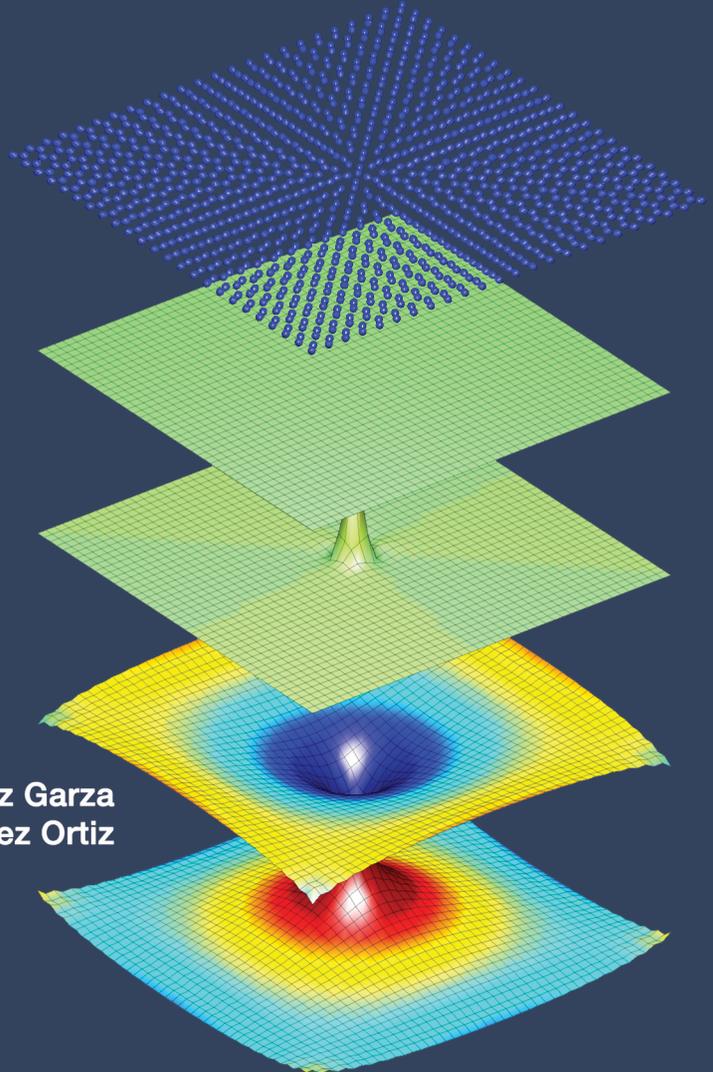


Colección CBI

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales



Gabriel López Garza
Francisco Hugo Martínez Ortiz



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

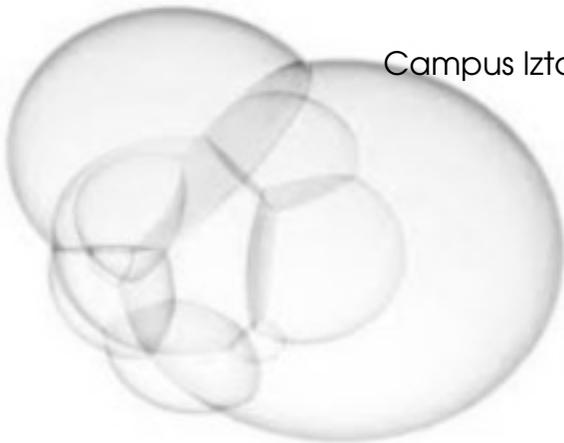
Gabriel López Garza

y

Fco. Hugo Martínez Ortiz

Universidad Autónoma Metropolitana

Campus Iztapalapa





Casa abierta al tiempo

Dr. Salvador Vega y León
Rector General

Mtro. Norberto Manjarrez Álvarez
Secretario General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dr. José Octavio Nateras Domínguez
Rector

Dr. Miguel Ángel Gómez Fonseca
Secretario

Dr. José Gilberto Córdoba Herrera
*Director de la División
de Ciencias Básicas e Ingeniería*

Dra. Milagros Huerta Coria
Coordinadora de Extensión Universitaria

Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas
Jefe de la Sección de Producción Editorial

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Primera edición: 2014

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-
IZTAPALAPA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina,
Del. Iztapalapa, C. P. 09340, México, D. F.

ISBN Electrónico COLECCIÓN: 978-607-28-2107-1

ISBN Electrónico VOLUMEN: 978-607-28-2148-4

Impreso y hecho en México / Printed in Mexico

Prólogo

Es tal la influencia de las ecuaciones diferenciales parciales que se puede afirmar que no hay rama de las ciencias que no las utilice. Una pequeña muestra: las ecuaciones de Maxwell, piedra angular de la teoría electromagnética; las ecuaciones de Navier-Stokes, fundamento de la hidrodinámica; la ecuación de Schrödinger, nada menos que el sustento de la revolución cuántica en la física; además, y para hablar de algo de moda por las crisis económicas, la ecuación de Black-Scholes que es una ecuación diferencial parcial estocástica en la cual se basan los cálculos de los derivados financieros cuyo abuso puso de cabeza la economía de varios países y al borde del derrumbe a la economía mundial al final de la primera década de este siglo. El éxito de las ecuaciones diferenciales parciales radica en su capacidad de *modelar* una enorme diversidad de fenómenos físicos, biológicos, químicos, de la ingeniería, de la economía, etcétera. Por si fuera poco, las ecuaciones diferenciales parciales tienen aplicación en diversas ramas de la Matemática Teórica como en la Geometría Diferencial y por que no decirlo, fueron fundamentales para la demostración de un *Problema del milenio*, la conjetura de Poincaré. Más aún, las ecuaciones diferenciales parciales no sólo son importantes por sus aplicaciones, sino que tienen importancia en sí mismas y son objeto de extensa investigación científica hoy por hoy. En este libro trataremos las ecuaciones que modelan el problema de calor, de onda y de Laplace, problemas clásicos de ecuaciones diferenciales parciales.

El Capítulo 1, trata de una clasificación elemental de las ecuaciones diferenciales parciales. El Capítulo 2 trata de las ecuaciones de primer orden. Consideramos recomendable comenzar con las ecuaciones más simples de resolver, además de que no hay mejor introducción al estudio de las curvas características, las cuales aparecen naturalmente en la solución de la ecuación de onda, por ejemplo. En el Capítulo 3, se estudian los modelos clásicos de la ecuación de calor, de onda y de Laplace, sin embargo los interesados sólo en los métodos de solución pueden pasar directamente a ellos sin necesidad de leer los capítulos mencionados. La solución y los métodos de

solución de las ecuaciones lineales ocuparán la mayor parte de este libro, se estudian ampliamente el método de separación de variables, el método de solución por series y transformadas de Fourier y transformadas de Laplace (capítulos 6 y 9 respectivamente). El capítulo 8 está dedicado a la solución numérica de las ecuaciones lineales y se da un ejemplo de solución de una ecuación no lineal, la ecuación de Burgers. En el último capítulo se da una introducción a las funciones de Green. En la sección 10.3 de este último capítulo se da una introducción a la teoría moderna de ecuaciones diferenciales parciales definiendo el concepto de distribución y dando el adecuado marco teórico para la delta de Dirac y las funciones de Green en su forma moderna.

Como ya hemos mencionado, los capítulos de este libro pueden leerse de forma independiente por lo que se facilita que sea usado como libro de texto. Por ejemplo puede leerse el capítulo 6 sobre el método de separación de variables sin haber leído el capítulo de las ecuaciones de calor, de Laplace y de onda. El libro cumple completamente el programa de varias universidades, entre ellas el de la UAMI, pero contiene además algunos temas complementarios, por ejemplo el capítulo dedicado al problema de Sturm-Liouville, o bien como ya se dijo, el capítulo de ecuaciones de primer orden. Creemos que dar la posibilidad de tener un panorama más completo de las ecuaciones diferenciales de ninguna manera puede ir en detrimento del estudiante.

La mayor dificultad para lograr un buen desempeño en este tipo de cursos es la cantidad de conocimientos *previos requeridos*: cálculo de varias variables, ecuaciones diferenciales ordinarias, álgebra lineal. Sin estos conocimientos es imposible tener un mínimo avance en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales. Al final del libro se incluyen apéndices con un repaso en algunos temas esenciales de ecuaciones diferenciales ordinarias y del Cálculo.

Este libro no hubiera sido escrito sin la colaboración y conocimientos de Francisco Hugo Martínez Ortiz a quien agradezco profundamente su buen ánimo y paciencia.

Gabriel López Garza.

Introducción

¿Porqué escribir un libro de edp? Cuando este libro comenzó a ser escrito, no había un sólo libro de edp en español, excepto los viejos, pero excelentes libros soviéticos de la editorial MIR, los cuales muchas veces requieren un nivel de matemáticas superior al que se exige como prerrequisito al curso de la UAMI. Por otra parte, si bien algunos libros de ecuaciones diferenciales ordinarias como el de Boyce et al., incluyen algunos de los temas del programa oficial, ninguno de tales libros lo cubre en su totalidad. Al día de hoy se han publicado quizá, un par de libros de edp en español, como el libro de Haberman, el cual esta diseñado para ser cubierto en dos semestres de las universidades norteamericanas, lo cual, como se sabe, excede en mucho los tiempos de la UAMI. Existe entonces la necesidad de escribir un libro de ecuaciones diferenciales parciales, el cual esté a un nivel acorde con la seriación de materias de la UAMI, que cubra la totalidad de los contenidos requeridos y que pueda adaptarse fácilmente a un curso de un trimestre. Este libro constituye una propuesta para cubrir tales requisitos.

El presente texto cubre íntegramente el programa de Ecuaciones Diferenciales Parciales a nivel licenciatura para la División de Ciencias Básicas e Ingeniería (CBI), de las Licenciaturas de Matemáticas, Física, Licenciatura en Electrónica y varias licenciaturas más de CBI, como se muestra a continuación. El *programa sintético* de licenciatura consta de seis temas (y varios subtemas pertinentes que no se muestran aquí):

- i) Concepto de ecuación diferencial parcial, series de Fourier y problemas de valores en la frontera.
- ii) La ecuación de Calor y el método de separación de variables.
- iii) La ecuación de Laplace.
- iv) La ecuación de onda.
- v) La transformada de Fourier.
- vi) Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

Pero además de cubrir todos estos temas y los subtemas correspondientes del programa oficial, se han incluido varios más, tales como

1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales parciales, forma canónica de las ecuaciones diferenciales parciales.
2. Ecuaciones de primer orden, la ecuación de Burgers.
3. Problema de Sturm-Liouville.
4. Transformada de Laplace.
5. Introducción a la teoría de las distribuciones.

Creemos que un libro introductorio de ecuaciones diferenciales parciales no está completo si no incluye los temas que agregamos. A pesar de que el material aquí contenido excede lo que puede estudiarse en un trimestre de once semanas, (como son los trimestres en la UAMI), los temas añadidos no están seriados con los temas requeridos por la UAMI, de tal manera que el estudiante o el profesor, pueden pasar directamente a la ecuación de calor, por ejemplo, sin haber revisado los dos primeros capítulos en absoluto. En general, se ha tenido cuidado de que todos los capítulos que incluyen los temas del programa oficial sean independientes unos de otros.

Finalmente, la sección dedicada a la teoría de las distribuciones en el último capítulo es la de mayor exigencia del libro. Ha sido pensada para estudiantes de ciencias que deseen comenzar un estudio más profundo de la teoría de las edp, pero puede ser omitido completamente en un primer curso, sin detrimento alguno para el estudiante.

Índice general

1	Introducción	1
1.1	¿Qué es una edp?	1
1.2	Clasificación de las ecuación lineales	4
1.3	Forma canónica de las ecuaciones lineales	7
1.3.1	Forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas	7
1.3.2	Forma canónica de las ecuaciones parabólicas	9
1.3.3	Forma canónica de las ecuaciones elípticas	10
1.4	Resumen de las formas canónicas	11
1.5	edp con más de dos variables	12
1.6	Problemas y ejercicios del Capítulo 1	16

2	Ecuaciones de primer orden	19
2.1	Introducción	19
2.2	Esquema general de las leyes de conservación	19
2.3	Solución de la ecuación de primer orden	21
2.4	Ecuaciones con coeficientes no constantes	22
2.5	Ecuación no homogénea	25
2.6	La ecuación de Burgers	29
2.7	Problemas y ejercicios del Capítulo 2	36
3	Ecuación de calor	39
3.1	Deducción de la ecuación de calor	39
3.1.1	Fenómenos de difusión	42
3.2	Ecuación de calor en una dimensión	42
3.2.1	Condiciones de frontera para la ecuación de calor	43
3.3	Descripción intuitiva de la ecuación de calor	45
3.3.1	Probabilidad y la ecuación de difusión	47
3.3.2	El principio del máximo para la ecuación de calor	47
3.3.3	Unicidad de soluciones de la ecuación de calor	48
3.4	Problemas y ejercicios del Capítulo 3	50
4	La ecuación de Laplace	53
4.1	Descripción intuitiva del laplaciano	53
4.1.1	Principio del máximo para la ecuación de Laplace	55
4.2	Invariabilidad del operador de Laplace	57
4.2.1	El laplaciano en coordenadas polares y esféricas	58
4.3	Problemas y ejercicios del Capítulo 4	59

5	La ecuación de onda	61
5.1	Introducción.	61
5.1.1	Las vibraciones de una cuerda	61
5.2	Descripción intuitiva de la ecuación de onda	64
5.3	Las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda	65
5.4	Solución de D'Alembert	66
5.4.1	La fórmula de D'Alembert en la semirecta	70
5.5	Fórmula de Kirchhoff-Poisson	71
5.5.1	Solución del problema de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3	71
5.5.2	Principio de Huygens	73
5.6	Problemas y ejercicios del Capítulo 5	76
6	Separación de variables	79
6.1	Introducción	79
6.2	Solución de la ecuación de calor	82
6.2.1	Problemas con (cf) no homogéneas	91
6.3	Solución de la ecuación de onda	94
6.4	Solución de la ecuación de Laplace	98
6.5	Fórmula integral de Poisson	102
6.5.1	Observaciones sobre la ecuación de Poisson	103
6.6	El método de expansión en funciones propias	104
6.7	Series de Fourier	109
6.7.1	Series de Fourier trigonométricas	109
6.7.2	Extensiones periódicas de funciones	111
6.7.3	Paridad y series de Fourier	112
6.8	Problemas y ejercicios del Capítulo 6	118

7	Problema de Sturm-Liouville	125
7.1	Introducción	125
7.1.1	Funciones de Bessel	129
7.1.2	Los polinomios de Legendre	135
7.1.3	Series de Fourier generales	139
7.2	Problemas y ejercicios del Capítulo 7	145
8	Métodos numéricos	147
8.1	La fórmula de aproximación para la segunda derivada	147
8.2	Método de las diferencias finitas	148
8.3	Fórmulas en diferencias finitas	152
8.4	El método de Crank-Nicholson	155
8.5	Diferencias finitas. Ecuación de Laplace	159
8.6	Ecuaciones no lineales	165
8.7	Problemas y ejercicios del Capítulo 8	168
9	Métodos de Transformadas	171
9.1	Transformadas de Fourier	171
9.2	Propiedades de la Transformada de Fourier	174
9.3	Aplicaciones de la Transformada de Fourier	178
9.4	Transformada de Laplace	180
9.5	Aplicaciones de la Transformada de Laplace	183
9.6	La transformada de Laplace y el funcional delta	187
9.7	Fórmulas de Duhamel	191
9.7.1	Principio de Duhamel Clásico	195
9.8	Problemas y ejercicios del capítulo 9	198

10	Funciones de Green	201
10.1	Introducción	201
10.2	Métodos para encontrar funciones de Green	206
10.2.1	El método de expansión en funciones propias para la función de Green 206	
10.2.2	Método de las soluciones fundamentales	208
10.2.3	Método de la función de Green para edp	213
10.3	Distribuciones y funciones de Green	215
10.3.1	Derivadas de distribuciones	218
10.4	Problemas y ejercicios del Capítulo 10	227
A	Hechos básicos del Cálculo	231
A.1	Concavidad	231
A.2	El teorema de Gauss	232
A.3	Convergencia de series	232
B	Ecuaciones diferenciales	235
B.1	Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden	235
B.1.1	Ecuaciones de primer orden no homogéneas	235
B.2	Apéndice. Ecuaciones de segundo orden	236
B.2.1	Ecuaciones homogéneas	236
B.2.2	Ecuación de Euler	236
B.2.3	Ecuaciones no homogéneas	237
B.2.4	Método de Frobenius	238

¿Qué es una edp?

Clasificación de las ecuación lineales

Forma canónica de las ecuaciones lineales

Forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas

Forma canónica de las ecuaciones parabólicas

Forma canónica de las ecuaciones elípticas

Resumen de las formas canónicas

edp con más de dos variables

Problemas y ejercicios del Capítulo 1

1 Introducción

1.1 ¿Qué es una edp?

Una ecuación diferencial en derivadas parciales (edp), puede describirse como una relación donde aparece una función incógnita u junto con al menos una derivada parcial. Dado que en una edp *deben aparecer derivadas parciales* se sobreentiende que u depende de al menos dos variables independientes. En general, una edp es una relación de la forma

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_k}}) = 0, \quad (1.1)$$

donde $m_1 + \dots + m_k < \infty$, es decir, en la relación aparecen un número finito de derivadas parciales con respecto a cualquiera de las variables x_1, \dots, x_n de una función incógnita $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. En este libro utilizaremos $t, x, y, z, \eta, \xi, x_1, x_2, \dots, x_n$ para denotar las variables independientes, la variable t estará asociada con el tiempo, mientras que las variables, x, y, z, η, ξ o bien x_1, x_2, \dots, x_n estarán asociadas con dimensiones espaciales.

Las derivadas parciales de u se denotan en general como $u_{x_i^m} = \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}$. En este libro

usaremos indistintamente las notaciones $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $u_{\eta\xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$.

Por supuesto, el *número de variables* de una ecuación diferencial parcial (1.1), se define como el número de variables de la función incógnita u .

■ **Ejemplo 1.1** A continuación se presentan una serie de ecuaciones importantes:

- i) La ecuación de calor: $u_t - u_{xx} = 0$.
- ii) La ecuación de la barra: $u_t + u_{xxx} = 0$.
- iii) La ecuación de las funciones p -armónicas: $\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) = 0$, donde $1 < p < \infty$, $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$ y $\|\nabla u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.
- iv) La ecuación de Burgers: $u_t + uu_x = 0$.
- v) La ecuación del medio poroso: $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$, donde $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$ y γ es una constante.

Las ecuaciones anteriores, sobra decirlo, tienen un sinnúmero de aplicaciones, algunas de las cuales estudiaremos en capítulos posteriores. ■

N En este libro **no** escribiremos explícitamente las variables independientes y se denotará a $u(t, x_1, \dots, x_n)$ simplemente por u . Se considerará además, que *las variables de las que depende u* son solamente aquellas que aparecen en las derivadas de la ecuación, por ejemplo, de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

se deduce que u sólo depende de t y de x , es decir, $u = u(t, x)$.

Ejercicio 1.1 Compruebe que las ecuaciones $u_t + u_{xx} = 0$ y $u_t + u_{xxx} = 0$, son de dos variables independientes; que la ecuación $\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u) = 0$, donde $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$, tiene tres variables; y que la ecuación $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$, donde $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}$, es de cuatro variables. ■

Definición 1.1 El orden de una ecuación diferencial parcial, es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

■ **Ejemplo 1.2** La ecuación $u_t + u_{xxx} = 0$, es de tercer orden; la ecuación $u_t + uu_x = 0$, es de primer orden; la ecuación $u_t + u_{xx} = 0$, es de segundo orden. ■

Se recuerda del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, que dada una ecuación diferencial se le puede asociar un operador L , el cual está definido sobre un espacio de

funciones, por ejemplo, con la ecuación:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3\frac{du(t)}{dt} - 5u(t) = t^2 + 1$$

se asocia el operador

$$L[u] = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3\frac{du(t)}{dt} - 5u(t),$$

el cual está definido sobre el espacio de funciones que tienen segunda derivada.

Una ecuación diferencial ordinaria se dice lineal si el operador L correspondiente es lineal, es decir, si se cumple

$$L[\alpha u + v] = \alpha L[u] + L[v]$$

para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y cualesquiera funciones u, v en el dominio¹ de L . De manera similar a como se hace en una variable, se puede definir un operador asociado a las ecuaciones en derivadas parciales y se pueden distinguir los operadores lineales de los no lineales.

■ **Ejemplo 1.3** Con la ecuación, $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x$, se asocia el operador $L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. ■

■ **Ejemplo 1.4** Con la ecuación de Laplace, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, se asocia el operador $L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. ■

■ **Ejemplo 1.5** La ecuación de Burgers $u_t + uu_x = 0$ tiene asociado el operador **no lineal** $L[u] = u_t + uu_x$. ■

Es decir, en forma análoga a las ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones en derivadas parciales, se dicen *lineales*, si el operador asociado es lineal.

Ejercicio 1.2 Verifique que las ecuaciones $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x$, y

¹Para que un operador sea lineal se requiere que su dominio sea un espacio vectorial.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, son lineales y que la ecuación $u_t + uu_x = 0$, (como ya se mencionó) no es lineal. ■

1.2 Clasificación de las ecuaciones lineales de segundo orden en dos variables con coeficientes constantes

En general, las ecuaciones lineales de segundo orden en dos variables tienen la forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{1.2}$$

donde los coeficientes A, B, C, D, E, F, G son funciones reales definidas en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ (claramente, la condición anterior garantiza que al menos uno de los coeficientes A, B, C sea distinto de cero). Si los coeficientes son constantes reales, con la posible excepción de G , a la ecuación (1.2) se le llama ecuación en derivadas parciales, lineal, de segundo orden con coeficientes constantes. En esta sección nos restringiremos a este caso.

Es necesario hacer notar el parecido de la ecuación (1.2) con la ecuación general de las cónicas en el espacio \mathbb{R}^2 :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1.3}$$

con $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, y $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Como es sabido, (ver por ejemplo [22]) mediante un cambio de coordenadas apropiado el discriminante $B^2 - 4AC$ permanece invariante respecto al signo y la ecuación (1.3) puede simplificarse, es decir, se tiene una propiedad intrínseca de la ecuación, la cual permite una clasificación de las cónicas de acuerdo al signo de $B^2 - 4AC$. Para la ecuación (1.2) ocurre algo similar a la ecuación (1.3) lo que permitirá clasificar las ecuaciones en derivadas parciales, lineales, de segundo orden en dos variables. Pero antes de establecer esta clasificación se requiere de la definición y lema siguientes:

Definición 1.2 Se define el discriminante (o indicador) I de la ecuación en derivadas parciales (1.2) como

$$I = B^2 - 4AC.$$

Lema 1.1 Considere el cambio de coordenadas dado por

$$\begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{12}y \\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.4)$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Si $A'u_{\xi\xi} + B'u_{\xi\eta} + C'u_{\eta\eta} + D'u_{\xi} + E'u_{\eta} + F'u + G' = 0$, es la ecuación transformada bajo el cambio de coordenadas (1.4) entonces $\text{sgn}(B^2 - 4AC) = \text{sgn}(B'^2 - 4A'C')$, es decir, el signo del discriminante I es invariante bajo el cambio de coordenadas.

Demostración: Dado el cambio de coordenadas (1.4) obtenemos $\xi_x = a_{11}$, $\xi_y = a_{12}$, $\eta_x = a_{21}$, $\eta_y = a_{22}$, de donde, mediante la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{\xi}a_{11} + u_{\eta}a_{21}, \\ u_y &= u_{\xi}a_{12} + u_{\eta}a_{22}, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}a_{11}^2 + 2u_{\xi\eta}a_{11}a_{21} + u_{\eta\eta}a_{21}^2, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi}a_{11}a_{12} + u_{\xi\eta}(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + u_{\eta\eta}a_{21}a_{22}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}a_{12}^2 + 2u_{\xi\eta}a_{12}a_{22} + u_{\eta\eta}a_{22}^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sustituyendo (1.5) en (1.2) obtenemos:

$$A'u_{\xi\xi} + B'u_{\xi\eta} + C'u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0 \quad (1.6)$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= Aa_{11}^2 + Ba_{11}a_{12} + Ca_{12}^2, \\ B' &= 2Aa_{11}a_{21} + B(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) + 2Ca_{12}a_{22}, \\ C' &= Aa_{21}^2 + Ba_{21}a_{22} + Ca_{22}^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

y \bar{F} sólo depende a lo más de las primeras derivadas parciales de u . Por medio de un cálculo directo se tiene

$$\begin{aligned} B'^2 - 4A'C' &= B^2((a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})^2 - 4a_{11}a_{22}a_{21}a_{12}) \\ &\quad - 4AC((a_{11}a_{22})^2 + (a_{21}a_{12})^2 - 2a_{11}a_{22}a_{21}a_{12}) \\ &= (B^2 - 4AC)(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\text{sgn}(B^2 - 4AC) = \text{sgn}(B'^2 - 4A'C')$, dada la hipótesis

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

como se quería demostrar. \square

- N** Debe subrayarse que si el cambio de coordenadas (1.4) es una rotación, (en particular el determinante es igual a uno), entonces no sólo el signo del discriminante es invariante, sino también la cantidad $B^2 - 4AC$. Así, para las rotaciones en particular, tenemos un resultado idéntico al de las cónicas.

Una vez que se tiene la invariabilidad del signo del discriminante I bajo el cambio de coordenadas, tiene sentido clasificar de acuerdo con tal signo a las ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Se tiene la siguiente definición:

Definición 1.3 Se dice que la ecuación (1.2) es:

- (I) *Parabólica*, si $I = 0$;
- (II) *Elíptica*, si $I < 0$;
- (III) *Hiperbólica*, si $I > 0$.

■ **Ejemplo 1.6** Para la ecuación $u_y - 7u_{xx} = 0$, tenemos $A = -7, B = 0, C = 0$; por lo tanto, $I = B^2 - 4AC = 0$. La ecuación es parabólica. ■

■ **Ejemplo 1.7** Para la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$, tenemos $A = C = 1, B = 0$ por lo que $I = B^2 - 4AC = -4 < 0$. Por lo tanto la ecuación es elíptica. ■

■ **Ejemplo 1.8** Para la ecuación $u_{xy} = 0$, tenemos $A = C = 0, B = 1$, de donde $B^2 - 4AC = 1 > 0$. Por lo tanto, la ecuación es hiperbólica. ■

- N** De hecho, el lema 1.1 puede demostrarse [28, C. I sec. 1], para el caso más general en el que los coeficientes dependan de x, y . En tal caso se considera una transformación, en general no lineal, $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ con jacobiano $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$ distinto de cero. Cabe mencionar que para tal tipo de ecuaciones, dependiendo del dominio, se tienen ecuaciones de uno u otro tipo de acuerdo al discriminante. Considérese por ejemplo, $xu_{xx} + u_{yy} = 0$. En este caso $I = B^2 - 4AC = -4x$, tenemos que la ecuación es parabólica, si $x = 0$; la ecuación es elíptica, si $x > 0$; y la ecuación es hiperbólica, si $x < 0$. Dado que en este texto se estudian sólo ecuaciones con coeficientes constantes no requerimos más que el lema demostrado.

1.3 Forma canónica de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Al igual que el caso de las cónicas, las edp lineales de segundo orden tienen formas canónicas, es decir, existe un sistema de coordenadas en el cual la edp adopta una forma más simple, llamada forma canónica. De esta manera el estudio de dichas ecuaciones se reducirá al estudio de sus formas canónicas.

1.3.1 Forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas

Se considera primero las ecuaciones de tipo hiperbólico, es decir, ecuaciones donde $B^2 - 4AC > 0$. Con la finalidad de simplificarlas, se pueden escoger $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ de tal forma que $A' = C' = 0$ y $B' \neq 0$. Supóngase que $A \neq 0$. Si en (1.7) se fuerza $A' = Aa_{11}^2 + Ba_{11}a_{12} + Ca_{12}^2 = 0$ y sucede que $a_{12} = 0$ se tiene $a_{11} = 0$, pero entonces se contradice $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, por lo tanto, $a_{12} \neq 0$. Similarmente si se fuerza $C' = 0$, en (1.7) y $a_{22} = 0$, se tiene $a_{21} = 0$. Lo que también contradice que el determinante sea distinto de cero. Por lo tanto $a_{12} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$. Así $A' = 0$ ó $C' = 0$, en (1.7) se pueden escribir como

$$A\phi^2 + B\phi + C = 0,$$

donde $\phi = \frac{a_{11}}{a_{12}}$ ó $\phi = \frac{a_{21}}{a_{22}}$. Por lo que en cualquiera de los dos casos

$$\phi = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Puesto que $B^2 - 4AC > 0$, el razonamiento anterior nos lleva a definir nuevas coordenadas (ξ, η) como:

$$\begin{aligned} \xi &= -(B + \sqrt{B^2 - 4AC})x + 2Ay \\ \eta &= -(B - \sqrt{B^2 - 4AC})x + 2Ay. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Observe que la condición $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ se cumple, dado que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(B + \sqrt{B^2 - 4AC}) & 2A \\ -(B - \sqrt{B^2 - 4AC}) & 2A \end{vmatrix} = -4A\sqrt{B^2 - 4AC} \neq 0.$$

Además, sustituyendo en B' de la ecuación (1.7) con

$$a_{11} = -B - \sqrt{B^2 - 4AC}, a_{12} = 2A, a_{21} = -B + \sqrt{B^2 - 4AC}, a_{22} = 2A,$$

se tiene

$$B' = -4A(B^2 - 4AC) \neq 0.$$

En las nuevas coordenadas (ξ, η) la ecuación (1.2) adopta la forma

$$B' u_{\xi\eta} + \bar{F} = 0. \tag{1.9}$$

Dado que $B' \neq 0$ dividiendo la ecuación (1.9) por B' y definiendo $G = \bar{F}/B'$, se obtiene la forma canónica de la ecuación hiperbólica :

$$u_{\xi\eta} = G. \tag{1.10}$$

Donde, como se ha mencionado, \bar{F} depende a lo más de las derivadas parciales de primer orden de u y de igual forma G . Introduciendo el nuevo cambio de variables:

$$\xi' = \frac{\xi + \eta}{2}, \eta' = \frac{\xi - \eta}{2},$$

Se obtiene otra forma canónica de las ecuaciones hiperbólicas:

$$u_{\xi'\xi'} - u_{\eta'\eta'} = F'. \tag{1.11}$$

Se debe hacer notar que la suposición $A \neq 0$ no limita la generalidad de la discusión ya que si $A = 0$, pero $C \neq 0$ una discusión similar a la del caso $A \neq 0$ conduce a la misma forma canónica (1.10). Finalmente si $A = C = 0$ entonces la ecuación (1.2) toma la forma $Bu_{xy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0$ la cual trivialmente puede llevarse a la forma canónica ya que por hipótesis $B \neq 0$.

■ Ejemplo 1.9 Muestre que la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} - 3u_{xy} - 10u_{yy} = 0$$

es hiperbólica y encuentre la forma canónica (1.10) de la ecuación.

Solución: En este caso $A = 1, B = -3, C = -10$ así que $B^2 - 4AC = 49 > 0$, por lo tanto la ecuación es hiperbólica. Por medio de las ecuaciones (1.8) se encuentran las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} \xi &= -4x + 2y \\ \eta &= 10x + 2y \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones dadas por (1.5) son

$$\begin{aligned}u_{xx} &= 16u_{\xi\xi} - 80u_{\xi\eta} + 100u_{\eta\eta}, \\u_{xy} &= -8u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + 20u_{\eta\eta}, \\u_{yy} &= 4u_{\xi\xi} + 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}.\end{aligned}$$

Sustituyendo éstas en la ecuación se obtiene:

$$-166u_{\xi\eta} = 0 \quad \text{o} \quad u_{\xi\eta} = 0,$$

la cual es la forma canónica de la ecuación. ■

1.3.2 Forma canónica de las ecuaciones parabólicas

Para las ecuaciones de tipo parabólico se cumple $I = 0$. Supóngase que $A \neq 0$, la ecuación (1.2) puede simplificarse usando (1.8) lo cual lleva al cambio de variables:

$$\begin{aligned}\xi &= -Bx + 2Ay \\ \eta &= x,\end{aligned}\tag{1.12}$$

donde η se ha elegido de manera que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -B & 2A \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2A \neq 0.$$

Sustituyendo en (1.7) los valores de $a_{11} = -B$, $a_{12} = 2A$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$ se tiene

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = A.\tag{1.13}$$

De donde al dividir la ecuación (1.6) por C' , la ecuación que queda es la forma canónica de las ecuaciones parabólicas:

$$\boxed{u_{\eta\eta} = F'},\tag{1.14}$$

donde F' contiene a lo más, derivadas parciales de u de primer orden.

El caso $A = 0$ implica $B = 0$, ya que $B^2 - 4AC = 0$ y, por lo tanto, $C \neq 0$, dada la condición $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. De esta manera, la ecuación (1.2) tiene la forma

$$Cu_{yy} = \bar{F},$$

donde el término \bar{F} contiene a lo más derivadas parciales de orden uno. Se tiene entonces que (1.2) puede llevarse fácilmente a la forma canónica de la ecuación parabólica (1.14), si se divide por C , con lo que la discusión del caso parabólico queda concluida.

■ **Ejemplo 1.10** Reduzca la ecuación $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ a la forma canónica.
Solución: En este caso $A = C = 2$, $B = 4$, por lo tanto $B^2 - 4AC = 0$, así, la ecuación es parabólica. Al usar las ecuaciones (1.12) encontramos las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned}\xi &= -4x + 4y \\ \eta &= x.\end{aligned}$$

De esta forma, las ecuaciones dadas por (1.13) dan

$$2u_{\eta\eta} = 0 \quad \text{ó} \quad u_{\eta\eta} = 0,$$

la cual es la forma canónica de la ecuación. ■

1.3.3 Forma canónica de las ecuaciones elípticas

Para las ecuaciones elípticas se cumple que $B^2 - 4AC < 0$ por ello, $A \neq 0$ y $C \neq 0$. Notamos que las ecuaciones (1.8) llevan a las ecuaciones de variable compleja:

$$\begin{aligned}\xi &= -(B + i\sqrt{4AC - B^2})x + 2Ay \\ \eta &= -(B - i\sqrt{4AC - B^2})x + 2Ay,\end{aligned}\tag{1.15}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Una sustitución directa de tales ecuaciones en (1.2) nos lleva a una ecuación en derivadas parciales con variables complejas. Sin embargo, al introducir las nuevas variables

$$\xi' = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \eta' = \frac{\eta - \xi}{2i}\tag{1.16}$$

se obtienen las variables reales:

$$\begin{aligned}\xi' &= -Bx + 2Ay \\ \eta' &= \sqrt{4AC - B^2} x,\end{aligned}\tag{1.17}$$

las cuales constituyen un cambio de coordenadas apropiado, como lo muestra el siguiente cálculo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -B & 2A \\ \sqrt{4AC - B^2} & 0 \end{vmatrix} = -2A\sqrt{4AC - B^2} \neq 0.$$

$I = B^2 - 4AC$	Tipo	Forma canónica
$I > 0$	hiperbólica	$u_{\xi\eta} = F'(u_{\xi}, u_{\eta}, \eta, \xi)$ ó $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F'$
$I = 0$	parabólica	$u_{\eta\eta} = G'(u_{\xi}, u_{\eta}, \eta, \xi)$
$I < 0$	elíptica	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = H'(u_{\xi}, u_{\eta}, \eta, \xi)$

Cuadro 1.1: *Formas Canónicas.*

Sustituyendo los coeficientes de las ecuaciones (1.17) en la ecuación (1.7) se tiene que

$$A' = C' = A(4AC - B^2), B' = 0. \quad (1.18)$$

de donde al dividir la ecuación (1.6) por $A(4AC - B^2)$ se obtiene la forma canónica de las ecuaciones elípticas:

$$u_{\xi'\xi'} + u_{\eta'\eta'} = F', \quad (1.19)$$

donde F' contiene a lo más, derivadas parciales de orden uno.

■ **Ejemplo 1.11** Clasifique la ecuación $17u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} = 0$ y redúzcala a la forma canónica (1.19).

Solución. Dado que $A = 17, B = C = 1$ tenemos $B^2 - 4AC = -67$ por lo tanto la ecuación es elíptica. Por medio de la transformación (1.17) se tiene que la forma canónica es $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$. ■

1.4 Resumen de las formas canónicas

Dada la ecuación en derivadas parciales, lineal, de segundo orden, en dos variables, con coeficientes constantes

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0,$$

se han establecido los resultados del cuadro 1.1:

- Ⓝ El análisis en este capítulo es meramente introductorio. Las formas canónicas de las ecuaciones lineales pueden estudiarse con mayor profundidad mediante

el análisis de las curvas características, las cuales se introducen en este texto en el capítulo dedicado a las ecuaciones de primer orden.

- No se recomienda memorizar las fórmulas de este capítulo

1.5 Clasificación de ecuaciones lineales de segundo orden con más de dos variables

Una edp lineal de segundo orden en N variables es una ecuación que se puede expresar en la forma

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i u_{x_i} + cu = d, \tag{1.20}$$

donde a_{ij}, b_i, c y d son funciones reales de las variables x_1, \dots, x_N . En esta sección se estudia la clasificación de la ecuación (1.20) en caso de coeficientes constantes, es decir, a_{ij}, b_i y c números reales.

La propiedad que se usará para clasificar la ecuación (1.20) es una que se reduce a la invariabilidad del signo del discriminante I para la ecuación (1.2). Para motivar esta propiedad se requiere del concepto de forma cuadrática real

Definición 1.4 Una forma cuadrática real en N variables, es una función

$$H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_N) \mapsto \sum_{i,j=1}^N a_{ij}x_i x_j \tag{1.21}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

A toda matriz simétrica, es decir, toda matriz A que satisface $A = A^t$, donde A^t es la transpuesta de A , le corresponde una forma cuadrática y recíprocamente, a toda forma cuadrática se le puede asociar una matriz simétrica. En lo sucesivo supondremos que este será el caso. Por ejemplo, a la forma cuadrática $H(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ le corresponde la matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix},$$

observe que

$$H(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ahora con la *parte principal* $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy}$ de la ecuación (1.2) se le asociará la forma cuadrática $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ y la matriz asociada de esta forma cuadrática es la correspondiente a la parte principal de la ecuación (1.2). Así M es la matriz simétrica de la parte principal $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy}$ de la ecuación (1.2). Sean λ_1, λ_2 los valores propios de M , es decir, λ_1, λ_2 son raíces de la ecuación $\det(\lambda I - M) = \lambda^2 - (A + C)\lambda - (B^2 - 4AC)/4 = 0$. Se deja como ejercicio verificar que λ_1 y λ_2 son números reales y que $\lambda_1 \lambda_2 = -(B^2 - 4AC)/4 = -I/4$. De donde,

- $I > 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ y λ_2 son distintos de cero y tienen signos opuestos.
- $I = 0 \Leftrightarrow$ al menos uno de los $\lambda_i, i = 1, 2$, es cero.
- $I < 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ y λ_2 son distintos de cero y tienen el mismo signo.

De esta manera el signo de I se puede caracterizar por el signo de los valores propios de M .

Para las matrices simétricas sobre \mathbb{R} se sabe que son similares a una matriz diagonal², [11][Th. 6.20 p. 384], además se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.1 — Silvester. [11][Th. 6.38 p. 443] Sea M una matriz real simétrica entonces el número de entradas positivas y negativas de cualquier matriz diagonal similar a M es independiente de la elección de la matriz diagonal.

Así este teorema proporciona una propiedad intrínseca de la ecuación (1.20) la cual permite una clasificación de dicha ecuación.

Definición 1.5 Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ los valores propios de la matriz de la parte principal de la ecuación (1.20)

- (I) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son distintos de cero y al menos uno de ellos tiene signo distinto de los demás la ecuación se llama hiperbólica.
- (II) Si al menos uno de los $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ es cero la ecuación se llama parabólica
- (III) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ son distintos de cero y tienen el mismo signo la ecuación se llama elíptica.

Una clasificación en términos de formas cuadráticas se encuentra enseguida

Definición 1.6 Sea $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática con matriz asociada A . Se dice que H es definida si los valores propios correspondientes al polinomio

²Es decir, si M es una matriz simétrica, existen matrices D , diagonal, y B , no singular, tales que $D = BMB^{-1}$.

característico:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{1.22}$$

son todos positivos o todos negativos. Se dice que H es indefinida si la ecuación (1.22) tiene raíces que cambian de signo. Se dice que H es degenerada si la ecuación (1.22) tiene como solución $\lambda = 0$.

Así se tiene que la ecuación es de tipo

- hiperbólico, si la forma cuadrática (1.21) es indefinida,
- parabólico si (1.21), es degenerada,
- elíptico si (1.21) es definida.

