vectores en la solución del ejercicio 4.7 es mucho más simple que aquella en la que se usan pendientes de rectas, como en la solución de la actividad 4.7 . Este hecho ocurre en general, por lo cual se prefiere el uso vectores sobre otras técnicas.

4.5 Problemas y ejercicios del capítulo

Autoevaluación

1. ¿Qué es la pendiente de un segmento?
2. Defina *línea recta*, dé la ecuación general de la recta.
3. ¿Cómo se calculan las coordenadas del punto de intersección de dos rectas?
4. ¿Cómo define el ángulo entre rectas? ¿Qué deben cumplir las pendientes de dos rectas perpendiculares?
5. Cómo defines una línea tangente a una circunferencia.

Problemas

Nivel básico

1. Realice los cálculos del ejercicio 4.1. Utilice *GeoGebra* para verificar sus resultados. Localice los puntos en el plano ya sea mediante el recuadro entrada poniendo las coordenadas de los puntos o ya sea usando la herramienta “Punto”. Posteriormente utilice la herramienta “pendiente” para calcular la pendiente entre puntos la cual se despliega posicionando el ratón en el cuadro ángulo que se muestra en la figura 4.15 y presionando el botón izquierdo. Compare con los resultados que obtuvo previamente al realizar los cálculos.

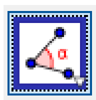


Figura 4.15: Ícono “ángulo” de *GeoGebra*.

2. Compruebe lo indicado en el ejercicio 4.4. Utilice *GeoGebra* para realizar sus gráficas. Para encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos con las herramientas de *GeoGebra*, despliegue el menú que se encuentra posicionando el ratón en el ícono “recta” que se muestra en la figura 4.16 y presionando el botón izquierdo localice en el plano los dos puntos dados y se trazará la recta. La ecuación de la recta aparecerá en el recuadro “Vista algebraica”.

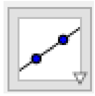


Figura 4.16: Ícono "recta" de *GeoGebra*.

3. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (-12,-13)$ y $P_2 = (-2,-5)$ Encuentre en esta recta el punto M cuya ordenada es igual a -1.
   Solución. $M = (3,-1)$.
4. Dada la recta $x+y=0$ determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ella: $P_1 = (2,-2)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (-1,1)$.
   Solución. P_1, P_3 están sobre la recta.
5. Determine la intersección de las siguientes rectas con los ejes de coordenadas, dibuje su gráfica y cerciórese de que su gráfica es correcta utilizando las herramientas de *GeoGebra*.
   a) $x-y=0$.
   b) $x=3$.
   c) $3x+2y-5=0$.
   d) $-7x+5y=3$.

   Soluciones. 5a) $(0,0)$. 5b) eje x: $(3,0)$, no tiene intersección con el eje y. 5c) eje x: $(5/3,0)$; eje y: $(0,5/2)$. 5d) eje x: $(-3/7,0)$; eje y: $(0,3/5)$.
6. Encuentre la ecuación general, pendiente ordenada al origen y vectorial de las siguientes rectas, y dibuje las gráficas correspondientes.
   a) Pasa por $(-1,3)$ y es paralela al vector $(-2,5)$.
   b) Pasa por los dos puntos $(-4,3)$ y $(5,1)$.
   c) Paralela al eje x y pasa por $(3,1)$.
   d) Paralela aleje y y pasa por $(3,1)$

   Soluciones. a) $5x+2y-1=0$. b) $2x+9y-19=0$. c) $(x,y)=(3,1)+r(1,0)$, $r\in\mathbb{R}$. d) $(x,y)=(3,1)+s(0,1)$, $s\in\mathbb{R}$.
7. Encuentre la ecuación de las rectas conocida su pendiente m y su ordenada al origen b, dibuje las gráficas y corrobore sus respuestas con *GeoGebra*:
   a) $m=2/3$, $b=5$.
   b) $m=2$, $b=0$.
   c) $m=-1$, $b=-2$.
   d) $m=0$, $b=-2$.

   Soluciones. a) $y=2/3x+5$. b) $y=2x$. c) $y=-x-2$. d) $y=-2$.
8. Encuentre la distancia d del punto $(-5,-4)$ a la recta $y=3x-2$. Utilice las herramientas de *GeoGebra para verificar sus resultados.*
   Solución. $d \approx 4.11$.
9. Dada la ecuación de la recta $5x+3y-3=0$ determine la pendiente de una recta para que
   a) sea paralela a la recta dada,
   b) sea perpendicular a la recta dada.

   Solución. a) $m=-5/3$. b) $m=3/5$.
10. Halle el punto P de intersección de las rectas

$$3x-4y-29=0, \qquad 2x+5y+19=0.$$

   Solución. $P=(3,-5)$
11. Determine el ángulo entre las rectas siguientes:
    a) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$
    b) $x-2y-4=0$, $5x-2y+3=0$.

    Solución. a) $\theta=\pi/4$. b) $\theta=0$, las rectas son paralelas.

12. Determine si la recta es tangente, corta o pasa fuera de la circunferencia en los siguientes casos:
    a) $y = 1/2x - 1/2$, $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;
    b) $y = x + 10$, $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

    Solución. a) tangente, b) no corta a la circunferencia.
13. Muestre que
    a) $x = -1 + 2t$, $y = 3 + 5t$ determinan una recta que pasa por $P_0 = (-1,3)$ y $P_1 = (1,8)$,
    b) ¿cuáles valores de t corresponden a P_0 y a P_1?
    c) encuentre la ecuación de la recta que pasa por P_0 y P_1, a partir de las ecuaciones paramétricas.

    Solución. a) las ecuaciones corresponden a las ecuaciones paramétricas de una recta. b) $t = 0$ y $t = 1$, c) $(x,y) = (-1,3) + t(2,5)$.
14. Utilice *GeoGebra* para obtener la gráfica de la recta del problema anterior. Para ello escriba “curva” en el recuadro “Entrada” para que aparezca el comando mostrado en la figura 4.17. En cada campo <Expresión>, escriba las ecuaciones paramétricas de x y y respectivamente, en el campo <Parámetro>, escriba “t”, y en los campos <Valor inicial>, <Valor final>, escriba 0,1, respectivamente, por ejemplo, explore otras opciones para los valores de los parámetros.

Figura 4.17: Comando de *GeoGebra* para graficar curvas dadas sus ecuaciones paramétricas en $\mathbb{R}^2$.

15. Determine cuáles rectas son perpendiculares
    a) $5x - y + 5 = 0$, $x + 5y - 1 = 0$.
    b) $6x - 2y = 0$, $6x + y = 1$.
    c) $7x - 2y + 4 = 0$, $2x + 7y + 2 = 0$

    Soluciones. Son perpendiculares a) y c).
16. Los lados de un triángulo se encuentran sobre las rectas $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ y $x - 2 = 0$ determine las coordenadas de sus vértices.

    Solución. $(2,-1)$, $(-1,3)$, $(2,4)$.
17. Sin calcular las pendientes, determine el ángulo θ entre las rectas
    a) $3x - y + 5 = 0$, $2x + y - 7 = 0$.
    b) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y - 5 = 0$, $(3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$.

    Soluciones. a) $\theta = \pi/4$. b) $\theta = \pi/3$.

Nivel medio

1. Resuelva el ejercicio 4.3.
2. Resuelva el ejercicio 4.6.
3. Considere la recta $2x + 3y + 4 = 0$. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2,1)$ tal que:
    a) la recta es paralela a la recta dada;
    b) la recta es perpendicular a la recta dada.

    Solución. a) $2x + 3y - 7 = 0$. b) $3x - 2y - 4 = 0$.
4. Encuentre las coordenadas de los vértices del rectángulo dadas las ecuaciones de las rectas que contienen dos de sus lados $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ y la ecuación de la recta que contiene a una de las diagonales $7x + y - 15 = 0$

    Solución. $(2,1)$, $(4,2)$, $(-1,7)$, $(1,8)$.
5. Muestre que el ángulo formado por las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ puede

calcularse mediante la fórmula

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}\right)$$

6. Halle la distancia mínima d del punto$(6,-8)$ a la circunferencia $x^2+y^2=9$. Utilice *GeoGebra* para verificar su solución, use la herramienta “distancia” que se encuentra presionando el botón izquierdo del ratón en el ícono “Ángulo”.
   Solución. $d = 7$.
7. Determine para que valores de la pendiente m la recta $y = mx$ es:
   a) secante a la circunferencia $x^2+y^2-10x+16=0$
   b) es tangente a la circunferencia del inciso a)
   c) pasa fuera de la circunferencia.
   Soluciones. a) $|m| < 3/4$. b) $m = \pm 3/4$. c) $|m| > 3/4$.
8. Calcule la distancia d, del centro de la circunferencia $x^2+y^2-2x=0$ a la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2+5x-8y+1=0$ y $x^2+y^2-3x+7y-25=0$.
   Soluciones. $d = 2$.
9. Muestre que la ecuación de una recta paralela a $ax+by+c=0$ que pasa por $P_1=(x_1,y_1)$ puede escribirse en la forma $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$.
10. Dada la recta $2x+3y+4=0$, encuentre la ecuación de la recta que pasa por $P=(2,1)$ y que forma un ángulo de $\pi/4$ con la recta dada.
    Solución. $x-5y+3=0$ o $5x+y-11=0$.
11. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x-5y-7=0$ y $2x+y-3=0$ la cual tiene pendiente $m=1/3$.
    Solución. $11x-33y-55=0$.

Nivel superior

1. Demuestre el teorema 4.3. *Indicación.* Sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos rectas dadas no paralelas. Se desea demostrar que se intersecan en un solo punto. Suponga que se intersecan en dos puntos. Demuestre que $\mathscr{R}_1 \subset \mathscr{R}_2$ y $\mathscr{R}_2 \subset \mathscr{R}_1$ y por lo tanto $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$ lo cual es una contradicción.
2. El punto $C=(1,-1)$ es el centro de un cuadrado. Uno de sus lados se encuentra sobre la recta $x-2y+12=0$. Determine las ecuaciones de las otras rectas que contienen los demás lados del cuadrado.
   Solución. $2x+y-16=0$, $2x+y+14=0$, $x-2y-18=0$.
3. El centro de una circunferencia está en la recta $x+y=0$. Halle la ecuación de esta circunferencia, si se sabe que pasa por un punto de intersección de las circunferencias $(x-1)^2+(y+5)^2=50$, $(x+1)^2+(y+1)^2=10$.
   Solución. $(x+3)^2+(y-3)^2=10$.
4. Muestre que las circunferencias $x^2+y^2-2mx-2ny-m^2+n^2=0$, $x^2+y^2-2nx+2my+m^2-n^2=0$, se cortan y forman un ángulo recto. *Indicación:* El ángulo formado por dos circunferencias es el ángulo formado por sus tangentes en el punto de intersección.
5. Encuentre la ecuación de la circunferencia tangente a las rectas $3x-4y+1=0$ y $4x+3y-7=0$ que pasa por el punto $P_1=(6,5)$.
   Solución. $(x-2)^2+(y-8)^2=25$.

5. Elipses, parábolas e hipérbolas

Estudiaremos ahora otras curvas que aparecen al seccionar un cono circular recto además de la circunferencia. Comenzaremos con la elipse cuya ecuación en cierto sentido es una extensión de la ecuación del círculo.

5.1 La elipse

Presentamos a continuación la definición analítica de la elipse la cual esta basada en el ejercicio 1.3.

> **Definición 5.1 — Elipse.** Una elipse es un conjunto de puntos de un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante mayor que la distancia entre ambos puntos fijos.

5.1.1 Ecuación de la elipse

Sea P un punto cualquiera sobre la elipse. Supongamos para simplificar que los focos tienen coordenadas $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, con $c > 0$, entonces la distancia entre los focos es $2c$. Por la definición de elipse, la suma de las distancias

$$\|PF_1\| + \|PF_2\|,$$

debe ser un número fijo. Dado que como se describió en el la actividad 1.3, la distancia entre los focos debe ser menor que la longitud de la cuerda usada para construirla (¿por qué?), a tal número fijo lo denotaremos por $2a$ donde $a > c$. Se tiene así que los puntos P sobre la elipse deben satisfacer la ecuación

$$\|PF_1\| + \|PF_2\| = 2a. \tag{5.1}$$

Actividad 5.1 Suponga que (x,y) es un punto sobre la elipse con focos en los puntos $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$. Calcule la ecuación de la elipse mediante la relación dada en (5.1). Para este fin siga los siguientes pasos

a) Use la fórmula de distancia entre dos puntos para calcular $\|PF_1\|$, $\|PF_2\|$.
b) Sustituya en (5.1) las expresiones anteriores.
c) Piense un poco antes de desarrollar. Si eleva al cuadrado la suma de raíces el doble producto es una raíz cuadrada: $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2+\beta^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ ¿Cómo puede evitar tener el término $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$ en el desarrollo de lo obtenido en el inciso anterior?

■

Solución de la actividad 5.1. a) Se tiene que

$$\|PF_1\| = \sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{5.2}$$

$$\|PF_2\| = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{5.3}$$

b) De esta manera de la ecuación (5.1) se llega a

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{5.4}$$

c) Para evitar tener el doble producto de raíces cuadradas se pasa uno de los sumandos del lado derecho de la igualdad (5.4), **pero el profesor que conduzca la actividad no debe evitar que los estudiantes tomen el camino equivocado**, sino más bien, confrontar las diferentes acciones de los estudiantes, para llegar al mejor procedimiento:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{5.5}$$

Ahora puede procederse a elevar al cuadrado ambos miembros de (5.5) para obtener

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2. \tag{5.6}$$

Se desarrollan los binomios y se cancelan términos para obtener (verifique)

$$\begin{aligned} 4cx &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} && (5.7)\\ -4cx+4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} && (5.8)\\ a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= -cx+a^2. && (5.9) \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado la ecuación anterior y después de desarrollar los binomios y simplificar se obtiene

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = c^2x^2-2a^2cx+a^4. \tag{5.10}$$

De donde

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{5.11}$$

Ahora, sea $b^2 = a^2 - c^2 > 0$, entonces la ecuación (5.11) se puede escribir como

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{5.12}$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación por a^2b^2 se llega a la **ecuación canónica de la elipse** con eje focal sobre el eje x y centro en el origen de coordenadas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.13}$$

Note que en la ecuación (5.13) si se pone $y = 0$ se obtiene la intersección de la elipse con el eje x la cual ocurre en los puntos $(-a,0)$, $(a,0)$, a los cuales se les llama vértices de la elipse. Similarmente, si $x = 0$ en la ecuación (5.13) se obtiene $y = \pm b$, es decir la intersección de la elipse con el eje y esta en los puntos $(0,-b)$, $(0,b)$. Observe también que $a > b$ por la definición de la elipse y dado que $b^2 = a^2 - c^2$. Por esta razón al segmento que une los puntos $(-a,0)$, $(a,0)$ de la elipse se le llama *eje mayor de la elipse* y al segmento que une los puntos $(0,-b)$, $(0,b)$ se le llama *eje menor de la elipse.* Claramente sobre el eje mayor de la elipse se encuentran los focos. El punto medio del eje mayor se llama *centro de la elipse* y en el caso que estamos estudiando corresponde al punto de coordenadas $(0,0)$. □

Se recomienda ahora complementar la actividad de la actividad anterior derivando la ecuación de la elipse con focos sobre el eje y.

Ejercicio 5.1 Compruebe que la ecuación de una elipse con focos $F1 = (0,-c)$, $F2 = (0,c)$, es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{5.14}$$

donde $b^2 + c^2 = a^2$. Haga un dibujo donde aparezca esta elipse con los ejes mayor y menor claramente especificados. ¿Cuál es la diferencia de la ecuación (5.14) con la ecuación (5.13). ■

Resumimos los resultados de la actividad 5.1 en el siguiente teorema.

Teorema 5.1 Toda elipse con focos en $F1 = (-c,0)$ y $F2 = (c,0)$, tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 + c^2 = a^2$. Recíprocamente, a toda ecuación de la forma (5.13) le corresponde una elipse con eje mayor de longitud $2a$ y eje menor de longitud $2b$ y focos en los puntos $F1 = (-c,0)$ y $F2 = (c,0)$.

Note que el teorema anterior está incompleto (¿por qué?). Para completarlo debe realizarse el siguiente ejercicio

Ejercicio 5.2 Complete el teorema anterior con los resultados que obtuvo en el ejercicio 5.1. ■

■ **Ejemplo 5.1** Determine la ecuación de la elipse con focos en $(0,-2)$ y $(0,2)$ y con vértice en $(0,3)$. Dibuje la elipse. ■

Solución. Dado que tiene focos en el eje y el eje focal es dicho eje. Así $a = 3$ (¿por qué?) y $c = 2$. Por lo tanto $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

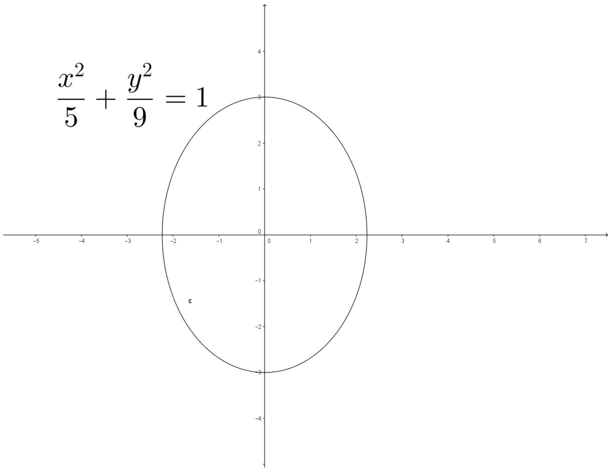


Figura 5.1: Gráfica que corresponde al ejemplo 5.1.

Actividad 5.2 Lado recto de la elipse. Considere la elipse con eje focal en el eje x. 1) Compruebe que una recta perpendicular $\mathscr{R}$ al eje focal que pasa por un foco corta a la elipse en dos puntos. 2) Compruebe que la longitud del segmento de la recta $\mathscr{R}$ entre sus puntos de intersección con la elipse, llamado *lado recto de la elipse* es $2b^2/a$. ■

Solución de la actividad 5.2. 1) Dada la ecuación de la elipse con eje focal sobre el eje x y centro en el origen de coordenadas $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, la cual tiene focos en los puntos $(c,0)$ y $(-c,0)$, donde $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Entonces las rectas perpendiculares al eje focal que pasan por los focos tienen ecuaciones $x=c$ y $x=-c$. Se desea encontrar los puntos de intersección de estas rectas con la elipse y la distancia entre estos puntos llamada **longitud del lado recto de la elipse**. Procedemos con la recta $x=c$, el cálculo con la otra recta se deja como ejercicio. Si $x=c$ al sustituir en la ecuación de la elipse se obtiene

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$

$$\iff \quad y^2=b^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)$$

$$\iff \quad y^2=\frac{b^4}{a^2}$$

$$\iff \quad y=\pm\frac{b^2}{a}.$$

Concluimos que los puntos $(c,b^2/a)$ y $(c,-b^2/a)$ son las intersecciones del lado recto con la elipse. 2) La *longitud del lado recto* de la elipse es $\|(c,b^2/a)-(c,-b^2/a)\|=\|(0,2b^2/a)\|$, es decir

$$\boxed{\text{longitud del lado recto}=\frac{2b^2}{a},}$$

como se quería demostrar. □

N No es necesario que el lector memorice la longitud del lado recto. En todo caso es mejor enfatizar y recordar cuál es el método para calcularla en caso de que se requiera.

Ejercicio 5.3 Resuelva los siguientes problemas.

1. Halle la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4,0)$, $(-4,0)$, con focos en $(3,0)$, $(-3,0)$
2. Una elipse tiene focos en los puntos $(3,0)$, $(-3,0)$. La longitud de su lado recto es 9. Encuentre la ecuación de la elipse.
3. Una elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal sobre el eje x pasa por los puntos $(\sqrt{6},-1)$ y $(2,\sqrt{2})$.

■

Simetría de la elipse

Una elipse con centro en el origen de coordenadas es simétrica respecto al eje x y respecto al eje y. Para comprobar la simetría respecto al eje x, basta ver que para cada punto (x_o,y_o) sobre la elipse, también el punto $(x_o,-y_o)$, está sobre la elipse. Para la simetría respecto al eje y, basta ver que el punto $(-x_o,y_o)$ está sobre la elipse también. Así vemos que si (x_o,y_o) está sobre la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se debe cumplir

$$\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}=1.$$

Ahora verificamos que $(x_o,-y_o)$, esté sobre la elipse

$$\begin{aligned}\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{(-y_o)^2}{b^2} &= \frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}\\ &= 1,\end{aligned}$$

como $(x_o,-y_o)$ satisface la ecuación de la elipse, está sobre la elipse como se quería mostrar. La comprobación de que $(-x_o,y_o)$ también está sobre la elipse se deja como ejercicio.

■ **Ejemplo 5.2** Compruebe que la elipse $x^2+4y^2=1$ es simétrica respecto al eje x y respecto al eje y. ■

Solución. El punto $(0,1/2)$ está sobre la elipse, y el punto $(0,-1/2)$ también lo está, pero para comprobar que toda la elipse es simétrica se requiere mostrar que todos los puntos sobre la elipse tienen un punto simétrico, también sobre la elipse. Es decir no basta un ejemplo, para ver que cada punto sobre la elipse tiene un simétrico se debe sustituir el punto en la ecuación. así, para comprobar la simetría respecto al eje y se debe tener que si (x_o,y_o) está sobre la elipse, también esté $(-x_o,y_o)$. Efectivamente, si (x_o,y_o) está sobre la elipse, se cumple que

$$x_o^2+4y_o^2=1$$

y para $(-x_o,y_o)$ se tiene

$$(-x_o)^2+4y_o^2=x_o^2+4y_o^2=1.$$

Por lo tanto $(-x_o,y_o)$ está sobre la elipse también. La comprobación de que $(x_o,-y_o)$ está sobre la elipse se deja como ejercicio.

Elipses con ejes paralelos a los ejes coordenados

Si una elipse tiene centro en un punto de coordenadas (h,k) y ejes focales paralelos a los ejes de coordenadas se puede establecer un nuevo sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen coincida con el punto (h,k). Denotemos con (x',y') las coordenadas de cualquier punto en el nuevo sistema. En términos matemáticos se puede pasar de un sistema a otro mediante la transformación

$$\begin{cases} x=x'+h,\\ y=y'+k.\end{cases} \tag{5.15}$$

o bien

$$\begin{cases} x' = x - h, \\ y' = y - k. \end{cases} \tag{5.16}$$

De esta forma en el sistema de referencia con ejes x', y' la ecuación de la elipse con eje paralelo al eje x' es

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{5.17}$$

lo cual es equivalente en el sistema de coordenadas x, y a la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{5.18}$$

utilizando la transformación (5.16) en la ecuación (5.17).

De manera similar, una elipse con eje focal paralelo al eje y con centro en el punto (h,k) tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \tag{5.19}$$

Ejercicio 5.4 Calcule la ecuación de la elipse con vértices en $(-2,1)$ y $(-2,7)$ y longitud del lado recto igual a 1. Determine las coordenadas del centro, focos y longitudes de los ejes menor y focal. ■

Forma general de la ecuación de la elipse

Hasta ahora hemos encontrado la forma general de la ecuación de una recta $dx + ey + f = 0$ y la forma general de la ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Ahora es momento de encontrar la ecuación general de la elipse. Procedemos como ya es costumbre en este libro con una actividad.

Actividad 5.3 1) Desarrolle la ecuación (5.18) y observe que se puede escribir de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, escogiendo los coeficientes A, C, D, E, F de manera apropiada. 2) Recíprocamente, dada una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, complete cuadrados para llegar a una ecuación de la elipse de la forma (5.18) o bien de la forma (5.19). Determine las condiciones para que la ecuación que obtenga represente una elipse. ■

Solución de la actividad 5.3. 1) Multiplicamos ambos lados de la ecuación (5.18) por a^2b^2 y desarrollamos

$$\begin{aligned} a^2b^2\frac{(x-h)^2}{a^2} + a^2b^2\frac{(y-k)^2}{b^2} &= a^2b^2 \\ \iff \quad & b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2 \\ \iff \quad & b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky - a^2k^2 - b^2h^2 - a^2b^2 = 0. \end{aligned}$$

Con $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$, $F = -a^2k^2 - b^2h^2 - a^2b^2$, se llega a la forma general de la ecuación de una elipse.

2) Completamos cuadrados[1] de una manera apropiada en la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$Ax^2+Dx+Cy^2+Ey+F=0$$

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y\right)=-F$$

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$$

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}}{AC}$$

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}}{A}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}}{C}}=1.$$

Note que la ecuación

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}}{A}}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}}{C}}=1$$

corresponde a una elipse si $-F+\dfrac{D^2}{4A}+\dfrac{E^2}{4C}>0$, dado que $A,C>0$. □

Reforzamos lo que hemos aprendido en la actividad anterior mediante el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 5.3** Transforme la ecuación $x^2+4y^2-6x+16y+21=0$ en la ecuación canónica de una elipse. Determine las coordenadas del centro, focos y longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse.

Solución. Se completan cuadrados para obtener la ecuación de la elipse en la forma canónica, de la manera siguiente.

$$\begin{aligned}
x^2+4y^2-6x+16y+21 &= 0\\
(x-3)^2+4(y+2)^2 &= -21+9+16\\
(x-3)^2+4(y+2)^2 &= 4\\
\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Es una elipse con centro en $(3,-2)$, ejes paralelos a los ejes xy, eje mayor con longitud $2a=2\cdot 2=4$ paralelo al eje x, eje menor con longitud $2b=2\cdot 1=2$. Para localizar los focos se debe calcular la longitud del semieje focal c dado por $c^2=a^2-b^2=2^2-1^2=3$, es decir $c=\sqrt{3}$. Para localizar las coordenadas de los focos debemos sumar y restar a la componente x del centro la constante $c=\sqrt{3}$. De esta forma se tienen las coordenadas de los focos $F1=(3+\sqrt{3},-2)$, $F2=(3-\sqrt{3},-2)$. ■

Ejercicio 5.5 **[Aplicaciones de la elipse].** La más importante aparición de la elipse en las ciencias es sin duda, el descubrimiento de Kepler de que los planetas se mueven alrededor del sol describiendo órbitas elípticas. Una demostración elemental de este hecho requiere del cálculo diferencial, recomendamos el libro de Nikerson et al. [11] para consulta. Para un taller elemental se recomienda una actividad de búsqueda de las leyes de Kepler, que incluya videos. Se debe complementar la búsqueda con una discusión grupal. ■

[1] Para completar cuadrados revise el capítulo 1.

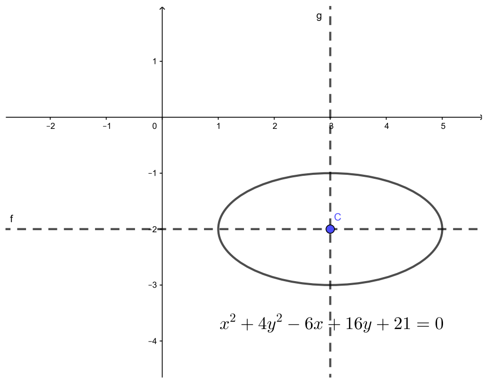


Figura 5.2: Gráfica que corresponde al ejemplo 5.3.

5.2 La parábola

El lector quien nunca antes haya estudiado la parábola le recomendamos que revise la actividad 1.4, en a cual se trabaja la forma de trazar una parábola en la geometría sin coordenadas. Para quienes ya tengan alguna información sobre esta curva se recomienda pasar directamente a la siguiente definición.

Definición 5.2 Una parábola es un conjunto de puntos de un plano tales que su distancia a una recta dada, llamada *directriz*, es igual a su distancia a un punto dado que no está en la recta, llamado *foco*. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama *eje de la parábola.* Se llama *vértice de la parábola* al punto de intersección de la parábola con su eje.

N Recuerde el lector que la distancia de un punto P a una recta $\mathscr{R}$ se calcula con el segmento perpendicular a $\mathscr{R}$ que pasa por P.

5.2.1 Ecuación de la parábola

Para obtener la ecuación de la parábola procedemos con una actividad.

Actividad 5.4 Suponga que el foco de una parábola tiene coordenadas $F = (p,0)$ y la ecuación de su directriz es $x = -p$. Sea $P = (x,y)$ un punto cualquiera sobre la parábola. Encuentre la ecuación de la parábola, siguiendo los siguientes pasos. 1) Encuentre la fórmula para $d(P,F)$. 2) Encuentre la fórmula para $d(P,\mathscr{R})$. 3) Use la definición 5.2 para calcular la ecuación. 4) Intente dibujar la parábola siguiendo a la letra, la definición, usando una escuadra y compás. 5) Encuentre la ecuación de una parábola con foco $F = (0, p)$ y directriz $y = -p$. 6) Considere la recta $\mathscr{R}$ que pasa por el foco y que es perpendicular al eje focal. El **lado recto de una parábola** es el segmento de $\mathscr{R}$ que se encuentra entre los puntos de intersección de la parábola y dicha recta. Determine la longitud del lado recto. ■

Solución al de la actividad 5.4. 1) La distancia de P a F está dada por $d(P,F) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$.
2) La distancia de P a la recta $x = -p$ está dada por $d(P,\mathscr{R}) = |x-(-p)| = |x+p|$.
3) De la definición 5.2 de la parábola tenemos

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad = \quad |x+p|, \tag{5.20}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (5.20) y simplificando se tiene

$$\begin{aligned}(x-p)^2+y^2 &= (x+p)^2,\\ x^2-2px+p^2+y^2 &= x^2+2px+p^2,\\ y^2 &= 4px.\end{aligned}$$

La ecuación

$$\boxed{y^2 = 4px,} \tag{5.21}$$

se llama **ecuación canónica de la parábola** con eje focal el eje x.
5) Por un procedimiento similar, si la parábola tiene foco $F=(0,p)$ y directriz $y=-p$, se obtiene la ecuación canónica de la parábola con eje focal el eje y.

$$\boxed{x^2 = 4py.} \tag{5.22}$$

6) La **longitud del lado recto de la parábola** $y^2=4px$ se calcula determinando primero la intersección de la recta $x=p$ (¿por qué?) con la parábola, es decir

$$y^2 = 4p^2.$$

De donde los puntos $(p,-2p)$, $(p,2p)$ determinan las intersecciones de $\mathscr{R}$ con la parábola en cuestión. La longitud del lado recto es así $\|(p,2p)-(p,-2p)\| = 4|p|$. □

■ **Ejemplo 5.4** Utilice la definición para encontrar la ecuación de la parábola con foco en $F=(0,-2)$ y directriz $y=2$. ■

Solución. de la definición de la parábola se tiene que

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+(y-(-2))^2} &= |y-2| \qquad (5.23)\\ x^2+y^2+4y+4 &= y^2-4y+4 \qquad (5.24)\\ x^2 &= -4y. \qquad (5.25)\end{aligned}$$

Se tiene una parábola con vértice en $(0,0)$ eje focal sobre el eje y. Observe que $p=-1<0$ lo cual indica que la parábola abre hacia abajo.

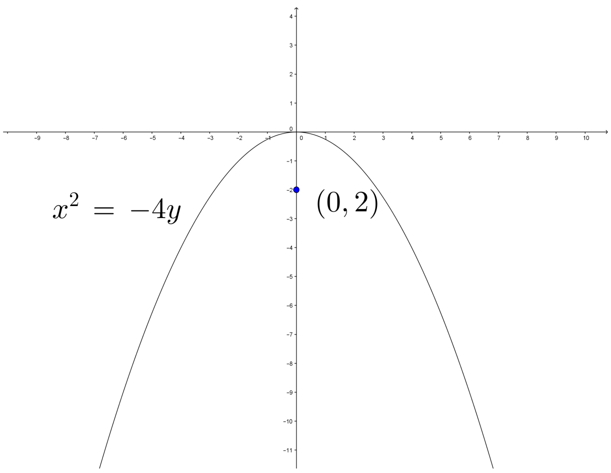


Figura 5.3: Gráfica que corresponde al ejemplo 5.4.

N Observe que en las ecuaciones (5.21) y (5.22) se tiene en ambos casos que el vértice de las parábolas se encuentra en $(0,0)$.

Debe tener en cuenta que si $p > 0$ en la ecuación (5.21), la parábola abre hacia la derecha y si $p < 0$ la parábola abre hacia la izquierda. En el caso de la parábola (5.22), la parábola abre hacia arriba si $p > 0$ y abre hacia abajo si $p < 0$.

Parábola con eje paralelo a uno de los ejes coordenados

Similarmente a como se hizo con la elipse, la ecuación de una parábola con vértice en el punto (h,k) y eje focal paralelo a uno de los ejes de coordenadas puede escribirse en forma simple trasladando el origen de coordenadas al punto (h,k) y utilizando las ecuaciones de transformación (5.15) o bien (5.16). De esta forma, por ejemplo, la ecuación

$$\begin{aligned} y'^2 &= 4px', \\ x' &= x-h \\ y' &= y-k, \end{aligned}$$

representa una parábola con eje focal paralelo al eje x y la ecuación

$$\begin{aligned} x'^2 &= 4py', \\ x' &= x-h \\ y' &= y-k, \end{aligned}$$

representa una parábola con eje focal paralelo al eje y.

■ **Ejemplo 5.5** Verifique que la ecuación $y = 1/4x^2 + x + 2$ corresponde a una parábola.
Solución. Completamos cuadrados en la variable x de la forma siguiente

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x^2 + x + 2 \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + 2 - 1 \\ &= \frac{1}{4}(x+2)^2 + 1 \\ y - 1 &= \frac{1}{4}(x+2)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación corresponde a una parábola con vértice en $(-2,1)$ y eje focal paralelo al eje y, la cual se muestra en la figura 5.4. Si ponemos $x' = x+2$ y $y' = y-1$ se obtiene la ecuación en forma canónica $y' = 1/4x'^2$, la cual claramente corresponde a la ecuación de una parábola. ■

Ejercicio 5.6 **[Aplicaciones de la parábola].** Los estudiantes deben buscar por si mismos ejemplos de aplicación en ciencias y tecnología de la parábola. En seguida se debe proceder a un discusión grupal donde se trate de responder a las preguntas: 1) ¿Por que se utiliza la parábola en la construcción de antenas parabólicas y en la fabricación de faros de automóviles? 2) ¿Conocen alguna aplicación de la parábola en la arquitectura? ¿Por qué se utiliza en la construcción de arcos? ■

5.3 La hipérbola

La última cónica en tratar en este capítulo será la hipérbola. Pasamos directamente a su definición.

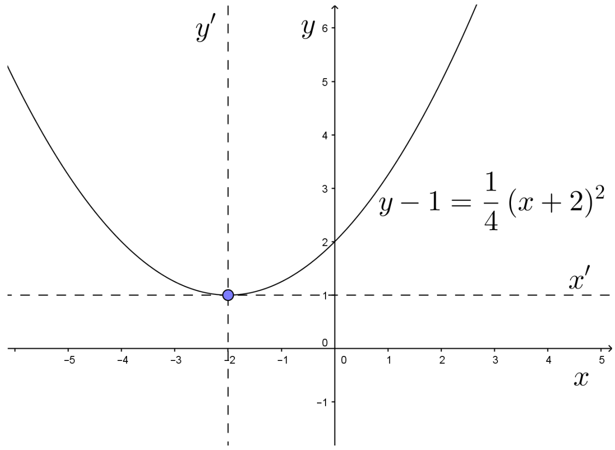


Figura 5.4: Gráfica que corresponde al ejemplo 5.5.

Definición 5.3 Una hipérbola es un conjunto de puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a dos puntos dados llamados *focos de la hipérbola*, es una constante menor que la distancia entre los focos, pero distinta de cero.

5.3.1 Ecuación de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola la obtendremos mediante la siguiente actividad.

Actividad 5.5 Suponga que los focos de una hipérbola tienen coordenadas $F1 = (c,0)$ y $F2 = (-c,0)$, con $c > 0$. Sea $P = (x,y)$ un punto cualquiera sobre la hipérbola. Encuentre la ecuación de la hipérbola, siguiendo los siguientes pasos.
1) Encuentre la fórmula para $d(P,F1)$ y $d(P,F2)$.
2) Dado que la distancia entre los focos es $2c$ suponemos que $0 < a < c$ y que $|\, d(P,F1) - d(P,F2)\,| = 2a$.
3) A partir de la relación en 2) desarrolle para obtener la ecuación de la hipérbola en forma semejante a como se hizo con la elipse. Defina una nueva constante $b^2 = c^2 - a^2$ y simplifique la ecuación de la hipérbola para obtener la forma canónica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ■

Solución de la actividad 5.5. Los puntos 1) y 2) se resuelven de manera estándar y ya se ha hecho en el caso de la elipse y la parábola. Se deja su realización como ejercicio.

3) Quitando el valor absoluto del inciso 2) se tiene:

$$d(P,F1) - d(P,F2) = 2a, \text{ si } d(P,F1) - d(P,F2) \geq 0 \tag{5.26}$$

$$d(P,F1) - d(P,F2) = -2a, \text{ si } d(P,F1) - d(P,F2) < 0. \tag{5.27}$$

De (5.26) sustituyendo $d(P,F1) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ y $d(P,F2) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ se llega a

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la última ecuación y simplificando se tiene

$$\begin{aligned}
x^2-2xc+c^2+y^2 &= 4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2\\
-a^2-xc &= a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\
a^4+2a^2cx+c^2x^2 &= a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)\\
(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2).
\end{aligned}$$

Se define ahora $b^2=c^2-a^2$ y se sustituye en la última ecuación con lo cual

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

al dividir ambos miembros de la ecuación por a^2b^2 se obtiene la **ecuación canónica de la hipérbola** con eje focal sobre el eje x y centro en $(0,0)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{5.28}$$

La misma ecuación se obtiene a partir de la ecuación (5.27), lo cual debe verificar el lector como ejercicio. Con un procedimiento semejante al anterior se llega a que la hipérbola con focos en $F1=(0,c)$ y $F2=(0,-c)$ tiene por ecuación

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.} \tag{5.29}$$

Las ecuaciones (5.28) y (5.29), se llaman ecuaciones canónicas de la hipérbola. □

N De manera similar a la elipse, la recta $\mathscr{R}$ que pasa por $F1$ y $F2$ se llama *eje focal*. Los puntos V, V' donde la hipérbola corta el eje focal se llaman *vértices de la hipérbola*. El segmento que une V con V' se llama *eje transverso* de la hipérbola. El punto medio entre los focos se llama *centro de la hipérbola*. La recta $\mathscr{L}'$ que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje transverso se llama *eje normal o eje conjugado* de la hipérbola. Observe que las constantes a,b,c están definidas en forma diferente de la elipse aunque en la ecuación canónica parezcan tener el mismo rol. Esto no es así, note que la hipérbola **no corta el eje conjugado**. Sin embargo c nuevamente da la distancia del centro a cualquiera de los focos, a es la distancia del centro a cualquiera de de los vértices.

Ejercicio 5.7 A partir de lo obtenido en la actividad 5.5 realice las siguientes actividades. 1) Observe que la hipérbola tiene dos ramas, cuál de ellas está determinada por cada ecuación que surge al quitar el valor absoluto en el punto 2) de la actividad 5.5. 2) Despeje y de la ecuación canónica obtenida en 3) de la actividad 5.5 que pasa para valores grandes de x. ¿Puede obtener ecuaciones de rectas de estas ecuaciones?, ¿cómo? Las rectas obtenidas mediante un proceso de límite, se llaman asíntotas de la hipérbola. ¿Cómo definiría con palabras una asíntota? 3) Grafique la hipérbola con sus asíntotas. 4) Obtenga la ecuación de la hipérbola con eje focal en el eje y. ■

■ **Ejemplo 5.6** Halle la ecuación de la hipérbola cuyos focos están sobre el eje de las abscisas y son simétricos respecto al origen de coordenadas, si sus semiejes son $a=6$ y $b=18$, donde b corresponde al semieje situado en el eje de las ordenadas.

Solución. Dado que la hipérbola tiene focos sobre el eje de las abscisas y son simétricos respecto al origen, la hipérbola tiene centro en $(0,0)$ y no corta el eje de las ordenadas. Por lo tanto tiene ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Al sustituir $a = 6$ y $b = 18$ se tiene

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = 1,$$

la cual es la ecuación de la hipérbola en la forma canónica. ■

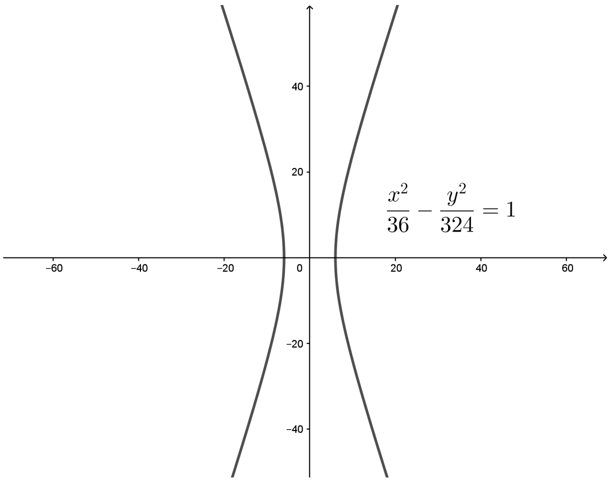


Figura 5.5: Gráfica que corresponde al ejemplo 5.6.

Hipérbola con ejes paralelos a los ejes coordenados

Para una hipérbola tiene centro en un punto de coordenadas (h,k) y ejes focales paralelos a los ejes de coordenadas. como se hizo con la elipse y la parábola, se puede establecer un nuevo sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen coincida con el punto (h,k). Denotemos con (x',y') las coordenadas de cualquier punto en el nuevo sistema. Pasamos de un sistema a otro (al igual que con la elipse) mediante las transformaciones (5.15) o bien (5.16)

De esta forma en el sistema de referencia con ejes x', y' la ecuación de la hipérbola con eje paralelo al eje x es

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{5.30}$$

lo cual es equivalente en el sistema de coordenadas x, y a la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{5.31}$$

utilizando la transformación (5.16) en la ecuación (5.30).

De manera similar, una hipérbola con eje focal paralelo al eje y con centro en el punto (h,k) tiene por ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \tag{5.32}$$

Ejercicio 5.8 Calcule la ecuación de la hipérbola con vértices en $(-2,1)$ y $(-2,7)$ y longitud del lado recto igual a 1. Determine las coordenadas del centro, focos y longitudes de los ejes.

Dibuje la gráfica de la hipérbola. ■

Solución del ejercicio 5.8. El centro de la hipérbola (h,k), está en el punto medio entre $(-2,1)$ y $(-2,7)$ es decir

$$(h,k) = \left(\frac{-2+(-2)}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (-2,4).$$

Sabemos que $a = |7-1|/2 = 3$. Falta determinar b, para lo cual usamos el dato de que la longitud del lado recto es 1. Puede demostrarse que la longitud del lado recto es $2b^2/a$ (¿por qué?). Así

$$1 = \frac{2b^2}{3}$$

y por lo tanto $b = \sqrt{3/2}$. Se concluye que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{\frac{3}{2}} = 1.$$

Finalmente, para determinar las coordenadas de los focos se tiene la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$, de donde $c = \sqrt{9+3/2} = \sqrt{21/2}$. Por lo tanto las coordenadas de los focos $F1, F2$ son $F1 = (-2, k+c)$, $F2 = (-2, k-c)$. Así $F1 = (-2, 7+\sqrt{21/2})$, $F2 = (-2, 7-\sqrt{21/2})$. La gráfica correspondiente esta actividad puede verse en la figura 5.6 .

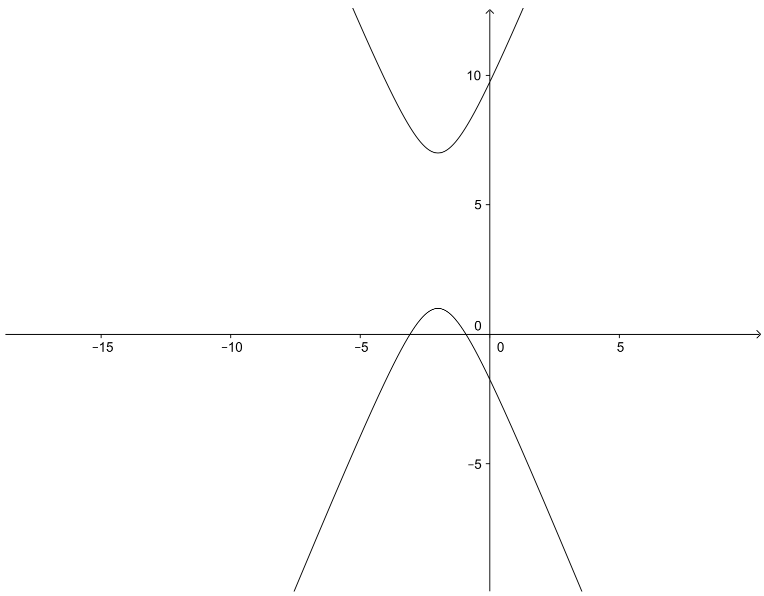


Figura 5.6: Gráfica que corresponde al ejercicio 5.8.

Forma general para Hipérbolas con centro fuera del origen

Determinaremos ahora la forma general de la ecuación de las hipérbolas con ejes paralelos a los ejes de coordenadas de manera similar a como se hizo con las otras cónicas.

Actividad 5.6 1) Desarrolle la ecuación (5.31) y observe que se puede escribir de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, escogiendo los coeficientes A, C, D, E, F de manera apropiada.
2) Recíprocamente, dada una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, complete cuadrados para llegar a una ecuación de la hipérbola de la forma (5.31) o bien de la forma (5.32).

Determine las condiciones para que la ecuación que obtenga represente una hipérbola. ■

Solución de la actividad 5.6. 1) Multiplicamos ambos lados de la ecuación (5.31) por a^2b^2 y desarrollamos

$$a^2b^2\frac{(x-h)^2}{a^2} - a^2b^2\frac{(y-k)^2}{b^2} = a^2b^2$$
$$b^2(x-h)^2 - a^2(y-k)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + a^2k^2 - b^2h^2 - a^2b^2 = 0.$$

Con $A = b^2, C = -a^2, D = -2b^2h, E = 2a^2k, F = a^2k^2 - b^2h^2 - a^2b^2$, se llega a la forma general de la ecuación de una hipérbola.
2) Completamos cuadrados de una manera apropiada en la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}\right) = -F$$
$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$$
$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{-F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}}{AC}$$
$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{-F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}}{A}} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{-F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}}{C}} = 1.$$

Note que la ecuación anterior corresponde a una hipérbola si $A > 0$ y $C < 0$, o bien $A < 0$ y $C > 0$. □

Reforzamos lo que hemos aprendido en la actividad con el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 5.7** Transforme la ecuación $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$ en la ecuación canónica de una hipérbola. Determine las coordenadas del centro, focos y longitudes de los ejes.
Solución. Se completan cuadrados para obtener la ecuación de la hipérbola en la forma canónica, de la manera siguiente.

$$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 9(x^2 - 6x) - 16(y^2 + 4y) - 127$$
$$= 9(x-3)^2 - 16(y+2)^2 - 127 - 81 + 64 = 0.$$

De donde

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1,$$

es la ecuación de una hipérbola con centro en $(h,k) = (3,-2)$. Las longitudes de los semiejes son $a = 4$, semieje conjugado $b = 3$. Así $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ de donde $c = 5$. Por lo tanto dado que la hipérbola tiene eje focal paralelo al eje x, las coordenadas de los focos $F1, F2$ son $F1 = (h+c,k) = (8,-2)$ y $F2 = (h-c,k) = (-2,-2)$. La gráfica correspondiente a este ejercicio puede verse en la figura 5.7. ■

5.3.2 Asíntotas de la hipérbola

La hipérbola tiene en común con otras cónicas la existencia de focos, vértices y lados rectos. Pero un rasgo distintivo de la hipérbola es que posee asíntotas. Las asíntotas son rectas a las que se aproxima la hipérbola en puntos alejados de su centro. Para tener una idea de como se aproximan, se puede realizar el siguiente taller.

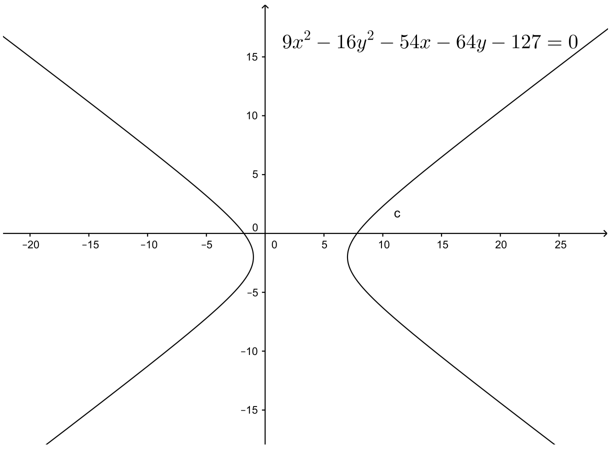


Figura 5.7: Gráfica que corresponde al ejercicio 5.7.

Actividad 5.7 Dada la hipérbola con ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ divida por x^2y^2 y estime las ecuaciones que se obtienen para valores grandes de x, y. ■

Solución de la actividad 5.7. Consideramos la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Si dividimos ambos miembros de la ecuación por x^2y^2 se tiene

$$\frac{1}{a^2y^2} - \frac{1}{b^2x^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

Ahora, si x, y están alejados del centro de la hipérbola, es decir del origen de coordenadas, x, y toman valores grandes, y por lo tanto x^2y^2 será mucho más grande todavía. Por lo que

$$\frac{1}{a^2y^2} - \frac{1}{b^2x^2} \approx 0.$$

Si igualamos a cero y analizamos la ecuación restante por medio de la factorización se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2y^2} - \frac{1}{b^2x^2} &= 0 \\ \left(\frac{1}{ay} - \frac{1}{bx}\right)\left(\frac{1}{ay} + \frac{1}{bx}\right) &= 0. \end{aligned}$$

De donde se obtienen las ecuaciones

$$\frac{1}{ay} - \frac{1}{bx} = 0,$$

$$\frac{1}{ay} + \frac{1}{bx} = 0,$$

o bien

$$y = \frac{b}{a}x \tag{5.33}$$

$$y = -\frac{b}{a}x. \tag{5.34}$$

Las ecuaciones (5.33) y (5.34) se llaman **ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola** con ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. □

Ejercicio 5.9 Realice un análisis semejante al de la actividad 5.7 para determinar que la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, tiene las mismas asíntotas que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ■

■ **Ejemplo 5.8** Encuentre las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. ■

Solución. Las ecuaciones de la hipérbola en cuestión se encuentran factorizando la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ de donde $(x-y)(x+y) = 0$. Así $y = x$, $y = -x$ son las ecuaciones de las asíntotas buscadas.

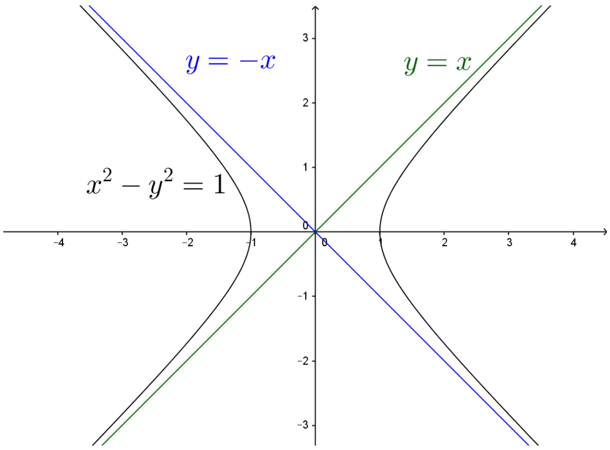


Figura 5.8: Hipérbola con sus asíntotas del ejemplo 5.8.

Ejercicio 5.10 **[Aplicaciones de la hipérbola].** Para un taller elemental se recomienda una actividad de búsqueda del tema: la geometría hiperbólica. Una presentación meramente introductoria es suficiente. ■

5.4 Planteamiento de problemas

Los problemas de esta sección serán en general, de mayor dificultad que otros ejemplos de este capítulo, se recomienda para el mejor aprovechamiento de los estudiantes que realicen la actividad sugerida antes de que revisen la solución de la actividad.