■ **Ejemplo 1.12** Se puede observar que a la ecuación canónica de la ecuación hiperbólica $u_{\xi\eta} = F'(u_{\xi}, u_{\eta}, \eta, \xi)$, le corresponde la forma cuadrática $H(\xi, \eta) = \xi\eta$, de donde

$$H(\xi, \eta) = (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Sea

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz correspondiente a la forma canónica de la ecuación hiperbólica. De manera análoga, sea A_2 la matriz asociada con la forma canónica de la ecuación parabólica $u_{\eta\eta} = F'(u_{\xi}, u_{\eta}, \eta, \xi)$, es decir,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, sea A_3 la matriz asociada con la forma canónica de las ecuaciones elípticas $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F'(u_{\xi}, u_{\eta}, \eta, \xi)$, es decir,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos los polinomios característicos de las matrices A_1, A_2, A_3 y los llamamos p_1, p_2, p_3 de manera correspondiente, obtenemos

$$p_1(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) = \lambda^2 - 1/4, \tag{1.23}$$

$$p_2(\lambda) = \det(\lambda I - A_2) = \lambda^2 - \lambda, \tag{1.24}$$

$$p_3(\lambda) = \det(\lambda I - A_3) = (\lambda - 1)^2. \tag{1.25}$$

De esta forma, la ecuación $p_1(\lambda) = 0$ tiene dos soluciones (valores propios) con signo distinto $\lambda = \pm 1/2$, la ecuación $p_2(\lambda) = 0$ tiene las soluciones $\lambda = 0, \lambda = 1$ y la ecuación $p_3(\lambda) = 0$ tiene una raíz doble $\lambda = 1$. ■

■ **Ejemplo 1.13** La forma general de la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden en tres variables es

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{xz} + Du_{yz} + Eu_{yy} + Fu_{zz} + G(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0$$

la cual tiene asociada la forma cuadrática:

$$H(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}C \\ \frac{1}{2}B & E & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}C & \frac{1}{2}D & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En particular, la ecuación de Laplace $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ tiene asociada la forma cuadrática:

$$H(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Así, el polinomio característico (1.22) correspondiente es $(\lambda - 1)^3 = 0$ por lo que el operador de Laplace es elíptico.

Para la ecuación $Lu = u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} = 0$ se tiene la forma cuadrática:

$$H(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

por lo que la ecuación (1.22) es $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$, y por lo tanto L es hiperbólico. ■

N Los coeficientes en las formas cuadráticas pueden ser variables y los resultados de esta sección se aplican de manera puntual, sin embargo, los valores propios de la matriz asociada dependen también de las variables independientes por lo que un operador puede ser elíptico, hiperbólico o parabólico en la región donde se está considerando la ecuación.

1.6 Problemas y ejercicios del Capítulo 1

1. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones representan ecuaciones diferenciales parciales, justifique sus respuestas.

a) $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sen u_x \sen u_y = 0$.

b) $\sen^2(u_{xx} + u_{xy}) + \cos^2(u_{xx} + u_{xy}) - u = 1$.

c) $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 - (u_{xx} - u_{yy})^2 = 0$.

2. Cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales y cuáles no lineales. Determínelo encontrando el operador asociado y en caso que sea lineal demuéstrello.

a) $u_x u_{xy}^2 + 2x u u_{yy} - 3xy u_y - u = 0$.

b) $a(x, y, u_x, u_{xy}) u_{xyy} + b(x, y, u_{yy}) u_{yyy} - f(x, y) = 0$.

c) $\cos(x + y) u_x + \cos u_y = 0$.

3. Encuentre el orden de las siguientes edp.

a) $\ln |u_{xx} u_{yy}| - \ln |u_{xx}| - \ln |u_{yy}| + u_x + u_y = 0$.

b) $u_x u_{xy}^3 + (u_{xx}^2 - 2u_{xy}^2 + u_y)^2 = 0$.

c) $\cos^2 u_{xy} + \sen^2 u_{xy} - 2u_x^2 = 0$.

Solución: 1a, no; 1b, no; 1c, si; 2a, 2b, 2c, no; 3a, primero; 3b, segundo; 3c, primero.

4. Determine el tipo de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales.

a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$.

b) $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y - u = 0$

c) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0$

d) $y^{2m+1} u_{xx} + u_{yy} - u_x = 0$ donde m es un entero no negativo.

e) $xu_{xx} + yu_{yy} - u = 0$

f) $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ donde F es continuamente diferenciable con respecto a las tres últimas variables y al menos una de las derivadas de F con respecto a una de las tres últimas variables es diferente de cero.

Solución: a) hiperbólica; b) elíptica; c) parabólica; d), e) dependen del signo de

$$x, y; f) \text{ depende del signo de } \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \frac{\partial F}{\partial u_{yy}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}} \right)^2.$$

5. Verifique que si se sustituyen

$$a_{11} = -B - \sqrt{B^2 - 4AC}, a_{12} = 2A, a_{21} = -B + \sqrt{B^2 - 4AC}, a_{22} = 2A,$$

en las ecuaciones

$$\begin{aligned}A' &= Aa_{11}^2 + Ba_{11}a_{12} + Ca_{12}^2, \\B' &= 2Aa_{11}a_{21} + B(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) + 2Ca_{12}a_{22}, \\C' &= Aa_{21}^2 + Ba_{21}a_{22} + Ca_{22}^2,\end{aligned}$$

se obtiene $A' = C' = 0$ y $B' = -4A(B^2 - 4AC)$.

6. Reduzca las siguientes ecuaciones a la forma canónica (1.10)

- $3u_{xx} + 2u_{xy} - 5u_{yy} - u_y = 0.$
- $8u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = xy.$
- $2u_{xx} - 3u_{xy} + u_{yy} - u_x + u_y - 3 = 0.$

7. Compruebe que si se substituyen $a_{11} = -B$, $a_{12} = 2A$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$ en

$$\begin{aligned}A' &= Aa_{11}^2 + Ba_{11}a_{12} + Ca_{12}^2, \\B' &= 2Aa_{11}a_{21} + B(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) + 2Ca_{12}a_{22}, \\C' &= Aa_{21}^2 + Ba_{21}a_{22} + Ca_{22}^2,\end{aligned}$$

se obtiene $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = A$.

8. Determine la forma canónica de las siguientes ecuaciones:

- $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$
- $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$
- $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$
- $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y - 50u + x - 2y = 0.$
- $u_{xx} + 4u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y - 2(x + y) = 0.$
- $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_x + 24u_y - 9u + 9(x + y) = 0.$

Solución: a), $u_{\eta\eta} + 18u_{\xi} + 9u_{\eta} - 9u = 0$; b), $u_{\xi\eta} + 3u_{\xi} - u_{\eta} + 2u = 0$; c), $u_{\xi\eta} + u_{\xi} - 2u_{\eta} + \xi + \eta = 0$; d), $27u_{\eta\eta} - 105u_{\xi} + 30u_{\eta} - 150u - 2\xi + 5\eta = 0$; e), $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 15u_{\xi} - 4\sqrt{6}u_{\eta} + 1/3\xi + 1/\sqrt{6}\eta = 0$; f), $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi} + u_{\eta} - u - \xi + \eta = 0$;

9. Compruebe que si se substituyen

$$a_{11} = B, a_{12} = 2A, a_{21} = 4AC - B^2, a_{22} = 0,$$

en

$$\begin{aligned}A' &= Aa_{11}^2 + Ba_{11}a_{12} + Ca_{12}^2, \\B' &= 2Aa_{11}a_{21} + B(a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}) + 2Ca_{12}a_{22}, \\C' &= Aa_{21}^2 + Ba_{21}a_{22} + Ca_{22}^2,\end{aligned}$$

se obtiene $A' = C' = A(4AC - B^2)$, $B' = 0$.

10. Lleve las siguientes ecuaciones a la forma canónica

a) $u_{xx} + 2u_{yy} + u = 0$.

b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.

Nota. Los problemas 1, 2, 3, 4, 8 fueron tomados del libro de problemas de editorial Mir [4], el cual ya no se edita.

Introducción

Esquema general de las leyes de conservación
Solución de la ecuación de primer orden
Ecuaciones con coeficientes no constantes
Ecuación no homogénea
La ecuación de Burgers
Problemas y ejercicios del Capítulo 2

2 Ecuaciones de primer orden

2.1 Introducción

Las ecuaciones de primer orden aparecen en diversas aplicaciones, por ejemplo, para modelar el tránsito de vehículos en una avenida muy concurrida; para modelar el flujo de sangre a través de una arteria o como casos especiales de teorías generales de dinámica de gases; para modelar la probabilidad de encontrar errores en las pruebas de un texto después de una revisión de rutina [23]. En este capítulo estudiaremos las ecuaciones de primer orden más simples y algunos métodos tanto geométricos como analíticos para resolverlas.

2.2 Esquema general de las leyes de conservación evolutivas

Consideramos un medio líquido, gas o sólido que ocupa una región del espacio o dominio (abierto y conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, donde N es la dimensión del espacio, para este libro $N = 1, 2$ o 3 . Denotamos

$$u = u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in [0, T)$$

a una función llamada función de estado, la cual dependiendo del problema podrá representar la temperatura o bien la concentración de una sustancia, etcétera. Para el análisis de las leyes de conservación, se requiere un dominio de balance escogido arbitrariamente $\Omega_b \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$, y un intervalo de tiempo arbitrario $[t_1, t_2] \subset [0, \infty)$. El

caso más simple ocurre cuando la función de estado u , es una función escalar, es decir $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pero en general, u puede ser una función vectorial: $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. El caso u escalar, incluye también, en general, una función fuente escalar $f = f(\mathbf{x}, t)$, $f : \Omega \times [0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ y un campo vectorial de flujo, $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$, $\phi : \Omega \times [0, t) \rightarrow \mathbb{R}^N$. Por ejemplo si u representa la temperatura, f podría representar una fuente interna de calor, por ejemplo, una corriente eléctrica en un alambre y ϕ representa a una ley física que determina la manera como cambia u , por ejemplo, la ley de calor de Fourier. La ley básica de balance [9, ch. 1, sec. 1.2] establece que el cambio del total de la cantidad u contenida en Ω_b entre los tiempos t_1 y t_2 debe igualar el flujo total a través de la frontera $\partial\Omega_b$ entre los tiempos t_1 y t_2 y el incremento o decremento de la cantidad u producido por la fuente f , dentro de Ω_b en el mismo intervalo de tiempo. En forma matemática esto queda expresado como

$$\int_{\Omega_b} u(\mathbf{x}, t_2) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_b} u(\mathbf{x}, t_1) d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_b} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_b} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt. \quad (2.1)$$

Si se supone que u tiene primera derivada continua respecto de t , por medio del teorema fundamental del cálculo y del teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{\Omega_b} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega_b} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_b} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Al utilizar el teorema de Gauss, (teo. A.1, p. 232), podemos escribir

$$\int_{\Omega_b} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \text{div } \phi(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.3)$$

La cual es la forma global o integral de la ley de conservación evolutiva. Si se supone la continuidad del integrando, dado que la región Ω_b es una subregión arbitraria de Ω se tiene la forma local o diferencial de la ley de conservación evolutiva

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \text{div } \phi(\mathbf{x}, t) - f(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.4)$$

■ **Ejemplo 2.1** El modelo de convección describe la dispersión de un contaminante en un tubo que contiene un líquido que fluye a velocidad constante. Para este modelo u

es la concentración del contaminante y la ley constitutiva para ϕ en este modelo es

$$\phi = cu, \quad c > 0,$$

es decir, el flujo ϕ es proporcional a la cantidad u . Si se sustituye ϕ en la ecuación (2.4) se obtiene la *ecuación de transporte*.

$$u_t + cu_x = f, \quad (2.5)$$

el caso más simple ocurre cuando $f \equiv 0$ en este caso, la ecuación (2.5) se llama *homogénea*. ■

En la siguiente sección resolvemos las ecuaciones lineales de primer orden, en dos variables, homogéneas.

2.3 Solución de las ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes

En esta sección consideramos la ecuación de primer orden en dos variables, homogénea con coeficientes constantes de la forma:

$$au_x + bu_y = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Debido a que podemos escribir

$$\nabla u \cdot (a, b) = au_x + bu_y = 0,$$

esto significa que el vector gradiente de u es ortogonal al vector (a, b) en cada punto (x, y) , pero sabemos también que ∇u es ortogonal a las curvas de nivel de u , luego esas curvas de nivel son las rectas

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + ta, \\ y(t) = y_0 + tb, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty, \quad (2.7)$$

donde x_0, y_0 son fijos. Aplicando la regla de la cadena para funciones de varias variables se tiene

$$0 = au_x + bu_y = x'(t)u_x(x(t), y(t)) + y'(t)u_y(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}u(x(t), y(t)).$$

Dado que $\frac{d}{dt}u(x(t),y(t)) = 0$ se sabe del cálculo diferencial que $u(x(t),y(t)) = \alpha$, donde α es una constante. Cabe aclarar que posiblemente se requiera una constante diferente para diferentes valores x_0, y_0 . Resumiendo, la función u es constante sobre cada recta paralela a (2.7). La ecuación cartesiana de la recta parametrizada (2.7) es $bx - ay = c$, donde $c = bx_0 - ay_0$ por lo que u es constante cuando $bx - ay$ es constante, es decir,

$$u(x,y) = f(bx - ay), \tag{2.8}$$

para alguna función diferenciable f . Las rectas (2.7) se conocen como *ecuaciones características de la ecuación homogénea de primer orden con coeficientes constantes* (2.6) y a la función $f(bx - ay)$ se le llama solución general de la ecuación (2.6). Al método desarrollado se le llama *método de las características*.

■ **Ejemplo 2.2** Encuentre la solución de la ecuación $2u_x + u_y = 0$, la cual satisface la condición inicial $u(0,y) = \cos y$.

Solución. Usamos directamente la fórmula (2.8) con lo cual tenemos $u(x,y) = f(x - 2y)$ donde f es una función por determinar a partir de la condición inicial $u(0,y) = \cos y$. Tenemos $u(0,y) = f(-2y) = \cos y$. Si ponemos $w = -2y$, entonces $y = -w/2$ y así $f(w) = \cos(-w/2) = \cos(w/2)$, dado que la función coseno es función par. De donde se obtiene la solución

$$u(x,y) = f(x - 2y) = \cos\left(\frac{x - 2y}{2}\right),$$

El lector debe verificar derivando directamente que la u obtenida satisface la ecuación $2u_x + u_y = 0$ y también que u satisface la condición inicial $u(0,y) = \cos y$. ■

Ejercicio 2.1 Encuentre la solución de la edp del ejemplo anterior la cual satisface la condición inicial $u(x,0) = e^{-x}$. ■

Solución. En este caso la solución es $u(x,y) = e^{-(x-2y)}$.

2.4 Ecuaciones con coeficientes no constantes

En esta sección consideramos las ecuaciones de primer orden homogéneas con coeficientes variables de la forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0. \tag{2.9}$$

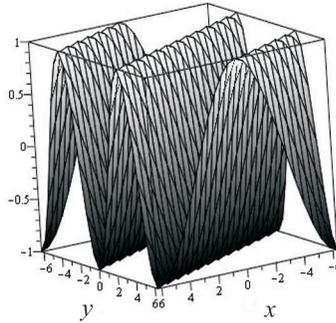


Figura 2.1: Gráfica de la solución del ejemplo 2.2

De manera análoga a la sección anterior, trataremos de usar la regla de la cadena para obtener una solución poniendo

$$\begin{cases} x'(t) = a(x(t), y(t)), \\ y'(t) = b(x(t), y(t)), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.10)$$

Integrando estas ecuaciones, si es posible, se obtienen curvas llamadas *características de la ecuación (2.9)*. En general, tales curvas no son rectas si al menos uno de los coeficientes a, b , no es constante. En caso de poder resolver el sistema (2.10) se obtiene como en el caso de coeficientes constantes $\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = 0$ y por lo tanto $u(x(t), y(t)) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. De esta forma, nuevamente la función u es constante sobre cada una de las características, salvo que esta vez las características, como ya hemos mencionado, no son rectas. Si además la curva obtenida de (2.10) satisface una relación cartesiana $G(x, y) = c$ tendremos que la solución de la ecuación (2.9) es de la forma

$$u(x, y) = f(G(x, y)),$$

donde f es una función diferenciable cualquiera.

■ **Ejemplo 2.3** Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_x - yu_y = 0, \\ u(0, y) = y^3. \end{cases} \quad (2.11)$$

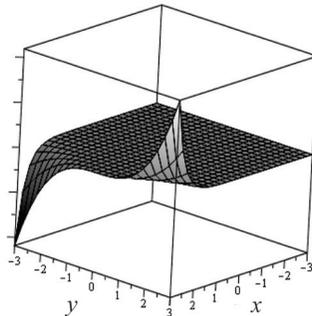


Figura 2.2: Gráfica de la solución del ejemplo 2.3

Solución. Las características de la ecuación están dadas por el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = -y, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty, \tag{2.12}$$

el cual puede ser integrado fácilmente para obtener

$$\begin{cases} x(t) = t + c_1, \\ y(t) = c_2 e^{-t}, \end{cases} \quad -\infty < t < \infty, \tag{2.13}$$

De esta forma puede definirse $G(x, y) = ye^x = c$ como las curvas características de la ecuación (2.11). Por lo tanto,

$$u(x, y) = f(ye^x),$$

donde f es una función por determinar a partir de la condición $u(0, y) = y^3$, es decir $f(y) = y^3$. Finalmente se llega a la solución del problema: $u(x, y) = (ye^x)^3 = y^3 e^{3x}$. ■

N A veces es posible encontrar directamente la relación $G(x, y) = c$ mediante la integración de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

o la integración de relación recíproca

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a(x, y)}{b(x, y)}.$$

■ **Ejemplo 2.4** Encuentre las solución del problema

$$\begin{cases} yx^3 u_x + u_y = 0, & x \neq 0 \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases} \quad (2.14)$$

Solución. En este caso la ecuación cartesiana de las características puede encontrarse directamente integrando la ecuación

$$\frac{dx}{dy} = yx^3.$$

Tenemos entonces separando variables e integrando $-x^{-2} = y^2 + c$ o bien

$$-c = \frac{1}{x^2} + y^2. \quad (2.15)$$

Por lo tanto, las soluciones de la edp en el problema (2.14) son de la forma

$$u(x, y) = f(x^{-2} + y^2), \quad (2.16)$$

donde f se debe determinar a partir de la condición $u(x, 0) = \cos x$. Claramente, para $x \neq 0$, la ecuación (2.16) y la condición dada llevan a

$$\cos x = f(x^{-2}). \quad (2.17)$$

Y al definir $w = x^{-2}$ se concluye que $f(w) = \cos(1/w^{1/2})$ y por lo tanto la solución del problema (2.14) es

$$u(x, y) = \cos((x^{-2} + y^2)^{-1/2}) \quad (2.18)$$

como puede verificar el lector. ■

2.5 Ecuación no homogénea

Ahora estudiaremos la ecuación lineal de primer orden con coeficientes no constantes y no homogénea de la forma:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y), \quad (2.19)$$

con condición inicial dada sobre una curva Γ definida en el plano x, y . Se define la condición tipo Cauchy, como la restricción de u sobre Γ . Escribiremos esta condición inicial como una curva parametrizada

$$x = x_0(s), y = y_0(s), u = u_0(s), \quad s \in [s_1, s_2]. \quad (2.20)$$

La ecuación (2.19) puede escribirse como

$$(a, b, c) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right) = 0.$$

El lector debe recordar de sus cursos de cálculo que para una superficie dada por la gráfica de $z = u(x, y)$, el vector $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right)$ representa una normal a la superficie. De esta manera el vector (a, b, c) se encuentra en el plano tangente a una superficie solución en cada punto. Por lo tanto se puede construir una curva contenida en la superficie solución al resolver el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= b(x(t), y(t)), \\ \frac{du}{dt} &= c(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si además pedimos que en $t = 0$ se tenga $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $u = u_0(s)$, la curva también pasará por la curva inicial (2.20). Las curvas solución se llaman *características* de la ecuación no homogénea. Al variar s la familia de características genera la superficie solución bajo ciertas condiciones en a, b y c , y que la curva inicial no sea característica. Si por ejemplo que a, b, c son Lipschitz continuas, el teorema de Cauchy-Picard implica que las ecuaciones (2.21) tienen solución única local. Se concluye que se puede escribir

$$x = x(s, t), y = y(s, t), u = u(s, t)$$

y además $x(s, 0) = x_0(s)$, $y(s, 0) = y_0(s)$, $u(s, 0) = u_0(s)$. El lector debe recordar que las relaciones $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = u(s, t)$ nos dan la representación paramétrica de una superficie, en este caso de la superficie solución al menos localmente. Inversamente, la superficie solución de (2.19), se genera a partir de las curvas características (2.21).

■ **Ejemplo 2.5** (Tomado de [30]) Resuelva el problema

$$\begin{aligned}u_x + u_y &= x + y, \\u(x, 0) &= x^2.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Solución. En este caso, de la edp tenemos que $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 1$, $\frac{du}{dt} = x + y$ y la condición inicial $x(s, 0) = s$, $y(s, 0) = 0$, $u(s, 0) = s^2$. Al integrar se obtiene $x = t + c_1(s)$, $y = t + c_2(s)$. De la condición inicial $t = 0$ se llega a $x = s + t$, $y = t$, $u = t^2 + st + s^2$. En este caso es posible escribir u como función de x, y para obtener

$$u(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

El lector puede comprobar que u satisface la edp y la condición inicial. ■

La existencia y unicidad de soluciones en los ejemplos mostrados hasta aquí es consecuencia del siguiente teorema el cual incluimos sin demostración.

Teorema 2.1 Considérese el problema lineal

$$\begin{cases}a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y) \\x = x_0(s), y = y_0(s), u = u_0(x(s), y(s)) = u_0(s), \quad s \in [s_1, s_2]\end{cases}\tag{2.23}$$

Supóngase que $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ son de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el cual contiene el punto $(x_0, y_0) = (x_0(s_0), y_0(s_0))$ para algún $s_0 \in [s_1, s_2]$ y supóngase que se cumple la condición

$$a(x_0, y_0) \frac{dy_0(s_0)}{ds} - b(x_0, y_0) \frac{dx_0(s_0)}{ds} \neq 0.\tag{2.24}$$

Entonces en una vecindad U de (x_0, y_0) existe una solución única del problema (2.23).

Una demostración de una versión más general del teorema 2.1 para ecuaciones llamadas cuasilineales

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

puede encontrarse en [30]. Resulta interesante que el problema cuasilineal pueda resolverse por el método de características descrito en este capítulo como se muestra en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 2.6** Considere la ecuación cuasilineal

$$(y + u)u_x + yu_y = x - y$$

Sea Γ la curva dada por $y = 1, -\infty < x < \infty, u|_{\Gamma} = 1 + x$. Encuentre la solución $u(x, y)$ que satisface la condición inicial sobre Γ .

Solución. Primero parametrizamos la curva Γ para obtener la condición inicial en una forma manejable: $x(s) = s, y(s) = 1, u(s) = 1 + s, -\infty < s < \infty$. Por otra parte, de la edp tenemos el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + u, \\ \frac{dy}{dt} &= y, \\ \frac{du}{dt} &= x - y \end{aligned} \tag{2.25}$$

La segunda ecuación en (2.25) se resuelve fácilmente para obtener $y(s, t) = c_1(s)e^t$ lo cual, con la condición sobre $\Gamma : y(s, 0) = 1$ implica $c_1(s) \equiv 1$. Las soluciones para u y x resultan un tanto laboriosas, lo cual es natural a medida que las ecuaciones se complican. Si se resta la primera ecuación de la tercera en (2.25) se tiene

$$\frac{du}{dt} - \frac{dx}{dt} = -(u - x) - 2y = -(u - x) - 2e^t.$$

La cual es una ecuación ordinaria lineal de primer orden no homogénea, en la función $u - x$. Mediante el factor integrante e^t se tiene

$$\frac{d}{dt}(e^t(u - x)) = -2e^{2t}.$$

y así

$$e^t(u - x) = -e^{2t} + c_2(s),$$

$$u - x = -y + c_2(s)y^{-1}.$$

Con la condición de frontera $x(s) = s, u(s) = 1 + s, y(s) = 1$ tenemos $1 = -1 + c_2(s)$, es decir, $c_2(s) = 2$ y por lo tanto $u = x - y + 2/y$. ■

2.6 La ecuación de Burgers

Una ecuación cuasilineal de primer orden muy importante es la ecuación de Burgers $u_t + uu_x = 0$, la cual es una ecuación en derivadas parciales *no lineal*. Si sustituimos en la ley de conservación evolutiva (2.4) $f \equiv 0$ y $\phi = u^2/2$, se obtiene la ecuación de Burgers. Más generalmente la ecuación

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

se ha usado para modelar el tráfico de automóviles en una calle muy transitada, la dinámica de ciertos gases o bien en el modelado de la esquistosomiasis (ver [30] y referencias del capítulo III). En el caso del tráfico $\nabla\phi$ representa la cantidad de automóviles que pasan por un punto dado y es función de la densidad de automóviles u . Diferentes funciones g se han encontrado experimentalmente y ejemplos sencillos han sido extensivamente estudiados, por ejemplo, $g(u) = cu(1-u)$; el flujo lineal $g(u) = cu$ y el flujo cuadrático $g(u) = u^2/2$. En general la ecuación

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

puede ser resuelta por el método de las características estudiado en este capítulo. Para esta ecuación las características están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{dt(s, \tau)}{d\tau} &= 1, \\ \frac{dx(s, \tau)}{d\tau} &= g(u(s, \tau)), \\ \frac{du(s, \tau)}{d\tau} &= 0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Así $u(s, \tau) = c_1$, $t(s, \tau) = \tau + c_2$ y $x(s, \tau) = g(c_1)\tau + c_3$. Si se dan las condiciones iniciales para $\tau = 0$: $x(s, 0) = x_0(s)$, $t(s, 0) = t_0(s)$, y $u(s, 0) = u_0(s)$. Se obtiene la solución

$$\begin{aligned}t(s, \tau) &= \tau + t_0(s), \\ x(s, \tau) &= g(u_0(s))\tau + x_0(s) \\ u(s, \tau) &= u_0(s).\end{aligned}\tag{2.27}$$

■ **Ejemplo 2.7** (Tomado de [21]) Resuelva el problema de valor inicial

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.28)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Solución. Para este problema la condición inicial (2.29) puede ser representada paramétricamente como

$$t(s, 0) = 0, x(s, 0) = s, u(s, 0) = u(x(s, 0), 0).$$

Para las características tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dt(s, \tau)}{d\tau} &= 1, \\ \frac{dx(s, \tau)}{d\tau} &= u(s, \tau), \\ \frac{du(s, \tau)}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Al integrar se obtiene

$$\begin{aligned} t(s, \tau) &= \tau, \\ u(s, \tau) &= u(s, 0) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \\ x(s, \tau) &= s + \tau \cdot \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Las características pueden construirse ahora partiendo de las condiciones iniciales por ejemplo la característica que pasa por el punto $(-2, 0)$ es $x = -2$ y la característica que pasa por $(2, 0)$ es $x = 2 + t$. Entonces tenemos $u(-2, t) = 0$ y $u(2 + t, t) = 1$, para $t > 0$. De esta manera se ha obtenido la solución del problema en forma paramétrica. ■

De la figura 2.3 el lector puede darse cuenta que no hay solución dada por este método en la cuña $0 < x < t$. Esta situación inquietante puede resolverse adentrándose en el estudio de las ondas de choque (shocks) y puede consultarse por ejemplo en el artículo clásico de Lax [21]. El siguiente ejemplo tomado del mismo artículo de Lax da la pauta para el estudio de soluciones generalizadas, las cuales pueden ser discontinuas, pero cuyo estudio va más allá de los objetivos de este libro.

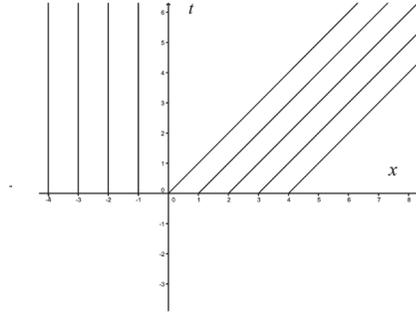


Figura 2.3: Gráfica de las características del ejemplo 2.7

■ **Ejemplo 2.8 — Choques en la ecuación de Burgers** . (Ejemplo tomado de [21].) Estudiamos la misma ecuación del ejemplo anterior, pero con condición inicial diferente

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.31)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x. \end{cases} \quad (2.32)$$

Solución. Para este caso denotamos los puntos iniciales con $(x_0, 0)$ y separamos los casos en los que $x_0 \leq 0$, $0 < x_0 < 1$ y $1 \leq x_0$. Al integrar el sistema (2.30) y mediante la condición inicial se obtiene

$$\begin{cases} x_0 < 0: & x = x_0 + t \\ 0 < x_0 < 1: & x = x_0 + (1 - x_0)t \\ 1 \leq x_0: & x = x_0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Se tienen tres clases de rectas características en el plano (x, t) , a saber: $t = x - x_0$, $t = (x - x_0)/(1 - x_0)$ y las rectas verticales $x = x_0$. Sobre estas rectas, la solución u está dada

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = x - x_0, x_0 < 0 \text{ y } t = \frac{x - x_0}{1 - x_0}, 0 < x_0 < 1 \\ 0 \text{ si } x = x_0, 1 \leq x_0. \end{cases} \quad (2.34)$$

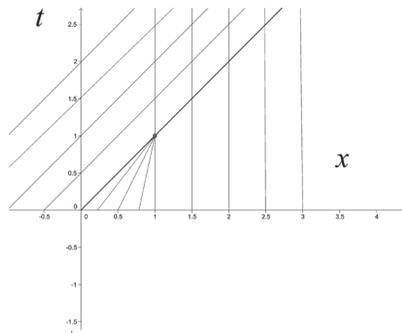


Figura 2.4: Gráfica de las características del ejemplo 2.8

Con lo cual queda terminado el ejemplo. ■

En la figura 2.4, notamos que la solución es univaluada para $0 \leq t < 1$ y bivaluada para $t > 1$, y, peor aún, la solución u es discontinua, es decir, no puede tener derivadas de orden uno en todo el semiplano $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Surgen ahora varias preguntas esenciales:

- ¿Si la función u no es continua, se puede generalizar el concepto de solución de una edp para que tenga sentido la solución encontrada?
- ¿Para $t \geq 1$, cuál de las soluciones $u = 0$ y $u = 1$ escoger?
- ¿Cuál es la curva apropiada para que ocurra la discontinuidad de la solución?
- En la solución del ejemplo 2.7 ¿es posible encontrar una solución para cubrir el hueco en la cuña (ver figura 2.3) $0 < x < t$?

La respuesta a la primera pregunta es que efectivamente el concepto de solución puede generalizarse para dar sentido a las soluciones encontradas en el segundo ejemplo. Para ello se introduce el concepto de derivada débil la cual generaliza el concepto clásico de derivada. Sobre este tema puede consultarse por ejemplo, [25]. Para responder a las otras preguntas debe hacerse un análisis heurístico de las leyes de conservación, lo que da pauta al concepto de onda de choque y solución de abanico, una introducción a estos conceptos se encuentra en el ya mencionado artículo de Lax [21]. Para finalizar nuestro análisis agregamos solamente que puede demostrarse que la solución del

ejemplo 2.8, está dada para $t \geq 1$ por

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < (1+t)2, \\ 0, & \text{si } (1+t)/2 < x. \end{cases} \quad (2.35)$$

Para entrever como es que se obtiene esta solución notamos que la discontinuidad comienza en el punto $(1, 1)$ y puede demostrarse que se propaga a velocidad $1/2$, se concluye en [21] que la discontinuidad se propaga por la línea $t = 2x - 1$, $t \geq 1$. Para el ejemplo 2.7 puede argumentarse que además de la solución encontrada, se tiene $u(x, t) = x/t$, para $0 < x < t$. El lector puede verificar derivando directamente que para $t > 0$ efectivamente $u = x/t$ es solución de la ecuación $u_t + uu_x = 0$.

■ **Ejemplo 2.9** Encuentre la solución del problema

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = -x. \end{cases} \quad (2.36)$$

Solución. Al integrar el sistema

$$\begin{cases} \frac{dt(s, \tau)}{d\tau} = 1, \\ \frac{dx(s, \tau)}{d\tau} = u(s, \tau), \\ \frac{du(s, \tau)}{d\tau} = 0, \end{cases}$$

se obtiene

$$\begin{cases} t = \tau, \\ u(s, \tau) = u(s, 0) = -s, \\ x(s, \tau) = -s\tau + s. \end{cases} \quad (2.37)$$

Esta superficie paramétrica puede graficarse con cualesquiera parámetros $s \in \mathbb{R}$, $\tau = t \in [0, \infty)$ y su gráfica se encuentra en la figura 2.5, donde puede observarse que la función $u = u(s, \tau)$ es multivaluada. En este ejemplo simple puede incluso resolverse en términos de las variables originales x, t ya que $t = \tau$ y $x = -s\tau + s$ implica que $s = \frac{x}{1-t}$ y por lo tanto $u(x, t) = -\frac{x}{1-t}$, la cual no está definida para $t = 1$, obviamente, donde se desarrolla un choque. Por otra parte en cada punto $x = x_0$ del eje de las x la solución

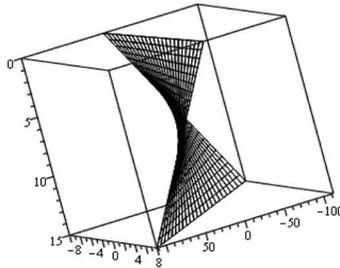


Figura 2.5: Gráfica de la superficie del ejemplo 2.9

u es constante sobre las rectas $x + x_0 t = x_0$ y su valor es $u = -x_0$. De la ecuación de las rectas características notamos que

$$t = \frac{x_0 - x}{x_0} = 1 - \frac{x}{x_0}$$

es decir todas las características pasan por el punto $(0, 1)$ en tal punto u es una recta vertical y por lo tanto no es ni siquiera función. ■

■ **Ejemplo 2.10** Resuelva la ecuación de Burgers con condición inicial $u(x, 0) = e^{-x^2}$.
Solución. Como en el ejemplo anterior, al integrar las características se obtiene

$$\begin{cases} t = \tau, \\ u(s, \tau) = u(s, 0) = e^{-s^2}, \\ x(s, \tau) = e^{-s^2} \tau + s, \end{cases} \quad (2.38)$$

pero en este caso no es posible encontrar una expresión explícita para s en términos de x y de t . De cualquier manera es posible graficar la superficie definida paramétricamente por las ecuaciones (2.38), la gráfica se muestra en la figura 2.6. Puede observarse que la solución parece como el pliegue de una sábana que se inclina a la derecha, tal pliegue

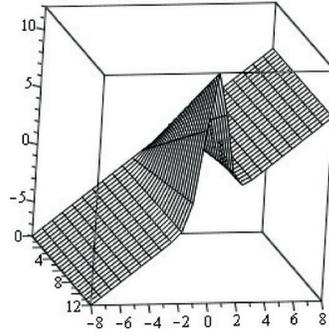


Figura 2.6: Gráfica de la superficie del ejemplo 2.10

implica que u es multivaluada y por lo tanto desarrollará un choque a partir de cierto tiempo t_0 .. ■

- Ⓝ Suele pensarse que las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden siempre tienen solución, esto es cierto para ecuaciones lineales de la forma $L[u] = F(u)$ donde L es un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes en \mathbb{C} y F es una función analítica en la variable u , este hecho es una consecuencia del teorema de Cauchy-Kowalevski. Sin embargo, Lewey construyó un ejemplo de una ecuación de la forma $L[u] = F(x, y, z)$ con $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, que *no tiene solución* en \mathbb{R}^3 . Dicho ejemplo muestra la extrema complejidad que se puede presentar en las *edp*, aún en las de primer orden, a diferencia de la simplicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El teorema de Cauchy-Kowalevski, así como el ejemplo de Lewey, pueden consultarse en el libro de John [16].

2.7 Problemas y ejercicios del Capítulo 2

1. Resuelva los siguientes problemas

a) $u_y - u_x = 0, u(x, 0) = e^{-3x^2}$.

b) $u_x + u_y = 0, u(x, 0) = \cos 3x$.

Solución: a), $u(x, y) = e^{-3(x+y)^2}$; b), $u(x, y) = \cos 3(x - y)$.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de coeficientes no constantes (problemas tomados de [27]).

a) $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$

b) $\sqrt{1 - x^2}u - x + u_y = 0, u(0, y) = y$.

Soluciones: a), $u(x, y) = f(y - \arctan x)$; b), $u(x, y) = y - \arcsen x$.

3. Resuelva los siguientes problemas (tomados de [30]):

a) $u_x + u_y = u, u = \cos t$ sobre la curva $x = t, y = 0$.

b) $x^2u_x + y^2u_y = u^2, u = 1$ sobre la curva $y = 2x$.

c) $yu_x - xu_y = 2xyu, u = t^2$ sobre la curva $x = t, y = t, t > 0$.

Soluciones: a), $u = e^y \cos(x - y)$; b), $u = xy/(xy + 2x - y)$; c), $u = 1/2(x^2 + y^2)e^{(x^2 - y^2)/2}$.

4. La ecuación

$$u_t + cu_x + \lambda u = f(x, t)$$

puede resolverse introduciendo las variables $\xi = x - ct, \tau = t$. Use la regla de la cadena para demostrar que

$$u_\tau + \lambda u = f(\xi + c\tau, \tau)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en la variable τ y donde ξ es un parámetro.

5. (Tomado de [9]). Resuelva la ecuación $u_t + u_x - u = t$ utilizando la técnica del ejercicio anterior.

Solución. $u(x, t) = -(1 + t) + g(x - t)e^t$, donde g es una función arbitraria.

6. Muestre que la solución general de la ecuación de transporte con decaimiento

$$u_t + cu_x = -\lambda u$$

es $u(x, t) = e^{-\lambda t} f(x - ct)$ mediante la introducción de las coordenadas $\xi = x - ct, \tau = t$.

7. (Tomado de [30]) Encuentre la solución de la ecuación $u_t + uu_x = 0$ que satisfaga la condición inicial $u(x, 0) = -x$.

Solución. $u = -x(1 - t), t < 1, u = -x_0$.

8. Resuelva la ecuación $u_t + 3u_x = x^2t + 1$ con la condición inicial $u(x, 0) = x + 2$.

Solución. $x - 3t + 2 + t + (x^2t^2)/2 - xt^3 + 3/4t^4$.

9. La ley de conservación $[F(u)]_t + u_x = 0$ se puede expresar como $f(u)u_t + u_x = 0$ donde $f(u) = F'(u)$. Muestre que el problema

$$f(u)u_t + u_x = 0$$

$$u(t, 0) = u_0(x),$$

está definido implícitamente por $u = u_0(x - f(u)x)$.

10. Sea $u = f(x/t)$ solución no constante de $u_t + g(u)u_x = 0$. Muestre que la función f debe ser la inversa de g .

Deducción de la ecuación de calor

Fenómenos de difusión

Ecuación de calor en una dimensión

Condiciones de frontera para la ecuación de calor

Descripción intuitiva de la ecuación de calor

Probabilidad y la ecuación de difusión

El principio del máximo para la ecuación de calor

Unicidad de soluciones de la ecuación de calor

Problemas y ejercicios del Capítulo 3

3 Ecuación de calor

3.1 Deducción de la ecuación de calor

La ecuación de calor modela una gran variedad de fenómenos. Modela no sólo el proceso físico de transmisión de calor por conducción, sino también el fenómeno químico de difusión, por ejemplo, la difusión de un contaminante que reacciona con un medio líquido en movimiento en el cual se halla inmerso. Además, la ecuación de calor sirve también para modelar el movimiento browniano [28, Ecuación de Einstein-Kolmogorov, p. 296]. Sin embargo, a lo largo de este texto se llamará *ecuación de calor* a la ecuación asociada con todos los procesos mencionados.

Como se verá, la ecuación de calor expresa el equilibrio entre ciertas cantidades, equilibrio sustentado en el principio de conservación de energía térmica y en la ley de Fourier.

La temperatura u de un cuerpo Ω el cual ocupa una región de \mathbb{R}^3 depende de cada punto $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$ y del tiempo t , es decir, u es una función $u = u(\mathbf{x}, t)$. La forma explícita de esta función depende entre otras cosas de la forma del cuerpo, las características térmicas del material, la distribución inicial de la temperatura y las condiciones de frontera.

Para describir el flujo de calor en Ω se requiere de una función $\phi : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, es decir, se requiere de un campo vectorial (función de densidad de flujo) $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$. La ley de Fourier de conducción de calor establece que en un medio

isotrópico¹ el calor fluye en la dirección en la cual la temperatura del cuerpo decrece más rápidamente y la cantidad de calor que fluye en tal dirección es proporcional al gradiente de temperatura. En forma matemática, la ley de Fourier se expresa como

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -K(u_x, u_y, u_z) = -K\nabla u, \quad (3.1)$$

donde $K > 0$, es llamada conductividad térmica y, con el fin de simplificar, se supondrá constante. Sea $\partial\Omega$ la frontera de la región Ω la cual se considera una superficie suave, orientable con normal exterior \mathbf{n} . Se recuerda del curso de cálculo que el flujo de ϕ a través de $\partial\Omega$ está dado por la integral de superficie

$$\iint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS,$$

por lo que el total del flujo de ϕ a través de $\partial\Omega$ en el intervalo $[t_1, t_2]$, está dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\phi) dV,$$

donde la última igualdad se cumple por el teorema de la divergencia de Gauss (teorema A.1, p. 232). La densidad de energía por unidad de volumen en el tiempo t en la región Ω está dada por $c\rho u$ donde c denota el calor específico del cuerpo Ω ; ρ , la densidad de masa (ρ, c se suponen constantes) y $u = u(\mathbf{x}, t)$ es la temperatura en \mathbf{x} en el tiempo t . Por lo que la energía total en Ω en el intervalo $[t_1, t_2]$ está dada por

$$\iiint_{\Omega} c\rho u(\mathbf{x}, t_2) dV - \iiint_{\Omega} c\rho u(\mathbf{x}, t_1) dV = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt.$$

Donde para que se cumpla la igualdad se ha supuesto que u tiene derivada parcial continua con respecto a t en Ω y se ha hecho uso del teorema fundamental del cálculo para escribir

$$u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) dt$$

y, finalmente, se ha hecho uso del teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración. Se considera además una función escalar $f = f(\mathbf{x}, t)$ que proporciona la

¹“Isotropía” significa que ciertas magnitudes al medirse dan resultados idénticos independientemente de la dirección escogida

densidad de energía por unidad de volumen producida (o disminuida) por una fuente (o por un pozo) por lo que el total de energía producida (o reducida) por una fuente en Ω en el intervalo $[t_1, t_2]$ es

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) dV dt.$$

El principio de conservación de la energía establece que la energía total en Ω en el intervalo $[t_1, t_2]$ es igual al flujo de calor a través de $\partial\Omega$, mas el total de energía producida por una fuente en el mismo intervalo de tiempo, lo cual se traduce en la ecuación

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt = K \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} f dV dt,$$

o bien

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\Omega} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - K \operatorname{div}(\nabla u) - f \right) = 0. \quad (3.2)$$

Esta ecuación se denomina ecuación de calor en la forma integral o forma global de la ecuación de calor. Si suponemos continuidad en el integrando sobre la región Ω y observamos que la integral se cumple sobre cualquier subregión $\Omega_B \subset \Omega$ y sobre cualquier subintervalo $[t_1, t_2]$ contenido en $[0, T]$, obtenemos la ecuación de calor en su forma diferencial o local

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \operatorname{div}(\nabla u(\mathbf{x}, t)) + F(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

donde $\alpha^2 = \frac{K}{c\rho}$ es llamada difusividad térmica y $F = f/(c\rho)$. Por último, recordando que el laplaciano de u en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \operatorname{div}(\nabla u),$$

se tiene la forma equivalente de la ecuación de calor:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t).} \quad (3.4)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.4) son casos particulares de un esquema general discutido en el Capítulo 2, el cual abarca una gran cantidad de fenómenos, físicos, químicos, etcétera, los cuales evolucionan con el transcurso del tiempo. En la siguiente sección analizaremos cómo usar los esquemas de conservación estudiados en las ecuaciones de primer orden, para modelar fenómenos de difusión.

3.1.1 Fenómenos de difusión

Conocida la ecuación (2.4) se puede deducir la ecuación de difusión. La ley constitutiva que determina el proceso de difusión es la segunda ley de difusión de Fick y es el equivalente a la ley de Fourier en el proceso de conducción de calor. Análogamente a la ley de Fourier, la ley de difusión de Fick es una ley establecida experimentalmente y describe el hecho de que las moléculas tienden a moverse de lugares con mayor concentración a lugares de menor concentración. En términos matemáticos la ley de Fick establece que el campo vectorial de flujo está dado por:

$$\phi = -k\nabla u,$$

la constante $k > 0$ es llamada coeficiente de difusión. Una vez que se establece que el proceso de difusión, por ejemplo de un gas, obedece el esquema general de las leyes de conservación evolutivas, tendremos que el proceso de difusión es modelado por la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) - k \operatorname{div} (\nabla u(\mathbf{x}, t)) - f(\mathbf{x}, t) = 0$$

o bien,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = k\Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t)$$

la cual tiene la misma forma que la ecuación de calor.

3.2 Ecuación de calor en una dimensión

Se considera un alambre de longitud l el cual se encuentra aislado lateralmente excepto en los extremos. Se coloca el origen de coordenadas en el extremo izquierdo del alambre y el resto del alambre en la dirección positiva del eje x . Para simplificar se

supone que la temperatura es constante en cada sección transversal (ver la Figura 3.1) del alambre, así la temperatura sólo depende de x y no de ninguna otra variable espacial.

Sea $u = u(x, t)$ la temperatura en el punto x al instante t . Entonces la ecuación de calor (3.4) se escribe simplemente

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + F(x, t). \quad (3.5)$$

En este caso, la función F se interpreta como una fuente de calor interna, por ejemplo, una corriente eléctrica (o una reacción química en caso de la ecuación de difusión). Si no existen fuentes de calor internas, entonces $F \equiv 0$ y tendremos simplemente

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}. \quad (3.6)$$

Supóngase que en el instante $t = 0$, se conoce la temperatura en cada punto de la barra, es decir, $u(x, 0) = g(x)$, donde g es una función conocida ², a esta condición se le conoce como temperatura inicial y más generalmente como *condición inicial (ci)*.

Supóngase además que se tiene algún tipo de control de la temperatura en los extremos de la barra, por ejemplo, supóngase que con un termostato se regula la temperatura en los puntos $x = 0$, $x = l$ y que dichas temperaturas son conocidas, concretamente $u(0, t) = h_1(t)$, $u(l, t) = h_2(t)$, $t > 0$, con h_1, h_2 funciones dadas, a estas condiciones se les llama *condiciones de frontera (cf)*. Así para encontrar la temperatura de un cuerpo hay que determinar la función incógnita $u(x, t)$ para $t > 0$ que satisface la ecuación (3.5) (o bien (3.6)) y las condiciones inicial y de frontera. Se desea entonces resolver el siguiente problema (PC):

$$(PC) \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + F, & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ (ci) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \end{array} \right. \\ (cf) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = h_1(t) \\ u(l, t) = h_2(t), & t > 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

3.2.1 Condiciones de frontera para la ecuación de calor

El problema de calor descrito en la sección anterior contiene algunas condiciones de frontera (*cf*) que pueden ocurrir, pero existen otras condiciones que surgen en diferentes situaciones físicas las cuales se describen a continuación.

²Generalmente, por lo menos g es continua a trozos.

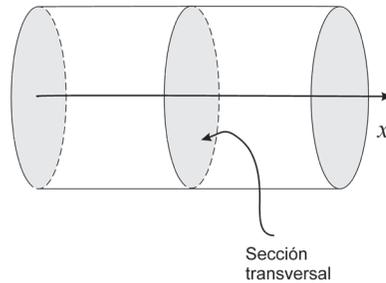


Figura 3.1: *Sección transversal en un alambre aislado.*

1. En uno de los extremos se conoce el valor de la temperatura en cada instante t , por ejemplo

$$u(0, t) = h_1(t),$$

donde h_1 es una función dada. A este tipo de condición se le conoce como *condición de frontera de tipo Dirichlet*.

2. En uno de los extremos se da el valor de la derivada normal de u , por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = h_2(t),$$

donde h_2 es una función dada. A este tipo de condiciones se les conoce como *condiciones de frontera de tipo Neumann*.

3. En uno de los extremos está dada una relación entre u y su derivada, por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -ku(l, t) + f_1(t),$$

esta situación corresponde a un intercambio térmico entre un cuerpo y el medio ambiente cuya temperatura $f_1(t)$ es conocida en cada tiempo t . La expresión matemática de esta condición de frontera corresponde a la *ley de Newton de intercambio de temperatura*. A este tipo de condiciones se les conoce como *condiciones de frontera de tipo Robin o Newton*.

Obsérvese que las condiciones de frontera anteriores son un caso particular de las siguientes condiciones, las cuales llamaremos *condiciones de frontera generales*

$$a_{11}u(0,t) + a_{12}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h_1(t)$$

$$a_{21}u(l,t) + a_{22}\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = h_2(t).$$

3.3 Descripción intuitiva de la ecuación de calor en una dimensión

Para dar una descripción de la ecuación de calor en una dimensión en términos intuitivos, se necesita primero recordar algunos conceptos del cálculo diferencial. Uno de estos conceptos importantes es el de convexidad. En el Apéndice A se encuentra la discusión completa de los siguientes hechos:

- Una función dos veces derivable f es cóncava hacia arriba en un intervalo (a, b) si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b) . En este caso se cumple para cualquiera $x, y \in (a, b)$ que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

es decir, si $f'' > 0$ entonces f evaluada en el punto medio de x y y , es menor que el promedio de f en los puntos x, y .

- Si $f'' < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en (a, b) y

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

es decir, f evaluada en el punto medio de x y y , es mayor que el promedio de f en los puntos x, y .

Otro concepto que necesitamos, es la interpretación de la derivada como razón de cambio. En el caso en el que una función derivable, $f = f(t)$, dependa del tiempo, si su derivada es positiva, es decir, si $\frac{df(t)}{dt} > 0$ en un intervalo, la función crece conforme el tiempo avanza y si $\frac{df(t)}{dt} < 0$, en dicho intervalo la función decrece.

Con la interpretación geométrica de la segunda derivada y la interpretación de la primera derivada como razón de cambio se puede dar una idea intuitiva del porqué la

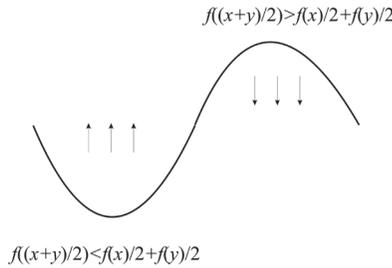


Figura 3.2: *Concavidad*

ecuación $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ modela el proceso de conducción de calor para el caso en que $u = u(x, t)$ es la temperatura de una barra, por ejemplo. Dada la ecuación de calor sin fuentes internas

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.7}$$

estudiemos el cambio de temperatura en un punto fijo x_o para una función que satisface la ecuación de calor. Supongamos que $\frac{\partial^2 u(x_o, t)}{\partial x^2} > 0$ y que estas segundas derivadas son continuas. Por una parte, esto quiere decir que en una vecindad de x_o el perfil de temperatura es cóncavo hacia arriba, es decir, la temperatura en tal punto es menor que el promedio de la temperatura de sus vecinos. Por otra parte la ecuación (3.7) indica que $\frac{\partial u(x_o, t)}{\partial t} > 0$, de esta forma $u(x_o, t)$ es una función creciente, lo cual quiere decir que la temperatura aumentará en el punto x_o , a medida que t crece. Resumiendo, si en un punto x_o la temperatura es menor que el promedio de sus vecinos en una vecindad de x_o entonces la temperatura aumentará mientras $\frac{\partial^2 u(x_o, t)}{\partial x^2} > 0$. Si hacemos un análisis similar para el caso en el que $\frac{\partial^2 u(x_o, t)}{\partial x^2} < 0$, observamos que la ecuación de calor simplemente modela con precisión el fenómeno familiar a todos de que el calor fluye de los lugares más calientes a lo más fríos.

3.3.1 Probabilidad y la ecuación de difusión

Consideramos la recta real. Supongamos que en el tiempo t , algunas partículas ocupan los puntos $x = 0, \pm k, \pm 2k, \dots$ para algún $k > 0$. Se define la concentración $c(x, t)$ como el valor esperado de partículas en el sitio x en el tiempo t . En otro tiempo digamos $t + h$ una partícula puede moverse hacia la derecha o hacia la izquierda con probabilidad $p \in (0, 1/2]$ o mantenerse en su posición con probabilidad $1 - 2p$. El nuevo valor esperado en x es

$$c(x, t + h) = pc(x - k, t) + (1 - 2p)c(x, t) + pc(x + k, t),$$

De esta forma

$$c(x, t + h) - c(x, t) = p(c(x - k, t) - 2c(x, t) + c(x + k, t))$$

así obtenemos,

$$\frac{c(x, t + h) - c(x, t)}{h} = D \frac{c(x - k, t) - 2c(x, t) + c(x + k, t)}{k^2},$$

donde $D = k^2 p/h$.

En la sección 8.1 se muestra que tomando k suficientemente pequeña, el lado derecho de la fórmula anterior nos da una aproximación de la segunda derivada, por lo que al tomar el límite cuando $(h, k) \rightarrow \mathbf{0}$ se tiene la ecuación de difusión

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

En [23], capítulo 6, de donde fue tomado el ejemplo anterior puede consultarse una deducción de la ecuación de Black-Scholes para los derivados financieros, la cual también es una ecuación de difusión.

3.3.2 El principio del máximo para la ecuación de calor

La descripción intuitiva de la ecuación de calor muestra que es imposible que el perfil de temperatura u pueda alcanzar un valor máximo o un valor mínimo en el interior de su dominio para $t > 0$. Esto sugiere el siguiente teorema.

Teorema 3.1 — Principio del máximo. Sea $u = u(x, t)$, continua en la región $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T_0$ y solución de la ecuación

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

en la región $0 < x < l$, $0 < t \leq T_o$ entonces la función u alcanza sus valores máximo y mínimo ya sea en $t = 0$, o bien en los puntos $x = 0$ o $x = l$ si $0 < t \leq T_o$.

Demostración: Como u es continua en $[0, l] \times [0, T_o]$, el cual es un conjunto compacto, entonces u alcanza su valor máximo y mínimo en tal conjunto. Se quiere demostrar que u no alcanza los valores máximo ni mínimo en el conjunto $0 < x < l$, $0 < t \leq T_o$. Por reducción al absurdo, supóngase que u alcanza un valor máximo en un punto $(x_1, t_1) \in (0, l) \times (0, T_o]$. Definimos $v(x, t) = u(x, t) + k(t_1 - t)$ donde $k > 0$ es un número cualquiera.

Tenemos, $v(x_1, t_1) = u(x_1, t_1)$. Dado que v es continua en $[0, l] \times [0, T_o]$, la función v alcanza su valor máximo en un punto (x_2, t_2) el cual suponemos pertenece al conjunto $0 < x < l$, $0 < t \leq T_o$. Tenemos dos casos: a) $0 < x_2 < l$, $0 < t_2 < T_o$, es decir, (x_2, t_2) es un punto interior, o b) $0 < x_2 < l$, $t_2 = T_o$.

a) Si (x_2, t_2) es un punto interior se tiene

$$u_{xx}(x_2, t_2) = v_{xx}(x_2, t_2) \leq 0, \tag{3.8}$$

$$u_t(x_2, t_2) = v_t(x_2, t_2) + k \geq k > 0. \tag{3.9}$$

La desigualdad en (3.8) se cumple dado que $v(x_2, t_2)$ es un máximo. La desigualdad (3.9) se cumple dado que en un máximo el gradiente de v se anula si (x_2, t_2) es un punto interior de $0 < x < l$, $0 < t < T_o$, así por la definición de v tenemos $0 = u_t(x_2, t_2) - k$ de donde se sigue (3.9).

b) Para $t_2 = T_o$, se tiene $v_t(x_2, T_o) \geq 0$ por lo que también se cumple (3.9).

Por lo tanto en cualquiera de los casos a) o b) se cumple que

$$u_t(x_2, t_2) - \alpha^2 u_{xx}(x_2, t_2) = v_t(x_2, t_2) + k - \alpha^2 v_{xx}(x_2, t_2) \geq k > 0,$$

es decir, la ecuación $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ no se cumple en (x_2, t_2) , lo cual es una contradicción. Por lo tanto el máximo de u se alcanza en la frontera. □

3.3.3 Unicidad de soluciones de la ecuación de calor

Establecido el principio del máximo se puede demostrar la unicidad de soluciones para algunos problemas asociados a la ecuación de calor como, por ejemplo, en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 — Unicidad de soluciones. Suponga que u y v son soluciones del problema

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T_o$$

y que u, v son continuas en $[0, l] \times [0, T_0]$. Suponga que u, v además satisfacen las condiciones de frontera $u(0, t) = v(0, t) = g_1(t)$, $u(l, t) = v(l, t) = g_2(t)$, $0 \leq t \leq T_0$ y la condición inicial $u(x, 0) = v(x, 0) = h(x)$, $0 \leq x \leq l$. Entonces $u \equiv v$.

Demostración: Sea $w = u - v$. Entonces w es continua en $[0, l] \times [0, T_0]$ y es solución del problema

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T_0$$

con condiciones de frontera e inicial nulas, es decir, $w(0, t) = 0, w(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T_0$, $w(x, 0) = 0$, para $0 \leq x \leq l$. Entonces por el principio del máximo $w \equiv 0$. \square

- N** El teorema de unicidad no es solamente un resultado teórico sin mayores consecuencias, se usa extensamente, por ejemplo, en la aplicación del principio de Duhamel (ver el ejemplo 9.7) donde se obtienen, por una parte una solución por el método de series de Fourier y otra más, por el método de la transformada de Laplace. La igualdad nada obvia de ambas soluciones es consecuencia del teorema 3.2.

3.4 Problemas y ejercicios del Capítulo 3

1. (Tomado de [23]). Muestre que si $f(t)$ es infinitamente diferenciable,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{d^n f}{dt^n}$$

satisface la ecuación de calor. Deduzca que existen soluciones no idénticamente cero de la ecuación de calor que satisfacen $u(x, 0) = 0$ para toda x .

2. Sea $f(x_1, \dots, x_n)$ una función continua definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y suponga que para cada subregión $\Omega_B \subset \Omega$, se tiene

$$\int \dots \int_{\Omega_B} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0.$$

Demuestre que f debe ser idénticamente cero en Ω . *Sugerencia:* suponga $f(x_o) > 0$ en algún punto $x_o \in \Omega$ y use la continuidad de f .

3. En el tiempo $t = 0$, la temperatura $u(x, 0)$ de un alambre de cobre delgado con constante $\alpha^2 = 1,14$ y de dos unidades de longitud es $g(x) = x + x^3$, $0 \leq x \leq 2$. Si los extremos del alambre se mantienen a 0°C . Plantee el problema de calor asociado con la temperatura de la barra en todo tiempo $t \geq 0$.
4. Para una lámina metálica circular conviene escribir la ecuación de calor en coordenadas polares. Mediante el cambio de variables apropiado demuestre que la ecuación de calor puede escribirse como

$$u_t = \alpha^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right).$$

5. Dada la ecuación diferencial $u_t = u_{xx} + \text{sen}(\pi x)$ para $0 < x < 1$ $t > 0$ y con condición inicial $u(x, 0) = 0$ para $0 < x < 1$, describa lo que ocurre en cada tiempo $t \geq 0$ dadas las condiciones de frontera siguientes:
 - a) $u(0, t) = u(1, t) = 0$
 - b) $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$
6. Muestre que la ecuación de calor retrógrada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con las condiciones de frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$ y con condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ no está bien condicionada, es decir, muestre que si se perturban

las condiciones por una pequeña cantidad, por ejemplo $f(x)$ se reemplaza por $f(x) + 1/n \operatorname{sen}(n\pi x/l)$ para n grande, entonces la solución $u(x, t)$ cambia en una gran magnitud.

7. Derive bajo el signo de integral para verificar que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-(x-y)^2/4t} dy$$

satisface la ecuación $u_t = u_{xx}$.

8. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea

$$u_m = (x, t) = \sum_{n=1}^m c_n e^{-(n^2\pi^2 t)} \operatorname{sen} n\pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

muestre que u_m satisface la ecuación de calor con $\alpha = 1$, $0 < x < 1$, $t > 0$, con condiciones de frontera $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $t > 0$, y para cualesquiera constantes c_n .

9. Considere un alambre metálico delgado cuya temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación de calor

$$u_t = 3u_{xx}$$

con condiciones de frontera idénticamente cero y $u(x, 0) = f(x)$, para $0 \leq x \leq 1$,

- a) ¿Cuál es la energía total en la barra como función del tiempo?
 b) ¿Cuál es el flujo de energía fuera del alambre en $x = 0$?

10. Sea $u(x, t)$ solución positiva de la ecuación de calor

$$u_t = u_{xx}$$

para $t > 0$. Compruebe que $\mu = -2u_x/u$ satisface la ecuación de Burgers

$$\mu_t + \mu\mu_x = \mu_{xx}.$$

11. ¿A que se reduce la ecuación de calor en coordenadas polares si u sólo depende de r y t ?

Descripción intuitiva del laplaciano

Principio del máximo para la ecuación de Laplace

Invariabilidad del operador de Laplace

El laplaciano en coordenadas polares y esféricas

Problemas y ejercicios del Capítulo 4

4 La ecuación de Laplace

4.1 Descripción intuitiva del laplaciano

Sea $\phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ un campo vectorial con primeras derivadas continuas el cual representa la densidad de flujo por unidad de volumen de cierta sustancia. Sea $P_o = (x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)})$ un punto en la sustancia y B_ε una bola con centro en P_o y radio ε . Dada la continuidad de $\text{div } \phi$, al aplicar el teorema de la divergencia de Gauss¹ y el teorema del valor medio para las integrales de volumen se tiene que

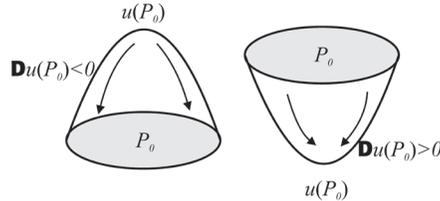
$$\text{div } \phi(P_o) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon)} \int_{\partial B_\varepsilon} \phi \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\text{Vol}(B_\varepsilon)$ es el volumen de la bola con centro en P_o y radio ε . Supongamos que $\text{div } \phi(P_o) > 0$ entonces existe una bola B_ε para ε suficientemente pequeño con $\int_{\partial B_\varepsilon} \phi \cdot d\mathbf{S} > 0$. Por lo tanto, dado que la integral de superficie representa el flujo de ϕ a través de ∂B_ε , el flujo neto promedio cerca de P_o es hacia afuera de la frontera de B_ε en tal caso al punto P_o se le conoce como *fuentes*, y si $\text{div } \phi(\mathbf{P}_o) < 0$, el flujo neto es hacia adentro de la frontera de B_ε y en tal caso a P_o se le conoce como *sumidero*.

Considérese el caso en el que $\phi = -\nabla u$ entonces $\text{div } (-\nabla u) = -\Delta u$. Si $\Delta u(P_o) > 0$, entonces $\text{div } \phi(\mathbf{P}_o) < 0$, de esta forma, P_o es un punto sumidero. De esta manera, la

¹Ver Apéndice A: Hechos básicos del Cálculo

Fuente: $u(P_o)$ mayor que el promedio de sus vecinos



Sumidero: $u(P_o)$ menor que el promedio de sus vecinos

Figura 4.1: Interpretación de Δu .

temperatura en P_o (el cual es el centro de la bola) debe ser menor que el promedio de sus vecinos. Si $\Delta u(P_o) < 0$, entonces $\text{div } \phi(\mathbf{P}_o) > 0$, y el punto P_o es una fuente y por lo tanto $u(P_o)$ es mayor que el promedio de sus vecinos. Finalmente, si $\Delta u(P_o) = 0$, no hay flujo y u es igual al promedio de sus vecinos en una vecindad de P_o . Resumiendo:

- Si $\Delta u(P_o) > 0$, $u(P_o)$ es menor que el promedio de sus vecinos en una bola B_ϵ con centro en P_o y radio suficientemente pequeño ϵ .
- Si $\Delta u(P_o) < 0$, $u(P_o)$ es mayor que el promedio de sus vecinos en una bola B_ϵ con centro en P_o y radio suficientemente pequeño ϵ .
- Si $\Delta u(P_o) = 0$, $u(P_o)$ es igual al promedio de sus vecinos en una bola B_ϵ con centro en P_o y radio suficientemente pequeño ϵ .

Una buena ilustración de las consideraciones anteriores resulta al tomar el caso de $u = u(x, y)$ véase la figura 4.1.

La descripción de esta sección ilustra la importancia del laplaciano en la modelación matemática ya que esta asociado con los procesos en los que ocurre una difusión, es decir el paso de una mayor concentración a una menor concentración de una sustancia dada, pero eso no es todo, el laplaciano tiene una gran cantidad de aplicaciones en la matemática teórica, por ejemplo, en el estudio de funciones armónicas en la variable compleja (ver por ejemplo [1] pag. 162).

Podemos ahora dar una descripción de la ecuación de calor o de difusión en

$\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, la cual generaliza la interpretación para una sola variable espacial. Sea $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado. Supongamos que u tiene segundas derivadas continuas en $\Omega \times (0, T]$ y que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u. \quad (4.1)$$

Entonces si $\Delta u(P_o, t_o) > 0$, tenemos $\frac{\partial u}{\partial t}(P_o, t_o) > 0$ es decir u tiende a crecer en una vecindad de P_o para $t > t_o$. Por otro lado, si $\Delta u(P_o, t_o) < 0$, entonces u tiende a decrecer en una vecindad de P_o para $t > t_o$. Si u representa la concentración de una sustancia en el punto P_o al tiempo t entonces la ecuación (4.1) representa la tendencia de la sustancia a pasar de una concentración mayor a una menor.

Para la ecuación de onda, en \mathbb{R}^2 , si U representa la altura de una membrana definida en Ω , se tiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u, \quad (4.2)$$

si $\Delta u(P_o, t_o) > 0$, tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_o, t_o) > 0$, es decir, la fuerza de tensión en la membrana tiene componente en el eje $z = u(\mathbf{x}, t)$ que apunta en la dirección positiva y su magnitud es menor en cuanto menor es la curvatura del perfil u en promedio, en una vecindad de P_o . Si $\Delta u(P_o, t_o) < 0$, tenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_o, t_o) < 0$, y en este caso, la componente en el eje z de la tensión tiene dirección negativa en una vecindad de P_o .

4.1.1 Principio del máximo para la ecuación de Laplace

Finalmente, para la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, la cual puede interpretarse como una ecuación de calor estacionaria, la interpretación intuitiva del laplaciano invita a formular el criterio del máximo para soluciones de la ecuación de Laplace, principio que indica que el perfil de temperatura estacionario u alcanza sus valores máximo y mínimo en $\partial\Omega$.

Teorema 4.1 — Principio del Máximo para la ecuación de Laplace. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, conexo y acotado. Sea $u = u(x, y, z)$ una función armónica en Ω , es decir, una función que satisface $\Delta u = 0$ en Ω , la cual suponemos que es continua en $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces los valores máximos y mínimos de u se alcanzan en la frontera $\partial\Omega$.

Demostración: Sea $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y defínase $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)$, donde $\varepsilon > 0$ es un número cualquiera. Se tiene

$$\Delta v(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}) + \Delta(\varepsilon(x^2 + y^2 + z^2)) = 0 + 6\varepsilon > 0 \tag{4.3}$$

en Ω . Como v es continua en el compacto $\overline{\Omega}$ alcanza su valor máximo. Si v alcanzara el máximo en Ω se tendría en dicho punto $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} \leq 0$, lo cual contradice la desigualdad (4.3). Así el máximo de v debe alcanzarse en la frontera. Sea $\mathbf{x}_o \in \partial\Omega$ un punto donde v alcanza el máximo. La demostración de que u alcanza su máximo en $\partial\Omega$, es una consecuencia de las siguientes desigualdades que se cumplen para todo punto de $\overline{\Omega}$

$$u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}_o) = u(\mathbf{x}_o) + \varepsilon\|\mathbf{x}_o\|^2 \leq \max_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}') + \varepsilon\|\mathbf{x}_o\|^2.$$

Aplicando el límite cuando ε tiende a cero en la última desigualdad se tiene

$$u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}'), \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Para el mínimo se toma $-u$ y dado que $\max_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} (-u(\mathbf{x}')) = -\min_{\mathbf{x}' \in \partial\Omega} (u(\mathbf{x}'))$, al sustituir en la desigualdad anterior, la demostración queda terminada. \square

Una vez que queda establecido el principio del máximo la unicidad de soluciones para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Poisson se sigue fácilmente.

Teorema 4.2 — Unicidad para la ecuación de Poisson. Sean u, v soluciones respectivas en Ω de

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = h & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = f & \text{en } \Omega \\ v = h & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

entonces $u = v$ en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Demostración: Sea $w = u - v$ entonces $\Delta w = 0$ en Ω y $w = 0$ en $\partial\Omega$. El Teorema 4.1 implica que $w \equiv 0$ en $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, de donde se sigue la unicidad. \square

Ejercicio 4.1 Una sencilla modificación de las demostraciones de los teoremas 4.1, 4.2 anteriores las hace válidas para \mathbb{R}^2 . ¿Son válidas en \mathbb{R}^N ? \blacksquare

Ejercicio 4.2 Verifique que el principio del máximo no se cumple para la ecuación de Poisson, por ejemplo la solución del problema

$$-u''(x) = 1$$

para $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. ■

4.2 Invariabilidad del operador de Laplace respecto a rotaciones

El operador de laplace es invariante respecto a las rotaciones tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 como se mostrará. Se recuerda que una rotación en \mathbb{R}^N está dada por la fórmula de cambio de coordenadas

$$\mathbf{x}' = B\mathbf{x},$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ y $B = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$ es una matriz ortogonal, es decir una matriz tal que $BB^t = B^tB = I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$ y cuyo determinante es uno. Concretamente, en \mathbb{R}^2 una matriz ortogonal tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

donde θ es el ángulo de rotación.

Al usar las fórmulas (1.5) para un cambio de coordenadas arbitrario se obtiene que

$$u_{xx} + u_{yy} = (a_{11}^2 + a_{12}^2)u_{\xi\xi} + 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})u_{\xi\eta} + (a_{21}^2 + a_{22}^2)u_{\eta\eta}$$

al sustituir $a_{11} = \cos \theta$, $a_{12} = -\operatorname{sen} \theta$, $a_{21} = \operatorname{sen} \theta$, $a_{22} = \cos \theta$, en la ecuación anterior se obtiene la invarianza del operador de laplace, i. e.,

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}.$$

de manera similar se obtiene la invarianza del Laplaciano en \mathbb{R}^3 .

4.2.1 El laplaciano en coordenadas polares y esféricas

Las fórmulas para las coordenadas polares están dadas por

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Al usar la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x = u_r \cos \theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen} \theta}{r}, \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y = u_r \operatorname{sen} \theta + u_\theta \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

Al usar nuevamente la regla de la cadena (problema 4) se llega a

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}. \tag{4.5}$$

Para las coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi; \\ z &= r \cos \phi, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}, \\ \phi &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

se puede demostrar (problema 5) que

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \phi} u_{\theta\theta}. \tag{4.6}$$

4.3 Problemas y ejercicios del Capítulo 4

1. (Tomado de [19]) Demuestre que si u, v son soluciones del problema de Neumann

$$\Delta u = f \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \text{ en } \partial\Omega,$$

donde Ω es una región abierta conexa y acotada de \mathbb{R}^3 , entonces $u = v + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

2. Muestre que $u(x, y) = e^x \cos y$ es armónica en \mathbb{R}^2 ¿cuál es el máximo de u en el disco $D = \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$?
3. Compruebe que la solución del problema $-u''(x) = 1$ para $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$, no satisface el principio del máximo.
4. Demuestre la fórmula (4.5).
5. Demuestre la fórmula (4.6).
6. Verifique que las siguientes funciones son armónicas en \mathbb{R}^2 :
- $u(x, y) = e^x \sin x$.
 - $u(x, y) = x^2 - y^2$.
 - $u(x, y) = 2xy$.
7. Use el teorema de la divergencia para encontrar una expresión para $\iint u \Delta u dx dy dz$. Una vez calculada dicha expresión muestre que la solución de la ecuación de Laplace es única.
8. Muestre que si u satisface

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad x^2 + y^2 < 1$$

$$(u_x^2 + u_y^2)u = 0 \text{ en } x^2 + y^2 = 1$$

entonces u es constante.

9. Muestre que para $z \in \mathbb{C}$ si $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ tiene derivadas continuas entonces u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Muestre que si u, v tienen segundas derivadas continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces u, v son armónicas.
10. Considere el operador de Laplace en coordenadas esféricas en dimensión tres para demostrar que una de las soluciones que dependen sólo de r de la ecuación

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

tiene la forma $u(r) = e^{-\mu r}/r$ donde $\lambda = -\mu^2$.

Introducción.

Las vibraciones de una cuerda

Descripción intuitiva de la ecuación de onda**Las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda****Solución de D'Alembert**

La fórmula de D'Alembert en la semirecta

Fórmula de Kirchhoff-Poisson

Solución del problema de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3

Principio de Huygens

Problemas y ejercicios del Capítulo 5

5 La ecuación de onda

5.1 Introducción.

El prototipo de las ecuaciones hiperbólicas es la ecuación de onda la cual modela diversos fenómenos físicos, ya sea el movimiento de una cuerda o de una membrana en un instrumento musical, o bien el comportamiento de la luz. Se presentará una deducción de la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell y otra a partir de un modelo simplificado del movimiento de una cuerda. Comenzamos con este último.

5.1.1 Las vibraciones de una cuerda

Se considera una cuerda de material flexible, por ejemplo la cuerda de un instrumento musical. Para simplificar, supondremos que la cuerda solamente se mueve en dirección vertical y que no ocurre desplazamiento en la dirección horizontal, lo que en la práctica resulta ser una buena aproximación. Supondremos para simplificar que el desplazamiento vertical es pequeño comparado con la longitud total l de la cuerda. El origen de coordenadas se coloca en un extremo de la cuerda. El desplazamiento en el punto x y en el tiempo t se denota por $u = u(x, t)$ la cual se supone al menos dos veces diferenciable. La densidad lineal de la cuerda se denota por $\rho(x)$ y la tensión interna por τ la cual supondremos constante. Supondremos además, que la tensión actúa en la dirección tangente al perfil de la cuerda en el punto x . Consideramos por el momento, un segmento arbitrario de la cuerda entre los puntos $x = a$ y $x = b$. Se denota por $\theta(x, t)$

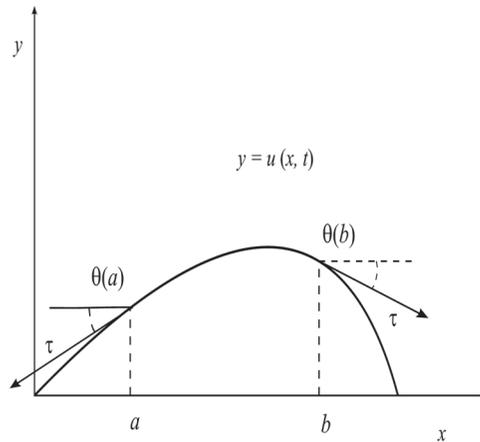


Figura 5.1: Segmento de una cuerda.

el ángulo mostrado en la figura 5.1 en los puntos a y b , respectivamente lo cual implica que, (si recordamos el significado geométrico de la derivada)

$$\tan(\theta(x, t)) = u_x(x, t). \tag{5.1}$$

La ecuación que describe el movimiento de la cuerda se deriva a partir del esquema de conservación (2.2) en una dimensión, con $\Omega = (a, b)$, $\partial\Omega = \{a, b\}$, tomando el momento mv como la cantidad que se conserva y $\int_{\partial\Omega} \phi(x, t) dx$ como la componente vertical de la fuerza de tensión, es decir

$$\int_{\partial\Omega} \phi(x, t) dx = \int_a^b \phi(x, t) dx = \tau(\sin(\theta(b, t)) - \sin(\theta(a, t))). \tag{5.2}$$

No se consideran los efectos de la fuerza de gravedad ni la fricción en este primer modelo por lo que $f(x, t) \equiv 0$ en la ecuación (2.2). Finalmente, el elemento de masa en una hipotética cuerda unidimensional está dada por el producto de la densidad $\rho(x)$ por el elemento de longitud de arco dado por $\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2} dx$ y sabiendo que la velocidad es $u_t(x, t)$, el esquema de conservación (2.2) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (u_x(x, t))^2} u_t(x, t) dx = \tau(\sin(\theta(b, t)) - \sin(\theta(a, t))). \tag{5.3}$$

Para simplificar escribimos $\rho_o(x) = \rho(x)\sqrt{1 + (u_x(x))^2}$, de esta forma (5.3) se convierte en

$$\int_a^b \rho_o(x) u_{tt}(x, t) dx = \tau(\sin(\theta(b, t)) - \sin(\theta(a, t))). \quad (5.4)$$

La hipótesis de que la tensión *no* produce movimiento horizontal se traduce matemáticamente en la igualdad de las componentes de esta fuerza en la dirección del eje x en los extremos del intervalo $[a, b]$, es decir:

$$\tau \cos(\theta(a, t)) = \tau \cos(\theta(b, t)). \quad (5.5)$$

Lo cual implica que $T = \tau \cos(\theta(x, t))$ en realidad no depende de x , de tal manera que, si se consideran las ecuaciones (5.1), (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \tau [\cos(\theta(b, t)) \tan(\theta(b, t)) - \cos(\theta(a, t)) \tan(\theta(a, t))] &= \\ = T(t)(u_x(b, t) - u_x(a, t)) &= \\ = T(t) \int_a^b u_{xx}(x, t) dx. & \quad (5.6) \end{aligned}$$

Donde la última integral es consecuencia del teorema fundamental del cálculo. Tomando en cuenta la ecuación (5.4) se llega a

$$\int_a^b \rho_o(x) u_{tt}(x, t) dx = T(t) \int_a^b u_{xx}(x, t) dx. \quad (5.7)$$

Dado que el intervalo $[a, b]$ es arbitrario, se tiene que:

$$u_{tt} = \frac{T(t)}{\rho_o(x)} u_{xx}(x, t). \quad (5.8)$$

En el caso especial en que $\rho_o(x)$, $T(t)$ son constantes, suele escribirse $\sqrt{\frac{T(t)}{\rho_o(x)}} = c$. de esta forma se obtiene la ecuación de onda,

$$\boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}(x, t)}. \quad (5.9)$$

N La ecuación (5.9) puede modificarse para incluir los efectos de la fricción ϵu_t , la respuesta elástica del medio ku así como la presencia de una fuerza externa $f(x, t)$ con lo cual puede obtenerse el siguiente modelo dado para el movimiento de una cuerda

$$u_{tt} - c^2 u_{xx}(x, t) + \epsilon u_t(x, t) + ku(x, t) = f(x, t). \tag{5.10}$$

5.2 Descripción intuitiva de la ecuación de onda

Si bien la deducción de la ecuación de onda desde el punto de vista formal es adecuada, no suele ser lo más aplicable durante el proceso de modelación matemática. Lo que ocurre con frecuencia es que se utiliza cierta intuición asociada con los conceptos básicos de derivada, ya sea como razón de cambio o ya sea por medio de las interpretaciones geométricas de la primera y segunda derivadas (o bien, del laplaciano). Por ejemplo, para seguir con el modelo de una cuerda de algún instrumento musical, con las mismas condiciones de la sección anterior, consideramos una cuerda de longitud l . Llamemos u al desplazamiento de la cuerda en cada punto x , es decir, $y = u(x, t)$. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ la cuerda adopta la forma de la gráfica de una función conocida $y = f(x)$, es decir, $y = u(x, 0) = f(x)$. Dado que la cuerda está tensa, al soltarla comenzará a moverse, así el desplazamiento $u(x, t)$ variará con el tiempo.

Cada punto sobre la cuerda se moverá con una velocidad $v = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ y una aceleración $a = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$. Con esta notación usamos la segunda ley de Newton $F = ma$ donde F es la fuerza que actúa en cada punto x de la cuerda en el instante t . por otra parte la fuerza de tensión en cada punto es proporcional a la curvatura de la cuerda, es decir, entre más curvada esté, mayor será la tensión. Recordemos que en cada tiempo la curvatura esta determinada por $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$.

Se puede intuir que si no se toman en cuenta fuerzas de fricción ni las fuerzas externas, u satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \tag{5.11}$$

Donde α es una constante que depende del material del cual está hecha la cuerda.

5.3 Las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda

Los campos electromagnéticos que satisfacen las ecuaciones de Maxwell satisfacen también la ecuación de onda como veremos a continuación. Sea $E = (E_x, E_y, E_z)$ un campo eléctrico y $B = (B_x, B_y, B_z)$ un campo magnético los cuales satisfacen las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial:

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{ley de Gauss} \quad (5.12)$$

$$\operatorname{div} B = \mathbf{0}, \quad \text{ley de Gauss para campos magnéticos} \quad (5.13)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{ley de Faraday} \quad (5.14)$$

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \quad \text{ley de Ampere-Maxwell,} \quad (5.15)$$

donde μ_0 es la permitividad magnética del vacío, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, \mathbf{J} la densidad de corriente y ρ la densidad de carga. Para ver que el campo magnético B satisface la ecuación de onda se toma el rotacional en ambos lados de la ecuación de Ampere-Maxwell (5.15):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = \mu_0 \operatorname{rot} \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right). \quad (5.16)$$

Ejercicio 5.1 Se deja como ejercicio de cálculo comprobar que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = \nabla(\operatorname{div} B) - \Delta B$, donde el laplaciano ΔB del campo vectorial B se define como:

$$\Delta B = (\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z).$$

Dado que se cumple la ecuación (5.13) de (5.16) se obtiene,

$$-\Delta B = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} E). \quad (5.17)$$

Si consideramos la ecuación (5.14) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} E) = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \quad (5.18)$$

Además en una región libre de corriente

$$\mathbf{J} = \mathbf{0}. \tag{5.19}$$

Si se sustituyen en la ecuación (5.17) las ecuaciones (5.18) y (5.19) se llega a la ecuación:

$$\Delta B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

Si se define $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$ se obtiene la ecuación de onda en forma estándar

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \Delta B,$$

el valor de c se puede calcular a partir de los valores de μ_0 y ϵ_0 :

$$c = [(4\pi \times 10^{-7} \text{ kg/C}^2)(8.8541878 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 / (\text{kgm}^3))]^{-1/2} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Como puede verse¹, el valor de c coincide con la velocidad de propagación de la luz en el vacío como era de esperarse.