Actividad 5.8 — Tangentes sin cálculo diferencial. 1) Se define la **tangente a una cónica** en un punto $P_o = (x_o, y_o)$ como la recta que toca a la cónica en tal punto solamente. Dada una cónica con ecuación general de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y una recta que corta a la cónica con ecuación $y - y_o = m(x - x_o)$ encuentre una condición en m para que la recta sea tangente.
2) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^2 + 3y^2 = 5$, en $(1,1)$. ■

Solución de la actividad 5.8. 1) Sustituya la ecuación $y = m(x - x_o) + y_o$ en la ecuación de la cónica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (condición de intersección de la recta y la cónica) para obtener

$$\begin{aligned} Ax^2 + C(m(x-x_o)+y_o)^2 + Dx + E(m(x-x_o)+y_o) + F &= 0 \\ (A+Cm^2)x^2 + (D+Em-2Cm^2x_o+2Cmy_o)x + F + & \\ +Cm^2x_o^2 - 2Cmx_oy_o + Cy_o^2 - Emx_o + Ey_o &= 0 \end{aligned}$$

Note que la ecuación anterior es una cuadrática en x de la forma $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, la cual tiene una y solo una solución, es decir, la recta dada realmente interseca la cónica en un solo punto, si y solo si $\beta^2-4\alpha\gamma=0$. La última ecuación da una condición sobre m para la tangencia ¿Puede encontrarla? Inténtelo.
2) Para encontrar la tangente a $2x^2+3y^2=5$, en el punto $(1,1)$, lo mejor es repetir todo el procedimiento de 1). La familia de rectas que pasa por $(1,1)$ tiene por ecuación $y=m(x-1)+1$. Para que la recta corte a la curva sustituimos su ecuación en la ecuación de la curva.

$$\begin{aligned} 2x^2+3(m(x-1)+1)^2 &= 5 \\ (2+3m^2)x^2+(6m-6m^2)x+(3m^2-6m-2) &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos una cuadrática en x la cual tiene una sola raíz (es decir, se obtiene tangencia) si

$$(6m-6m^2)^2-4(2+3m^2)(3m^2-6m-2)=0$$

Simplificando da

$$36m^2+48m+16=0,$$

de donde $m=-2/3$. Por lo tanto la ecuación de la recta tangente es $y=-2/3(x-1)+1$ o bien $y=-2/3x+5/3$. □

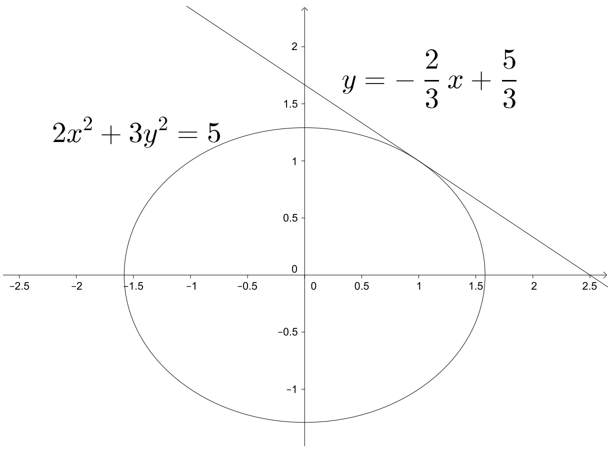


Figura 5.9: Tangente a una curva de la actividad 5.8.

5.5 Cónicas y excentricidad

Puede hacerse un estudio alternativo de las cónicas a partir del concepto de excentricidad. Este tema puede tratarse como una actividad complementaria en un primer estudio de las cónicas o puede omitirse. Sin embargo la definición de las cónicas por medio de la excentricidad es importante si se desea comenzar el estudio de la ecuación general de segundo grado en dos variables o si se desea obtener las cónicas como intersecciones de un cono con diferentes planos, es decir, si se desea estudiar propia y profundamente las secciones cónicas. Comenzamos con una definición.

Definición 5.4 — Definición general de cónica. Sean $F=(x_0,y_0)$ un punto y $\mathscr{D}$ una recta por la que no pasa el punto F, sean $d(P,\mathscr{D})$ la distancia de punto $P=(x,y)$ a la recta $\mathscr{D}$ y $d(P,F)$, la distancia de P a F. Se llama cónica $\mathscr{C}$, al conjunto de puntos del plano tales que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,\mathscr{D})}=e,$$

donde e es una constante positiva fija, llamada excentricidad de la cónica. La recta fija $\mathscr{D}$, se llama directriz de la cónica y el punto fijo F se llama foco de la cónica. En notación de conjuntos:

$$\mathscr{C} = \left\{ P = (x,y) : \frac{d(P,F)}{d(P,\mathscr{D})} = e \right\}.$$

Actividad 5.9 Supongamos que la directriz de una cónica $\mathscr{D}$ es el eje y y que el foco tiene coordenadas $F = (p,0), \quad p \neq 0$.
1) Utilice la definición general de cónica para obtener una ecuación en términos de la excentricidad e.
2) En la ecuación que se obtenga en el punto 1) anterior estudie los casos a) $e = 1$, b) $0 < e < 1$ y c) $e > 1$. ¿A cuál tipo de cónica corresponde cada caso? ■

Solución de la actividad 5.9. 1) Si suponemos que la directriz es el eje y y el foco tiene coordenadas $F = (p,0)$ debemos tener por la definición 5.4

$$\begin{aligned} \frac{d(P,F)}{d(P,\mathscr{D})} &= \frac{\sqrt{(x-p)^2+y^2}}{|x|} \\ &= e. \end{aligned}$$

De donde elevando al cuadrado, agrupando términos semejantes y simplificando se obtiene

$$(1-e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0. \tag{5.35}$$

2a) Si $e = 1$ en la ecuación (5.35) se tiene $-2px + y^2 + p^2 = 0$ la cual puede escribirse como

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

ecuación que representa una parábola con eje dado por el eje x y vértice en el punto $(p/2,0)$).
2b) Si $e < 1$ completamos cuadrados en (5.35) y posteriormente podemos dividir ambos miembros de la ecuación por $1 - e^2 > 0$, con lo que completando cuadrados se obtiene (¡haga los cálculos!)

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1, \tag{5.36}$$

dado que $1 - e^2 > 0$ la ecuación anterior representa una elipse.
2c) Si $e > 1$, entonces $-(e^2 - 1) > 0$ por lo se tiene, procediendo como en 2b)

$$\frac{\left(x - \frac{p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{e^2-1}} = 1, \tag{5.37}$$

la cual corresponde a una hipérbola. □

N En realidad no se ha perdido generalidad al afirmar que la cónica tiene por directriz el eje y y foco sobre el eje x por lo que podemos concluir de la definición general de cónica 5.4 que si $e = 1$ la cónica es una parábola, si $e < 1$ la cónica es una elipse y si $e > 1$ la cónica es una hipérbola, en general.

El siguiente ejercicio muestra que el valor de la excentricidad está dado por $e = c/a$ para la elipse, se deja como ejercicio mostrar lo mismo para la hipérbola, pero no olvide que c se define de manera diferente para esta curva.

Ejercicio 5.11 Para la elipse (5.36) muestre que $e = c/a$ donde como en la definición clásica $c^2 = a^2 - b^2$, $a^2 = \dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}$ y $b^2 = \dfrac{p^2e^2}{1-e^2}$. ■

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 - b^2 &= \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2e^2}{1-e^2} \\ &= \frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2} - \frac{p^2e^2(1-e^2)}{(1-e^2)^2} \\ &= \frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{p^2e^4}{(1-e^2)^2}\frac{(1-e^2)^2}{p^2e^2} = e^2.$$

Por lo tanto $e = c/a$.

■ **Ejemplo 5.9** Determine la ecuación de la cónica que tiene por foco el punto $(0,0)$ por directriz la recta $\mathscr{D} : x - y + 1 = 0$ considerando los casos $e = 1$, $e = 1/2$, $e = \sqrt{2}$.

Solución. La distancia de un punto $P = (x,y)$ a la recta $x - y + 1 = 0$ está dada por la fórmula (4.21)

$$d(P,\mathscr{D}) = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}},$$

así la fórmula para una cónica con excentricidad e con foco en $F = (0,0)$ y directriz $\mathscr{D}$ es

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}} = e,$$

dado que $d(P,F) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Para el caso $e = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= \frac{x-y+1}{\sqrt{2}} \\ 2(x^2+y^2) &= (x-y+1)^2 \\ x^2+2xy+y^2-2x+2y-1 &= 0. \end{aligned}$$

Para el caso $e = 1/2$ se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}\right) \\ 8(x^2+y^2) &= (x-y+1)^2 \\ 7x^2+2xy+7y^2-2x+2y-1 &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente para el caso $e = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{2}\left(\frac{x-y+1}{\sqrt{2}}\right) \\ x^2+y^2 &= (x-y+1)^2 \\ 2xy-2x+2y-1 &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma la ecuación $x^2+2xy+y^2-2x+2y-1 = 0$ corresponde a una parábola, la ecuación $7x^2+2xy+7y^2-2x+2y-1 = 0$ corresponde a una elipse y la ecuación $2xy-2x+2y-1 = 0$ corresponde a una hipérbola. ■

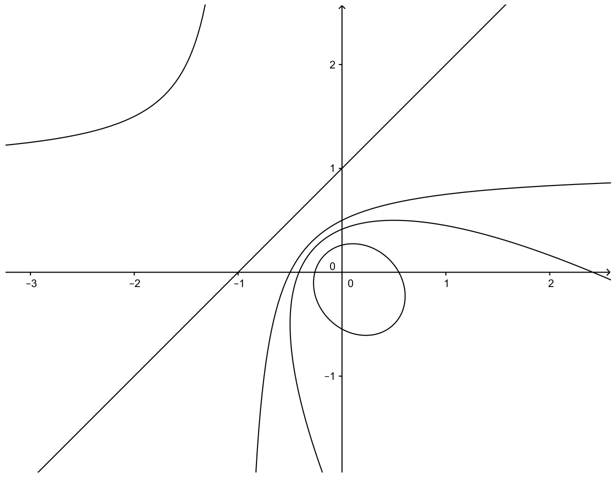


Figura 5.10: Parábola, elipse e hipérbola correspondientes al ejemplo 5.9.

5.6 Ecuación general de las cónicas

Con la definición de cónicas a partir de la excentricidad podemos encontrar la ecuación general de una cónica con directriz $ax+by+c=0$, $a,b\neq 0$, foco en $F=(x_0,y_0)$ tal que $ax_0+by_0+c\neq 0$ (el foco no está sobre la directriz) y excentricidad e. Para este caso se tiene que cualquier punto $P=(x,y)$ sobre la cónica satisface

$$\begin{aligned} \frac{d(P,F)}{d(P,\mathscr{D})} &= \frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \\ &= e \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, agrupando términos semejantes y simplificando obtenemos

$$x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2=\frac{e^2}{a^2+b^2}\left(a^2x^2+b^2y^2+2abxy+2acx+2bcy+c^2\right)$$

de donde

$$\begin{aligned} &\left(\frac{e^2a^2}{a^2+b^2}-1\right)x^2+\frac{2abe^2}{a^2+b^2}\,xy+\left(\frac{e^2b^2}{a^2+b^2}-1\right)y^2 \\ &\qquad +\left(\frac{2ace^2}{a^2+b^2}-2x_0\right)x+\left(\frac{2bce^2}{a^2+b^2}-2y_0\right)y+x_0^2+y_0^2+\frac{e^2c^2}{a^2+b^2} \\ &\qquad = 0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Claramente en la ecuación (5.38) el coeficiente del término xy es distinto de cero ya que $a,b,e\neq 0$. Se tiene entonces la **ecuación general de las cónicas:**

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,} \tag{5.39}$$

donde $B\neq 0$ si los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes x o y, y $A=\left(\frac{e^2a^2}{a^2+b^2}-1\right)$, $B=\frac{2abe^2}{a^2+b^2}$, $C=\left(\frac{e^2b^2}{a^2+b^2}-1\right)$, etcétera.

Estudiamos ahora el signo del **indicador** I, definido como $I = B^2 - 4AC$, en términos de los valores de la excentricidad e. Tenemos que

$$\begin{aligned}
B^2 - 4AC = 4\frac{a^2b^2e^4 - [(e^2-1)a^2 - b^2][(e^2-1)b^2 - a^2]}{(a^2+b^2)^2} \\
= 4\frac{[e^4 - (e^2-1)^2 - 1]a^2b^2 + (e^2-1)(a^4+b^4)}{(a^2+b^2)^2} \\
= 4\frac{(e^2-1)(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} \\
= 4(e^2-1). \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Con la ecuación (5.40) observamos que $e = 1$, si y solo si$I = B^2 - 4AC = 0$, es decir $I = 0$ si y sólo si la cónica es una parábola. Además $e > 1$, si y solo si$I = B^2 - 4AC > 0$, y la cónica es una hipérbola. Finalmente, $e < 1$ si y solo si$I = B^2 - 4AC < 0$, en este caso la cónica es una elipse. Puede verse fácilmente que cuando los ejes de la cónica son paralelos a los ejes x o y, es decir, los casos cuando $B = 0$, claramente $-4AC > 0$ en el caso de la hipérbola y $-4AC < 0$ para la elipse. Se resumen estos resultados en la siguiente tabla.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Excentricidad	Indicador $I = B^2 - 4AC$	tipo de cónica
$e = 1$	$I = 0$	parábola
$e < 1$	$I < 0$	elipse
$e > 1$	$I > 0$	hipérbola

N Se tiene de esta manera un teorema que afirma que toda cónica tiene una ecuación de la forma (5.39) y se puede considerar que se ha demostrado esta parte. Sin embargo no se ha escrito aquí como teorema ya que se tiene también un recíproco sin el cual está incompleto, a saber "toda ecuación de la forma (5.39) corresponde a una cónica". Para una demostración de este hecho el lector puede pasar al capítulo 10 de este libro.

Por otra parte, también suele llamarse **discriminante** al indicador I.

5.7 Cónicas y *GeoGebra*

En la sección de problemas 5.8, se requiere que el lector verifique sus gráficas con *GeoGebra*, por lo que dedicaremos esta parte a las instrucciones básicas para generar gráficas con dicho programa.

Como sabemos, en *GeoGebra* se obtiene una gráfica escribiendo una ecuación (en una o en las dos variables x, y) en el recuadro "Entrada" y presionando posteriormente la tecla "entrada" del teclado. Además de esta opción para generar elipses, parábolas e hipérbolas se puede desplegar un menú poniendo el ratón sobre el recuadro "elipse" y presionando el botón izquierdo. El ícono de la herramienta elipse se muestra en la figura 5.11 y el menú se muestra en la figura 5.12.

Para generar una elipse o una hipérbola se coloca el ratón en el menú sobre el recuadro "Elipse" o "Hipérbola" y se presiona el botón izquierdo. Seguidamente en el recuadro "Vista gráfica" se

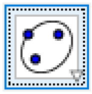


Figura 5.11: Ícono que corresponde a la herramienta "elipse" de *GeoGebra*.

Figura 5.12: Menú que se despliega en la herramienta "elipse" de *GeoGebra*.

coloca el ratón y se presiona el botón izquierdo en tres puntos distintos. Así se generan las cónicas que tiene por focos los dos primeros puntos y que pasa por el tercer punto generados.

Para la parábola se genera un punto como se hizo con la elipse o hipérbola y se selecciona una recta, por ejemplo uno de los ejes. Se obtiene así una parábola con foco el punto generado y directriz la recta seleccionada. Si se necesita otra directriz que no sea uno de los ejes, entonces se debe graficar previamente la recta requerida.

La última opción del menú "Cónica por cinco puntos" al generar cinco puntos no colineales en el recuadro "Vista gráfica" se genera una cónica que pasa por los puntos generados.

■ **Ejemplo 5.10** Utilice *GeoGebra* para obtener la gráfica de una parábola con foco $F = (1,1)$ y directriz $x+y+1=0$

Solución. Graficamos la directriz $x+y+1=0$ escribiendo directamente la ecuación en el recuadro "Entrada" de *GeoGebra* y presionando la tecla "Entrada". Colocamos el ratón en el ícono "Elipse" desplegamos el menú y presionamos el botón izquierdo del ratón sobre la opción "Parábola". Seguidamente, en el recuadro "Vista gráfica" colocamos el punto $F = (1,1)$ y luego seleccionamos la directriz poniendo el ratón sobre la recta y presionando el botón izquierdo. De esta forma, se genera la parábola buscada. La pantalla generada por *GeoGebra* se puede ver en la figura 5.13 ■

5.8 Problemas y ejercicios del capítulo

Autoevaluación

Las ecuaciones de la parábola, la elipse y la hipérbola son fundamentales para el estudio de ciencias e ingeniería. El lector debe ser capaz de diferenciar entre las diferentes ecuaciones y de poder dibujar **a mano** las gráficas de las ecuaciones que les corresponden. **Sin estos conocimientos y capacidades no se puede considerar que alguien conozca la Geometría Analítica.**

1. Dé un ejemplo de una ecuación de una parábola, de una elipse y de una hipérbola. Grafíquelas.
2. Determine si el punto $(\sqrt{2}/2, 1)$ está sobre la parábola $y = x^2$. Explique
3. ¿Qué diferencia a una elipse de una circunferencia?
4. ¿Qué es una asíntota?
5. Complete la siguiente tabla con las ecuaciones correspondientes

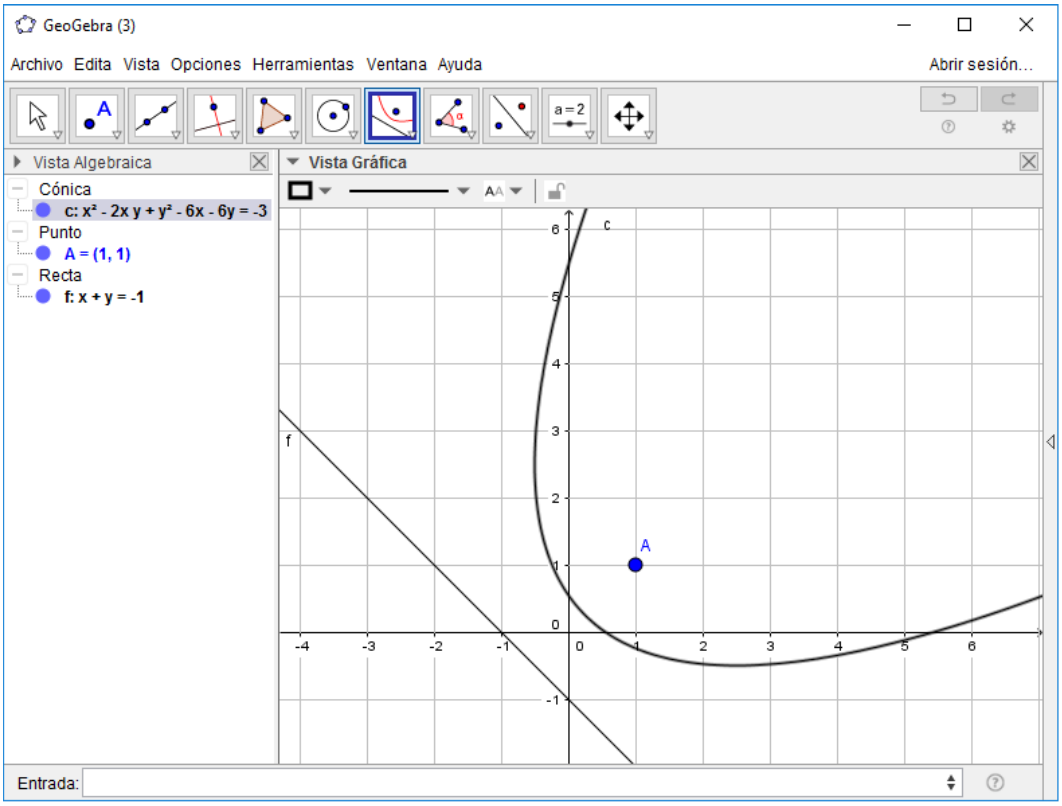


Figura 5.13: Solución del ejemplo 5.10.

Descripción de la cónica	parábola	elipse	hipérbola
eje focal eje x, centro $(0,0)$			
eje focal eje y, centro $(0,0)$			
eje focal $\parallel$ eje x, centro (h,k)			
eje focal $\parallel$ eje y, centro (h,k)			
ecuación general			
asíntotas (especifique)			

Problemas y ejercicios

Nivel básico

En todos los siguientes problemas se deben realizar las gráficas a mano y posteriormente corroborar los resultados con *GeoGebra*.

1. Determine cuáles de los siguientes puntos se encuentran sobre la elipse $8x^2+5y^2=77$, $P_1=(-2,3)$, $P_2=(2,-4)$, $P_3=(-1,3)$.
   Solución. P_1 está sobre la elipse, P_2 está fuera de la elipse, P_3 está dentro de la elipse.

2. Calcule la ecuación de la elipse cuyos focos están sobre el eje x, con centro en el origen de coordenadas y cuyos semiejes son iguales a 5 y a 2.
   Solución. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$
3. Dada la elipse $9x^2+25y^2=225$ encuentre: a) sus semiejes, b) sus focos, c) su ecuación canónica.
   Solución. 5 y 3.
4. Halle la ecuación de la hipérbola cuyos focos están sobre el eje x, centro en el origen cuyos ejes son $2a=10$ y $2b=8$.
   Solución. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$
5. Determine cuál línea corresponde a la ecuación $y=-3\sqrt{x^2+1}$.
   Solución. Rama inferior de una hipérbola con eje paralelo al eje y.
6. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen de coordenadas, si la parábola es simétrica respecto al eje x y pasa por $(9,6)$.
   Solución. $y^2=4x.$
7. Halle las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola $y^2=24x$.
   Solución. $(6,0)$, $x+6=0.$
8. Verifique que cada una de las siguientes ecuaciones determina una parábola, halle las coordenadas del vértice y del foco. a) $y=1/4x^2+x+2$, b) $y=4x^2-8x+7$, c) $y=-1/6x^2+2x-7$.
   Solución. a)$(-2,1)$, $p=2$. b)$(1,3)$, $p=1/16$. c) $(6,-1)$, $p=-3/2$.
9. Determine a que cónica corresponden las ecuaciones siguientes. Encuentre el centro vértices, focos y dibuje las gráficas.
   a) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.
   b) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.
   c) $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$.
   d) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$.
   e) $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.
   Solución. a) elipse, b) hipérbola, c) conjunto vacío, d) dos rectas, e) un solo punto.

Nivel medio

1. Resuelva los ejercicios 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.9 y 5.10.
2. Determine los puntos sobre la hipérbola

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1,$$

   cuyas distancias al foco derecho son iguales a 4 y 5.
   Solución. $(10,9/2)$, $(10,-9/2)$.
3. Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyos focos están sobre el eje x, con centro en el origen y cuyas asíntotas tienen ecuación $y=\pm\frac{3}{4}x$.
   Solución. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$
4. Halle la ecuación de la parábola con foco en $(7,2)$ y directriz $x-5=0$.
   Solución. $x=1/4y^2-y+7.$
5. Determine la posición relativa entre la recta $x-y+2=0$ y la parábola $y^2=8x$.
   Solución. Es tangente a la parábola.

6. Halle en la elipse
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$
los puntos cuyas abscisas son iguales a 3.
Solución. $(-3,-8/5)$, $(-3,8/5)$.
7. Halle la ecuación de la elipse cuyo eje menor es 2 y con focos en $(-1,-1)$ y $(1,1)$.
Solución. $2x^2-2xy+2y^2-3=0$.
8. Determine la ecuación de la hipérbola cuya directriz es la recta $x+y=0$ tiene foco en el punto $F=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$ y excentricidad $e=\sqrt{2}$.
Solución. $2xy+\sqrt{2}(x+y)-1=0$.
9. Halle la ecuación de la cónica cuyo foco está en $F=(3,3)$ directriz $4x+3y=0$ y excentricidad $e=5$.
Solución. $15x^2+24xy+8y^2+6x+6y-18=0$.
10. Encuentre la ecuación de la cónica cuyos focos están sobre el eje de las abscisas y es simétrica respecto al origen de coordenadas su eje mayor es igual a 20 y su excentricidad $e=3/5$.
Solución. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.
11. Encuentre la ecuación de la cónica que tiene como directriz la recta $x=-a/e$, foco en el punto $(-ae,0)$ y excentricidad $e<1$. **Indicación.** Repita todo el procedimiento de la actividad 5.9.
Solución. Elipse.
12. Determine los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ con la parábola $y^2=24x$.
Solución. 6) $(6,12)$ y $(6,-12)$.

Nivel superior

1. Halle las ecuaciones de las tangentes a la elipse
$$x^2+4y^2=20,$$
que son perpendiculares a la recta $2x-2y-13=0$.
Solución. 1) $x+y-5=0$, $x+y+5=0$.
2. Halle en la elipse
$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$$
las coordenadas del punto más próximo a la recta $2x-3y+25=0$.
Solución. 2) $(-3,2)$, $d=\sqrt{13}$.
3. Halle las ecuaciones de la elipse que es tangente a las dos rectas $3x-2y-20=0$, $x+6y-20=0$, si sus ejes coinciden con los ejes coordenados.
Solución. 3) $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1$.
4. Determine los valores de b para que la recta
$$y=\frac{5}{2}x+b:$$
   a) Corte a la hipérbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$;
   b) sea tangente a la hipérbola;
   c) pase fuera de la hipérbola.

Solución. 4) Se corta con la hipérbola si $|m|>4.5$, tangente si $m=4.5$, pasa por fuera si $m<4.5$.

5. La recta $2x-y-4=0$ es tangente a una hipérbola cuyos focos están en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$. Halle la ecuación de esta hipérbola.

   Solución. 5) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1.$

6. Muestre que dos parábolas con eje común y un foco común situado entre sus vértices se cortan formando un ángulo recto.
   Solución. 7) $(1-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(1-e^2).$

6. Rectas y planos en $\mathbb{R}^3$

6.1 Introducción

Este capítulo está pensado para los primeros trimestres de un curso universitario. La geometría de $\mathbb{R}^3$ casi nunca se trata en cursos preuniversitarios por múltiples razones. En este libro, la parte de el álgebra de $\mathbb{R}^3$ se estudia suponiendo que el lector conoce el álgebra de $\mathbb{R}^2$ como se estudió en el capítulo 2, de tal manera que no se dedica mucho espacio a este tema. Lo novedoso respecto al álgebra en el plano, es el producto vectorial o producto exterior y su aplicación para definir la normal y con ello obtener la ecuación cartesiana del plano. Comenzamos de esta manera con la parte que corresponde al álgebra de $\mathbb{R}^3$.

6.1.1 $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial

El espacio $\mathbb{R}^3$ (se lee: "erre tres") como conjunto, es el triple producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : \ x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Así, como conjunto $\mathbb{R}^3$ está compuesto de ternas ordenadas (x,y,z). En este espacio, al igual que en $\mathbb{R}^2$, se puede definir la suma y el producto por un número real tal y como se hizo en el plano.

Definición 6.1 Sean $u = (u_1,u_2,u_3)$ y $v = (v_1,v_2,v_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ se define
a) la suma de vectores $u+v$ como

$$u+v = (u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3) = (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3),$$

b) si $r \in \mathbb{R}$, el producto ru mediante

$$ru = r(u_1,u_2,u_3) = (ru_1,ru_2,ru_3).$$

Propiedades de espacio vectorial. El conjunto $\mathbb{R}^3$ junto con la suma y el producto por un número real satisface las propiedades siguientes:

Sean $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ y $r,s \in \mathbb{R}$.

i) $u+v=v+u$.
ii) $u+(v+w)=(u+v)+w$.
iii) Existe un elemento denotado por $\mathbf{0}$ tal que para todo $u\in\mathbb{R}^3$ se tiene $u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u$.
iv) Para todo $u\in\mathbb{R}^3$ existe un elemento denotado por $-u$ tal que $u+(-u)=\mathbf{0}$.
v) $(r+s)u=ru+su$.
vi) $r(u+v)=ru+rv$.
vii) $(rs)u=r(su)$.
viii) $1u=u$.

N **Espacios vectoriales generales.** Dado un conjunto V arbitrario y un campo $\mathbb{K}$ donde se han definido las operaciones $+:V\times V\to V$ y $\cdot:\mathbb{K}\times V\to V$ las cuales satisfacen las propiedades i) a viii) anteriores para todo $u,v,w\in V$ y todo $r,s\in\mathbb{K}$, la cuarteta $(V,\mathbb{K},+,\cdot)$ se denomina *espacio vectorial* V sobre el campo $\mathbb{K}$. Sin embargo, para un primer acercamiento no se requiere llegar al concepto más abstracto de espacio vectorial

En aplicaciones en física e ingeniería además de la estructura algebraica de los espacios vectoriales mencionada, se requiere asociar a cada punto $P=(x,y,z)$ un segmento rectilíneo orientado que va del punto $O=(0,0,0)$ al punto P, el cual se denomina *vector de posición del punto P*. Como se dijo en el capítulo correspondiente a $\mathbb{R}^2$ no se hará ninguna distinción entre la notación para puntos y segmentos rectilíneos orientados a lo largo de este libro.

Los conceptos de norma, producto interior y ángulo entre vectores se extienden fácilmente de las definiciones de los conceptos correspondientes en el plano $\mathbb{R}^2$. Las ideas intuitivas subyacentes a tales conceptos y definiciones pueden revisarse en el capítulo correspondiente. Se ha considerado para el diseño de este libro que las propiedades de vectores en $\mathbb{R}^2$ ya han sido estudiadas antes de emprender la lectura de este capítulo.

Norma de un vector, distancia entre puntos

Dado un vector $u=(u_1,u_2,u_3)$ se define su norma o longitud de manera similar a lo que se hizo en $\mathbb{R}^2$,

$$\|u\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

La distancia entre dos puntos $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$, está dada por la fórmula

$$d(P_1,P_2)=\|P_1-P_2\|=\|P_2-P_1\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Es decir, la distancia entre dos puntos es la norma del vector que resulta de la diferencia de los vectores de posición de los puntos.

Producto interior

El producto interior de dos vectores u,v en $\mathbb{R}^3$, $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ se define como

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

De esta manera

$$\|u\|^2=u\cdot u=u_1^2+u_2^2+u_3^2.$$

Dos vectores u,v son ortogonales si y sólo si

$$u\cdot v=0.$$

Mas generalmente, se define el ángulo θ entre vectores mediante la relación

$$u\cdot v=\|u\|\,\|v\|\cos\theta.$$

Finalmente, se dice que dos vectores u,v son paralelos si existe $t\in\mathbb{R}$ tal que

$$u=tv.$$

Actividad 6.1 **Longitud en $\mathbb{R}^3$.** Sea $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ un punto cualquiera distinto de $O = (0,0,0)$ determine la longitud del segmento $\overline{OP_o}$, mediante el teorema de Pitágoras en el plano. ■

Solución de la actividad 6.1. Construya triángulos rectángulos apropiados y use el teorma de Pitágoras con proyecciones en el plano *xy*. □

6.2 Rectas en $\mathbb{R}^3$

En esta sección trataremos los diferentes tipos de ecuaciones para rectas y planos en $\mathbb{R}^3$. La ecuación *vectorial* de la recta es una simple extensión de la definición de la ecuación vectorial en $\mathbb{R}^2$, como veremos. La ecuación cartesiana de la recta no se generaliza a $\mathbb{R}^3$, sino que se da como un sistema de ecuaciones lineales no reducible. Una ecuación lineal en una, dos o tres variables, representa siempre un plano en $\mathbb{R}^3$.

Definición 6.2 Una recta $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^3$ se define como un conjunto

$$\mathscr{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = P_o + ta,\ t \in \mathbb{R}\},$$

donde $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ es un punto dado en la recta y $a = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector paralelo a la recta, llamado vector de dirección de la recta. La ecuación

$$(x,y,z) = (x_o, y_o, z_o) + t(a_1, a_2, a_3),\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

se conoce como *ecuación vectorial de la recta* en $\mathbb{R}^3$.

6.2.1 Ecuaciones paramétricas de la recta

Dada la ecuación vectorial (6.1), esta puede ser escrita como un sistema de ecuaciones llamado *ecuaciones paramétricas* de una recta:

$$\begin{cases} x = x_o + ta_1 \\ y = y_o + ta_2 \\ z = z_o + ta_3,\ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.2}$$

En el sistema (6.2) al número t se conoce como *parámetro del sistema.*

6.2.2 Ecuaciones simétricas de la recta

Si en cada una de las ecuaciones paramétricas (6.2) despejamos el parámetro t se obtiene

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_o}{a_1} \\ t = \dfrac{y - y_o}{a_2} \\ t = \dfrac{z - z_o}{a_3}, \end{cases} \tag{6.3}$$

(en los casos en los que $a_i \neq 0, i = 1,2,3$) si igualamos estas ecuaciones (ya que todas son iguales a t se obtiene el sistema

$$\boxed{\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}}$$

llamado *ecuaciones simétricas de la recta* o *ecuaciones cartesianas de la recta* en $\mathbb{R}^3$.

N Es muy importante al considerar las ecuaciones cartesianas de la recta **no olvidar** que se deben tomar siempre las tres ecuaciones juntas ya que si se consideran sólo dos de ellas, se obtiene la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ como veremos en las siguientes secciones.

■ **Ejemplo 6.1** Determine las ecuaciones paramétricas y simétricas de una recta que pasa por $P_o = (1,-1,2)$ y que es paralela al vector $a = (1,2,3)$.
Solución. La ecuación vectorial de la recta esta dada por $(x,y,z) = P_o + ta,\ t \in \mathbb{R}$ o bien

$$(x,y,z) = (1,-1,2) + t(1,2,3),$$

de donde obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta simplemente escribiendo componente a componente

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 2+3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.4}$$

Si despejamos t en cada una de las ecuaciones anteriores se tiene $t = x-1$, $t = (y+1)/2$ y $t = (z-2)/3$. Si igualamos las ecuaciones anteriores obtenemos las ecuaciones simétricas de la recta:

$$x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

que es lo que se deseaba encontrar. ■

Actividad 6.2 Compruebe que las ecuaciones paramétricas del eje x son $x = t, y = 0, z = 0$. ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de los ejes y, z? ■

Solución de la actividad 6.2. Claramente el vector de dirección del eje x es $\mathbf{i} = (1,0,0)$ y el eje como recta pasa por $P_0 = (0,0,0)$, de donde se sigue la ecuación propuesta. Las ecuaciones del eje y son (¡argumente!) $x = 0, y = t, z = 0$, etcétera. □

6.2.3 Cosenos directores

Dada una recta $(x,y,z) = P_o + ta,\ t \in \mathbb{R}$ con vector de dirección a siempre podemos encontrar un vector unitario u, $\|u\| = 1$, en la misma dirección que a, simplemente dividiendo por su norma, es decir $u = \frac{1}{\|a\|}a$. Obtenemos de esta manera una nueva ecuación vectorial equivalente para la recta $(x,y,z) = P_o + tu,\ t \in \mathbb{R}$. Es fácil calcular ahora el ángulo que forma la recta con cada uno de los ejes coordenados. Sean α, β, γ los ángulos que forma la recta con los ejes x, y, z respectivamente. Sabemos que se cumple la relación

$$\begin{aligned} u \cdot \mathbf{i} &= \|u\|\|\mathbf{i}\| \cos\alpha = \cos\alpha \\ u \cdot \mathbf{j} &= \|u\|\|\mathbf{j}\| \cos\beta = \cos\beta \\ u \cdot \mathbf{k} &= \|u\|\|\mathbf{k}\| \cos\gamma = \cos\gamma, \end{aligned}$$

donde, $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ y claramente $1 = \|u\| = \|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\|$, dado que son vectores unitarios. Notamos así que $u = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ dado que $u \cdot \mathbf{i}$ es la componente del vector u a lo largo del eje x, etcétera. Los cosenos $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ se llaman cosenos directores de la recta y si estos son conocidos de antemano, la ecuacion vectorial de la recta puede escribirse como

$$(x,y,z) = P_o + t(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

■ **Ejemplo 6.2** Calcule la ecuación de la recta que pasa por $P_o = (1,5,3)$ y $P_1 = (-1,2,7)$. Encuentre los ángulos que la recta forma con los ejes coordenados.

Solución. Un vector de dirección a de la recta queda determinado por la diferencia de los vectores de posición de los puntos, es decir $a = P_o - P_1 = (1,5,3) - (-1,2,7) = (2,3,-4)$ (también es válido tomar $a = P_1 - P_o$). Un vector unitario u en la dirección de a está dado por $u = \frac{1}{\|a\|}a = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,3,-4)$. Entonces una ecuación vectorial de la recta que pasa por P_o, P_1 es

$$(x,y,z) = P_1 + t(P_o - P_1),\ t \in \mathbb{R}$$

y otra ecuación vectorial es

$$(x,y,z) = (-1,2,7) + s\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}}\right),\ s \in \mathbb{R},$$

claramente las ecuaciones son diferentes, pero definen el mismo objeto. Es decir, existen infinitas representaciones vectoriales de una recta misma. Si α, β, γ son los ángulos de la recta con los ejes x, y, z respectivamente, se conocen los cosenos directores de la recta (dado que u es unitario): $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{29}}$. Tomando cosenos inversos se calculan los ángulos $\alpha = 1.1903$, $\beta = 0.9799$ y $\gamma = 2.4080$ radianes. ■

6.2.4 Planteamiento de problemas

Actividad 6.3 Halle las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por $P = (2,0,-3)$ y que es paralela a la recta $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. ■

Solución de la actividad 6.3. Las ecuaciónes paramétricas de la recta dada en ecuaciones cartesianas es $(x,y,z) = (1,-2,-1) + t(5,2,-1)$, $t \in \mathbb{R}$ (¿por qué?). De esta forma, un vector paralelo a la recta buscada es el vector $a = (5,2,-1)$. Por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta buscada es $(x,y,z) = P + ta$, es decir

$$(x,y,z) = (2,0,-3) + t(5,2,-1),\ t \in \mathbb{R}.$$

Si despejamos t obtenemos las ecuaciones

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}.$$

las cuales son las ecuaciones simétricas o cartesianas de la recta buscada. □

6.3 Planos

La recta para quedar bien definida requirió un vector de dirección y un punto. El plano requerirá un punto y dos vectores de dirección que no sean paralelos entre sí, aunque paralelos al plano. También, el plano requerirá dos parámetros cuando la recta, como sabe el lector, solo requiere uno.

Definición 6.3 Dado un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores no paralelos entre sí, $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$, se define el plano $\mathscr{P}$ que pasa por P_0 paralelo a a y b como el conjunto,

$$\mathscr{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = P_0 + sa + tb, \quad s,t \in \mathbb{R}\}.$$

De esta forma una ecuación vectorial del plano esta dada por

$$(x,y,z)=P_0+sa+tb, \quad s,t\in\mathbb{R},$$

los números s,t que toman todos los valores reales posibles para generar al plano, se llaman parámetros del plano $\mathscr{P}$.

Se dice que un vector $n=(A,B,C)$ es **normal a un plano** $\mathscr{P}$ si n es ortogonal a todo vector paralelo al plano. Dado un punto cualquiera $P=(x,y,z)$ y un punto dado $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ ambos en $\mathscr{P}$, el vector $P-P_0$ es paralelo al plano (¿por qué?). Así si n es un vector normal a $\mathscr{P}$ tenemos

$$\begin{aligned} n\cdot(P-P_0) &= (A,B,C)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\\ &= Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)\\ &= 0. \end{aligned}$$

Si ponemos $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ se obtiene la **ecuación cartesiana del plano**

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0.}$$

6.3.1 Ecuaciones paramétricas del plano

Sean $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $a=(a_1,a_2,a_3)$ y $b=(b_1,b_2,b_3)$, como en la definición 6.3. Las ecuaciones

$$\begin{cases} x=x_0+sa_1+tb_1,\\ y=y_0+sa_2+tb_2,\\ z=z_0+sa_3+tb_3, \end{cases}$$

se llaman *ecuaciones paramétricas* del plano $\mathscr{P}$, los vectores no paralelos a,b se dice que *generan al plano* y se denominan **vectores generadores del plano** $\mathscr{P}$.

Dado un plano con ecuación cartesiana $Ax+By+Cz+D=0$ la parametrización

$$\begin{cases} x=s,\\ y=t,\\ z=\frac{-1}{C}(As+Bt+D),\ s,t\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

se llama *parametrización trivial* de la ecuación cartesiana del plano.

■ **Ejemplo 6.3** Encuentre la ecuación vectorial, paramétrica y cartesiana del plano que pasa por $P_0=(1,0,0)$, $P_1=(0,1,0)$ y $P_2=(0,0,1)$

Solución. Podemos escoger cualquiera de los tres puntos P_0,P_1,P_2 como punto de definición del plano, digamos $P_0=(1,0,0)$. Para encontrar dos vectores paralelos al plano restamos los vectores de posición de los puntos, también puede escogerse cualquier combinación, digamos $a=P_1-P_0=(-1,1,0)$ y $b=P_2-P_0=(-1,0,1)$. De esta manera la ecuación vectorial del plano es:

$$(x,y,z)=P_0+sa+tb=(1,0,0)+s(-1,1,0)+t(-1,0,1).$$

Las ecuaciones paramétricas del plano son

$$\begin{cases} x=1-s-t\\ y=s\\ z=t. \end{cases}$$

Si sustituimos $y=s$, $z=t$ en $x=1-s-t$, obtenemos $x=1-y-z$, o bien la ecuación cartesiana del plano $x+y+z-1=0$. ■

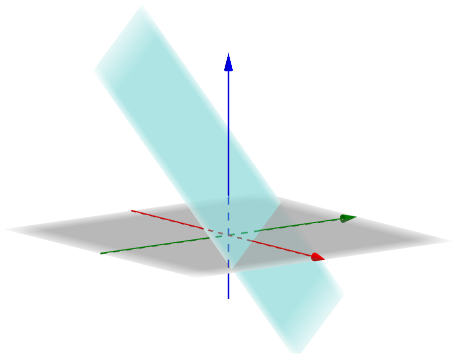


Figura 6.1: Plano del ejemplo 6.3 .

■ **Ejemplo 6.4** Determine y grafique los planos $x=0$, $x+y=0$, $x+y+z=0$, $x+y+z-1=0$ encontrando su ecuación vectorial correspondiente.

Solución. Si $x=0$ se está sobre el plano yz. Efectivamente, el plano yz está determinado por el punto $P_0=(0,0,0)$ y los vectores $\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{k}=(0,0,1)$, de tal forma que todo punto $P=(x,y,z)$ sobre el plano yz satisface la ecuación vectorial

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (0,0,0)+s(0,1,0)+t(0,0,1),\ t,s\in\mathbb{R}\\ &= (0,s,t).\end{aligned}$$

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas del plano yz son

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s,\ s\in\mathbb{R} \\ z=t,\ t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Las ecuaciones $y=s,\ s\in\mathbb{R}$, $z=t,\ t\in\mathbb{R}$ indican que las variables y,z son libres mientras que $x=0$ basta para determinar el plano completo.

La ecuación $x+y=0$ corresponde a un plano perpendicular al plano $z=0$. Efectivamente, poniendo $x=t$, $y=-x=-t$, $z=s$, $s,t\in\mathbb{R}$ se obtiene la ecuación vectorial del plano

$$(x,y,z)=(t,-t,s)=(0,0,0)+t(1,-1,0)+s(0,0,1)$$

la cual corresponde a un plano que pasa por el origen de coordenadas $(0,0,0)$ y paralelo a los vectores $(1,-1,0)$ y $\mathbf{k}=(0,0,1)$.

La ecuación $x+y+z=0$ corresponde a un plano oblicuo al los planos xy, xz, yz. Efectivamente, con la parametrización trivial $x=s$, $y=t$ $z=-s-t$ se tiene la ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(0,0,0)+s(1,0,-1)+t(0,1,-1),$$

de esta forma los vectores $(1,0,-1)$ y $(0,1,-1)$ generan al plano.

El hecho de que el plano $x+y+z=1$ es paralelo al plano $x+y+z=0$ ya que ambos son perpendiculares a la normal $n=(1,1,1)$ y no son el mismo plano. Esto también puede comprobarse observando que la ecuación vectorial de $x+y+z=1$ tiene ecuación vectorial

$$(x,y,z)=(0,0,1)+s(1,0,-1)+t(0,1,-1)$$

es decir tiene vectores generadores paralelos a los del plano $x+y+z=0$. Se define el ángulo entre planos, como el ángulo entre sus normales. ■

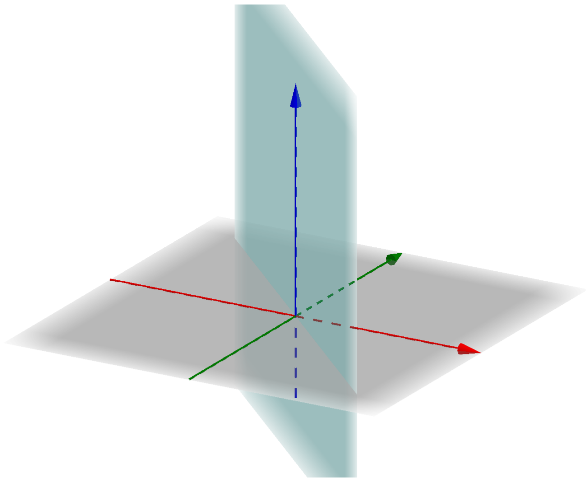


Figura 6.2: Plano $x+y=0$ del ejemplo 6.4.

N El lector debe recordar que en $\mathbb{R}^2$, la ecuación $x=0$ corresponde al eje y solamente. Debe tenerse cuidado en observar que en $\mathbb{R}^3$ toda ecuación cartesiana lineal corresponde a un plano y **nunca** a una recta en $\mathbb{R}^3$ ya sea que tenga una, dos o tres variables, por lo que en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $x=0$ corresponde a un plano, en efecto, corresponde al plano yz perpendicular al eje x.

6.3.2 El producto vectorial

Definiremos ahora un producto entre vectores que da un vector, comenzamos definiendo este producto para los vectores $\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{j}=(0,1,0)$ y $\mathbf{k}=(0,0,1)$, llamados base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se define el *producto cruz*, también llamado **producto vectorial o producto exterior** entre los vectores **i, j, k** mediante las relaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}; \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}, \\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}; \end{cases} \tag{6.5}$$

además de las relaciones de vectores paralelos

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=(0,0,0). \tag{6.6}$$

También se tiene la propiedad distributiva del producto vectorial, es decir

$$\alpha\times(\beta+\gamma)=\alpha\times\beta+\alpha\times\gamma.$$

Dado que cualquier vector $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ se puede escribir como *combinación lineal* de los vectores **i, j, k,** es decir, $a=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ podemos calcular el producto vectorial de dos vectores a,b cualesquiera.

Actividad 6.4 Sean $a=(a_1,a_2,a_3)$ y $b=(b_1,b_2,b_3)$ use las relaciones (6.5) y (6.6) para calcular $a \times b$ en términos de los vectores **i, j , k.** ■

Solución de la actividad 6.4. Se pone $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $b = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. En seguida usamos la propiedad distributiva del producto vectorial y las fórmulas en (6.5) y al desarrollar se llega a la fórmula

$$\boxed{a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.} \tag{6.7}$$

La fórmula (6.7), puede usarse para calcular el producto cruz de vectores, o bien puede utilizarse un determinante como se indica en la siguiente nota. □

N Con la regla para los determinantes[1] de matrices de 3×3 dada por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

puede verse que

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{6.8}$$

.

Ejercicio 6.1 Compruebe que $a \times b$ esta dado por (6.8). Tenga cuidado con el signo del vector **j**. ■

Actividad 6.5 Interpretación geométrica del producto vectorial. La norma del producto vectorial de dos vectores es el área del paralelogramo formado por los vectores (si no son paralelos). Ahora deduciremos este hecho en forma de taller o actividad.
1) Muestre por medio de un cálculo directo que

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (a \cdot b)^2. \tag{6.9}$$

Tenga cuidado en sumar y restar cantidades adecuadas para llegar al resultado.
2) Dado que $a \cdot b = \|a\|\,\|b\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre a y b, muestre que

$$\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \mathrm{sen}^2\theta.$$

3) Construya un paralelogramo con lados a y b muestre que $\|a\|\,\|b\|\,|\mathrm{sen}\theta|$, determina su área.
4) Muestre que dos vectores son paralelos si y solo si$a \times b = (0,0,0)$.
Muestre que $a \times b$ es ortogonal tanto a a como a b mediante un cálculo directo. ■

Solución de la actividad 6.5. 1) Se tiene que

$$\begin{aligned} \|a \times b\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_2b_3)^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + (a_3b_2)^2 + \\ &\quad +(a_3b_1)^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + (a_1b_3)^2 + \\ &\quad +(a_1b_2)^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + (a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

Aquí el lector debe sumar y restar cantidades adecuadas para obtener

$$\|a \times b\|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

[1] Los determinantes se definen en el capítulo 1.

de donde $\|a\times b\|^2=\|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2$.
2) Como $a\cdot b=\|a\|\|b\|\cos\theta$, y $\|a\times b\|^2=\|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|a\times b\|^2 &= \|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2\\ &= \|a\|^2\|b\|^2-\|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta\\ &= \|a\|^2\|b\|^2(1-\cos^2\theta).\end{aligned}$$

¿Puede concluir de aquí lo que se desea demostrar? ¿Cómo se eliminan los cuadrados? (no olvide que si se toma raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad se obtiene valor absoluto y con ello aparece $\pm$.)¿Por qué sen $\theta\geq 0$?
3) Se puede ver que $\|b\|\text{sen}\,\theta$ es la altura del paralelogramo. ¡Haga el dibujo!
4) Si a y b son paralelos, sen $\theta=0$ (¿por qué?), asi $\|a\times b\|=0$ y por las propiedades de la longitud de vectores $a\times b=(0,0,0)$. Si $a\times b=(0,0,0)$ se tiene para $a,b\neq\mathbf{0}$ que sen$\theta=0$ y así $\theta=0$ o $\theta=\pi$ (¿por qué?) ¿de aquí puede el lector ver que los vectores son paralelos? ¿Qué pasa si alguno de los vectores es el vector cero?.

La propiedad de que $a\times b$ es ortogonal tanto a a como a b es muy importante y hacer la comprobación ayudará al lector a recordarla. Podemos verificar, por ejemplo $(a\times b)\cdot a=0$:

$$\begin{aligned}(a\times b)\cdot a &= [(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}]\cdot(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)a_1+(a_3b_1-a_1b_3)a_2+(a_1b_2-a_2b_1)a_3\\ &= 0\end{aligned}$$

Verifique el último paso. Repita el cálculo para $(a\times b)\cdot b$, si no tiene claro lo que se hizo. □

Ejercicio 6.2 1) Calcule el área del paralelogramo con lados $(1,2,3)$ y $(-1,2,0)$.
2) Calcule el área del triángulo con vértices $(5,0,1)$, $(3,1,1),(2,1,0)$.
3) Dados $a=(1,-1-2)$, $b=(0,-2,5)$ y $c=(-3,1,2)$ calcule:
a) $a\times b$
b) $b\times a$
c) $(a\times b)\times c$
d) $\|a\times c\|$. ■

6.3.3 Producto cruz y la ecuación cartesiana

Dados dos vectores a,b que generan al plano

$$\mathscr{P}=\{(x,y,z)=P_0+sa+tb\}$$

una normal $n=(A,B,C)$ a $\mathscr{P}$ está dada por $n=a\times b$. De esta manera podemos pasar de la ecuación vectorial a una ecuación de la forma $Ax+By+Cz=D$, llamada ecuación cartesiana del plano, como ya hemos dicho. Procedemos para comenzar con un ejemplo.

■ **Ejemplo 6.5** Determine la ecuación cartesiana del plano cuya ecuación vectorial es $(x,y,z)=(3-t,s+t,2-s-4t)$. ■

Solución. Primero, observamos que la ecuación $(x,y,z)=(3-t,s+t,2-s-4t)$, puede escribirse como

$$(x,y,z)=(3,0,2)+s(0,1,-1)+t(-1,1,-4), \tag{6.10}$$

por lo que dos vectores generadores del plano son $a=(0,1,-1)$ y $b=(-1,1,-4)$. Procedemos ahora a calcular la normal al plano n mediante el producto vectorial $n=a\times b$,

$$n=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\0&1&-1\\-1&1&-4\end{vmatrix}=-3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}.$$

De esta forma $n=(A,B,C)=(-3,1,1)$. El coeficiente D en la ecuación del plano puede calcularse con el producto punto entre n y cualquier punto P_0 sobre el plano, es decir $D=n\cdot P_0$. En particular, de la ecuación vectorial (6.10) se tiene que el punto $(3,0,2)$ es un punto sobre el plano, de esta manera

$$D=(-3,1,1)\cdot(3,0,2)=-9+2=-7.$$

Por lo tanto la ecuación

$$-3x+y+z=-7$$

es la ecuación cartesiana del plano (6.10).

Posición relativa entre planos

De manera semejante a como se hizo en $\mathbb{R}^2$ con las rectas, ahora en $\mathbb{R}^3$ se puede definir el *ángulo entre planos*, a partir de sus normales.

Definición 6.4 Se define el ángulo entre dos planos como el ángulo entre cualquiera de sus respectivas normales.

Dos planos son paralelos si y sólo si tienen normales paralelas.

N Con la ecuación cartesiana del plano, podemos representar una recta un $\mathbb{R}^3$ como un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

con la condición de que las normales a los planos no sean paralelas, es decir, no sea una ecuación un múltiplo de la otra.

■ **Ejemplo 6.6** Los planos $x+y+z=0$ y $-x-y+2z=1$ son ortogonales ya que tienen normales respectivas ortogonales. Efectivamente, si denotamos $n_1=(1,1,1)$ y $n_2=(-1,-1,2)$ tenemos así, $n_1\cdot n_2=-1-1+2=0$.

Los planos $z=0$ (el plano xy) y $x+y+z=0$ forman un ángulo de 60 grados. Claramente, el vector $(0,0,1)$ es normal al plano xy y el vector $(1,1,1)$ es normal al plano $x+y+z=0$. Por lo tanto el ángulo θ entre los planos está dado por

$$\cos\theta=\frac{(0,0,1)\cdot(1,1,1)}{\|(0,0,1)\|\,\|(1,1,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Se tiene así que $\theta=\arccos(\sqrt{3}/3)$. ■

Con la definición 6.4 pueden establecerse ciertos resultados que son intuitivamente claros, pero que demostrarlos desde el punto de vista de la Geometría Analítica, pueden no ser tan simple, desde el punto de vista didáctico, ya que se requiere el dominio de las técnicas de demostración de la igualdad de conjuntos.

Teorema 6.1 Dados dos planos paralelos o bien son un solo plano o bien su intersección es vacía. Dos planos no paralelos en $\mathbb{R}^3$ se intersecan en una línea recta.

N Lo interesante y novedoso para el lector del teorema 6.1 podría ser como llevar las proposiciones geométricas a un contexto puramente algebraico de la solución de sistemas de ecuaciones con más incógnitas que ecuaciones. El teorema mencionado tiene el siguiente equivalente algebraico.

Teorema 6.2 El sistema

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z &= D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z &= D_2, \end{cases} \tag{6.11}$$

o bien no tiene solución (planos paralelos distintos), o bien tiene infinitas soluciones de la forma $(x,y,z) = P_0 + sa + tb$ donde P_0 es un punto cualquiera en cualquiera de los planos y a,b son vectores no paralelos entre sí que generan a cualquiera de los planos (planos paralelos que coinciden), o bien todas las soluciones son de la forma $(x,y,z) = P_0 + ta$, $t \in \mathbb{R}$ donde P_0 es un punto situado en ambos planos y a un vector paralelo a ambos planos (planos no paralelos se intersecan en una recta).

Es muy importante tener bien establecidas estas versiones equivalentes del teorema 6.1 para futuras generalizaciones de sistemas de N ecuaciones con M incógnitas, donde $M > N$.

Ahora, en vez de demostrar el teorema se mostrará como encontrar las soluciones de dichos sistemas, con dos métodos, un método es importante por su generalización a dimensiones mayores que tres, y el segundo método sólo se aplica en $\mathbb{R}^3$, pero ayuda a profundizar las ideas de planos rectas y las relaciones entre ellos.

■ **Ejemplo 6.7** Determine si los siguientes pares de planos se intersecan o no, si se intersecan determine todas las soluciones:

1. Los planos

$$\begin{cases} 3x+2y-z &= 1 \\ x+y+z &= -2 \end{cases} \tag{6.12}$$

2. Los planos

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= -2 \end{cases} \tag{6.13}$$

3. Los planos

$$\begin{cases} 2x+2y+2z &= -4 \\ x+y+z &= -2 \end{cases} \tag{6.14}$$

Solución. 1) Para resolver (6.12), primero usamos un método puramente algebraico que puede extenderse a dimensiones mayores que tres. Se tiene que

$$\begin{cases} 3x+2y-z = 1 \\ x+y+z = -2, \end{cases}$$

despejamos z en la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$\begin{cases} z = 3x+2y-1 \\ x+y+(3x+2y-1) = -2, \end{cases}$$

simplificando y despejando y en la segunda ecuación

$$\begin{cases} z = 3x+2y-1 \\ y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \end{cases}$$

sustituimos y de la segunda ecuación en la primera y simplificamos

$$\begin{cases} z = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Si ponemos $x = t$, $t \in \mathbb{R}$ se tiene que los planos se intersecan en una recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{4}{3}t - \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3}t - \frac{5}{3}. \end{cases} \tag{6.15}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

El segundo método para encontrar la recta de intersección de los planos, sólo funciona en $\mathbb{R}^3$. Cada recta en un plano debe ser perpendicular a la normal del plano, de esta forma el vector de dirección a de la recta en la intersección de los planos debe ser ortogonal a las normales de ambos planos. Por lo tanto en si $n_1 = (3,2,-1)$ y $n_2 = (1,1,1)$ son las normales a los planos en (6.12), el vector a queda determinado por $a = n_1 \times n_2 = (3,-4,1)$. Basta encontrar un punto en la intersección de los planos para encontrar la ecuación vectorial de la recta. Por ejemplo si tomamos $t = 0$ en (6.15), se tiene $(0,-1/3,-5/3)$ es un punto en la intersección (verifíquelo). Por lo tanto la recta tiene ecuación vectorial $(x,y,z) = (0,-1/3,-5/3) + t(3,-4,1)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

N Recuerde que las ecuaciones paramétricas no son únicas, por lo que se pueden tener infinitas diferentes representaciones para un mismo objeto.

6.4 Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Con la información que tenemos de las posiciones relativas entre dos planos podemos pasar a preguntarnos ¿cuáles son *todas* las posibles posiciones entre tres planos? Sin embargo, esta pregunta es mejor plantearla desde el punto de vista del álgebra. Es decir, dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, ¿cuando el sistema tiene solución única?, ¿cuándo no tiene solución? Estas preguntas son relevantes dado el gran número de aplicaciones que tienen en las ciencias y las ingenierías. Más concretamente, consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \tag{6.16}$$

donde a_{ij}, b_i son números reales dados y x,y,z son cantidades por determinar llamadas *incógnitas del sistema*. Las preguntas serían ¿existen condiciones sobre los números dados a_{ij} para que el sistema (6.16) tenga solución única?

Ahora con la formulación matemática precisa podemos usar la intuición geométrica para responderlas. Efectivamente, cada ecuación del sistema (6.16) representa un plano en $\mathbb{R}^3$ y así, resolver el sistema es equivalente a encontrar si los planos se intersecan o no y las circunstancias bajo las cuales esto ocurre. Enlistamos enseguida, las situaciones posibles.

a) Si las normales a los tres planos *no son coplanares* el sistema (6.16) **tiene solución única,** dada por el punto de intersección de los tres planos.
b) El sistema **no tiene solución** en cualquiera de los siguientes casos: si los tres planos son distintos y paralelos; si dos planos se intersecan en una recta paralela al tercer plano; Si dos planos son paralelos y un tercer plano los interseca a cada uno separadamente.

c) Los tres planos se intersecan en una recta, es decir, el sistema tiene infinitas soluciones, dadas por la recta de intersección.
d) Los casos en los que dos planos coinciden se reducen al caso de dos planos estudiado en la sección anterior.

La condición geométrica de que los planos tengan normales paralelas es fácil de verificar dado que dos vectores son paralelos si uno es múltiplo del otro. La condición que estudiaremos con detalle es la de cuando los tres vectores normales *no son coplanares*. Desde el punto de vista del álgebra lineal, tres vectores en $\mathbb{R}^3$ no son coplanares si y sólo si son *linealmente independientes*. Daremos primero una definición.

Definición 6.5 Dados dos vectores no paralelos a, b en $\mathbb{R}^3$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de a y b, $\mathscr{P} = \{sa + tb,\ s,t \in \mathbb{R}\}$ se llama plano generado por a y b. Dado un vector c, si no existen $s,t \in \mathbb{R}$ tales que $c = ra + tb$ se dice que los vectores a, b, c no son coplanares o bien que son linealmente independientes.

Nos restringimos al estudio de $\mathbb{R}^3$ y desde el punto de vista de la geometría, si tres vectores no son coplanares podemos generar con ellos un paralelepípedo con volumen distinto de cero.

Actividad 6.6 **Volumen de un paralelepípedo.** Dados tres vectores no coplanares a, b, c encuentre el volumen del paralelepípedo generado por ellos. Demuestre que tal volumen está dado por $|(a \times b) \cdot c|$. Demuestre que el llamado triple producto escalar $(a \times b) \cdot c$ puede calcularse usando el determinante

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{6.17}$$

■

Solución del taller 6.6. Dados tres vectores no coplanares a, b, c podemos encontrar el volumen del paralelepípedo generado por ellos de la siguiente forma. Tomamos a y b en la base, así el área de la base está dada por $\|a \times b\|$ como se mostró en la actividad 6.5. Ahora para calcular el volumen necesitamos la altura del paralelepípedo. Claramente c no está en el plano generado por a y b, así la altura estará dada por la proyección del vector c sobre la normal al plano generado por a y b. Pero, la normal a dicho plano está dada por $a \times b$. Así, la altura del paralelogramo esta dada por $\|c\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $a \times b$ y c. Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo esta dado por el área de la base por la altura, es decir por

$$\|a \times b\|\,\|c\| \cos\theta = |(a \times b) \cdot c|$$

Finalmente no es difícil calcular el triple producto escalar por medio de determinantes sobre todo si vemos que

$$(a \times b) \cdot c = c \cdot (a \times b)$$

y como

$$c \cdot (a \times b) = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

El lector no debe tener dificultad en demostrar que

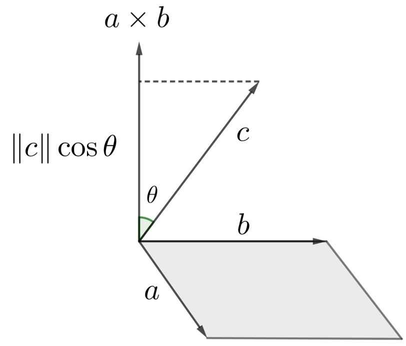


Figura 6.3: Altura del paralelepípedo generado por a, b, c.

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Dado lo anterior podemos afirmar que tres vectores no son coplanares si y solo si$(a \times b) \cdot c \neq 0$. Este hecho lo podemos escribir en forma de lema.

Lema 6.1 Tres vectores a, b, c son linealmente independientes si y solo si$(a \times b) \cdot c \neq 0$.

N El triple producto escalar $(a \times b) \cdot c$ suele denotarse de la forma abc. Se puede demostrar que $|abc| = |cab| = |cba| = |bac| = |bca|$ sin mayor dificultad, se propone como ejercicio al lector.

Con este lema podemos enunciar el siguiente teorema para la solución de sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Teorema 6.3 El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

tiene solución única si y sólo si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

En este caso la solución está dada por la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \; z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

El determinante D se llama *determinante del sistema.* Si $D=0$ bien puede ocurrir que el sistema no tenga solución como en el caso de tres planos distintos y paralelos entre sí, o bien el sistema tiene infinitas soluciones, como en el caso de tres planos distintos que se intersecan en una recta.

Demostración. La demostración de la existencia de soluciones es consecuencia de que los vectores normales a los planos del sistema (6.16) no son coplanares, si $D \neq 0$ por el lema 6.1. Por lo tanto los tres planos se intersecan en un solo punto bajo esta condición. Los cálculos para encontrar las soluciones son semejantes a los dados para la regla de Cramer para la recta en $\mathbb{R}^2$ y se dejan como ejercicio para el lector. ■

N Hay muchas técnicas para resolver sistemas de ecuaciones, en particular la regla de Cramer no es eficiente para sistemas mayores que de tres ecuaciones con tres incógnitas. Aquí se da sólo este método solo de manera introductoria. Para otros métodos más eficientes se recomiendan los libros de Álgebra Lineal Aplicada o de métodos numéricos. A veces es mejor usar el método de sustitución cuando las ecuaciones son muy sencillas como algunas ecuaciones en el ejercicio 6.3.

■ **Ejemplo 6.8** Determine si los planos $2x+3y-z=0$, $x+y=1$ y $y+3z=2$ se intersecan en un solo punto, si es así determine las coordenadas del punto de intersección.
Solución. Consideramos el sistema formado por los tres planos

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y=1 \\ y+3z=2. \end{cases} \tag{6.18}$$

El determinante del sistema 6.18 esá dado por:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6-9-1=-4$$

Como el determinante del sistema $D=-4$, es decir $D \neq 0$, los planos se intersecan en un punto. Con la regla de Cramer calculamos las coordenadas del punto de intersección.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-8}{-4}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{4}{-4}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-4}{-4}=1.$$

Por lo tanto el punto de intersección de los planos es $P_o = (2,-1,1)$. Comprobamos sustituyendo las coordenadas de P_o en cada una de las ecuaciones de los planos: $2(2)+3(-1)-(1)=0$, $2+(-1)=1$ y $-1+3(1)=2$. Por lo tanto las coordenadas de P_o satisfacen las ecuaciones de cada uno de los planos y así esta en cada uno de ellos, por lo que concluimos que P_o esta en la intersección de los tres planos y por lo tanto es solución del sistema (6.18). ■

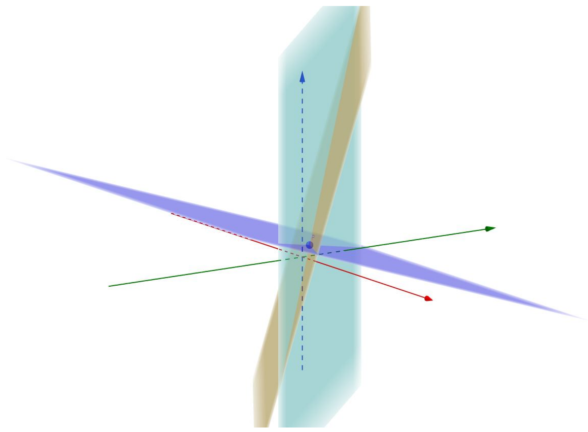


Figura 6.4: Intersección de los tres planos del ejemplo 6.8 .

N Es muy importante recalcar que si un punto está en la intersección de tres planos, sus coordenadas debe forzosamente satisfacer las ecuaciones de cada uno de los planos. Es de vital importancia verificar que esto suceda dado que es fácil que el lector principiante suela equivocarse con los cálculos.

■ **Ejemplo 6.9** Dados los planos $x=-3$, $x=3$ y $x=9$ compruebe que el determinante del sistema es cero.
Solución. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x=-3 \\ x=3 \\ x=9. \end{cases}$$

Claramente el determinante del sistema está dado por

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

No es difícil demostrar que en general planos paralelos tienen determinante del sistema cero. ■

■ **Ejemplo 6.10** Dados los planos $z=0$, $y=0$, $y+z=0$ compruebe que el determinante del sistema es cero. Compruebe que los planos se intersecan en una recta. Encuentre la ecuación vectorial de tal recta.
Solución. El plano $z=0$ corresponde al plano xy el plano $y=0$ corresponde a xz los cuales se intersecan en el eje x. Claramente el eje x está contenido en el plano $y+z=0$ ya que la normal al plano $n=(0,1,1)$ es ortogonal al vector $\mathbf{i}=(1,0,0)$ el cual es paralelo al eje x. Para calcular el determinante del sistema

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ y+z=0, \end{cases}$$

simplemente escribimos

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La recta de intersección de los planos, como dijimos es el eje x cuya ecuación vectorial es $(x,y,z) = t(1,0,0),\ t \in \mathbb{R}$. ■

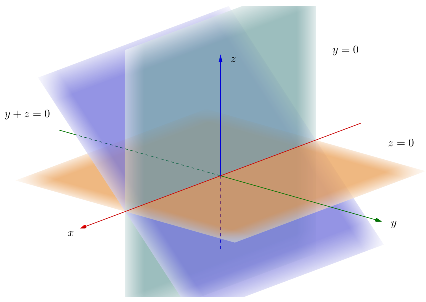


Figura 6.5: Intersección en una recta de los tres planos del ejemplo 6.10.

Ejercicio 6.3 Resuelva los siguientes sistemas cuando sea posible, pero primero dé argumentos que determinen si los problemas tienen o no solución. Compruebe que la solución encontrada sea correcta sustituyendo en cada ecuación de los sistemas correspondientes.

1.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + 4z = 2 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3x - 3y - 3z = 2 \\ x + y + z = 5, \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \\ y + z = -3 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3x - 3y - 3z = 2 \\ x - y + z = 5, \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x+y=1 \\ y-z=2. \end{cases}$$

Independencia lineal en general

Hemos dado una definición de independencia lineal de vectores que sólo puede usarse en $\mathbb{R}^3$, a saber, que tres vectores a, b, c son linealmente independientes si y sólo si el triple producto escalar $a \times b \cdot c$ es distinto de cero. Esta definición es equivalente a la siguiente propiedad, la cual puede extenderse a espacios vectoriales de dimensión arbitraria, sin hacer uso del producto vectorial.

Teorema 6.4 Los vectores $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes si y solo si cualquier combinación lineal $t_1a+t_2b+t_3c=\mathbf{0}$ con $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ implica $t_1=t_2=t_3=0$.

Demostración. Si a, b, c son linealmente independientes entonces $(a\times b)\cdot c \neq 0$. Supongamos que $t_1a+t_2b+t_3c=\mathbf{0}$. Entonces multiplicando con el producto vectorial ambos miembros de la ecuación por a se tiene

$$\begin{aligned} a\times(t_1a+t_2b+t_3c) &= a\times\mathbf{0}=\mathbf{0} \\ t_2(a\times b)+t_3(a\times c) &= \mathbf{0}, \quad \text{ya que } a\times a=\mathbf{0}, \\ t_2(a\times b)\cdot c+t_3(a\times c)\cdot c &= \mathbf{0}\cdot c=0, \quad \text{multiplicando con producto punto por } c, \\ t_2(a\times b)\cdot c &= 0, \quad \text{ya que } a\times c \text{ es ortogonal a } c. \end{aligned}$$

Tenemos así que $t_2(a\times b)\cdot c=0$, pero por hipótesis $(a\times b)\cdot c\neq 0$, así que $t_2=0$. De manera similar se puede demostrar que $t_1=0$ y que $t_3=0$. La implicación recíproca se deja como ejercicio. ■

N El lector con conocimientos de álgebra lineal recordará que independencia lineal de vectores para espacios vectoriales en general se define a partir de la propiedad enunciada en el teorema 6.4 y no al revés, como hemos hecho aquí, sin embargo dado que son conceptos equivalentes he preferido el acercamiento geométrico e intuitivo que seguimos. En general por definición, un conjunto $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de vectores en un espacio vectorial cualquiera, se dice linealmente independiente si y sólo si cualquier combinación lineal $t_1a_1+t_2a_2*\cdots+t_na_n=\mathbf{0}$ implica $t_1=t_2=\cdots=t_n=0$, donde $t_1,\ldots,t_n$ son elementos del campo de definición del espacio vectorial considerado.

Planteamiento de problemas

En esta sección se realiza una actividad mediante la cual se obtiene la fórmula de la distancia de un punto dado a un plano.

Actividad 6.7 Dado un punto $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ se desea calcular la distancia de tal punto a un plano $\mathscr{P}$ con ecuación cartesiana $Ax+By+Cz=D$. ¿Cómo puede calcularse la distancia más corta de un punto fuera de un plano, al plano? 1) Encuentre la ecuación de la recta óptima $\mathscr{R}$, sobre la cual se obtiene la distancia del punto P al plano $\mathscr{P}$. 2) Encuentre el punto de intersección P_1 de la recta $\mathscr{R}$ al plano $\mathscr{P}$. 3) Calcule la distancia de P_o a P_1. 4) Determine una fórmula general para calcular la distancia de un punto a un plano 5) Como un ejemplo de la aplicación calcule la distancia de: a) $(1,1,1)$ a el plano $x=0$; b) La distancia de $(0,0,0)$ al plano $3x+2y+5z=3$. ■

Solución de la actividad 6.7. La distancia de un punto a un plano es la longitud del segmento de recta perpendicular al plano que pasa por P_o e interseca al plano en P_1. Así la distancia de un punto a un plano puede definirse como $d(P_o,P_1)$. 1) La recta óptima para calcular la distancia de un punto P_o al plano $Ax+By+Cz=D$, es la recta perpendicular al plano que pasa por el punto. Dado que la normal al plano tiene vector normal $n=(A,B,C)$, la recta perpendicular al plano que pasa por P_o tiene ecuación vectorial

$$\mathscr{R}:\ (x,y,z)=P_o+tn,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

La ecuación anterior puede escribirse en forma paramétrica como:

$$\begin{cases} x=x_o+At\\ y=y_o+Bt\\ z=z_o+Ct \end{cases} \tag{6.19}$$

2) Las ecuaciones en (6.19) se sustituyen en la ecuación de $\mathscr{P}$ para obtener la intersección de la recta con el plano, es decir para obtener el valor de t con el cual se tiene la intersección. Así se obtiene

$$\begin{aligned} A(x_o+At)+B(y_o+Bt)+C(z_o+Ct) &= D\\ (A^2+B^2+C^2)t &= D-(Ax_o+By_o+Cz_o)\\ t &= \frac{D-(Ax_o+By_o+Cz_o)}{A^2+B^2+C^2} \end{aligned}$$

De esta manera el punto de intersección P_1 con el plano tiene coordenadas

$$\begin{cases} x_1=x_o+A\dfrac{D-(Ax_o+By_o+Cz_o)}{A^2+B^2+C^2}\\ y_1=y_o+B\dfrac{D-(Ax_o+By_o+Cz_o)}{A^2+B^2+C^2}\\ z_1=z_o+C\dfrac{D-(Ax_o+By_o+Cz_o)}{A^2+B^2+C^2} \end{cases} \tag{6.20}$$

3) Como sabemos que la distancia de $d(P_o,P_1)=\|P_o-P_1\|$ se obtiene

$$\begin{aligned} d(P_o,P_1) &= \left\|\frac{D-(Ax_o+By_o+Cz_o)}{A^2+B^2+C^2}(A,B,C)\right\|\\ &= |D-(Ax_o+By_o+Cz_o)|\left\|\frac{1}{A^2+B^2+C^2}(A,B,C)\right\|\\ &= \frac{|D-(Ax_o+By_o+Cz_o)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

Justifique que $\left\|\dfrac{1}{A^2+B^2+C^2}(A,B,C)\right\|=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
4) Se obtiene la siguiente fórmula para la distancia de P_o a $\mathscr{P}$ denotada $d(P_o,\mathscr{P})$:

$$\boxed{d(P_o,\mathscr{P})=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.} \tag{6.21}$$

Justifique que $|D-(Ax_o+By_o+Cz_o)|=|Ax_o+By_o+Cz_o-D|$. □

N Se debe tener cuidado al acercarse a otros libros donde la ecuación del plano en lugar de $Ax+By+Cz=D$ se escribe $Ax+By+Cz+D=0$ (D está escrita con un signo diferente) en tal caso obviamente,

$$d(P_o,\mathscr{P})=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

es la fórmula adecuada.

5) Ahora podemos calcular la distancia de $(1,1,1)$, a $x=0$, mediante la fórmula (6.21) si observamos que $A=1, B=C=D=0$, por lo que $d(P_o,\mathscr{P})=1$. Para el segundo ejemplo, es decir, para calcular la distancia de $(0,0,0)$ a $3x+2y+5z=3$ se tiene $d(P_o,\mathscr{P})=\dfrac{3}{\sqrt{3^2+2^2+5^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{38}}$

Actividad 6.8 a) Halle las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por el punto $P=(2,3,-5)$ y es paralela a la recta

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0. \end{cases} \tag{6.22}$$

b) Muestre que la recta $x=-2+3t$, $y=1-4t$, $z-5+4t$, es paralela al plano $4x-3y-6z-5=0$. ■

Solución de la actividad 6.8. a) Necesitamos encontrar un vector de dirección a, de la recta buscada. Dado que es paralela a la recta que resulta de la intersección de dos planos

$$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z-3=0. \end{cases} \tag{6.23}$$

El vector de dirección que buscamos a es ortogonal a ambos planos (¿por qué?). Así que puede calcularse como el producto vectorial de las normales $n_1=(3,-1,2)$ y $n_2=(1,3,-2)$ a los planos dados, es decir $a=n_1\times n_2=(-2,4,5)$ (¡haga el cálculo!). Concluimos que la ecuación vectorial de la recta buscada es

$$(x,y,z)=P+ta=(2,3,-5)+t(-2,4,5).$$

De aquí, si despejamos t e igualamos las ecuaciones, obtenemos las ecuaciones cartesianas de la recta buscada.

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+5}{5}.$$

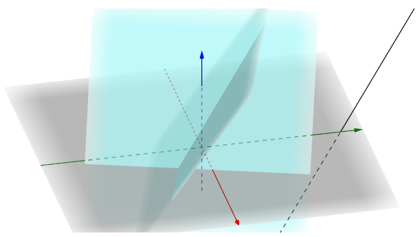


Figura 6.6: Recta paralela a la recta de intersección de dos planos de la actividad 6.8 .

b) La recta $x=-2+3t$, $y=1-4t$, $z=5+4t$, tiene vector de dirección $a=(3,-4,4)$. Para ver que la recta dada es paralela al plano $4x-3y-6z-5=0$, debemos tener que la normal al plano $n=(4,-3,-6)$, debe ser perperdicular a toda recta sobre el plano. Por este motivo si a es paralelo al plano debemos tener $a\cdot n=0$. Efectivamente,

$$a\cdot n=(3,-4,4)\cdot(4,-3,-6)=12+12-24=0.$$

Se concluye que la recta y el plano son paralelos. □

6.5 *GeoGebra* y gráficas en $\mathbb{R}^3$

Para usar *GeoGebra* en tres dimensiones se tienen varias opciones:

- Al abrir el programa *GeoGebra* aparece el recuadro "Aplicaciones GeoGebra" allí debe poner el ratón sobre la opción "Graficador 3D" y oprimir el botón izquierdo, deberá aparecer una nueva pantalla con con los recuadros superiores como en la figura 6.7.
- Si se tiene abierta la pantalla de *GeoGebra* puede ir a la opción vista que se encuentra sobre los recuadros de herramientas oprimir el botón izquierdo del ratón con lo que se desplegara un menú donde aparece la opción "Vista Gráfica 3D", aparecerá entonces una pantalla como la de la figura 6.7.
- En el programa de *GeoGebra*, oprimir al mismo tiempo las teclas `Ctrl, Mayús, 3`, en este caso también se despliega la pantalla de la figura 6.7.

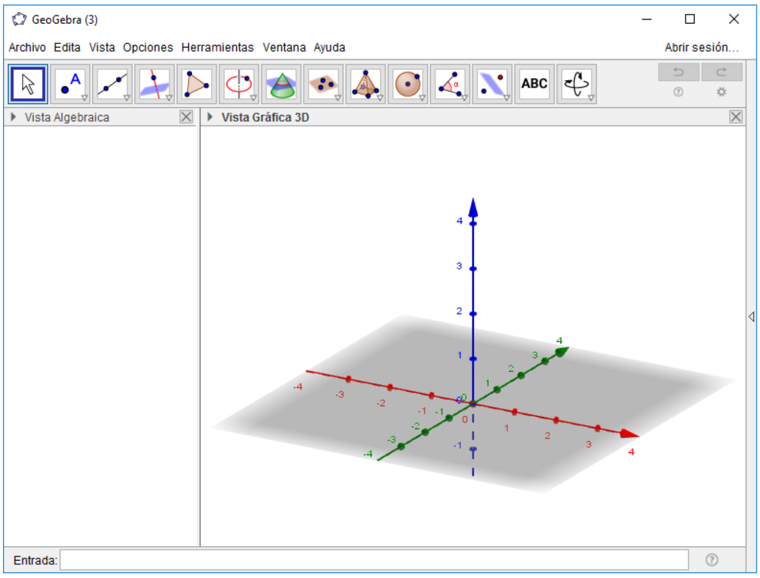


Figura 6.7: Pantalla de *GeoGebra* para generar gráficas en tres dimensiones .

Recomendamos ampliamente que el lector explore los menús y las opciones que se despliegan en los íconos que aparecen en la parte superior de la pantalla 3D de *GeoGebra* y que se muestran en la figura 6.8

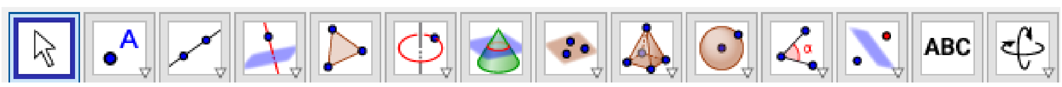


Figura 6.8: Íconos de *GeoGebra* para gráficas en tres dimensiones.

Rectas 3D en *GeoGebra*

Las rectas de $\mathbb{R}^3$ en *GeoGebra* tienen muchas opciones para generarse. Por ejemplo con el tercer ícono se despliegan todas las opciones que conocemos en el plano como se hizo en la sección 4.5. Para generar rectas en $\mathbb{R}^3$ también se pueden usar las ecuaciones paramétricas de la recta. Para este fin, en el recuadro "Entrada" se escribe `curva` con lo cual aparece el texto que se muestra en la figura 6.9.

Por ejemplo, para generar la recta de la actividad 6.8 inciso b), con t en el intervalo $[-10,10]$

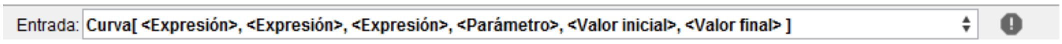


Figura 6.9: Recuadro “Entrada” de *GeoGebra* para generar curvas 3D.

se deben escribir las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1-4t \\ z = -5+4t, \end{cases}$$

poniendo cada ecuación paramétrica en los campos <Expresión>, una variable en cada campo en el orden x, y, z; en el campo <Parámetro>se debe escribir t, dado que éste es el nombre del parámetro correspondiente; finalmente, en los campos <Valor inicial>, <Valor final>debemos poner $-10, 10$ si se desea que t esté en el intervalo $[-10, 10]$. De esta manera, en el campo “Entrada” debe quedar como se muestra en la figura 6.10. Se procede entonces a presionar la tecla “entrada” del tablero, para generar la gráfica de la recta.

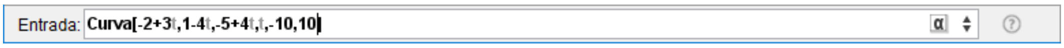


Figura 6.10: Recuadro “Entrada” de *GeoGebra* con las ecuaciones paramétricas de la recta de la actividad 6.8 inciso b).

Planos con *GeoGebra*

Para generar planos en *GeoGebra* se puede escribir la ecuación del plano en el recuadro “Entrada”, o bien desplegar el menú del octavo ícono contando de izquierda a derecha, donde se encuentran las herramientas: Plano por tras puntos, Plano, Plano perpendicular y Plano paralelo. Invitamos al lector a que explore dichas herramientas.

6.6 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico

Utilice *GeoGebra* para producir las gráficas de todos los objetos geométricos de los siguientes programas. Por ejemplo, para generar flechas (segmentos orientados) en $\mathbb{R}^3$ se procede como en $\mathbb{R}^2$ es decir se escribe en el recuadro “Entrada” una letra minúscula seguida de las coordenadas del vector por ejemplo, si escribimos `a=(1,1,1)` al oprimir la tecla retorno, se genera el segmento que va del origen de coordenadas al punto $(1,1,1)$. También se puede usar el tercer ícono (partiendo de izquierda a derecha) “dos puntos atravesados por una línea”, como se hace también en el plano. En 3D es muy importante el último ícono el cual gira la vista gráfica al gusto del usuario.

1. Calcule la norma del vector $v = (6,3,2)$
   Solución. $\|v\| = 7$.
2. Halle el punto inicial del vector $v = (2,-3,-1)$ si el otro extremo coincide con el punto $P = (1,-1,2)$.
   Solución. $(-1,2,3)$.
3. Calcule los cosenos directores del vector $v = (3/13, 4/13, 12/13)$.
   Solución. $\cos\alpha = 3/13, \cos\beta = 4/13, \cos\gamma = 12/13$.
4. Los vectores u, v son ortogonales y $\|u\| = 5$, $\|v\| = 12$. Calcule $\|u+v\|$ y $\|u-v\|$.
   Solución. $\|u+v\| = \|u-v\| = 13$.
5. Los vectores u, v forman un ángulo de $\pi/6$. Si se sabe que $\|u\| = 6$ y $\|v\| = 5$, calcule $\|u \times v\|$.
   Solución. $\|u \times v\| = 15$.

6. Encuentre las ecuaciones de la recta que pasa por $(1,-1,2)$ y $(9,4,-3)$
   Solución. $(x,y,z) = (1,-1,2)+t(8,5,-5)$, $t \in \mathbb{R}$
7. Halle las ecuaciones simétricas, vectorial y paramétricas de la recta que pasa por $P=(2,0,3)$ y es paralela al vector $a=(2,-3,5)$.
   Solución. Ec. vectorial, $(x,y,z) = (2+2t,-3t,3+5t)$; ec. simétricas, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-3}{5}$.
8. Calcule la ecuación del plano que pasa por $P=(2,1,-1)$ y cuyo vector normal es $n=(1,-2,3)$.
   Solución. $x-2y+3z+3=0$.
9. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $P=(3,-1,2)$, $Q=(4,-1,-1)$, $R=(2,0,2)$.
   Solución. $3x+3z+z-8=0$.
10. Determine las coordenadas de un vector normal a los planos siguientes:
    a) $2x-y-2z+5=0$.
    b) $5y-3z=0$
    c) $x+2=0$.
    Solución. a)$(2,-1,-2)$. b) $(0,5,-3)$. c) $(1,0,0)$.
11. **Intersección de dos planos.** Determine cuales de los siguientes planos se intersecan calculando el ángulo entre ellos y encuentre el conjunto en la intersección. Compruebe sus respuestas sustituyendo en la ecuación de ambos planos. Grafique usando GeoGebra.
    a)
    $$\begin{cases} 3x+5y+2z-1=0 \\ 2x+y-2z-4=0. \end{cases}$$
    b)
    $$\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ -6x+2y-4z-3=0. \end{cases}$$
12. Encuentre la ecuación cartesiana del plano paralelo a los vectores **i** y **j** que pasa por $(-1,5,3)$. Dibuje la gráfica del plano.
13. Calcule una normal al plano $(x,y,z) = (3-5s+7t, s-t, -2+t)$ y encuentre la ecuación cartesiana del plano mediante esta normal. Dibuje las gráficas usando GeoGebra y compruebe su resultado mediante la graficación de las ecuaciones paramétricas del plano y la graficación de la ecuación cartesiana.
14. **Intersección de tres planos.** Resuelva el ejercicio 6.3.
15. Calcule la distancia del punto $P=(-2,-4,3)$ al plano $2x-y+2z+3=0$.
    Solución. $d=3$.

Nivel medio

1. Resuelva los ejercicios 6.1, 6.2.
2. Calcule los ángulos internos del triángulo con vértices en $P=(1,2,1)$, $Q=(3,-1,7)$ y $R=(7,-4,-2)$. ¿Este triángulo es isósceles?
   Solución. No es isósceles.
3. Dados los tres vectores: $u=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $v=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ y $w=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, halle el vector $a=(a_1,a_2,a_3)$ el cual satisface que $a\cdot u=-5$, $a\cdot v=-11$ y $a\cdot w=20$
   Solución. Sugerencia: calcule el producto de $u+v+w=0$ con u. $a=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

4. Si los vectores u, v, w satisfacen $u+v+w=\mathbf{0}$ muestre que $u\times v = v\times w = w\times u$.
   Solución.
5. Determine el ángulo entre los planos $2x+3y-z-3=0$ y $x-y-z=3$.
   Solución. $\pi/2$.
6. Calcule la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{0}$ y que es paralelo al plano $5x-3y+2z-3=0$.
   Solución. $5x-3y+2z=0$.
7. Calcule la distancia d, entre los planos paralelos: $x-2y-2z-12=0$ y $x-2y-2z-6=0$.
   Solución. $d=2$.
8. Calcule el ángulo α formado por las rectas

$$\begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-6y-6z+2=0 \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

   Solución. $\alpha = \arccos(\pm 4/21)$.
9. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta $x=-7+3t$, $y=4-2t$, $z=4+3t$ y la recta $x=1+t$, $y=-9+2t$, $z=-12-t$. que pasa por $(-5,1,0)$.
   Solución. $x=-5+2t$, $y=1-3t$, $z=-4t$.
10. Muestre que la recta $x=-2+3t$, $y=1-4t$, $z=-5+4t$ es paralela al plano $4x-3y-6z=0$.
    Solución. *Sugerencia:* encuentre el ángulo entre el vector de dirección de la recta y la normal al plano.
11. Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de la recta

$$\begin{cases} 2x+y-3-3=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

    con los planos coordenados
    Solución. $(2,-1,0)$, $(4/3,0,-1/3)$, $(0,2,-1)$.

Nivel superior

1. Demuestre que si $u+v+w=\mathbf{0}$, los vectores u, v, w son coplanares
   Indicación. Determine el producto cruz de uno de ellos con los otros.
2. Muestre que la recta

$$\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$$

   pertenece al plano $4x-3y+7z-7=0$
   Indicación. ¿Cuál es la posición relativa del vector de dirección de la recta con la normal al plano?
3. Halle las ecuaciones de la recta que pasa por $P=(-4,-5,3)$ y corta a las dos rectas

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1},$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

   Solución. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$.

4. Halle las ecuaciones del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ y por el punto $P=(4,-2,-3)$.
   Solución. $23x-2y+21z-33=0$.
5. Para cuáles valores de A y B el plano $Ax+By+3z-5=0$ es perpendicular a la recta $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$.
   Solución. $A=-3$, $B=9/2$.
6. Halle el punto que es simétrico al punto $P=(4,1,6)$ respecto a la recta
$$\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$$
   Solución. $(2,-3,2)$.
7. Demuestre que la ecuación del plano que pasa por la recta $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ y es perpendicular al plano $Ax+By+Cz+D=0$ puede representarse como
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_o & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$$
   Indicación. Muestre que el vector de dirección de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.
8. Halle la distancia d, más corta entre las rectas $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ y $x=9+6t$, $y=-2t$, $z=2-t$.
   Solución. $d=7$.
9. Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ y se corta con las rectas
$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$
   Solución. $x=-3+8t$, $y=-1-3t$, $z=2-4t$.
10. Calcule el volumen V de la pirámide limitada por el plano$2x-3y+6z-12=0$ y los planos coordenados. Use el triple producto $V=|a\cdot(b\times c)|$ para vectores apropiados a,b,c. Explique por qué el triple producto da el volumen buscado.
    Solución. $V=8$.
11. Demuestre que una condición necesaria y suficiente para que tres vectores a, b, c en $\mathbb{R}^3$ no sean coplanares es que si se tiene
$$\alpha a+\beta b+\gamma c=\mathbf{0}$$
    entonces necesariamente $\alpha=\beta=\gamma=0$.
    Solución. Use que $[abc]\neq 0$ si y sólo si los vectores no son colineales

7. Superficies cuadráticas

7.1 La esfera

A partir de la fórmula para la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$ la figura geométrica más fácil de describir es la esfera, como puede verse en la siguiente definición.

Definición 7.1 — Esfera. Se denomina esfera al conjunto de puntos $P=(x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ que se encuentran a una distancia fija r, llamada *radio de la esfera*, de un punto dado $C=(x_0,y_0,z_0)$, llamado centro de la esfera.

Ejercicio 7.1 De acuerdo a la definición 7.1, una esfera es el conjunto de puntos

$$\mathscr{S}=\{P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : d(P,C)=r\}.$$

Encuentre la ecuación que deben satisfacer los puntos sobre la esfera. ■

Solución del ejercicio 7.1. Dado que $P=(x,y,z)$ satisface la identidad $d(P,C)=r$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\| &= r \\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} &= r, \end{aligned}$$

y al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación anterior se tiene

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2,}$$

la cual es la ecuación de la esfera con centro en (x_0,y_0,z_0) y radio r. □

■ **Ejemplo 7.1** Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $(0,0,0)$ y radio $r=1$.
Solución. La distancia de cualquier punto $P=(x,y,z)$ a $(0,0,0)$ debe ser igual a 1. Por lo tanto

$$x^2+y^2+z^2=1$$

es la ecuación de la esfera. ■

N En cursos avanzados de geometría suele llamarse *esfera unitaria* a la esfera con centro en el origen y radio 1, y es común denotarla por $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$.

Ejercicio 7.2 Determine si las siguientes ecuaciones corresponden a esferas.

a) $x^2+y^2+z^2-3x+5y-7z-14=0$.
b) $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+14=0$.
c) $x^2+y^2+z^2-x-y-z+50=0$.

Encuentre los centros y los radios cuando sea posible, cuando no sea posible, diga a que conjunto de puntos corresponde la ecuación. ■

7.1.1 Ecuación general de la esfera

Una vez realizados los ejemplos del ejercicio 7.2 y siguiendo la misma linea de lo que se hizo con las cónicas en $\mathbb{R}^2$ damos la forma general de la ecuación general de la esfera.

Teorema 7.1 La ecuación $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ corresponde a una esfera en $\mathbb{R}^3$ con centro en $(-D/2,-E/2,-F/2)$ y radio $r=\sqrt{I}$, si $I=\left(\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}+\frac{F^2}{4}\right)-G>0$. La ecuación corresponde a un punto si $I=0$ y corresponde al conjunto vacío si $I<0$. Recíprocamente, toda esfera en $\mathbb{R}^3$ tiene una ecuación de la forma $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$, llamada *forma general de la ecuación de la esfera.*

Demostración. Efectivamente, desarrollando la ecuación $(x-x_o)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ se llega a la forma $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ (¡hágalo!). Partiendo de la ecuación $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$, se completan cuadrados para llegar a la ecuación

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G = \left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2+\left(z+\frac{F}{2}\right)^2+ \\ +G-\left(\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}+\frac{F^2}{4}\right)=0. \end{aligned}$$

Así la ecuación corresponde a una esfera si $I=\left(\dfrac{D^2}{4}+\dfrac{E^2}{4}+\dfrac{F^2}{4}\right)-G>0$. La ecuación corresponde al punto $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2},-\dfrac{F}{2}\right)$ si $I=0$ y la ecuación corresponde al conjunto vacío si $I<0$. ■

7.2 Planteamiento de problemas

Los problemas de esta sección pueden ser más difíciles que los de otras secciones. Comenzamos determinando las posibilidades de intersección de un plano y una esfera dados.

Actividad 7.1 — Intersecciones de planos y esferas. Dados un plano y una esfera existen tres posibilidades: a) el plano y la esfera no se intersecan, b) el plano y la esfera se intersecan en un punto, en tal caso se dice que el plano es tangente a la esfera, c) El plano y la esfera se cortan en una circunferencia. 1) Compruebe que esto ocurre. 2) Determine las condiciones para que un plano dado sea tangente a una esfera dada. ■

Solución de la actividad 7.1. No se pierde generalidad si se considera la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$. Si se considera el plano $z=0$ se tiene la ecuación $x^2+y^2=r^2$ la cual en el plano $z=0$ corresponde a una circunferencia con centro en $(0,0,0)$ y radio r. Consideramos ahora planos paralelos al plano $z = 0$, digamos $z = k$. al sustituir en la ecuación de la esfera se tiene

$$x^2 + y^2 = r^2 - k^2$$

La cual corresponde a una circunferencia en el plano $z = k$ con centro en $(0,0,k)$ y radio $r = \sqrt{r^2 - k^2}$ si $-r < k < r$; corresponde al conjunto vacío si $k > r$ o $k < -r$; finalmente, corresponde a un punto de tangencia si $k = \pm r$, es decir los planos $z = r$ y $z = -r$ son tangentes a la esfera unitaria.

Para las condiciones de tangencia de planos no paralelos a los planos coordenados, se desea encontrar los parámetros s,t para que el plano de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \tag{7.1}$$

El plano en (7.1) tiene vectores de dirección $a = (a_1,a_2,a_3)$ y $b = (b_1,b_2,b_3)$ no se pierde generalidad en suponer que tienen norma uno y que son ortogonales entre sí. Supondremos también que (x_0,y_0,z_0) es un punto sobre la esfera, es decir $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$. Sustituimos las ecuaciones (7.1) en la ecuación de la esfera para obtener

$$(x_0 + sa_1 + tb_1)^2 + (y_0 + sa_2 + tb_2)^2 + (z_0 + sa_3 + tb_3)^2 = r^2$$

Al desarrollar se tiene

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + s^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + t^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \\ +2s(x_0a_1 + y_0a_2 + z_0a_3) + 2t(x_0b_1 + y_0b_2 + z_0b_3) + \\ +2st(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \quad = \quad r^2 \end{aligned}$$

Dado que $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$, $a \cdot b = 0$ y $\|a\| = \|b\| = 1$ se simplifica (¡hágalo!) la ecuación anterior para obtener

$$s^2 + t^2 + 2s(x_0,y_0,z_0) \cdot a + 2t(x_0,y_0,z_0) \cdot b = 0.$$

Completamos cuadrados para obtener

$$(s + (x_0,y_0,z_0) \cdot a)^2 + (t + (x_0,y_0,z_0) \cdot b)^2 = ((x_0,y_0,z_0) \cdot a)^2 + ((x_0,y_0,z_0) \cdot b)^2.$$

Se obtiene así una solución única $s = t = 0$ si y solo si$(x_0,y_0,z_0) \cdot a = (x_0,y_0,z_0) \cdot b = 0$. Es decir si el vector de posición del punto (x_0,y_0,z_0) es ortogonal a los vectores a,b que generan al plano, es decir, el vector (x_0,y_0,z_0) es normal al plano tangente en el punto de la esfera (x_0,y_0,z_0). De esta forma la ecuación de cualquier plano tangente en el punto (x_0,y_0,z_0) en la esfera con centro en $(0,0,0)$ y radio r es (¡verifíquelo!):

$$\boxed{x_0x + y_0y + z_0z = r^2.} \tag{7.2}$$

Como un ejercicio adicional, encuentre las condiciones de tangencia de un plano a una esfera con centro arbitrario y radio r. □

Con la ecuación (7.2) del plano tangente a la esfera podemos demostrar un teorema que será relevante en el estudio de las secciones cónicas.

Teorema 7.2 Sea $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ un punto fuera de una esfera dada. Dadas las rectas tangentes a la esfera que pasan por P_o, sean P_1 y P_2, los puntos de tangencia sobre la esfera. Entonces la distancia de P_o a los puntos de tangencia es constante. Es decir, $d(P_o,P_1) = d(P_o,P_2)$.

Demostración. No se pierde generalidad si suponemos que la esfera, tiene centro en el punto $(0,0,0)$. Sean $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ y $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$. Por la ecuación (7.2) dado que P_o se encuentra en los planos tangentes que contienen a P_1 y a P_2 se cumplen las ecuaciones

$$x_1x_o + y_1y_o + z_1z_o = r^2 \tag{7.3}$$
$$x_2x_o + y_2y_o + z_2z_o = r^2. \tag{7.4}$$

Por otra parte,con la fórmula de la distancia $d(P_o,P_1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} d(P_o,P_1)^2 &= (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 + (z_o - z_1)^2 \\ &= x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ &\quad -2(x_ox_1 + y_oy_1 + z_oz_1) \\ &= x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2, \end{aligned}$$

dada la ecuación (7.3) y que $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2$ puesto que P_1 está sobre la esfera. Observe que $x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 > r^2$ ya que P_o está fuera de la esfera. Similarmente, dada la ecuación (7.4), tenemos para

$$d(P_o,P_2)^2 = (x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2 + (z_o - z_2)^2 = x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2.$$

Por lo tanto se cumple que $d(P_o,P_1) = d(P_o,P_2)$. ■

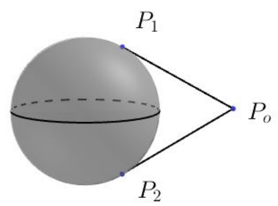


Figura 7.1: Tangentes a la esfera del teorema 7.2.

Ahora planteamos un problema que solo pueden abordar aquellos estudiantes que tienen cierta soltura resolviendo sistemas de ecuaciones lineales. Tendremos dos sistemas, uno *no lineal* (intersección de las esferas) y otro lineal con cinco ecuaciones, pero muy simple.

Actividad 7.2 Halle la ecuación de la esfera que pasa por la circunferencia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 6z - 5 = 0 \\ 5x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

y por el punto $(2,-1,1)$ ■

Solución de la actividad 7.2. El problema de esta actividad requiere que el lector comprenda primero que el sistema (7.5) representa efectivamente un círculo en $\mathbb{R}^3$. Note que la primera ecuación en (7.5) corresponde a una esfera y la segunda a un plano. El sistema implica que la circunferencia está dada por la intersección de una esfera y un plano. ¿Cómo puede saberse si la intersección es realmente una circunferencia y no un punto o el conjunto vacío? Dé argumentos.

Complete cuadrados para encontrar el centro y radio de la esfera y con estos datos diga si es posible que el plano corte la esfera dada o no. La ecuación de la esfera buscada debe tener la forma $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ (forma general de la ecuación de la esfera), donde D,E,F,G son constantes por determinar. Sustituyendo las coordenadas del punto $(2,-1,1)$ en la ecuación general, se obtiene

$$2D-E+F+G=-6. \tag{7.6}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 \\ x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0, \end{cases} \tag{7.7}$$

se obtiene la ecuación del plano de intersección de las esferas. Se resuelve simplemente restando una ecuación de otra, para obtener

$$(-2-D)x+(3-E)y+(-6-F)z-5-G=0.$$

Como el plano anterior y el plano en (7.5): $5x+2y-z-3=0$ deben ser un mismo plano, las normales deben ser paralelas (dé razones), es decir, una ecuación debe ser un múltiplo k de la otra. Usamos la ecuación (7.6) e igualamos los coeficientes de los planos para obtener el sistema

$$\begin{cases} -2-D & =5k \\ 3-E & =2k \\ -6-F & =-k \\ -5-G & =-3k \\ 2D-E+F+G & =-6. \end{cases} \tag{7.8}$$

Tenemos ahora un sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, el cual puede resolverse sin gran dificultad. Por ejemplo si notamos que de la tercera ecuación $k=6+F$. Resuelva es sistema y compruebe que $D=13$, $E=9$, $F=-9$ y $G=-14$. Obtenemos así la ecuación de la esfera buscada

$$x^2+y^2+z^2+13x+9y-9z-14=0.$$

Compruebe que el punto $(2,-1,1)$ está en la esfera anterior. □

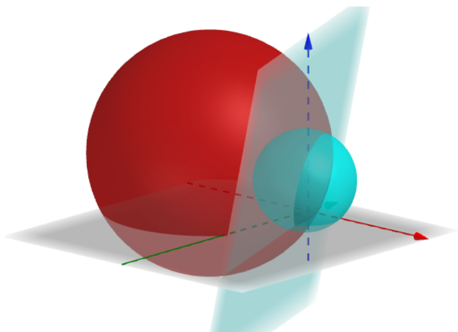


Figura 7.2: Esferas y plano de la actividad 7.2.

7.3 Otras superficies cuadráticas

Con las cónicas se construyen las llamadas superficies cuadráticas. Para estudiarlas se requieren cortes en planos paralelos a los planos xy, xz, yz, llamados trazas de la superficie o *curvas de* *nivel*. Por ejemplo la esfera es una superficie cuadrática la cual al cortarla con planos da círculos o puntos o el conjunto vacío, es decir, las curvas de nivel de la esfera son círculos o puntos o el conjunto vacío, dependiendo si los planos cortan, son tangentes a la esfera o no la tocan en absoluto. La superficie cuadrática más simple después de la esfera es el elipsoide, el cual estudiaremos a continuación.

Actividad 7.3 — Elipsoides. Se llama elipsoide a una superficie que en $\mathbb{R}^3$ tiene ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{7.9}$$

llamada *ecuación canónica del elipsoide*. Determine las trazas de esta superficie. ■

Solución de la actividad 7.3. Las trazas o curvas de nivel del elipsoide son las siguientes:

a) Planos paralelos al plano xy. Si $z=0$ se tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la cual corresponde a una elipse, si $a\neq b$ y a una circunferencia, si $a=b$. Así, la traza del elipsoide en el plano xy es una elipse o bien una circunferencia. En planos paralelos $z=k\neq 0$ se tiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}. \tag{7.10}$$

Supongamos que $a\neq b$. En este caso, las curvas de nivel son elipses si $1-\frac{k^2}{c^2}>0$ (¿por qué?), un punto si $1-\frac{k^2}{c^2}=0$ y ningún lugar geométrico si $1-\frac{k^2}{c^2}<0$. Observe que se obtiene la misma traza en el plano $z=k$ que en el plano $z=-k$, por lo que la superficie es simétrica respecto al plano xy.

b) Para las trazas en planos paralelos a xz y yz se tiene algo semejante a lo encontrado en el inciso anterior. Efectivamente, para $x=k$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}, \tag{7.11}$$

por lo tanto las trazas son elipses, puntos o ningún lugar geométrico. Para $y=k$ se tiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2}, \tag{7.12}$$

y también se obtienen elipses o puntos o ningún lugar geométrico dependiendo del valor de k. □

■ **Ejemplo 7.2** Mediante una traslación de ejes, identifique la superficie a la que representa la ecuación $x^2+4y^2+2z^2-2x+32y+8z-27=0$.

Solución. Completamos cuadrados para obtener

$$\begin{aligned} x^2+4y^2+2z^2-2x+32y+8z-27 &= (x-1)^2+4(y+2)^2+2(z+2)^2-\\ &\quad -27-1-64-8\\ &= (x-1)^2+4(y+4)^2+2(z+2)^2-100\\ &= 0. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y+4)^2}{25}+\frac{(z+2)^2}{50}=1,$$

ecuación que corresponde a un elipsoide con centro en $(1,-4,-2)$, con $a=10$, $b=5$ y $c=\sqrt{50}$. Con las transformaciones $x'=x-1$, $y'=y+4$, $z'=z+2$ obtenemos la ecuación canónica del elipsoide

$$\frac{x'^2}{100}+\frac{y'^2}{25}+\frac{z'^2}{50}=1.$$

El lector debe ser capaz de determinar las trazas del elipsoide en los ejes x', y', z'. ■

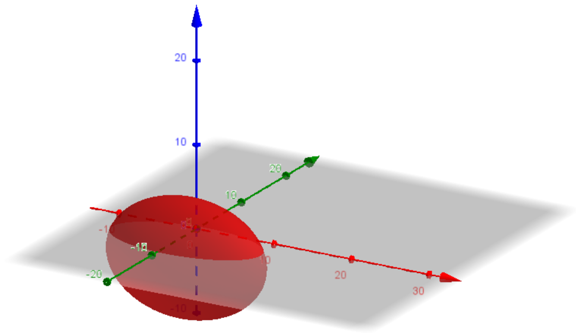


Figura 7.3: Elipsoide del ejemplo 7.2.