De manera similar, puede obtenerse la ecuación de onda para el campo E :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E,$$

para ello se toma el rotacional en ambos miembros de la ley de Faraday y se considera una región libre de carga, es decir, una región con $\rho = 0$.

Ejercicio 5.2 Obtenga la ecuación de onda para un campo E . ■

5.4 Solución de D'Alembert

Para el problema de movimiento de una cuerda infinita se tiene una solución especial obtenida por el *método de D'Alembert*. Consideramos el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty \\ (ci) \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \end{aligned} \tag{5.20}$$

¹La velocidad de la luz c actualmente no es una magnitud medida, sino que se ha establecido un valor fijo en el Sistema Internacional de Medidas y se define exactamente como $c = 299\,792.458 \text{ Km/s}$

donde las funciones f, g se suponen conocidas.

El primer paso en el método de D'Alembert consiste en escribir la ecuación (5.20) en su forma canónica (ver sección 1.3.1) mediante el cambio de variables²:

$$\begin{aligned}\xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct.\end{aligned}\tag{5.21}$$

con lo cual la edp en (5.20) se reduce a

$$u_{\xi\eta} = 0.\tag{5.22}$$

Ejercicio 5.3 Verifique que con el cambio de variable dado en (5.21) la ecuación de onda se convierte en la ecuación (5.22). ■

Ahora la ecuación (5.22) puede integrarse por ejemplo con respecto a la variable ξ :

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = \phi(\eta)$$

Integrando nuevamente, ahora respecto a la variable η se obtiene

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\eta) + \Psi(\xi),\tag{5.23}$$

donde las funciones Φ, Ψ con $\Phi' = \phi$ deben determinarse a partir de las condiciones iniciales (ci) en (5.20). Primero, se restituyen las variables originales por medio de las fórmulas (5.21) para obtener

$$u(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct).\tag{5.24}$$

Dado que $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, tenemos al derivar (5.24) y poniendo $t = 0$:

$$\Phi(x) + \Psi(x) = f(x)\tag{5.25}$$

$$c(-\Phi'(x) + \Psi'(x)) = g(x).\tag{5.26}$$

Si se integra (5.26) se obtiene el sistema

$$\Phi(x) + \Psi(x) = f(x)\tag{5.27}$$

$$-\Phi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(\tau) d\tau + K,\tag{5.28}$$

²Las nuevas coordenadas se conocen también como *cono de luz*.

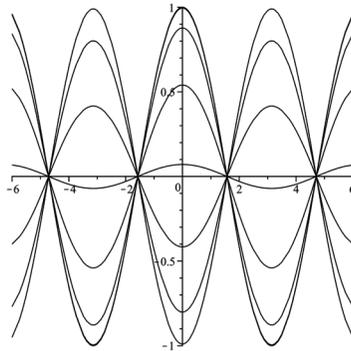


Figura 5.2: Solución del Ejercicio 5.4

donde las funciones Ψ, Φ son las incógnitas y $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto fijo. Sumando las ecuaciones (5.27), (5.28) se tiene

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau)d\tau + \frac{K}{2}. \tag{5.29}$$

Si ahora restamos las ecuaciones (5.27), (5.28) se llega a

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(\tau)d\tau - \frac{K}{2}. \tag{5.30}$$

Para encontrar u se sustituyen (5.29), (5.30) en (5.24). De esta manera, (5.24) da la solución de D'Alembert en su forma clásica

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)d\tau. \tag{5.31}$$

Ejercicio 5.4 Considere las condiciones iniciales $u(x,0) = \cos x, u_t(x,0) = 0$. Verifique que la solución del problema (5.20) es $u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-ct) + \cos(x+ct))$. ■

■ **Ejemplo 5.1** Considérese el problema de la cuerda infinita con desplazamiento inicial cero y velocidad inicial dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq a \\ 0, & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

donde $a > 0$.

Este ejemplo corresponde al comportamiento de una cuerda infinita después de ser golpeada por un martillo de longitud $2a$. Claramente, la velocidad inicial tiene singularidades en $x = \pm a$. Por la fórmula de D'Alembert se tiene la solución

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau = \frac{1}{2c} |\{(-a, a) \cap (x-ct, x+ct)\}|$$

donde $|\{(-a, a) \cap (x-ct, x+ct)\}|$ es la longitud del conjunto resultante. Por ejemplo si $t = a/2c$:

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in (-\infty, -\frac{3}{2}a], \\ \frac{1}{2c}(x + \frac{3}{2}a), & \text{si } x \in (-\frac{3}{2}a, -\frac{1}{2}a) \\ \frac{a}{2c}, & \text{si } x \in (-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a) \\ \frac{1}{2c}(-x + \frac{3}{2}a), & \text{si } x \in (\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}a) \\ 0, & \text{si } x \in [\frac{3}{2}a, \infty). \end{cases} \quad (5.32)$$

El lector debe ser capaz de encontrar soluciones de esta integral en casos específicos por sí mismo. ■

Ejercicio 5.5 Compruebe que la solución al problema del ejemplo 5.1 está dada explícitamente, para $t = a/c$, por

$$u(x, a/c) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-\infty, -2a], \\ \frac{1}{2c}(x + 2a), & \text{si } x \in [-2a, 0] \\ \frac{1}{2c}(-x + 2a), & \text{si } x \in [0, 2a] \\ 0, & \text{si } x \in (2a, \infty). \end{cases} \quad (5.33)$$

5.4.1 La fórmula de D'Alembert en la semirecta

Las soluciones de la ecuación de onda en la semirecta $x > 0$ serán de gran utilidad para encontrar soluciones de la ecuación de onda en dimensiones superiores. El problema de la ecuación de onda en la semirecta

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t < \infty & (5.34) \\
 (ci) \begin{cases} u(x, 0) = f(x), & 0 < x \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \\
 (cf) \quad u(0, t) &= 0, \quad t > 0,
 \end{aligned}$$

también puede ser resuelto por el método de D'Alembert si se usan las extensiones impares de las condiciones iniciales. Considere las funciones

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0, \\ -g(-x), & x < 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Ahora como un paso intermedio el problema extendido

$$\begin{aligned}
 v_{tt} &= c^2 v_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty & (5.37) \\
 (ci) \begin{cases} v(x, 0) = \tilde{f}(x), & -\infty < x < \infty \\ v_t(x, 0) = \tilde{g}(x), \end{cases}
 \end{aligned}$$

tiene la solución dada por el método de D'Alembert:

$$v(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x - ct) + \tilde{f}(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(\tau) d\tau.$$

La solución u del problema en la semirecta se obtendrá a partir de la solución v restringiéndola a valores $x > 0$. En la región $x - ct > 0$ se tiene obviamente $x > ct > 0$ y en esta región $\tilde{f} = f$ y $\tilde{g} = g$. Por lo tanto

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau, \quad \text{si } x > ct. \quad (5.38)$$

Por otra parte si $0 < x < ct$ se tiene $\tilde{f}(x-ct) = -f(ct-x)$ y así

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) - f(ct-x)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \int_{x-ct}^0 -g(-\tau) d\tau \right)$$

con el cambio de variable τ a $-\tau$ en la última integral se obtiene

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) - f(ct-x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(\tau) d\tau, \text{ si } 0 < x < ct. \quad (5.39)$$

La solución completa del problema (5.34) está dada por las dos soluciones (5.38), (5.39) las cuales están definidas, por supuesto, en regiones disjuntas del plano x, t .

5.5 Fórmula de Kirchhoff-Poisson

Consideramos el problema de la ecuación de onda en tres dimensiones

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, & 0 < t < \infty \\ (ci) \begin{cases} u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \end{cases} \end{cases} \quad (5.40)$$

La solución del problema (5.40) es el equivalente a la solución de D'Alembert para la ecuación de onda en una dimensión. Sin embargo, como veremos más adelante, esta generalización se sigue de la fórmula de D'Alembert de una manera no trivial. Además si $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ y $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ entonces el problema (5.40) tiene solución única, llamada fórmula de Kirchhoff-Poisson, dada por

$$u(\mathbf{x}_o, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} f(\mathbf{x}) dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=ct} g(\mathbf{x}) dS \quad (5.41)$$

El lector debe observar que las integrales en la fórmula (5.41) son integrales de superficie de las funciones escalares f, g , tomadas sobre la esfera con centro en \mathbf{x}_o y radio ct .

5.5.1 Solución del problema de la ecuación de onda en \mathbb{R}^3

Si recordamos que el área de la esfera $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = r$ está dada por $4\pi r^2$, el valor promedio $\bar{u}(r, t)$ de la función $u(\mathbf{x}, t)$ sobre la esfera está dado por,

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_o\|=r} u(\mathbf{x}, t) dS$$

o bien, en coordenadas esféricas

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|=r} u(\mathbf{x}, t) dS \quad (5.42)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi, t) r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta, \quad (5.43)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi, t) \sin \phi \, d\phi \, d\theta. \quad (5.44)$$

No es difícil verificar por medio de la fórmula (4.6) que \bar{u} satisface la ecuación de onda en coordenadas esféricas

$$\bar{u}_{tt} = c^2(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{u}_r) \quad (5.45)$$

si u es solución de la ecuación de onda y además es uniformemente continua en cada bola³.

Con la sustitución

$$v(r, t) = r\bar{u}(r, t)$$

se llega a la ecuación de onda del problema (5.20) como se muestra a continuación. Dado que $v_{tt} = r\bar{u}_{tt}$, $v_r = r\bar{u}_r + \bar{u}$ y $v_{rr} = r\bar{u}_{rr} + 2\bar{u}_r$, la ecuación (5.45) se convierte en

$$v_{tt} = c^2 v_{rr} \quad (5.46)$$

con $0 < t < \infty$, $0 < r < \infty$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\bar{u}(\mathbf{0}, t) < \infty$ y por lo tanto

$$v(\mathbf{0}, t) = 0. \quad (5.47)$$

Además como u es solución de problema (5.40), v debe satisfacer las condiciones

$$v(r, 0) = r\bar{f}(r), \quad v_t(r, 0) = r\bar{g}(r). \quad (5.48)$$

Las ecuaciones (5.46), (5.47) y (5.48) constituyen un problema de onda en una dimensión espacial y puede ser resuelto por el método de D'Alembert en la semirecta $0 < r$, la solución dada en la sección 5.4.1 fórmula (5.39) para este problema con $0 \leq r \leq ct$ da

$$v(r, t) = \frac{1}{2} [(ct+r)\bar{f}(ct+r) - (ct-r)\bar{f}(ct-r)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{g}(s) ds$$

³La continuidad uniforme se requiere para el intercambio de derivadas parciales e integrales.

El primer término del lado derecho puede ser reescrito mediante el teorema fundamental del cálculo para obtener

$$v(r, t) = \frac{1}{2c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{f}(s) ds + \int_{ct-r}^{ct+r} s \bar{g}(s) ds \right] \quad (5.49)$$

para $0 \leq r \leq ct$.

Claramente $u(r, \theta, \phi, t) = u(x_o + r \cos \theta \operatorname{sen} \phi, y_o + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, z_o + \cos \phi, t)$ de esta forma

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r, t) &= u(\mathbf{x}_o, t) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(r, t) - v(0, t)}{r} \\ &= \frac{\partial v}{\partial r}(0, t). \end{aligned}$$

Se deriva (5.49) con respecto a r y posteriormente se pone $r = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} u(x_o, t) &= \frac{\partial v}{\partial r}(0, t) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (2ct \bar{f}(ct)) + \frac{1}{2c} 2ct \bar{g}(ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t \bar{f}(ct)) + t \bar{g}(ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct} \bar{f}(\mathbf{x}) dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct} \bar{g}(\mathbf{x}) dS \end{aligned}$$

la cual es la fórmula de Kichhoff-Poisson.

5.5.2 Principio de Huygens

El principio de Huygens puede describirse de manera fantástica afirmando que si existieran seres de una y dos dimensiones tendrían que ser ciegos y sordos. Para explicar por que esto es así resolveremos el problema de la ecuación de onda en una y tres dimensiones para contrastar las soluciones, es decir, resolveremos cualitativamente

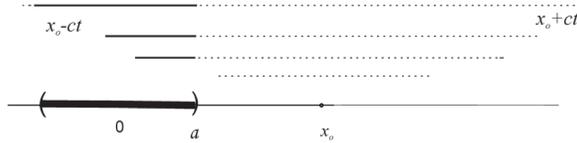


Figura 5.3: Principio de Huygens, caso $N = 1$

el problema para \mathbb{R}^N con $N = 1, 3$.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{x}\| \leq a, \\ 0, & \|\mathbf{x}\| > a. \end{cases} \end{cases} \quad a > 0 \quad (5.50)$$

Para $N = 1$ claramente $\|\mathbf{x}\| = |x|$ y este problema puede pensarse como la perturbación producida en una cuerda infinita al ser golpeada por un martillo de longitud $2a$. Recordamos que para $N = 1$ la solución de D'Alembert está dada por

$$\begin{aligned} u(x_o, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x_o - ct}^{x_o + ct} \psi(\tau) d\tau \\ &= 0, \text{ si } \{x \in [x_o - ct, x_o + ct]\} \cap \{x : |x| \leq a\} = \emptyset \\ &\neq 0, \text{ si } \{x \in [x_o - ct, x_o + ct]\} \cap \{x : |x| \leq a\} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Lo que dice la solución anterior es que si tomamos un punto x_o fijo sobre la recta y dejamos que t transcurra, tarde o temprano el intervalo $[x_o - ct, x_o + ct]$ intersecará el intervalo $-a \leq x \leq a$ en cierto $t = t_o$ y la solución será distinta de cero a partir de entonces, es decir, para todo $t \geq t_o$. Un esquema de la solución se muestra en la correspondiente figura 5.3.

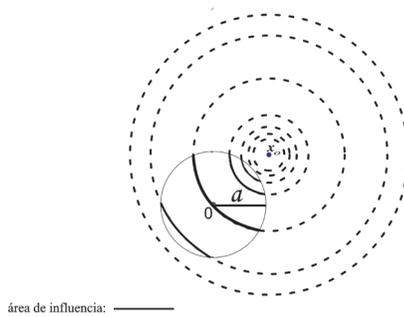


Figura 5.4: *Principio de Huygens, caso $N = 3$*

Para $N = 3$ la fórmula de Kirchhoff-Poisson nos da

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}_o, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct} \psi(\mathbf{x}) dS \\
 &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{P(\mathbf{x}_o, t)} dS \\
 &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \text{area}(P(\mathbf{x}_o, t))
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Donde $P(\mathbf{x}_o, t) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct\} \cap \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq a\}$. Es claro que para t suficientemente grande el conjunto $P(\mathbf{x}_o, t)$ será vacío sin importar cual sea \mathbf{x}_o , como se muestra en la figura 5.4. La diferencia entre $N = 1$ y $N = 3$ es clara ya que en cualquier punto fijo \mathbf{x}_o para el caso $N = 1$ la perturbación inicial se sentirá por siempre a partir de cierto tiempo t_o , ya que se trata de la intersección de dos bolas unidimensionales (intervalos), mientras que para $N = 3$ la perturbación dejará de sentirse a partir de cierto t_o , dado que sólo contribuye la superficie de la esfera $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| = ct$ que se interseca con la bola $\|\mathbf{x}\| \leq a$. Este hecho haría imposible la comunicación en dimensión uno ya que las perturbaciones se sumarían y continuarían escuchándose por siempre, lo que *no ocurre* en el espacio de tres dimensiones. Puede demostrarse que para $N \geq 2$ y par ocurre lo mismo que para $N = 1$.

5.6 Problemas y ejercicios del Capítulo 5

1. Sea $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial clase \mathcal{C}^2 compruebe que $\text{rot}(\text{rot}E) = \nabla(\text{div}E) - \Delta E$.
2. Suponga que el campo vectorial E satisface las ecuaciones (5.12), (5.15), (5.14) y $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ demuestre que E es solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \Delta E.$$

3. Compruebe derivando directamente que la solución del problema con valores iniciales $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, está dada por la fórmula

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau.$$

4. Una cuerda de una guitarra de longitud 1 m se jala por la mitad una distancia de 5 cm y entonces se suelta. Escriba el problema de onda asociado a esta situación si $c = 1$.
5. Sea $u(x,t)$ una función con derivadas parciales de tercer orden continuas la cual satisface la ecuación $u_{xx} - u_{tt} = 0$. Compruebe que la función $v(x,t) = u_x - u_t$ también satisface la misma ecuación.
6. Use la solución de D'Alembert para la solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

para demostrar que si las funciones ϕ, ψ son simultáneamente impares entonces $u(0,t) = 0$ y si son simultáneamente pares $u_x(0,t) = 0$.

7. Muestre que si la función $f(x,t)$ en el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

es impar respecto a la variable x entonces $u(0,t) = 0$ y si es par entonces $u_x(0,t) = 0$.

8. Sea $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Compruebe que la más general expresión para las soluciones de

$$\Delta u = u_{tt}$$

las cuales dependen sólo de r y t es de la forma

$$u(r, t) = \frac{f_1(r+t)}{r} + \frac{f_2(r-t)}{r}, \quad r \neq 0,$$

donde f_1, f_2 son funciones arbitrarias dos veces diferenciables.

9. Muestre que la función $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + a^2 t^2$ describe el proceso de propagación de una onda y encuentre la velocidad de la onda.
10. ¿Puede ocurrir que una función de la forma $u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - ct^2$ describa el proceso de propagación de una onda? Explique su respuesta.
11. Encuentre la solución del ejemplo 5.1 para $t = 2a/c$. Haga una gráfica de la solución.

Nota. Los problemas 5 a 10 fueron tomados de [4].

Introducción

Solución de la ecuación de calor

Problemas con (cf) no homogéneas

Solución de la ecuación de onda

Solución de la ecuación de Laplace

Fórmula integral de Poisson

Observaciones sobre la ecuación de Poisson

El método de expansión en funciones propias

Series de Fourier

Series de Fourier trigonométricas

Extensiones periódicas de funciones

Paridad y series de Fourier

Problemas y ejercicios del Capítulo 6

6 Separación de variables

6.1 Introducción

Dada una edp

$$G(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_t, u_{tt}, \dots, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_1}^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_k}) = 0, \quad (6.1)$$

el método de separación de variables consiste en proponer una solución u de (6.1) como producto de tantas funciones de una variable real como número de variables independientes tenga la ecuación:

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = T(t)X_1(x_1)X_2(x_2) \cdots X_n(x_n). \quad (6.2)$$

La idea es que al sustituir (6.2) en (6.1) se obtengan $n + 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias (una ecuación por cada variable) que puedan resolverse por métodos estándar.

■ **Ejemplo 6.1** Encuentre soluciones de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.3)$$

por medio del método de separación de variables.

Solución. Se propone una solución u de la forma $u = T(t)Y(y)$. Entonces al sustituir la expresión anterior en la ecuación (6.3) se obtiene

$$Y(y) \frac{dT(t)}{dt} = T(t) \frac{dY(y)}{dy}. \tag{6.4}$$

De donde, al separar variables y suponiendo que $T(t)Y(y)$ no es idénticamente cero se tiene

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{Y(y)} \frac{dY(y)}{dy}.$$

Note ahora que el lado izquierdo de la ecuación anterior es una función que sólo depende de t mientras que el lado derecho sólo depende de y , sean

$$H(t) = \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt}$$

y

$$G(y) = \frac{1}{Y(y)} \frac{dY(y)}{dy}.$$

Recuerde que las variables t y y son independientes, por lo que podemos usar el siguiente lema 6.1 el cual implica que

$$k = \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{Y(y)} \frac{dY(y)}{dy}$$

donde k es un número real. De esta forma se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$\frac{dT(t)}{dt} - kT(t) = 0 \tag{6.5}$$

$$\frac{dY(y)}{dy} - kY(y) = 0. \tag{6.6}$$

Las cuales tienen como soluciones

$$T(t) = C_1 e^{kt} \tag{6.7}$$

$$Y(y) = C_2 e^{ky}, \tag{6.8}$$

respectivamente. Por lo tanto soluciones de la edp (6.3) son

$$u(t,y) = T(t)Y(y) = C e^{k(t+y)}$$

donde k, C son constantes arbitrarias. ■

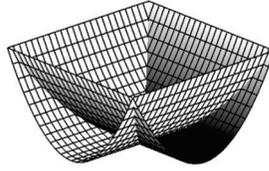


Figura 6.1: Gráfica de la intersección de dos cilindros parabólicos.

Claramente para diferentes constantes k_i, C_i , $1 \leq i \leq n$ se tienen n soluciones de la ecuación (6.3) $u_i(t, y) = C_i e^{k_i(t+y)}$. Más aún la función $u(t, y) = \sum_{i=1}^{i=n} C_i e^{k_i(t+y)}$ es solución de la ecuación (6.3), a esta propiedad se le conoce como **principio de superposición** y será enunciado de una forma más general en el teorema 6.1. Otra clase importante de problemas asociados a las edp son aquellos con valores iniciales donde además la solución de la edp debe satisfacer condiciones iniciales, por ejemplo, de la forma $u(0, y) = f(y)$ donde $f(y)$ es una función dada.

Presentamos ahora un lema que es fundamental en todo este capítulo.

Lema 6.1 Suponga que se tienen las funciones $H : \Omega \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $H = H(y)$ y $G : \Omega' \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $G = G(x)$. Suponga que se tiene la igualdad $G(x) = H(y)$ para toda $x \in \Omega'$ y toda $y \in \Omega$, entonces $G(x) = H(y) = k \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sea $y_1 \in \Omega$ un número fijo, entonces $k = H(y_1) = G(x)$ para toda $x \in \Omega'$, es decir, $G(x) = k$ y por lo tanto $H(y) = k$ para toda $y \in \Omega$. \square

N Generalmente los estudiantes tienden a creer que el lema anterior no es del todo correcto, por ejemplo los cilindros parabólicos $z = H(y) = y^2$, $z = G(x) = x^2$ se intersecan en las curvas $x = t$, $y = t$, $z = t^2$ y $x = t$, $y = -t$, $z = t^2$ (ver figura 6.1). Obviamente $G(x) = H(y) \neq k$, sobre las curvas, pero lo que requiere el lema es que la igualdad $H(y) = G(x)$ se cumpla para toda x, y .

6.2 Solución de la ecuación de calor

Considere el siguiente problema asociado a la ecuación de calor homogénea (sin fuentes) con condiciones de frontera $u(0,t) = u(l,t) = 0$, para $t > 0$, y condición inicial $u(x,0) = g(x)$ para $0 \leq x \leq l$, donde g es una función al menos integrable en $[0, l]$ no idénticamente nula.

$$(PC_o) \begin{cases} (edp) & u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ (ci) & \begin{cases} u(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(l,t) = 0. \end{cases} \\ (cf) & \end{cases}$$

Hemos visto en el capítulo 3 que este problema modela la difusión de calor en una barra sin fuentes de calor internas, con temperatura inicial $u(x,0) = g(x)$ y temperatura cero en sus extremos. Para resolver este problema se aplica la técnica de separación de variables la cual consiste en buscar soluciones no triviales u de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

Es decir, se propone u como un producto de dos funciones incógnitas X, T , las cuales sólo dependen cada una de las variables x, t respectivamente. De esta manera:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = X(x) \frac{dT(t)}{dt}, \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}. \tag{6.10}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (6.9), (6.10) en la edp se obtiene

$$X(x) \frac{dT(t)}{dt} = \alpha^2 T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}. \tag{6.11}$$

Si dividimos (6.11) por $\alpha^2 X(x)T(t)$ se tiene

$$\frac{1}{\alpha^2 T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2}. \tag{6.12}$$

Observe que la expresión del lado izquierdo de la igualdad sólo depende de t , mientras que el lado derecho sólo depende de x . Esta situación sólo puede ocurrir cuando ambas expresiones son iguales a una constante $k \in \mathbb{R}$, como se vio en el lema 6.1, es decir:

$$\frac{1}{\alpha^2 T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = k. \quad (6.13)$$

De acuerdo a la ecuación (6.13) se llega al siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dT(t)}{dt} - k\alpha^2 T(t) = 0 \quad (6.14)$$

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} - kX(x) = 0. \quad (6.15)$$

Al resolver cada una de las ecuaciones se obtienen soluciones cuyo producto satisface la edp. Para que el producto de soluciones satisfaga las condiciones de frontera $u(0, t) = u(l, t) = 0$ se deben satisfacer las condiciones siguientes

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \quad \text{para toda } t > 0. \quad (6.16)$$

Lo que lleva a los siguientes problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dT(t)}{dt} - k\alpha^2 T(t) = 0 \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - kX(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Así para encontrar soluciones no triviales de la ecuación de calor de la forma producto que satisfagan las condiciones de frontera se tienen que resolver (6.17) y (6.18). Para resolver (6.18) se consideran los siguientes casos:

1. Caso $k = 0$. Sustituyendo $k = 0$ en (6.15) e integrando la ecuación resultante se tiene

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = 0$$

de donde

$$\frac{dX(x)}{dx} = c_1$$

y así

$$X(x) = c_1x + c_2,$$

donde, c_1, c_2 son constantes, las cuales se determinan de las condiciones en (6.18). Entonces $X(0) = c_2 = 0$ y $X(l) = c_1l = 0$, como $l \neq 0$ tenemos la solución trivial $X(x) \equiv 0$ con la cual $u(x, t) = X(x)T(t)$ es idénticamente cero. Se concluye, por lo tanto, que no puede ocurrir el caso $k = 0$, ya que, claramente, la solución $u(x, t) \equiv 0$ no puede satisfacer la condición inicial $u(x, 0) = g(x)$ para una función arbitraria g .

2. Caso $k > 0$. Se tiene el problema:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} - kX(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \quad (6.19)$$

El cual tiene una solución de la forma $X(x) = e^{ax}$ sustituyendo en (6.19) se obtiene la ecuación característica $a^2 - k = 0$, así $a = \pm\sqrt{k}$. Entonces la forma general de las soluciones de la ecuación diferencial es

$$X(x) = c_1e^{\sqrt{k}x} + c_2e^{-\sqrt{k}x}$$

Aplicando las condiciones de frontera $X(0) = X(l) = 0$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones, el cual queremos resolver para c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1e^{\sqrt{k}l} + c_2e^{-\sqrt{k}l} &= 0. \end{aligned}$$

Calculamos el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{k}l} & e^{-\sqrt{k}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{k}l} - e^{\sqrt{k}l} = -2\sinh(\sqrt{k}l) \neq 0$$

que $\sinh(\sqrt{k}l) \neq 0$ ocurre dado que $\sinh(x) = 0$ sólo si $x = 0$ y claramente $\sqrt{k}l > 0$. Por lo tanto la única solución posible es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Es decir, nuevamente $X(x) \equiv 0$, por lo cual el caso $k > 0$ también debe descartarse.

3. Caso $k < 0$. Ahora las soluciones de la ecuación característica del problema (6.19) son complejas, es decir, $a = \pm\sqrt{-k}i$ donde $i = \sqrt{-1}$. Por lo tanto la ecuación diferencial tiene la solución real general (ver apéndice B, sección B.2.1, ecuación (B.4))

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-k}x) + c_2 \sin(\sqrt{-k}x).$$

Al sustituir las condiciones de frontera obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) &= 0 \\c_1 \cos(\sqrt{-kl}) + c_2 \sin(\sqrt{-kl}) &= 0.\end{aligned}$$

De donde $c_1 = 0$ y si queremos evitar obtener la solución trivial $X(x) \equiv 0$, podemos suponer $c_2 \neq 0$ de donde

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-kl}) = 0.$$

De esta forma $\sqrt{-kl} = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Obtenemos así que

$$k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto se tiene una infinidad de soluciones del problema (6.19), las cuales son múltiplos de:

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.20)$$

Para resolver (6.17) se sustituye $k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, en la ecuación (6.14), así

$$\frac{dT(t)}{dt} + \left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 T(t) = 0$$

cuya soluciones están dadas (ver apéndice B) por:

$$T_n(t) = A_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t}.$$

Por lo tanto (escribiendo el producto de constantes como una constante) tenemos una familia infinita de soluciones de la edp que satisfacen las condiciones de frontera (*cf*) las cuales son de la forma:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.21)$$

Por el momento, ha quedado parcialmente resuelto el problema (PC_o). Cada una de las funciones (6.21) satisfacen la edp y las condiciones de frontera (*cf*). Para satisfacer la condición inicial (*ci*) con g una función arbitraria se requiere del uso de las llamadas *series de Fourier*, pero antes enunciamos el siguiente principio básico.

Teorema 6.1 — Principio de superposición. Sea L un operador lineal definido sobre un espacio vectorial W , sobre \mathbb{C} . Supóngase que $L[u_n] = 0$ para $n = 1, \dots, m$, con $u_n \in W$ y $a_n \in \mathbb{C}$ para toda n . Entonces

$$L \left[\sum_n^m a_n u_n \right] = \sum_{n=0}^m a_n L[u_n] = 0.$$

Demostración: La linealidad de L implica que $L \left[\sum_{n=0}^m a_n u_n \right] = \sum_{n=0}^m a_n L[u_n]$. Como $L[u_n] = 0$ para $n = 1, \dots, m$, se tiene por lo tanto $L \left[\sum_{n=0}^m a_n u_n \right] = 0$. □

(N) El principio de superposición se cumple incluso para sumas infinitas si se satisface que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n < \infty$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n L[u_n] < \infty$. En tal caso si $L[u_n] = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $L \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \right] = 0$.

Regresando al problema (PC_o). Para satisfacer la condición inicial $u(x, 0) = g(x)$, $0 \leq x \leq l$, se considera la suma infinita de las $u_n(x, t)$ la cual desde un punto de vista formal satisface la edp y las condiciones de frontera. La (ci) se satisface si

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right), \tag{6.22}$$

para ciertas constantes A_n por determinar.

Para que la ecuación (6.22) tenga sentido, deben ocurrir dos cosas:

- Que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right)$ converja.
- Que la serie converja a g en la norma de algún espacio de funciones.

Obsérvese que dado que $\left| \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right| \leq 1$ la convergencia de la serie depende de la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

Determinar qué clases de funciones g y en cuáles espacios ocurre la convergencia, ha motivado el avance del Análisis Matemático en los últimos ciento cincuenta años, por

lo que, como es de esperarse, se trata de un tema delicado. Por el momento procedemos de manera heurística y sin justificar formalmente los pasos siguientes. Supongamos que $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$. Si se multiplican ambos lados de la igualdad por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ para m fijo y se integra de 0 a l , utilizando las condiciones de ortogonalidad,

$$\int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ l/2, & \text{si } m = n, \end{cases} \quad (6.23)$$

se obtiene, suponiendo que el intercambio de integral y suma es válido¹

$$\begin{aligned} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx &= \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \\ &= A_m \int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx \\ &= \frac{A_m l}{2}. \end{aligned}$$

De donde:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad n \geq 1. \quad (6.24)$$

A los coeficientes (6.24) se les llama *coeficientes de Fourier de la función g* , y a la serie (6.22) con estos coeficientes se le llama *serie de Fourier asociada a g* . De esta manera, hemos obtenido una solución formal al problema (PC_0), a saber:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (6.25)$$

donde las A_n están dadas por (6.24).

¹Para poder intercambiar la integral y suma infinita se requiere convergencia uniforme de la serie, en el apéndice A se da la definición A.3 de tal convergencia.

Ejercicio 6.1 Verifique que se cumple la relación (6.23). ■

N En 1873 du Bois-Reymond demostraron la existencia de una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto [17, Thm 2.1 p. 51]. Más aún, a mediados del siglo XX, Kahane y Katznelson demostraron que cualquier conjunto de medida cero puede ser el conjunto de divergencia de la serie de Fourier de una función continua [17, p. 58]. Tales hechos muestran que la convergencia de las series de Fourier es un asunto delicado y que no está de más analizar con detalle los casos en los que las series convergen. Sin embargo, se puede afirmar que la gran mayoría de las funciones que surgen en las aplicaciones caen en alguna de las categorías que se tratan en el apéndice A. En particular, se puede mostrar sin gran dificultad que la serie de Fourier (6.22) de una función g derivable en $(0, l)$ converge al menos puntualmente², a g . De manera más general, si $\int_0^l |g(x)| dx < \infty$ se tiene también convergencia puntual, salvo en los puntos de discontinuidad, con lo cual se incluye una gran colección de funciones continuas a trozos las cuales surgen frecuentemente en las aplicaciones.

■ **Ejemplo 6.2** Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \frac{1}{5} \text{sen}(3\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Solución. El método de separación de variables indica que la solución debe ser de la forma (6.25) con los coeficientes A_n dados por (6.24). Si se recuerdan la condiciones de ortogonalidad (6.23) se tiene $A_n = 0$ si $n \neq 3$ y $A_3 = 1/5$. por lo tanto la solución del problema es

$$u(x, t) = \frac{1}{5} e^{-9\pi^2 t} \text{sen}(3\pi x).$$

Obsérvese que en este caso la función $g(x) = \frac{1}{5} \text{sen}(3\pi x)$, **ya se encuentra desarrollada** en series de Fourier lo que facilitó la solución del problema. ■

²Para ver la definición de convergencia puntual ver la definición A.2 en el apéndice A “Hechos básicos del Cálculo”.

Ejercicio 6.2 Argumente porqué la solución del ejemplo anterior ya está desarrollada en series de Fourier. ■

■ **Ejemplo 6.3** Como un ejemplo más, considérese el problema de flujo de calor en una barra cuya superficie lateral está aislada y que en el instante $t = 0$ tiene una temperatura dada por $u(x, 0) = x$; además supóngase que $\alpha = 1$, que no hay fuentes de calor y que mediante algún dispositivo se consigue poner los extremos de la barra a 0 grados para todo $t > 0$. Encuentre la temperatura de la barra para todo $t > 0$.

Solución. El problema puede escribirse en forma matemática como

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x, & 0 < x < 1 \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(1, t) = 0. \end{cases}$$

De acuerdo con el método de separación de variables la solución formal del problema de este ejemplo está dada por,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x),$$

donde $A_n = 2 \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$. ■

Ejercicio 6.3 Compruebe la fórmula para A_n del ejercicio anterior. ■

Interpretación de la solución de la ecuación de calor

Varias preguntas pueden formularse ahora:

- ¿Realmente la solución se comporta como sucede en la realidad física? Por ejemplo, se espera que la temperatura de la barra sea cero en todo punto para t suficientemente grande ya que no hay fuentes internas de calor y la temperatura de la barra en los extremos es cero. ¿Realmente el modelo matemático predice tal comportamiento?
- Una pregunta que se hizo desde tiempos de Fourier y que todo estudiante debe formularse es la siguiente ¿las funciones $\operatorname{sen}(n\pi x)$ son funciones que oscilan,

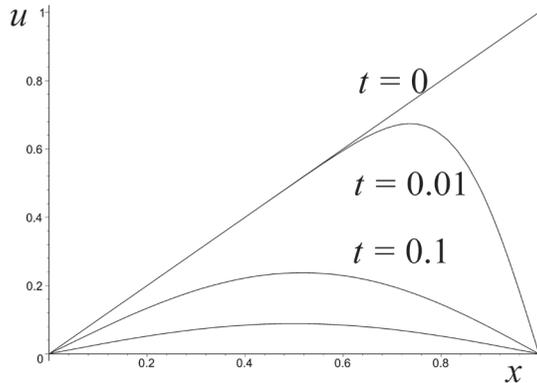


Figura 6.2: Solución de la ecuación de calor con $u(x, 0) = x$

de verdad una combinación lineal de ellas puede aproximar una función como $g(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$?

- Dado que la solución formal es una serie infinita ¿cuántos términos se deben tomar para tener una buena aproximación?

Para responder a la primera pregunta obsérvese la figura 6.2 donde se graficó una aproximación al perfil de u en los tiempos indicados. Obsérvese que u tiende a cero en todo punto como se esperaba.

$$u \approx \sum_{n=0}^{50} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} e^{-(n\pi)^2 t} \text{sen}(n\pi x),$$

es decir, se aproximó la solución tomando una suma de sólo 50 términos.

Con respecto a las aproximaciones de las funciones $\text{sen}(n\pi x)$, a la función $g(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$ se debe observar primero que en $x = 1$ las funciones $\text{sen}(n\pi x)$ son todas cero, por lo que no puede esperarse que una combinación lineal de estas aproxime uniformemente a la función $g(x) = x$. Combinaciones lineales finitas de las funciones $\text{sen}(n\pi x)$ oscilan cerca de $x = 1$. Tal comportamiento se conoce como fenómeno de Gibbs y está ilustrado en la figura 6.3 donde en la gráfica de la izquierda se ha tomado una suma de veinte términos $x \approx \sum_{n=0}^{20} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \text{sen}(n\pi x)$, y en la gráfica de la derecha

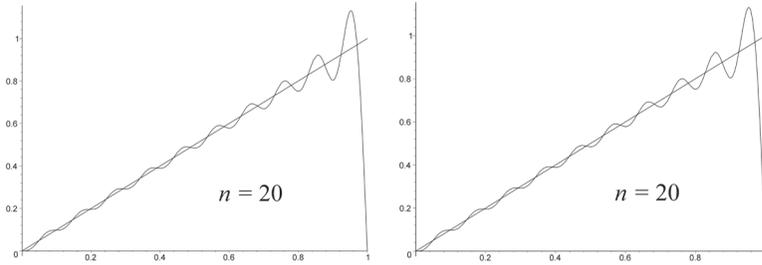


Figura 6.3: Aproximaciones a $g(x) = x$ ($n = 20$, $n = 50$) con series de Fourier.

una suma con cincuenta términos $x \approx \sum_{n=0}^{50} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x)$.

6.2.1 Problemas con (cf) no homogéneas

Para cerrar esta sección trataremos problemas en edp con (cf) separadas no homogéneas. Este estudio nos llevará a ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas, que serán resueltas en la sección 6.6. Por ejemplo analizamos el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ (cf) \begin{cases} a_{11}u(0, t) + a_{12}u_x(0, t) = h_1(t) \\ a_{21}u(l, t) + a_{22}u_x(l, t) = h_2(t), & t > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (6.26)$$

Para simplificar, consideramos primero el caso en el que h_1, h_2 son constantes. La intuición física nos dice que para t muy grande la solución u del problema (6.26) no dependerá de t , es decir $u(x, t) = f(x)$ por lo que en este caso la edp se reduce a

$$u_{xx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0.$$

Al integrar dos veces se obtiene $u(x, t) = f(x) = ax + b$ donde las constantes a, b se deben determinar de las (cf). Por lo tanto la solución estacionaria ($t \rightarrow \infty$) es una recta. Tomando en cuenta que $u(0, t) = f(0) = b$, $u_x(0, t) = u_x(l, t) = f'(x) = a$ y $u(l, t) = f(l) = al + b$ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son

a y b .

$$\begin{cases} a_{11}b + a_{12}a = h_1 \\ a_{21}b + (a_{21}l + a_{22})a = h_2. \end{cases} \quad (6.27)$$

El sistema tiene solución

$$b = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{21}l + a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21}l + a_{22} \end{vmatrix}} \quad (6.28)$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21}l + a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (6.29)$$

si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{21}l + a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si suponemos una solución del problema (6.26) de la forma

$$u(x, t) = f(x) + \bar{u}(x, t),$$

entonces $\bar{u}(x, t)$ satisface el problema

$$\begin{cases} \bar{u}_t(x, t) = \alpha^2 \bar{u}_{xx}(x, t), & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ \bar{u}(x, 0) = \phi(x) - f(x) = \bar{\phi}(x) \\ (cf) \begin{cases} \bar{u}(0, t) = 0 \\ \bar{u}(l, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (6.30)$$

como el lector puede verificar simplemente sustituyendo la definición de $\bar{u}(x, t)$. Este problema ya ha sido analizado y, como sabemos, tiene la solución

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi\alpha/l)^2 t} \text{sen}(n\pi x/l),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \bar{\phi}(x) \text{sen}(n\pi x/l) dx,$$

es decir, lo único que cambió fue la función $\bar{\phi}$. De esta manera, $u(x,t) = f(x) + \bar{u}(x,t)$ proporcionan la solución del problema (6.26) en el caso de que h_1 y h_2 son constantes.

Para el problema (6.26) con (cf) generales se propone una solución de la forma

$$u(x,t) = E(x,t) + \bar{u}(x,t), \tag{6.31}$$

En este caso se pone $E(x,t) = a(t)x + b(t)$ con $a(t), b(t)$ de la forma como en (6.28), (6.29), pero con $h_1 = h_1(t), h_2 = h_2(t)$, es decir, en este caso h_1 y h_2 no son constantes sino dependen de t . Obsérvese que $E(x,t)$ satisface las condiciones de frontera de la ecuación (6.26), como puede verificarse fácilmente. Así, la función $\bar{u} = u - E$ debe ser solución del problema

$$\begin{cases} \bar{u}_t(x,t) = \alpha^2 \bar{u}_{xx}(x,t) - E_t(x,t), & 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ \bar{u}(x,0) = \phi(x) - E(x,0) = \bar{\phi}(x) \\ (cf) \begin{cases} \bar{u}(0,t) = 0 \\ \bar{u}(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{6.32}$$

En este caso la edp del problema (6.32) es no homogénea dado que aparece la función $E_t(x,t)$. Hasta ahora las técnicas estudiadas no nos permiten resolver este tipo de ecuaciones pero se tratarán en la sección próxima.