Actividad 7.4 — Cilindros. A continuación se presentan ejemplos de las ecuaciones de las formas cuadráticas fundamentales con ejes sobre alguno de los ejes coordenados. Haga las trazas de cada una de ellas y esboce la gráfica de la superficie.

La ecuación $x^2+y^2=r^2, \ \ r>0$ no corresponde a una circunferencia en $\mathbb{R}^3$, dado que se sobreentiende que la variable z toma todos los valores en $\mathbb{R}$. Por ejemplo para $z=0$ se tiene la circunferencia situada en el plano $z=0$, con centro en $(0,0,0)$ y radio r. ¿Cuál es la traza para $z=k>0$, y para $z=k<0$? Dibuje la superficie.

a) Dibuje la superficie $z=x^2$, ¿Cuáles planos son pertinentes para hacer las trazas?

b) Dibuje la superficie $z^2-y^2=1$.

Haga una discusión general de las ecuaciones de cilindros. ¿Puede dar una definición general de cilindros? ■

Solución de la actividad 7.4. Esta actividad es muy importante y la hemos dividido en secciones. La ecuación $x^2+y^2=r^2$ está asociada con un cilindro circular recto con eje el eje z. Las trazas para cada plano $z=k$ con $k>0$ o $k<0$ corresponden a circunferencias de radio r.

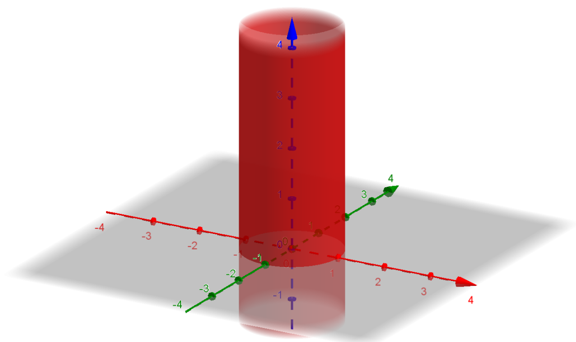


Figura 7.4: Gráfica del cilindro circular $x^2+y^2=1$.

a) La ecuación $z=x^2$ está asociada con un cilindro tal que las trazas en cada plano $y=k$ son parábolas.

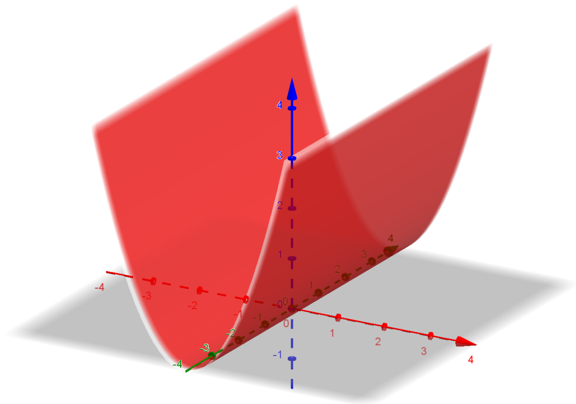


Figura 7.5: Gráfica del cilindro $z = x^2$.

b) La superficie cuya ecuación es $z^2 - y^2 = 1$ corresponde a un cilindro cuyas trazas en los planos $x = k$ son hipérbolas.

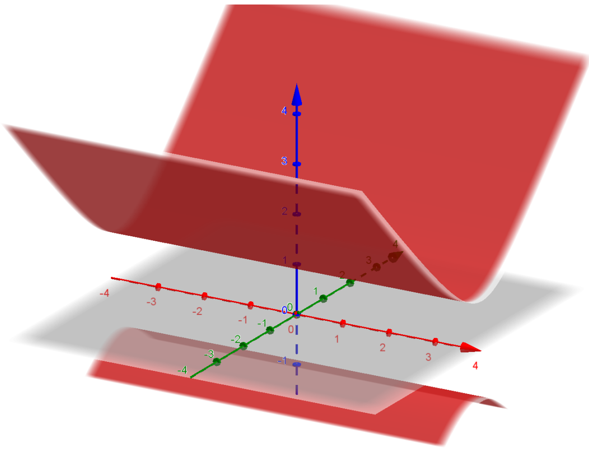


Figura 7.6: Gráfica correspondiente al cilindro $z^2 - y^2 = 1$.

Observe que en $\mathbb{R}^3$ una ecuación cuadrática en dos variables está asociada con un cilindro con eje paralelo a la variable omitida en la ecuación cuadrática. $\square$

N Es muy importante que la discusión para todas las formas cuadráticas se haga por medio de trabajo individual y en equipos. La exposición de las superficies cuadráticas en forma de cátedra, en general no deja ninguna huella en la mente de los estudiantes, si no va acompañada del descubrimiento de como obtener las gráficas de las superficies a partir de las trazas. Se requiere que los lectores reconozcan y puedan dibujar las gráficas de todas las cónicas con fluidez.

Como una introducción, se recomienda ampliamente que se sigan cuidadosamente las actividades del siguiente taller.

Actividad 7.5 — Hiperboloides. Se llaman hiperboloides a las superficies descritas por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 1. \end{aligned}$$

La primera superficie se llama hiperbolide de una hoja y la segunda hiperboloide de dos hojas. ¿Considera los nombres apropiados? Argumente. Haga las trazas de cada una de las superficies y dibújelas. ■

Solución de la actividad 7.5. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

corresponde a un hiperboloide de una hoja. Las trazas $x=k$ con $1-k^2/a^2>0$ corresponden a hipérbolas en planos paralelos al yz

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2}.$$

Las trazas $y=k$ corresponden a hipérbolas (dibújelas)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2},$$

si $1-k^2/b^2>0$. Finalmente, las trazas correspondientes a $z=k$ son las elipses (dibújelas)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}.$$

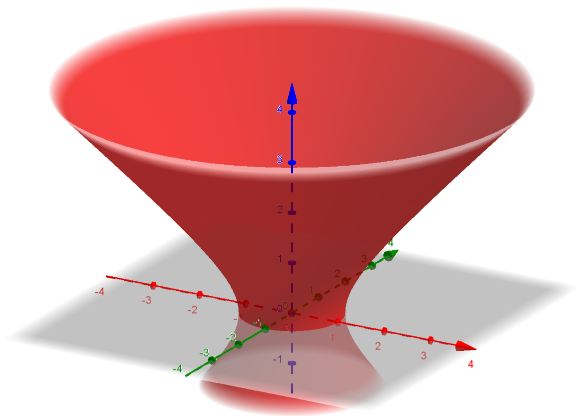


Figura 7.7: Hiperboloide de una hoja con ecuación $x^2+y^2-z^2=1$.

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

está asociada con un hiperboloide de dos hojas. Note que en este caso las trazas $z=k$, $y=k$ son hipérbolas en los panos correspondientes, mientras que las trazas $x=k$ son elipses si $1-k^2/a^2<0$ (dibújelas). □

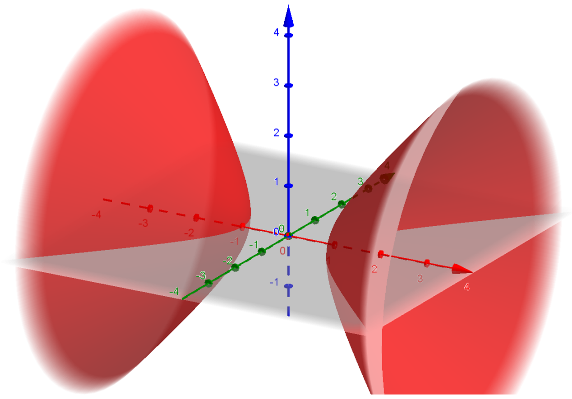


Figura 7.8: Gráfica del hiperboloide de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

Actividad 7.6 — Paraboloides. Las superficies correspondientes a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 4pz \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 4pz, \end{aligned}$$

se llaman paraboloides, la primera superficie se llama paraboloide elíptico, la segunda paraboloide hiperbólico. Dibuje trazas de ambas superficies en planos paralelos a los planos xy, xz, yz sin excluir ningún caso, proceda entonces a graficar la superficie correspondiente. ■

Solución de la actividad 7.6.

La superficie cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4pz,$$

corresponde a un paraboloide elíptico. El nombre de esta superficie es congruente con el hecho de que las trazas $x = k$, $y = k$ corresponden a parábolas mientras que las trazas $z = k > 0$, corresponden a elipses (dibújelas).

La superficie cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4pz,$$

esta asociada con un paraboloide hiperbólico. El nombre de esta superficie se debe al hecho de que las trazas $x = k$, $y = k$ son parábolas mientras que las trazas $z = k > 0$ y $z = k < 0$, son hipérbolas (dibújelas). □

Actividad 7.7 — Conos. La superficie correspondiente a la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

se llama cono, haga las trazas y la gráfica correspondiente. ■

Solución de la actividad 7.7. Para la superficie

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

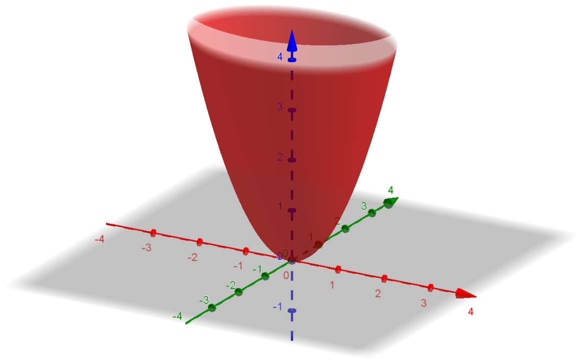


Figura 7.9: Gráfica del paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 = z$.

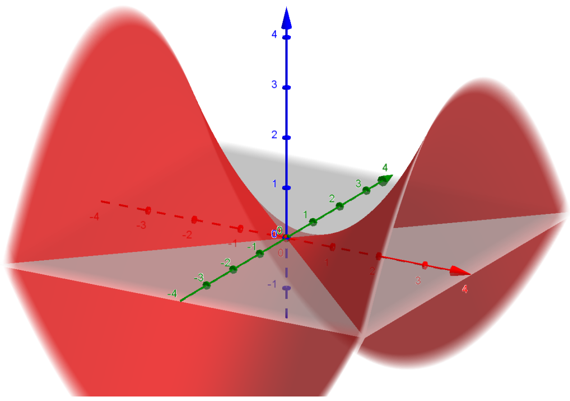


Figura 7.10: Gráfica correspondiente al paraboloide hiperbólico $x^2 - 2y^2 = z$.

Los valores $z = k > 0$ y $z = k < 0$ dan circunferencias. Para $z = k = 0$ se tiene el punto $(0,0,0)$. Las trazas de planos paralelos al plano xz y yz son hipérbolas o un par de líneas (dibújelas). Por ejemplo si $x = k$ se tiene

$$z^2 - y^2 = k^2,$$

la cual es una hipérbola si $k > 0$ y si $k = 0$

$$z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) = 0$$

corresponde a las rectas $z = y$ y $z = -y$. Dado que las trazas en planos paralelos al xy son circunferencias, el cono $x^2 + y^2 = z^2$, se llama *cono circular recto*. Los conos pueden ser oblicuos si sus ejes no son paralelos a alguno de los ejes. Los conos también pueden ser elípticos. □

N Es muy importante recordar que una ecuación cartesiana en $\mathbb{R}^3$ en la que se omite una variable no corresponde nunca a una curva.

■ **Ejemplo 7.3** Verifique que la línea de intersección del plano $y = 2$ con el paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z,$$

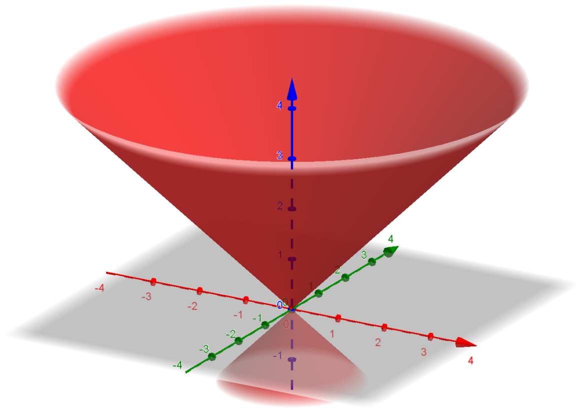


Figura 7.11: Gráfica del cono circular $x^2+y^2=z^2$.

es una parábola, halle el vértice y el foco. Compruebe que la intersección con $z=1$ es una hipérbola.
Solución. Sustituimos $y=2$ en la ecuación del paraboloide y obtenemos $x^2=30(z+1/6)$ la cual es la ecuación de una parábola con vértice en $(0,2,-1/6)$ y $p=15/2$, eje focal paralelo al eje z y con coordenadas del foco $(0,2,22/3)$. ■

Ecuación general de las superficies cuadráticas

Desarrollando y agrupando términos semejantes en las ecuaciones de las superficies con centro fuera del origen de coordenadas en las actividades de la sección anterior, se llega a ecuaciones de la forma

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0.$$

La ecuación anterior se llama *ecuación general de las superficies cuadráticas con ejes paralelos a los ejes coordenados.* Recíprocamente, completando cuadrados en la ecuación $Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$, donde se supone que $A^2+B^2+C^2\neq 0$ puede comprobarse que dicha ecuación corresponde a alguna de las superficies descritas en la actividad anterior o a una forma degenerada, por ejemplo un punto. La ecuación general de las formas cuadráticas, sin embargo, incluye términos xy, xz y yz cuya reducción a las ecuaciones canónicas requiere de una rotación de ejes, lo cual se verá más adelante en este libro.

7.4 Secciones cónicas

El lector que ha llegado hasta aquí encontrará uno de los resultados básicos y fundamentales de la geometría analítica. Me refiero a que las curvas de intersección de un cono circular recto con planos son o bien una parábola o bien una elipse o bien una hipérbola o casos degenerados de estas. Por esta razón a tales curvas se les llama secciones cónicas. Presentaremos la demostración analítica de este resultado debida a Dandelin ya que es uno de los resultados más bellos de toda la Geometría Analítica. Al parecer, este resultado se conoce desde la época clásica de los matemáticos griegos. De hecho, se menciona que Arquímedes se refería a este resultado como algo conocido de tiempo atrás, pero también se menciona a Apolonio de Perga como autor de este teorema o una variante de éste [14].

Antes de enunciar formalmente el teorema que nos concierne requerimos algunas definiciones y propiedades básicas de los conos circulares rectos lo cual veremos enseguida.

7.4.1 Construcciones y definiciones básicas

Antes de demostrar el lema 7.1 y el Teorema de Apolonio, comenzamos con algunas definiciones elementales y la construcción de las esferas de Dandelin.

Definición 7.2 — Cono. Un cono con eje paralelo al eje z es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-(z-z_0)^2=0.$$

El cono se llama *circular* si y solo si$a=b$. Si $a\neq b$, el cono se llama elíptico. El punto (x_0,y_0,z_0) se llama vértice del cono. Las líneas rectas en el cono que pasan a través del vértice se llaman *rectas generadoras* o *generatrices* del cono. Se llama *eje del cono* con eje paralelo al eje z a la recta que pasa por el centro de todas las secciones $z=c$, donde c es una constante arbitraria. El cono se llama *cono recto*, si el eje del cono es perpendicular a las secciones $z=c$.

De ahora en adelante, consideramos sin pérdida de generalidad un cono circular con $a=b=1$ que tiene vértice en $(0,0,0)$, de esta manera, el cono que estudiaremos tiene la ecuación,

$$x^2+y^2-z^2=0. \tag{7.13}$$

Para simplificar, supusimos que el eje del cono es el eje z ya que se pueden dar pruebas idénticas con los conos $x^2+z^2-y^2=0$ y $y^2+z^2-x^2=0$.

Definición 7.3 — Sección cónica. Una sección cónica es el conjunto de todos los puntos en la intersección de un cono con un plano que no contiene el vértice del cono.

Ahora recordamos las definiciones métricas de elipse, hipérbola y parábola.

Definición 7.4 — Elipse, hipérbola parábola. Dado un plano $\mathscr{P}$, una *elipse* es el conjunto de todos los puntos $P\in\mathscr{P}$ tales que que la suma de distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 llamados focos de la elipse es una constante. *Hipérbola* es el conjunto de todos los puntos $P\in\mathscr{P}$, tales que que la diferencia de las distancias desde dos puntos fijos F_1, F_2 (llamados focos de la hipérbola) es constante. *Parábola* es el conjunto de todos los puntos $P\in\mathscr{P}$ tales que que la distancia de P a un punto F (llamado foco de parábola) y la distancia de P a una recta la línea $\mathscr{L}\subset\mathscr{P}$ son iguales.

7.4.2 Construcción de las esferas de Dandelin

La existencia de esferas inscritas en un cono y tangente a un plano de corte es una consecuencia de la existencia de soluciones de un polinomio de segundo grado. En el siguiente taller se demuestra la existencia de tales esferas.

Actividad 7.8 — Esferas de Dandelin. Considere el cono $\mathscr{C}$, dado por la ecuación (7.13), y $\mathscr{P}$ un plano de intersección que no pasa por el vértice del cono. Denote con P cualquier intersección de puntos entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{P}$. Consideramos planos con ecuación de la forma

$$ax-z+d=0,\quad a,d\neq 0. \tag{7.14}$$

Demuestre que existen esferas inscritas en el cono tangentes al plano dado. ■

Solución de la actividad 7.8 Hay una o dos esferas incrustadas en $\mathscr{C}$ tangente a $\mathscr{P}$ dependiendo de a. Efectivamente, las esferas tienen ecuaciones de la forma

$$x^2+y^2+(z-\zeta)^2=\rho^2, \tag{7.15}$$

donde ζ y ρ son parámetros a determinar, ya que, por simetría, las esferas deben tener su centro en el eje del cono. Sea $C=(0,0,\zeta)$ el centro de dicha esfera, entonces la distancia de C a $\mathscr{P}$ viene dada por

$$dist(C,\mathscr{P})=\frac{|\zeta-d|}{\sqrt{a^2+1}}=\rho. \tag{7.16}$$

Por otro lado, considere el plano $\mathscr{P}_t$ tangente al cono que tiene la ecuación $x-z=0$, luego

$$dist(C,\mathscr{P}_t)=\frac{|\zeta|}{\sqrt{2}}=\rho. \tag{7.17}$$

Al igualar (7.16) y (7.17) obtenemos

$$\begin{aligned} &(1-a^2)\zeta^2-4\zeta d+2d^2=0\\ \zeta=&\begin{cases}\frac{d(2\pm\sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)} & \text{si } a\neq\pm1\\ \zeta=d/2 \quad \text{si } a=\pm1.\end{cases}\end{aligned} \tag{7.18}$$

Por lo tanto, ζ y ρ están completamente determinados. En el caso de la parábola, $a=\pm1$, solo hay una esfera. En el caso de la elipse, $|a|<1$, las dos esferas están en la misma rama del cono, y en el caso de hipérbola, $|a|>1$, hay una esfera en cada rama del cono. □

7.4.3 Círculos de tangencia

Podemos encontrar los círculos de tangencia de las esferas de Dandelin con el cono. Procedemos a encontrar las ecuaciones de dichos círculos en la siguiente actividad.

Actividad 7.9 Encuentre las ecuaciones de las circunferencias de intersección de las esferas de Dandelin con el cono. ■

Solución de la actividad 7.9. Igualando las ecuaciones (7.13) y (7.15), tenemos

$$\begin{aligned} z^2+(z-\zeta)^2 &= \rho^2,\\ 2z^2-2z\zeta+\zeta^2-\rho^2 &= 0\\ z &= \frac{\zeta\pm\sqrt{2\rho^2-\zeta^2}}{2}\\ z &= \frac{\zeta}{2}\end{aligned}$$

ya que por (7.17), $2\rho^2-\zeta^2=0$. Ahora de (7.18) ζ depende de los valores a y d para que podamos parametrizar dichos círculos en consecuencia,

i) Parábola, $\zeta=\dfrac{d}{2}$,entonces la circunferencia de tangencia de la esfera de Dandelin con el cono está dado por

$$\begin{cases} x=\frac{d}{2}\cos\theta,\\ y=\frac{d}{2}\sin\theta,\\ z=\frac{d}{2}, \quad \theta\in[0,2\pi]\end{cases} \tag{7.19}$$

ii) Elipse e hipérbola, $\zeta = \zeta_o = \dfrac{d(2 \pm \sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}$, para que tengamos dos círculos. Para la elipse dos en una rama del cono y la hipérbola en cada rama.

$$\begin{cases} x = \zeta_o \cos\theta, \\ y = \zeta_o \sin\theta, \\ z = \zeta_o, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{7.20}$$

Hemos encontrado así las ecuaciones paramétricas de las curvas buscadas. □

7.5 Teorema principal

Ahora podemos dar los enunciados formales del teorema más importante de este capítulo y del lema 7.1 requerido para demostrarlo. La demostración clásica y bella debida a Dandelin [5] en el siglo xix no utiliza la definición analítica de un cono ni sus propiedades desde un punto de vista analítico. Además, la demostración típica de geometría analítica no utiliza la ecuación de un cono ni las propiedades analíticas, sino un enfoque sintético (véase, por ejemplo, [10]). Además, la demostración de los libros de texto requiere definir la excentricidad de una cónica, no se usa la distancia entre dos puntos en absoluto. Como se sabe, la más básica definición de cónica requiere la fórmula de distancia entre dos puntos. Aquí presentamos dentro del marco analítico una demostración simple basada en el lema siguiente.

Lema 7.1 La distancia entre los puntos de intersección de una generatriz de un cono circular con dos círculos situados en planos paralelos ortogonales al eje del cono es constante.

Demostración del lema 7.1. Sea N un punto en el círculo de la ecuación (7.20) con θ fijo y

$$\zeta_o = \zeta_N = \frac{d(2-\sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}$$

Una generatriz L que pasa por N tiene una ecuación

$$L(t) = t(\zeta_N \cos\theta, \zeta_N \sin\theta, \zeta_N), \quad t \in [-\infty, \infty], \tag{7.21}$$

ahora, dejemos que M sea el punto de intersección de $L(t)$ con el círculo

$$\begin{cases} x = \zeta_M \cos\theta, \\ y = \zeta_M \sin\theta, \\ z = \zeta_M, \quad \theta \in [0, 2\pi], \end{cases} \tag{7.22}$$

donde $\zeta_M = \dfrac{d(2+\sqrt{2}\sqrt{1+a^2})}{(1-a^2)}$. Por tanto, la distancia entre M y N es

$$dist(M,N) = \sqrt{2}|\zeta_M - \zeta_N| = 4\sqrt{2}\frac{d\sqrt{1+a^2}}{|1-a^2|},$$

que es una constante dependiendo de a y d como se desea demostrar. □

Las definiciones básicas de cono, sección cónica, elipse, hipérbola y parábola se encuentran en la sección 7.4.1. Conociendo las definiciones básicas, el famoso Teorema de Apolonio de Perga puede expresarse de la siguiente manera.

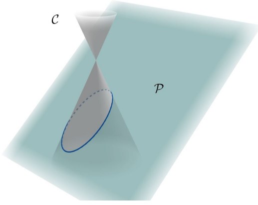


Figura 7.12: *Elipse: por el teorema 7.2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y P a M son las mismas. Según el lema 7.1, la distancia de M a N es constante para P en la curva. Por lo tanto, la curva es una elipse.*

Teorema 7.3 Una sección cónica es una elipse o una hipérbola o una parábola.

La demostración del teorema de Apolonio se basa en la construcción de las esferas de Dandelin. Considere un cono circular $\mathscr{P}$ y un plano $\mathscr{C}$ de modo que el vértice del cono no esté en el plano. La esfera de Dandelin es una esfera inscrita en el cono $\mathscr{C}$, tangente al plano $\mathscr{P}$. La existencia de las esferas de Dandelin se demuestra fácilmente en la sección 7.4.1 dentro del contexto de la geometría analítica. Demostraremos que se obtiene una parábola con un plano paralelo a una línea generadora que no está en el plano y que se obtienen elipses e hipérbolas con planos no paralelos a ninguna línea generadora. Veremos en la sección 7.4.1 que dentro del contexto de la Geometría Analítica, no hay pérdida de generalidad al considerar el cono $x^2+y^2-z^2=0$ y los planos de la forma $ax-z+d=0$, $a,d\neq 0$. Con esta configuración tenemos los siguientes casos: i) $|a|<1$, elipse; ii) $|a|>1$, hipérbola; iii) $a=\pm 1$, parábola.

Demostración del teorema 7.3. Vamos a denotar por P a cualquier punto en la curva de intersección del cono $\mathscr{C}$ y el plano $\mathscr{P}$.

i) Demostración de la elipse. Para la elipse, se muestra fácilmente en la sección 7.4.1 que hay dos esferas de Dandelin. Denotemos por $F1$ y $F2$ los puntos de tangencia entre las esferas y el plano $\mathscr{P}$ (vea las Figuras 7.13 (b), (c). Ahora considere la línea recta (generatriz) que pasa por P y el vértice del cono. Deje M y N los puntos de intersección de la generatriz con las esferas de Dandelin (Figura 7.13 (d)). Por el teorema 7.2, $|PF_2|=|PM|$ y $|PF_1|=|PN|$. Por otro lado, según el lema 7.1 para cualquier punto P en la curva de intersección, la distancia $|MN|$ es constante. Pero $|PF_1|+|PF_2|=|MN|$ por lo tanto, por definición (ver sección 7.4.1) la curva es una elipse. En la figura 7.13, se muestran los pasos de las construcciones usadas en esta parte de la demostración.

it ii) Demostración de la hipérbola. Esta demostración es similar a la demostración de elipse. Sea P, F_1, F_2, M y N como en las Figuras 7.15 y 7.14. Nuevamente por el el teorema 7.2, $|PF_2|=|PM|$ y $|PF_1|=|PN|$. Por el lema 7.1, $|MN|$ es constante y $|PF_1|-|PF_2|=|MN|$. Por lo tanto, la curva es una hipérbola. En la figura 7.15, se muestran algunos pasos de las construcciones usadas en esta parte de la demostración.

iii) Demostración de la parábola. Para la parábola (ver Figuras 7.17 y 7.16), solo hay una esfera de Dandelin y, por lo tanto, solo un foco F. En este caso especial, $\mathscr{P}$ es paralelo a una generatriz del cono. Aquí, por el teorema 7.2, $|PF|=|PM|$. Sea $\mathscr{P}_o$ el plano que contiene el círculo de tangencia de la esfera de Dandelin y el cono, y sea $\mathscr{L}$ la intersección de los planos $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}_o$. Desde P, trace un segmento ortogonal hasta $\mathscr{L}$ y deje que N sea el punto de intersección del segmento con $\mathscr{L}$. Ahora, el segmento PM está en el cono y PN está en $\mathscr{P}$. Por tanto, el ángulo entre PM y el plano $\mathscr{P}$ es el mismo que el ángulo entre PN y $\mathscr{P}$. Los ángulos son iguales porque $\mathscr{P}$ es por construcción paralelo a una generatriz del cono, y PM está en el cono. Por lo tanto, el triángulo MPN es isósceles y, en consecuencia, $|PM|=|PN|$ para cualquier punto de la curva. De esta manera, la curva es una parábola por definición (ver sección 7.4.1). En la figura 7.17, se muestran algunos pasos de las

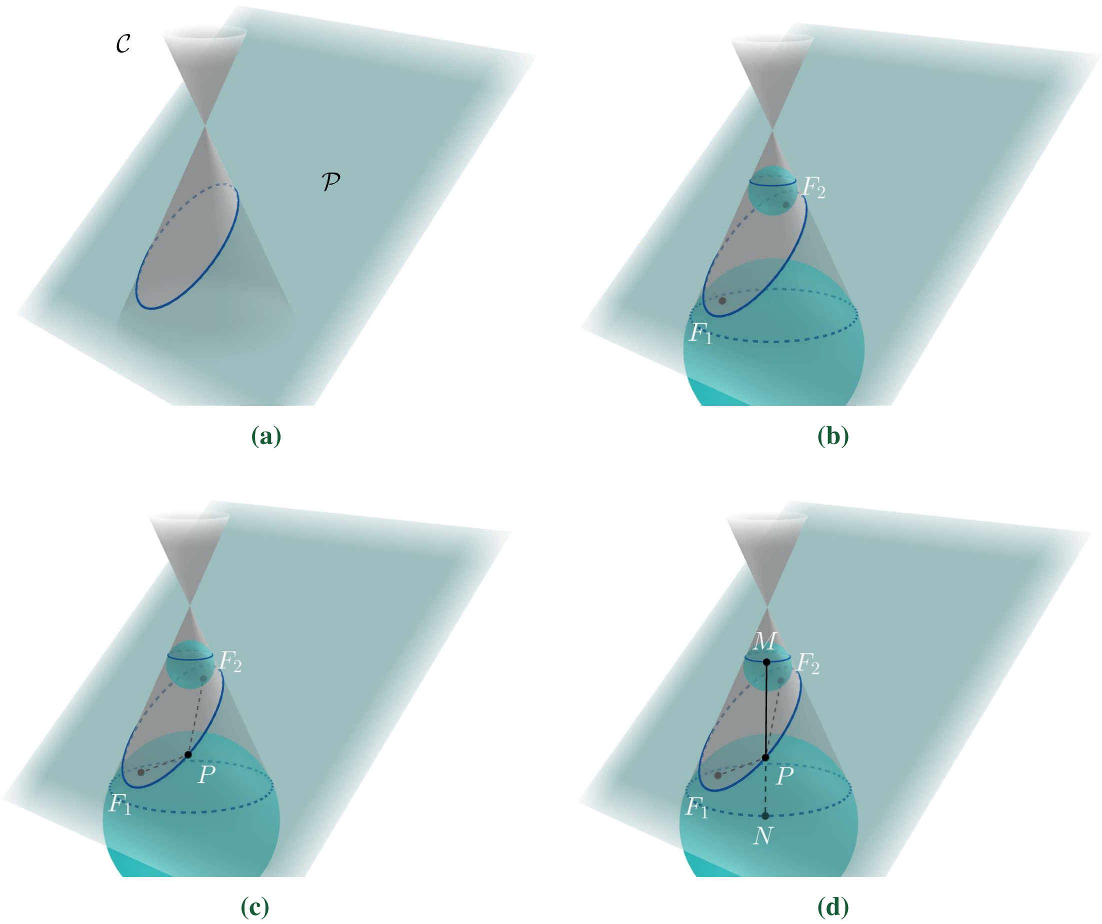


Figura 7.13: *(a) El cono $\mathscr{C}$ se cruza con el plano $\mathscr{P}$. (b) Las esferas con cono inscrito son tangentes al plano $\mathscr{P}$. (c) Los puntos de tangencia de las esferas con el plano $\mathscr{P}$ son los focos de la elipse. P es cualquier punto de la elipse. (d) Por el el teorema 7.2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y P a M son las mismas. Según el lema 7.1, la distancia de M a N es constante para P en la curva. Por lo tanto, la curva es una elipse.*

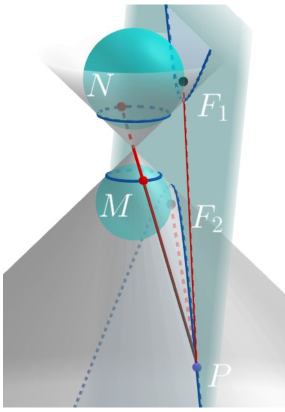


Figura 7.14: *Hipérbola: según el teorema 7.2, las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. Dado el Teorema 2, la distancia de M a N es constante para cada punto P en la curva. Esta distancia es la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2. Por lo tanto, la curva es una hipérbola.*

construcciones usadas en esta parte de la demostración. □

7.6 Planteamiento de problemas

En los cursos de Cálculo Integral de varias variables suele aparecer como un ejercicio el cálculo volumen de un sólido que resulta de la intersección de una esfera y un cono. El cono puede construirse a partir del círculo que resulta de la intersección de una esfera con un plano. Claramente la intersección de un plano con una esfera es siempre un circunferencia o un punto. Sin embargo la proyección de esta circunferencia en el plano xy puede ser una elipse si el plano de intersección no es paralelo al plano xy. Tal elipse resulta ser el límite del área de integración para calcular el volumen requerido. En la siguiente actividad resolvemos como encontrar la fórmula de la elipse que resulta de la proyección en el plano xy de una circunferencia que se encuentra en un plano no paralelo al xy.

Actividad 7.10 Muestre que la intersección de un plano con una esfera es una circunferencia o un punto. Muestre que si el plano de intersección con una esfera no es paralelo al plano xy la proyección en este plano de la circunferencia es una elipse si la intersección no es un punto. ■

Solución de la actividad 7.10. No se pierde generalidad si suponemos que la esfera tiene centro en $(0,0,0)$. Dada la simetría de la esfera basta ver que la intersección con planos paralelos al plano $z=0$ son o bien una circunferencia o bien un punto. Efectivamente, la curva dada por

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ z=k, \end{cases}$$

es simplemente una circunferencia como observamos al sustituir $z=k$ en la ecuación de la esfera:

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2-k^2 \\ z=k. \end{cases} \tag{7.23}$$

Notamos ahora que la ecuación $x^2+y^2=r^2-k^2$ en (7.23) es una circunferencia en el plano $z=k$ si $r^2-k^2>0$; es un punto si $r^2-k^2=0$; es el conjunto vacío si $r^2-k^2<0$ (¿por qué?). Se concluye que si un plano interseca a una esfera la intersección es un punto o una circunferencia. Note que para

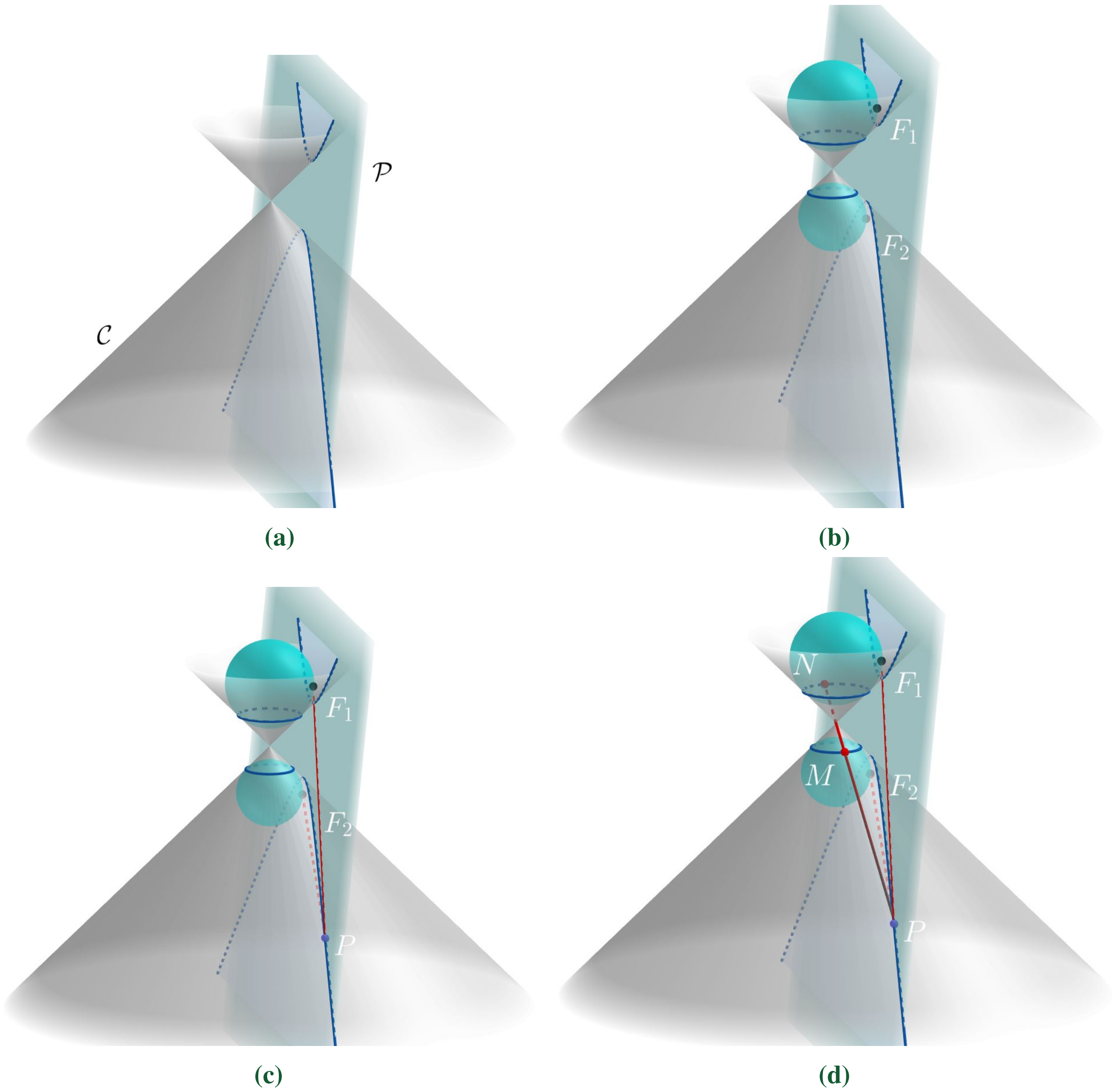


Figura 7.15: *(a) El cono $\mathscr{C}$ se cruza con el plano $\mathscr{P}$ para formar una hipérbola. (b) Esferas inscritas en cono tangentes al plano $\mathscr{P}$. (c) Los puntos de tangencia de las esferas con el plano $\mathscr{P}$ son los focos F_1, F_2 de la hipérbola. P es cualquier punto de la curva. (d) Por el teorema 7.2 las distancias de P a F_1 y de P a N son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. Dado el lema 7.1, la distancia de M a N es constante para cada punto P en la curva. Esta distancia es la diferencia entre la distancia de P a F_1 y la distancia de P a F_2. Por lo tanto, la curva es una hipérbola.*

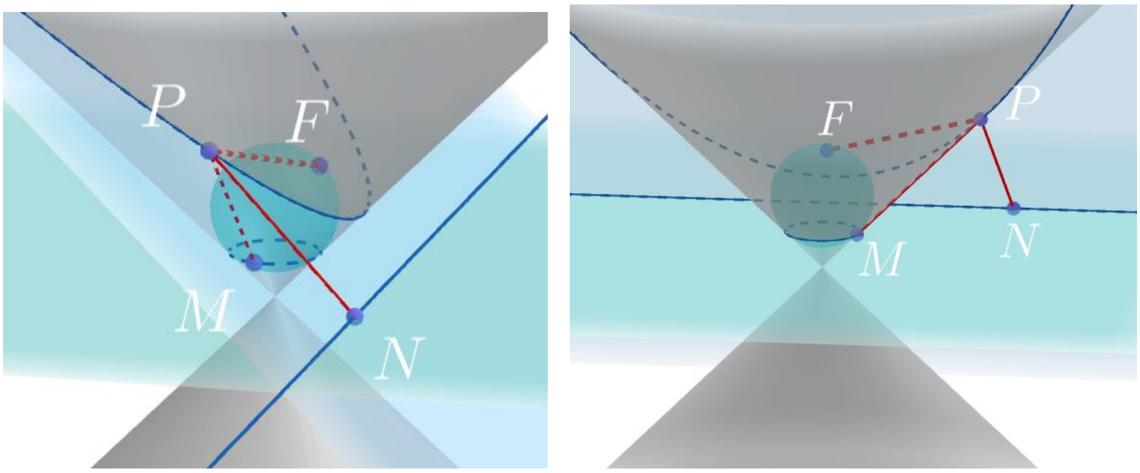


Figura 7.16: *Dos vistas diferentes del caso de la parábola. Según el teorema 7.2, las distancias de P a F y de P a M son las mismas. El triángulo MPN es isósceles. Por lo tanto, la distancia de P a F es la misma que la distancia de P a N. Por lo tanto, la curva es una parábola.*

un plano cualquiera $ax+by+cz+d=0$ basta colocar uno de los ejes coordenados en la dirección de la normal del plano (a,b,c), para obtener el mismo resultado que con un plano perpendicular a uno de los ejes en coordenadas xyz.

Para ver que la proyección en el plano xy de una circunferencia colocada en un plano no paralelo al plano xy es una elipse basta usar un plano oblicuo a uno de los ejes (¿qué pasa si el plano no es oblicuo?, argumente), por ejemplo, el plano $ax+cz+d=0$; $a,c\neq 0$. En este caso si despejamos z se tiene $z=-(ax+d)/c$ y al sustituir en la ecuación de la esfera tenemos

$$\begin{cases} x^2+y^2+\left(\frac{-(ax+d)}{c}\right)^2 = r^2 \\ ax+cz+d=0. \end{cases} \tag{7.24}$$

Lo cual al desarrollar y simplificar en la primera ecuación nos da

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)x^2+\frac{2ad}{c^2}x+y^2 \quad = \quad r^2-\frac{d^2}{c^2}. \tag{7.25}$$

El lector debe comprobar (¡hágalo!) que la ecuación (7.25) corresponde a una elipse de la forma

$$\frac{(x-\alpha)^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

en el plano $ax+cz+d=0$, si $r^2-\dfrac{d^2}{c^2}+\dfrac{A^2d^2}{c^2(c^2+d^2)}>0$ (calcule α, A, B). Claramente la ecuación $\dfrac{(x-\alpha)^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$, define un cilindro elíptico en $\mathbb{R}^3$ (¿por qué?). Finalmente la intesección del cilindro elíptico con eje paralelo al eje z con el plano xy es la elipse que genera al cilindro. Se concluye que la proyección de la circunferencia (7.24) en el plano xy es una elipse. □

N La demostración general de que la proyección de una circunferencia en un plano no paralelo al plano xy es una elipse requiere rotación de coordenadas en el plano la cual se verá en un capítulo próximo.

■ **Ejemplo 7.4** Determine la proyección de la circunferencia

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+z-1=0, \end{cases}$$

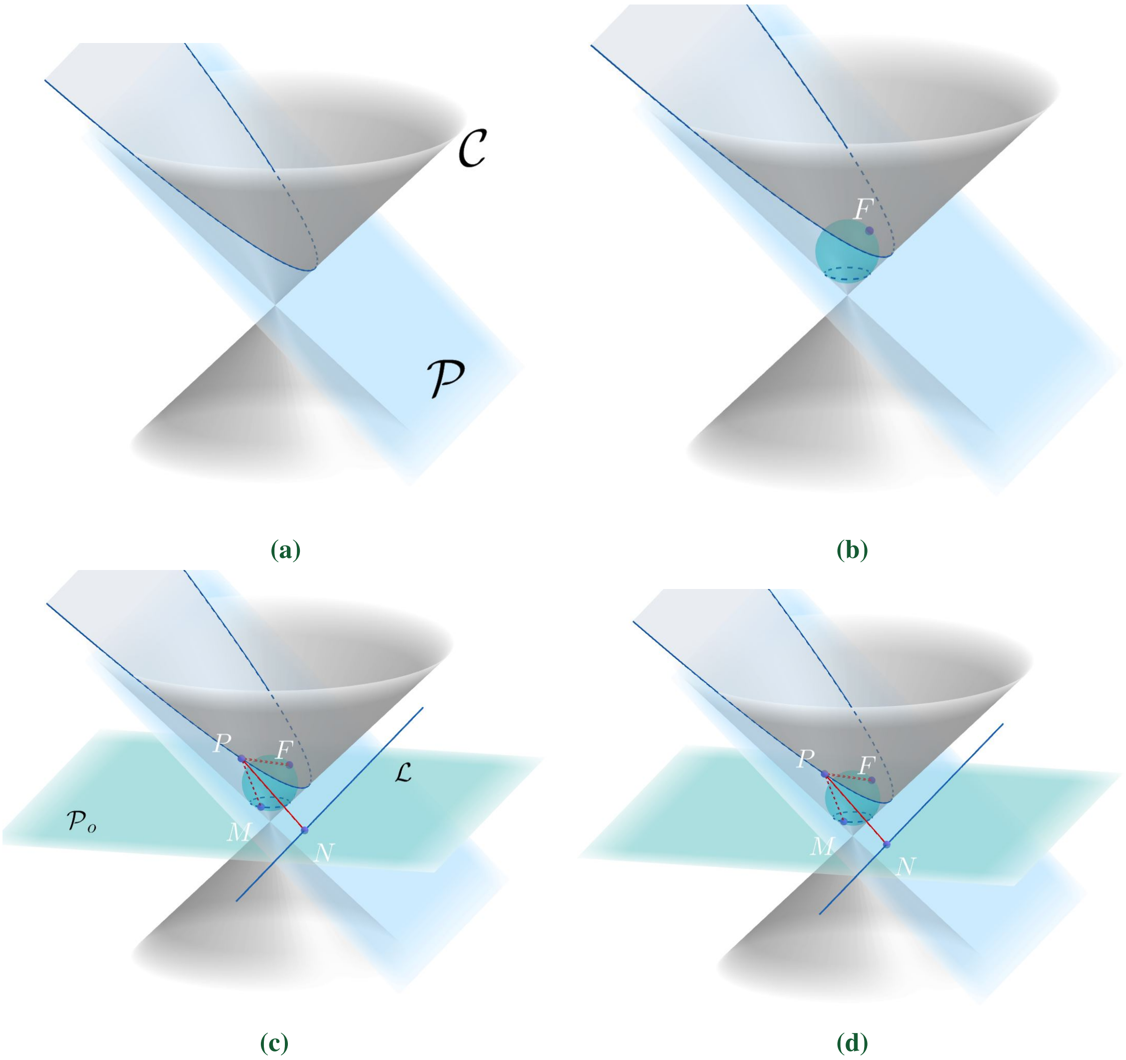


Figura 7.17: *(a) El cono $\mathscr{C}$ se cruza con el plano $\mathscr{P}$ paralelo a una de las generatrices de cono. (b) Esfera inscrita en el cono, tangente al plano $\mathscr{P}$. El punto de tangencia de la esfera con el plano $\mathscr{P}$ es el foco de la parábola F. (c) $\mathscr{P}_o$ es el plano donde se encuentra el círculo de tangencia de la esfera con el cono. La intersección de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}_o$ es la línea $\mathscr{L}$, la directriz de la parábola. (d) Según el teorema 7.2, las distancias desde P a F y P a M son las mismas. Del mismo modo, las distancias de P a F_2 y de P a M son las mismas. El triángulo MPN es isósceles. Por lo tanto, la distancia de P a F es la misma que la distancia de P a N. Se concluye que la curva es una parábola.*

en el plano xy.
Solución. Si sustituimos $z = 1 - x$ en la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (1-x)^2 &= 1 \\ 2x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \\ \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} &= 1. \end{aligned}$$

La elipse en la última ecuación es la proyección de la circunferencia sobre la esfera en el plano xy. ■

Superficies cuadráticas y *GeoGebra*

En la sección 6.5 vimos como graficar planos y rectas en $\mathbb{R}^3$ utilizando las herramientas de *Geogebra*, una opción para graficar superficies cuadráticas es escribir directamente la ecuación en el recuadro “Entrada”. Una segunda opción consiste en escribir las ecuaciones paramétricas de la superficie, pero esta opción la trataremos en el próximo capítulo.

7.7 Problemas y ejercicios del capítulo

Utilice *Geogebra* para corroborar sus gráficas en cada uno de los ejercicios siguientes.

Nivel básico

1. Resuelva el ejercicio 7.2.
   Solución. a) Esfera. b) Sólo un punto. c) Conjunto vacío.
2. Dibuje la superficie
   $$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$
   Dibuje en los planos xy, xz y yz las trazas correspondientes a $z = \pm 1, \pm 2$, $y = \pm 1, \pm 2$, $x = 0, \pm 1$.
   Solución. 1) Elipsoide, las trazas son elipses o puntos o el conjunto vacío.
3. Dibuje las superficies $x^2 + z^2 = y$ y $y^2 - z^2 = x$. Haga un análisis completo de las trazas $z = k$, $y = k$, $x = k$, para todos los valores posibles de k.
   Solución. 2) Paraboloide elíptico con eje el eje y y paraboloide hiperbólico con eje el eje x.
4. Dibuje los conos $x^2 + z^2 = y^2$, $y^2 + z^2 = x^2$. ¿Cuál es su principal diferencia?
   Solución. 3) Los conos tienen diferentes ejes.
5. Dibuje los cilindros $x = z^2$, $z^2 - 3y^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 4$.
   Solución. 4) Cilindro parabólico, cilindro hiperbólico, cilindro circular recto.
6. Identifique y dibuje las superficies
   $$-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1.$$
   Solución. 5) hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas.
7. Encuentre la ecuación de la esfera con centro en $(1,1,1)$ y radio $r = \sqrt{2}$. Dibújela.
   Solución. 6) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.
8. Encuentre la ecuación de la esfera que pasa por $(2,-1,-3)$ y tiene como centro el punto $(3,-2,1)$.
   Solución. 7) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$.

9. Encuentre el centro y el radio de la esfera $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = 2$.
Solución. 8) Centro: $(0,2,-1)$, radio $r = \sqrt{2}$.
10. El diámetro de una esfera tiene extremos en los puntos $(2,-3,5)$ y $(4,1,-3)$. Encuentre la ecuación de la esfera.
Solución. 9) $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 21$.
11. Encuentre el radio de la esfera que es tangente a los planos $3x+2y-6z-15 = 0$, $3x+2y-6z+55 = 0$.
Solución. 10) $r = 5$.

Nivel medio

1. Verifique que la línea de intersección del plano $z+1 = 0$ y la superficie
$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2} = 1$$
es una hipérbola. Encuentre sus semiejes y sus vértices.
2. Halle los valores de m para los cuales la intersección del plano
$$x+mz-1 = 0$$
con el hiperboloide de dos hojas
$$x^2+y^2-z^2 = -1$$
sea: a) una elipse, b) una hipérbola.
Solución. 2a) $1 < |m| < \sqrt{2}$, 2b) $|m| < 1$.
3. Halle la ecuación de la esfera cuyo centro está en el origen de coordenadas y la cual es tangente al plano $16x-15y-12z+75 = 0$.
Solución. 3) $x^2+y^2+z^2 = 9$.
4. Encuentre la ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de las esferas $2x^2+2y^2+2z^2+3x-2y+z-5 = 0$, $x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+1 = 0$.
Solución. 4) $5x-8y+5z-7 = 0$.
5. Halle la ecuación del plano tangente a la esfera $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 24$ en el punto $(-1,3,0)$.
Solución. 5) $2x-y-z+5 = 0$.
6. Encuentre las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ que son paralelos al plano $x+2y-2z+15 = 0$.
Solución. 6) $x+2y-2z-9 = 0$, $x+2y-2z-9 = 0$.
7. ¿Cuál es la ecuación de la esfera que tiene centro en el plano $2x+y-z+3 = 0$ y que pasa por los puntos $(-2,4,1)$ $(-5,0,0)$ y $(3,1,-3)$?
Solución. 7) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 49$.
8. Muestre que el hiperboloide de dos hojas
$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25} = -1,$$
tiene un punto en común con el plano $5x+2z+5 = 0$.
Solución. 8) $(3,0,-10)$.

9. Encuentre, si existen, los puntos de intersección de la superficie y la recta dados
$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z, \qquad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}.$$
Solución. 9) No se intersecan.

10. Encuentre el valor de m para que el plano $x-2y-2z+m=0$ sea tangente al elipsoide
$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1.$$
Solución. 10) $m=\pm 18$.

Nivel superior

1. Halle la ecuación de la esfera que pasa por las dos circunferencias
$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+z^2=16 \\ y=3. \end{cases}$$
Solución. 1) $x^2+(y+2)^2+z^2=41$.
2. Calcule la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $(1,-2,-1)$, $(-5,10,-1)$, $(4,1,11)$ y $(-8,-2,2)$.
Solución. 2) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$.
3. Halle la ecuación de la esfera que es tangente a los planos paralelos $6x-3y-2z-2=0$, $6x-3y-2z+63=0$, si se sabe que el punto $(5,-1,-1)$ es el punto de contacto con uno de los planos.
Solución. 3) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=49$.
4. Dada la esfera $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=49$, halle los puntos de intersección con la recta $x=-5+3t$, $y=-11+5t$, $z=9-4t$. Encuentre las ecuaciones de los planos tangentes a la esfera en tales puntos.
Solución. 4) $3x-2y+6z-11=0$ $6x+3y+2z-30=0$.
5. Deduzca una condición mediante la cual el plano $Ax+By+Cz+D=0$ sea tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$.
Solución. 5) $(A^2+B^2+C^2)r^2=-D|D|$.
6. Cuál línea se forma en la intersección del elipsoide
$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$$
con el plano
$$2x-3y+4z-11=0,$$
halle su centro.
Solución. 6) Elipse con centro en $(-1,1,3)$.
7. Halle las ecuaciones de las proyecciones sobre los planos coordenados de la intersección del paraboloide elíptico
$$y^2+z^2=x$$
y el plano
$$x+2y-z=0.$$
Solución. 7) Sobre el plano xy: $x^2+4xy+5y^2-x=0$, $z=0$.

8. Halle la ecuación de la superficie que se genera cuando la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

rota al rededor del eje x.

Solución. 8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

9. Halle la ecuación del cono generado por la rotación de la recta $y=mx$, $z=0$ alrededor del eje x.

Solución. 9) $y^2+z^2=m^2x^2$.

10. Muestre que no existe plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z+4=0$ que contenga a la recta

$$\frac{x+6}{2}=y+3=z+1.$$

8. Coordenadas polares y esféricas

8.1 Introducción

En este capítulo estudiamos coordenadas alternativas a las coordenadas cartesianas: las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Se recomienda emprender el estudio de estas coordenadas cuando el lector tenga cierto dominio de las coordenadas cartesianas y no antes.

8.2 Coordenadas polares

En coordenadas cartesianas en el plano un punto queda especificado por las proyecciones ortogonales de un punto a los ejes x, y. En coordenadas polares un punto queda especificado por su distancia r al origen, al cual ahora llamaremos *polo*, y por el ángulo θ que forma con el semieje positivo x, al cual llamaremos, *eje polar*. Un punto P queda así especificado como $P = (r, \theta)$, como en la figura 8.1.

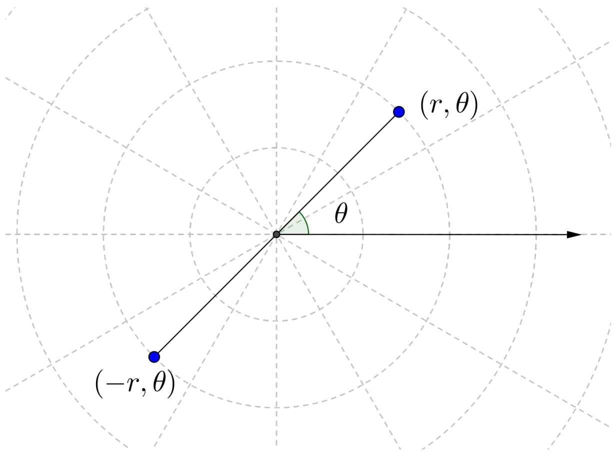


Figura 8.1: Coordenadas polares.

Mediremos el ángulo polar como lo hicimos en coordenadas cartesianas, es decir, se parte del eje polar en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, los ángulos negativos se miden partiendo del eje polar en la dirección en las que se mueven las manecillas del reloj. Los ángulos los mediremos en radianes (ver capítulo 3).

8.2.1 Conversión de coordenadas polares a cartesianas

Dado un punto en coordenadas polares $P=(r,\theta)$ sabemos que r representa la distancia del origen al punto, por lo que si se conocen las coordenadas cartesianas del punto, es decir, si $P=(x,y)$ en coordenadas cartesianas, debemos tener

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{8.1}$$
$$\theta=\arctan\frac{y}{x} \tag{8.2}$$

Sabemos por trigonometría elemental que

$$x = r\cos\theta \tag{8.3}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{8.4}$$

N Es muy importante para el lector principiante recordar que debe comprobar que al convertir coordenadas el punto quede en el cuadrante correcto y medir los ángulos con el signo adecuado, con el fin de obtener correspondencias apropiadas.

■ **Ejemplo 8.1** Encuentre las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares son $P=(1,2\pi/3)$.
Solución. Usamos las fórmulas (8.3), (8.4) con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = 1\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta = 1\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

La solución está ilustrada en la figura 8.3 ■

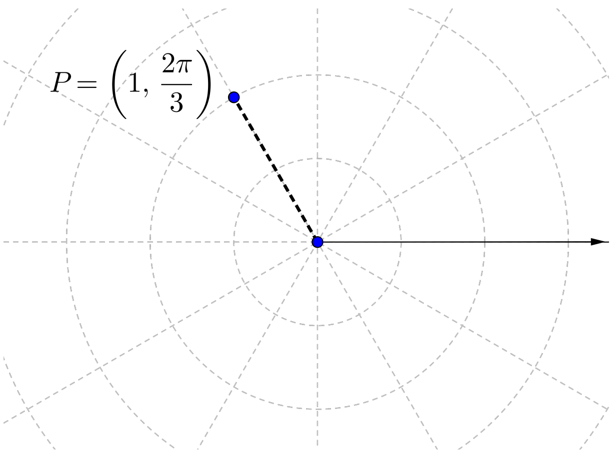


Figura 8.2: Coordenadas cartesianas de $P(1,2\pi/3)$.

■ **Ejemplo 8.2** Encuentre las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas son $P=(1,1)$

Solución. Dado que las coordenadas cartesianas de P son $x = 1$, $y = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \\ \theta &= \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Por lo que las coordenadas polares del punto son $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$. ∎

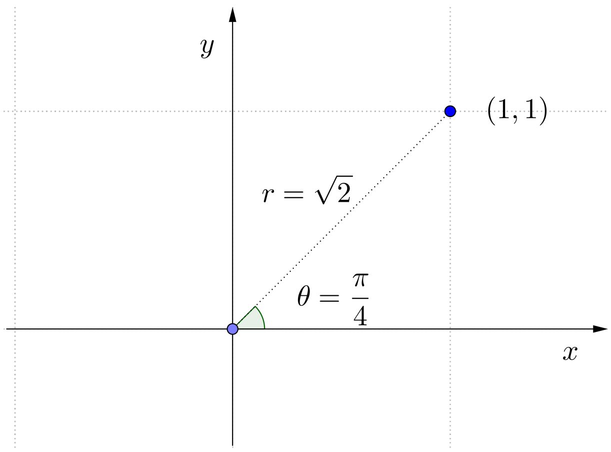


Figura 8.3: Coordenadas polares de $P = (1,1)$.

Curvas en coordenadas polares

Una vez que se ha comprendido como transformar coordenadas de puntos en coordenadas polares a coordenadas cartesianas y viceversa podemos emprender el estudio de curvas en coordenadas polares. Se recomienda que los principiantes comiencen a trabajar sobre papel con coordenadas polares impresas. **Posteriormente procederemos a trabajar con las computadoras, pero si el lector no ha hecho el trabajo manual de poco provecho le será el uso de sofisticados programas graficadores.**

Las curvas más simples en coordenadas polares se obtienen poniendo una de las coordenadas ya sea r o θ constantes. Al igual que en coordenadas cartesianas si una variable no aparece en la ecuación se sobreentiende que tal variable toma todos los valores posibles sobre $\mathbb{R}$.

Como ejemplo tomamos una circunferencia en coordenadas cartesianas con centro en el origen de coordenadas y radio r_0. En este caso la ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = r_0$. Con las ecuaciones de transformación (8.3) y (8.4), tenemos:

$$r_0 = x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta),$$

o simplemente

$$\boxed{r = r_0}$$

es decir, r **igual a constante, es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio** r_0 **en coordenadas polares.** Remarcamos aquí que dado que la variable θ no aparece en la ecuación $r = r_0$ se considera que θ toma todos los valores posibles. Es decir cada circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en el polo $(0,0)$ y radio r_0 en coordenadas polares es el conjunto

$$\mathscr{C} = \{(r,\theta) : r = r_0,\ -\infty < \theta < \infty\}.$$

Observe que en realidad para describir la circunferencia basta tomar $\theta \in [0, 2\pi)$, y así simplemente

$$\mathscr{C} = \{(r,\theta) : r = r_0,\ \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

De manera similar, si escribimos θ igual a constante, digamos

$$\boxed{\theta = c}$$

se obtiene la ecuación de una recta que pasa por el polo y que forma un ángulo c con el eje polar. es decir, toda recta $\mathscr{R}$ que pasa por el polo $(0,0)$ formando un ángulo constante c, es el conjunto

$$\mathscr{R} = \{(r,\theta) : \theta = c, -\infty < r < \infty\}.$$

Aquí observamos que dado que se define r como una distancia, $r \geq 0$ necesariamente, así que lo que se entiende por $-\infty < r < \infty$ es que los puntos con $-r$, $r > 0$ corresponden a puntos $(-r,\theta)$ como en la figura 8.1.

Obviamente por medio de las ecuaciones (8.3) y (8.4) toda ecuación cartesiana tiene una ecuación polar equivalente en la cual a veces es posible resolver la ecuación para alguna de las variables, como en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 8.3** Encuentre la ecuación polar de la parábola $y = x^2$.
Solución. Por medio de las ecuaciones (8.3) y (8.4) obtenemos al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación de la parábola y simplificando:

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ r\operatorname{sen}\theta &= r^2\cos^2\theta, \\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} &= r, \qquad r \neq 0, \theta \neq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

o bien dado que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, obtenemos que

$$r = \tan\theta\sec\theta$$

es la ecuación en coordenadas polares de la parábola $y = x^2$. ■

Las curvas más interesantes en coordenadas polares no son las cónicas, sino los ejemplos que veremos a continuación.

Ejercicio 8.1 Dibuje la gráfica de la curva con ecuación polar $r = 1 - \cos\theta$ la cual corresponde a una curva llamada cardioide. ■

Solución. Podemos calcular algunos puntos y a partir de ellos trataremos de obtener la gráfica. Algunos valores de r se han calculado para los ángulos mostrados en la tabla 8.1.

Tabla 8.1: Tabla correspondiente al ejercicio 8.1

θ	$\cos\theta$	$1-\cos\theta$	r
0	1	0	0
$\pi/6$	.086	0.134	0.134
$\pi/3$	.5	.5	.5
$\pi/2$	0	1	1
$2\pi/3$	-.5	1.5	1.5
$5\pi/6$	-.866	1.866	1.866
π	-1	2	2

Dado que el coseno es una función par, es decir, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, (ver capítulo RR), se obtienen los mismos valores de r para ángulos negativos. Esto quiere decir que la gráfica de r es simétrica

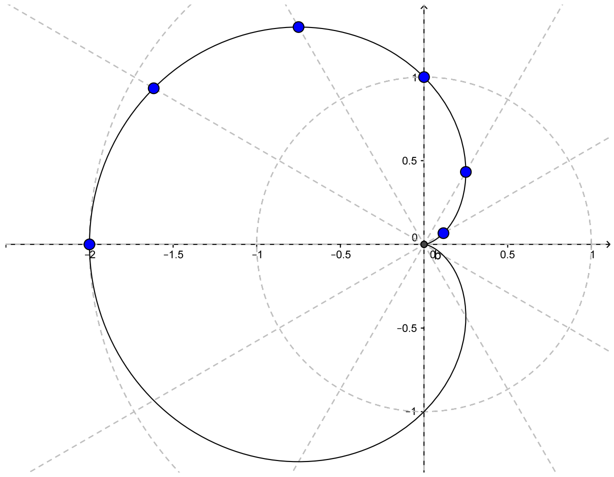


Figura 8.4: Gráfica de $r = 1 - \cos\theta$ que corresponde a la cardioide del ejercicio 8.1.

respecto al eje polar, como se muestra en la figura 8.4. También debemos notar que la curva es una figura cerrada dado que $r = 1 - \cos\theta$ es periódica de periodo 2π. Es decir $r(0) = r(2\pi) = 0$. Toda curva en coordenadas polares donde r es función de θ es cerrada si y solo si, es periódica.

Actividad 8.1 Estudiaremos ahora algunas de las curvas clásicas en coordenadas polares cuyas gráficas en coordenadas cartesianas sin ayuda de una computadora, son difíciles de visualizar. Sin embargo, como se verá, en coordenadas polares no resultan tan complicadas.

1. Dibuje las gráficas en coordenadas polares de las siguientes curvas
   a) Espiral, $r = \theta$.
   b) Lemniscata, $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.
   c) Rosa de cuatro hojas, $r = \operatorname{sen} 2\theta$.
2. Conocida la gráfica de $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ ¿cómo es la gráfica de $r^2 = \operatorname{sen} 3\theta$, y la gráfica de $r = \operatorname{sen} 3\theta$?
3. ¿Qué puede decirse de $r^2 = \operatorname{sen}(n\theta)$ y $r = \operatorname{sen}(n\theta)$?
4. A partir de la gráfica de la lemniscata, ¿qué puede afirmarse de la gráfica de $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ dando diferentes valores de a? Obtenga las gráficas para $a = 2, -1/2, 3$.
5. ¿Cómo es la gráfica de $r^2 = \cos(2\theta)$? Antes de dibujarla intente enumerar las diferencias de la curva con $\operatorname{sen} 2\theta$ y la curva con $\cos 2\theta$, después proceda a dibujar la gráfica.

■

Solución de la actividad 8.1. 1) Debemos insistir que las unidades de los ángulos aquí empleadas son *radianes* y que el uso de grados no tiene sentido, ya que la ecuación $r = \theta$ requiere unidades de longitud en ambos lados de la igualdad para ser coherente. La gráfica simplemente representa el hecho de que r crece sin límite conforme la variable angular θ lo hace también. Se recomienda al lector principiante que realice una tabla para esta gráfica de r versus θ y que la trace sobre papel polar antes de utilizar computadoras. La gráfica correspondiente a esta espiral se encuentra en la figura 8.5.

Observamos que dado que $\operatorname{sen}(2\theta)$ es negativo si $\theta \in (\pi/2, \pi)$ y $\theta \in (3/2\pi, 2\pi)$ y dado que $r^2 \geq 0$, no puede haber gráfica en tales intervalos. Es decir sólo puede haber gráfica para $\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3/2\pi]$.

Una tabla con algunos valores pertinentes se muestra en 8.2. Para la gráfica de $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$ se puede ver la figura 8.7. Note que la gráfica para $\theta \in [\pi, 3/2\pi]$ es el reflejo de la gráfica para $\theta \in [0, \pi/2]$ (¿por qué?) por lo que no es necesario hacer una nueva tabla.

Finalmente, para la rosa de cuatro pétalos se puede usar la misma tabla 8.2 salvo que ahora r

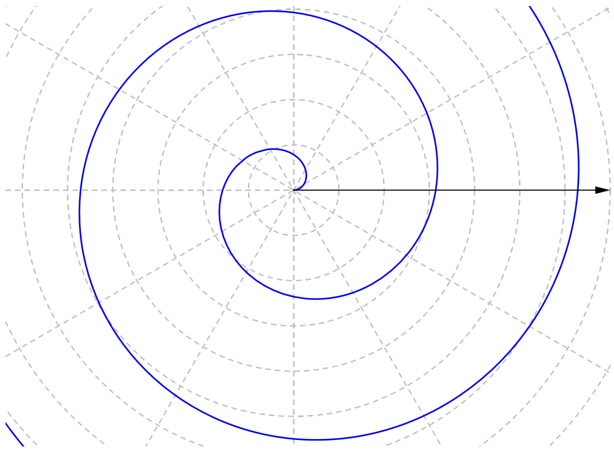


Figura 8.5: Gráfica de la espiral $r = \theta$.

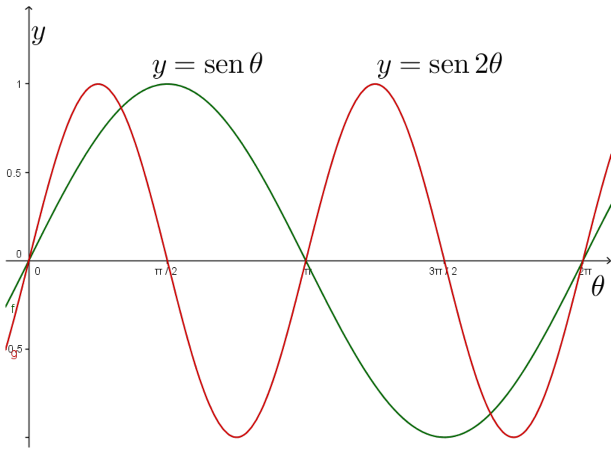


Figura 8.6: Gráfica de $y = \operatorname{sen}(2\theta)$ comparada con $y = \operatorname{sen}\theta$.

puede ser negativo (a diferencia de r^2) Intente algunos trazos sobre papel polar.
2) Haga una tabla en la que aparezcan valores de r que se encuentran en la gráfica 8.9. Con la misma tabla encuentre los valores pertinentes para $r^2 = \operatorname{sen}(3\theta)$ y dibuje la gráfica correspondiente.
3) Con las gráficas de $r = \operatorname{sen}(2\theta)$ y $r = \operatorname{sen}(3\theta)$ que puede inferirse para $r = \operatorname{sen}(4\theta)$ y $r = \operatorname{sen}(5\theta)$? ¿Puede hacer una generalización para $r = \operatorname{sen}(n\theta)$?
4) Dibuje las gráficas para diferentes valores de a y proceda a hacer inferencias para valores de a en general. Después compruebe si sus inferencias son válidas realizando las gráficas que ejemplifiquen sus inferencias.
5) Las gráficas intercambiando las funciones seno y coseno no pueden ser tan diferentes (¿por qué?) Dibuje varias de ellas, dé razones. □

Una vez que el lector ha realizado algunas gráficas en coordenadas polares es pertinente que trate de generalizar las nociones de simetría de las curvas en general, a partir de sus experiencias particulares.

Actividad 8.2 — Simetría de curvas en coordenadas polares. La siguiente actividad es una guía para deducir patrones de simetría para curvas en coordenadas polares.

1. ¿La gráfica que se obtiene para $r = \cos\theta$ es la misma que para $r = \cos(-\theta)$ ¿Por qué? Dibuje la gráfica. Qué puede decirse de cualquier curva la cual se obtiene la misma gráfica

Tabla 8.2: Tabla correspondiente a la lemniscata $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$.

θ	$\operatorname{sen}(2\theta)$	r^2
0	0	0
$\pi/6$	.860	0.75
$\pi/4$	1	1
$\pi/3$	.860	.75
$\pi/2$	0	0

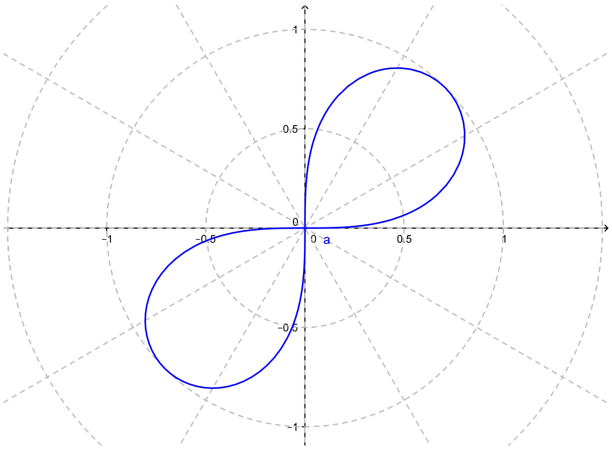


Figura 8.7: Gráfica de $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$.

para θ que para $-\theta$? ¿Qué sucede si se cambia r por $-r$ y al mismo tiempo se sustituye θ por $\pi - \theta$ en la curva $r^2 = \cos(2\theta)$?

2. ¿Qué sucede en la curva $r = \operatorname{sen}\theta$ si se sustituye θ por $\pi - \theta$? ¿Qué sucede en la misma curva si se sustituye θ por $-\theta$ y al mimo tiempo r por $-r$? Argumente sus afirmaciones. Dibuje las gráficas correspondientes.
3. ¿Qué sucede en la curva $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$ si se sustituye r por $-r$? ¿Qué sucede si se sustituye θ por $\pi + \theta$?
4. Generalice los resultados de los puntos anteriores a curvas en general. Escriba sus conjeturas.

■

Solución de la actividad 8.2. 1) Dado que la función coseno es una función par se tiene $cos\theta = \cos(-\theta)$ por lo que la gráfica de $r = \cos\theta$ es simétrica respecto al eje polar como se muestra en la gráfica 8.10.
2) Dado que

$$\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\pi = \operatorname{sen}\theta,$$

la gráfica de $r = \operatorname{sen}\theta$ es simétrica respecto al eje $\theta = \pi/2$. Dado que la función seno es impar se tiene $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$ por lo $r = \operatorname{sen}\theta$ no cambia si se sustituye θ por $-\theta$ y al mimo tiempo r por $-r$. Por lo tanto la gráfica es simétrica respecto al eje $\theta = \pi/2$. ¡Dibuje la gráfica!
3) La curva $r^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$ no cambia si se sustituye r por $-r$. Tampoco cambia si se sustituye θ por $\pi + \theta$ (argumente como en el punto 2) anterior). La curva es en este caso simétrica respecto al polo $(0,0)$.
4) Escriba de la manera más clara posible en forma general las afirmaciones de simetría de curvas en coordenadas polares obtenidas a partir de los puntos anteriores y haga un resumen en forma de tabla. □

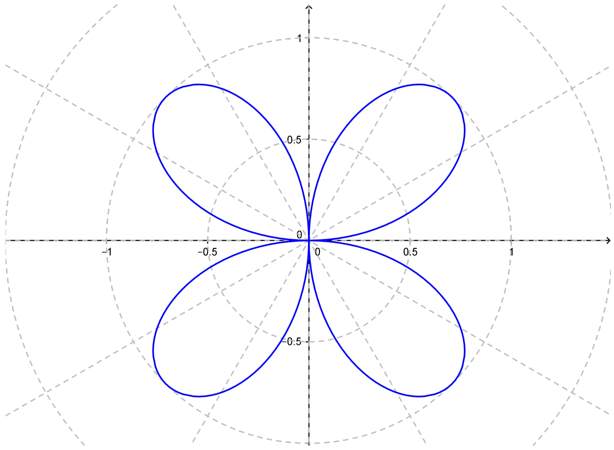


Figura 8.8: Gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

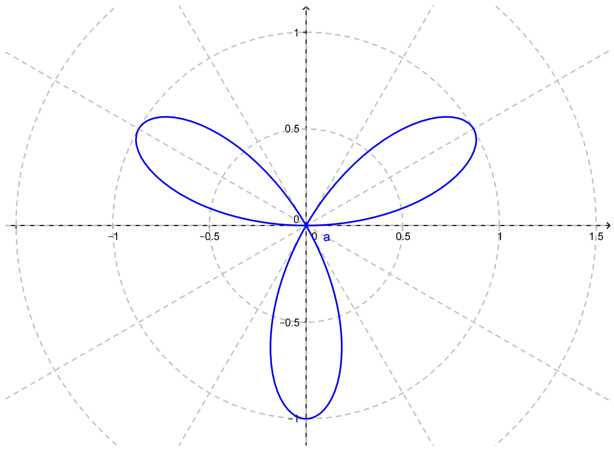


Figura 8.9: Gráfica de $r = \operatorname{sen} 3\theta$.

8.3 Coordenadas polares y *GeoGebra*

Una vez que el lector comprende y es capaz de realizar gráficas elementales en coordenadas polares, se puede proceder a trabajar con computadoras. El programa *GeoGebra* tiene la opción de utilizar coordenadas polares o cartesianas. Para cambiar de coordenadas cartesianas a polares en la pantalla de inicio de *GeoGebra* se presiona el botón derecho del ratón con lo cual se despliega el menú “Vista Gráfica” de la figura 8.11. Con el ratón sobre la opción “Vista Gráfica ...” del último renglón se presiona el botón derecho con lo cual se despliega el recuadro “Preferencias” mostrado en la figura 8.12. Presionando el botón izquierdo del ratón sobre la última pestaña en este recuadro “Cuadrícula”, se obtiene la opción para coordenadas polares que se muestra en la figura 8.13 bajo la leyenda “Tipo de cuadrícula” y poniendo lo opción “Polar” con la ayuda del ratón.

El lector puede explorar las posibilidades de diferentes cuadrículas polares dentro de esta opción, por ejemplo diferentes medidas angulares. Se debe cerrar la pantalla para acceder a la vista gráfica en coordenadas polares. Una vez que se tienen las coordenadas polares, en la barra “Entrada” se puede escribir cualquier ecuación en forma polar. Por ejemplo, se puede escribir $r = 1 - \cos(\theta)$ (con paréntesis después de “coseno”) para generar una cardioide. Las letras griegas se despliegan poniendo el cursor en el recuadro “Entrada” allí se verá un pequeño cuadro en la extrema derecha con la letra griega “α”, al presionar el botón izquierdo del ratón sobre esta letra se despliega el alfabeto griego y otros símbolos.

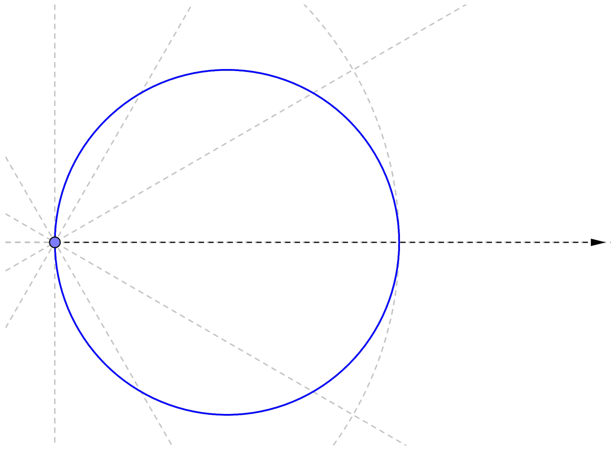


Figura 8.10: Gráfica de $r = \cos\theta$.

Figura 8.11: Menú de *GeoGebra* para cambio de coordenadas a polares.

8.4 Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son una extensión del plano al espacio tridimensional de las coordenadas polares. De la misma manera en la que a cada punto en el plano se le pueden asignar coordenadas rectangulares (x,y) o bien coordenadas polares (r,θ), a cada punto en el espacio tridimensional se le pueden asignar coordenadas cartesianas (x,y,z) o bien coordenadas cilíndricas (r,θ,z). Ambos sistemas son equivalentes en el sentido de que existen ecuaciones que permiten transformar coordenadas de un sistema entre sí. Efectivamente, si $P = (x,y,z)$ en coordenadas cartesianas, tenemos que en coordenadas cilíndricas $P = (r,\theta,z)$, donde

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{8.5}$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{8.6}$$
$$z = z. \tag{8.7}$$

El lector habrá notado que las ecuaciones de transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas son las mismas que las ecuaciones polares a las que se les ha agregado la variable z. Por esta misma razón las transformaciones recíprocas se obtienen fácilmente de las polares:

$$x = r\cos\theta \tag{8.8}$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta \tag{8.9}$$
$$z = z. \tag{8.10}$$

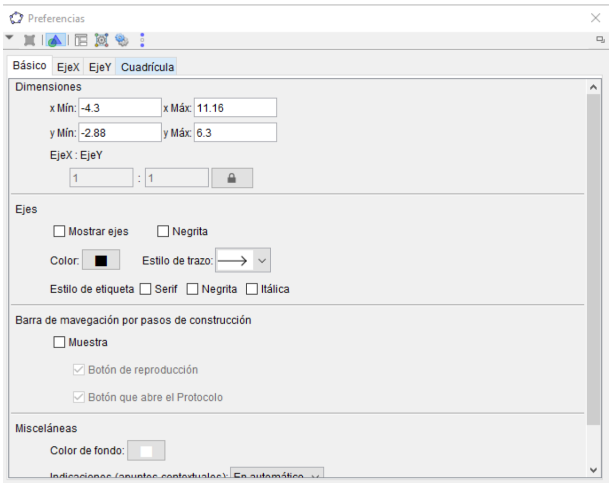


Figura 8.12: Recuadro “Preferencias” para cambio de coordenadas a polares.

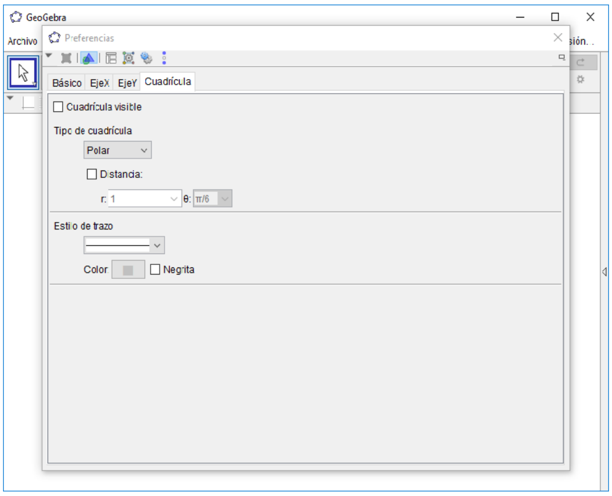


Figura 8.13: Pestaña “Cuadrícula” donde se selecciona el tipo de cuadrícula polar.

De la misma forma en que las circunferencias con centro en el origen y las rectas que pasan por el origen tienen ecuaciones simples en coordenadas polares, (es decir, $r =$ constante, $\theta =$ constante respectivamente), los objetos más simples en coordenadas cilíndricas son las superficies

$$r = r_0 > 0 \tag{8.11}$$
$$\theta = \theta_0 \tag{8.12}$$
$$z = z_0, \tag{8.13}$$

donde r_0, θ_0, z_0 son constantes, representan: un cilindro, un plano perpendicular al plano xy que pasa por el origen de coordenadas y un plano paralelo al xy.

■ **Ejemplo 8.4** Escriba la ecuación $z = x^2 - y^2$ en coordenadas cilíndricas.
Solución. Por medio de las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ se tiene que

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2 \\ &= r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ &= r^2\cos 2\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación $z = r^2 \cos 2\theta$ es la ecuación buscada en coordenadas cilíndricas. ■

8.5 Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son la generalización de las coordenadas polares a espacios de dimensión mayor o igual a tres. Como en coordenadas polares, a cada punto se le asigna la distancia del punto al origen de coordenadas, como un primer parámetro. Además, dado que el espacio es tridimensional, se requieren dos ángulos para ubicar cualquier punto: el ángulo azimutal que forma el vector de posición del punto con el eje positivo z y el ángulo polar que forma la proyección del vector de posición con el eje positivo x. Las ecuaciones de transformación son las siguientes.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{8.14}$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{8.15}$$
$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right). \tag{8.16}$$

Las trasformaciones inversas están dadas por

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{8.17}$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \tag{8.18}$$
$$z = \rho\cos\phi, \tag{8.19}$$

donde $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, y $\phi \in [0, \pi]$.

Las superficies más simples en coordenadas esféricas, como debe verificar el lector, son descritas por las ecuaciones

$$\rho = \rho_0 \tag{8.20}$$
$$\theta = \theta_0 \tag{8.21}$$
$$\phi = \phi_0, \tag{8.22}$$

donde ρ_0, θ_0 y ϕ_0 son constantes dadas. Las superficies corresponden respectivamente a: una esfera de radio ρ_0, un plano perpendicular al plano xy y un cono circular recto con generatriz la recta que pasa por el origen de coordenadas y paralela al vector $(0, 0, \cos\phi)$. Recuerde el lector que los parámetros omitidos en una ecuación, por ejemplo θ y ϕ en la ecuación (8.20) se suponen implícitos y que varían sobre todos los valores posibles, en este ejemplo $\theta \in [0, 2\pi)$, y $\phi \in [0, \pi]$, por lo que se genera una esfera completa precisamente porque ρ es constante en este caso.

Ejercicio 8.2 En esta actividad deduciremos las ecuaciones (8.17), (8.18) y (8.19) a partir de diagramas apropiados. 1) La figura 8.14 corresponde al corte del plano que pasa por $P = (x, y, z)$ y el origen de coordenadas. Dé razones por las que $r = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$ y $z = \rho\cos\phi$. Note que el plano xy está representado por sólo una línea. 2) A partir de la figura 8.15 proporcione argumentos que muestren que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Sustituya el valor de r del punto anterior y concluya (8.17), (8.18) y (8.19). ■

Solución del ejercicio 8.2. Note que los triángulos formados por los segmentos r, ρ, y z en la figura 8.14 y r, x, y en la figura 8.15 son necesariamente rectángulos. Por lo tanto los argumentos requeridos son de trigonometría básica. Haga diagramas en el plano xy que hagan evidente este hecho.

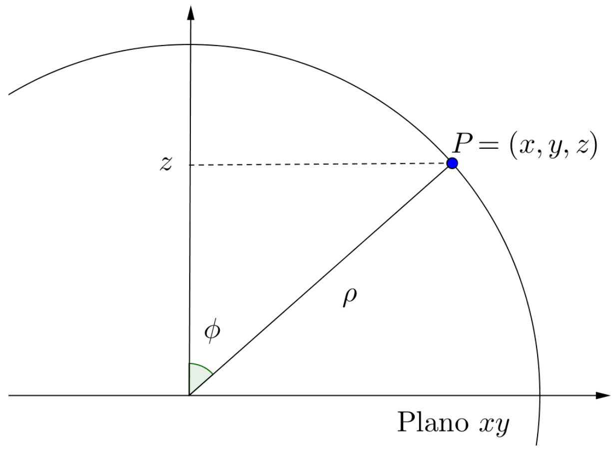


Figura 8.14: Diagrama correspondiente a la actividad 8.2 problema 1).

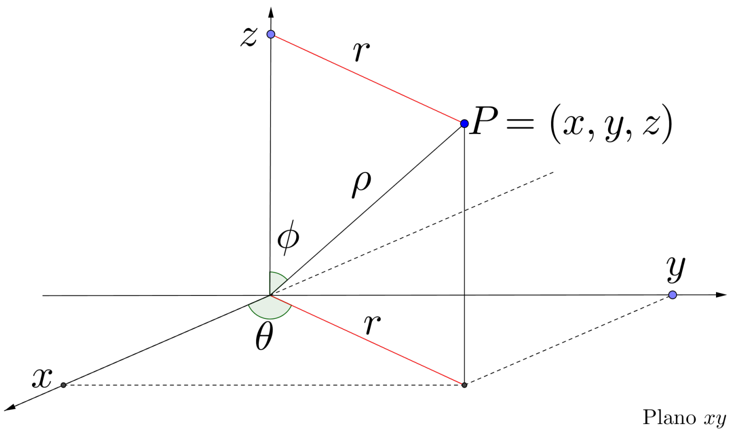


Figura 8.15: Diagrama correspondiente a la actividad 8.2 problema 2).

■ **Ejemplo 8.5** Encuentre las coordenadas rectangulares de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\rho = 5\cos\phi$, ¿a cuál superficie corresponde?
Solución. Dado que $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $z = \rho\cos\phi$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho &= 5\cos\phi \\ \rho &= \frac{5z}{\rho} \\ \rho^2 &= 5z \\ x^2+y^2+z^2 &= 5z \\ x^2+y^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la superficie corresponde a una esfera con centro en $(0,0,5/2)$ y radio $5/2$. ■

8.6 Curvas y superficies paramétricas

Hasta el momento solo hemos visto como ejemplos de parametrizaciones las rectas en $\mathbb{R}^2$ y rectas y planos en $\mathbb{R}^3$. Recordamos que una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por $P_o = (x_o, y_o)$ y es paralela al vector $a = (a_1, a_2)$ tiene ecuación vectorial $P = (x,y) = P_o + ta$, $t \in \mathbb{R}$. De donde la ecuaciones paramétricas de la recta en el plano están dadas por $x = x_0 + ta_1$, $y = y_0 + ta_2$, $t \in \mathbb{R}$. Las relaciones anteriores pueden ser sintetizadas por las expresiones $x = x(t)$, $y = y(t)$ donde queda explícita la dependencia del parámetro t. En general las curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^3$ tienen la forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Las únicas superficies parametrizadas hasta ahora son los planos que pasan por un punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ paralelos a los vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ recordamos que tales planos tienen ecuaciones paramétricas $x = x_o + ua_1 + vb_1$, $y = y_o + ua_2 + vb_2$ y $z = z_o + ua_3 + vb_3$, $u, v \in \mathbb{R}$. Las superficies parametrizadas son representadas por ecuaciones de la forma $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ donde queda explícita la dependencia de los parámetros u, v, pero más aún, las superficies quedan simbolizadas como transformaciones T del plano $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, es decir, $T : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \to (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$. En esta sección daremos más ejemplos de curvas y superficies parametrizadas que las vistas hasta ahora.

8.6.1 Curvas en el plano y el espacio

Nuestro primer ejemplo de parametrización de curvas, es la del segmento que une los puntos $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Claramente el segmento buscado debe estar sobre la recta que une los puntos la cual tiene ecuación

$$(x, y, z) = P_0 - t(P_1 - P_0) = (x_0 - t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0), z_0 - t(z_1 - z_0)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pero no se desea generar la recta completa sino solo un segmento, lo cual se logra si $t \in [0, 1]$ (¿por qué?) y de esta manera

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0), \qquad t \in [0, 1], \end{cases} \tag{8.23}$$

es la representación paramétrica del segmento que va de P_0 a P_1.

■ **Ejemplo 8.6** Determine las ecuaciones paramétricas del segmento que va de $P_0 = (-1, 3, 2)$ a $P_1 = (1, 2, 3)$ y dibuje la gráfica del segmento.
Solución. Tenemos de las ecuaciones (8.23) que

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) = -1 + 2t \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) = 3 - t \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) = 2 + t, \qquad t \in [0, 1], \end{cases}$$

son las ecuaciones paramétricas buscadas. ■

Es probable que algunos lectores no comprendan realmente como actúa el parámetro t hasta que se muestran ejemplos como este, donde el parámetro varía sólo en un intervalo finito. El siguiente ejemplo requiere de las coordenadas de transformación de coordenadas polares a cartesianas donde se fija como t, el parámetro angular, pero note que la gráfica del ejemplo está en coordenadas cartesianas, no en polares.

■ **Ejemplo 8.7** Parametrice el segmento de la circunferencia de radio $r = 3$ que va de $-\pi/4$ a $\pi/4$ en $\mathbb{R}^2$.
Solución. La circunferencia completa esta parametrizada por las ecuaciones (8.3), (8.4) con $r = 3$, $\theta = t \in [0, 2\pi)$, para obtener las ecuaciones del arco de circunferencia buscado, debemos tener $t \in [-\pi/4, \pi/4]$, es decir

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$$

la cual es la parametrización buscada. ■

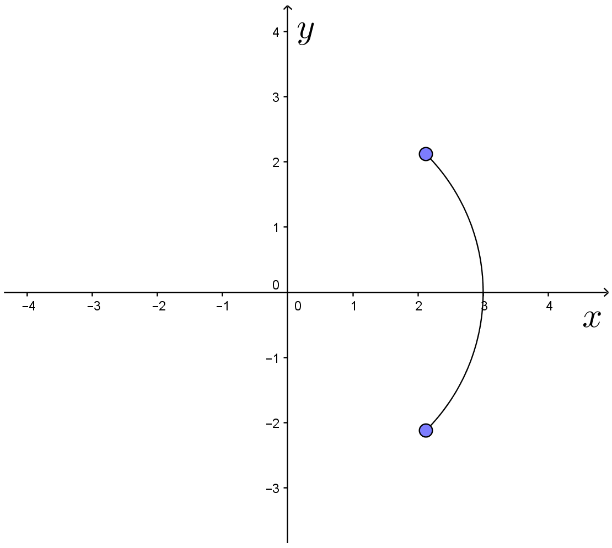


Figura 8.16: Arco de circunferencia de radio $r = 3$ en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$ del ejemplo 8.7.

Con los ejemplos vistos es fácil prever que si los parámetros de un plano están en un intervalo finito se obtiene un mosaico como el del siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 8.8** A cuál superficie corresponde la siguiente parametrización, dibuje la gráfica correspondiente

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u + v, \qquad u, v \in [0, 2] \end{cases}$$

Solución. La superficie en cuestión es un paralelogramo dentro del plano $(x, y, z) = u(1, 0, 1) + v(0, 1, 1)$, $u, v \in [0, 2]$, el cual es un plano que pasa por los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$. Tales puntos deben aparecer en el paralelogramo dado por los parámetros u, v que varían solo en el intervalo finito $[0, 2]$. ■

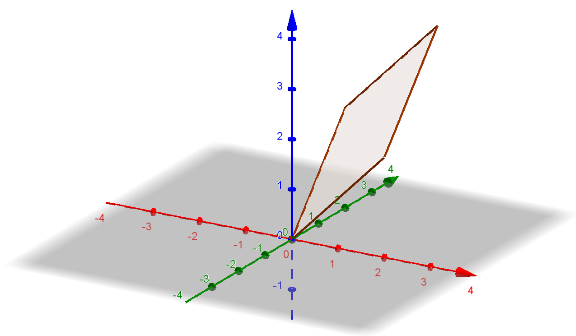


Figura 8.17: Mosaico del ejemplo 8.8.

8.7 Planteamiento de problemas

Una clase de problemas difíciles para los principiantes consiste en encontrar las ecuaciones paramétricas de una curva a partir de una definición que incluye movimiento de un objeto. Entre estos, *el más simple de los difíciles* es el problema de la cicloide que presentamos en forma de taller o actividad.

Actividad 8.3 Un círculo de radio r rueda sin resbalar sobre el eje x en la dirección positiva. La trayectoria descrita al moverse por un punto P sobre el círculo se llama cicloide. Si se toma como parámetro t el ángulo que gira el círculo alrededor de su centro, calcule las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ de la cicloide si el punto P se encuentra en el origen de coordenadas cuando $t = 0$. ■

Solución de la actividad 8.3. En la figura 8.18 identifique el segmento OA el cual mide $r\,\text{sen}\,t$ y el segmento OB el cual mide rt, sobre el eje x. De esta forma, la coordenada x de P corresponde a $x = rt - r\,\text{sen}\,t$ (¿por qué?). Sobre le eje y identifique el segmento r y el segmento $r\cos t$, la coordenada y de P es $y = r - r\cos t$ (¿por qué?).

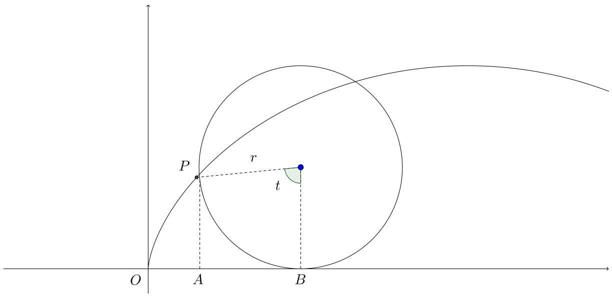


Figura 8.18: Cicloide de la actividad 8.3.

Por lo tanto la cardioide tiene ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= r(t - \text{sen}\,t) \\ y &= r(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Actividad 8.4 Un círculo de radio b rueda exteriormente sin resbalar, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. El conjunto de los puntos P sobre la trayectoria descrita por un punto sobre la circunferencia rodante se llama *epicloide*. Determine las ecuaciones paramétricas de la epicloide si $a < b$. ■

Solución de la actividad 8.4. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la epicloide (ver figura 8.19). Sea t el ángulo medido en radianes que forma el segmento OC que va del origen de coordenadas al centro de la circunferencia móvil, sea s el ángulo que forman OC con el segmento CP. Dado que la circunferencia móvil no resbala necesariamente se cumple que $at = bs$. Así $s = \dfrac{a}{b}t$. Dado que le triángulo OCA es rectángulo, si denotamos por r el ángulo OCA, tenemos $r + t + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, es decir, $r = \dfrac{\pi}{2} - t$. De esta forma por trigonometría elemental $OA = (a + b)\cos t$ y

$$\begin{aligned} Ax &= b\,\text{sen}\,(s - r) \\ &= b\,\text{sen}\left(s + t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto para la coordenada x tenemos

$$x = OA + Ax = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right).$$

Por otra parte, dado que $y = (a+b)\operatorname{sen} t - b\cos(s-r)$ tenemos

$$y = (a+b)\operatorname{sen} t - b\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{b}t\right).$$

Justifique los cálculos de la ecuación anterior. □

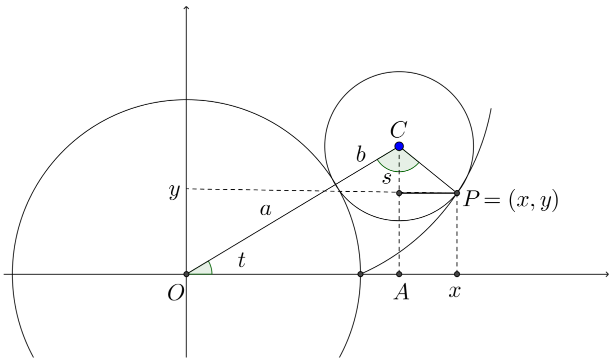


Figura 8.19: Epicloide de la actividad 8.4.

Curvas en el espacio

Después de las rectas y cónicas inscritas en planos del espacio tridimensional, la siguiente línea más simple en $\mathbb{R}^3$ es la llamada *hélice*. Esta curva se genera con un punto que se mueve dentro de un cilindro. Las ecuaciones paramétricas de una hélice se dan en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 8.9** Determine las ecuaciones paramétricas de un punto$P$ que se mueve en una hélice inscrita en el cilindro $x^2+y^2=r^2$, si $z=t$ es el parámetro de movimiento del punto.
Solución. Dado que las coordenadas x y y del punto se mueven sobre un círculo debemos tener que las ecuaciones paramétricas están dadas por

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\operatorname{sen} t \\ z &= t. \end{aligned}$$

Efectivamente, se cumple

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\operatorname{sen}^2 t = r^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = r^2$$

la cual es la ecuación cartesiana del cilindro circular recto con eje dado por el eje z. ■

8.8 Parametrización trivial

Las funciones de dos variables $z = f(x,y)$ tienen por gráfica una superficie $\mathscr{S}$ dada por el conjunto

$$\mathscr{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}.$$

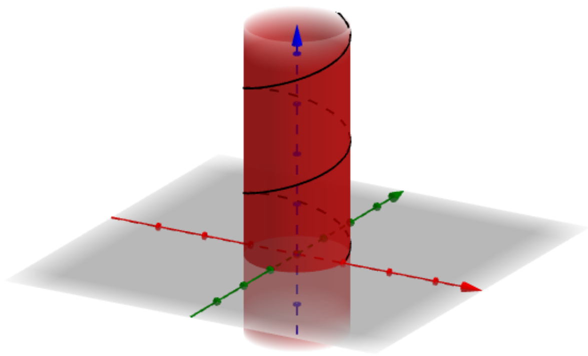


Figura 8.20: Hélice dentro del cilindro $x^2+y^2=1$.

Tales superficies admiten la llamada *parametrización trivial* dada por

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= f(u,v), \quad (u,v)\in \operatorname{dom} f, \end{aligned}$$

donde dom$f$ es el conjunto de puntos donde esta definida f, llamado *dominio de la función*.

■ **Ejemplo 8.10** Utilice un programa computacional para obtener la gráfica de la función $z = \operatorname{sen}(xy)$. Dé la parametrización trivial de dicha superficie con u,v en el intervalo $[-\pi,\pi]$.
Solución. La solución de este ejercicio se presenta en la figura 8.21. En la sección 8.12 daremos las instrucciones de como generar esta superficie con *GeoGebra*. La parametrización de dicha figura está dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= \operatorname{sen}(uv), \quad (u,v)\in[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]. \end{aligned}$$

Note que en este caso el dominio de definición de la función es $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$. ■

■ **Ejemplo 8.11** Proporcione la parametrización trivial de la superficie dada por $z=x^2-y^2$.
Solución. La parametrización de la gráfica de la superficie es

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= u^2-v^2, \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Observe que en este caso tanto u como v varían sobre todo $\mathbb{R}$ al no imponerse ninguna restricción en el dominio de la función. La gráfica de esta función corresponde a la *silla de montar* mostrada en la figura 8.22. ■

8.8.1 La esfera como superficie paramétrica

Dadas las ecuaciones (8.17), (8.18) y (8.19), podemos definir la esfera en términos de los parámetros u,v. Por ejemplo, la esfera de radio r con centro en el origen de coordenadas está dada

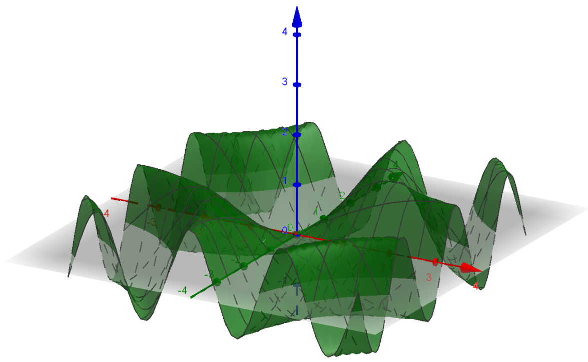


Figura 8.21: Gráfica de la función $z = \operatorname{sen}(xy)$.

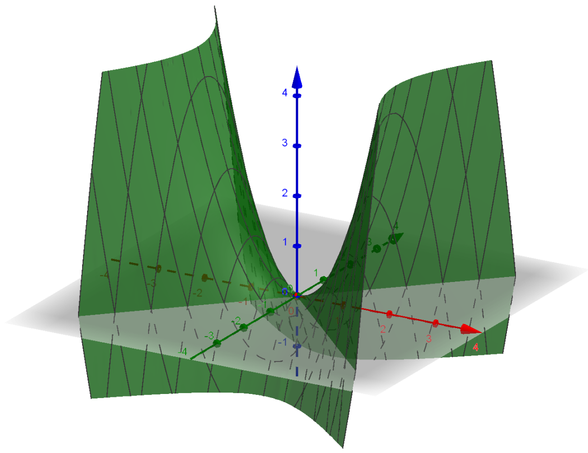


Figura 8.22: Gráfica de la función $z = x^2 - y^2$ que corresponde al ejemplo 8.11.

por

$$\begin{aligned} x &= r\cos u \operatorname{sen} v \\ y &= r\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z &= r\cos v. \end{aligned}$$

El lector debe comprobar que con las ecuaciones paramétricas anteriores efectivamente se cumple que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Un ejemplo típico de aplicación de la parametrización de superficies ocurre en el cálculo avanzado cuando se requiere, por ejemplo, el volumen contenido dentro de un cilindro que interseca a una esfera. Desarrollamos este tema en el siguiente taller.

Actividad 8.5 Parametrice la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ que se encuentra dentro de la parte superior del cilindro $x^2 + y^2 = 5$. ■

Solución de la actividad 8.5. Si sustituimos $x^2+y^2=5$ en la ecuación de la esfera obtenemos

$$\begin{aligned} 5+z^2 &= 9 \\ z^2 &= 4 \\ z &= \pm 2. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Dado que se requiere la superficie en la parte superior del cilindro nos quedamos con $z=+2$ de (8.24) la cual es la ecuación del plano donde se encuentra la intersección de la esfera y el cilindro dados. Observamos que el parámetro u varía entre 0 y 2π ya que se genera todo un casquete de la esfera. Así que el parámetro por definir es v . Si hacemos un corte en el plano xz podemos definir v como se muestra en la figura 8.24. El triángulo con hipotenusa dada por el radio de la esfera $r=3$,

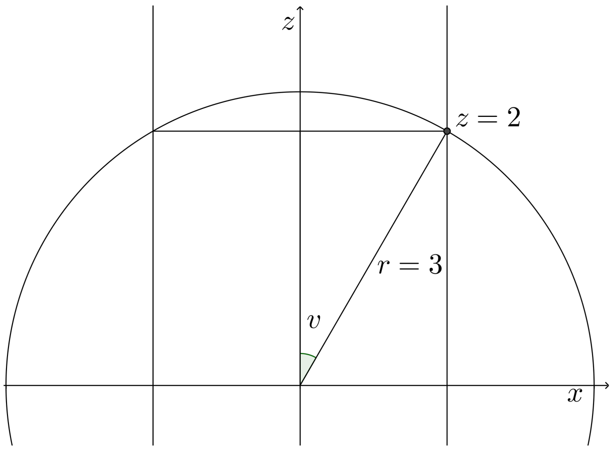


Figura 8.23: Corte de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ que se interseca con el cilindro $x^2+y^2=5$.

tiene cateto adyacente al ángulo v dado por $z=2$. De esta forma

$$\cos v = \frac{2}{3},$$

Por lo tanto $v=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$. Así el parámetro satisface $v\in\left[0,\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right]$.

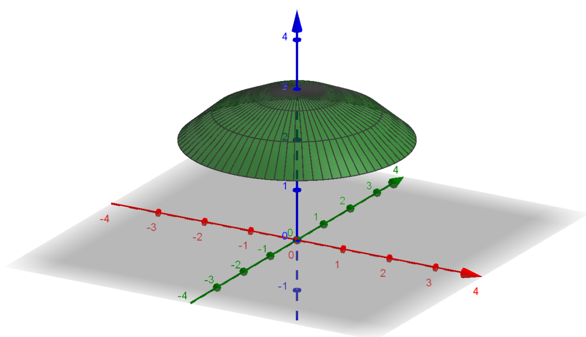


Figura 8.24: Parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ dentro del cilindro $x^2+y^2=5$ de la actividad 8.5.

Por lo tanto, se tiene la paremetrización del casquete dada por

$$
\begin{aligned}
x &= 3\cos u \operatorname{sen} v \\
y &= 3\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\
z &= 3\cos v, \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in \left[0, \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right]
\end{aligned}
$$

es decir, la parametrización del casquete de la esfera dentro del cilindro es la misma que la de la esfera, pero los parámetros u, v varían solamente dentro de los valores dados, $u \in [0, 2\pi)$ y $v \in [0, \arccos(2/3)]$. □

Terminamos esta sección con la parametrización no trivial del toro de revolución.