Para finalizar esta sección se presenta un ejemplo

■ **Ejemplo 6.4** Resuelva el problema con (cf) no homogéneas

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \text{sen}(2\pi x) \\ (cf) \begin{cases} u(0,t) = 3 \\ u(1,t) + 2u_x(1,t) = t, \quad t > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{6.33}$$

Solución. Se busca una función de la forma $E(x,t) = a(t)x + b(t)$, donde a, b , se

calculan de la siguiente manera

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 3 \tag{6.34}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{t-3}{2}, \tag{6.35}$$

por lo tanto $E(x,t) = (t-3)x/2 + 3$. Fácilmente se verifica que $E(x,t)$ satisface las (cf) de (6.33). Notando que $E_t(x,t) = x/2$, se busca ahora una función \bar{u} que sea solución de

$$\begin{cases} \bar{u}_t(x,t) = \alpha^2 \bar{u}_{xx}(x,t) - \frac{x}{3}, & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ \bar{u}(x,0) = \text{sen}(2\pi x) - (t-3)x/2 + 3 = \bar{\phi}(x) \\ (cf) \begin{cases} \bar{u}(0,t) = 0 \\ \bar{u}(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{6.36}$$

La solución \bar{u} del problema anterior puede resolverse con el método de la sección 6.6. Finalmente, la solución del problema (6.33) dada por $u(x,t) = \bar{u} + (t-3)x/2 + 3$. ■

6.3 Solución de la ecuación de onda

En esta sección se estudia el problema

$$(PO_o) \begin{cases} (edp) & u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ (ci) & \begin{cases} u(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \\ (cf) & \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

En este caso se buscan soluciones de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ que al ser substituidas en la edp del problema (PO_o) se obtiene

$$XT'' = \alpha^2 TX''.$$

De donde se llega al par de problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} - k\alpha^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (6.37)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} - kX(x) = 0. \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \quad (6.38)$$

Obsérvese que el problema (6.38) coincide con el problema (6.18) de donde se obtiene

$$k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.39)$$

y

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (6.40)$$

Donde las c_n son constantes por determinar. Si se sustituye (6.39) en (6.37) se tiene

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \left(\frac{n\pi\alpha}{l}\right)^2 T(t) = 0 \quad (6.41)$$

Al resolver (6.41) (ver apéndice B, sección B.2.1, ecuación (B.4)) se obtiene la familia de soluciones:

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.42)$$

por lo tanto la familia

$$u_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.43)$$

donde, c_n ha quedado asimilada a las constantes a_n, b_n , son soluciones de la ecuación edp del problema (PO_o) que satisfacen las (cf). Para encontrar la solución que satisfaga las (ci):

$$(ci) \quad \begin{cases} u(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x,0) = h(x). \end{cases}$$

Se aplica el principio de superposición (Teorema 6.1, p. 86), así la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (6.44)$$

es solución formal de la edp del problema (PO_o) que satisface las condiciones (cf). Poniendo $t = 0$ en (6.44) se tiene

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Las constantes a_n pueden obtenerse de la misma forma que en la sección anterior, es decir, usando las condiciones de ortogonalidad (6.23) tenemos que

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.45)$$

Para obtener las constantes b_n suponemos que la serie (6.44) se puede derivar término a término y si la serie derivada converge a $u_t(x, t)$ entonces se llega a ³

$$h(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n\pi\alpha}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (6.46)$$

Multiplicando (6.46) por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{l}x\right)$ e integrando de 0 a l , al utilizar las condiciones de ortogonalidad (6.23) se obtiene

$$b_n = \frac{2}{n\pi\alpha} \int_0^l h(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.47)$$

Una vez establecidos los *coeficientes de Fourier para la ecuación de onda* (6.45) y (6.47), la serie (6.44) es solución formal del problema (PO_o) , si ocurre la convergencia de las series involucradas.

■ **Ejemplo 6.5** Una cuerda de longitud $l = 1$ situada en posición horizontal, se jala hacia arriba en su punto medio hasta que alcanza la altura $1/2$. Suponiendo que la posición inicial de la cuerda está dada por la función

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 - x, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.48)$$

¿Cómo es el subsecuente movimiento de la cuerda si esta se libera repentinamente?

Solución. Observe que la velocidad inicial de la cuerda es $u_t(x, 0) = 0$, así de la ecuación (6.47) se tiene $b_n = 0$ para toda n . El problema se reduce entonces a calcular

³La convergencia de la derivada formal de la serie no ocurre siempre, ver Apéndice A.

los coeficientes a_n dados por la fórmula (6.45). Para finalizar se sustituyen a_n, b_n en la fórmula (6.44). Con lo que

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi x] \cos[(2n+1)\pi t], \quad (6.49)$$

es la solución del problema. ■

Ejercicio 6.4 Compruebe que se cumple la fórmula (6.49). ■

Interpretación de la solución

Sea

$$u_n(x, t) = \frac{2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi x] \cos[(2n+1)\pi t]$$

entonces la solución del ejemplo 6.5 puede escribirse como

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

Como hemos explicado, $u(x, t)$ es la superposición de las funciones $u_n(x, t)$ llamadas armónicos n -ésimos o n -ésimos modos de vibración. Estas vibraciones fundamentales de una cuerda pueden percibirse con claridad, por ejemplo en una guitarra, poniendo un dedo a la mitad de una cuerda sin presionar después de hacerla sonar y retirando el dedo inmediatamente. Este curioso sonido resulta de los n -ésimos armónicos que no tienen crestas a la mitad de la cuerda. En este ejemplo se produce un sonido a una octava mas alta que el de la cuerda sin perturbar, por lo cual se les llama armónicos octavados. A continuación mostramos dos maneras de visualizar geoméricamente la solución de la ecuación de onda para este problema

En el caso general de la ecuación (6.44) las ecuaciones de los n -ésimos armónicos son

$$u_n(x, t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha}{l}t\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

los cuales, por medio de una identidad trigonométrica básica, pueden escribirse como

$$u_n(x, t) = R_n \operatorname{sen}(n\pi x/l) \cos[n\pi\alpha(t - \delta_n)/l]$$

donde R_n y δ_n son constantes llamadas amplitud y ángulo de fase respectivamente.

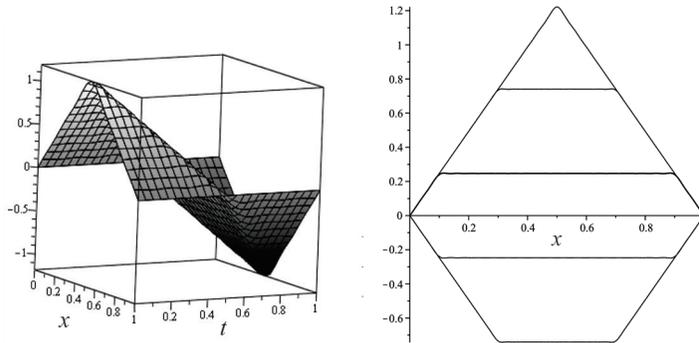


Figura 6.4: Solución del ejemplo 6.5.

Ejercicio 6.5 Obtenga las expresiones exactas para R_n y δ_n en términos de a_n y b_n . ■

Por último, una observación interesante, la cantidad $\omega_n = \frac{n\pi\alpha}{l}$ llamada frecuencia del n -ésimo modo tiene que ver con el sonido placentero de las cuerdas de un violín o guitarra a diferencia del sonido un tanto ruidoso de un instrumento de percusión. Observe que todas son múltiplos enteros de la frecuencia ω_1 llamada frecuencia fundamental, (algo que de alguna manera sabían los pitagóricos) a diferencia de lo que ocurre con la membrana de un tambor, como se verá más adelante.

6.4 Solución de la ecuación de Laplace

Se considerará la ecuación de Laplace junto con condiciones de frontera tipo Dirichlet en coordenadas polares (ver fórmula (4.5) capítulo 4), es decir, se analizará el siguiente problema (PL_o):

$$(PL_o) \begin{cases} (edp) & \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < r_0, \\ (cf) & u(r_0, \theta) = g(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

en el disco $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq r_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ con u acotada.

Este problema surge en diversas aplicaciones. Se puede interpretar como la ecuación que satisface un potencial electrostático u dentro de un círculo de radio r_0 cuando se

conoce el potencial en la frontera, $u(r_0, \theta) = g(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Otra interpretación del problema es la de la película de jabón. Se considera un alambre que forma una curva cerrada cuya altura está dada por $g(\theta)$. Se sumerge el alambre en una solución jabonosa para que se forme una película. La altura de cada punto de la película esta dada por la solución del problema (PL_o) .

Para resolver (PL_o) se propone una solución de la forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Al sustituir esta ecuación en la edp del problema (PL_o) y multiplicando por r^2 , se tiene

$$r^2 R''(r)\Theta(\theta) + rR'(r)\Theta(\theta) + R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

Al dividir por $R(r)\Theta(\theta)$ y separando variables obtenemos

$$\frac{r^2}{R(r)}R''(r) + \frac{r}{R(r)}R'(r) = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = k,$$

de donde se llega al par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - kR(r) = 0, \quad (6.50)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + k\Theta(\theta) = 0. \quad (6.51)$$

Para que u sea univaluada en θ , las soluciones de la ecuación (6.51) deben ser periódicas de periodo 2π , es decir, $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. En tal caso los valores permisibles de k son cuando $k = n^2 \geq 0$. Si $k = 0$ las únicas soluciones periódicas son $\Theta(\theta) = c$ ya que los casos $k = 0$, $\Theta \neq c$ y $k < 0$ no llevan a soluciones periódicas, como puede comprobar el lector (problema 10).

Al resolver la ecuación

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + n^2 \Theta(\theta) = 0$$

se llega a

$$\Theta_n(\theta) = c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta). \quad (6.52)$$

Si se sustituye $k = n^2$ en la ecuación (6.50) se tiene

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} - n^2 R(r) = 0 \quad (6.53)$$

la cual es una ecuación de Euler. En el apéndice B, ejemplo B.1, página 236, se muestra que la solución general está dada por

$$R_n(r) = \alpha_1 r^n + \alpha_2 r^{-n} \quad (6.54)$$

Note que la solución anterior puede escribirse en la forma

$$R_n(r) = \lambda_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n}, \quad (6.55)$$

donde $\alpha_1 r_0^n = \lambda_1$ y $\alpha_2 r_0^{-n} = \lambda_2$.

Por lo tanto hemos obtenido soluciones de la ecuación de Laplace de la forma

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= R_n(r)\Theta_n(\theta) \\ &= \left(\lambda_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n}\right) (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)), \end{aligned} \quad (6.56)$$

con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Obsérvese que para $n = 0$ las soluciones acotadas de la ecuación de Euler dentro del disco son constantes.

Para el problema (PL_o) , $(r/r_0)^{-n}$ no está acotada en $r = 0$, lo cual no tiene sentido físico, es decir, estamos interesados en **soluciones acotadas**, por lo tanto escogemos $\lambda_2 = 0$. Así, se reescriben las soluciones asimilando la constante λ_1 en las constantes c_n, d_n como es costumbre en *edo* y en *edp*, es decir, denotamos $\lambda_1 c_n$ como c_n y $\lambda_1 d_n$ como d_n :

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

y, por el principio de superposición,

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)), \quad (6.57)$$

será una solución formal de la *edp*. Finalmente, para que (6.57) satisfaga la *cf* en el problema (PL_o) , debe tenerse

$$g(\theta) = u(r_0, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)). \quad (6.58)$$

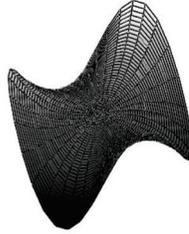


Figura 6.5: *Superficie mínima del ejemplo 6.6.*

De esta forma el problema queda resuelto al calcular los coeficientes de Fourier de $g(\theta)$, los cuales están dados por

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \quad (6.59)$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad (6.60)$$

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad (6.61)$$

los cuales se obtienen usando las relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas. Por lo tanto la solución formal del problema (PL_0) está dada por (6.61), (6.60), (6.59) y (6.57).

■ **Ejemplo 6.6** Resuelva el problema

$$(PL_1) \begin{cases} (edp) & \Delta u = 0, \quad 0 < r < 1, \\ (cf) & u(1, \theta) = g(\theta) = \cos(3\theta) - \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Solución. En este caso $g(\theta)$ está ya, desarrollada en series de Fourier con $c_n = 0$ para $n \neq 3$ y $d_n = 0$ para $n \neq 1$, así, la solución es $u(r, \theta) = r^3 \cos(3\theta) - r \sin(\theta)$. ■

6.5 Fórmula integral de Poisson

Si en la fórmula (6.57) obtenida por el método de separación de variables, se sustituyen los coeficientes c_n , d_n y c_0 de acuerdo con las fórmulas (6.59), (6.60), (6.61) obtenemos una fórmula para la solución que no involucra sumas infinitas sino solamente una integral, llamada *fórmula integral de Poisson*. En efecto, poniendo $r_0 = R$ en las fórmulas correspondientes

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} g(\alpha) [\cos(n\alpha) \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\alpha) \operatorname{sen}(n\theta)] d\alpha,$$

usando la identidad trigonométrica para el coseno de una diferencia de ángulos se tiene

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\theta - \alpha))\right) g(\alpha) d\alpha.$$

Recordamos que el intercambio entre suma infinita e integral de Riemann puede hacerse sólo suponiendo la convergencia uniforme de la serie involucrada, es decir, aquí hemos supuesto que el intercambio de integración y suma infinita puede aplicarse. Utilizamos ahora, la fórmula de variable compleja $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, donde $i = \sqrt{-1}$,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (e^{in(\theta-\alpha)} + e^{-in(\theta-\alpha)})\right) g(\alpha) d\alpha.$$

Se tiene la fórmula para la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$, cuando $|\rho| < 1$ y dado que claramente $|e^{in(\theta-\alpha)}| = |e^{-in(\theta-\alpha)}| = 1$, si notamos además que $\sum_{n=1}^{\infty} (\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} (\cdot) - 1$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta-\alpha)} = \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-\alpha)}} - 1 = \frac{R}{R - r e^{i(\theta-\alpha)}} - 1$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{-in(\theta-\alpha)} = \frac{1}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(\theta-\alpha)}} - 1 = \frac{R}{R - r e^{-i(\theta-\alpha)}} - 1.$$

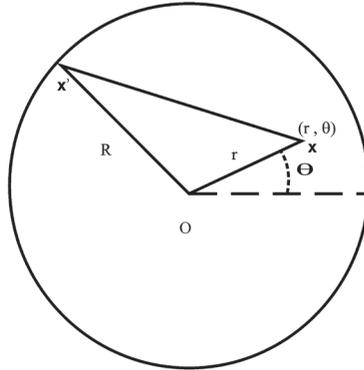


Figura 6.6: Núcleo de Poisson

Finalmente, mediante simplificaciones algebraicas se llega a

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha) + r^2} \right) g(\alpha) d\alpha. \quad (6.62)$$

La ecuación (6.62) se conoce como la fórmula integral de Poisson.

6.5.1 Observaciones sobre la ecuación de Poisson

Se puede reescribir la ecuación (6.62) en coordenadas cartesianas en lugar de polares. Se denota $\mathbf{x} = (x, y)$ a un punto dentro del círculo con coordenadas polares (r, θ) y con \mathbf{x}' un punto en la frontera con coordenadas (R, α) , de esta forma $r = \|\mathbf{x}\|$, $R = \|\mathbf{x}'\|$. Aplicando la ley de los cosenos al triángulo $O\mathbf{x}\mathbf{x}'$ de la figura 6.6, se tiene la fórmula $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)$. Además, puesto que el elemento de arco está dado por $ds = R d\alpha$ y que la función u evaluada sobre la circunferencia es g , es decir, $u(\mathbf{x}') = g(\alpha)$. Se tiene que la fórmula de Poisson puede escribirse como

$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{2\pi R} \int_{\|\mathbf{x}'\|=R} \frac{u(\mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} ds \quad (6.63)$$

Así, se tiene el siguiente teorema

Teorema 6.2 Sea $g(\alpha)$ una función continua en el círculo $\partial D = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = R\}$. La fórmula de Poisson (6.63) proporciona una función armónica en el disco $D = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < R\}$ con la propiedad

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} u(\mathbf{x}) = g(\alpha),$$

donde α es el ángulo correspondiente al punto $\mathbf{x}' \in \partial D$.

6.6 El método de expansión en funciones propias

El *non plus ultra* de los problemas de separación de variables son los problemas no homogéneos. Como una ilustración de como usar el método de separación de variables así como los poderosos resultados de este capítulo a continuación resolveremos algunos ejemplos de la ecuación de calor con fuentes internas dadas por $f(x, t)$.

Considérese el problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \alpha^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\ (cf) \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \quad 0 < t < \infty \end{array} \right. \\ (ci) u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{array} \right. \quad (6.64)$$

Las condiciones de frontera consideradas, por supuesto, pueden ser modificadas y se han escogido las más elementales para simplificar la exposición.

La idea básica del método de expansión en funciones propias consiste en desarrollar la función f como la superposición de funciones propias, es decir, se considera que f puede escribirse como $f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$ donde $X_n(x)$ son las funciones propias del problema homogéneo asociado ($f(x, t) \equiv 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\ (cf) \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \quad 0 < t < \infty \end{array} \right. \\ (ci) u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{array} \right. \quad (6.65)$$

Al aplicar el método de separación de variables al problema (6.65), y poniendo $u(x, t) = T(t)X(x)$ se obtiene el siguiente problema con valores en la frontera en ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de un parámetro (este es un caso particular de un problema de Sturm-Liouville).

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (6.66)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0, \\ X(1) = 0. \end{cases} \quad (6.67)$$

El cual tiene por soluciones $(\lambda_n, X_n(x)) = (n^2\pi, \text{sen}(n\pi x))$, $n = 1, 2, \dots$. Se propone entonces el desarrollo de la fuente de calor en la forma

$$f(x, t) = f_1(t) \text{sen}(\pi x) + f_2(t) \text{sen}(2\pi x) + \dots + f_n(t) \text{sen}(n\pi x) + \dots \quad (6.68)$$

donde las funciones $f_n(t)$, $n \geq 1$, se determinarán al usar las propiedades de ortogonalidad de las funciones propias $\text{sen } n\pi x$. Suponiendo que se cumplen las hipótesis para el intercambio de suma infinita e integral, se tiene que

$$\int_0^1 f(x, t) \text{sen}(m\pi x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t) \text{sen}(n\pi x) \text{sen}(m\pi x) dx \quad (6.69)$$

$$= \frac{1}{2} f_m(t), \quad (6.70)$$

de donde

$$f_m(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \text{sen}(m\pi x) dx. \quad (6.71)$$

Se obtienen así los coeficientes de Fourier de la función f en términos de las funciones propias del problema (6.65), con la particularidad de que en este caso no son constantes sino que dependen de la variable t .

Para encontrar u , suponemos que es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \text{sen}(n\pi x). \quad (6.72)$$

Así, las únicas incógnitas de este problema son las funciones $T_n(t)$, $n \geq 1$, las cuales pueden calcularse al sustituir (6.72), (6.68), en la edp del problema (6.64). Note que

$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \text{sen}(n\pi x)$, $u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \text{sen}(n\pi x)$, de donde la edp de (6.64) puede escribirse como

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \text{sen}(n\pi x) = -\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \text{sen}(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \text{sen}(n\pi x), \quad (6.73)$$

o equivalentemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 T_n(t) - f_n(t)] \text{sen}(n\pi x) = 0. \quad (6.74)$$

Observe que la ecuación (6.74) se cumple para toda $x \in [0, 1]$ por lo que

$$T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 T_n(t) - f_n(t) = 0. \quad (6.75)$$

Además, aplicando la (ci) se tiene

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \text{sen}(n\pi x) = \phi(x), \quad (6.76)$$

lo cual quiere decir que $T_n(0)$ son los coeficientes de Fourier de la función $\phi(x)$ es decir,

$$T_n(0) = 2 \int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx. \quad (6.77)$$

Con la información de las ecuaciones (6.77) y (6.75) se obtiene una familia infinita de problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de coeficientes constantes no homogéneas, a saber:

$$\begin{cases} T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(0) = 2 \int_0^1 \phi(x) \text{sen}(n\pi x) dx = a_n \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6.78)$$

La solución de esta clase de problemas está dada por

$$T_n(t) = a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau, \quad (6.79)$$

donde se ha usado un factor de integración⁴.

⁴Para quienes no recuerden el método para la solución de este tipo de ecuaciones se ha agregado un resumen en el apéndice B.1.1.

Por lo tanto, la solución del problema (6.64) está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi\alpha)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \text{sen}(n\pi x). \quad (6.80)$$

debe notarse que la primera suma de (6.80) tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ y se llama *parte transitoria de la solución*. La segunda suma de la solución se llama *parte estacionaria* y se debe su aparición a la influencia de la función $f(x, t)$. Para finalizar esta parte, se analiza un ejemplo con una función fuente cuya serie de Fourier es simple.

■ **Ejemplo 6.7** Encuentre la solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + \text{sen}(4\pi x), & 0 < x < 1, 0 < t < \infty \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.81)$$

Solución. En este caso se tiene $f(x, t) = f(x) = \text{sen}(4\pi x)$ y la condición de inicial $\phi(x) = \text{sen}(\pi x)$. Con estos datos se obtiene la siguiente familia de ecuaciones diferenciales correspondientes (6.75):

$$T_n'(t) + (n\pi\alpha)^2 T_n(t) = f_n(t) \quad (6.82)$$

$$= 2 \int_0^1 \text{sen}(4\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx \quad (6.83)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4, \\ 0 & \text{si } n \neq 4, \end{cases} \quad (6.84)$$

con las condiciones iniciales

$$T_n(0) = 2 \int_0^1 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(n\pi x) dx \quad (6.85)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases} \quad (6.86)$$

Resolviendo estos problemas se obtiene el cuadro 6.1

Ahora obtendremos de manera explícita las soluciones de los casos $n = 1$ y $n = 4$. Observaremos además que en los demás casos se obtiene solamente la solución trivial.

n	edo	(ci)	solución
1	$T_1'(t) + (\pi\alpha)^2 T_1(t) = 0$	$T_1(0) = 1$	$T_1(t) = e^{-(\alpha\pi)^2 t}$
2	$T_2'(t) + (2\pi\alpha)^2 T_2(t) = 0$	$T_2(0) = 0$	$T_2(t) \equiv 0$
3	$T_3'(t) + (3\pi\alpha)^2 T_3(t) = 0$	$T_3(0) = 0$	$T_3(t) \equiv 0$
4	$T_4'(t) + (4\pi\alpha)^2 T_4(t) = 1$	$T_4(0) = 0$	$T_4(t) = \frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \left(1 - e^{-(4\pi\alpha)^2 t}\right)$
$m \geq 5$	$T_m'(t) + (m\pi\alpha)^2 T_m(t) = 0$	$T_m(0) = 0$	$T_m(t) \equiv 0$

Cuadro 6.1: Colección de problemas que surgen en el ejemplo 6.7

Caso $n = 1$. Se tiene $T_1(t) = Ce^{-(\alpha\pi)^2 t}$ y como $T_1(0) = 1, C = 1$, es decir,

$$T_1(t) = e^{-(\alpha\pi)^2 t}.$$

Caso $n = 4$. Note que este caso da la única ecuación no homogénea de la familia. El factor integrante es $\mu(t) = e^{(4\pi\alpha)^2 t}$ con lo cual se obtiene

$$T_4(t) = e^{-(4\pi\alpha)^2 t} \left(\frac{1}{(4\pi\alpha)^2} e^{(4\pi\alpha)^2 t} + C \right)$$

con la (ci) $T_4(t) = 0$ tenemos $C = -1/(3\pi\alpha)^2$ y por lo tanto

$$T_4(t) = \frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \left(1 - e^{-(4\pi\alpha)^2 t}\right).$$

Caso $n \geq 5$. En este caso las ecuaciones son homogéneas por lo que se tiene $T_n(t) = Ce^{-(n\pi\alpha)^2 t}$. Pero dado que $T_n(0) = 0, C = 0$. Por lo tanto $T_n(t) \equiv 0$. Obviamente el mismo argumento usado en este caso muestra que en los casos $n = 2$ y $n = 3$ se tiene sólo la solución trivial. Con las soluciones de esta familia infinita de problemas se tiene que

$$u(x, t) = e^{-(\alpha\pi)^2 t} \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{(4\pi\alpha)^2} \left(1 - e^{-(4\pi\alpha)^2 t}\right) \text{sen}(4\pi x),$$

la cual es la solución del problema (6.81). ■

6.7 Series de Fourier

Hemos visto al aplicar el método de separación de variables que las series de Fourier trigonométricas aparecen de manera natural al resolver algunos problemas asociados a las ecuaciones de calor, de onda y de Laplace con condiciones iniciales y/o de frontera. En el siguiente capítulo estudiaremos variaciones básicas de los problemas que hemos estudiado que incluyen condiciones de frontera y/o iniciales más generales, así como ecuaciones no homogéneas, lo cual dará pie al estudio de series de Fourier en general y no solamente las que hemos visto. Pero antes estudiaremos con más detalle las series de Fourier trigonométricas.

6.7.1 Series de Fourier trigonométricas

Hemos visto en los ejemplos y en los problemas a lo largo de este capítulo que las series de Fourier trigonométricas en general tienen sentido, de alguna forma, para funciones polinomiales y trigonométricas las cuales son funciones continuas, con derivadas continuas definidas en un intervalo dado. Afortunadamente, las series de Fourier no se limitan a funciones continuas. Fourier anunció en la primera década del siglo XIX el siguiente revolucionario y polémico resultado:

Sea f una “función” definida en $-l \leq x \leq l$ si:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.87)$$

entonces la serie

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (6.88)$$

“converge” a $f(x)$.

Los términos “función” y “converge” eran un tanto ambiguos en tiempos de Fourier y tuvo que pasar algún tiempo para que fueran establecidos en la manera en que ahora se conocen y aplican. Por supuesto, en términos modernos lo anunciado por Fourier expresado líneas arriba, no se cumple para un gran número de funciones y para sus contemporáneos aún era difícil de ver el que se cumpliera para las funciones más elementales. No obstante el tiempo le dio la razón en parte a Fourier ya que existe un resultado que cubre la mayoría de aplicaciones de la Física y la Ingeniería:

Teorema 6.3 Sean f y f' continuas a trozos en $-l \leq x \leq l$, es decir, f y f' tienen un número finito de discontinuidades de salto. La serie (6.88) converge a f donde la función es continua y converge a

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \right)$$

donde $x_i, i = 1, \dots, n$ son los puntos interiores de discontinuidad de f . En $x = \pm l$ la serie converge a $\frac{1}{2} (f(l+0) + f(l-0))$ donde $f(l+0) = \lim_{x \rightarrow l^+} f(x)$ y $f(l-0) = \lim_{x \rightarrow l^-} f(x)$.

N Para una demostración de este hecho puede verse [7, sec. 41, pag. 91].

Este tipo de resultados pueden parecer excesivos para los estudiantes quienes solamente desean aplicar las matemáticas, sin embargo se debe tener cuidado con la convergencia de las series ya que, por ejemplo, en 1873 Du Bois y Reymond demostraron que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto (ver por ejemplo [24] p. 73) y aunque el ejemplo no ocurre casi seguramente en la práctica, sólo la continuidad a trozos de la función y de la derivada de la función garantizan la convergencia de la serie.

En este capítulo hemos visto que al resolver ciertos problemas asociados a las ecuaciones de calor, de onda y de Laplace es fundamental encontrar la serie de Fourier de una función dada $\phi(x)$. Nos centraremos ahora en el estudio de estas series para funciones como las enunciadas en el teorema 6.3.

Escribimos $\lim_{x \rightarrow x_i^\pm} f(x) = f(x_i \pm 0) = f(x_i^\pm)$, lo cual es notación estándar en la literatura de series de Fourier. En los puntos interiores donde f es continua tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) \right) = \frac{1}{2} (f(x_i + 0) + f(x_i - 0)) = f(x_i),$$

ya que los límites por la izquierda y por la derecha son iguales en estos puntos. Por otra parte, hemos estudiado series de Fourier de funciones definidas sólo en el intervalo $[-l, l]$, pero el estudio más general se desarrolla en funciones periódicas definidas en todo \mathbb{R} . En esta sección definiremos la extensión periódica de funciones definidas en $[-l, l]$ con lo cual se establecerá el teorema de Fourier en el contexto más amplio con el

mínimo de formalismos. Podemos ahora formular el teorema principal de este capítulo en la forma siguiente:

Teorema 6.4 — Fourier. Sea f una función continua a trozos en el intervalo $[-l, l]$ y periódica de periodo $2l$. Entonces:

(i) La serie de Fourier (6.88) converge al valor

$$\frac{1}{2}(f(x_i + 0) + f(x_i - 0))$$

en cada punto $x_i \in \mathbb{R}$ donde existen ambas derivadas $f'(x_i + 0)$ y $f'(x_i - 0)$.

(ii) Si f es continua en \mathbb{R} y f' continua a trozos, entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en \mathbb{R} . Además la serie de Fourier de f' se obtiene diferenciando la serie de Fourier de f término a término.

El enunciado de la parte (i) de este teorema es exactamente el formulado en [7] y como hemos dicho, allí puede encontrarse una demostración; la demostración de la parte (ii) puede verse en [13] teorema 5.3.1, debemos recalcar que **la función debe ser periódica**. La parte (ii) es importante, por ejemplo, si el lector desea confirmar derivando directamente que la serie de Fourier que ha obtenido de un problema de separación de variables, realmente satisface la ecuación de la cual supuestamente es solución, como en el problema 19 de este capítulo. En la siguiente sección se discutirán más detalladamente algunos ejemplos de esta situación. Note que en general, la convergencia de la serie de Fourier no es uniforme en vecindades de los puntos de discontinuidad de la función, este hecho se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

6.7.2 Extensiones periódicas de funciones

Comenzamos el estudio de las series trigonométricas de Fourier dando un recuento de algunas nociones básicas. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice periódica de periodo p , $p > 0$ si $f(x + p) = f(x)$ para todo x en \mathbb{R} . La función se dice par si $f(x) = f(-x)$ e impar si $f(x) = -f(-x)$ para toda x en el dominio de f . Debe notarse que la clasificación par, impar no agota la totalidad de las funciones ya que existen funciones que no son pares ni impares, por ejemplo la función $f(x) = x + x^2$ no es par ni impar, como puede comprobar el lector. Ejemplos prototipo de funciones impar y par son las funciones $\text{sen}(x)$ la cual es impar, y $\text{cos}(x)$ la cual es par. Pueden demostrarse los siguientes hechos (ver ejercicio 21):

a) El producto de funciones pares es par,

- b) El producto de funciones impares es par,
- c) El producto de funciones par e impar es impar.
- d) La integral de una función integrable impar en un intervalo $[-l, l]$ es cero.
- e) La integral de una función integrable par en $[-l, l]$ es el doble de la integral de misma función en $[0, l]$.

Una función definida sólo en un intervalo finito $[-l, l]$ no es periódica, sin embargo puede construirse una función que coincide con f en $[-l, l]$ y que es periódica de periodo $2l$ llamada *extensión periódica de f* .

Definición 6.1 Se define la extensión periódica de una función f definida en $[-l, l]$ como la función F con dominio \mathbb{R} cuya regla de correspondencia está dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & -l < x < l, \\ \frac{1}{2}(f(l) + f(-l)), & x = \pm l, \end{cases} \tag{6.89}$$

$$F(x + 2l) = F(x). \tag{6.90}$$

■ **Ejemplo 6.8** Encuentre la extensión periódica de la función $f(x) = x, x \in [-2, 2]$.

Solución. Usamos la definición 6.1 para obtener

$$F(x) = \begin{cases} x, & -2 < x < 2, \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases} \tag{6.91}$$

$$F(x + 4) = F(x). \tag{6.92}$$

La gráfica de F se presenta en la figura 6.7. ■

6.7.3 Paridad y series de Fourier

Saber que una función es par o impar simplifica los cálculos de los coeficientes de Fourier. De hecho, se tienen los siguientes resultados:

- a) La serie de Fourier de una función integrable *impar* definida en $[-l, l]$ sólo contiene términos de la forma $\text{sen}(n\pi x/l)$.
- b) La serie de Fourier de una función integrable *par* definida en $[-l, l]$ sólo contiene términos de la forma $\text{cos}(n\pi x/l)$.

Con una función f definida solamente en el intervalo $[0, l]$ (como las utilizadas en los problemas de la ecuación de calor) se puede construir una función par P o bien una

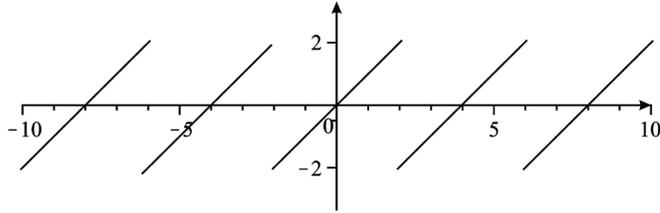


Figura 6.7: Extensión periódica de $f(x) = x$

impar I en el intervalo $[-l, l]$ por medio de las siguientes reglas

$$P(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ f(-x), & -l \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (6.93)$$

$$I(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ -f(-x), & -l \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (6.94)$$

Se obtiene de las fórmulas (6.93), (6.94), del ejercicio 21 al final de este capítulo y de los teoremas de la sección anterior que una función definida sólo en un intervalo $[0, l]$ tiene tanto una extensión impar como una par en todo \mathbb{R} y por lo tanto tiene una serie de Fourier de sólo senos

$$\sum_0^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

o de sólo cosenos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

respectivamente, con coeficientes de Fourier dados por

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

■ **Ejemplo 6.9** Encuentre la serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = 1, x \in [0, l]$.

Solución. Dado el ejercicio 21 el cual se encuentra al final de este capítulo sabemos que los únicos coeficientes distintos de cero en la serie de Fourier de la extensión impar de f están dados por

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx \\
 &= \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 4/n\pi & n \text{ impar} \end{cases}
 \end{aligned}$$

lo cual completa el ejercicio. ■

■ **Ejemplo 6.10** Una barra de metal con conductividad constante k y longitud l se encuentra a 1 grado centígrado en el instante $t = 0$. Suponemos que la barra se encuentra aislada excepto en los extremos y que no hay fuentes de calor. ¿Cuál es la temperatura de la barra para $t > 0$, si los extremos están a 0° en todo $t \geq 0$.

Solución. Sea $u(x, t)$ la temperatura de la barra para $x \in [0, l], t \geq 0$. Entonces u satisface el problema de calor

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = 1, & 0 \leq x \leq l \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{6.95}$$

Por lo tanto de acuerdo a la discusión en la sección 6.2 se tiene

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) e^{-(n\pi/l)^2 t}.$$

La condición inicial $u(x, 0) = 1$ se cumple si

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right),$$

es decir, si los coeficientes b_n son los coeficientes encontrados en el ejemplo 6.9. Al escribir los números impares de la forma $2n + 1$ con $n \geq 0$, se obtiene la solución

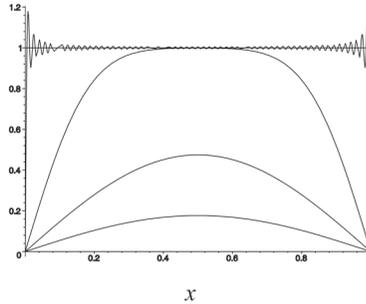


Figura 6.8: Solución de 6.10, con $t=0, t=0.01, t=0.1, t=0.2$

formal del problema (6.95):

$$u(x,t) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n+1)\pi x}{l} \right) e^{-((2n+1)k\pi/l)^2 t},$$

lo cual debe verificar el lector. ■

En la figura 6.8 se describe geoméricamente de la solución aproximada con 60 términos en la serie de Fourier del problema (6.95). La gráfica superior corresponde a $t = 0$, esta aproximación de la solución refleja el fenómeno de Gibbs de una manera clara. Para $t > 0$ no se presenta el fenómeno de Gibbs en absoluto, obviamente, ya que entonces la función solución no es discontinua. Por supuesto, este modelo no es exacto ya que en una vecindad de $x = 0$ y de $x = 1$ la temperatura u pasó de uno a cero con rapidez infinita, lo cual no modela ninguna situación física real. Sin embargo, como aproximación a la realidad el modelado con series de Fourier suele ser bastante bueno para predecir el comportamiento de la solución para $t > 0$, aún en este caso.

Ejercicio 6.6 Describa con sus propias palabras en que consiste el fenómeno de Gibbs. ■

■ **Ejemplo 6.11** Encuentre la serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = x, x \in [0, \pi]$.

Solución. La extensión impar de f denotada por $F(x)$ tiene serie de Fourier dada por

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx).$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \text{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{sen}(nx) dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

De esta forma

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\text{sen}(nx)}{n},$$

es la serie buscada. ■

Ejercicio 6.7 Realice los cálculos del ejercicio anterior para comprobar que la expresión para b_n es correcta. ■

(N) Note que la igualdad de la serie sólo tiene sentido para $x \in (-\pi, \pi)$. Para $x = \pm\pi$ la serie converge a cero que es el punto de discontinuidad para la extensión impar $F(x)$ de la función $f(x) = x$. Peor aún, la derivada de la serie no sólo **no converge** a la derivada de x que es 1, sino que ni siquiera converge. Claramente, la derivada de la serie es

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nx)$$

cuyos términos no tienden a cero conforme $n \rightarrow \infty$, lo cual implica que la serie no converge.

La extensión par de $f(x) = x$ donde $x \in [0, \pi]$ se comporta mejor que la extensión impar de la misma función respecto a las derivadas como se muestra en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 6.12** Encuentre la serie de Fourier de la extensión par de la función $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$ y calcule la derivada de la serie

Solución. La extensión par de f que se denota por F tiene la serie de Fourier

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

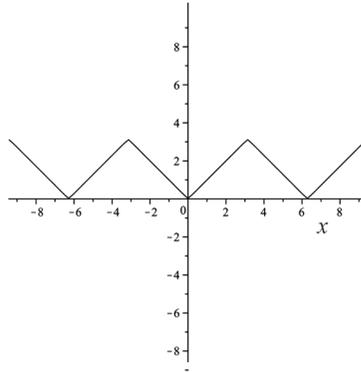


Figura 6.9: Serie de Fourier con 10 términos de la extensión par de $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$

donde $a_0 = 2/\pi \int_0^\pi F(x)dx = \pi$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1], \quad n \geq 0.$$

De esta forma

$$x = \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2 \pi},$$

para $x \in [0, \pi]$. ■

Observe que si se derivan formalmente ambos miembros de la igualdad anterior se tiene:

$$1 = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n+1)x)}{(2n+1)\pi}$$

Lo cual coincide con la serie de Fourier de senos de la función $g(x) = 1$ en $[0, \pi]$, $g(x) = -1$ en $[-\pi, 0)$, como era de esperarse debido al teorema 6.4. Debe notarse la inamovible presencia del fenómeno de Gibbs en los puntos de discontinuidad.

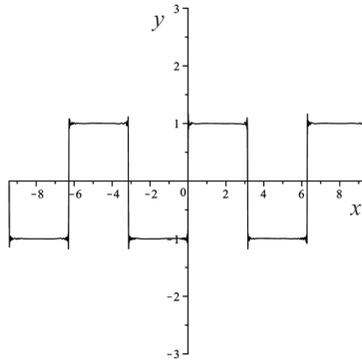


Figura 6.10: Serie de Fourier con 100 términos de la derivada de la extensión par de $f(x) = 1, x \in [0, \pi]$

6.8 Problemas y ejercicios del Capítulo 6

Ecuación de calor:

- Use el método de separación de variables para obtener la solución de los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y}, u(0, y) = 3e^y - 5e^{4y}.$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} + u, u(0, y) = e^y + e^{-2y}.$

Indicación. Para resolver estos problemas deberá usarse el principio de superposición, teorema 6.1.

- La ecuación de calor en dos dimensiones puede escribirse como

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}.$$

Suponga que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ y encuentre las ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer $X(x), Y(y), T(t)$.

- Verifique que las soluciones $u_n(x, t)$ en (6.21) satisfacen la ecuación $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ y las condiciones $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

4. Muestre que

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ l/2 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Indicación: Utilice la identidad

$$\sin(Ax) \sin(Bx) = \frac{1}{2} [\cos((A-B)x) - \cos((A+B)x)].$$

5. Una barra de un metal con $\alpha^2 = 0.75 \text{ cm}^2/\text{s}$ de 10 cm de longitud es calentada a una temperatura uniforme de 100°C . En $t = 0$ los extremos de la barra se sumergen en un baño helado a 0°C y a partir de ese momento se mantienen los extremos a esta temperatura. No se permite que escape calor a través de la superficie lateral de la barra. Encuentre una expresión para la temperatura en todo punto de la barra en cada instante.

Solución.
$$u(x,t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi x}{10}\right)}{2n+1} e^{-0.75(2n+1)^2 2\pi t/100}.$$

6. Plantee los subproblemas no homogéneos que aparecen al usar las técnicas de la sección “Problemas con (cf) no homogéneas” en la sección de la ecuación de calor para resolver los problemas siguientes.

a)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) \\ (cf) \begin{cases} u(0,t) = 3 \\ u(1,t) + 2u_x(1,t) = 5, & t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, & 0 < t < \infty, \\ u(x,0) = x^2 \\ (cf) \begin{cases} u(0,t) - 2u_x(0,t) = 3t \\ u(1,t) + 2u_x(1,t) = 5t^2, & t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

7. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \text{sen}(2\pi x) \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 3 \\ u(1, t) = 5, \quad t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Ecuación de onda:

8. Desarrolle la fórmula $\cos[n\pi\alpha(t - \delta_n)/l]$ para obtener R_n, δ_n , en términos de a_n, b_n .
9. ¿Cuál es la solución del problema (PO_o) cuyas (ci) son $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \text{sen}(5\pi x)$?

Fórmula integral de Poisson:

10. Verifique que si $k = 0$ o $k < 0$ en la ecuación (6.51) no se obtienen soluciones periódicas, excepto $\Theta = \text{constante}$.
11. Usando las relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas demuestre las ecuaciones (6.59), (6.60) y (6.61).

Series de Fourier:

12. Demuestre que los coeficientes de Fourier de una función son únicos. Utilice este hecho para demostrar que los coeficientes de Fourier de la serie de cosenos de $f(x) = \cos(2x)$ es finita. Encuentre los coeficientes sin realizar ninguna integración.
13. Resuelva los siguientes problemas (k y $\alpha \in \mathbb{R}$)

a)

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = x^2, & 0 < x < l, \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ u(x, 0) = \cos(2x), & 0 < x < l, \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ (ci) \begin{cases} u(x, 0) = \cos x, & 0 < x < l, \\ u_t(x, 0) = -\operatorname{sen} x \end{cases} \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \end{cases}$$

14. Resuelva la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = y - y^2, & 0 < y < 1. \end{cases} \end{cases}$$

Método de expansión en funciones propias:

15. Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + \operatorname{sen}(\pi x) + \operatorname{sen}(2\pi x), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = 2, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.96)$$

16. Resuelva por el método de expansión en funciones propias

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + t \operatorname{sen}(\pi x), & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.97)$$

17. Resuelva por el método de expansión en funciones propias

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} + t \operatorname{sen}(\pi x), & 0 < x < 1, 0 < t < \infty \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = \operatorname{sen} 3\pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.98)$$

18. Se ha observado numéricamente que

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2} \right)^2 \approx 3.142.$$

Use una solución periódica de un problema de calor unidimensional para demostrar que $\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2} > \sqrt{\pi}$.

Problema 18 tomado de [23].

Series de Fourier trigonométricas:

19. Muestre que w_t diverge para w definida por la serie

$$w(x, t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-(n\pi)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x),$$

para algún t .

20. Explique si la función w del ejercicio anterior satisface el siguiente problema

$$\begin{cases} (edp) & w_t = w_{xx}, & 0 < x < 1, 0 < t < \infty, \\ (cf) & \begin{cases} w(0, t) = 0, & 0 \leq t \leq \infty, \\ w(1, t) = 1 \end{cases} \\ (ci) & \begin{cases} w(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Extensiones periódicas de funciones:

21. Los siguientes ejercicios generalmente se estudian en un curso de cálculo elemental. El lector no debe tener mayores dificultades para resolverlos.

- a) Muestre que el producto de funciones pares es par, que el producto de impares es par y que el producto par impar da función impar. Muestre también que la integral de una función impar en un intervalo $[-l, l]$ es cero y que la integral de una función par en $[-l, l]$ es el doble de la integral de misma función en $[0, l]$.

- b) Utilice el inciso anterior para mostrar que si f es par se tiene para los coeficientes de Fourier

$$0 = b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

22. Encuentre la extensión periódica y calcule la serie de Fourier de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$.
b) $f(x) = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$.
c) $f(x) = \cos x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Introducción

Funciones de Bessel
Los polinomios de Legendre
Series de Fourier generales

Problemas y ejercicios del Capítulo 7

7 Problema de Sturm-Liouville

7.1 Introducción

En los problemas asociados a la ecuación de calor y la ecuación de onda analizados hasta ahora, cuando se aplica el método de separación de variables se ha obtenido una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0. \quad (7.1)$$

En esta ecuación se busca encontrar tanto las funciones y como los valores del parámetro λ , para los cuales las soluciones no triviales de (7.1) satisfacen las condiciones de frontera

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (7.2)$$

En general los problemas asociados a las (edp) de orden dos para las cuales se aplica el método de separación de variables con frecuencia dan lugar a encontrar los valores de λ y las funciones y no triviales que satisfacen el problema de valores en la frontera

$$(PSL) \begin{cases} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) + \lambda s(x)y(x) = 0, & \alpha < x < \beta, \\ (c.f) \begin{cases} a_1y(\alpha) + b_1y'(\alpha) = 0, & a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \\ a_2y(\beta) + b_2y'(\beta) = 0, & a_2^2 + b_2^2 \neq 0, \end{cases} \end{cases} \quad (7.3)$$

donde las funciones reales p, q, r, s satisfacen ciertas condiciones de continuidad y diferenciabilidad que estableceremos más adelante y a_1, a_2, b_1, b_2 son constantes reales. Por ejemplo para el problema (7.1) con condiciones de frontera (7.2) se tiene $a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = 0$, y $p(x) \equiv s(x) \equiv 1, q(x) \equiv r(x) \equiv 0$. El problema (7.3) se conoce como problema de *Sturm-Liouville*.

■ **Ejemplo 7.1** Encuentre los valores reales de λ para los cuales el problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l, \\ (cf) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0, \end{cases} \end{cases} \quad (7.4)$$

tiene solución no trivial, así como las soluciones correspondientes.

Solución. Hemos ya resuelto este problema al estudiar la ecuación de calor y de onda, sin embargo resumiremos los resultados. Recuérdese que para resolver estos problemas se deben considerar las opciones $\lambda = 0, \lambda > 0$ y $\lambda < 0$. Para el caso $\lambda = 0$ se tiene que la única solución posible es $y \equiv 0$. Para $\lambda < 0$ también se obtienen soluciones triviales. Solamente el caso $\lambda > 0$ da soluciones no triviales $y_n = \text{sen} \frac{n\pi x}{l}$ correspondientes a los valores $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, n = 1, 2, \dots$ ■

A los valores de λ y a las funciones no triviales que son solución del problema (7.3) de valores en la frontera se les conoce como *valores propios y funciones propias* respectivamente.

■ **Ejemplo 7.2** Encuentre los valores propios reales y las funciones propias de valor real correspondientes al problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < l, \\ (cf) \begin{cases} y(0) + y'(0) = 0 \\ y(l) = 0, \end{cases} \end{cases} \quad (7.5)$$

donde $l \neq 1$.

Solución. Caso $\lambda = 0$. Al sustituir $\lambda = 0$ en (7.5) Se tiene la ecuación $y'' = 0$, la cual tiene solución $y(x) = c_1 x + c_2$. Aplicando las condiciones (cf) se tiene el sistema

$$\begin{aligned} c_2 + c_1 &= 0 \\ c_2 + c_1 l &= 0. \end{aligned}$$

el cual tiene la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$ dado que $l \neq 1$. Es decir, $y(x) \equiv 0$.

Caso $\lambda < 0$. La ecuación tiene solución $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ de acuerdo con el método propuesto en la página 236. Dado que las (cf) en (7.5) se traducen en $y(0) = c_1 + c_2$, $y'(0) = \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2)$ y, por otra parte, $0 = y(l) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l}$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} c_1(1 + \sqrt{-\lambda}) + c_2(1 - \sqrt{-\lambda}) = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Por la regla de Cramer el sistema (7.6) tiene solución no trivial si

$$\begin{vmatrix} (1 + \sqrt{-\lambda}) & (1 - \sqrt{-\lambda}) \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = 0, \quad (7.7)$$

es decir, si $\sinh(\sqrt{-\lambda}l) + \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}l) = 0$, la cual no tiene solución si $\lambda < 0$ ya que $l > 0$, de donde $c_1 = c_2 = 0$, por lo tanto, $y(x) \equiv 0$.

Caso $\lambda > 0$. La solución de $y'' + \lambda y = 0$ es

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Las (cf) dan lugar a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \sqrt{\lambda} = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

tal sistema tiene solución no trivial si

$$\tan(\sqrt{\lambda}l) = \sqrt{\lambda}. \quad (7.9)$$

La ecuación anterior puede resolverse por métodos numéricos, por ejemplo con el método de Newton, pero podemos darnos una idea de las soluciones haciendo la sustitución $\xi = \sqrt{\lambda}l$ y observando la gráfica de $y = \tan \xi$, y de la recta $y = \xi/l$. Las intersecciones de las gráficas se encuentran en la figura 7.1 en los puntos cuyas abscisas son $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$. Por lo tanto los valores propios están dados por $\lambda_n = (\xi_n/l)^2$ y las funciones propias correspondientes por múltiplos distintos de cero de

$$y_n(x) = -\frac{\xi_n}{l} \cos\left(\frac{\xi_n}{l}x\right) + \sin\left(\frac{\xi_n}{l}x\right),$$

donde $n = 1, 2, \dots$ ■

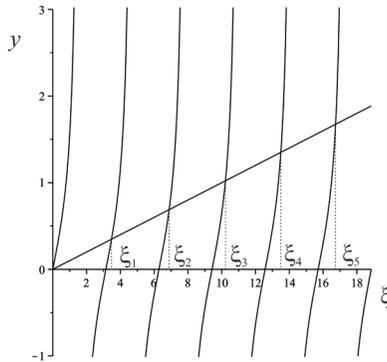


Figura 7.1: Gráfica de $\tan \xi = \xi/l$, con $l = 10$.

Aplicando el ejemplo anterior se resuelve el siguiente problema asociado a la ecuación de calor con condiciones de frontera tipo Newton.

■ **Ejemplo 7.3** Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & 0 < x < l, 0 < t < \infty, l \neq 1 \\ (cf) \begin{cases} u_x(0,t) + u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{cases} \\ (ci) \quad u(x,0) = f(x). \end{cases} \quad (7.10)$$

Solución. Aplicando el método de separación de variables con $u(x,t) = X(x)T(t)$ se obtienen los siguientes problemas en ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T' - k\alpha^2 T = 0, \quad (7.11)$$

$$X'' - kX = 0, \quad \begin{cases} X'(0) + X(0) = 0, \\ X(1) = 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

Observe que el problema (7.12) coincide con el problema (7.5), haciendo $\lambda = -k$. El problema se reduce entonces a encontrar los valores propios de la ecuación (7.12) es decir, las raíces de la ecuación $\tan \sqrt{\lambda}l = \sqrt{\lambda}$.

Ceros de $\tan \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$	Valor numérico aproximado de $\sqrt{\lambda}$	Columna anterior elevada al cuadrado
λ_1	1.571	2.468
λ_2	4.493	20.187
λ_3	7.725	59.675

Cuadro 7.1: Primeros ceros de la ecuación $\tan \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$.

Por lo tanto la solución del problema (7.10) es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n \alpha)^2 t} \left(-\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) \right).$$

Ahora la (ci) en (7.10) queda satisfecha si

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) \right).$$

Usando el hecho de que las funciones propias son ortogonales, un pequeño cálculo demuestra que los coeficientes de Fourier a_n en la ecuación anterior están dados por

$$a_n = \frac{1}{\gamma_n} \int_0^1 f(x) \left(-\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) \right) dx, \quad (7.13)$$

donde $\gamma_n = \int_0^1 \left(-\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) \right)^2 dx$. ■

7.1.1 Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel surgen en una gran variedad de aplicaciones físicas, una de ellas es el movimiento de una membrana de un tambor que se estudiará en esta sección.

Empezaremos con el siguiente problema asociado a la ecuación de Bessel

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda^2 r^2 R(r) = 0, \quad 0 < r < 1 \quad (7.14)$$

$$(cf) \quad \begin{cases} R \text{ acotada en } [0, 1], \\ R(1) = 0, \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$. Obsérvese que las *(cf)* no son como las definidas antes. Este es un ejemplo de los llamados *problema de Sturm-Liouville singular*. Para resolver esta ecuación se utiliza el método de Frobenius descrito en el apéndice B.2.4. Recordamos que el método de Frobenius consiste en proponer una solución de la forma

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+s}, \quad a_0 \neq 0$$

donde las constantes a_n, s , se determinan a partir de la ecuación (7.14). Sustituyamos

$$R'(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n r^{n+s-1}$$

y

$$R''(r) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n r^{n+s-2}$$

en la ecuación de Bessel para obtener:

$$r^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n r^{n+s-2} + r \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n r^{n+s-1} + \lambda^2 r^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+s} = 0.$$

Al simplificar la ecuación anterior se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^2 a_n r^{n+s} + \lambda^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} r^{n+s} = 0. \quad (7.15)$$

Debe observarse que el límite inferior de la segunda suma en (7.15) es $n = 2$ el cual se obtuvo con un cambio de índice. Escribimos la identidad anterior como una sola suma, para lo cual quitamos los dos primeros términos de la primera suma.

$$s^2 a_0 r^s + (s+1)^2 a_1 r^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+s)^2 a_n + \lambda^2 a_{n-2}] r^{n+s} = 0. \quad (7.16)$$

Como la identidad (7.16) se cumple para todo $r \in (0, 1)$ se debe tener

$$s^2 a_0 = 0, \quad (7.17)$$

$$(s+1)^2 a_1 = 0, \quad (7.18)$$

$$(n+s)^2 a_n + \lambda^2 a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2. \quad (7.19)$$

De la ecuación (7.17) se tiene $s = 0$ de donde se obtiene de la ecuación (7.18) $a_1 \equiv 0$. Finalmente, se tiene de la ecuación (7.19) al sustituir $s = 0$, la relación recursiva

$$a_n = \frac{-\lambda^2 a_{n-2}}{n^2}. \quad (7.20)$$

Dado que $a_1 = 0$ se sigue de (7.20) que $a_3 = 0$ e iterando tal fórmula se llega a $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$ es decir todos los coeficientes impares son cero. Para los coeficientes pares se tiene

$$a_2 = \frac{-\lambda^2 a_0}{2^2},$$

$$a_4 = \frac{-\lambda^2 a_2}{4^2} = \frac{\lambda^4 a_0}{2^2 4^2},$$

etcétera. Se llega así a una solución de la ecuación de Bessel de orden cero, denotada por J_0

$$R_1(r) = J_0(\lambda r) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda r)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}. \quad (7.21)$$

El método de Frobenius da una segunda segunda solución linealmente independiente de la forma

$$R_2(r) = R_1(r) \log r. \quad (7.22)$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de Bessel (7.14) es $R(r) = c_1 R_1(r) + c_2 R_2(r)$ pero dada la (cf) que indica que R debe ser acotada en $[0, 1]$, se debe tener $c_2 = 0$ ya que $\log r$ no es acotada cuando $r \rightarrow 0^+$. Si $c_1 \neq 0$ la condición $R(1) = 0$ se traduce en

$$J_0(\lambda) = 0.$$

De esta forma los valores propios positivos de λ corresponden a los ceros de la función de Bessel de orden cero, los cuales se pueden calcular numéricamente, de hecho cualquier programa de matemáticas tienen comandos especiales para evaluar los ceros de esta función.

Ceros de $J_0(r)$	valor numérico aproximado
λ_0	2.404825558
λ_1	5.520078110
λ_2	8.653727913
λ_3	11.79153444
λ_4	14.93091771
λ_5	18.07106397
λ_6	21.21163663
λ_7	24.35247153
λ_8	27.49347913

Cuadro 7.2: Primeros ceros de la función J_0 de Bessel

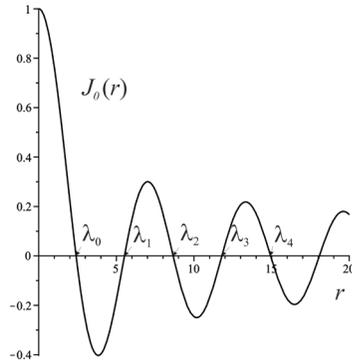


Figura 7.2: Gráfica de $y = J_0(r)$.

En el cuadro 7.2 se han calculado los primeros nueve ceros de la función J_0 de Bessel. Finalmente a cada valor propio λ_n , le corresponden funciones propias definidas en $[0, 1]$ dadas por múltiplos distintos de cero de $R_n(r) = J_0(\lambda_n r)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$. Las gráficas de tres funciones propias se encuentran en la figura 7.3.

N La forma general de la ecuación de Bessel es

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2)R(r) = 0 \quad (7.23)$$

las cuales tiene soluciones acotadas en $[0, 1]$ y se denotan por $J_n(r)$. Estas funciones se llaman funciones de Bessel de n -ésimo orden de primer tipo.

Para las funciones de Bessel de orden cero, se conoce la siguiente relación de ortogonalidad, la cual será clarificada cuando se traten las series de Fourier en general.

$$\int_0^1 r J_0(\lambda_i r) J_0(\lambda_j r) dr = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{2} J_1^2(\lambda_i) & i = j. \end{cases} \quad (7.24)$$

■ **Ejemplo 7.4** Como una aplicación de las funciones de Bessel podemos resolver el problema de una membrana circular en un tambor, cuando se supone que las vibraciones de la membrana no dependen del ángulo, sino sólo del radio y del tiempo. La ecuación

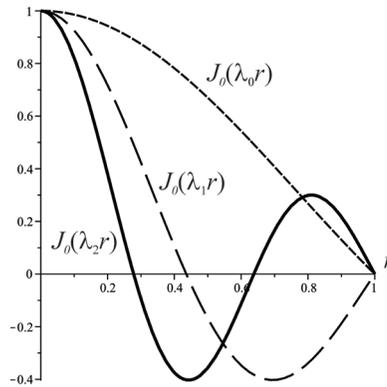


Figura 7.3: Gráfica de funciones propias para las funciones de Bessel de orden cero.

de movimiento de la membrana circular es semejante a la ecuación de la cuerda vibrante y en coordenadas polares tiene la forma.

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right). \tag{7.25}$$

Donde $u(t, r, \theta)$ es el desplazamiento de la membrana en cada punto (r, θ) en el instante t . Para simplificar suponemos que la solución no depende de θ (lo cual no es demasiado descabellado si la membrana del tambor es simétrica). En este caso la ecuación se reduce a

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right). \tag{7.26}$$

Se desea entonces resolver el problema siguiente para una membrana circular de radio uno.

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 < r < 1, \tag{7.27}$$

$$\begin{cases} (cf) & u(1, t) = 0, & 0 < t < \infty, \\ (ci) & \begin{cases} u(r, 0) = f(r), & 0 < r < 1, \\ u_t(r, 0) = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{7.28}$$

Solución. Se propone $u = R(r)T(t)$ al sustituir en (7.26) y separar variables se obtiene

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} = k \quad (7.29)$$

De donde $T'' - kc^2T = 0$. Como en el ejemplo de la cuerda vibrante se puede ver que la solución que tiene sentido físico es cuando $k < 0$, de esta forma escribiendo $k = -\lambda^2$ donde $\lambda > 0$ se tiene que

$$T(t) = c_1 \cos(c\lambda t) + c_2 \text{sen}(c\lambda t) \quad (7.30)$$

Para R se tiene la ecuación $r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R = 0$, la cual es la ecuación de Bessel de orden cero. De esta manera se tiene que la ecuación (7.26) tiene soluciones de la forma

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_0(\lambda_n r) (c_1 \cos(c\lambda_n t) + c_2 \text{sen}(c\lambda_n t)),$$

Donde J_0 es la función de Bessel de orden cero de primer tipo y λ_n son los ceros de dicha función en el intervalo $(0, \infty)$. De acuerdo a las condiciones de ortogonalidad (7.24) y las (cf), (ci) (7.28) se llega a la solución

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) \cos(c\lambda_n t), \quad (7.31)$$

con

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr, \quad n = 1, 2, \dots$$

De esta forma queda resuelto el problema del movimiento de una membrana circular. ■

7.1.2 Los polinomios de Legendre

Como un último ejemplo de problemas de valores propios consideramos el problema donde aparecen los polinomios de Legendre. Tales polinomios surgen de manera natural al resolver la ecuación de Legendre,

$$(1-x^2) \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - 2x \frac{d\Phi(x)}{dx} + \lambda\Phi(x) = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (7.32)$$

La ecuación de Legendre (7.32) aparece, como veremos, al aplicar el método de separación de variables a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Esta ecuación

aparece también en muchas áreas de matemáticas y física. El método de series de potencias (ver B.2.4) dará como solución, los famosos polinomios de Legendre. Supongamos que $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, al sustituir esta serie y sus primeras y segundas derivadas en (7.32) se llega a

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n(\lambda - n(n+1)) + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n = 0. \quad (7.33)$$

De donde se obtiene la relación recursiva, para $n \geq 2$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n(\lambda - n(n+1))}{(n+2)(n+1)}. \quad (7.34)$$

Si λ en (7.34) es de la forma $\lambda = m(m+1)$ con $m \in \mathbb{N}$, la serie $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se reduce a, $\Phi(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n = P_m(x)$, es decir, un polinomio de grado m . A los polinomios $P_m(x)$ normalizados adecuadamente se les conoce como polinomios de Legendre. En la ecuación clásica de Legendre λ es de la forma $m(m+1)$, con $m \in \mathbb{N}$, una pregunta pertinente para el lector es ¿qué pasa si λ no es de esta forma?

Ejercicio 7.1 Realice los cálculos necesarios para obtener (7.33) y (7.34). ■

Recordamos que el método de series de potencias, permite encontrar soluciones linealmente independientes cuando se ha llegado a relaciones recursivas de la forma (7.34) poniendo, por ejemplo $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$ para obtener los coeficientes impares, y, por otra parte, $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$ para los pares. Para resolver este ejercicio, podemos tomar $n = 1$, $a_0 \neq 0$ y $a_1 = c_1 = 0$, así, de la relación recursiva (7.34) obtenemos $a_3 = -a_1(1 \cdot 2 - 1 \cdot 2)/2 = c \cdot 0 = 0$. De esta forma $0 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = \dots$ y de $a_0 = 0$ se tiene $a_{2n} = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $P_1(x) = c_1 x$.

Tomamos ahora $n = 2$, $a_0 = c_2 \neq 0$ y $a_1 = 0$. Entonces $a_2 = -a_0(2 \cdot 3 - 0 \cdot 1)/2 \cdot 1 = -3c_2$ y $0 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2n} = \dots$. De manera similar, de $a_1 = 0$ se tiene $a_{2n+1} = 0$ para toda n . Por lo tanto, $P_2(x) = c_2(1 - 3x^2)$.

Como último ejemplo, tomamos $n = 3$, $a_0 = 0$ y $a_1 = c_3 \neq 0$. Así $a_{2n} = 0$ para toda n y $a_3 = -c_3(3 \cdot 4 - 1 \cdot 2)/3 \cdot 2 = -(5/3)c_3$, $0 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2n+1} = \dots$. Por lo tanto $P_3(x) = c_3(x - (5/3)x^3)$. Puede verse (por ejemplo en [28], p. 753-764) que los polinomios de Legendre satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases} \quad (7.35)$$

n	Polinomio de Legendre
0	$P_0(x) = 1$
1	$P_1(x) = x$
2	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

Cuadro 7.3: Los primeros polinomios de Legendre.

De la relación (7.35), notamos que los polinomios P_1, P_2, P_3 de los ejemplos anteriores son ortonormales (ortogonales y de norma uno) si $c_1 = 1$, $c_2 = -1/2$ y $c_3 = -3/2$. De hecho existe una fórmula recursiva simple para generar los polinomios de Legendre normalizados, la llamada fórmula de Rodrigues para el n -ésimo polinomio

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (7.36)$$

En el cuadro 7.3 mostramos los primeros polinomios de Legendre.

■ **Ejemplo 7.5** Ahora podemos resolver la ecuación de Laplace en la esfera cuando la función u , sólo depende del ángulo acimutal ϕ , con condiciones de frontera tipo Dirichlet. En este caso en coordenadas esféricas el problema puede escribirse como

$$(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} [\operatorname{sen} \phi u_\phi]_\phi = 0, \quad 0 < r < 1 \quad (7.37)$$

$$u(1, \phi) = g(\phi), \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (7.38)$$

Aplicando el método de separación de variables con $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, a la

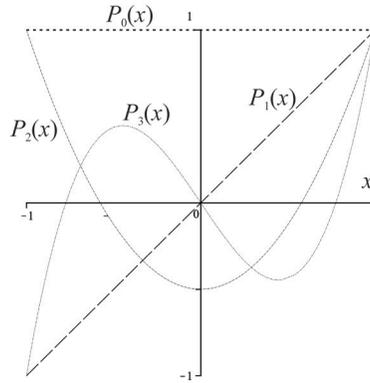


Figura 7.4: Gráfica de los primeros cuatro polinomios de Legendre.

ecuación (7.37), se obtienen las edos

$$r^2 R'' + 2rR' - kR = 0, \tag{7.39}$$

$$[\text{sen}\phi \Phi']' + k \text{sen}\phi \Phi = 0. \tag{7.40}$$

El lector puede reconocer la ecuación (7.39) como la ecuación de Euler. La ecuación (7.40) puede transformarse en la ecuación de Legendre (7.32) vía el cambio de variable $x = \cos \phi$ y la sustitución $k = n(n + 1)$ como se puede comprobar y se deja como ejercicio. Con $k = n(n + 1)$ (ver el apéndice B.2.2) se tiene la solución de la ecuación de Euler de la forma

$$R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-(n+1)}.$$

Para obtener soluciones acotadas cuando $r \rightarrow 0$ ponemos $c_2 = 0$. Finalmente con $\Phi(\phi) = P_n(\cos \phi)$ donde P_n es el n -ésimo polinomio de Legendre evaluado en $x = \cos \phi$ se tiene que

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \phi)$$

Para calcular las constantes a_n se usa la condición de frontera (7.38) y las condiciones

de ortogonalidad de los polinomios de Legendre (7.35). De donde se obtiene que

$$a_n = \frac{2m+1}{2} \int_0^\pi g(\phi) P_m(\cos \phi) \sin \phi d\phi.$$

Como ejemplo, supongamos que $g(\phi) = 1 - \cos \phi$. Claramente g está ya desarrollada en series de Fourier de polinomios de Legendre con $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ (por supuesto, debido a la propiedad de unicidad de los coeficientes de Fourier). Se llega por lo tanto a la solución del problema (7.37) con (cf), $u(1, \phi) = 1 - \cos \phi$, la cual está dada por $u(r, \phi) = 1 - r \cos \phi$. ■

Ejercicio 7.2 Mediante la regla de la cadena para la derivada compruebe que la ecuación (7.40) puede transformarse en la ecuación de Legendre (7.32) vía el cambio de variable $x = \cos \phi$ y la sustitución $k = n(n+1)$. ■

■ **Ejemplo 7.6** Resuelva el problema

$$(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin \phi} [\sin \phi u_\phi]_\phi = 0, \quad 0 < r < 1 \quad (7.41)$$

$$u(1, \phi) = \cos(2\phi), \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (7.42)$$

Solución. El problema se reduce a encontrar el desarrollo en series de los polinomios de Legendre de la función $\cos(2\phi)$. Se tiene que

$$\cos(2\phi) = 2 \cos^2 \phi - 1$$

con lo que

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \phi - 1 &= \frac{2}{3}(3 \cos^2 \phi - 1) - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3} P_0(\cos \phi) + \frac{4}{3} P_2(\cos \phi). \end{aligned}$$

Así la solución del problema (7.41) es $u(r, \phi) = \frac{-1}{3} P_0(\cos \phi) + \frac{4r^2}{3} P_2(\cos \phi)$. ■

7.1.3 Series de Fourier generales

Podemos resumir los resultados de las secciones anteriores en el cuadro 7.4 (las ecuaciones de Hermite y Tchevycheff se dejan como ejercicios).

Problema de Sturm-Liouville	valores propios	funciones propias
<p>Ecuación de movimiento armónico:</p> $y'' + \lambda y = 0,$ $y(0) = y(l) = 0.$	$\lambda_n = n\pi/l$	$f_n(x) = \text{sen}(n\pi x/l)$
<p>Ecuación con (cf) tipo Neuman:</p> $y'' + \lambda y = 0,$ $y(0) + y'(0) = 0, y(l) = 0.$	$\lambda_n = \xi_n$	$f_n(x) = \text{sen}\xi_n x$
<p>Ecuación de Bessel:</p> $x^2 y'' + x y' + \lambda^2 x^2 y = 0,$ $y(0) = 1, y(1) = 0.$	$\lambda_n = \lambda_{0n}$	$f_n = J_0(\lambda_{0n} x)$
<p>Ecuación de Legendre:</p> $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$ $-1 < x < 1.$	$\lambda_n = n(n + 1)$	$P_n(x)$
<p>Ecuación de Hermite:</p> $y'' - xy' + \lambda y = 0,$ $-\infty < x < \infty.$	$\lambda_n = 2n$	$H_n(x)$
<p>Ecuación de Tchevicheff:</p> $(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0,$ $-1 < x < 1.$	$\lambda_n = n$	$T_n(x)$

Cuadro 7.4: Ejemplos de problemas de Sturm-Liouville.

El lector podrá notar que los casos incluidos en el cuadro 7.4 son parte de un patrón más general. El patrón detrás de estas estructuras es la teoría de Sturm-Liouville, la cual a su vez es parte de la teoría espectral de operadores lineales. Consideramos el espacio vectorial de funciones reales con segundas derivadas continuas definidas en un intervalo $[a, b]$, espacio denotado por $\mathcal{C}^2[a, b]$. Requerimos ahora del Álgebra Lineal, para establecer el marco adecuado para la teoría. El lector debe recordar que en un espacio vectorial V un producto interior real es una función $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la cual satisface las siguientes propiedades.

- i) Para todo $y \in V$ la función $x \mapsto (x, y)$ es lineal en x .
- ii) $(x, y) = (y, x)$.
- iii) $(x, x) \geq 0$ y $(x, x) = 0$ si $x = 0$.

Ejemplos de productos interiores son: En $V = \mathbb{R}^N$ el producto punto de dos vectores y en $V = \mathcal{C}^0[a, b]$ el definido por $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Definición 7.1 Sea V un espacio vectorial con producto interior. Se dice que dos vectores $u, v \in V$ son ortogonales si $(u, v) = 0$.

Otro concepto que se requiere del álgebra lineal es el de operador lineal, el cual se introdujo en la página 2. Se requiere también la definición de operador formalmente autoadjunto, al que llamaremos autoadjunto solamente.

Definición 7.2 Un operador $L : V \rightarrow V$ se dice autoadjunto si $(Lu, v) = (u, Lv)$ para toda $u, v \in V$.

Consideramos ahora el operador lineal asociado a la ecuación del problema (7.3).
Sea

$$L[y] = p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x), \quad \alpha < x < \beta. \quad (7.43)$$

El problema de Sturm-Liouville (7.3) puede reescribirse en la forma

$$\begin{cases} L[y](x) = -\lambda s(x)y(x) \\ (cf) \begin{cases} a_1y(\alpha) + b_1y'(\alpha) = 0, & a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \\ a_2y(\beta) + b_2y'(\beta) = 0, & a_2^2 + b_2^2 \neq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (7.44)$$

Se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 7.1 Sea $V = \mathcal{C}^2[\alpha, \beta] \cap V_{(cf)}$, donde $V_{(cf)}$ es el espacio de funciones que satisfacen las (cf) en (7.44) y sean $f, g \in V$. Se define $(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)s(x)dx$. Entonces L definido en (7.43) es autoadjunto si $p'(x) = q(x)$ para toda $x \in [\alpha, \beta]$.

La demostración del teorema se deja como ejercicio.

Ejercicio 7.3 Demuestre el teorema 7.1. Se sugiere encontrar expresiones para (Lu, v) y (u, Lv) mediante integración por partes. Se debe llegar mediante las (cf) a una expresión de la forma

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_{\alpha}^{\beta} [q(x) - p'(x)][vu' - uv']s(x)dx$$

N Cuando se demuestra el teorema (7.1) debe notarse que si $p' = q$ el operador L puede escribirse en forma compacta como

$$L[y] = (py')' + ry$$

la cual da la formulación clásica del problema de Sturm-Liouville.

Antes de establecer el teorema que unifica y generaliza el esquema del cuadro 7.4 requerimos otra definición.

Definición 7.3 — S-L regular. Un problema de Sturm-Liouville (7.44) se dice regular si L es autoadjunto y se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $p(x), s(x) > 0$ para toda $x \in [\alpha, \beta]$.
- ii) $p(x), p'(x), r(x), s(x) \in \mathcal{C}^0[\alpha, \beta]$.
- iii) El intervalo $[\alpha, \beta]$ es finito.

Ahora podemos enunciar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 7.2 Las funciones y valores propios de cualquier problema de Sturm-Liouville regular tienen las siguientes propiedades:

- a) Todos los valores propios están en \mathbb{R} .
- b) Las funciones propias correspondientes a diferentes valores propios son ortogonales bajo el producto interior $(f, g)_s = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)s(x)dx$.
- c) El conjunto de valores propios es infinito numerable y $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

- d) A cada valor propio λ_n le corresponde una y sólo una función propia linealmente independiente $y_n(x)$.
- e) Si $f \in \mathcal{C}^1[\alpha, \beta]$ entonces f puede desarrollarse en una serie convergente de

funciones propias, llamada serie de Fourier, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$ donde

$$a_n = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) y_n(x) s(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} y_n^2(x) s(x) dx}.$$

La existencia de soluciones (λ, y) del problema (7.44) así como el teorema 7.2 son demostrados en el contexto más general de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert por ejemplo en [10]. Una demostración que sólo requiere de *edo* se encuentra en [6]. Sólo para dar una idea de la generalidad de los resultados demostramos la propiedad b) de ortogonalidad de las funciones propias y en la propiedad e) se muestra como se determinan los coeficientes.

Demostración. Propiedad b). Sean y_n, y_m funciones propias correspondientes a valores propios distintos λ_n, λ_m . Entonces

$$(L[y_n], y_m) = (-\lambda_n y_n, y_m)_s = -\lambda_n \int_{\alpha}^{\beta} s(x) y_n(x) y_m(x) dx. \quad (7.45)$$

Por otra parte como L es autoadjunto:

$$(L[y_n], y_m) = (y_n, L[y_m]) = (y_n, -\lambda_m y_m)_s = -\lambda_m \int_{\alpha}^{\beta} y_n(x) y_m(x) s(x) dx. \quad (7.46)$$

Sustrayendo (7.45) y (7.46) tenemos

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_{\alpha}^{\beta} y_n(x) y_m(x) s(x) dx = (\lambda_n - \lambda_m) (y_n, y_m)_s = 0. \quad (7.47)$$

como $\lambda_n \neq \lambda_m$ se concluye $(y_n, y_m)_s = 0$.

Propiedad e). La convergencia de las series de Fourier se puede consultar en [6], [7]. Si suponemos que la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x)$ es convergente, entonces el producto interior se distribuye, es decir,

$$(f, y_k)_s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y_n, y_k)_s,$$

pero

$$(y_n, y_k)_s = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ (y_k, y_k)_s, & \text{si } n = k. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$a_j = \frac{(f, y_j)_s}{(y_j, y_j)_s}$$

que es la forma en la que se determinan los coeficientes. □

- N
 Algunas de las ecuaciones mostradas en el cuadro 7.4 en la forma en que están escritas no definen un operador autoadjunto. En algunos casos esta dificultad se resuelve fácilmente. Por ejemplo en los casos en los que el coeficiente de y' no es la derivada del coeficiente de y'' , a veces puede multiplicarse por un factor integrante adecuado, así en la ecuación de Hermite se puede multiplicar la ecuación por el factor $e^{-x^2/2}$. En el caso de la ecuación de Hermite además el intervalo no es finito.

7.2 Problemas y ejercicios del Capítulo 7

1. Resuelva el problema de Sturm-Liouville:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \quad (7.48)$$

2. Resuelva el problema

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \quad (7.49)$$

$$\begin{cases} (cf) & \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u_x(1,t) + u(1,t) = 0 \end{cases} \\ (ci) & u(x,0) = f(x). \end{cases} \quad (7.50)$$

3. Encuentre la solución del problema

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 < r < 1, \quad (7.51)$$

$$\begin{cases} (cf) & u(1,t) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ (ci) & \begin{cases} u(r,0) = f(r), \quad 0 < r < 1, \\ u_t(r,0) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (7.52)$$

para a) $f(r) = \sin \pi r$, b) $f(r) = J_0(\lambda_1 r) + J_0(\lambda_3 r)$.

4. Haga el cambio de variable $x = \cos \phi$ para transformar la ecuación (7.40) en la ecuación de Legendre.
5. Resuelva la ecuación (7.39) por medio del método de Euler (ver apéndice B.2.2).
6. Encuentre la temperatura estacionaria del sólido entre dos esferas concéntricas si sus fronteras tienen temperaturas constantes, pero diferentes en cada una.
7. Resuelva el problema (7.37) con condiciones de frontera $u(1, \phi) = \cos 3\phi$. Sugerencia escriba $\cos 3\phi$ en términos de $\cos \phi, \cos^2 \phi$, etcétera, para ello puede usar la fórmula de D'Moivre.
8. Por medio del método de Frobenius encuentre dos soluciones linealmente independientes de las ecuaciones:
 - a) $y'' - 2xy' + ky = 0$, conocida como ecuación de Hermite,
 - b) $(1 - x^2)y'' - xy' + k^2y = 0$ llamada ecuación de Tchevycheff.

Muestre que las soluciones de la ecuación de Hermite H_n son polinomios si $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ y que las soluciones de la ecuación de Tchevycheff T_n son polinomios si $k = n$.

9. Aplique el método de separación de variables a la ecuación (7.25) y obtenga la ecuación de Bessel de orden n .
10. Resuelva la ecuación de Bessel de orden n por medio del método de Frobenius.
11. Demuestre el teorema 7.1. **Sugerencia:** No olvide usar las (cf).
12. Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema

$$-(xu')' - \lambda xu = 0, \quad 0 < a < x < b,$$

$$u(a) = 0,$$

$$u(b) = 0.$$

La fórmula de aproximación para la segunda derivada

Método de las diferencias finitas

Fórmulas en diferencias finitas

El método de Crank-Nicholson

Diferencias finitas. Ecuación de Laplace

Ecuaciones no lineales

Problemas y ejercicios del Capítulo 8

8 Métodos numéricos

Los *métodos numéricos* son una herramienta fundamental en la solución de ecuaciones diferenciales parciales. En este capítulo presentaremos una introducción a algunos de estos métodos y desarrollaremos a manera de ilustración, la solución numérica de los problemas de calor, de onda y de Laplace, cuya solución analítica ya conocemos, lo cual nos servirá para darnos cuenta de la efectividad de tales métodos. Por supuesto, los métodos numéricos se aplican con gran precisión en la solución de ecuaciones mucho más complicadas que las presentadas aquí, pero las técnicas que utilizaremos pueden adaptarse con facilidad a una gran cantidad de ecuaciones no homogéneas, incluso no lineales.

8.1 La fórmula de aproximación para la segunda derivada

Considérense las fórmulas de Taylor para la función f alrededor del punto x_o :

$$f(x_o + h) = f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{1}{2}f''(x_o)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_o)h^3 + o(h^4) \quad (8.1)$$

$$f(x_o - h) = f(x_o) - f'(x_o)h + \frac{1}{2}f''(x_o)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_o)h^3 + o(h^4), \quad (8.2)$$

donde $\lim_{h \rightarrow 0} o(h^4) = 0$. Sumando (8.1) y (8.2) tenemos

$$f(x_o + h) + f(x_o - h) = 2f(x_o) + f''(x_o)h^2 + o(h^4).$$

De donde se obtiene la fórmula de aproximación para la segunda derivada

$$f''(x_o) = \frac{1}{h^2} [f(x_o + h) - 2f(x_o) + f(x_o - h)] - o(h^2), \quad (8.3)$$

con $\lim_{h \rightarrow 0} o(h^2) = 0$. Con esta fórmula se introducen las fórmulas en diferencias finitas las cuales son esenciales para los métodos numéricos de este capítulo.

8.2 Método de las diferencias finitas

Consideramos la edp

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < b, \quad (8.4)$$

con las condiciones de frontera (cf)

$$(cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(a, t) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq b, \quad (8.5)$$

y condiciones iniciales (ci)

$$(ci) \begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq a, \quad (8.6)$$

donde f, g son funciones dadas explícitamente en el problema. Sea R el rectángulo $\{(x, t) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq b\}$. Se toma una partición de R formada de $n - 1$ por $m - 1$ rectángulos de lados $\Delta x = h, \Delta t = k$, donde h, k serán fijos y en general pequeños comparados con las longitudes a, b , con lo cual se obtiene una malla como la mostrada en la figura 8.1.