Actividad 8.6 El centro de un círculo de radio a en el plano xz se mueve sobre una circunferencia de radio $b > a$ en el plano xy. 1) Determine las ecuaciones paramétricas de la superficie $\mathscr{T}$, llamada *toro de revolución* que contiene todos los puntos sobre la circunferencia móvil. 2) Dibuje la gráfica del toro con $a = 1$, $b = 3$. ■

Solución de la actividad 8.6. 1) Dado un punto $P = (x, y, z) \in \mathscr{T}$. Sea C el centro de la circunferencia móvil que se encuentra en la circunferencia

$$
S_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}
$$

Sea u el ángulo que forma el segmento OC con el eje x, donde O es el origen de coordenadas y sea v el ángulo que forma el segmento CP con el plano xy. Entonces tenemos

$$
\begin{aligned}
x &= (b - a\cos v)\cos u \\
y &= (b - a\cos v)\operatorname{sen} u \\
z &= a\operatorname{sen} v, \quad u \in [0, 2\pi), \; v \in [0, 2\pi).
\end{aligned}
$$

2) El toro correspondiente se encuentra en la figura 8.25. □

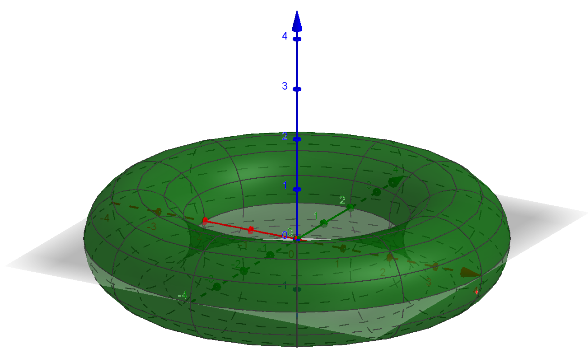


Figura 8.25: Toro de revolución correspondiente a la actividad 8.6 .

8.9 Curvas, superficies y *GeoGebra*

Ya sea en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ las instrucciones para generar curvas y superficies paramétricas en *GeoGebra* tiene la misma sintaxis. En la barra "Entrada" de *GeoGebra* si se quiere generar una curva se debe escribir `Curva[]`, si se quiere generar una superficie, se debe escribir `Superficie[]`. Dentro de los brackets `[]` se deben escribir las ecuaciones paramétricas para x, y, etcétera, luego los parámetros y, finalmente, el valor inicial y el final de cada uno de los parámetros.

■ **Ejemplo 8.12** Utilice *GeoGebra* para generar: 1) la hélice del ejemplo 8.9 y 2) la superficie del ejemplo 8.10.

Solución. Tanto la hélice como la superficie se encuentran en $\mathbb{R}^3$ por lo que debemos usar las herramientas 3D de *GeoGebra*.

1) La hélice se genera escribiendo en el campo "Entrada":

```
Curva[cos(t),sen(t),t,t,0, 2*pi]
```

dado que las ecuaciones paramétricas de la hélice son $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, en este caso t es el parámetro y toma el valor mínimo de 0 y el máximo de 2π no olvide que en *GeoGebra* puede escribir "pi" para la constante π.

2) La superficie del ejemplo 8.10 se genera con *GeoGebra* escribiendo

```
Superficie[ u,v,sen(u*v),u,v,-pi, pi,-pi,pi]
```

dado que la parametrización (ver el ejemplo 8.10)de la superficie es $x = u$, $y = v$, $z = \operatorname{sen}(uv)$ con $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$ vea la figura 8.26. ■

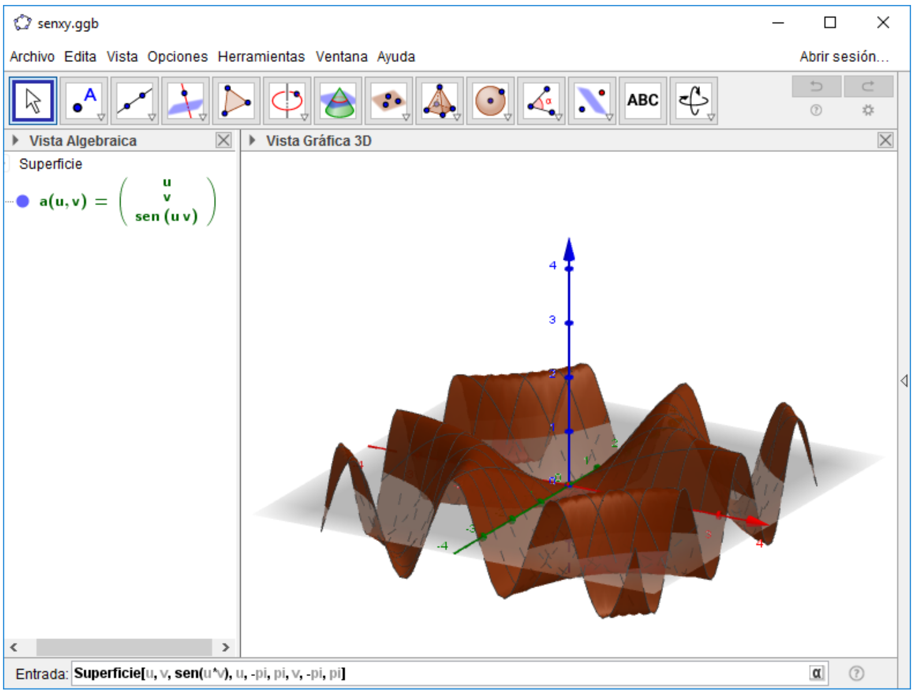


Figura 8.26: Ventana de *GeoGebra* con la superficie del ejemplo 8.12.

Recuerde que basta escribir las palabras "Curva" o "Superficie" en el recuadro "Entrada" de *GeoGebra* para que el programa genere las instrucciones para generara la curva o superficie deseadas. Por ejemplo, al escribir "Superficie" aparece la barra que se muestra en la figura 8.27.

Aquí, por ejemplo, poniendo el cursor sobre la primera entrada `<Expresión>` puede escribir `u` que corresponde a la ecuación paramétrica $x = u$.

Figura 8.27: Barra de *GeoGebra* con los comandos preestablecidos para generar una superficie .

8.10 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico

1. Se dan los puntos P_1, P_2 en coordenadas cartesianas, calcule sus coordenadas polares: $P_1 = (-3,0)$, $P_2 = (-\sqrt{2}), -\sqrt{2})$
   Solución. $P_1 = (3,\pi)$, $P_2 = (2,-3\pi/4)$.
2. Dadas las coordenadas polares de los siguientes puntos encuentre las coordenadas cartesianas. Grafique los puntos con las herramientas para coordenadas polares de *GeoGebra*: a) $(7,\pi/2)$, b) $(6,0)$, c) $(2,\pi/4)$
   Solución. a) $(0,7)$, b) $(6,0)$, c) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.
3. Halle las coordenadas cilíndricas de los puntos a) $(0,1,1)$, b) $(6,3,2)$
   Solución. a) $(1,\pi/2,1)$, b) $(3\sqrt{5}, \arctan(1/2), 2)$
4. Halle las coordenadas cartesianas del punto $(8,\pi/4,\pi/6)$, dado en coordenadas esféricas.
   Solución. $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$.
5. Dé la parametrización trivial de la curva que corresponde a la gráfica de $y = x^3$. Utilice la herramienta de *GeoGebra* para curvas parametrizadas y haga la gráfica correspondiente.
   Solución. $x = t$, $y = t^3$,
6. Utilice *GeoGebra* para obtener las gráficas de la actividad 8.1.
7. Dadas las ecuaciones siguientes que están en coordenadas cilíndricas determine a que tipo de superficies corresponden y exprésalas en coordenadas rectangulares.
   a) $r = 3$.
   b) $\theta = \pi/4$.
   Solución. a) Cilindro $x^2 + y^2 = 9$. b) Plano $x = y$
8. Utilice *GeoGebra* para obtener la gráfica de las siguientes curvas dadas en forma paramétrica.
   a) $x = \dfrac{2t^2}{t^2+1}, y = \dfrac{2t^3}{t^2+1}, t \in [-4,4]$.
   b) $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\,\mathrm{sen}^3 t$, $t \in [0,2\pi]$.
9. Utilice las herramientas de *GeoGebra* para generar la superficie cuyas ecuaciones paramétricas son $x = u\,\mathrm{sen}, v$, $y = u\cos v$, $z = v$, $u \in [-1,1]$, $v \in [0,4]$. ¿Qué partes de la superficie determinan los parámetros u, v?
10. Indique por qué la siguiente curva está sobre un toro de revolución $x = (2+\cos(12t))\cos t$, $y = (2+\cos(12t))\,\mathrm{sen}\, t$, $z = \mathrm{sen}\,(12t)$ $t \in [0,2\pi]$. Utilice *Geogebra* para graficar la curva, no olvide usar la opción para curvas en 3D.

Nivel medio

1. Determine las coordenadas polares de los puntos simétricos respecto al polo a los puntos dados en coordenadas polares a) $(3,\pi 4)$, b) $(2,\pi)$, c) $(1,2)$
   Solución. a) $(3,-3\pi/4)$, b) $(2,0)$, c) $(1,\pi+2)$.
2. Dados los puntos $(8,-2/3\pi)$ y $(6,\pi/3)$ en coordenadas polares, encuentre las coordenadas polares del punto medio.
   Solución. $(1,-2\pi/3)$.
3. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
   Solución. $x = a\cos\theta$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$.

4. Dadas las ecuaciones (8.17), (8.18) y (8.19) verifique que se cumple la ecuación $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$.
5. Exprese en coordenadas cartesianas la ecuación $\rho + 8\operatorname{sen}\phi\cos\theta + 4\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta - 6\cos\phi = 0$ la cual está dada en coordenadas esféricas ¿a cuál superficie corresponde?
   Solución. Esfera $x^2+y^2+z^2+8x+4y-6z=0$.
6. Dadas las ecuaciones siguientes que están en coordenadas cilíndricas determine a que tipo de superficies corresponden y exprésela en coordenadas rectangulares.
   a) $r^2+5z^2=25$.
   b) $r = 2\operatorname{sen}\theta$.
   c) $r^2 - z^2 = 1$.
   Solución. a) Elipsoide $x^2/25+y^2/25+z^2/5=1$. b) cilindro circular recto $x^2+y^2=4y$. c) Hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$.
7. Exprese las ecuaciones siguientes, las cuales están dadas en coordenadas esféricas, en coordenadas cartesianas y determine a cuál tipo de superficies corresponden.
   a) $\rho = 7\cos\phi$.
   b) $\theta = \pi/3$.
   c) $\rho\operatorname{sen}\phi = 1$.
   Solución. a) Esfera $x^2+y^2+z^2=7z$. b) Plano $y=\sqrt{3}x$. c) Cilindro $x^2+y^2=1$.
8. Parametrice el cilindro $x^2+z^2=4$.
   Solución. $x = r\cos\theta$, $y = y$, $z = r\operatorname{sen}\theta$.
9. Parametrice el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.
   Sugerencia. Modifique apropiadamente las coordenadas esféricas.
10. Utilice *GeoGebra* para obtener la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x=t+1$, $y=t(t+2)$. Determine a cuál curva representa.
   Solución. Parábola $y=x^2-1$.

Nivel superior

1. Un círculo de radio a, rueda *exteriormente sin resbalar*, sobre la circunferencia $x^2+y^2=a^2$. Muestre que el conjunto de los puntos sobre la trayectoria descrita por un punto sobre la circunferencia rodante es una *cardioide*. Determine las ecuaciones paramétricas de la cardioide.
   Solución. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\operatorname{sen}t - a\operatorname{sen}2t$
2. Un círculo de radio a rueda *interiormente sin resbalar*, sobre la circunferencia $x^2+y^2=b^2$.El conjunto de los puntos sobre la trayectoria descrita por un punto sobre la circunferencia rodante se llama *hipocloide*. Determine las ecuaciones paramétricas de la hipocloide si $a<b$.
   Solución. $x=(b-a)\cos t + a\cos\frac{b-a}{a}t$, $y=(b-a)\operatorname{sen}t - a\operatorname{sen}\frac{b-a}{a}t$
3. La posición $P(t)=(x(t),y(t))$ de un proyectil en cada instante t está dada por $x=(v_o\cos\theta)t$, $y=(v_o\operatorname{sen}\theta)t - 1/2gt^2$, donde v_o es la velocidad inicial del proyectil, g es la aceleración de la gravedad, igual a 9.8 m/s^2. Utilice *GeoGebra* para realizar las siguientes actividades:
   a) Genere dos deslizadores con el penúltimo ícono de la barra de herramientas de *GeoGebra*. Etiquete uno como θ que tome valores entre 0 y $\pi/2$ y el otro deslizador como *vo* que tome valores entre 0 y 100.
   b) Genere las ecuaciones paramétricas $x=(vo\cos\theta)t$, $y=(vo\operatorname{sen}\theta)t-1/2gt^2$, donde $v_o = vo$. Obtenga gráficas para $\theta=\pi/3,\pi/4,\pi6$, con $v_o=40$ m/s. Para θ fijo varíe v_o con el deslizador y viceversa.
   c) ¿Qué obtiene para $\theta=\pi/2$? Dé razones de lo que obtiene.
   d) Realice una animación que muestre la trayectoria de un proyectil donde pueda variar v_0

y θ.

e) Ponga y en función de x a cual curva corresponde.

f) Determine a cuál ángulo corresponde el máximo alcance del proyectil para cada v_o.

Solución. e) Parábola. f) $\pi/3$.

4. Obtenga la ecuación cartesiana de las siguientes curvas dadas en forma paramétrica. Sugerencia: elimine el parámetro despejando o utilizando identidades trigonométricas apropiadas.

   a) $x = \frac{1}{3}\cos t$, $y = \cos 2t$.

   b) $x = a \sec t$, $y = b \tan t$.

   c) $x = \dfrac{5t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{5t^2}{1+t^3}$.

   Soluciones. a) $y = 18x^2 - 1$. b) $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. c) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

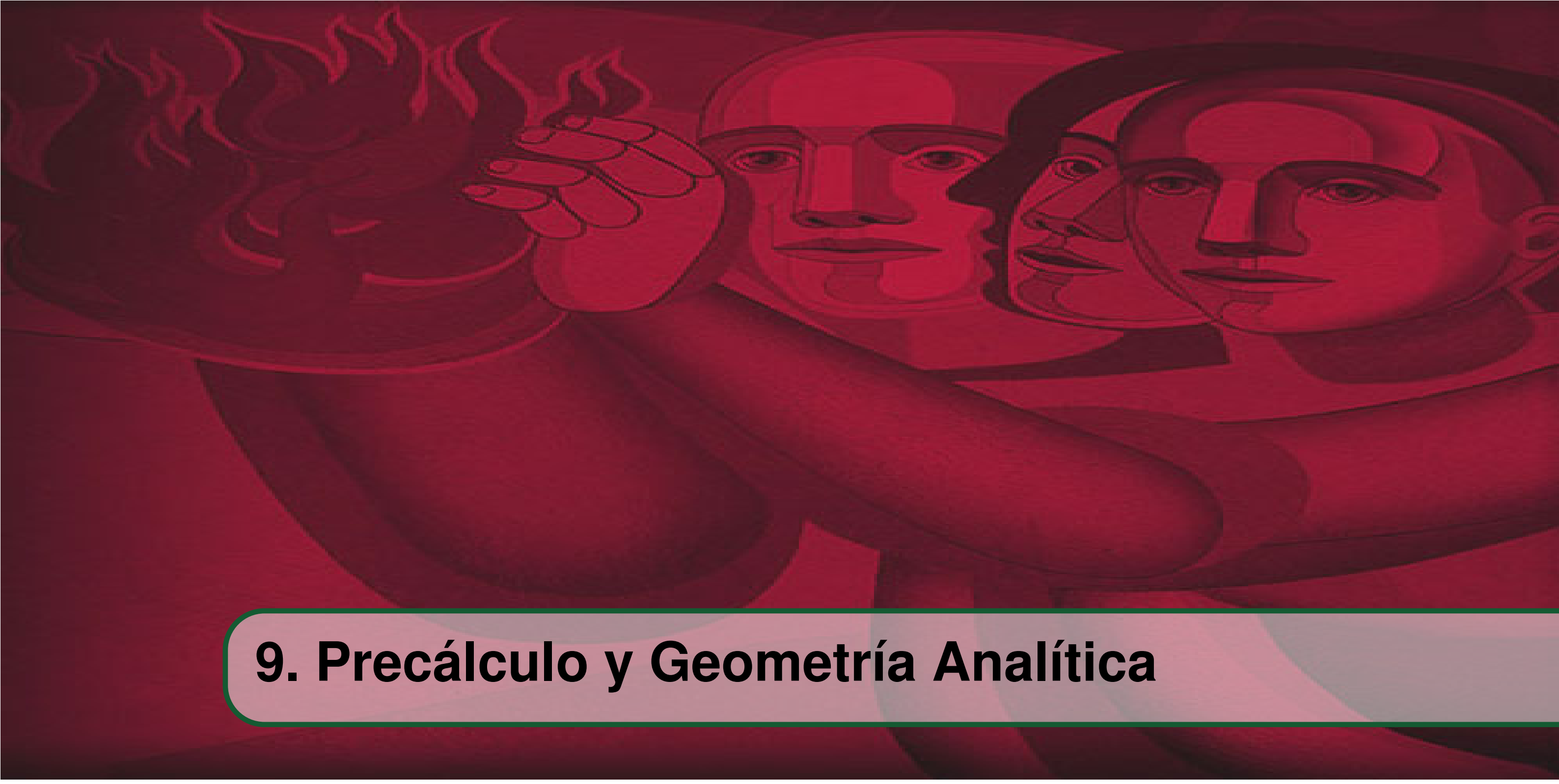
5. Un hilo enrollado en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se desenrolla de manera que se mantiene tangente a la circunferencia en el punto B, donde el hilo se separa de ella. Halle las ecuaciones paramétricas de la línea que describe el extremo del hilo. Considere que la posición inicial de este punto es $P = (a, 0)$, con $a > 0$. La línea así generada se llama *evolvente de la circunferencia*.

   Soluciones. $x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$.

6. Muestre que la ecuación de un cono circular con vértice en el origen y eje en la dirección del vector unitario $u = (u_1, u_2, u_3)$ es

$$(u_1 x + u_2 y + u_3 z)^2 = \cos^2\theta\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

   donde θ es el ángulo entre el eje y y una generatriz del cono. Use coordenadas esféricas para dar una parametrización de este cono. Obtenga una gráfica de la superficie mediante *GeoGebra*.



9. Precálculo y Geometría Analítica

En este capítulo estudiamos las gráficas de funciones con un enfoque introductorio pensado para ser aplicado en un curso de cálculo diferencial y partiendo de la Geometría Analítica. Algunas funciones ya han sido tratadas de una manera básica, como es el caso de las funciones trigonométricas elementales, pero en este capítulo profundizaremos e introduciremos nuevas funciones y las muy importantes funciones inversas.

9.1 Funciones y las ciencias e ingenierías

Las relaciones más simples que ocurren en las ciencias e ingeniería son relaciones de dependencia entre dos variables. Por ejemplo la *ley de Boyle* establece que a temperatura constante la presión P de un gas contenido es inversamente proporcional al volumen V del mismo gas. Si se denota por k la constante de proporcionalidad se tiene entonces la relación

$$P = \frac{k}{V}.$$

En este caso se dice que P depende de V. A la variable V se le llama *variable independiente* y a la variable P se le llama *variable dependiente*. Se dice también que *P está en función de V*. Es claro que V no puede ser negativa ya que no hay volúmenes negativos y la variable V, tomará valores mayores que 0 y menores V_o, donde V_o es el volumen máximo de los recipientes de un laboratorio dado. O bien, si se desea especular y no se ponen límites superiores al volumen, los valores permitidos para V, están en el intervalo $(0,\infty)$, a este intervalo en este caso particular se le llama dominio de la función P. Muy relacionado con las funciones es la interpretación de las gráficas correspondientes. La gráfica de función $P = k/V$, con $V > 0$ corresponde, como sabemos, a la gráfica de la rama positiva de una hipérbola equilátera, la cual tiene por asíntotas los semiejes positivos x, y. La interpretación de la gráfica es muy simple: a temperatura fija si el volumen de un gas disminuye la presión aumenta (figura 9.1) y si el volumen aumenta la presión disminuye.

Como otro ejemplo, mencionamos la ley de caída libre de Galileo la cual establece que la distancia x medida en metros, recorrida por un cuerpo en caída libre (es decir, sin fricción del aire)

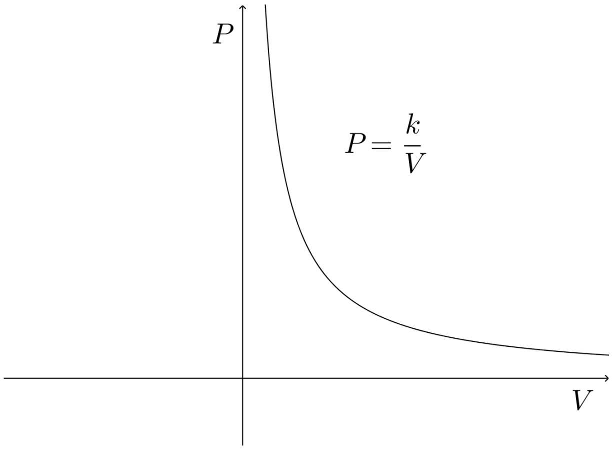


Figura 9.1: Ley de Boyle .

es proporcional al tiempo transcurrido elevado al cuadrado y está dada por la relación

$$x = \frac{g}{2}t^2,$$

donde g =9.8 m/s^2 es la aceleración debida a la gravedad de la tierra y t es el tiempo medido en segundos que transcurre desde el instante en el que un cuerpo se deja caer. En este caso la variable t es la variable independiente, x la variable dependiente, y se dice que x depende de t, lo cual también se escribe como $x = x(t)$, lo cual se lee como "x es función de t". El dominio de la función es el intervalo $[0, t_o]$ dado que $t = 0$ es el instante en el que comienza la caída y t_o corresponde al tiempo en el que el cuerpo alcanza el suelo. La gráfica de la función en este caso corresponde a una parábola y se muestra en la figura 9.2.

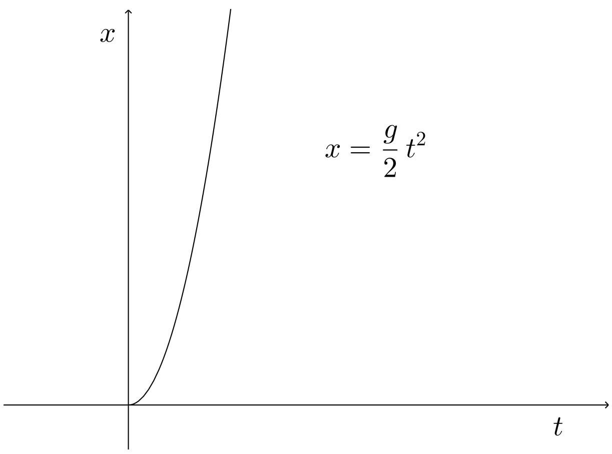


Figura 9.2: Ley de Galileo .

9.2 Funciones en general

En general, la Geometría Analítica estudia funciones definidas de manera implícita, por ejemplo en la relación $x^2 + y^2 = 1$. Aquí un primer conflicto de un lector que por primera vez estudia cálculo diferencial es que esta relación implícita define dos funciones

$$y = +\sqrt{1 - x^2}$$

y

$$y = -\sqrt{1-x^2}.$$

Esta aparente complicación esconde en realidad una simplificación. Se desea estudiar en el Cálculo Diferencial correspondencias tales que a un número x de un conjunto A, le corresponda **un y sólo un número** y, de otro conjunto B. Esta simplificación tiene sustento en el principio de causalidad de la filosofía heredado a la física: a cada causa le corresponde un y sólo un efecto; o en términos de variables: a cada variable independiente, le corresponde una y sólo una variable dependiente. Se debe a estas consideraciones el extendido uso de funciones, además de la profunda interrelación del modelado matemático con las ciencias. Durante largo tiempo se entendió por función solamente la regla de correspondencia entre los elementos x y y, por ejemplo a la correspondencia $y = -\sqrt{1-x^2}$, se le llama función. Sin embargo, el concepto abstracto de función del cual se da una definición formal en el capítulo 1 es hoy día el más utilizado.

Partiendo de la idea de función como regla de correspondencia entre variables, y que una variable depende de otra, se pueden definir los conceptos de dominio e imagen de la manera siguiente.

Definición 9.1 Sea f una función definida por la regla $y = f(x)$, la cual pone en correspondencia a un número $x \in \mathbb{R}$ un único $y \in \mathbb{R}$. El conjunto $A \subset \mathbb{R}$, de todas las x para las cuales tiene sentido la expresión $y = f(x)$, se llama *dominio* de f y se denota por $A = \operatorname{dom} f$. El conjunto $B \subset \mathbb{R}$, el cual para cada $y \in B$ existe una única $x \in \operatorname{dom} f$ tal que $y = f(x)$, se llama *imagen* (o rango) de f y se denota por $B = \operatorname{im} f$ (o $\operatorname{rango} f$). El conjunto de puntos $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, con $x \in \operatorname{dom} f$ se denomina *gráfica de la función*.

■ **Ejemplo 9.1** Determine el dominio, la imagen y la gráfica de las funciones definidas por $f(x) = ax$, para los casos $a > 0$, $a < 0$ y $a = 0$.

Solución. Para toda a, se tiene $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ (¿por qué?). Por otra parte, para $a \neq 0$, $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$ y si $a = 0$, $\operatorname{im} f = \{0\}$, es decir, la imagen de f consta sólo del punto $y = 0$. Las gráficas de estas funciones se muestran en la figura 9.3. ■

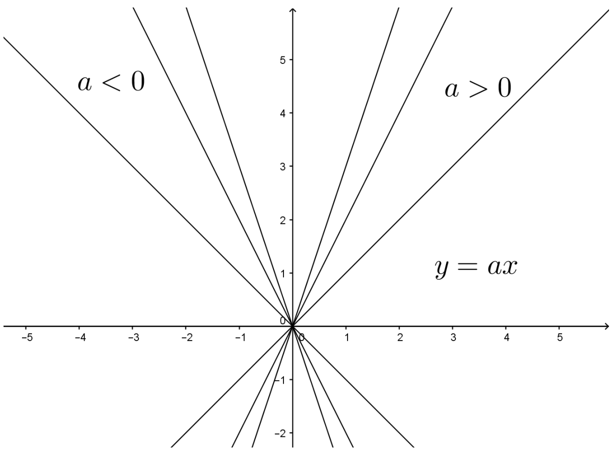


Figura 9.3: Funciones $f(x) = ax$ del ejemplo 9.1 .

Definición 9.2 Supongamos que el número $x \in \mathbb{R}$, es tal que existe un número $y \in \mathbb{R}$ el cual satisface $x = y \cdot y = y^2$. Se define la raíz de x como el número y dado, denotado $y = \sqrt{x}$, es decir,

$$y = \sqrt{x} \text{ si y solo si} y^2 = x.$$

Observe que por definición se debe tener $x \geq 0$, ya que $x = y \cdot y$ y todo número real multiplicado por si mismo es mayor o igual a cero.

■ **Ejemplo 9.2** Encuentre el dominio, la imagen y la gráfica de la función f definida por la regla de correspondencia $y = -\sqrt{x}$.

Solución. En $\mathbb{R}$ las sólo a los números mayores o iguales a cero se les puede extraer raíz cuadrada, por la definición 9.2, por lo tanto se debe tener $x \geq 0$ y así, $\text{dom} f = [0, \infty)$. Sabemos que la ecuación $y^2 = x$, representa una parábola con eje focal el eje x y de esta forma, extrayendo raíces, (ver el capítulo 1) $y = \pm\sqrt{x}$. Por lo tanto $y = -\sqrt{x}$ representa la rama inferior de esta parábola. De la gráfica de f (figura 9.4) podemos concluir que $\text{im} f = (-\infty, 0]$. ■

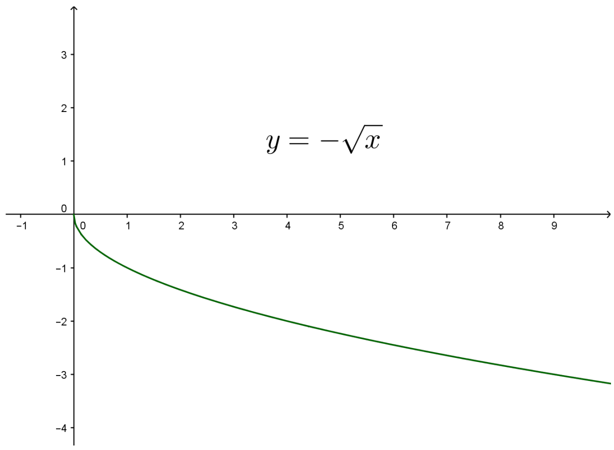


Figura 9.4: Parábola del ejemplo9.2 .

■ **Ejemplo 9.3** Encuentre el dominio, la imagen y la gráfica de la función f, definida por la regla de correspondencia $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Solución. En $\mathbb{R}$, sólo a los números mayores o iguales a cero se les puede extraer raíz cuadrada por la definición 9.2, por lo tanto se debe tener $1 - x^2 \geq 0$ es decir $(1-x)(1+x) \geq 0$, lo que ocurre si y solo si$-1 \leq x \leq 1$. Por lo tanto $\text{dom} f = [-1, 1]$. Por otra parte sabemos que $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación de una circunferencia por lo que si ponemos $y = f(x)$, entonces $y = -\sqrt{1-x^2}$, representa la semicircunferencia inferior, ya que si x toma valores entre -1 y 1 ($-1 \leq x \leq 1$), entonces $y = -\sqrt{1-x^2}$ toma valores entre -1 y 0, (es decir, $-1 \leq y \leq 0$). Por lo tanto $\text{im} f = [-1, 0]$. La gráfica de la función definida por $y = -\sqrt{1-x^2}$ se muestra en la figura 9.5. ■

9.2.1 Funciones potencia

Sabemos ya que la ecuación $y = ax^2$, representa una parábola con eje focal el semieje positivo $y \geq 0$, si $a > 0$ y con eje focal el semieje $y \leq 0$, si $a < 0$. Interpretando la información de las gráficas de las funciones f definidas por $f(x) = ax^2$, en términos de dominios e imágenes, se tiene que si ponemos $y = f(x)$ entonces f está definida para toda x en $\mathbb{R}$, de donde para cualquier $a \neq 0$, $\text{dom} f = \mathbb{R}$. De la gráfica de la parábola sabemos que si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, por lo que $\text{im} f = [0, \infty)$, si $a > 0$ y $\text{im} f = (-\infty, 0]$, si $a < 0$. Resumimos esta información en el cuadro 9.1. Las gráficas de algunas de estas funciones se muestran en la figura 9.6. El lector debe observar que multiplicar por -1 a una función, implica

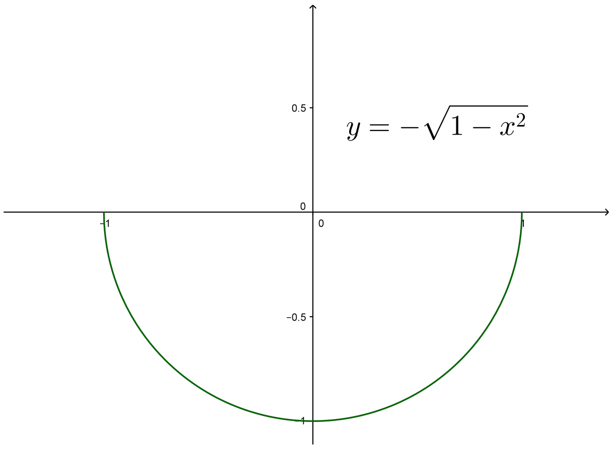


Figura 9.5: Semicircunferencia del ejemplo9.3 .

reflejar su gráfica con respecto al eje x.

Tabla 9.1: Dominio e imagen de $f(x) = ax^2$

a	dom f	im f
$a > 0$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$a < 0$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$

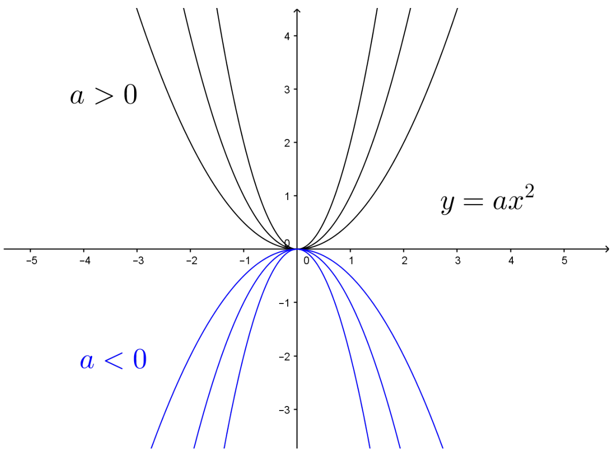


Figura 9.6: Gráficas de funciones $f(x) = ax^2$.

El siguiente paso para las funciones potencia es explorar que pasa para $f(x) = ax^3$. Claramente, la operación de elevar un número x al cubo está definida para todo número real. Por lo tanto, dom$f = \mathbb{R}$. La principal diferencia con elevar al cuadrado, es que todo número negativo elevado al cubo es negativo (¿por qué?). De esta forma im$f = \mathbb{R}$.

En general, para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ se tiene que para $f(x) = x^n$, dom$f = \mathbb{R}$, pero la imagen de este tipo de funciones es im$f = [0, \infty)$, si n es par y im$f = \mathbb{R}$, si n es impar. Una vez que se ha comprendido cuál es el dominio e imagen de las funciones $f(x) = x^n$, el lector no debe tener dificultad para obtener el dominio y la imagen de las funciones $f(x) = ax^n$, para los casos $a > 0$ y $a < 0$. Se deja esta actividad como ejercicio.

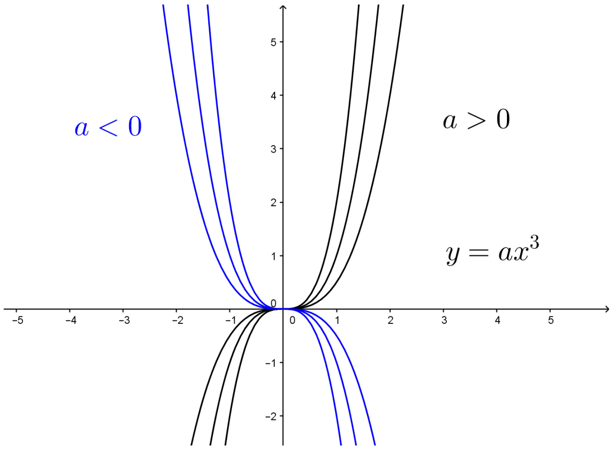


Figura 9.7: Gráficas de funciones $f(x) = ax^3$.

Ejercicio 9.1 Dibuje las gráficas de $f(x) = x^5$ y $f(x) = x^8$. 1) Determine las gráficas $f(x) = ax^5$ y $g(x) = ax^8$, para $a = 1/2, -1/2, 2, -2, 3, -3$ 2) ¿Cuál es el dominio e imagen de estas familias de funciones? 3) Utilice *GeoGebra* para verificar que sus gráficas sean correctas. ■

Solución del ejercicio 9.1. Las gráficas de las familias de funciones deben ser parecidas a las gráficas de la figura 9.7 para x^5 y a las gráficas de la figura 9.6, para x^8. El dominio de estas familias siempre es $\mathbb{R}$. La imagen de las familias cambia dependiendo si $n = 5, 8$ es par o impar y si a es positivo o negativo. □

9.2.2 Suma de funciones

Una vez que el lector está familiarizado con las funciones potencia se pueden introducir los polinomios, para este fin introducimos primero la suma de funciones en general.

Definición 9.3 Sean f, g funciones. Se define la función suma $f+g$ como la función cuyo dominio es

$$\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$$

y cuya regla de correspondencia está dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Recordamos que la definición 1.3 corresponde la intersección de conjuntos "$\cap$", utilizada en la definición anterior. Para este y otros temas relacionados con conjuntos remitimos al lector al capítulo 1.

■ **Ejemplo 9.4** Determine el dominio, imagen y gráfica de las funciones $f+g$, si a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2$ y b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -2$.

Solución. a) En este caso $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g = \mathbb{R}$, por lo tanto

$$\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

La imagen de f es $\operatorname{im} f = [0, \infty)$, pero la imagen de g es solo el conjunto que tiene por elemento unicamente al número 2. La gráfica de $f+g$ consiste en la gráfica de f movida dos unidades por encima del eje x.

b) En este caso $\operatorname{dom} f = [0, \infty)$ y $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}$, por lo tanto

$$\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty).$$

En este caso la gráfica de $f+g$ consite en bajar la gráfica de f en dos unidades a partir del eje x.

Las gráficas de las funciones de este ejercicio se muestran en las figura 9.8. ■

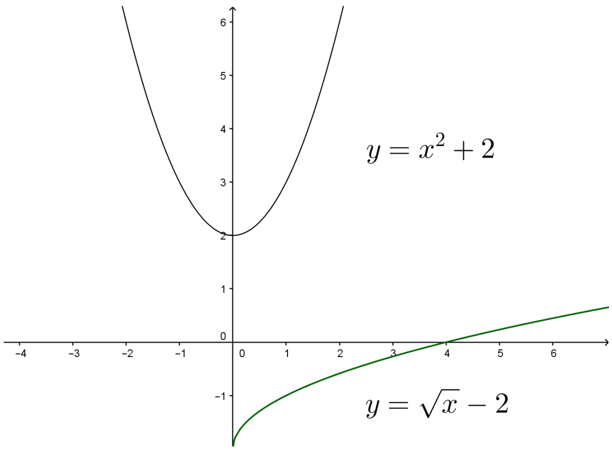


Figura 9.8: Funciones $f+g$ del ejemplo 9.4.

Producto y resta de funciones

Dada la función $f(x) = x$ hemos definido la función potencia $P_n(x) = x^n$ la cual en realidad, es el producto de la función f consigo misma n veces. Por otra parte la diferencia o resta de funciones se define de manera formal a partir de la suma de funciones. El producto y diferencia de funciones en general, se define a continuación.

Definición 9.4 Dadas dos funciones f y g se define la función producto $f \cdot g = fg$ mediante la fórmula

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

La función resta $f-g$ se define simplemente como

$$(f-g)(x) = f(x) + (-1) \cdot g(x) = f(x) - g(x).$$

El dominio del producto y diferencia de funciones es la intersección de dominios, es decir,

$$\operatorname{dom}(f \cdot g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = \operatorname{dom}(f-g).$$

■ **Ejemplo 9.5** Sean f y g definidas por $f(x) = \sqrt{2-x}$, $g(x) = \sqrt{2+x}$ encuentre $f \cdot g$, $f-g$, con sus respectivos dominios y gráficas.

Solución. Tenemos primero que encontrar los dominios de f y g. Para f, el dominio está dado por los $x \in \mathbb{R}$ tales que $2-x \geq 0$, es decir, tales que $2 \geq x$, por lo que $\operatorname{dom} f = (-\infty, 2]$. Para g, (complete los detalles) $\operatorname{dom} g = [-2, \infty)$. Por lo tanto

$$\operatorname{dom} f \cdot g = \operatorname{dom}(f-g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g = (-\infty, 2] \cap [-2, \infty) = [-2, 2].$$

Las reglas de correspondencia correspondientes son

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{2-x} \cdot \sqrt{2+x} = \sqrt{4-x^2}$$

y

$$(f-g)(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}.$$

Las gráficas correspondientes se muestran en la figura 9.10. El lector debe notar que con los conocimientos disponibles de Geometría Analítica hasta el momento, para realizar la gráfica exacta de $f-g$ se requiere de un programa computacional. Por otra parte, el hecho de que la gráfica de $f \cdot g$ sea una semicircunferencia no le debe ser difícil de comprobar al lector. ■

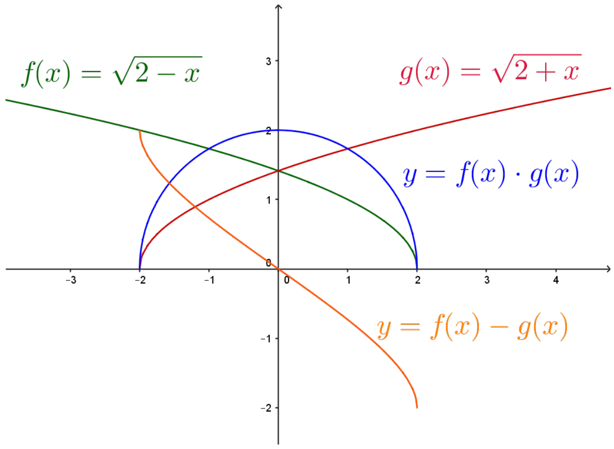


Figura 9.9: Gráficas de las funciones f, g, $f \cdot g$ y $f-g$ del ejemplo 9.4.

Polinomios

La suma y producto de funciones puede extenderse a más de dos funciones como es el caso de los polinomios de grado n los cuales pueden estar formados de una suma de n funciones.

Definición 9.5 Se define una función polinomial o simplemente polinomio (o función racional entera) como una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, llamados *coeficientes polinomiales*, son números reales constantes. La máxima potencia del polinomio n se llama grado del polinomio. La gráfica de una función polinomio se llama curva poliniomial o curva polinomia. Claramente, el dominio de toda función polinomial es $\mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 9.6** Determine la gráfica de $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$. Compruebe que f es un polinomio.

Solución. Desarrollamos el producto (¡hágalo!) $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$ con lo que se obtiene

$$f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12.$$

La gráfica del polinomio se muestra en la figura 9.10. ■

Ejercicio 9.2 Determine las gráficas de las curvas polinomiales de $y = a_0$, $y = a_1 x + a_0$ y $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ■

Funciones racionales

Las funciones definidas por cocientes de polinomios tienen el nombre de funciones racionales. A continuación se da la definición formal.

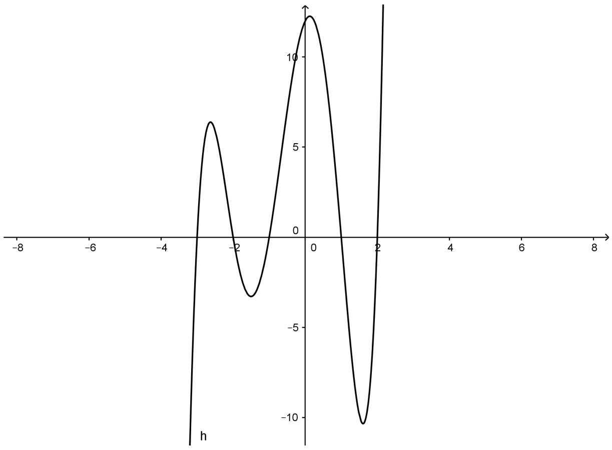


Figura 9.10: Gráfica del polinomio $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ del ejemplo 9.6.

Definición 9.6 Sean $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $P_2(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios. Una función R de la forma

$$R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

se llama función racional.

N Observe que el dominio de una función racional es el conjunto

$$\operatorname{dom} R = \{x \in \mathbb{R} : P_2(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x : R_2(x) = 0\}$$

.

Actividad 9.1 Determine el domino, la imagen y la gráfica de las funciones racionales a) $R_1(x) = \dfrac{2}{3x-1}$, b) $R_2(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$. ■

Solución de la actividad 9.1. a) La función R_1 tiene dominio todos los números reales excepto aquellos para los cuales $3x - 1 = 0$, es decir, $\operatorname{dom} R_1 = \mathbb{R} \setminus \{1/3\} = (-\infty, 1/3) \cup (1/3, \infty)$ (¿por qué?). Es claro que $R_1(x) \neq 0$ para toda x (¿por qué?) y por lo tanto $\operatorname{im} R_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. La gráfica de la función racional se muestra en la figura 9.11.
b) Aquí el dominio de R_2 no incluye los puntos tales que $x + 2 = 0$, es decir, $\operatorname{dom} R_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. La figura de la gráfica de R_2 se muestra en la figura 9.12.

No es obvio que $\operatorname{im} R_2 = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. En la sección 10.2 se demuestra que funciones racionales de la forma $R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, son hipérbolas y que la recta $y = \dfrac{a}{c}$ corresponde a una asíntota horizontal y por lo tanto $\operatorname{im} R = \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$. □

9.2.3 Cociente de funciones

Conocidas las funciones racionales es conveniente introducir el cociente de dos funciones en general, el cual se define de la manera siguiente.

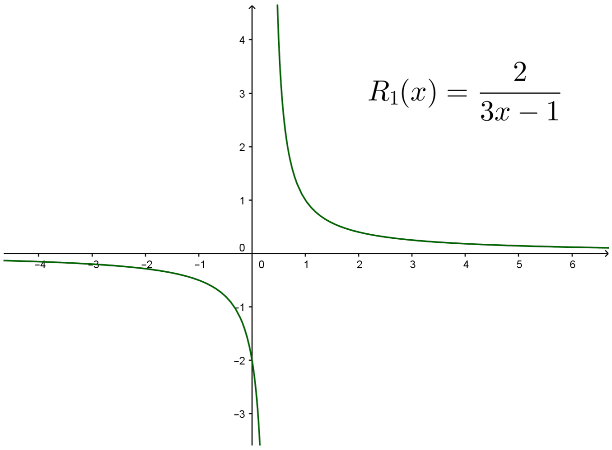


Figura 9.11: Función $R_1(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ de la actividad 9.1.

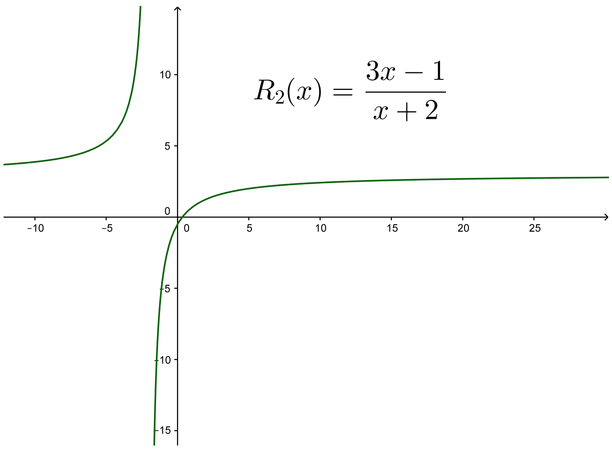


Figura 9.12: Función $R_2(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ de la actividad 9.1.

Definición 9.7 Dadas dos funciones f y g se define la función cociente $\dfrac{f}{g}$ la función cuyo dominio es

$$\operatorname{dom} \frac{f}{g} = (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g) \setminus \{x : g(x) = 0\}$$

y cuya regla de correspondencia está dada por $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

■ **Ejemplo 9.7** Determine el dominio de la función $h = f/g$, si $f(x) = 3 - x$ y $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Utilice un programa computacional para obtener la gráfica de g. ¿Puede decirse que las rectas $x = \pm 1$, son asíntotas de g?

Solución. En este caso $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ y $\operatorname{dom} g = [-1, 1]$ (el dominio de g es el mismo que el de la función del ejemplo 9.3 diga por qué). Tenemos solo que excluir los puntos donde $g(x) = 0$, es decir, debemos quitar $x = \pm 1$. Por lo tanto

$$\operatorname{dom} h = (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g) \setminus \{x : g(x) = 0\} = (-1, 1).$$

Argumente paso a paso por qué $\operatorname{dom} h = (-1, 1)$. La gráfica de g se puede observar en la figura 9.13. De la gráfica puede intuirse que las rectas $x = 1$, $x = -1$ son asíntotas verticales de g. El lector puede comprobar (ejercicio 9.3) que si x toma valores cercanos a ± 1, entonces $g(x)$ toma valores positivos grandes. Este comportamiento es el típico del de curvas con asíntotas verticales. Un estudio más profundo de las asíntotas requiere del concepto de límite infinito del Cálculo Diferencial el cual no se trata en este libro. ∎

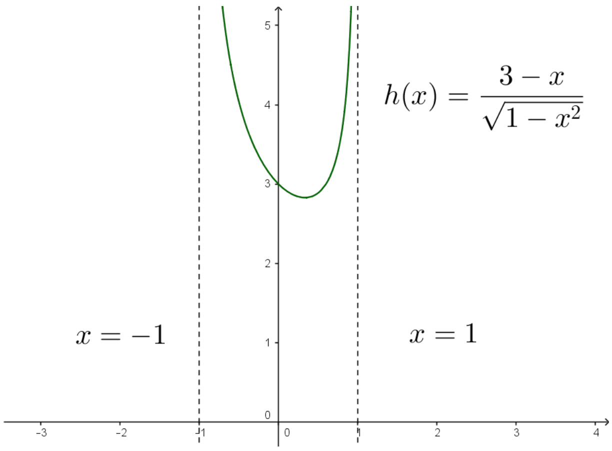


Figura 9.13: Función $h(x) = \dfrac{3-x}{\sqrt{1-x^2}}$ del ejercicio 9.7.

Ejercicio 9.3 Para la función $h(x) = \dfrac{3-x}{\sqrt{1-x^2}}$ del ejercicio 9.7 complete una tabla de valores de $h(x)$ para $x = \pm\ .9,\ \pm\ .99,\ \pm\ .999,\ \pm\ .99999$, por medio de una calculadora. Dado el comportamiento de $h(x)$ para estos valores de x, ¿puede concluirse que las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas verticales de h? Argumente sus afirmaciones. ∎

9.2.4 Igualdad de funciones

Para calcular el dominio de operaciones con funciones procedimos primero calculando el dominio individual de cada una de ellas para proceder después a calcular la intersección de dominios y finalmente encontrar la regla de correspondencia de la operación. El lector podría preguntarse si no es más conveniente encontrar primero la regla de correspondencia y proceder después a calcular el dominio de la operación a partir de la regla obtenida. Esta práctica **no es** recomendable debido a que la cancelación de factores lleva a cálculos erróneos. La siguiente definición y ejemplos debe dejar claro este hecho.

Definición 9.8 Dos funciones f y g son iguales si y sólo si, $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ y $f(x) = g(x)$ para toda x en el dominio de ambas funciones.

N Aquí se debe enfatizar que para que dos funciones sean iguales **no basta** que tengan la misma regla de correspondencia, sino que deben tener los mismos dominios. Esta última consideración tiende a ser olvidada por los estudiantes primerizos.

∎ **Ejemplo 9.8** Determine si las funciones f y g son iguales para

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-1}, \qquad g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Solución. Observamos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, por lo que $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1,1\}$, mientras que $\operatorname{dom} g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Es decir, el dominio de f son todos los reales excepto los puntos $x = 1$ y $x = -1$, pero el dominio de g son todos los reales excepto el punto $x = 1$. Por lo tanto por la definición 9.8, $f \neq g$. Por otra parte, después de simplificar las funciones tienen la misma regla de correspondencia. Efectivamente

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)^2}{x^2-1} \\ &= \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x+1}{x-1} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

De esta manera las funciones tienen la misma regla de correspondencia, pero no son iguales. Por este motivo, como se ha dicho, el dominio de las funciones debe determinarse antes de realizarse cualquier operación o simplificación algebraica. ■

N Aquí el profesor debe tener cuidado y **no utilizar** programas computacionales para tratar de validar con gráficas el ejemplo 9.8, ya que aún programas tan sofisticados como *GeoGebra*, por ejemplo, no distinguen entre las gráficas de f y g. Está es una cuestión sutil, pero sin embargo relevante en el estudio del Cálculo Diferencial, por ejemplo para el cálculo de límites de funciones.

9.2.5 Intersecciones con los ejes y simetría de funciones

Trataremos ahora algunos elementos básicos para dibujar las gráficas de funciones en general.

Intersecciones con los ejes

Dada una función $y = f(x)$, la intersección de la gráfica de f con el eje y, se encuentra sustituyendo $x = 0$, directamente en la regla de correspondencia. Es decir, la intersección de la gráfica de f con el eje y, está dada por $y = f(0)$. La intersección de la gráfica de f con el eje x se encuentra sustituyendo $y = 0$, es decir, se encuentra resolviendo la ecuación $0 = f(x)$, lo cual quiere decir que se deben encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

Los casos en los que $f(0)$ no tiene sentido, por ejemplo si 0 no está en el dominio de f, implica que la gráfica **no interseca** el eje y. Por otra parte, si la ecuación $f(x) = 0$ no tiene solución, significa que la gráfica de f no corta al eje x. Considerando lo anterior podemos afirmar que dada una función f existen cuatro posibilidades, a) la gráfica corta los dos ejes, la gráfica corta sólo el eje x o sólo el eje y, y la gráfica no corta ninguno de los ejes. Estas cuatro posibilidades se exploran en los siguientes ejemplos.

■ **Ejemplo 9.9** Determine las intersecciones con los ejes de las funciones, a) $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$, b) $g(x) = \dfrac{2}{3x-1}$ y c) $h(x) = \sqrt{x-1}$.

Solución. a) Tenemos que $f(0) = (-2)(-1)(1)(2)(3) = 12$, por lo tanto la intersección de f con el eje y es $y = f(0) = 12$. Para encontrar la intersección de f con el eje x, ponemos $0 = f(x)$, o sea

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)(x+3) = 0,$$

lo cual ocurre si y solo si$x$ toma los valores $x = 2, 1, -1, -2, -3$.

b) En este caso $g(0) = 2/(-1) = -2$ es la intersección con el eje y. La intersección con el eje x está dada por la ecuación $g(x) = \dfrac{2}{3x-1} = 0$, la cual no tiene solución dado que el numerador de g nunca es cero, ya que es constante e igual a 2. Se concluye que la gráfica de g no corta el eje x.

c) Para h tenemos $h(0) = \sqrt{-1}$, pero -1 no está en el dominio de h (¿por qué?). Por lo tanto la gráfica de h no corta al eje y. Para calcular la intersección con el eje x, ponemos $h(x) = \sqrt{x-1} = 0$. Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y obtenemos $x-1=0$, es decir $x=1$. Por lo tanto la gráfica de h corta al eje x en $x=1$.

Las gráficas de estas funciones ya se estudiaron antes, invitamos al lector a que verifique por si mismo que estas intersecciones son correctas utilizando las herramientas de *GeoGebra*. ■

■ **Ejemplo 9.10** Determine si la gráfica de $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}+2$ interseca los ejes o no.
Solución. Claramente 0 no pertenece al dominio de f, (compruébelo resolviendo la desigualdad $-x^2+4x-3 \geq 0$) por lo que la función no corta al eje y. Por otra parte $0 = f(x)$, no tiene sentido dado que si lo tuviera, tendríamos $\sqrt{-x^2+4x-3} = -2$ lo cual no puede ocurrir para ningún número real (¿por qué?). Por lo tanto, la gráfica de f tampoco corta al eje x. Otra manera de comprobar que la gráfica no corta ninguno de los ejes consiste en verificar completando cuadrados que la gráfica de f corresponde a la semicircunferencia superior dada por $(x-2)^2+(y-2)^2 = 1$, es decir, la circunferencia de radio $r=1$ y centro en $(2,2)$ la cual por supuesto no corta ninguno de los ejes. La gráfica correspondiente a este ejercicio se muestra en la figura 9.14. ■

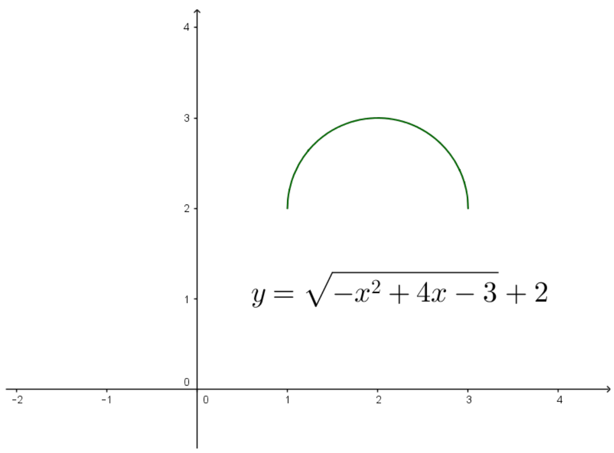


Figura 9.14: Función $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}+2$ del ejercicio 9.10.

Simetrías de funciones

Para funciones con dominios contenidos en $\mathbb{R}$, a cada x en el dominio le corresponde por definición, un y sólo un valor de y, por lo que *no tiene sentido* preguntarse si la gráfica de la función es simétrica respecto al eje x. De hecho un criterio necesario y suficiente para que la gráfica de una relación sea función, es que toda recta vertical, corte la gráfica de la función en a lo más un punto. Las dos simetrías fundamentales para funciones se estudian en la siguiente actividad.

Actividad 9.2 a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. Estudie el comportamiento de f y g en $-x$. ¿A que tipo de simetría corresponde este comportamiento? b) Ya se conoce un comportamiento similar para las funciones seno y coseno, dé una definición general que abarque los casos de esta actividad y las funciones seno y coseno. c) Dé un ejemplo de una función que no se comporte ni como f ni como g respecto a la simetría, es decir, que no sea par ni impar. ■

Solución de la actividad 9.2. a) Claramente $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, así cada punto $(x, f(x))$ con $x \in \operatorname{dom} f$ tiene un punto simétrico respecto al eje y dado por $(-x, f(x))$. Por lo tanto la función $f(x) = x^2$ es simétrica respecto al eje y. Para la función $g(x) = x^3$ se tiene $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, en este caso se tiene simetría por rotación respecto al origen, o bien simétrica respecto a

una reflexión respecto al eje y, seguida de una reflexión respecto al eje x (¡compruébelo!).
b) La función seno se comporta como g y la función coseno como f, es decir $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, por lo que las simetrías de las funciones seno y coseno son las mismas que las de sus funciones correspondientes g, f. Dado que el exponente de f es par y el exponente de g es impar a la función f se le llama *par* y a la función g se le llama *impar*. La definición general se puede escribir como sigue.

Definición 9.9 Una función f, es par si y solo si satisface $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f. La función f es impar si y sólo si, $f(-x) = -f(x)$ para toda $x \in \operatorname{dom} f$.

c) Un ejemplo de una función que no es par ni impar es $f(x) = (x-1)^2$. Claramente

$$f(-x) = (-x-1)^2 = ((-1)(x+1))^2 = (x+1)^2 \neq f(x).$$

Por otra parte, $-f(x) = -(x-1)^2 \neq f(-x)$. Por lo tanto, f no es par ni impar. Note sin embargo que como la gráfica de f es una parábola, la gráfica es simétrica respecto a su eje focal (¿por qué?), pero no respecto a ninguno de los ejes x, y. La gráfica de f se muestra en la figura 9.15. □

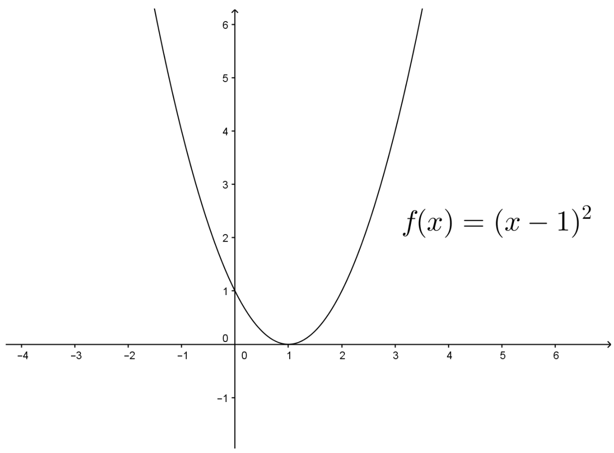


Figura 9.15: Gráfica de una función que no es par ni impar correspondiente al inciso c) de la actividad 9.2.

9.3 Funciones trigonométricas

Conocemos algunas propiedades básicas de las funciones seno y coseno. Por ejemplo, sabemos que dichas funciones trigonométricas son periódicas. Por como las construimos en el capítulo 3 sabemos que

$$\operatorname{dom}(\cos) = \operatorname{dom}(\operatorname{sen}) = \mathbb{R},$$

ademas dado que se cumple la identidad trigonométrica $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que la imagen de la función seno y coseno son iguales, es decir,

$$\operatorname{im}(\cos) = \operatorname{im}(\operatorname{sen}) = [-1, 1].$$

Conocemos además del capítulo 3, algunos de los valores que toman estas funciones en varios puntos de $\mathbb{R}$. Finalmente además de muchas identidades trigonométricas, conocemos de la sección 3.2.2 que la función seno es impar y la función coseno es par. Con esta información podemos ahora trazar la gráfica de todas las funciones trigonométricas además de las del seno y coseno.

9.3.1 Gráficas de las funciones trigonométricas

Para dibujar las gráficas de las funciones seno y coseno debemos recordar, como se indicó en el capítulo 3, que los valores de la variable x corresponden en realidad a arcos de circunferencia. Podemos imaginar entonces que para cada valor de arco x, se recorta la circunferencia a partir del punto $(1,0)$ y se desdobla sobre el eje correspondiente. Por ejemplo, 2π sobre el eje x, corresponde a una circunferencia completa recorrida en sentido contrario a las manecillas del reloj. Mientras que -2π, corresponde a una circunferencia recorrida en el sentido de las manecillas del reloj. En la figura 9.16 se muestran las gráficas de las funciones seno y coseno. Las intersecciones de las gráficas con el eje x, se obtienen de la definición 3.2 de las funciones trigonométricas sobre el círculo unitario. Por ejemplo, la función seno es cero si x es múltiplo de π. No es difícil visualizar sobre el círculo unitario que la función coseno es cero para múltiplos impares de $\pi/2$ (¡verifíquelo!).

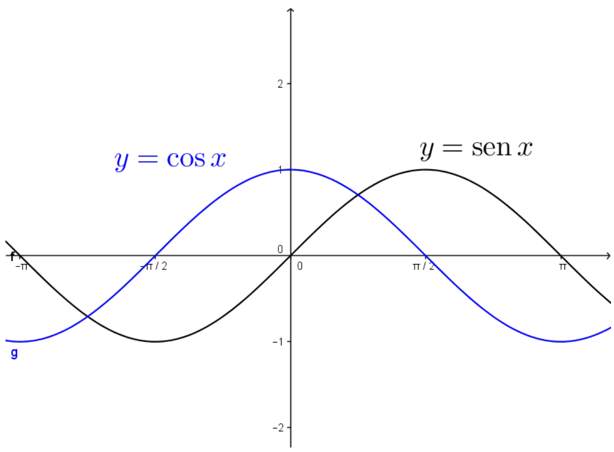


Figura 9.16: Gráfica de las funciones seno y coseno.

Ejercicio 9.4 Verifique que los valores que obtuvo en el ejercicio 5 nivel básico del capítulo 3, se localizan sobre las gráficas de las funciones seno y coseno, siguientes los siguientes pasos: a) Obtenga con las herramientas de *GeoGebra* las gráficas de las funciones seno y coseno, b) mediante alguna de las herramienta para obtener puntos de *GeoGebra* localice los puntos de la tabla del ejercicio 5 mencionado y verifique que se encuentran sobre las gráficas, c) en cada gráfica en los puntos del inciso anterior que no están sobre el eje x, trace una perpendicular que baje del punto al eje x y use la herramienta para medir longitudes para verificar que sobre el eje x se tiene la longitud de la circunferencia correspondiente como se definió en el capítulo 3. ■

Para la gráfica de la tangente, recordamos que la función está definida en términos de las funciones seno y coseno, es decir, $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y al estar definida como un cociente de funciones, la función tangente **no está definida** en los puntos x donde el coseno es cero. Por lo tanto el dominio de la función tangente es el conjunto de todos los reales menos los puntos $\pm\pi/2, \pm 3/2\pi, \pm 5/2\pi, \ldots$, es decir

$$\operatorname{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{2n+1}{2}\pi, \qquad n = 1,2,3,\ldots \right\}.$$

De hecho las rectas verticales $x = \pm\dfrac{2n+1}{2}\pi, \qquad n = 1,2,3,\ldots$ son asíntotas verticales de la gráfica de la tangente, como se muestra en la figura 9.17 y dado este comportamiento no es difícil argumentar (¡hágalo!) que la imagen de la función tangente son todos los reales, es decir, $\operatorname{im}(\tan) = \mathbb{R}$.

Las gráficas de las funciones cotangente secante y cosecante se trabajan en la siguiente actividad.

Actividad 9.3 Para comprender las gráficas de las funciones cotangente cosecante y secante se pueden seguir los siguientes pasos: a) determine el dominio y la imagen de las funciones $\cot, \operatorname{cosec}, \sec$, utilizando el hecho de que están definidas como cocientes de senos y, o cosenos, b) localice las asíntotas verticales de cada función, c) obtenga valores de cada función para puntos cercanos a los puntos donde se localizan las asíntotas, se requieren puntos que se aproximen por la derecha y por la izquierda a las asíntotas sobre el eje x, d) con la información recabada en los incisos anteriores esboce la gráfica de las funciones tratadas en esta actividad. ■

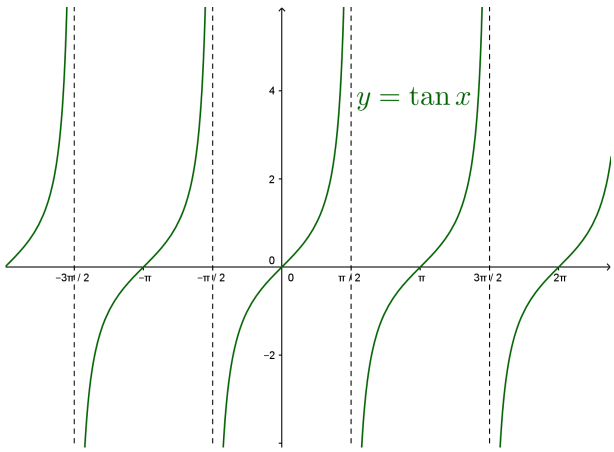


Figura 9.17: Gráfica de la función tangente.

Solución de la actividad 9.3. a) Recordamos que la función secante está definida por la fórmula $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Así, el dominio de la secante **no incluye los puntos** donde $\cos x = 0$, es decir, no incluye los puntos $x = \pm\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, (es decir, los múltiplos impares de $\pi/2$), llamados puntos de discontinuidad de la función. Se puede concluir que

$$\operatorname{dom}(\sec) = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \right\}$$

Para determinar la imagen de la secante observamos que cuando el coseno es positivo, su máximo valor es uno, por lo que el valor de $1/\cos$ es mínimo, por ser el valor recíproco. No es difícil concluir que cuando el coseno es negativo el máximo valor de la secante es menos uno. Se puede concluir que la secante no toma valores entre menos uno y uno, es decir,

$$\operatorname{im}(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

b) La secante tiene como asíntotas verticales las rectas $x = \pm\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, las cuales se encuentran en los puntos en los que la secante no está definida.

c) Como ejemplo se muestra una tabla donde se dan los valores de la secante para valores cercanos a $\pi/2$. Se denota con x^+ los puntos cercanos y mayores a x, llamados puntos cercanos a x por la derecha; se denota con x^- los puntos cercanos y menores a x, llamados puntos cercanos a x por la izquierda. En el cuadro 9.2 se observa que para valores cercanos, pero menores que $\pi/2$ la secante toma valores cada vez más grandes, para valores cercanos, pero mayores a $\pi/2$ la secante toma

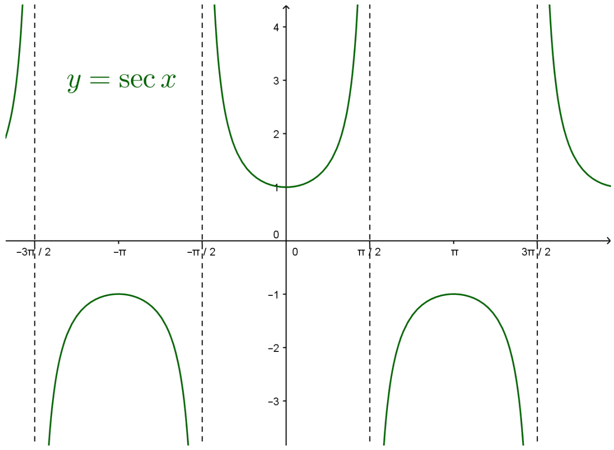


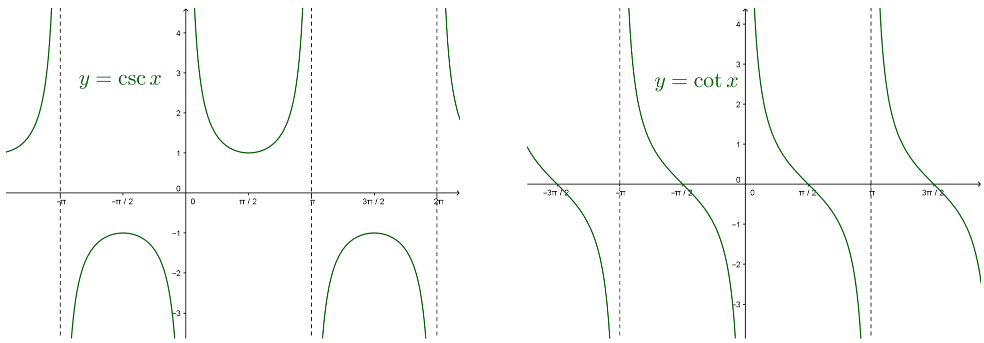
Figura 9.18: Gráfica de la función secante.

Tabla 9.2: Valores de la secante para x cercano a los puntos de discontinuidad.

x^+	$\sec(x^+)$	x^-	$\sec(x^-)$
$\pi/2$+.01	-100.0017	$\pi/2-.01$	100.0017
$\pi/2$+.02	-50.0033	$\pi/2-.02$	50.0033
$\pi/2$+.03	-33.3383	$\pi/2-.03$	33.3383
$\pi/2$+.04	-25.0067	$\pi/2-.01$	25.0067

valores cada vez más grandes en valor absoluto, pero negativos. El comportamiento anterior suele denotarse como $\sec x \to \infty$ si $x \to \pi/2^-$ y $\sec x \to -\infty$ si $x \to \pi/2^+$.

d) La gráfica de la función secante se muestra en la figura 9.18. Para determinar las gráficas de la funciones cosecante y cotangente se procede de manera similar a como se hizo con la secante y la tangente, se recomienda que el lector lo haga por si mismo. Las gráficas de la cosecante y la cotangente se muestran en la figura 9.19. □



(a) **(b)**

Figura 9.19: Gráficas de las funciones cotangente y cosecante. En (a) se muestra la cosecante, en la figura (b) se muestra la cotangente.

Ejercicio 9.5 Haga tablas como la del cuadro 9.2 con los puntos de discontinuidad de las funciones cosecante y cotangente. Obtenga a mano las gráficas de estas funciones a partir de los datos de las tablas que obtenga. ■

9.3.2 Transformaciones básicas de funciones

Hasta el momento sabemos que sumar una constante a una función, su gráfica sube o baja respecto al eje x dependiendo si la constante es positiva o negativa. Por otra parte sabemos que multiplicar por -1, invierte la gráfica de una función respecto al eje x. Estudiaremos el efecto de estas transformaciones y otras más sobre las funciones trigonométricas.

Suma de constantes: $f \pm b$

Dada la gráfica de una función f, la gráfica de $f+b$, donde b es una constante dada, es la misma que la de f trasladada b unidades, hacia arriba si $b>0$ y hacia abajo si $b<0$.

■ **Ejemplo 9.11** Obtenga la gráfica de $f(x) = \cos x + 3$ a partir de la gráfica del coseno.
Solución. Se dibuja la gráfica del coseno y cada punto de esta se desplaza 3 unidades hacia arriba. Note que en este caso $\operatorname{im} f = [2,4]$ (¿por qué?). La gráfica de este ejemplo se encuentra en la figura 9.20. ■

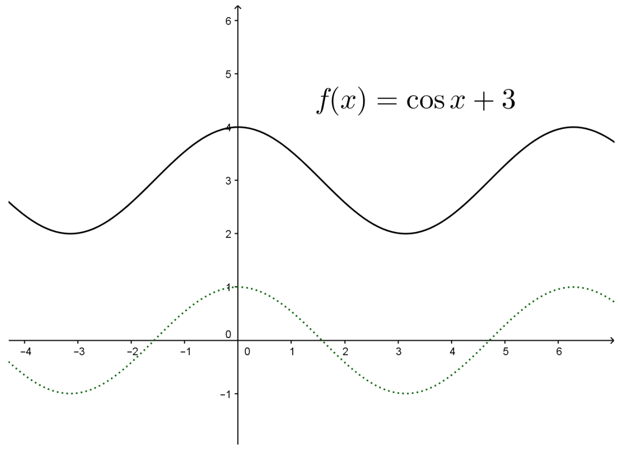


Figura 9.20: Gráfica de la función del ejemplo 9.11. La línea punteada representa la gráfica de la función $\cos x$, a partir de la cual se construye f.

Multiplicación por constantes: Af

Al multiplicar por una constante, la gráfica de una función f se contrae o expande dependiendo si $|A|$ es mayor o menor que uno; además, si $A<0$, la gráfica se invierte respecto al eje x.

■ **Ejemplo 9.12** Encuentre la gráfica de $g(x) = -3\cos x$.
Solución. Dado que -3 es negativo, la gráfica del coseno se invierte, dado que $|-3| = 3 > 1$ la gráfica del coseno se amplía en tres unidades, es decir $\operatorname{im} g = [-3,3]$. La gráfica de g se muestra en la figura 9.21. ■

N Dada una función de la forma $f(x) = A\cos u$. a la constante A que multiplica a la función coseno se le suele llamar *amplitud* de la función.

Las operaciones producto y suma se pueden combinar como en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 9.13** Determine la gráfica de $h(x) = -3\cos x + 3$.
Solución. En este caso como conocemos los ejemplos 9.11 y 9.12, es fácil determinar que $\operatorname{im} h = [0,6]$ (¿cómo se hace?). Se recomienda al lector hacer una transformación a la vez, comenzando por la multiplicación de las constantes y proceder a sumar la constante. La gráfica de este ejemplo se muestra en la figura 9.22. ■

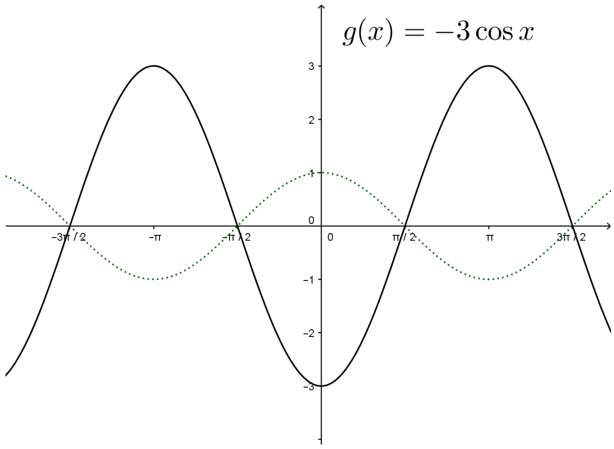


Figura 9.21: Gráfica de la función del ejemplo 9.12. La línea punteada representa la gráfica de la función $\cos x$.

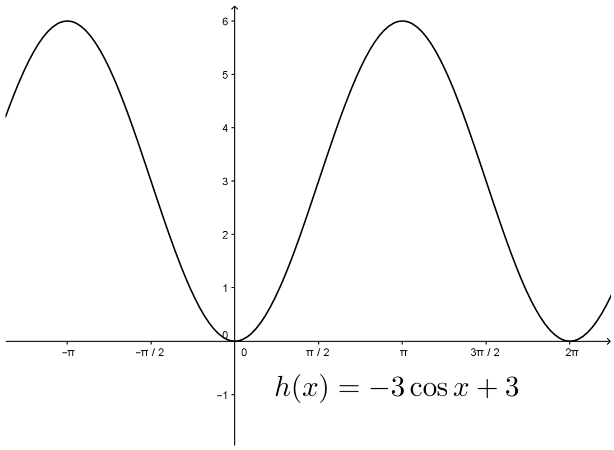


Figura 9.22: Gráfica de la función del ejemplo 9.13.

Trasformaciones en el argumento de funciones: $f(ax+b)$

Supongamos que una función u es de la forma $u(x) = ax+b$ y que se desea conocer la gráfica de la función $f(x) = \cos(u(x)) = \cos(ax+b)$. En este caso, a la función u se le llama *argumento de la función* coseno y la gráfica puede obtenerse fácilmente a partir de la gráfica de la función original. Sea f una función cualquiera. Para simplificar la exposición supondremos primero que $a = 1$, entonces la constante b desplaza la gráfica de f, a la derecha si $b < 0$ y a la izquierda si $b > 0$, exactamente b unidades.

■ **Ejemplo 9.14** A partir de la gráfica de $\cos x$ obtenga la gráfica de $f(x) = \cos(x-\pi)$.

Solución. En este caso, como $b = -\pi$ la gráfica del coseno debe desplazarse pi unidades a la derecha, respecto a la gráfica de la función coseno, como se muestra en la figura 9.23. ■

Ahora, continuando con la transformación $f(ax+b)$ supongamos que $b = 0$ y que $a \neq 1$. En este caso podemos saber lo que esta transformación hace a las intersecciones con el eje x de la gráfica de f, es decir podemos saber que los ceros de la función se alejan o acercan dependiendo de si $|a|$ es mayor o menor que uno. Aclaramos esta situación con los siguientes ejemplos presentados en forma de actividad.

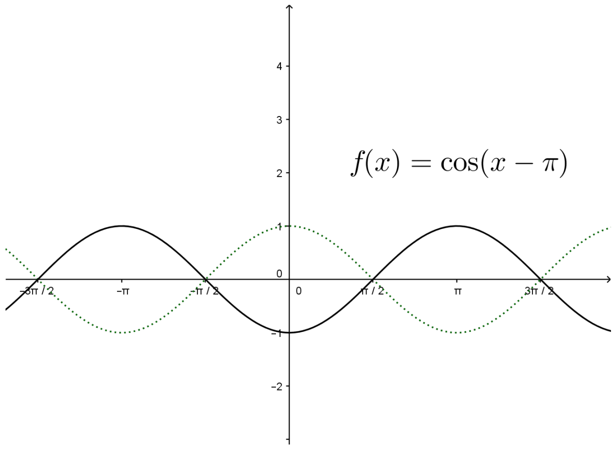


Figura 9.23: Gráfica de la función del ejemplo 9.14. La línea punteada representa la gráfica de la función $\cos x$.

Actividad 9.4 a) Dibuje la gráfica de las funciones $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \cos(x/2)$, a partir de las gráficas de $\cos x$. Para este fin, encuentre las intersecciones de f y g con el eje x. Determine los periodos de las funciones f y g. b) A partir de lo encontrado en el inciso anterior ¿qué se puede afirmar en general para la gráfica de $f(ax)$ y $f(ax+b)$? ■

Solución de la actividad 9.4. a) En general, para una función de la forma $\cos(u(x))$, debemos escribir, recordando que el coseno interseca el eje x en los puntos $x = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ $u(x) = \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$ y se procede a despejar x. Por ejemplo, si $u = 2x$, ponemos

$$\begin{aligned} 2x &= \pm\frac{(2n+1)\pi}{2} \\ x &= \frac{1}{2}\left(\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\ x &= \pm\frac{(2n+1)\pi}{4}, \end{aligned}$$

con lo cual, los ceros de la función $f(x) = \cos(2x)$ están más cerca entre sí, que los de la función $\cos x$. En efecto, los ceros de la función $f(x) = \cos(2x)$ están en $x = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4, \ldots$, la gráfica de f se muestra en la figura 9.24.

Para $g(x) = \cos(x/2)$ no es difícil deducir conocido lo que ocurre con $f(x) = \cos(2x)$, en el caso de g los ceros de la función se alejan, como se deduce de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \pm\frac{(2n+1)\pi}{2} \\ x &= 2\left(\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \\ x &= \pm(2n+1)\pi, \end{aligned}$$

es decir las intersecciones de g con el eje x están en los puntos $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$, la gráfica de g se muestra en la figura 9.25.

En la sección 3.2.2, se definió el periodo de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$, para funciones en general se dice que una función f es periódica si existe un número mínimo $p > 0$ para el cual, $f(x) = f(x+p)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, al número p se le llama periodo de la función. Si f es periódica de periodo p entonces la función transformada $f(u(x))$ también es periódica, ya

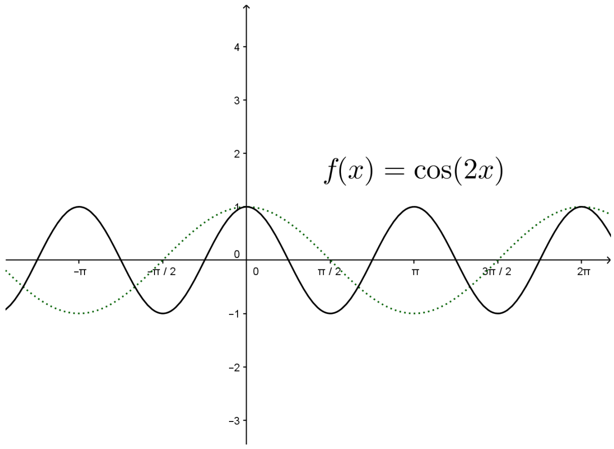


Figura 9.24: Gráfica de la función $f(x) = \cos(2x)$ de la actividad 9.4. La línea punteada representa la gráfica de la función $\cos x$.

que se debe tener $f(u(x)+p) = f(u(x))$, pero el menor número p' para el cual esto ocurre no es en general p, es decir los periodos de una función y su función transformada, no necesariamente coinciden. Para las funciones de la forma $h(x) = \cos(ax)$ basta encontrar la distancia entre dos ceros consecutivos de la función multiplicado por dos para determinar el periodo (dos ceros consecutivos no son un periodo completo de las funciones trigonométricas, diga por qué), por ejemplo para $f(x) = \cos(2x)$ se tienen dos ceros consecutivos en los puntos $\pi/4$ y $5/4\pi$ por lo que el periodo es $p = 2\cdot|3/4\pi - \pi/4| = \pi$. Para la función $g(x) = \cos(x/2)$ se tiene $p = 2\cdot|3\pi - \pi| = 4\pi$

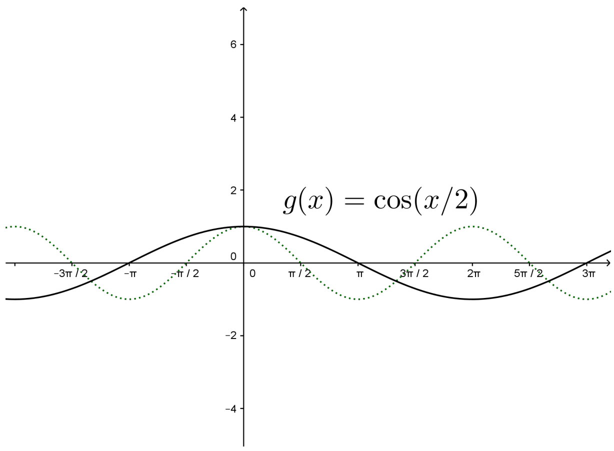


Figura 9.25: Gráfica de la función $g(x) = \cos(x/2)$ de la actividad 9.4. La línea punteada representa la gráfica de la función $\cos x$.

b) Para una función f en general ocurre lo mismo que para la función coseno, es decir, si la función f cumple que $f(x_0) = 0$, es decir $f(x)$ interseca el eje x en el punto $x = x_0$, se tiene que la función $f(ax)$ interseca el eje x en el punto $x = x_0/a$. □

Ejercicio 9.6 Determine la gráfica de $f(x) = -5\,\mathrm{sen}\,(3x+\pi)+5$, a partir de la gráfica de $\mathrm{sen}\,x$, para ello, dibuje las gráficas de a) $\mathrm{sen}\,(3x)$, b) $\mathrm{sen}\,(3x+\pi)$, c) $-5\,\mathrm{sen}\,(3x)$ y d) $f(x) = -5\,\mathrm{sen}\,(3x+\pi)+5$, es este orden. ■

9.4 Funciones inversas

El lector ha hecho uso de las funciones trigonométricas inversas, por ejemplo para determinar un ángulo $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\tan\theta = 1$. El lector pudo haber simplemente utilizado su calculadora en el modo "radianes" y oprimir la tecla "arctan" (o bien "$\tan^{-1}$" de acuerdo al modelo de calculadora o programa matemático empleado). La función "$f(x) = \arctan x$", (o bien $\tan^{-1}$) llamada "arcotangente", es la inversa de la función tangente y tiene la propiedad básica de que si $y_0 = \tan x$, entonces $x = \arctan y_0$, es decir, en términos de aplicaciones la función arcotangente, sirve para resolver la ecuación $y_0 = \tan x$, para y_0 dado, en términos de la variable x.

■ **Ejemplo 9.15** Calcule el arco x de la circunferencia unitaria para el cual $\tan x = 1$.
Solución. Sabemos que, por ejemplo, en el primer cuadrante $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ y por lo tanto $\tan(\pi/4) = 1$, es decir, el arco cuya tangente es uno, es $x = \pi/4$. Se puede concluir que $\arctan(1) = \pi/4$. ■

N La notación "arctan" se prefiere en este libro sobre la notación "$\tan^{-1}$". Como debe quedar claro del ejemplo anterior, la función arcotangente determina el arco de la circunferencia unitaria en radianes a la cual le corresponde un número real dado, por lo cual el nombre de la función es pertinente. Algunos estudiantes suelen confundir la notación "$\tan^{-1}$" con el inverso multiplicativo de la tangente, es decir, con la cotangente, lo cual debe evitarse a toda costa.

Una vez comprendido el aspecto práctico de la función arcotangente, se puede proceder operacionalmente con funciones en general.

Definición 9.10 Sea f una función dada, si existe una función g tal que para toda $x \in \operatorname{dom} f$ se cumple

$$g(f(x)) = x$$

se dice que g es inversa de f. De esta manera, la ecuación $y = f(x)$ puede resolverse para x, mediante la fórmula $x = g(y)$, para toda x en el domino de f, por lo cual debe cumplirse necesariamente que $\operatorname{dom} g = \operatorname{im} f$ y $\operatorname{dom} f = \operatorname{im} g$.

No toda función f, tiene función inversa, para la existencia de inversas se requiere que cada y, en la imagen de f, exista solo una preimagen x en el dominio de la función con el fin de que la inversa sea efectivamente una función. Este criterio **no se satisface**, si una recta horizontal (al menos una) corta la gráfica de f en más de un punto. Por ejemplo, a función tangente toda recta horizontal corta su gráfica en infinitos puntos, por lo que la inversa de la tangente **no puede** definirse en todo el dominio de la tangente. Para definir apropiadamente la función inversa de la tangente debe restringirse el dominio al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Con está observación puede darse la siguiente definición formal.

Definición 9.11 — Función arcotangente. La función tangente restringida al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ como dominio e imagen, el conjunto $\mathbb{R}$ se llama *rama principal de la tangente* y tiene una función inversa g con dominio $\mathbb{R}$ e imagen el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, con la propiedad $g(\tan x) = x$. La función g se llama función arcotangente y se denota como $g(x) = \arctan x$, para toda $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. La función arcotangente satisface además

$$y = \tan(\arctan y),$$

para cada $y \in \mathbb{R} = \operatorname{dom}(\arctan)$, es decir, la rama principal de la función tangente es a su vez inversa de la función arcotangente. La gráfica de la función arcotangente se muestra en la figura 9.26.

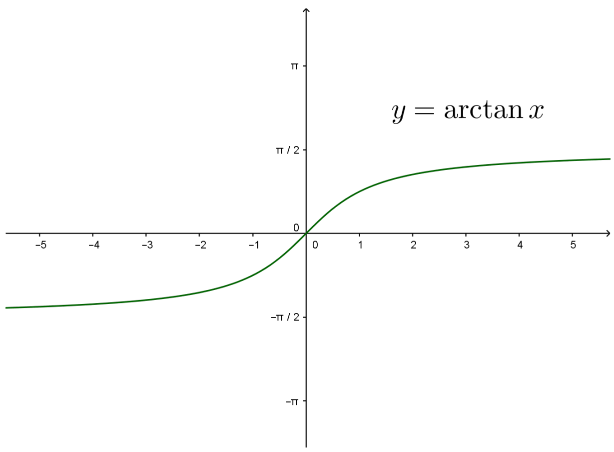


Figura 9.26: Gráfica de la función arcotangente

El ejemplo de la función arcotangente sirve para darnos cuenta que restringiendo apropiadamente los dominios de todas las funciones trigonométricas estas restricciones nos sirven para definir funciones inversas. Esto ocurre en general con todas las funciones. Como ejemplo proponemos el siguiente ejercicio.

■ **Ejemplo 9.16** Determine un intervalo apropiado de la función $f(x) = x^2$ en la cual f tenga inversa, asegúrese de que el intervalo sea el mayor posible.
Solución. La función $f(x) = x^2$, definida en todo $\mathbb{R}$, puede restringirse al dominio $[0,\infty)$ para que tenga una función inversa. Efectivamente, la función $g(x) = \sqrt{x}$ con dominio $\operatorname{dom} g = [0,\infty)$ es inversa de f ya que si $y = x^2$, $x \geq 0$, tenemos $\sqrt{y} = x$. ■

N Aquí aparece uno de los inevitables obstáculos de los estudiantes de matemáticas quienes determinan por ejemplo, que la ecuación $x^2 = 1$ tiene solo por solución $x = 1$, al tomar raíz cuadrada. Al resolver de esta manera han usado la restricción de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,\infty)$, esto es sólo parcialmente correcto debido a que, como se sabe, podemos factorizar $0 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ por lo que la solución completa de la ecuación es en realidad $x = \pm 1$. Es mejor insistir en resolver ecuaciones mediante la factorización que mediante el uso de inversas, a menos que el lector tenga bastante madurez como para asimilar el concepto de dominios restringidos de funciones. Para principiantes, el uso de inversas para resolver ecuaciones debe limitarse a los casos en los que su uso es inevitable, como en el caso de la arcotangente.

La función inversa del coseno se llama “arcocoseno” y se denota “arc cos”, la función inversa del seno se llama “arcoseno” y se denota “arc sen”, para definirlas se requiere restringir el dominio de las funciones coseno y seno a intervalos donde las relaciones inversas sean efectivamente funciones, como se hizo en el caso de la función tangente, para ello se requiere la siguiente definición.

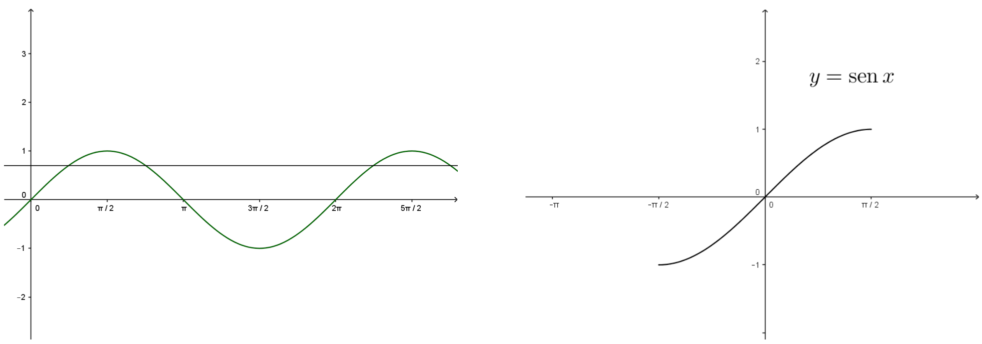
Definición 9.12 — Función inyectiva. Una función f se llama inyectiva si elementos distintos de su dominio tienen imágenes distintas, es decir, si $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ y $a_1 \neq a_2$ entonces necesariamente $f(a_1) \neq f(a_2)$.

N Por la proposición contrapositiva, la definición anterior es equivalente a que f es inyectiva si: $f(a_1) = f(a_2)$, implica $a_1 = a_2$. En nuestro enfoque para los estudiantes novicios no se requerirá que demuestren que una función dada arbitraria sea inyectiva o no. Se da la definición, solo para clarificar el concepto de función inversa y establecer condiciones para su existencia. En una primera aproximación basta que el lector comprenda que la definición formal 9.12, coincide con el criterio de que toda recta horizontal interseca la gráfica de la función en sólo un punto.

Podemos verificar que la función tangente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es inyectiva y que la función $f(x) = x^2$ es inyectiva en el intervalo $[0, \infty)$, en los intervalos donde una función arbitraria es inyectiva se puede definir una inversa, lo cual se realiza en la siguiente actividad para la función seno.

Actividad 9.5 a) Por medio del criterio de la recta horizontal, verifique que la función seno **no es inyectiva** en $\mathbb{R}$. b) compruebe que la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ tiene imagen $[-1,1]$ y es inyectiva en dicho intervalo, c) defina la inversa de la función seno, llamada "arcoseno" como la función con dominio $\operatorname{dom}(\text{arcsen}) = [-1,1]$ e imagen $\operatorname{im}(\text{arcsen}) = [-\pi/2, \pi/2]$ como sigue: si $y = \operatorname{sen} x$ entonces $x = \operatorname{arcsen} y$. d) utilice la definición anterior para calcular el arcoseno de $0, 1, \sqrt{2}/2$, e) obtenga la gráfica de el arcoseno, ■

Solución de la actividad 9.5. a) Observamos la gráfica de la función seno y que cualquier recta horizontal que pase por el intervalo $[-1,1]$ corta la gráfica en infinitos puntos.
b) En la gráfica puede verse que toda recta horizontal interseca a la gráfica de la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ en a lo más un punto.



(a) (b)

Figura 9.27: Gráficas de la función seno . En (a) se muestra que toda recta horizontal con $y \in [-1,1]$ corta la gráfica de la función seno en múltiples puntos. En la figura (b) se muestra que si restringimos la función seno al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la función es inyectiva en este intervalo.

c) Una definición de la función arcoseno puede ser como la siguiente

Definición 9.13 — Función arcoseno. La función seno restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ como dominio e imagen el intervalo $[-1,1]$ tiene una función inversa g con dominio $[-1,1]$ e imagen, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, con la propiedad $g(\operatorname{sen} x) = x$. La función g se llama función arcoseno y se denota como $g(x) = \operatorname{arcsen} x$, para toda $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. La función arcoseno satisface además

$$y = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y),$$

para cada $y \in [-1,1] = \operatorname{dom}(\text{arcsen})$, es decir, la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ es a su vez inversa de la función arcoseno.

d) Tenemos que $\operatorname{sen}(0) = 0$, por lo tanto $\operatorname{arcsen}(0) = 0$; $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, por lo tanto $\operatorname{arcsen}(1) = \pi/2$; $\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, por lo tanto $\operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

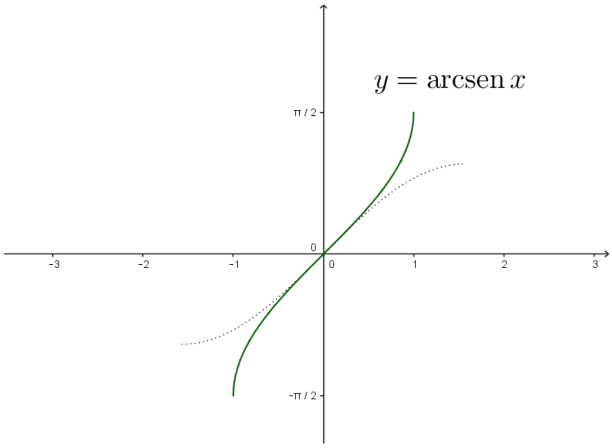


Figura 9.28: Gráfica de la función arcoseno. La línea punteada representa la gráfica de la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

e) La gráfica de la función arcoseno se muestra en la figura 9.28. □

Ejercicio 9.7 Repita los incisos a) hasta e) de la actividad 9.5 para la función coseno. ■

9.5 Funciones exponencial y logaritmo

Antes de comenzar el estudio de las funciones que dan nombre a esta sección, debemos recordar algunas propiedades de los exponentes. Dado un número fijo $a \in \mathbb{R}$, se define a^n como el producto del número a consigo mismo n veces, es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}},$$

para $a \neq 0$ se define

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si además $a > 0$, se puede definir el exponente $1/n$ como la raíz n-ésima de a (sin importar que n sea par o impar) mediante

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Para $r, s \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ las leyes de los exponentes son parte de la curricula de la enseñanza elemental:

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

y

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Con la primera de estas leyes y las definiciones de exponentes podemos definir $a^{\frac{p}{q}}$ para cualquier número racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}\right\}$, efectivamente, se define

$$a^{\frac{p}{q}} = (a^{1/q})^p.$$

Una vez que se ha dado significado a la expresión $a^{\frac{p}{q}}$ se desea extender la definición de a^x para cualquier $x \in \mathbb{R}$ lo que da pie a una función

$$f(x) = a^x.$$

Hasta este momento f esta perfectamente definida para toda $x \in \mathbb{Q}$, la pregunta que debe hacerse el lector es ¿cómo está definida f para x irracional?, por ejemplo, ¿qué quiere decir $a^{\sqrt{2}}$? Para tranquilizar al lector podemos decir que f está definida para todo número real, pero para comprender cabalmente expresiones como $a^{\sqrt{2}}$ se requiere del axioma del supremo, lo cual está fuera del alcance de los objetivos de este libro. Nos enfocaremos sin embargo a estudiar las gráficas de estas funciones y algunas de sus propiedades básicas ya que la función f es muy importante en matemáticas y aplicaciones. En la siguiente definición la función f recibe un nombre especial.

Definición 9.14 Sea $a > 0$ y $a \neq 1$. Se define la *función exponencial de base a* denotada $\exp_a$ como

$$\exp_a(x) = a^x$$

para la cual se tiene, $\operatorname{dom}(\exp_a) = \mathbb{R}$, $\operatorname{im}(\exp_a) = (0, \infty)$.

Propiedades de la función exponencial

La función exponencial tiene las siguientes propiedades:

i) $\exp_a(0) = 1$.

ii) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$ y $\exp(x \cdot y) = (\exp(x))^y$.

iii) Si $x < y$, entonces $\exp_a(x) < \exp_a(y)$, es decir, la función exponencial es creciente y por lo tanto es inyectiva.

iv) Como la función $\exp_a$ es inyectiva tiene, por lo tanto, inversa llamada *logaritmo base a*, denotada, $\log_a$. La función $\log_a$ tiene, por lo tanto, $\operatorname{dom}(\log_a) = (0, \infty)$ e imagen $\operatorname{im}(\log_a) = \mathbb{R}$ y se cumple

$$\log_a(\exp_a(x)) = x, \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R}$$

y

$$\exp_a(\log_a(x)) = x, \qquad \text{para toda } x \in (0, \infty).$$

Además $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

v) Para toda $x, y \in (0, \infty)$ se cumple que $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

vi) Para todo $x \in (0, \infty)$ y $r \in \mathbb{R}$, se cumple que $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.

■ **Ejemplo 9.17** Determine el logaritmo: a) base 3 de 81, b) base 5 de $1/25$, c) base 10 de 1 000 000.

Solución. a) Dado que $3^4 = 81$ se tiene por definición que $\log_3(81) = 4$. b) Como $5^{-2} = 1/25$ se tiene $\log_5(1/25) = -2$. c) Como 1 000 000= 10^6, se tiene $\log_{10}(1\,000\,000) = 6$. ■

■ **Ejemplo 9.18** Resuelva la ecuación $4^x = 1/16$. Use las propiedades de la función $\log_4$.

Solución. Tomamos logaritmos base 4 en ambos lados de la ecuación, para obtener por medio de las propiedades iv), v), vi) lo siguiente

$$4^x = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$$

$$\iff \qquad \log_4(4^x) = \log_4\left(\frac{1}{4^2}\right)$$

$$x \log_4(4) = \log_4(1) + \log_4(4^{-2})$$

$$x \cdot 1 = 0 - 2\log_4(4),$$

Por lo tanto $x = -2$. Indique que propiedades se utilizaron en cada paso para llegar al resultado anterior. ■

■ **Ejemplo 9.19** Obtenga las gráficas de las funciones $3^x, 4^x, 5^x$, por medio de un programa de cómputo.

Solución. Para usar *GeoGebra* se escribe simplemente `y = 3 ∧ x` en el campo "entrada" y se presiona la tecla retorno para obtener la gráfica correspondiente a dicha función. Se debe repetir el mismo procedimiento con cada función. La gráfica correspondiente a este ejemplo se encuentra en la figura 9.29. ■

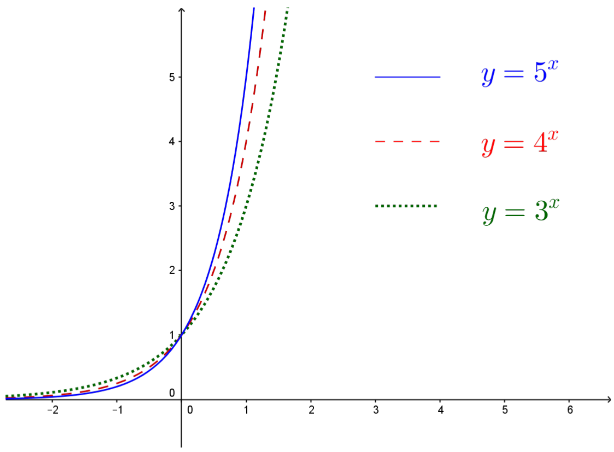


Figura 9.29: Gráfica de las funciones $3^x, 4^x, 5^x$.

Base e

La base más importante para las funciones exponenciales y logaritmos, históricamente y por sus aplicaciones, es el número de Euler e =2.71828... el cual es un número trascendente como lo es π. El número e es fundamental en matemáticas y es una de las constantes universales de mayor prominencia en todas las ciencias. Las funciones $\exp_e$ y $\log_e$ se denotan simplemente como

$$\exp_e(x) = \exp(x) = e^x, \qquad \log_e(x) = \log(x).$$

También suele llamarse al logaritmo base e logaritmo natural y denotarse $\log(x) = \ln(x)$. Las gráficas de las funciones exponencial y logaritmo base e se muestran en la figura 9.30. El lector debe observar que el eje x es asíntota horizontal de la función exponencial y el eje y es asíntota vertical de la función logaritmo natural.

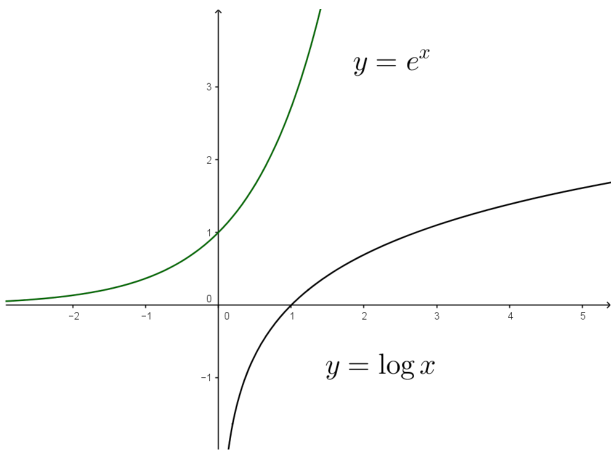


Figura 9.30: Gráficas de las funciones exponencial y logaritmo naturales.

■ **Ejemplo 9.20** La corriente i en un determinado circuito eléctrico está dada en función del tiempo t por la ecuación

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right),$$

donde R, E, L son constantes. Despeje la variable t de esta ecuación.
Solución. Primero despejamos la función exponencial, para tener

$$\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) = 1 - \frac{Ri}{E}.$$

Tomamos logaritmo natural en ambos lados de la ecuación y utilizamos las leyes de los logaritmos con lo cual se llega a

$$\begin{aligned} -\frac{Rt}{L} &= \log\left(1 - \frac{Ri}{E}\right) \\ \frac{Rt}{L} &= -\log\left(1 - \frac{Ri}{E}\right) \\ t &= \frac{L}{R}\log\left(\left(1 - \frac{Ri}{E}\right)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Recordamos que como el dominio de la función logaritmo es dom(log) $= (0, \infty)$, por lo que la expresión para t que obtuvimos sólo tiene sentido si $1 - Ri/E > 0$. ■

■ **Ejemplo 9.21** El número de bacterias en cierto cultivo está dado por $Q = 100e^t$, donde t está medido en horas. a) Determine el número inicial de bacterias, b) ¿Cuál es el número de bacterias después de una hora y después de un día?
Solución. a) El número inicial de bacterias se calcula poniendo $t = 0$ en la ecuación para Q, así $Q(0) = 100e^0 = 100$ bacterias. b) Para conocer la población en una hora se pone $t = 1$ (dado que t está en horas), $Q(1) = 100e^1$ =271.828 bacterias, para la población en un día tenemos $Q(24) = 100e^{24}$=2.6489×10^{12}. El lector debe notar el enorme crecimiento de la población en un día comparado con la población inicial, esto es una expresión de lo que se conoce como *crecimiento exponencial* de una población. ■

Actividad 9.6 — Eadem mutata resurgo. La curva en coordenadas polares $r = ab^\theta$ se conoce como *espiral logarítmica*. a) Haga una búsqueda de esta curva en internet, investigue la relación de esta curva con las espirales en la naturaleza, por ejemplo. la espiral de la concha del caracol Nautilus, o la disposición de las semillas en un girasol, o las galaxias en forma espiral. Investigue acerca de la relación de la constante áurea y la espiral logarítmica. b) Ponga θ en función de r mediante el uso de logaritmos de base b (de aquí viene el nombre de "espiral logarítmica"). c) Dibuje varias gráficas tomando diferentes valores de a y b ¡qué ocurre para $a = b = 1$? ¿Qué determinan estos parámetros en el aspecto de la curva? d) Obtenga ecuaciones paramétricas de esta curva en función de θ. ■

Solución de la actividad 9.6. a) Cualquiera de los temas de investigación sugeridos abre las puertas de un universo fascinante ¡busque y encontrará!
b) Utilizando el logaritmo base b se llega a (¡hágalo!)

$$\theta = \log_b\left(\frac{r}{a}\right).$$

c) Con las herramientas de *GeoGebra* produzca dos deslizadores con las etiquetas a y b, los valores de b deben ser mayores que cero, como sabemos, se recomienda tomar 0.1< $b < 5$, la constante a

puede tomar valores positivos o negativos, por ejemplo $-2 < a < 2$. Escriba en el campo "entrada", después de producir los deslizadores, la ecuación `r= ab∧θ` y presione la tecla retorno. Para $a = b = 1$ debe obtener un círculo (¿por qué?). Mueva los deslizadores, experimente y escriba sus conclusiones. La gráfica de una espiral se presenta en la figura 9.31.