Cuando $t = t_1 = 0$ se tiene $u(x_i, t_1) = f(x_i)$, para $1 \leq i \leq n$, es decir para $t = t_1$ la función u es conocida. Se desea calcular u para $t > t_1$ y se construirá una fórmula, llamada fórmula en diferencias finitas, para encontrar u en los $(n - 1) \times (m - 1)$ puntos (x_i, t_j) . El hecho de que sólo se conozca la solución en un número finito de puntos constituye una de las principales diferencias de los métodos numéricos con los métodos analíticos estudiados en los capítulos anteriores de este libro. Otra diferencia es que los valores de u serán sólo aproximados, a diferencia de los métodos analíticos donde se asumen exactos.

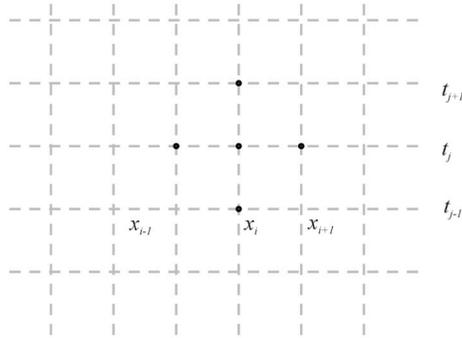


Figura 8.1: Malla para la ecuación de onda

A lo largo de este capítulo se denotará $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ con $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$. Si fijamos x podemos usar la fórmula (8.3) para obtener

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + o(k^2). \quad (8.7)$$

Por otra parte, si se fija t se tiene

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + o(h^2). \quad (8.8)$$

Dado que el espacio entre puntos de la malla es fijo y está dado por h, k se puede introducir la notación

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, & x_{i-1} &= x_i - h, \\ t_{j+1} &= t_j + k, & t_{j-1} &= t_j - k. \end{aligned}$$

Con dicha notación en las ecuaciones (8.7), (8.8), la ecuación (8.4) puede escribirse como

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \approx c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (8.9)$$

El lector debe observar que hemos omitido los términos $o(h^2)$, $o(k^2)$ por lo que el signo de igualdad en la ecuación anterior fue sustituido por \approx . Se introduce la notación $r = ck/h$ con lo cual se tiene

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} \approx r^2(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

Ahora pueden obtenerse los puntos en la fila $j + 1$ al reordenar la relación anterior si se conocen las aproximaciones en las filas anteriores, es decir, en las filas j y $j - 1$. Con lo cual se tiene

$$u_{i,j+1} \approx (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}.$$

Una vez que se ha comprendido que las fórmulas de los métodos numéricos son sólo aproximadas, podemos establecer la convención de utilizar el signo $=$ en lugar de \approx con lo cual se obtiene la *fórmula en diferencias finitas para la ecuación de onda*:

$$u_{i,j+1} = (2 - 2r^2)u_{i,j} + r^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n - 1. \quad (8.10)$$

En general si el error en una etapa j no se amplifica en etapas posteriores $j + k$, se dice que el método es estable. Puede verificarse (ver por ejemplo [15]) que la ecuación (8.10) sustenta un método estable si se cumple que

$$r = \frac{ck}{h} \leq 1.$$

Si no se cumple la condición anterior la fórmula (8.10) no es estable y la solución numérica obtenida no aproxima bien a la solución real. Existen otros esquemas llamados métodos implícitos los cuales no imponen restricciones sobre r para que se tenga estabilidad, pero se encuentran fuera de los objetivos de este libro.

Regresando a la ecuación (8.10) notamos que se necesita saber el valor de u en dos tiempos anteriores t_j, t_{j-1} , pero al comenzar solo conocemos los valores en $t_1 = 0$, es decir, $u_{i,1} = f(x_i) = f_i$, pero no conocemos los valores de u en $t_2 = k$. Para cubrir este requerimiento se utiliza la fórmula de Taylor de orden 1, como sigue

$$u(x_i, k) = u(x_i, 0) + u_t(x_i, 0)k + o(k^2). \quad (8.11)$$

Ahora como $u(x_i, 0) = f(x_i) = f_i$ y $u_t(x_i, 0) = g(x_i) = g_i$ al sustituir en (8.11) se llega a

$$u_{i,2} = f_i + kg_i, \quad i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

El error introducido al usar la fórmula anterior se propaga sin atenuarse a lo largo del procedimiento computacional, por ello se recomienda utilizar un valor pequeño de k .

A continuación presentamos un programa en *QtOctave* (que utiliza la fórmula (8.10) para resolver el problema de calor.

```
function U = eccal(f,g,a,b,c,n,m)
h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c*k/h;
r2=r^2;
r22=r^2/2;
d1=1-r^2;
d2=2-2*r^2;
U=zeros(n,m);
% Cálculo de las primeras dos filas
for i=2:n-1
    U(i,1)=feval(f,h*(i-1));
    U(i,2)=d1*feval(f,h*(i-1))+k*feval(g,h*(i-1))
        +r22*(feval(f,h*i)+feval(f,h*(i-2))); end
% cálculo de las demás filas
for j=3:m
    for i=2:(n-1),
        U(i,j)= d2*U(i,j-1)+r2*(U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1))-U(i,j-2);
    end
end U= U';
surf(U)
```

Ejercicio 8.1 Indique lo que hace el programa paso a paso. Dónde y cómo se calculan $u_{i,1}$ y $u_{i,2}$. ■

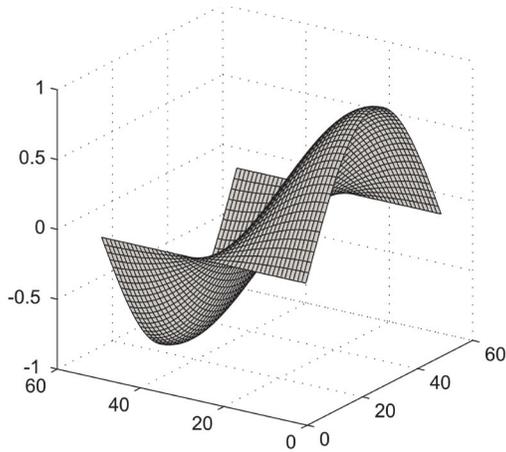


Figura 8.2: Solución numérica $eccal(f, g, 1, .5, 2, 50, 50)$.

8.3 Fórmulas en diferencias finitas para la ecuación de calor

Consideramos ahora el problema con la ecuación de calor

$$u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < b, \quad (8.12)$$

$$(ci) \left\{ u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a, \right.$$

$$(cf) \left\{ \begin{aligned} u(0, t) &= c_1, & 0 \leq t \leq b, \\ u(a, t) &= c_2. \end{aligned} \right.$$

Como en la sección 8.2 se divide el rectángulo R en $n - 1$ por $m - 1$ rectángulos de lados $\Delta x = h$, $\Delta t = k$ empezando en $t = t_1 = 0$. Se denota $u(x_i, t_1) = f(x_i) = f_i$. Se desea calcular las aproximaciones $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$.

La definición de la primera derivada de la fórmula

$$u_t = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + o(k).$$

La fórmula anterior junto con la fórmula (8.3) se utilizan para encontrar una fórmula en diferencias finitas. Recordamos que el tamaño de las mallas es uniforme y que

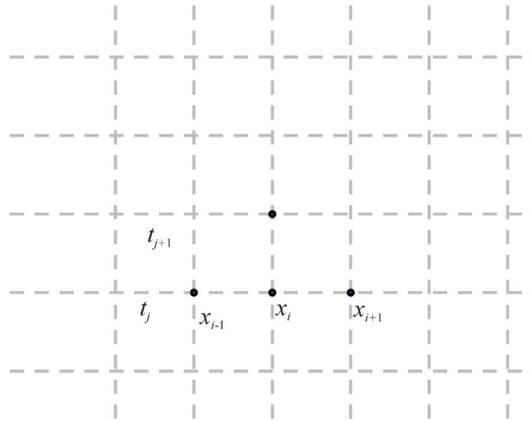


Figura 8.3: Malla para la ecuación de calor.

denotamos $x_{i+1} = x_i + h$ y $t_{j+1} = t_j + k$. Tampoco se consideran, como en la sección anterior, los términos $o(k)$, $o(k^2)$, si se toman h, k pequeños. De esta forma la ecuación de calor $u_t(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$ se transforma en

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}.$$

Se define $r = c^2 k / h^2$ y se despeja $u_{i,j+1}$ para obtener

$$u_{i,j+1} = (1 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}). \quad (8.13)$$

La ecuación en diferencias (8.13) nos permite conocer aproximaciones para u en la fila $j + 1$ a partir de aproximaciones en la fila anterior j . La simplicidad de la fórmula podría hacernos pensar que debe ser ampliamente utilizada, sin embargo, la fórmula *no siempre es estable*. Puede demostrarse que la fórmula es estable si $0 \leq r \leq 1/2$, es decir si $k \leq h^2 / 2c^2$.

A continuación presentamos un programa en *GNU Octave* el cual usa la fórmula (8.13) para calcular las aproximaciones del problema de calor (8.12).

```

function U=eccal(f,c1,c2,a,b,c,n,m)

h=a/(n-1); k=b/(m-1); r=c^2*k/h^2; r1=1-2*r;
U=zeros(n,m);
% condiciones de frontera
U(1,1:m)=c1; U(n,1:m)=c2;
% primera fila de U
U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)
% todas las demás filas de U
for j=2:m
    for i=2:n-1
        U(i,j)=r1*U(i,j-1)+r*(U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1));
    end
end U=U';
surf(U)
    
```

■ **Ejemplo 8.1** Utilizar el programa anterior para resolver el problema

$$\begin{aligned}
 u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.2, & (8.14) \\
 (ci) \quad &\left\{ \begin{aligned} u(x,0) &= x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ (cf) \quad &\left\{ \begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq 0.2, \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Solución. El programa de *GNU Octave* requiere la introducción de la función $f(x) = x - x^2$, como variable en el programa, lo cual puede hacerse como `f=@(x) (x-x.^2)` en la versión de 2007. Una solución estable se obtiene, por ejemplo, con

$$\text{eccal}(f,0,0,1,2,1,5,10),$$

de tal forma que $h = 0.2$ y $k = 0.02$ con lo cual debe ponerse $n = 6$ y $m = 11$ como argumentos en `eccal`. La solución se muestra en la figura 8.4. Como una muestra de lo delicado del método de diferencias se muestra una gráfica de la solución numérica pero con $r > 1/2$, por ejemplo con $h = 0.2$ y $k = 0.03$, es decir $n = 6$, $m = 7$ con lo cual se obtiene una solución inestable, cuya gráfica puede verse en la figura 8.4. ■



Figura 8.4: Gráficas de las soluciones numéricas estable y no estable del ejemplo 8.1.

8.4 El método de Crank-Nicholson

El método de Crank-Nicholson se basa en la construcción de una solución numérica que aproxime al valor de la solución considerando un punto $(x, t + k/2)$ situado entre dos puntos de la malla. A los esquemas del tipo surgido de esta técnica se le llama esquemas implícitos. Para este método usaremos la fórmula para las diferencias centradas que se obtiene restando las fórmulas (8.1), (8.2), lo cual da

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + o(h^2)$$

o bien

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2).$$

Tenemos entonces para u_t en $t + k/2$:

$$u_t(x, t + k/2) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + o(k^2).$$

Para $u_{xx}(x, t + k/2)$ se usa el promedio de las aproximaciones a $u_{xx}(x, t)$ y $u_{xx}(x, t + k)$ las cuales son de orden $o(h^2)$. De esta manera

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t + k/2) &= \frac{1}{2h^2} (u(x-h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x+h, t+k) \\ &\quad + u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)) + o(h^2). \end{aligned}$$

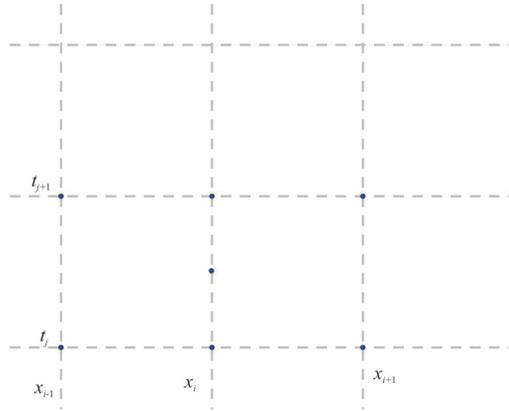


Figura 8.5: Esquema de Crank-Nicholson.

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la ecuación de calor

$$u_t(x, t + k/2) = c^2 u_{xx}(x, t + k/2),$$

de donde se obtiene el esquema numérico siguiente:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = c^2 \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2h^2}.$$

Se toma $r = c^2 k/h^2$ y se despejan los tres valores con subíndices $j + 1$ para obtener:

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = (2 - 2r)u_{i,j} + r(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}). \quad (8.15)$$

Es decir, conocidos los valores de u para $i = 2, 3, \dots, n - 1$ en j , se pueden conocer los valores de u en $j + 1$. Al trabajar con la ecuación (8.15) es costumbre tomar $r = 1$, con lo que se obtiene una reformulación más simple

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}. \quad (8.16)$$

Si recordamos que las condiciones de frontera nos dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_{1,j} &= u_{1,j+1} = c_1 \\ u_{n,j} &= u_{n,j+1} = c_2 \end{aligned} \quad (8.17)$$

entonces (8.16) da lugar a un sistema matricial tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{i,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-2,j+1} \\ u_{n-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + u_{3,j} \\ u_{2,j} + u_{4,j} \\ \vdots \\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} \\ \vdots \\ u_{n-3,j} + u_{n-1,j} \\ u_{n-2,j} + 2c_2 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Podemos escribir el sistema (8.18) en forma simbólica como

$$AU_{j+1} = B_j,$$

Donde A es la matriz tridiagonal formada por $-1, 4, -1$, U_{j+1} es un vector incógnito (la solución en el tiempo $j + 1$) y B_j es un vector conocido en el tiempo j . El algoritmo para encontrar la solución en cualquier tiempo debe comenzar por calcular la solución en el tiempo $j = 2$ dado que $j = 1$ está dado por las condiciones de frontera e iniciales $u(x, 0) = f(x)$ del problema de calor (8.12). De esta forma, primero tenemos que resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,2} \\ u_{3,2} \\ \vdots \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{n-2,2} \\ u_{n-1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + f_3 \\ f_2 + f_4 \\ \vdots \\ f_{i-1} + f_{i+1} \\ \vdots \\ f_{n-3} + f_{n-1} \\ f_{n-2} + 2c_2 \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Una vez conocido el vector $[u_{2,2}, u_{3,2}, \dots, u_{n-2,2}, u_{n-1,2}]^t$, ($j = 2$), se forma la matriz B_3 como en el sistema (8.18), y se procede a calcular el vector $[u_{2,3}, u_{3,3}, \dots, u_{n-2,3}, u_{n-1,3}]^t$, ($j = 3$), etcétera. Claramente el sistema (8.18) puede resolverse por cualquier método, como el método de Gauss-Seidel, pero dada la simplicidad de la estructura se aconseja diseñar un algoritmo específico para este tipo de matrices con eliminación gaussiana. A continuación mostramos un ejemplo de un programa que utiliza el método de Crank-Nicholson.

```

function X=tridiag(A,D,C,B)

N=length(B);
for k=2:N
    m=A(k-1)/D(k-1);
    D(k)=D(k)-m*C(k-1);
    B(k)=B(k)-m*B(k-1);
end X(N)=B(N)/D(N); for k=N-1:-1:1
    X(k)=(B(k)-C(k)*X(k+1))/D(k);
end
    
```

En el programa `tridiag` la variable A es la subdiagonal de la matriz de los coeficientes; D es la diagonal principal de la matriz de los coeficientes; C es la superdiagonal de la matriz de los coeficientes y B es el vector de los términos independientes del sistema lineal. Ahora presentamos un programa que utiliza el método de Crank-Nicholson para resolver la ecuación de calor.

```

function U=cranich(f,c1,c2,a,b,c,n,m)

h=a/(n-1);
k=b/(m-1);
r=c^2*k/h^2;
s1=2+2/r; s2=2/r-2;
U=zeros(n,m);
U(1,1:m)=c1; U(n,1:m)=c2;
U(2:n-1,1)=feval(f,h:h:(n-2)*h)';
D(1,1:n)=s1*ones(1,n);D(1)=1; D(n)=1; A=-ones(1,n-1);
A(n-1)=0; C=-ones(1,n-1); C(1)=0; B(1)=c1; B(n)=c2;
for j=2:m
    for i=2:n-1
        B(i)=U(i-1,j-1)+U(i+1,j-1)+s2*U(i,j-1);
    end
    X=tridiag(A,D,C,B);
    U(1:n,j)=X';
end U=U';
surf(U)
    
```

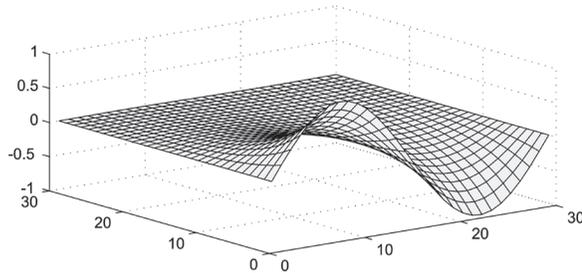


Figura 8.6: Gráfica de la solución del ejemplo 8.2.

En este programa la condición inicial es $f = f(x) = u(x, 0)$, las condiciones de frontera son $c1 = u(0, t)$ y $c2 = u(a, t)$; a y b son los extremos derechos de $[0, a]$ y $[0, b]$; c es la constante de la ecuación de calor; n y m son el número de nodos en $[0, a]$ y $[0, b]$. Como resultado se obtiene la matriz U la cual es la matriz de las aproximaciones a la solución en los nodos. El lector debe observar que el programa utiliza la ecuación (8.15) y no la versión con $r = 1$, lo cual, por supuesto, es más general, también debe notarse que se requiere el programa `tridiag` o bien recurrir a un algoritmo para resolver la matriz tridiagonal.

■ **Ejemplo 8.2** En la figura 8.5 se muestra la gráfica de la solución numérica para `cranich(f, 0, 0, 2, .5, 1, 30, 30)` con $f = \sin(\pi x)$. ■

8.5 Fórmula en diferencias finitas para la ecuación de Laplace

Después de haber estudiado los esquemas numéricos para la ecuación de onda y de calor, es fácil diseñar un esquema para la ecuación de laplace $\Delta u = 0$ en dos dimensiones espaciales. Para ello usamos la fórmula de aproximación para la segunda derivada,

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

Si se toma el mismo incremento h en las direcciones x y y se tiene:

$$\Delta u = \frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - 4u(x,y)}{h^2} + o(h^2).$$

Si se considera el rectángulo $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ con la notación estándar $x_{i+1} = x_i + h, y_{j+1} = y_j + h$ y $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ al sustituir en la fórmula anterior se obtiene

$$\Delta u_{i,j} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0, \quad (8.20)$$

llamada fórmula de diferencias con cinco puntos para la ecuación de Laplace. Consideremos el problema de Dirichlet en el rectángulo

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & (x,y) \in \text{int}R \\ u &= f(x,y), & (x,y) \in \partial R. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Donde $\text{int}R$ es el interior del rectángulo R y ∂R la frontera del rectángulo, es decir, si se conocen los valores de u en la frontera de R , por ejemplo, los siguientes valores son conocidos

$$u(x_1, y_j) = u_{1,j}, \text{ para } 2 \leq j \leq m-1, \quad (8.22)$$

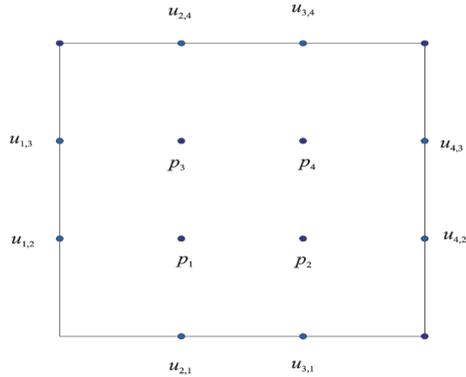
$$u(x_i, y_1) = u_{i,1}, \text{ para } 2 \leq i \leq n-1, \quad (8.23)$$

$$u(x_n, y_j) = u_{n,j}, \text{ para } 2 \leq j \leq m-1, \quad (8.24)$$

$$u(x_i, y_m) = u_{i,m}, \text{ para } 2 \leq i \leq n-1, \quad (8.25)$$

donde la fórmula (8.22) corresponde al lado derecho del rectángulo, la fórmula (8.23) corresponde al lado inferior del rectángulo, (8.24) corresponde al lado derecho y (8.25) al lado de arriba. Para simplificar, denotaremos a los puntos interiores p_1, p_2, \dots, p_k partiendo de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha. Se aplica la fórmula (8.21) para obtener un sistema de $(n-2) \times (m-2)$ ecuaciones y el mismo número de incógnitas cuyas soluciones son las aproximaciones a u en los puntos interiores de la malla. Por ejemplo, con $n = m = 4$ se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyo sistema mostramos a continuación, basados en la figura 8.7:

$$\begin{aligned} -4p_1 + p_2 + p_4 &= -u_{1,2} - u_{2,1} \\ p_1 - 4p_2 + p_3 &= -u_{3,1} - u_{4,2} \\ p_1 - 4p_3 + p_4 &= -u_{2,4} - u_{1,3} \\ p_2 + p_3 - 4p_4 &= -u_{3,4} - u_{4,3} \end{aligned}$$

Figura 8.7: Malla para $n = m = 4$.

La clave es recordar que cada vez que se usa la fórmula (8.20) el punto central lleva como coeficiente -4 y que los números conocidos $u_{i,j}$ se ponen del lado derecho de la igualdad con signo negativo, por ejemplo, para la primera ecuación se considera el esquema mostrado en la figura 8.8. Finalmente, recuérdese que para cada punto interior se debe diseñar un esquema como el de la figura 8.8 con el punto en cuestión en el centro tomando como base la figura 8.7. En este momento puede resolverse el sistema (8.26) por cualquier método, sin embargo debemos hacer una reflexión sobre la eficiencia de este procedimiento. Es claro que para obtener buenas aproximaciones se debe tener h pequeño, pero si por ejemplo el número de nodos en cada lado de R es $n = m = 1000$, entonces tendríamos un sistema de $9998 \times 9998 = 99960004$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas, por lo que los métodos directos resultan ineficientes dado el número de operaciones involucradas en tales métodos (piense por ejemplo en el método de Gauss). Por este motivo se emplean los métodos iterativos cuya mayor eficiencia se alcanza con sistemas grandes de ecuaciones. Para introducir un método iterativo eficiente, a continuación, por medio de un ejemplo, recordamos como funciona el método de Gauss-Seidel. Supongamos que se quiere resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - 5y &= -1. \end{aligned} \tag{8.26}$$

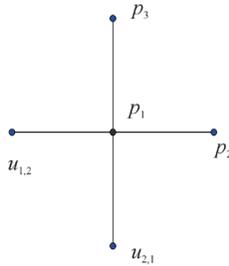


Figura 8.8: Esquema para la primera ecuación $n = m = 4$.

Es claro que se tiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{2-y}{3} \\ y &= \frac{-1-x}{-5}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

Se introduce un sistema iterativo poniendo

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{2-y^{(n)}}{3} \\ y^{(n+1)} &= \frac{-1-x^{(n)}}{-5}. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Donde se supone conocido el vector (x_n, y_n) para calcular el vector (x_{n+1}, y_{n+1}) . El proceso iterativo (8.28) se conoce como método de Jacobi. El proceso de Gauss-Seidel, modifica el proceso de Jacobi introduciendo nueva información tan pronto como se conoce, lo cual da el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{2-y^{(n)}}{3} \\ y^{(n+1)} &= \frac{-1-x^{(n+1)}}{-5}. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Obsérvese que la ecuación para y_{n+1} usa x_{n+1} la cual se calculó en la primera ecuación. Partiendo de un vector inicial $(x^{(0)}, y^{(0)})$ y determinadas condiciones de la matriz

asociada al sistema de ecuaciones los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen a la solución del sistema tras cierto número de iteraciones. La estimación del error de los métodos iterativos puede consultarse por ejemplo en [3]. Por supuesto el método de Gauss-Seidel es mucho más eficiente que los métodos directos, para sistemas con gran número de ecuaciones.

Volviendo a nuestro problema, claramente puede introducirse el método de Gauss-Seidel si se desea, pero existe otra alternativa. Si despejamos $u_{i,j}$ de la ecuación (8.20) se obtiene

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}.$$

Así

$$u_{i,j} = u_{i,j} + \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}}{4}.$$

Lo cual nos lleva al esquema numérico iterativo

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + \frac{u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)}}{4}.$$

Se define

$$r_{i,j}^{(n)} = \frac{u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)}}{4}.$$

Ahora, si $u_{i,j}^{(n)}$ aproxima a la solución, se espera que $r_{i,j}^{(n)}$ se aproxime a cero para n suficientemente grande, por lo que un esquema iterativo adecuado es

$$u_{i,j}^{(n+1)} = u_{i,j}^{(n)} + r_{i,j}^{(n)}. \quad (8.30)$$

Para iniciar se requieren valores iniciales en los puntos iniciales de la malla, para ello puede tomarse el promedio de los valores en la frontera del rectángulo en cada uno de los puntos intermedios. Finalmente, se itera hasta que $|r_{i,j}^{(n)}| < \varepsilon$, donde ε es un valor pequeño predeterminado que se desee. Incluimos un programa que resuelve la ecuación de Laplace usando este método.

```
function u=laplacenum(f1,f2,f3,f4,a,b,h,e,maxit)
n=fix(a/h)+1; m=fix(b/h)+1;
prom=(a*(feval(f1,0)+feval(f2,0))
      +b*(feval(f3,0)+feval(f4,0)))/(2*a+2*b);
u=prom*ones(n,m);
```

```

u(1,1:m)=feval(f3,0:h:(m-1)*h)';
u(n,1:m)=feval(f4,0:h:(m-1)*h)';
u(1:n,1)=feval(f1,0:h:(n-1)*h)';
u(1:n,m)=feval(f2,0:h:(n-1)*h)';
u(1,1)=(u(1,2)+u(2,1))/2;
u(1,m)=(u(1,m-1)+u(2,m))/2;
u(n,1)=(u(n-1,1)+u(n,2))/2;
u(n,m)=(u(n-1,m)+u(n,m-1))/2;
err=1; cont=0; while((err>e)&(cont<=maxit))
    err=0;
    for j=2:m-1
        for i=2:n-1
            rij=(u(i,j+1)+u(i,j-1)+u(i+1,j)+u(i-1,j))-4*u(i,j))/4;
            u(i,j)=u(i,j)+rij;
            if(err<=abs(rij))
                err=abs(rij);
            end
        end
    end
    cont=cont+1;
end
surf(u)
    
```

En este programa f_1 , f_2 , f_3 y f_4 son las condiciones de frontera dadas por funciones evaluadas en el contorno, almacenadas como cadenas de caracteres; a y b son los extremos superiores de los intervalos $[0, a]$, $[0, b]$; h es el incremento; e es la tolerancia. El programa iterará hasta que el error sea menor que e o bien el número de iteraciones sea mayor que maxit .

■ **Ejemplo 8.3** Encuentre la superficie mínima definida sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ cuya altura sobre la frontera está dada por:

$$u(0, y) = y^2 - 2y, \text{ para } 0 \leq y \leq 1, \quad (8.31)$$

$$u(x, 0) = 20x^3 - 30x^2 + 10x, \text{ para } 0 \leq x \leq 1, \quad (8.32)$$

$$u(1, y) = 20y^3 - 30y^2 + 10y, \text{ para } 0 \leq y \leq 1, \quad (8.33)$$

$$u(x, 1) = x^2 - 2x, \text{ para } 0 \leq x \leq 1. \quad (8.34)$$

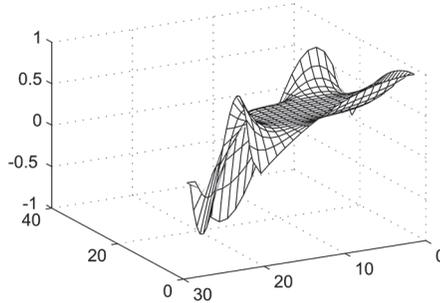


Figura 8.9: Gráfica del ejemplo 8.3

Solución. Para resolver este problema basta encontrar la solución u de problema

$$(cf) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(0, y) = y^2 - 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 0) = 20x^3 - 30x^2 + 10x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(1, y) = 20y^3 - 30y^2 + 10y, & 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 1) = x^2 - 2x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La gráfica de la solución numérica u obtenida con el programa `laplacenum` se muestra en la figura 8.9. ■

8.6 Ecuaciones no lineales

Para dar una idea de la flexibilidad de los métodos numéricos en la solución de edp estudiaremos la versión en diferencias finitas de la ecuación de Burgers. Los métodos usados en la solución numérica de la ecuación de Burgers son más sofisticados que el presentado aquí, por ejemplo el esquema predictor-corrector de MacCormack (para este esquema se puede consultar [2]), sin embargo, nuestro ejemplo dará una buena idea de como encontrar soluciones de ecuaciones no lineales empleando métodos numéricos.

Consideramos la ecuación de Burgers $u_t + uu_x = 0$ la cual escribiremos en la forma

más general

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0.$$

La forma de la función F en nuestro ejemplo es $F(u) = u^2/2$ pero nuestro esquema numérico funciona para F diferenciable en general. Escribimos entonces mediante la fórmula para las derivadas

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} + \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{\Delta x} = 0. \quad (8.35)$$

De donde se llega a la fórmula en diferencias finitas

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(F_{i+1,j} - F_{i,j}) \quad (8.36)$$

donde $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$. Se recomienda para obtener una fórmula estable tomar $r < 1/2$. Presentamos un programa en *GNU Octave* el cual puede incorporar cualesquiera condiciones iniciales dadas por $u(x, 0) = g(x)$.

```
function burgers1(dx,dt,a,b,N,g)
r=dt/dx; M=(b-a)/dx; t=N*dt;
for j=1:M+1;
    xo(j)=a+(j-1)*dx; end
%EJEMP10: burgersf(.01,.004,-8,8,600,g),g=@(x)(exp(-x.^2));
uo=feval(g,xo)%condición inicial
for h=1:M,
    u(h)=uo(h)+r*((uo(h+1))^2/2-(uo(h))^2/2);
end
%loop principal
for l=1:N;
    for h=N:M-N;
        u(h)=u(h)+r*((u(h+1))^2/2-(u(h))^2/2);
    end
    plot(u)
    pause(.01)
end
```

La figura 8.10 presenta la *corrida* del programa con la condición inicial $u(x, 0) = e^{-x^2}$ con la cual fue resuelta analíticamente la ecuación de Burgers en el ejemplo 2.10,

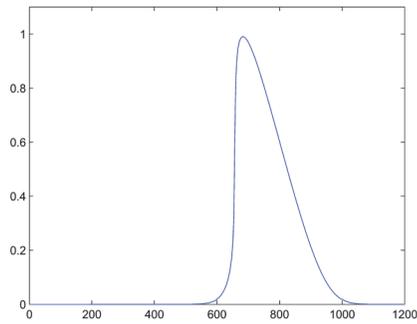


Figura 8.10: *Solución numérica del ejemplo 2.10*

justo antes de que se presente la multivalución de u . La fórmula en diferencias finitas aquí desarrollada no presenta el choque sino como discontinuidad de salto representada por una línea vertical.

8.7 Problemas y ejercicios del Capítulo 8

1. Encuentre una fórmula equivalente a (8.10) para la ecuación

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + h(x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < b.$$

2. Haga un programa computacional que pueda resolver el problema

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + h(x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < b,$$

$$(cf) \begin{cases} u(0,t) = 0, & 0 \leq t \leq b, \\ u(a,t) = 0 \end{cases}$$

donde f, g, h, a, b, c puedan ser introducidas libremente como variables del problema.

3. Explique lo que hace el programa `tridiag`, ejemplificando con una matriz de 3×3 .
4. Explique lo que hace el programa `cranich` paso a paso.
5. Cree un programa (en cualquier lenguaje de programación que le sea familiar) o modifique el programa `cranich` para que:
 - a) el programa acepte condiciones de frontera variables $u(0,t) = g_1(t)$ y $u(a,t) = g_2(t)$,
 - b) el programa resuelva el problema con $c = 2$ y $f(x) = 3x - 3x^3$, con $f = 3 \sin(\pi x) + \sin(5\pi x)$. Compare con la solución exacta, en algunos nodos.
6. Escriba un programa para resolver el problema

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x,t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < b,$$

$$(ci) \begin{cases} u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq a, \end{cases}$$

$$(cf) \begin{cases} u(0,t) = c_1, & 0 \leq t \leq b, \\ u(a,t) = c_2. \end{cases}$$

7. Encuentre un sistema para resolver la ecuación de Laplace con $n = m = 5$. ¿Cuántas ecuaciones deberá tener?
8. Describa lo que hace el programa de esta sección a cada paso.

9. Escriba un programa de la sección 8.5 que resuelva numéricamente el problema de Poisson.
10. Encuentre una fórmula de diferencias finitas para la ecuación de Laplace en coordenadas polares con condiciones de frontera arbitrarias.
11. Resuelva numéricamente la ecuación de Burgers con condición inicial $u(x, 0) = g(x)$.

Transformadas de Fourier
Propiedades de la Transformada de Fourier
Aplicaciones de la Transformada de Fourier
Transformada de Laplace
Aplicaciones de la Transformada de Laplace
La transformada de Laplace y el funcional delta
Fórmulas de Duhamel
Principio de Duhamel Clásico
Problemas y ejercicios del capítulo 9

9 Métodos de Transformadas

9.1 Transformadas de Fourier

Cuando la transformada de Fourier en una variable se aplica a cierta clase de edp en dos variables independientes se obtiene una ecuación diferencial ordinaria que depende de un parámetro. No todas las funciones poseen transformada de Fourier, pero cuando puede aplicarse apropiadamente y la ecuación transformada puede resolverse analíticamente, la transformada inversa proporciona la solución de la ecuación diferencial parcial requerida. Para utilizar el método de la transformada de Fourier se requiere que una de las variables de la edp tome valores en toda la recta real, por lo que suele utilizarse en la solución de la ecuación de calor, por ejemplo para una barra infinita. La solución de la ecuación de calor en todo \mathbb{R} tiene importancia tanto teórica como práctica, por lo que su estudio sigue siendo parte del contenido de los cursos universitarios de edp.

Definición 9.1 Consideramos una función $u = u(x, t)$ con $-\infty < x < \infty$. Se define la transformada de Fourier $\mathfrak{F}[u]$ por medio de la fórmula

$$\mathfrak{F}[u](\xi, t) = U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx, \quad (9.1)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, siempre que la integral exista.

La transformada inversa de Fourier $\mathfrak{F}^{-1}[U]$ se define por la fórmula

$$\mathfrak{F}^{-1}[U](x,t) = u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi,t) e^{i\xi x} d\xi, \quad (9.2)$$

siempre que la integral exista.

N Los siguientes puntos son muy importantes para comparar nuestro enfoque con el de otros libros:

- i) Algunos autores y programas de computación suelen omitir el factor $1/\sqrt{2\pi}$ en la integral de la definición 9.1 por lo que es importante que se consulte la definición de Transformada de Fourier, antes de usar tablas o comparar con otros enfoques, por ejemplo, existe la normalización alternativa con $1/(2\pi)$.
- ii) Claramente, en general la transformada de Fourier es una función con valores en \mathbb{C} , por lo que se requieren los elementos de Análisis Complejo para entender cabalmente la transformada de Fourier.

Hemos mencionado en la introducción que no todas las funciones poseen transformada de Fourier, a continuación presentamos un ejemplo de una función que no tiene transformada y otros ejemplos de funciones que si tienen.

■ **Ejemplo 9.1** Sea $f(x) = c$ donde c es un valor constante, calcule la transformada de Fourier de f .

Solución. Aplicamos directamente la fórmula (9.1) para obtener

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx,$$

ya que la última integral no existe, la función constante no tiene transformada de Fourier, excepto para $c = 0$. ■

■ **Ejemplo 9.2** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < a \\ 0, & \text{si } |x| > a, \end{cases}$$

donde $a > 0$, calcule la transformada de Fourier de f .

Solución. Con la fórmula (9.1) se tiene

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{-\sqrt{2\pi}i\xi} e^{-i\xi x} \Big|_{x=\pm a} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen}(a\xi)}{\sqrt{2\pi}\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(a\xi)}{\xi}\end{aligned}$$

con lo cual se completa el ejemplo. ■

(N) Dado que $|e^{i\theta}| \leq 1$ se garantiza que la transformada de Fourier de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ exista, si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Si se cumple dicha condición se dice que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

■ **Ejemplo 9.3** Calcule la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución. Directamente de la definición se tiene

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-x^2} dx, \\ &= \frac{e^{-\xi^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi/2)^2} dx \\ &= \frac{e^{-\xi^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{e^{-\xi^2/4}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

El lector debe ser capaz de justificar todos los pasos seguidos para llegar al resultado. ■

Ejercicio 9.1 Verifique que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$. ■

En general, el cálculo de las transformadas de Fourier puede ser difícil o muy laborioso y de algunos años a la fecha el uso de transformadas suele hacerse por medio de tablas o programas de computadora tales como *MATLAB*, *Mathematica*, *Maple*, *GNU Octave* y un número cada vez más grande de software libre. Dado que deseamos hacer énfasis en los métodos de edp y no en la teoría de integración compleja, pediremos que los estudiantes utilicen tablas de transformadas. En el cuadro 9.1 se muestran algunos ejemplos.

9.2 Propiedades de la Transformada de Fourier

De la gran cantidad de propiedades de la transformada de Fourier, para la aplicación en edp requeriremos sólo unas cuantas, las cuales enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 9.1 Sea $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u(x, t) \in L^1(\mathbb{R})$ para toda t entonces:

- i) La función $\xi \mapsto \mathfrak{F}[u] = U(\xi, t)$ definida por (9.1) es una función uniformemente continua en ξ . Si además, u es derivable a trozos con respecto a x y existen constantes N, M tales que $\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| < N$ y $|u(x, t)| < M$ para toda $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ entonces $\mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}[u](\xi)] = u(x, t)$.
- ii) La transformada de Fourier es lineal, es decir $\mathfrak{F}[cu + v] = c\mathfrak{F}[u] + \mathfrak{F}[v]$ para toda $c \in \mathbb{C}$ y para cualesquiera $u, v \in L^1(\mathbb{R})$.
- iii) Supóngase que $\frac{\partial^{(n-1)}u}{\partial x^{(n-1)}}$ es continua y derivable a trozos y esta derivada junto con $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ están en $L^1(\mathbb{R})$, entonces $\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right] = (i\xi)^n \mathfrak{F}[u]$, si $\lim_{\pm x \rightarrow \infty} \frac{\partial^{k-1}u(x, t)}{\partial x^{k-1}} = 0$, para toda k con $1 \leq k \leq n$. Si la n -ésima derivada parcial de u en t es una función uniformemente continua en \mathbb{R} , entonces $\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right] = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathfrak{F}[u]$.
- iv) Se define la convolución de u con v mediante la fórmula

$$(u * v)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - \xi, t)v(\xi, t)d\xi.$$

Entonces se cumple que $\mathfrak{F}[u * v] = \mathfrak{F}[u] \cdot \mathfrak{F}[v]$.

Demostración. i) Haremos la demostración de la proposición para la inversa de la transformada de Fourier en el caso más simple, cuando u_x existe en todo \mathbb{R} . Sea

$$u_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{i\xi x} \mathfrak{F}[u](\xi, t)d\xi,$$

se desea demostrar que u_L converge a u uniformemente en \mathbb{R} para toda t fija. De la definición de u_L se tiene

$$\begin{aligned} u_L(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} u(y, t) dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-i\xi y} u(y, t) dy d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y, t) \operatorname{sen}(L(x-y))}{x-y} dy, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el teorema de Fubini en la penúltima integral para intercambiar el orden de integración.