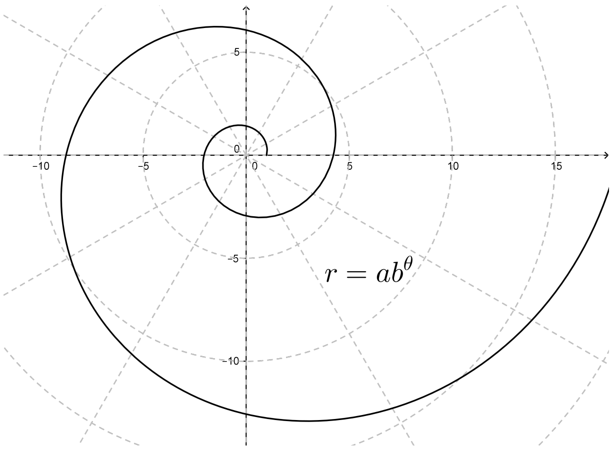


Figura 9.31: Gráfica de una espiral logarítmica.

d) Dado que $r = ab^\theta$ podemos poner $x = r\cos\theta = ab^\theta \cos\theta$. Encuentre la ecuación para y. □

Composición de funciones

Con la expresión $g(f(x))$ que hemos utilizado para definir funciones inversas, se entiende que primero se obtiene el valor de f evaluado en x, digamos, $y = f(x)$ y posteriormente se evalúa g en y es decir $g(f(x)) = g(y)$. Este procedimiento es en realidad una operación de funciones, de hecho la más importante operación de funciones, llamada *composición de funciones*, denotada por $g \circ f$ y definida mediante la fórmula

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

con dominio $\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f \cap \{x : f(x) \in \operatorname{dom} g\}$.

■ **Ejemplo 9.22** Dadas las funciones $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$, así como los dominios de las composiciones.

Solución. Tenemos que por definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 1,$$

con $\operatorname{dom}(f \circ g) = [0, \infty)$. Por otra parte,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1) = \sqrt{3x+1},$$

con $\operatorname{dom}(g \circ f) = [-1/3, \infty)$. ■

N Como muestra el ejemplo anterior en general $f \circ g \neq g \circ f$, con lo que se tiene un ilustre ejemplo de una operación no conmutativa entre funciones.

Se define la *función identidad* I_A con dominio A mediante la regla $I_A(x) = x$ para toda $x \in A$. Con la notación $\circ$ se tiene que la función inversa g de f satisface

$$g \circ f = I_{\operatorname{dom}(f)}.$$

En este contexto se introduce la notación $g = f^{-1}$, lo cual tiene sentido ya que g es un elemento inverso respecto la operación composición de funciones, es decir $f^{-1} \circ f = I_{\operatorname{dom} f}$, de la misma manera que $I_{\mathrm{dom} f}$ es un elemento neutro respecto a la misma operación, dado que $f \circ I_{\mathrm{dom} f} = f$. Un buen ejemplo de lo apropiado de la notación f^{-1} se presenta enseguida.

■ **Ejemplo 9.23** Encuentre la función f de la cual es inversa la función $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$. Encuentre el dominio y la imagen de f y f^{-1}. Compruebe que las funciones son efectivamente inversas.

Solución. Se debe cumplir $f^{-1}(f(x)) = x$ por lo que

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3f(x)-2}{f(x)+1} = x.$$

Despejamos $f(x)$ de la ecuación anterior mediante el siguiente procedimiento

$$\frac{3f(x)-2}{f(x)+1} = x$$

$$\begin{aligned}
3f(x)-2 &= (f(x)-1)x\\
3f(x)-xf(x) &= -x+2\\
(3-x)f(x) &= 2-x\\
f(x) &= \frac{2-x}{3-x}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}.$$

Tenemos que $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, mientras que $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Como sabemos que $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f^{-1}$, el ejercicio queda terminado si comprobamos que al sustituir la expresión para f, $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$, efectivamente se tiene $f^{-1} \circ f = x$, esta última actividad se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 9.8 Dadas las funciones f y f^{-1} del ejemplo 9.23, verifique que se cumple $f \circ f^{-1} = I_{\mathrm{dom} f^{-1}}$ y que $f^{-1} \circ f = I_{\mathrm{dom} f}$. ■

9.6 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico

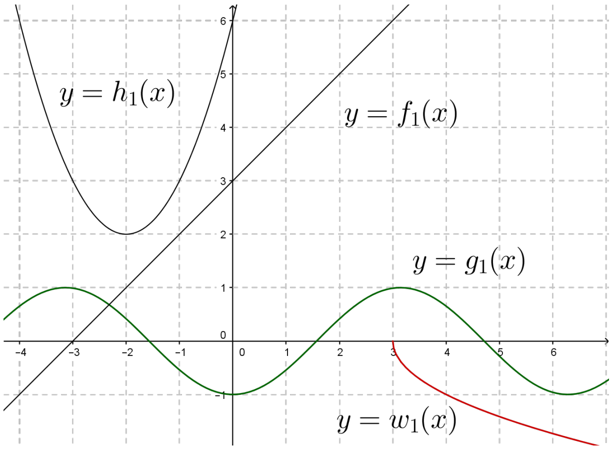
1. Resuelva los ejercicios 9.2, 9.3, 9.4 y 9.5.
2. Dibuje la gráfica de $f(x) = |x|$, corrobore su respuesta con *GeoGebra*.
3. Con las herramientas de *GeoGebra* obtenga la gráfica de la *curva Gausiana* dada por $f(x) = e^{-x^2}$. Estudie las simetrías de la curva, encuentre si existen las asíntotas. Argumente matemáticamente, realice tablas para valores grandes de $|x|$.
4. Determine la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{si } x < 0\\ 3, & \text{si } 0 \le x < 1\\ 2x, & \text{si } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

   ¿cuál es el dominio de la función?

   Solución. $\mathrm{dom} f = (0,2]$.
5. A las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x^2$ y $w(x) = \sqrt{x}$ se les han aplicado transformaciones elementales, denote con f_1, g_1, h_1, w_1 las correspondientes funciones transformadas y escriba sus respectivas reglas de correspondencia.

   Solución. $f_1(x) = x+3$, $g_1(x) = -\cos x$, $h_1(x) = (x+2)^2+2$, $w_1(x) = -\sqrt{x-2}$.



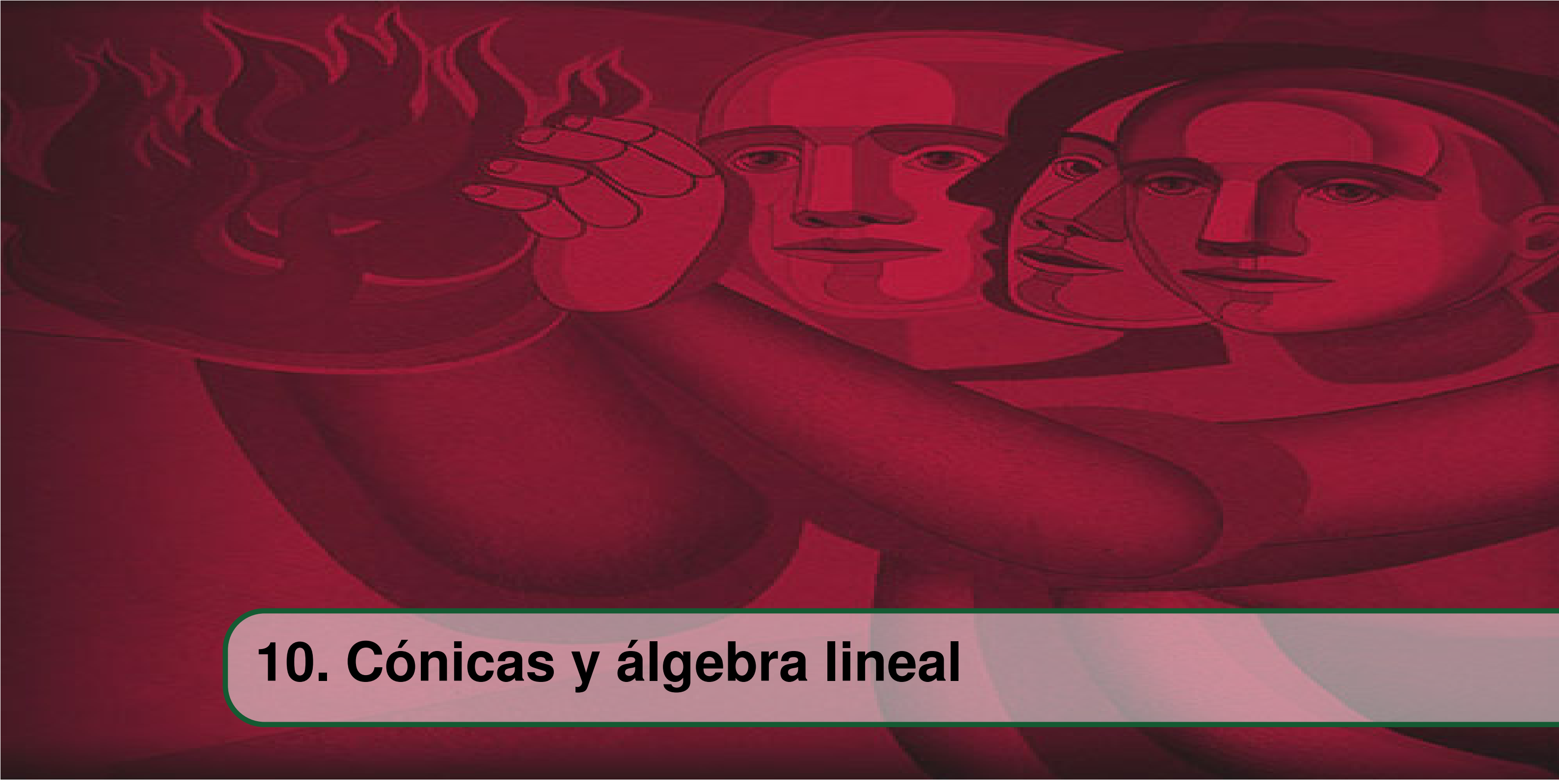
6. Determine las intersecciones con los ejes de la función $F(x) = (2x-1)(x+3)(x-5)$. Obtenga la gráfica de la función manualmente y después verifique con *GeoGebra*.
   Solución. $(0,15)$, $(1/2,0)$, $(-3,0)$, $(5,0)$.
7. Genere cuatro deslizadores en *Geogebra* con las etiquetas a, b, c, d que varíen todos en el intervalo $(-5,5)$. Escriba en la barra "Entrada" `y=a*cos(b*x+c)+d` y presione la tecla de retorno. Manipule los deslizadores para obtener diferentes gráficas. Describa lo que pasa. Dé otros ejemplos de funciones f y genere deslizadores para obtener gráficas de funciones $af(bx+c)+d$. Escriba sus conclusiones para funciones en general.
8. Dadas las funciones $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$, determine las funciones $f+g$, fg, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$ y sus respectivos dominios.
   Solución.
   $\mathrm{dom}(f+g) = \mathrm{dom}(fg) = \mathrm{dom}(f \circ g) = [0,\infty)$, $\mathrm{dom}(f/g) = (0,\infty)$, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \cup_{n\in N}^{\infty}[(2n+1)\pi/2, (2n+3\pi/2)]$.
9. Sean $f(x) = 3x-2$ y $h(x) = 6x-5$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.
   Solución. $g(x) = 2x-1$.
10. Encuentre dos funciones f, g tales que la función h quede expresada como la composición $h = f \circ g$.
    a) $h(x) = \cos(\cos x)$.
    b) $h(x) = \sqrt[3]{\tan x}$.
    c) $h(x) = \frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x+2}$.
    Solución.
    a) $f(x) = g(x) = \cos x$. b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \tan x$. c) $f(x) = x/(x+2)$, $g(x) = \operatorname{cosec} x$.
11. Mediante las inversas trigonométricas encuentre los valores de θ para los cuales:
    a) $\operatorname{sen}\theta = 1/2$.
    b) $\cos\theta = \sqrt{2}/2$.
    c) $\tan\theta = \sqrt{3}$.
    Solución. a) $\theta = \pi/6$. b) $\theta = \pi/4$. c) $\theta = \pi/3$.
12. Encuentre una fórmula que exprese el volumen V de un cubo como función del área A de su superficie.
    Solución. $V = (A/6)^{3/2}$.
13. Se desea construir una caja sin tapa con una pieza rectangular de cartón que mide 18 por 24 centímetros, quitando en cada esquina cuadrados idénticos de área x^2. Exprese el volumen V de la caja como función de x.
    Solución. $V = (24-x)(18-x)x$.

Nivel intermedio

1. Resuelva los ejercicios 9.6 y 9.8.
2. Obtenga el dominio de las funciones siguientes
   a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{3-x}}$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$
   Solución. a) $x \in (-1,3)$. b) $x \in \mathbb{R}$.
3. Determine el periodo de las funciones
$$f(x) = A\cos(ax+b)+B \quad \text{y} \quad g(x) = A\,\text{sen}\,(ax+b)+B.$$
4. Resuelva el ejercicio 9.7.
5. Encuentre la función f de la cual $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$, es inversa, compare con el ejemplo 9.23.¿Puede generalizar este ejemplo?
6. Demuestre que las siguientes funciones son inversas una de la otra.
   a) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$.
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$.
   c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$.
7. Sea $f(x) = 1 - 1/(1-x)$, calcule $f(1/x)$. Muestre que f es su propia inversa.
8. Use la función arctan para resolver la ecuación $\sec^2 x - 2\tan x = 4$.
   Solución. $x = \arctan 3 + n\pi$ y $x = -\pi/4 + n\pi$.
9. Use logaritmos para resolver la ecuación para x en términos de y. en los siguientes problemas.
   a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
   b) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
   Solución. a) $x = \log(y \pm \sqrt{y^2+1})$, b) $x = \log((1+y)/(2(1-y)))$.
10. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes y determine la curva a que les corresponde cada una. Verifique sus respuestas utilizando *GeoGebra*.
   a) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$.
   b) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$.
   c) $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$.
   Solución. a) semicircunferencia inferior con centro en $(-2,-3)$ y radio $r = 5$. b) Mitad superior de una elipse con centro en $(3,-7)$. c) Rama inferior de una hipérbola con centro en $(3,7)$.

Nivel superior

1. Determine la función f la cual tiene como inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ¿qué condiciones deben satisfacer a,b,c,d para la existencia de la inversa?
   Solución. $ad - bc \neq 0$.
2. Demuestre usando la definición de función inyectiva que $F(x) = x^3$ es inyectiva.
3. Muestre que si una función f tiene una inversa f^{-1}, entonces la inversa es única.
4. Sea $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2-1}{x+y+z}$. Determine el dom f.



10. Cónicas y álgebra lineal

Este capítulo requiere de parte del lector una madurez matemática mayor que el resto del libro. Ha sido pensado como una introducción a ciertos temas del álgebra lineal como lo son multiplicación de matrices, transformaciones lineales y el teorema de los ejes principales. Se recomienda el estudio de los temas aquí incluidos para un primer curso universitario de Álgebra Lineal Aplicada o para un segundo curso de Geometría Analítica. Un enfoque similar que parte de la geometría al álgebra puede encontrarse en [1], pero nuestro punto de partida es a partir de los ejemplos de cónicas. Los teoremas del álgebra lineal de los cuales se muestran casos particulares aquí, pueden consultarse en una forma más general por ejemplo en [8] y en [6].

10.1 Multiplicación de matrices

Como veremos al introducir la multiplicación de matrices obtendremos simplificación de muchas operaciones así como un marco adecuado para generalizar las rotaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y obtener los ejes principales de una cónica. Primero, introducimos en $\mathbb{R}^2$ los vectores columna o matrices de 2×1, es decir, matrices de dos renglones y una columna. Dada la matriz renglón $v = (v_1 \quad v_2)$ de 1×2, la matriz transpuesta de v, llamada *matriz columna* y denotada v^T es la matriz

$$v^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

En general, dada una matriz renglón de $1 \times n$,

$$w = (w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n)$$

se denota con w^T, la matriz columna de $n \times 1$ representada por la ecuación

$$w^T = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Definición 10.1 El producto de una matriz renglón v de $1 \times n$ por una matriz columna w^T de $n \times 1$ está dada por

$$vw^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n.$$

■ **Ejemplo 10.1** Multiplique las matrices $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ y w^T, si $w = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Solución. Tenemos

$$vw^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + (-4) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 15.$$

Así el resultado buscado es $vw^T = 15$. ■

N Observe que el producto de matrices vw^T es el producto escalar $v \cdot w$ de los vectores $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, los cuales pertenecen a $\mathbb{R}^n$, tal producto es una generalización del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Una vez que se comprende la definición de la multiplicación de matrices renglón por matrices columna se puede dar la definición general para multiplicación de matrices.

Definición 10.2 — Producto de matrices. Sean A una matriz de $m \times s$ y B una matriz de $s \times n$. El producto $C = AB$ es la matriz de $m \times n$ cuya componente c_{ij} es el producto del renglón i-ésimo de A por el j-ésimo de B. En otras palabras, si $A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{is} \end{pmatrix}$ es el renglón i-ésimo de A y

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix},$$

es el j-ésimo renglón de B, entonces

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & & c_{ij} & \cdots \\ & & \vdots & \\ c_{m1} & & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

donde

$$c_{ij} = A_i B_j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{is} b_{sj}.$$

■ **Ejemplo 10.2** Calcule el producto AB para las siguientes matrices

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución. Sea $C = AB$, dado que A es 3×2 y B es 2×3 tenemos que C es 3×3 y

$$c_{11} = A_1 B_1 = (2 \quad -2) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = -4$$

$$c_{12} = A_1 B_2 = (2 \quad -2) \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 + (-2) \cdot 7 = -2$$

$$c_{13} = A_1 B_3 = (2 \quad -2) \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 11 = -24$$

$$c_{21} = A_2 B_1 = (1 \quad 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

$$c_{22} = A_2 B_2 = (1 \quad 3) \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 27$$

$$c_{23} = A_2 B_3 = (1 \quad 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 11 = 32$$

$$c_{31} = A_3 B_1 = (5 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = -2$$

$$c_{32} = A_3 B_2 = (5 \quad -1) \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 = 23$$

$$c_{33} = A_3 B_3 = (5 \quad -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot 11 = -16,$$

Podemos concluir que

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -24 \\ 6 & 27 & 32 \\ -2 & 23 & -16 \end{pmatrix}$$

es el producto AB. ■

10.1.1 Formas cuadráticas

Una vez que se ha definido el producto de matrices podemos escribir la ecuación general de segundo grado en dos, tres o n variables como producto de matrices.

Definición 10.3 Dada la ecuación general de segundo grado en las variables x, y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{10.1}$$

donde al menos una de las constantes A o B o C es distinta de cero, se llama forma cuadrática asociada a la ecuación (10.1) a la expresión

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2. \tag{10.2}$$

Dada la equación general de segundo grado en tres variables x, y, z

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \tag{10.3}$$

se llama forma cuadrática asociada a la ecuación (10.3) a la expresión

$$Q(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz. \tag{10.4}$$

Con la notación de matrices podemos escribir en forma simple las formas cuadráticas.

Lema 10.1 Dadas las formas cuadráticas (10.2) y (10.4) podemos escribir

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{10.5}$$

y

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10.6}$$

Ejercicio 10.1 Demuestre el lema 10.1. Observe que la demostración es sólo una aplicación de la multiplicación de matrices. ■

■ **Ejemplo 10.3** Escriba la forma cuadrática $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy$ como producto de matrices.

Solución. Los coeficientes de la forma matricial son $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 2$ y $E = F = 0$ por lo tanto

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

El lector debe comprobar multiplicando las matrices que efectivamente la forma cuadrática corresponde al producto dado en este ejercicio. ■

10.2 Rotación de ejes

La rotación de ejes es fundamental para comprender los temas principales de este capítulo. El resultado clásico lo presentamos en forma de lema a continuación.

Lema 10.2 Supongamos que los ejes de coordenadas se rotan un ángulo θ alrededor del origen de coordenadas. Sea $P=(x,y)$ las coordenadas del punto en el sistema de coordenadas x, y. Sea $P=(x',y')$ las coordenadas del punto en el sistema rotado. El cambio de coordenadas está dado por el producto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

en la ecuación (10.7) se llama *matriz de cambio de coordenadas*.

Demostración. Sean los ejes x, y, x', y' como en el la figura 10.1. Sea ϕ el ángulo que forma el vector de posición del punto P respecto a los ejes $x'y'$ y sea $r=\|P\|$. Por trigonometría elemental tenemos

$$x = r\cos(\theta+\phi) \tag{10.8}$$
$$y = r\operatorname{sen}(\theta+\phi) \tag{10.9}$$
$$x' = r\cos\phi \tag{10.10}$$
$$y' = r\operatorname{sen}\phi. \tag{10.11}$$

Sabemos de la sección 3.2.3 la fórmula del seno y coseno para suma de ángulos, de donde al

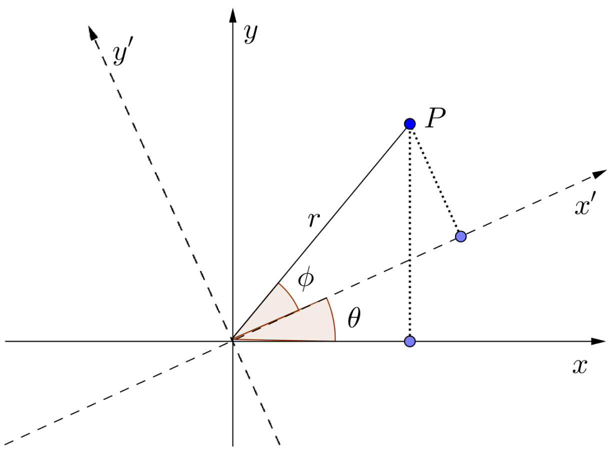


Figura 10.1: Figura correspondiente al lema 10.2.

desarrollar dichas fórmulas se obtiene

$$x = r\cos(\theta+\phi) = r\cos\theta\cos\phi - r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \tag{10.12}$$
$$y = r\operatorname{sen}(\theta+\phi) = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi + r\operatorname{sen}\phi\cos\theta. \tag{10.13}$$

Sustituimos (10.10) y (10.11), en las ecuaciones (10.12) y (10.13) para obtener

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \tag{10.14}$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \tag{10.15}$$

El lector puede verificar que las ecuaciones (10.14) y (10.15) se obtienen al multiplicar las matrices en (10.7). ■

■ **Ejemplo 10.4** Por medio de una rotación de ejes reduzca la ecuación $xy = 1$ a la forma canónica de la ecuación de una hipérbola.
Solución. Sustituimos en la ecuación $xy = 1$ las ecuaciones (10.14) y (10.15) con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= (x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) \\ &= (x'^2 - y'^2)\cos\theta \operatorname{sen}\theta + x'y'(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta). \end{aligned} \tag{10.16}$$

Si queremos eliminar el término con $x'y'$ en la ecuación (10.16) debemos tener

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta) = 0$$

o bien, $\cos(2\theta) = 0$, lo cual ocurre en el intervalo $[0, \pi]$, si $2\theta = \pi/2$, es decir, si $\theta = \pi/4$. Dado que $\cos(\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, tenemos la ecuación transformada

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1,$$

la cual corresponde a la hipérbola en los ejes x', y' los cuales forman un ángulo de $\pi/4$ con los ejes x, y, como en la figura 10.2. ■

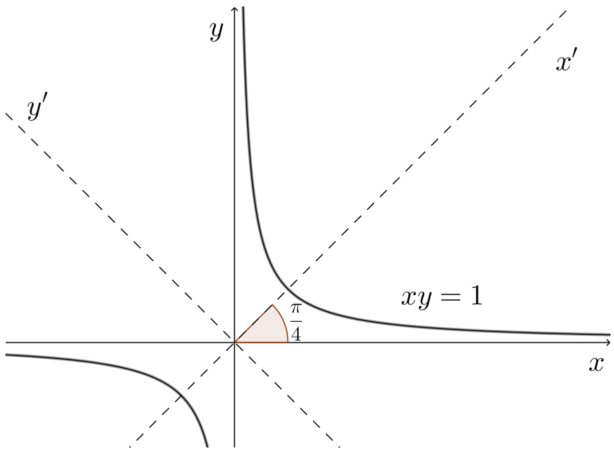


Figura 10.2: Figura correspondiente al ejemplo 10.4.

Ejercicio 10.2 Muestre mediante una rotación de ejes adecuada que la función racional $R(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, corresponde a una hipérbola para valores apropiados a, b, c, d. Muestre también que las rectas $x = -d/c$ y $y = a/c$ corresponden a las asíntotas de la hipérbola. ■

En la siguiente sección introduciremos el contexto general de matrices ortogonales para enunciar el teorema de los ejes principales para cónicas, superficies cuadráticas y formas cuadráticas en general.

10.3 Matrices ortogonales

Requerimos una serie de conceptos básicos relativos a matrices enunciados en la siguiente definición.

Definición 10.4 Se define la matriz identidad $I_{n\times n}$ como la matriz de tamaño $n\times n$ cuya diagonal principal tiene sólo unos y en todas las otras componentes sólo ceros.

Dada una matriz A de $n\times n$ su matriz inversa denotada A^{-1} es una matriz tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n\times n}$.

La matriz transpuesta de A denotada A^T es la matriz cuyos renglones son las columnas de A.

Una matriz A de $n\times n$ es *ortogonal* si sus renglones son vectores ortogonales y de norma uno.

Para matrices ortogonales se tienen las siguientes equivalencias.

Teorema 10.1 Para una matriz A de $n\times n$, los siguientes enunciados son equivalentes.
i) A es ortogonal.
ii) $A^{-1} = A^T$.
iii) A^T es ortogonal.

■ **Ejemplo 10.5** Muestre que la matriz A de cambio de coordenadas en (10.7) es ortogonal. Compruebe las equivalencias del teorema 10.1.

Solución. En efecto, los renglones de la matriz son equivalentes a los vectores $(\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ y $(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ los cuales claramente son ortogonales (muestre).

Mostraremos ahora que $A^TA = I_{2\times 2}$.

$$\begin{aligned}
A^TA &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta & \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= I_{2\times 2}.
\end{aligned}$$

Con lo cual quedan demostrados i) y ii) del teorema 10.1. ■

Una vez que se conoce que A^T es la inversa de A podemos encontrar la trasformación de cambio de coordenadas inversa del lema 10.2, simplemente

$$\begin{aligned}
A^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

es decir la transformación inversa es simplemente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrices y transformaciones

Dada la matriz A de cambio de coordenadas se puede definir una transformación R_θ, tal que al aplicarla a un vector dado $v = (x,y)$ rote el vector un ángulo θ. La transformación se define como

$$R_\theta[v] = Av^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

Observamos que también R_θ puede ser definida como

$$R_\theta[v] = vA^T = (x \quad y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{10.18}$$

■ **Ejemplo 10.6** Rote el vector $(1,1)$ un ángulo de $\pi/2$.
Solución. Dado que $\cos(\pi/2) = 0$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} R_{\pi/2}[(1,1)] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así el vector rotado debe ser $(-1,1)$ como era de esperarse. ■

Ahora podemos enunciar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 10.2 — Teorema de los ejes principales. Dada la forma cuadrática (10.5) existe un sistema de coordenadas x', y' en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$Q(x,y) = Q(x',y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

para ciertos números reales λ_1, λ_2. Similarmente para la forma (10.6) existe un sistema de coordenadas x', y', z' en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$Q(x,y,z) = Q(x',y',z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2,$$

para ciertos números reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

N Este capítulo es meramente introductorio, como se sabe los números λ_i ($i = 1,2$ o $i = 1,2,3$) son los llamados *valores propios* de las matrices asociadas a las formas cuadráticas dadas y los vectores propios correspondientes proporcionan el sistema de coordenadas sugeridos en el teorema 10.2. Esto es desde el punto de vista del álgebra lineal. Desde el punto de vista de la geometría lo relevante es que existe una rotación de ejes tal que la ecuación general de una cónica o de superficie cuadrática con términos mixtos xy, etcétera, puede verse como una ecuación general canónica sin tales términos. En este libro se parte de la intuición geométrica y desde esta perspectiva se introducen las nociones del álgebra lineal de vectores y valores propios y no al revés, como suele hacerse en los libros de álgebra lineal. Al final de esta sección se demuestra el teorema de los ejes principales para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Con lo que sabemos ahora de las matrices de cambio de coordenadas, podemos demostrar el teorema 10.2 llamado de los ejes principales, para formas cuadráticas de dos variables.

Actividad 10.1 1) En la ecuación (10.5) introduzca una rotación apropiada con un ángulo θ por determinar. 2) Realice las operaciones y calcule θ tal que la matriz que resulte para $Q(x',y')$ sea diagonal. ■

Solución de la actividad 10.1. 1) Dada la ecuación

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

sustituimos $(x \quad y)$ y $(x \quad y)^T$ por rotaciones apropiadas para obtener $Q(x',y')$,

$$Q(x',y') = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

2) Desarrollamos el producto de matrices de 2×2 en la expresión para $Q(x',y')$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} [A\cos^2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta - B\cos\theta\operatorname{sen}\theta] & [(A-C)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{B}{2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)] \\ [(A-C)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{B}{2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)] & [C\cos^2\theta + A\operatorname{sen}^2\theta + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta] \end{pmatrix}, \tag{10.19}$$

así la matriz (10.19) es diagonal si y sólo si

$$(A-C)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \frac{B}{2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0.$$

Si $A = C$, como basta considerar $\theta \in [0, \pi/2)$ y como $B \neq 0$, tenemos $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, es decir, $\theta = \pi/4$ o bien, si $C \neq A$, tenemos

$$\frac{B}{C-A} = \frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Dadas las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, obtenemos que

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{C-A}, \tag{10.20}$$

es decir, la matriz $Q(x', y')$ es diagonal si

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{C-A}\right).$$

Se concluye el teorema de los ejes principales para $Q(x, y)$ si ponemos

$$\lambda_1 = A\cos^2\theta + C\operatorname{sen}^2\theta - B\cos\theta\operatorname{sen}\theta \tag{10.21}$$
$$\lambda_2 = C\cos^2\theta + A\operatorname{sen}^2\theta + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta. \tag{10.22}$$

Observe que dado que $B \neq 0$, λ_1 en (10.21) y λ_2 en (10.22), son números reales positivos, diferentes entre sí. □

Una vez comprendida la parte geométrica del teorema de los ejes principales se puede proceder a generalizar lo realizado, pero desde una perspectiva meramente algebraica. Procedamos primero resumiendo lo visto hasta ahora, pero antes veamos un ejemplo.

■ **Ejemplo 10.7** Describa la cónica cuya ecuación es $2x^2 + 6xy + 10y^2 = 11$.
Solución. Dado que $A = 2$, $B = 6$ y $C = 10$ tenemos que el indicador $I = B^2 - 4AC = 36 - 4(2)(10) < 0$ corresponde a una elipse. Dada la ecuación (10.20) tenemos que

$$\tan 2\theta = \frac{B}{C-A} = \frac{3}{4}$$

De donde podemos construir un triángulo rectángulo con catetos de longitud 3 y 4 y por el teorema de Pitágoras tendría hipotenusa de longitud $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Podemos concluir que

$$\cos 2\theta = \frac{4}{5}$$

y de las fórmulas de ángulo mitad de la actividad 3.2

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-4/5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+4/5}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

De las fórmulas (10.21) y (10.22) se concluye que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\cdot\frac{9}{10} + 10\cdot\frac{1}{10} - 6\frac{1}{\sqrt{10}}\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{18+10-18}{10} = 1 \\ \lambda_2 &= 10\cdot\frac{9}{10} + 2\cdot\frac{1}{10} + 6\frac{1}{\sqrt{10}}\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{110}{10} = 11. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse en los ejes $x'\,y'$ es $\frac{x'^2}{11} + y'^2 = 1$ la cual es ilustrada en la figura 10.3. ∎

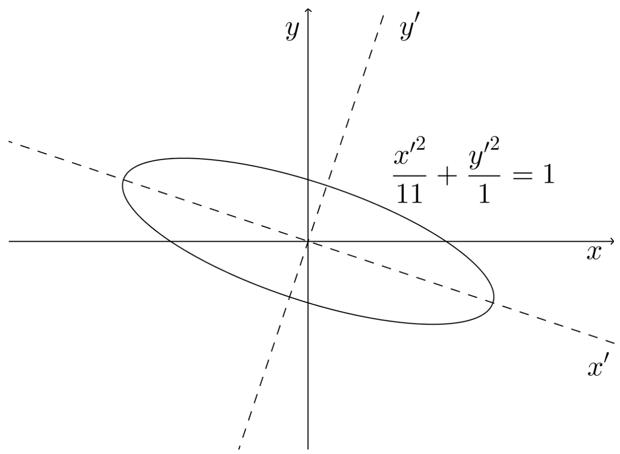


Figura 10.3: Elipse correspondiente al ejemplo 10.7.

Demostración general del teorema de los ejes principales

Hemos visto que la matriz asociada a una forma cuadrática $Q(x,y)$ puede escribirse como una forma cuadrática $Q(x',y')$ donde la matriz correspondiente es una matriz diagonal, esto ocurre si

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

O bien al multiplicar por la inversa del lado izquierdo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\cos\theta & -\lambda_2\operatorname{sen}\theta \\ \lambda_1\operatorname{sen}\theta & \lambda_2\cos\theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos las relaciones

$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \tag{10.23}$$

y

$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{10.24}$$

Las relaciones (10.23) y (10.24) dan pie a la siguiente definición.

Definición 10.5 Dada una matriz M de $n \times n$ un vector $v \neq \mathbf{0}$ se dice *vector propio* de M si y solo si existe un número λ tal que

$$Mv = \lambda v, \tag{10.25}$$

en tal caso, al número λ se le conoce como *valor propio* de M correspondiente a v. El determinante $\det(\lambda I_{n\times n} - M)$ se llama *polinomio característico* de M.

Vemos así que λ_1, λ_2 son valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática Q con vectores propios $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, respectivamente. En este caso el polinomio característico de la matriz asociada es

$$\begin{vmatrix} \lambda - A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & \lambda - C \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4}.$$

La existencia de vectores propios $v \neq \mathbf{0}$, para una matriz dada M, depende de soluciones no triviales de la ecuación

$$(\lambda I_{n\times n} - M)v = \mathbf{0}$$

lo cual ocurre si y sólo si $\det(\lambda I_{n\times n} - M) = 0$. De esta forma los valores propios de una matriz son las raíces del polinomio característico.

■ **Ejemplo 10.8** Encuentre los valores propios de la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática $Q(x,y)$ de la ecuación (10.5).

Solución. Debemos encontrar las raíces del polinomio característico de la matriz asociada a la forma cuadrática, es decir, debemos encontrar las raíces de

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4} = 0.$$

Por la fórmula cuadrática sabemos que

$$\lambda = \frac{A+C \pm \sqrt{(A+C)^2 - (4AC - B^2)}}{2} = \frac{A+C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2}.$$

Dado que $(A-C)^2 + B^2 > 0$, si $B \neq 0$, el polinomio característico en cuestión tiene siempre raíces en $\mathbb{R}$. Lo cual garantiza la existencia de ejes principales para la matriz asociada a la forma cuadrática $Q(x,y)$. ■

La existencia de raíces reales para polinomios característicos de matrices simétricas queda garantizada en el siguiente teorema.

Teorema 10.3 Toda *matriz simétrica* A, es decir, toda matriz tal que $A = A^T$, tiene polinomio característico con raíces exclusivamente dadas por números reales.

Demostración del teorema 10.3. Sea A una matriz simétrica. Dado que $I_{n\times n}$ es simétrica, se tiene

$$(\lambda I_{n\times n} - A)^T = (\lambda I_{n\times n})^T - A^T = \lambda I_{n\times n} - A.$$

Suponga que el polinomio característico de A tiene una raíz compleja $\lambda = a+bi$ entonces también $\overline{\lambda} = a-bi$ también es raíz del polinomio característico. Entonces $\det((a+bi)I-A)=0$ y $\det((a-bi)I-A)=0$ y así

$$\begin{aligned}0 = \det((a+bi)I-A)\det((a-bi)I-A) &= \det([(a+bi)I-A][(a-bi)I-A])\\ &= \det([a^2+b^2]I-2aA+A^2) = \det([aI-A]^2+b^2I).\end{aligned}$$

Entonces existe un vector no nulo v tal que

$$0 = v^T([aI-A]^2+b^2I)v,$$

de donde

$$\begin{aligned}0 = v^T([aI-A][aI-A]+b^2I)v &= v^T[aI-A][aI-A]v + v^Tb^2Iv\\ &= v^T[aI-A]^T[aI-A]v + b^2\|v\|^2 = (v[aI-A])^T[aI-A]v+b^2\|v\|^2\\ &\qquad \|[aI-A]v\|^2+b^2\|v\|^2.\end{aligned}$$

Como $v \neq 0$ se tiene $b^2=0$ y así $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

El teorema anterior suele complementarse con el teorema siguiente.

Teorema 10.4 Si λ_1, λ_2 son valores propios distintos de una matriz simétrica A, los vectores propios correspondientes son ortogonales.

Demostración del teorema 10.4. Sean v_1, v_2 vectores propios con valores propios correspondientes λ_1, λ_2 respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_1(v_1\cdot v_2) = (\lambda_1 v_1)\cdot v_2 = Av_1\cdot v_2 &\\ = (Av_1)^Tv_2 = (v_1^TA^T)v_2 = v_1^T(A^Tv_2) &\\ = v_1\cdot Av_2 = v_1\cdot\lambda_2 v_2 = \lambda_2(v_1\cdot v_2), &\quad (10.26)\end{aligned}$$

donde $(Av_1)^Tv_2$ denota el producto de matrices y $Av_1\cdot v_2$, denota el producto interior de vectores. De (10.26) concluimos $(\lambda_1-\lambda_2)(v_1\cdot v_2)=0$ y por lo tanto v_1 y v_2 son ortogonales, como se quería demostrar. ■

■ **Ejemplo 10.9** Transforme la ecuación $2x^2+\sqrt{3}xy+y^2=4$ en una ecuación canónica mediante el uso de valores propios.

Solución. La forma cuadrática asociada a la ecuación puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda-1\end{pmatrix} = \lambda^2-3\lambda+\frac{5}{4},$$

y así

$$\lambda = \frac{3\pm 2}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{5}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

de donde

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x' \quad y')\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 4,$$

es decir,

$$\frac{x'^2}{\frac{8}{5}} + \frac{y'^2}{8} = 1,$$

es la ecuación canónica, la cual corresponde a una elipse. ■

Con los teoremas 10.3 y 10.4 podemos dar una demostración del teorema de los ejes principales para formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 10.5 Dada una forma cuadrática

$$x^T Ax = a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{1,2}x_1x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n, \tag{10.27}$$

donde la matriz $x^T = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)$ tiene asociado el vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y dada P la matriz formada por los vectores propios de A (normalizados), entonces la forma cuadrática (10.27) es equivalente a la forma cuadrática

$$x'^T P^T APx' = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2,$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Demostración. Demostraremos el caso más simple en el que todos los valores propios son distintos entre sí. Dada la forma cuadrática (10.27), como la matriz A es simétrica, por el teorema 10.4 tiene n vectores propios ortogonales y por el teorema 10.3, sus valores propios λ_i, $i = i, \ldots, n$ son reales. Por la definición de valores y vectores propios

$$Av = \lambda_i v_i.$$

la matriz P formada por los vectores propios de A normalizados (i. e. divididos por su norma) escritos como matrices columna, es ortogonal de tal manera que

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

De esta forma con el cambio de variable

$$y = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

obtenemos que $x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$ como se quería demostrar. ■

A pesar de que la demostración anterior incluye un gran número de casos, el caso más general es aquel en que no todos los valores propios son distintos entre sí, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 10.10** Describa la superficie cuadrática dada por $x^2+y^2+2z^2+2xy=2$.
Solución. Sea $Q(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+2xy$ la forma cuadrática correspondiente a la superficie. La matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Buscamos los valores propios de A mediante el polinomio característico $\det(\lambda I_{3\times3}-A)=0$, dado por (compruébelo)

$$\det(\lambda I_{3\times3}-A)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{pmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0,$$

El polinomio característico tiene valores propios $\lambda=0$ y como raíz doble $\lambda=2$, por lo que Q es equivalente a

$$Q(x,y,z)=Q(x',y',z')=(x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=2x'^2+2y'^2.$$

Concluimos que la superficie es un cilindro circular recto (compruébelo graficando la superficie original) $x'^2+y'^2=1$. ■

Conocido el ejemplo anterior es evidente que la discusión sobre diagonalización de matrices simétricas no está completa si no se incluye un algoritmo para determinar los vectores propios correspondientes a valores propios dados, es decir, si no se presenta un procedimiento por medio del cual se puedan determinar los ejes principales de una superficie cuadrática cualquiera. Este es el propósito de la última sección de este capítulo.

10.4 Cálculo de vectores propios.

Hemos definido los vectores propios $v\in\mathbb{R}^n$, como vectores $v\neq\mathbf{0}$ de una matriz A de $n\times n$ los cuales satisfacen la ecuación $(\lambda I_{n\times n}-A)v=\mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)\in\mathbf{R}^n$. El cálculo de los vectores propios en $\mathbb{R}^2$, para matrices simétricas se reducía a calcular el ángulo θ para una rotación apropiada de ejes y en tal caso los vectores propios correspondientes a los valores propios λ_1, y λ_2 dados por (10.21) y (10.22), están dados por $(\cos\theta,-\operatorname{sen}\theta)$ y $(\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)$, respectivamente. En $\mathbb{R}^3$ no es tan evidente la forma en general de una matriz de rotación y por ello describiremos el proceso de como determinar los vectores propios una vez que se conocen los valores propios de una matriz arbitraria. Recordamos que en $\mathbb{R}^3$, un vector $v=(x,y,z)$ es un vector propio de una matriz A de 3×3, si

$$\begin{pmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad (10.28)$$

donde la matriz A cualquiera, está dada por

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Entonces el cálculo de las coordenadas (x,y,z) de v, requiere resolver el sistema homogéneo (10.28). De esta forma, es claro el porqué se requiere para el cálculo del polinomio característico que $\det(\lambda I_{3\times 3} - A) = 0$, ya que de otra manera el sistema (10.28), sólo tiene solución trivial $v = (0,0,0)$, por la regla de Cramer, lo cual no es interesante y no es permitido por la definición de vector propio de una matriz. Conocidas las raíces del polinomio característico de una matriz, entonces el cálculo de las componentes de cada vector propio requiere de cualquiera de los métodos para resolver sistemas homogéneos de ecuaciones: sustitución, suma y resta, el método de eliminación de Gauss, etcétera. Mostramos como proceder con algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

■ **Ejemplo 10.11** Determine un par vectores propios unitarios de la matriz A, resolviendo el sistema homogéneo asociado, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Primero calculamos los valores propios de A.

$$\det(\lambda I_{2\times 2} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)\lambda - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

El polinomio característico tiene raíces $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Debemos resolver el sistema (10.28) sustituyendo el valor de cada valor propio. Para $\lambda_1 = 3$

$$(3I_{2\times 2} - A)v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el sistema anterior se reduce a la ecuación $x + 3y = 0$, la cual tiene infinitas soluciones no triviales, por ejemplo $v_1 = (-3,1)$, es decir v_1 es un vector propio de A.

Para $\lambda_2 = -1$ tenemos

$$(-1I_{2\times 2} - A)v = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos la ecuación $x - y = 0$ (o la ecuación equivalente $-3x + 3y = 0$), por ejemplo con $v_2 = (1,1)$. Requerimos que los vectores propios tengan norma uno, así que si dividimos v_1, v_2 por sus respectivas normas obtenemos vectores propios unitarios

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right), \qquad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

así w_1, w_2, son vectores propios unitarios buscados. ■

Hay dos casos genéricos más que aparecen en el cálculo de vectores propios: raíces iguales y raíces complejas. Las raíces complejas no aparecen cuando se trata de matrices simétricas como se mencionó en el teorema 10.3, el lector interesado en matrices con valores propios complejos puede consultar [8]. Para el caso de raíces repetidas estudiamos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 10.12** Determine todos los vectores propios unitarios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Calculamos los valores propios de A,

$$\det(\lambda I_{2\times 2} - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)\lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0.$$

El polinomio característico tiene raíces repetidas $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Debemos resolver el sistema (10.28) sustituyendo el valor $\lambda = 1$

$$(1I_{2\times 2} - A)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos así un vector propio unitario $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. **No existe** un segundo vector propio unitario no paralelo a v_1. ∎

Estudiamos ahora algunos ejemplos en $\mathbb{R}^3$.

∎ **Ejemplo 10.13** Encuentre la ecuación canónica y los ejes principales de la superficie

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy - 4xz = 4$$

Solución. La forma cuadrática asociada a la superficie es $Q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy - 4xz = 4$ la cual tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es

$$\det(\lambda I_{3\times 3} - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0.$$

Buscamos raíces enteras entre los divisores de 10, los cuales son $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ encontramos que -1 es raíz del polinomio. Efectivamente $(-1)^3 - 6(-1)^2 + 3(-1) + 10 = -1 - 6 - 3 + 10 = 0$. Dividimos el polinomio $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10$ entre $\lambda + 1$ con lo que se obtiene $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 10)$. Podemos factorizar el polinomio característico como $(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$ con lo que los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 5$. De esta forma la ecuación canónica de la superficie es

$$-\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{\frac{4}{5}} = 1,$$

la cual corresponde a un hiperboloide de una hoja.

Procedemos a calcular las direcciones de los ejes principales, es decir, los vectores propios unitarios correspondientes a cada valor propio. Para $\lambda_1 = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación anterior es equivalente al sistema

$$\begin{cases} -3x + 2y + 2z & = 0 \\ 2x - 4y & = 0 \\ 2x \quad - 2z & = 0, \end{cases}$$

De la tercera ecuación tenemos $x = z$, de la segunda ecuación $y = 1/2x$ Por lo tanto los planos se intersecan en la recta $t(1, 1/2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Si normalizamos el vector $(1, 1/2, 1)$ obtenemos el vector $w_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$.

Para $\lambda_2 = 2$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \quad 2y + 2z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \\ 2x \quad\quad + z &= 0, \end{cases}$$

con lo que, de la segunt¿da y tercera ecuaciones se obtiene la recta de intersección $t(1,2,-2)$, $t \in \mathbb{R}$, normalizando el vector $(1,2,-2)$ obtenemos $w_2 = (1/3, 2/3, -2/3)$, como segundo eje principal.

Finalmente para $\lambda_3 = 5$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual da el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \\ 2x \quad\quad + 4z &= 0, \end{cases}$$

de la segunda y tercera ecuaciones se tiene $y = -x$, $z = -1/2x$ por lo que el vector $(1,-1,-1/2)$ dividido por su norma $3/2$ da el tercer eje principal $w_3 = (2/3, -2/3, 1/3)$. Obtenemos la matriz P de cambio de coordenadas

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

Tomando como renglones los vectores w_1, w_2, w_3. ■

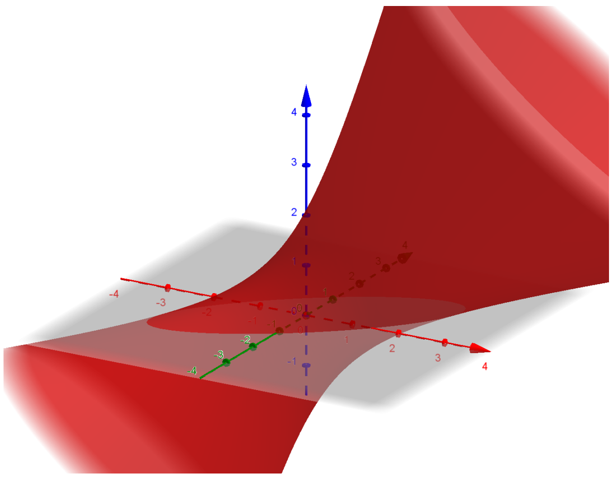


Figura 10.4: Hiperboloide de una hoja correspondiente al ejemplo 10.13.

10.5 Problemas y ejercicios del capítulo

Nivel básico

1. Realice el producto AB
   a) $A = (1 \quad -2 \quad 3 \quad 6), B^T = (5 \quad -3 \quad 6 \quad 9)$.
   b) $A = (1 \quad 10 \quad 0 \quad -3 \quad 2), B^T = (-7 \quad 8 \quad 1 \quad -2 \quad 0)$.
   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

   Soluciones. a) $AB = 83$ b) $AB = 79$ c) $AB = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$
2. Obtenga las formas cuadráticas y las matrices asociadas a las ecuaciones mediante el indicador I determine de cuál tipo de cónica se trata.
   a) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$.
   b) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$.
   c) $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$.
   d) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$.
3. Obtenga las formas cuadráticas y las matrices correspondientes de las superficies
   a) $x^2 - 8y^2 + 12z^2 + xy - 4xz + 10yz = 6$.
   b) $x^2 - 2y^2 + 5z^2 - 8xy + xz + 12yz = 1$.
4. Determine la forma cuadrática definida por la matriz
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

   Soluciones. a) Hipérbola. b) elipse, c) elipse degenerada. d) hipérbola degenerada.

Nivel medio

1. Resuelva el ejercicio 10.2.
2. Encuentre la forma canónica de la cónica correspondiente a cada ecuación mediante una rotación adecuada, grafique la curva obtenida, indique claramente los ejes xy y $x'y'$ en sus gráficas:
   a) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$.
   b) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$.
   c) $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$.
   d) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$.
   e) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.
   f) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.
   g) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

   Soluciones.
   a) $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$. b) $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$. c) $x'^2 + 4y'^2 = 0$. d) $x'^2 - y'^2 = 0$. e) $\frac{x'^2}{30} + \frac{y'^2}{5} = 1$. f) $\frac{x'^2}{5/9} - \frac{y'^2}{5/16} = 1$. g) $\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$.
3. En las siguientes ecuaciones determine la superficie de la cual se trata, mediante una transfor-

mación de ejes adecuada encuentre la ecuación canónica y calcule los vectores unitarios que determinan los ejes principales.

a) $xy+xz+yz=1$.

b) $10x^2+11y^2+6z^2-12xy-8xz+4yz=35$.

c) $-3x^2+4y^2-3z^2-2xz=16$.

Soluciones.

a) $\lambda = 1, -1/2, 0$. $w_1 = 1/\sqrt{3}(1,1,1)$, $w_2 = 1/\sqrt{6}(-2,1,1)$ y $w_3 = 1/\sqrt{3}(-1,-1,1)$. b) $\lambda = 18,6,3$ $w_1 = 1/3(-2,2,1)$, $w_2 = 1/3(-1,-2,2)$ y $w_3 = 1/3(2,1,2)$. c) $\lambda = -4,4,-2$. $w_1 = 1/\sqrt{2}(1,0,1)$, $w_2 = (0,1,0)$, y $w_3 = 1/\sqrt{2}(-1,0,1)$.

Nivel superior

1. Muestre que si los valores propios de una matriz simétrica $A_{2\times 2}$ es cero y el otro positivo entonces la ecuación $ax^2+bxy+cy^2=d$, $d>0$ representa a dos rectas paralelas.
2. Muestre que si los valores propios de una matriz simétrica $A_{3\times 3}$ es cero, entonces la ecuación $Q(x,y,z)=g$, $g>0$ donde Q es la forma cuadrática asociada, representa o bien un cilindro elíptico, o bien un cilindro hiperbólico, o bien una superficie degenerada.

Bibliografía

[1] Banchoff, T., Wermer J., *Linear Algebra Through Geometry, second edition.* Springer

[2] Benítez R., *Fundamentos de Geometría y Trigonometría.* México, D. F., Trillas c2014.

[3] Birkhoff, G., *A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol 33, No.2 (Apr., 1932) pp 329-345.

[4] Cárdenas S., *Notas de geometría.* Las prensas de ciencias, Facultad de ciencias UNAM 2013.

[5] Courant R., Robbins H., Steward I., *What is Mathematics?* Oxford University Press 1996.

[6] Gerber, H., *Álgebra lineal.* Grupo editorial Iberoamérica México.

[7] Hilbert, D., *Foundations of Geometry, second edition.* The Opera Court Publishing Company 1971.

[8] Hoffman, K., Kunze, R. *Álgebra lineal.* Pearson education.

[9] Kletenik D., *Problemas de Geometría Analítica.* Editorial Mir 1981.

[10] Lehmann Ch., *Geometría Analítica.*, Limusa S. A. de C. V. 2007.

[11] Nikerson et al., Advanced Calculus. Princeton University 1960.

[12] Serra, M., *Discovering Geometry: An investigative Approach, third edition.* Key Curriculum Press 2003.

[13] Swokowski, E., *Álgebra universitaria.* Compañía Editorial Continental, 1991 19a reipresión.

[14] Thomas I., Greek Mathematical Works II, Loeb Classical Library, 2005.

[15] Young, Cynthia Y., *Trigonometry.* Hoboken, N. J.: Wiley, c2007.

Índice alfabético