De la relación $\int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^{-1} \operatorname{sen}(L(x-y)) dy = \pi$, se tiene que

$$\pi[u_L(x, t) - u(x, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [u(y, t) - u(x, t)] \frac{\operatorname{sen}(L(x-y))}{x-y} dy. \quad (9.3)$$

Subdividimos \mathbb{R} como $\mathbb{R} = A \cup B$ donde $A = \{y : |x-y| < \delta\}$ y $B = \{y : |x-y| \geq \delta\}$, con $\delta > 0$, por determinarse más adelante, de esta forma

$$\begin{aligned} \pi[u_L(x, t) - u(x, t)] &= \int_{A \cup B} [u(y, t) - u(x, t)] \frac{\operatorname{sen}(L(x-y))}{x-y} dy \\ &= \int_{\{y: |x-y| < \delta\}} \frac{[u(y, t) - u(x, t)]}{x-y} \operatorname{sen}(L(x-y)) dy \\ &\quad + \int_{\{y: |x-y| \geq \delta\}} [u(y, t) - u(x, t)] \frac{\operatorname{sen}(L(x-y))}{x-y} dy \quad (9.4) \end{aligned}$$

de la condición $\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| < N$ se deduce que $|u(y, t) - u(x, t)| < N|y - x|$, para toda $x, y \in \mathbb{R}$, además, dado que $\operatorname{sen}(L(x-y)) \leq 1$ se tiene

$$\left| \int_{\{y: |x-y| < \delta\}} \frac{[u(y, t) - u(x, t)]}{x-y} \operatorname{sen}(L(x-y)) dy \right| \leq N\delta. \quad (9.5)$$

Como, por otra parte $|u(x, t)| < M$, tenemos

$$\left| \int_{\{y:|x-y|\geq\delta\}} \frac{-u(x, t)}{x-y} \text{sen}(L(x-y)) dy \right| \leq \leq C \left| \int_{\delta L}^{\infty} s^{-1} \text{sen} s ds \right|. \tag{9.6}$$

Donde C es una constante apropiada. Finalmente, queremos estimar

$$\int_{\{y:|x-y|\geq\delta\}} \frac{u(y, t)}{x-y} \text{sen}(L(x-y)) dy.$$

Dado que $u \in L^1(\mathbb{R})$ para toda t , existe un número $y_0 > 0$ tal que si $|y| > y_0$

$$\int_{|y|>y_0} |u(y, t)| dy < \frac{\delta \varepsilon}{4}, \tag{9.7}$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se toma y_0 suficientemente grande en (9.7) para que los conjuntos $\{|x-y| \geq \delta\} \cap \{|y| > y_0\}$ y $\{|x-y| \geq \delta\} \cap \{|y| \leq y_0\}$ no sean vacíos. Por (9.7) sabemos que

$$\int_{\{|x-y|\geq\delta\} \cap \{|y|>y_0\}} \frac{u(y, t)}{x-y} \text{sen}(L(x-y)) dy < \varepsilon/4. \tag{9.8}$$

Para estimar la integral $\int_{\{|x-y|\geq\delta\} \cap \{|y|\leq y_0\}} \frac{u(y, t)}{x-y} \text{sen}(L(x-y)) dy$ se utiliza integración por partes para llegar a la siguiente expresión:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(y, t)}{x-y} \text{sen}(L(x-y)) dy = \frac{u(y, t) \cos(Ly)}{L(x-y)} \Big|_{y=\alpha}^{y=\beta} - \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u(y, t)}{x-y} \right) \cos(L(x-y)) dy. \tag{9.9}$$

Dado que $|u_x(x, t)| < N$, $|u(x, t)| < M$ y $\frac{1}{|x-y|} < \frac{1}{\delta}$ se tiene que la integral en (9.9) tiende a cero si $L \rightarrow \infty$, en particular, existe L tal que

$$\int_{\{|x-y|\geq\delta\} \cap \{|y|\leq y_0\}} \frac{u(y, t)}{x-y} \text{sen}(L(x-y)) dy < \varepsilon/4.$$

El lector no debe tener dificultad para encontrar las expresiones precisas para α, β con $x, y \in \{|x-y| \geq \delta\} \cap \{|y| \leq y_0\}$.

Para terminar, se escoge $\delta < \varepsilon/2N$, con lo que se tiene que la expresión del lado izquierdo de (9.5) es menor que $\varepsilon/2$. Se concluye que $|u_L(x, t) - u(y, t)| < \varepsilon$ para L suficientemente grande independiente de x, t .

ii) Aplicando directamente la fórmula (9.1),

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[cu(x, t) + v(x, t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [cu(x, t) + v(x, t)] e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) e^{-i\xi x} dx.\end{aligned}$$

iii) Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[u_x(x, t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} u(x, t) e^{-i\xi x} \Big|_{x=-L}^{x=L} + \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx.\end{aligned}$$

Para el cálculo de la derivada n -ésima se usa inducción matemática. Por otra parte, para la derivada con respecto a t se deriva bajo el signo de integral, dada la hipótesis de continuidad uniforme de u .

iv) De la definición de $\mathfrak{F}[u * v]$ y por medio del teorema de Fubini se obtiene

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[u * v](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y, t) v(y, t) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} v(y, t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(x-y)} u(x-y, t) dx \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} v(y, t) dy \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi z} u(z, t) dz \right) \\ &= \mathfrak{F}[v](\xi) \cdot \mathfrak{F}[u](\xi).\end{aligned}$$

Con lo cual se termina la demostración. □

N Por supuesto las hipótesis en el teorema 9.1 no son las más generales posibles, pero pueden aplicarse en una gran cantidad de ejemplos. Hipótesis más generales

se encuentran en el contexto de la integral de Lebesgue la cual se encuentra fuera del alcance de este libro. El lector interesado puede consultar por ejemplo [12].

La afirmación iv) del teorema anterior suele emplearse en la forma

$$(u * v)(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}[u](\xi) \cdot \mathfrak{F}[v](\xi)](t). \tag{9.10}$$

9.3 Aplicaciones de la Transformada de Fourier

Consideramos el siguiente problema asociado a la ecuación de calor en toda la recta real

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ (ci) \quad u(x, 0) &= f(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{9.11}$$

N Supondremos que el problema (9.11) tiene una solución u la cual tiene la propiedad de que u, u_t, u_x y u_{xx} están en $L^1(\mathbb{R})$ y que u y u_x tienden a cero cuando $|x| \rightarrow \infty$, también suponemos que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Aplicando la transformada de Fourier a la (ci) y usando la propiedad iii) del teorema 9.1 en la edp del problema (9.11) se obtiene

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \xi^2 U(\xi, t) &= \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t}, \quad -\infty < \xi < \infty, \\ U(\xi, 0) &= \mathfrak{F}[f](\xi) = F(\xi). \end{aligned} \tag{9.12}$$

Ahora, el problema (9.12) puede resolverse como una ecuación diferencial ordinaria lineal en la variable t con lo cual se obtiene

$$U(\xi, t) = F(\xi)e^{-\alpha^2 \xi^2 t}. \tag{9.13}$$

El ejercicio 1 de la sección de problemas de este capítulo nos permite ver que

$$e^{-\alpha^2 \xi^2 t} = \mathfrak{F} \left[\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4\alpha^2 t)} \right].$$

Función	Transformada de Fourier
$e^{-a x }$,	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}$
$(1 + x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{- \xi }$
$\frac{a}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \xi }$
$\delta(x - a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ia\xi}$
$H(x + a) - H(x - a)$	$\frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}(a\xi)}{\sqrt{\pi}\xi}$

Cuadro 9.1: Ejemplos de transformadas de Fourier.

Por lo tanto $U(\xi, t)$ es el producto de transformadas de Fourier por lo que, al aplicar la transformada inversa, podemos usar la convolución (teorema 9.1, iv) para obtener

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{4\alpha\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4\alpha^2 t)} f(y) dy, \tag{9.14}$$

la cual es solución formal del problema (9.11).

La función $G(x, t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4\alpha^2 t)}$, la cual está implícita en (9.14) es de gran importancia en la solución de edp y se llama **solución fundamental** o **función de Green** asociada a la ecuación de calor en $(-\infty, \infty)$, $t > 0$. Puede demostrarse que si f es continua y acotada en \mathbb{R} entonces la función u definida por (9.14) es continua y tiene derivadas continuas respecto a x, t y que $u(x, t) \rightarrow f(x)$ cuando $t \rightarrow 0$ uniformemente en todo intervalo finito.

Ejercicio 9.2 Resuelva el problema (9.12). ■

9.4 Transformada de Laplace

El método de la transformada de Laplace es similar al de la transformada de Fourier. En ambos casos una edp se reduce a una ecuación diferencial ordinaria en las variables transformadas. Se resuelve, de ser posible, la ecuación transformada analíticamente y posteriormente se obtiene la solución de la ecuación original vía transformadas inversas. En el caso de la transformada de Laplace, la variable transformada (la cual suele ser el tiempo) varía sólo de 0 a ∞ a diferencia de la transformada de Fourier la cual, como hemos visto, varía en todo \mathbb{R} . La definición de la transformada de Laplace es la siguiente.

Definición 9.2 Consideramos una función $u = u(x, t)$ con $0 < t < \infty$. Se define la transformada de Laplace $\mathcal{L}[u]$, siempre que la integral exista, por medio de la fórmula

$$\mathcal{L}[u](x, s) = U(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt. \quad (9.15)$$

■ **Ejemplo 9.4** Sea $f(t) = 1$, entonces la transformada de Laplace de f es

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=\infty},$$

por lo tanto para $s > 0$, $\mathcal{L}[1](s) = 1/s$. ■

A continuación presentamos algunas propiedades de la transformada de Laplace que serán utilizadas en este capítulo. Las demostraciones pueden ser omitidas si así lo desea el lector. Pero primero introducimos la notación O de Landau.

Definición 9.3 Se dice que $f = O(g)$ en \mathbb{R} si existe una constante M tal que $|f(x)|/|g(x)| \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

N Los cálculos anteriores se hicieron para s real, pero también son válidos para $s \in \mathbb{C}$. De hecho los números complejos son el marco natural para las transformadas inversas, por lo cual el siguiente teorema se formula en \mathbb{C} .

Teorema 9.2 Sea $u(x, t)$ definida en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$:

i) Supongamos que $u(x, t) = O(e^{\alpha t})$ en \mathbb{R} para alguna $\alpha > 0$ es seccionalmente continua para cada x fija. Entonces la transformada de Laplace $\mathcal{L}[u](x, s)$ existe

cuando $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ y es una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ y las derivadas de $U(x, s)$ con respecto a s satisfacen la identidad

$$\frac{\partial^n U(x, s)}{\partial s^n} = \mathfrak{L}[(-t)^n u(x, t)].$$

- ii) Supongamos que $u(x, t)$ y todas sus derivadas parciales con respecto a t hasta de orden $(n - 1)$ son funciones continuas para $t \geq 0$ y de orden $O(e^{\alpha t})$. Supongamos que $\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}$ es seccionalmente continua en cada intervalo $0 < t < T$. Entonces la transformada de Laplace de la n -ésima derivada de u con respecto a t existe para $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ y está dada por la fórmula

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n}\right] = s^n U(x, s) - s^{n-1} u(x, 0) - s^{n-2} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \dots - \frac{\partial^{n-1} u(x, 0)}{\partial t^{n-1}}. \quad (9.16)$$

Finalmente, si u es derivable con respecto a x , $\mathfrak{L}\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{L}[u]$.

- iii) Supongamos que la transformada de Laplace de $u(x, t)$ dada por $\mathfrak{L}[u](x, s) = U(x, s)$ es analítica en la variable s en el plano $\operatorname{Re}(s) > \alpha$ y $O(s^{-k})$ con $k > 1$. Entonces a lo largo de la línea $x = \gamma$, para $\gamma \geq \alpha$, se cumple la fórmula de inversión para la transformada de Laplace

$$u(x, t) = \mathfrak{L}^{-1}[U(x, s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{t^z} U(x, z) dz. \quad (9.17)$$

- iv) Se define la convolución finita de u con v mediante la fórmula

$$(u * v)(x, t) = \int_0^t u(x, t - \tau) v(x, \tau) d\tau.$$

Entonces se cumple que $\mathfrak{L}[u * v] = \mathfrak{L}[u] \cdot \mathfrak{L}[v]$, es decir $u * v = \mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}[u] \cdot \mathfrak{L}[v]]$.

- v) La transformada de Laplace es lineal.

Demostración. i) Demostramos esta parte para $s \in \mathbb{R}$. Notamos que como $|u(x, t)| \leq M e^{\alpha t}$ y dado que $s > \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned} |\mathfrak{L}[u]| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T u(x, t) e^{-st} dt \right| \\ &\leq M \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= M / (s - \alpha), \end{aligned} \quad (9.18)$$

es decir, la transformada de Laplace existe. Omitimos la demostración de que \mathcal{L} es analítica.

ii) Haremos la demostración en el caso más simple en que la parcial de u respecto a t es continua y $n = 1$. La condición $u(x, t) = O(e^{\alpha t})$ garantiza la existencia de $\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right]$, como puede verse integrando por partes. En efecto,

$$\int_0^T \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-st} dt = u(x, t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=T} + s \int_{t=0}^{t=T} u(x, t) e^{-st} dt.$$

Al tomar el límite cuando $T \rightarrow \infty$ se obtiene la identidad (9.16) para el caso $n = 1$. La demostración general se sigue por inducción.

iii) Para esta parte se requiere la fórmula integral de Cauchy para funciones de variable compleja y daremos sólo un bosquejo de demostración. Se desea verificar que para \mathcal{L}^{-1} definida por (9.17) se cumple $\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[U(x, s)]] = U(x, s)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}[U(x, s)]] &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{2\pi i} \left[\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} U(x, s) e^{zt} dz \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} U(x, s) e^{(z-s)t} dz dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} U(x, s) \int_0^{\infty} e^{(z-s)t} dt dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{U(x, s)}{s-z} dz = U(x, s). \end{aligned}$$

El lector debe observar que la condición $U(x, s) = O(s^{-k})$ se utiliza para garantizar la existencia de las integrales que se aparecen en las primeras líneas en la demostración. También debe notarse que se usó el teorema de Fubini en la tercera integral y la fórmula integral de Cauchy en la última igualdad (la integral de Cauchy se puede consultar en [1]).

iv) Sean $U(x, s) = \mathcal{L}[u]$ y $V(x, s) = \mathcal{L}[v]$. Tenemos así

$$\begin{aligned} U(x, s)V(x, s) &= V(x, s) \int_0^{\infty} e^{-s\tau} u(x, \tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} u(x, \tau) e^{-s\tau} V(x, s) d\tau. \end{aligned} \tag{9.19}$$

En el ejercicio 4 d) de la sección de problemas se pide demostrar que

$$e^{-s\tau}V(x,s) = \mathcal{L}[v(x,t-\tau)] = \int_0^\infty e^{-st}v(x,t-\tau)dt.$$

Si sustituimos la última igualdad en (9.19) obtenemos

$$\begin{aligned} U(x,s)V(x,s) &= \int_0^\infty u(x,\tau) \left[\int_0^\infty e^{-st}v(x,t-\tau)dt \right] d\tau & (9.20) \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} \left[\int_0^\infty u(x,\tau)v(x,t-\tau)d\tau \right] dt \\ &= \mathcal{L} \left[\int_0^\infty u(x,\tau)v(x,t-\tau) \right] d\tau \\ &= \mathcal{L}[(u * v)(x,t)]. \end{aligned}$$

Lo cual se deseaba demostrar.

v) La linealidad de la transformada de Laplace se sigue de la linealidad de la integral, como en el caso de la transformada de Fourier. \square

9.5 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Como un primer ejemplo, resolveremos el problema asociado a la ecuación de calor con condiciones de frontera constantes y condición inicial nula.

■ **Ejemplo 9.5** Resuelva el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} u(0,t) = 0, & t > 0 \\ u(1,t) = a, & a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \end{cases} \\ (ci) \quad u(x,0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (9.21)$$

Solución. Supongamos que el problema (9.21) tiene una solución u la cual tiene la propiedad de que u, u_t son $O(e^{\alpha t})$ para alguna $\alpha > 0$. Al aplicar la transformada de Laplace a la edp, así como a las (cf) y a las (ci), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_t] &= sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) \\ &= \mathcal{L}[u_{xx}] = U_{xx}(x,s), \end{aligned}$$

ya que $u(x, 0) = 0$. Además $U(0, s) = \mathcal{L}[0] = 0$ y $U(1, s) = \mathcal{L}[a] = a/s$, esta última transformada, se sigue fácilmente del ejemplo 9.4. De esta manera el problema transformado está dado por

$$\begin{cases} U_{xx}(x, s) - sU(x, s) = 0 \\ U(0, s) = 0, \\ U(1, s) = a/s, \end{cases} \quad (9.22)$$

donde $s > 0$. Observamos que la ecuación (9.22) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes en la variable x , la cual tiene como solución general

$$U(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}.$$

Ahora dado que $U(0, s) = 0, U(1, s) = a/s$, se tiene el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = \frac{a}{s}. \end{cases}$$

Por lo tanto $U(x, s) = a \left[\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{s \sinh(\sqrt{s})} \right]$. Por lo tanto,

$$u(x, t) = a \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{s \sinh(\sqrt{s})} \right].$$

es la solución del problema original. ■

Queremos advertir al lector que evite calcular esta transformada inversa mediante una integral. Sin embargo, recordando que la solución de la ecuación de calor es única y que ya hemos resuelto el problema (9.21) por separación de variables. Así concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{s \sinh(\sqrt{s})} \right] = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x),$$

lo cual nos provee de un método adicional para calcular transformadas de Laplace inversas.

El método de la transformada de Laplace también puede utilizarse para resolver el problema de la ecuación de onda no homogéneo en un medio semi infinito, como se muestra en el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 9.6 — Vibraciones forzadas.** Resuelva el problema asociado a la ecuación de onda no homogénea

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(t), & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (9.23)$$

$u(x, t)$ acotada.

Solución. Al aplicar la transformada de Laplace en la variable t a la edp en (9.23) se tiene

$$-U_{xx}(x, s) + s^2 U(x, s) = F(s),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Como debe recordar el lector (ver apéndice B B.2) la solución de la ecuación anterior es la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada

$$A(s)e^{-sx} + B(s)e^{sx},$$

mas una solución particular, $F(s)/s^2$, es decir,

$$U(x, s) = A(s)e^{-sx} + B(s)e^{sx} + \frac{F(s)}{s^2}.$$

Ahora se desea calcular las funciones $A(s), B(s)$. La condición de acotamiento de $u(x, t)$ implica acotamiento para $U(x, s)$. Efectivamente, si $|u(x, t)| < M$ para toda $x, t > 0$ se tiene

$$|U(x, s)| \leq M \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{M}{s},$$

por lo tanto U es acotada para $s > s_0 > 0$. Comprobado el acotamiento de U se tiene que $B(s) \equiv 0$. Por otra parte $\mathcal{L}[u(0, t)] = U(0, s) = 0$ así $A(s) = -F(s)/s^2$. Por lo tanto

$$U(x, s) = F(s) \frac{1 - e^{-sx}}{s^2}.$$

La solución del problema (9.23) está dada por

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[F(s) \frac{1 - e^{-sx}}{s^2} \right].$$

Por medio de tablas o programas computacionales se puede obtener que

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}[t], \tag{9.24}$$

$$\frac{e^{-sx}}{s^2} = \mathcal{L}[(t-x)H(t-x)], \tag{9.25}$$

donde $H(u)$ es la función de Heaviside definida por medio de la fórmula:

$$H(u) = \begin{cases} 0, & \text{si } u \leq 0, \\ 1, & \text{si } u > 0. \end{cases}$$

Concluimos mediante el teorema de convolución, teorema 9.2 parte iv) que

$$u(x,t) = f(t) * (t - (t-x)H(t-x)) = \int_0^t f(t-\tau)[\tau - (\tau-x)H(\tau-x)]d\tau.$$

Con lo cual se tiene la solución del ejemplo. ■

■ **Ejemplo 9.7 — Conducción de calor en un medio semi infinito.** Se considera un contenedor de líquidos lo suficientemente profundo para que las condiciones de frontera en la parte alta del contenedor no afecten la solución del problema asociado a la ecuación de calor en el fondo. Concretamente, consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \infty, t > 0, \\ (cf) \ u_x(0,t) - u(0,t) = 0, & t > 0, \\ (ci) \ u(x,0) = T_o. \end{cases} \tag{9.26}$$

$u(x,t)$ acotada.

Solución. Al aplicar la transformada de Laplace en la variable t obtenemos el problema

$$\begin{cases} U_{xx} - sU(x,s) = -T_o \\ U_x(0,s) = U(0,s), \end{cases} \tag{9.27}$$

donde T_o es una temperatura inicial que suponemos constante. Para encontrar la solución al problema, tenemos que resolver una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, no homogénea. Recordamos que la forma de resolver tal ecuación puede encontrarse en el apéndice B de este libro, sección B.2. El lector debe verificar que la solución del problema (9.27) está dada por

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{T_o}{s}.$$

Para el cálculo de las constantes, como suponemos que la solución u es acotada cuando $x \rightarrow \infty$ se tiene que U debe ser acotada, es decir, $c_1 = 0$. De esta manera, la condición $U_x(0, s) = U(0, s)$ se traduce en $-c_2\sqrt{s} = c_2 + \frac{T_o}{s}$, o bien $c_2 = -\frac{T_o}{s(\sqrt{s} + 1)}$. Así

$$U(x, s) = -\frac{T_o e^{-\sqrt{s}x}}{s(\sqrt{s} + 1)} + \frac{T_o}{s}$$

y por lo tanto

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{T_o e^{-\sqrt{s}x}}{s(\sqrt{s} + 1)} + \frac{T_o}{s} \right].$$

Dado que \mathcal{L}^{-1} es lineal, y dado que se tienen las siguientes transformadas (las cuales se obtienen por medio de tablas o paquetes de computadora matemáticos)

$$\frac{1}{\sqrt{s} + 1} = \mathcal{L} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \right] \quad (9.28)$$

$$\frac{-e^{-\sqrt{s}x}}{s} = \mathcal{L} \left[-\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right] \quad (9.29)$$

$$\frac{T_o}{s} = \mathcal{L}[T_o], \quad (9.30)$$

donde $\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-\xi^2} d\xi$, es la función error complementaria, se concluye que

$$u(x, t) = T_o \mathcal{L}^{-1} \left[\mathcal{L} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t}) \right] \cdot \mathcal{L} \left[-\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right] \right] + T_o.$$

Usando la linealidad de la transformada de Laplace y el teorema 9.2 parte iv) se llega a

$$u(x, t) = T_o \left(\frac{-1}{\sqrt{\pi t}} * \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + (e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})) * \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + 1 \right).$$

La simplificación de la última ecuación se deja como ejercicio. ■

9.6 La transformada de Laplace y el funcional delta

Los funcionales delta de Dirac han sido usados aún antes de que Dirac los aplicara en mecánica cuántica, por citar un ejemplo, Heaviside los utilizó de manera implícita en

Función	Transformada de Laplace
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$H(t-a)$	$\frac{e^{-sa}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-sa}
$H(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$

Cuadro 9.2: Ejemplos de transformadas de Laplace.

su estudio de un cable cargado, [14, s. 267, p. 91 eq. 24]. Muchas formas de estudiar los funcionales delta han sido introducidas a lo largo del siglo xx, en este libro nos aproximaremos dentro del marco de los espacios de distribuciones en el capítulo 10. Como un primer acercamiento, para evitar ambigüedades y errores trabajaremos con la siguiente definición.

Definición 9.4 Sean $\phi(x)$ funciones de prueba definidas como

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-x^2)}, & \text{si } |x| < a, \\ 0 & \text{si } |x| \geq a, \end{cases} \tag{9.31}$$

y sea

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & |x| < 1/n, \\ 0, & |x| \geq 1/n, \end{cases} \tag{9.32}$$

el funcional δ se define como

$$\delta(\phi(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\phi(x)dx = \phi(0), \tag{9.33}$$

para toda función de prueba ϕ .

En general, dada una función g , continua se define

$$\delta_{x_0}(g(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0)g(x)dx = g(x_0). \quad (9.34)$$

Denotamos el funcional $\delta_{x_0}(g(x))$ como la integral simbólica $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0)dx$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_0)dx \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0)g(x)dx. \quad (9.35)$$

N Por supuesto, la integral del lado izquierdo en (9.35) es meramente simbólica y no tiene sentido dentro del contexto de las integrales de Riemann ni de Lebesgue, para ninguna función elemental. De hecho, se demuestra en el capítulo 10 que no hay función localmente integrable que satisfaga tal ecuación.

Observe también que no se puede intercambiar el límite y la integral en la expresión $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0)g(x)dx$ dado que el límite de las δ_n cuando $n \rightarrow \infty$ **no existe**.

En particular, dada la ecuación (9.35) para $g(x) = 1$ se tiene la relación simbólica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0)dx = 1.$$

Finalmente, para comprobar que efectivamente se cumple (9.33) utilizamos el teorema del valor medio para las integrales con lo cual se tiene para algún $\theta \in [0, 1]$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)\phi(x)dx = e^{-1/(1-(-1/n+\theta(2/n))^2)},$$

por lo que al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene $\phi(0)$.

Dado el carácter especial del funcional delta, el cual no es una función en el sentido clásico, es de esperarse que su aparición en ecuaciones diferenciales tenga un sentido especial, así es, en efecto, el funcional delta es una distribución y se debe definir su derivada en cierta forma, lo cual se hace en la definición 10.5. **De aquí en adelante, siempre que se tenga una ecuación diferencial $a_n \frac{d^n g}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 g = \delta(x - x_0)$ entenderemos una relación de la forma integral dada en la definición siguiente.**

Definición 9.5 Por una solución débil g de la ecuación

$$a_n \frac{d^n g}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 g = \delta(x - x_0) \quad (9.36)$$

se entiende una función g localmente integrable que satisfice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a_0 \phi + (-1)^n a_n \frac{d^n \phi}{dx^n} + (-1)^{n-1} a_{n-1} \frac{d^{n-1} \phi}{dx^{n-1}} + \dots + (-1)^1 a_1 \frac{d\phi}{dx} \right) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0) \phi(x) dx, \quad (9.37)$$

para toda función de prueba ϕ .

Al usar las propiedades de las funciones de prueba se tiene que la integral del lado izquierdo de (9.37) se puede obtener al integrar por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{d^n g}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} g}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 g \right) \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x - x_0) \phi(x) dx, \quad (9.38)$$

siempre y cuando la función g sea suficientemente derivable.

■ **Ejemplo 9.8** Ahora podemos calcular la transformada de Laplace del funcional delta usando las definiciones anteriores. Se tiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t - a)] &= \int_0^{\infty} \delta(t - a) e^{-st} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{a-1/n}^{a+1/n} e^{-st} dt \\ &= e^{-as} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{s}{n}\right)}{\frac{s}{n}} \\ &= e^{-sa}. \end{aligned}$$

Así $\mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-sa}$. ■

A pesar del carácter especial de las ecuaciones diferenciales que incluyen la delta de Dirac, suele dárseles un tratamiento totalmente operacional a tales ecuaciones. Tal procedimiento es correcto en un contexto adecuado, el cual, sin embargo, no suele mencionarse al estudiante en los libros básicos. En este libro, en el capítulo 10, sección 10.3, se da una introducción al espacio de distribuciones en el cual todos los cálculos que se hacen en los cursos elementales de edo están justificados. A continuación presentamos un ejemplo puramente operativo de cómo se usa la transformada de Laplace para resolver tales ecuaciones.

■ **Ejemplo 9.9** Resuelva el problema

$$y'' - 3y' + 2y = \delta(t - \tau), \quad [0, \infty) \quad (9.39)$$

$$y(0) = y'(0) = 0. \quad (9.40)$$

Solución. Aplicando formalmente la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$Y(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s^2 - 3s + 2},$$

donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de y . Después de descomponer en fracciones parciales se tiene

$$Y(s) = e^{-s\tau} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \right).$$

Al aplicar transformadas inversas se llega a la solución

$$y(t) = [e^{2(t-\tau)} - e^{t-\tau}]H(t - \tau),$$

donde hemos usado las fórmulas del cuadro 9.2. ■

9.7 Fórmulas de Duhamel

Por medio de la transformada de Laplace, los problemas asociados a la ecuación de calor o de onda con condiciones de frontera dependientes del tiempo, se pueden resolver a partir de problemas con la misma ecuación diferencial, pero con condiciones de frontera constantes. Este hecho es una de las maneras como se expresa el principio de Duhamel. Enunciaremos aquí un ejemplo de aplicación de dicho principio, para la ecuación de calor en \mathbb{R}^3 . Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto acotado con frontera suave $\partial\Omega$ la cual puede escribirse como $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ (ver figura 9.1). Se trata de resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 \Delta u, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} u(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_1, \\ u(\mathbf{x}, t) = f(t), & \mathbf{x} \in \partial\Omega_2, \end{cases} \\ (ci) u(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (9.41)$$

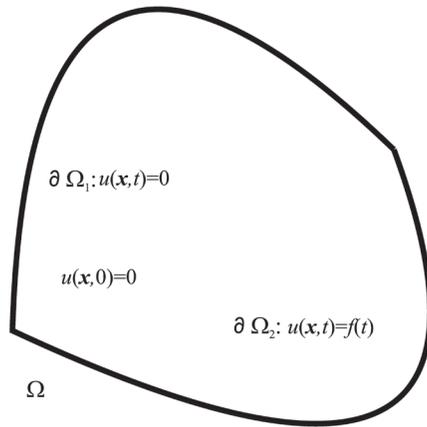


Figura 9.1: Principio de Duhamel, conjunto Ω y su frontera

donde $f(t)$ es una función dada, a partir del siguiente problema cuya solución se supone conocida explícitamente:

$$\begin{cases} v_t = \alpha^2 \Delta v, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} v(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \\ v(\mathbf{x}, t) = 1, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_2, \end{cases} \\ (ci) v(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (9.42)$$

La transformada de Laplace de u , con respecto a t , $\mathcal{L}[u] = U(x, y, z, s)$, satisface el siguiente problema

$$\begin{cases} sU(x, y, z, s) = \alpha^2 \Delta U(x, y, z, s), \\ U(x, y, z, s) = 0, & (x, y, z) \in \partial\Omega_1, \\ U(x, y, z, s) = \mathcal{L}[f(t)] = F(s), & (x, y, z) \in \partial\Omega_2, \\ U(x, y, z, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (9.43)$$

Donde suponemos que la transformada de Laplace existe para las funciones consideradas en este problema. Por otra parte, la transformada de Laplace de la solución v del

problema (9.42) dada por $\mathfrak{L}[v] = V(x, y, z, s)$ satisface

$$\begin{cases} sV(x, y, z, s) = \alpha^2 \Delta V(x, y, z, s), \\ V(x, y, z, s) = 0, & (x, y, z) \in \partial\Omega_1, \\ V(x, y, z, s) = \mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s}, & (x, y, z) \in \partial\Omega_2, \quad s > 0 \\ V(x, y, z, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (9.44)$$

Notamos que la función $W(x, y, z, s) = F(s)sV(x, y, z, s)$ satisface la edp en (9.43) ya que la ecuación es lineal y $sF(s)$ es sólo un parámetro que sale del laplaciano como constante. Más aún, W satisface las condiciones de frontera y la condición inicial del problema (9.43). Efectivamente $W(x, y, z, s) = F(s)sV(x, y, z, s) = 0$, para $(x, y, z) \in \partial\Omega_1$, $W(x, y, z, s) = F(s)sV(x, y, z, s) = F(s)s/s = F(s)$, para $(x, y, z) \in \partial\Omega_2$, y $W(x, y, z, 0) = F(0) \cdot 0 \cdot V(x, y, z, 0) = 0$. Por lo tanto $U = W$, debido a la unicidad de soluciones del problema (9.43). Notamos además que $sV(x, y, z, s) = \mathfrak{L}[v_t(x, y, z, t)]$, por lo que tenemos

$$U(x, y, z, s) = F(s) \cdot \mathfrak{L}[v_t(x, y, z, t)].$$

Aplicamos ahora la transformada inversa vía el teorema 9.2 parte iv) con lo cual se obtiene

$$u(x, y, z, t) = f(t) * v_t(x, y, z, t)$$

la ecuación anterior nos lleva a las *fórmulas de Duhamel*

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t f(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} v(x, y, z, t - \tau) d\tau, \quad (9.45)$$

y dado que $v(x, y, z, 0) = 0$ se tiene, si f es derivable, después de integrar por partes

$$u(x, y, z, t) = \int_0^t f'(\tau) v(x, y, z, t - \tau) d\tau + f(0) v(x, y, z, t). \quad (9.46)$$

■ **Ejemplo 9.10** Resuelva el siguiente problema usando el principio de Duhamel

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = f(t), \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (9.47)$$

donde $f(t)$ es una función dada.

Solución. Para resolver este problema se considera el problema auxiliar con (cf) constantes

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} v(0,t) = 0, & t > 0 \\ v(1,t) = 1, \end{cases} \\ (ci) v(x,0) = 0, & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (9.48)$$

el cual fue resuelto en el ejemplo 9.5. Procedemos a resolver el problema (9.47) aplicando la transformada de Laplace tanto en la edp como en las (ci) y (cf) . Se llega así a

$$\begin{cases} U_{xx}(x,s) - sU(x,s) = 0 \\ U(0,s) = 0, \\ U(1,s) = \mathcal{L}[f(t)] = F(s). \end{cases} \quad (9.49)$$

Al resolver el problema (9.49) se tiene

$$U(x,s) = F(s) \left[\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sinh(\sqrt{s})} \right].$$

Remarcamos el hecho de que la transformada inversa de $\frac{\sinh(x\sqrt{s})}{\sinh(\sqrt{s})}$ no puede calcularse explícitamente por lo cual deben usarse las fórmulas de Duhamel para resolver este problema, como a continuación se explica.

Si llamamos $V(x,s)$ a la transformada de Laplace de la solución del problema (9.48) sabemos que

$$\begin{cases} V_{xx}(x,s) - sV(x,s) = 0 \\ V(0,s) = 0, \\ V(1,s) = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}. \end{cases} \quad (9.50)$$

Notamos que si definimos $W(x,s) = sF(s)V(x,s)$, entonces W satisface la ecuación diferencial en (9.49) ya que la ecuación es lineal y $sF(s)$ es sólo un parámetro. Más aún $W(0,s) = sF(s)V(0,s) = 0$ y $W(1,s) = sF(s)1/s = F(s)$ por lo tanto, debido a la unicidad de la solución del problema (9.49) se tiene

$$U(x,s) = W(x,s) = sF(s)V(x,s).$$

Recordamos además que $\mathfrak{L}[v_t(x, t)] = sV(x, s) - v(x, 0) = sV(x, s)$. Por lo tanto por medio del teorema 9.2 parte iv) se llega a

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathfrak{L}^{-1}[F(s) \cdot (sV(x, s))] = f(t) * \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \int_0^t f(\tau) v_\tau(x, t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t f'(\tau) v(x, y, z, t - \tau) d\tau + f(0) v(x, y, z, t). \end{aligned}$$

En el ejemplo 9.5 se obtuvo que $v(x, t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-(n\pi)^2 t} \text{sen}(n\pi x)$, por lo que sustituyendo, queda resuelto el ejemplo. ■

9.7.1 Principio de Duhamel Clásico

Es pertinente ejemplificar aquí el principio de Duhamel en la forma clásica para completar el tema introducido al principio de esta sección y, además, porque lo utilizaremos cuando se traten las funciones de Green. El principio de Duhamel permite resolver problemas complicados a partir de las soluciones de problemas más simples, por ejemplo, se puede resolver el problema de onda no homogéneo como se muestra a continuación

■ **Ejemplo 9.11 — Principio de Duhamel y la ecuación de onda.** Consideramos el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_{tt}(\mathbf{x}, t) = \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (9.51)$$

el cual será resuelto a partir de la familia de problemas homogéneos

$$\begin{cases} U_{tt}(\mathbf{x}, t, s) = \Delta U(\mathbf{x}, t, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t \geq s, \\ U(\mathbf{x}, s, s) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t = s, \\ U_t(\mathbf{x}, s, s) = F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t = s, \end{cases} \quad (9.52)$$

donde $U(\mathbf{x}, t, s)$ es solución de (9.52) para $s \geq 0$ fijo. Se tiene que

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t U(\mathbf{x}, t, s) ds \quad (9.53)$$

es solución de (9.51). Efectivamente, si $U(\mathbf{x}, t, s)$ es solución de clase \mathcal{C}^2 de (9.52) podemos utilizar la fórmula (ver [8], p.103)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy &= \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f_x(x, y) dy \\ &+ \psi_2'(x) f(x, \psi_2(x)) - \psi_1'(x) f(x, \psi_1(x)), \end{aligned} \quad (9.54)$$

para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t U_t(\mathbf{x}, t, s) ds + U(\mathbf{x}, t, t) \quad (9.55)$$

$$= \int_0^t U_t(\mathbf{x}, t, s) ds \quad (9.56)$$

donde (9.56) se sigue de la condición $U(\mathbf{x}, t, t) = 0$ de (9.52). Derivando otra vez, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t U_{tt}(\mathbf{x}, t, s) ds + U_t(\mathbf{x}, t, t) \\ &= \int_0^t \Delta U(\mathbf{x}, t, s) ds + F(\mathbf{x}, t) \\ &= \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (9.57)$$

Por supuesto, se puede intercambiar Δ con la integral bajo nuestra hipótesis de que $U(\mathbf{x}, t, s) \in \mathcal{C}^2$. ■

■ **Ejemplo 9.12 — Principio de Duhamel para la ecuación de calor.** Para la ecuación de calor se puede proceder de manera similar para resolver el problema no homogéneo

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) = \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (9.58)$$

a partir de la familia de problemas homogéneos

$$\begin{cases} U_t(\mathbf{x}, t, s) = \Delta U(\mathbf{x}, t, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t \geq s, \\ U(\mathbf{x}, s, s) = F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, t = s. \end{cases} \quad (9.59)$$

Sea

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t U(\mathbf{x}, t, s) ds$$

donde $U(\mathbf{x}, t, s)$ es solución de (9.59). De la fórmula (9.55) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t U_t(\mathbf{x}, t, s) ds + U(\mathbf{x}, t, t) \\ &= \int_0^t \Delta U(\mathbf{x}, t, s) ds + F(\mathbf{x}, t) \\ &= \Delta u(\mathbf{x}, t) + F(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{9.60}$$

lo cual implica que $u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t U(\mathbf{x}, t, s) ds$ es solución de (9.58). ■

Como la ecuación de calor es invariante bajo traslaciones en la variable t , si se define $v(\mathbf{x}, t, s) = U(\mathbf{x}, t + s, s)$ entonces tenemos que

$$\begin{cases} v_t(\mathbf{x}, t, s) = \Delta v(\mathbf{x}, t, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, 0 < s < t \\ v(\mathbf{x}, 0, s) = F(\mathbf{x}, s) & s > 0 \end{cases}$$

y puesto que

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t U(\mathbf{x}, t, s) ds = \int_0^t v(\mathbf{x}, t - s, s) ds$$

se tiene otra forma de expresar el principio de Duhamel para la ecuación de calor, la cual utilizaremos en el capítulo siguiente.

9.8 Problemas y ejercicios del Capítulo 9

1. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{-ax^2}$, con $a > 0$.

Solución: $\mathfrak{F}[f] = \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\xi^2/(4a)}$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ -e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Muestre que si $F(\xi)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$ entonces $e^{-ia\xi}F(\xi)$ es la transformada de $f(x-a)$.

3. Use el método de la transformada de Fourier para resolver los siguientes problemas.

a) El problema asociado a la ecuación de calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x,0) &= 1, \quad \text{si } -1 < x < 1, \quad \text{y } 0 \text{ en otro caso.} \end{aligned} \tag{9.61}$$

b) El problema asociado a la ecuación de convección

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned} \tag{9.62}$$

c) El problema asociado a la ecuación de onda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned} \tag{9.63}$$

d) El problema linealizado de la ecuación de Korteg de Vries

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= e^{-x^2/2}. \end{aligned} \tag{9.64}$$

4. Muestre que las siguientes transformadas de Laplace se cumplen

a) $\mathfrak{L}[e^{kt}](s) = \frac{1}{s-k}, \quad \text{si } s > k.$

b) $\mathfrak{L}[\text{sen } kt](s) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad \text{si } s > 0.$

c) $\mathfrak{L}[\text{cos } kt](s) = \frac{s}{s^2+k^2}, \quad \text{si } s > 0.$

d) $\mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} \mathfrak{L}[f(t)].$

5. Resuelva el problema asociado a la ecuación de onda en un medio semi infinito en el cual actúa la fuerza de gravedad $-g$, con condiciones de frontera e iniciales nulas. Es decir, resuelva el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} - g, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \\ u(x, t) \text{ acotada.} \end{cases} \tag{9.65}$$

Solución. $u(x, t) = 1/2g(t-x/c)^2 H(t-x/c) - 1/2gt^2.$

6. Simplifique la solución del ejemplo 9.26 y grafique la solución para tres valores de $t > 0.$

7. Use la transformada de Laplace para resolver los problemas siguientes.

a)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 8, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \tag{9.66}$$

Solución: $u(x, t) = 8 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).$

b)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3t, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \tag{9.67}$$

8. ([23]) Encuentre una solución periódica en el tiempo del problema

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & x > 0 \\ -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q \cos \omega t, \\ T \text{ acotada cuando } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9.68)$$

Tome $\omega = 2\pi/\text{año}$ para dar una razón de porqué el día más caliente (frío) del año se espera que ocurra alrededor de seis semanas después del día más largo (corto) del año.

Solución del problema 8. Use el método de la transformada de Laplace para obtener

$$\mathcal{L}[T](s, t) = \frac{Q\sqrt{\frac{k}{\rho c}}}{k} \left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{s}x}}{\sqrt{\frac{k}{\rho c}}}}{\sqrt{s}} \right) \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{T_o}{s},$$

donde T_o es la temperatura del día más largo del año después use el teorema de convolución y el teorema fundamental del cálculo para encontrar el máximo de T en $x = 0$.

9. Encuentre una solución de los siguientes problemas usando el principio de Duhamel

a)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = \text{sen}(t), \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (9.69)$$

b)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (cf) \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = f(t), \end{cases} \\ (ci) u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (9.70)$$

10. Use el principio clásico de Duhamel para resolver

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \cos x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Introducción

Métodos para encontrar funciones de Green

El método de expansión en funciones propias para la función de Green

Método de las soluciones fundamentales

Método de la función de Green para edp

Distribuciones y funciones de Green

Derivadas de distribuciones

Problemas y ejercicios del Capítulo 10



10 Funciones de Green

10.1 Introducción

El método de la función de Green nos permite analizar problemas asociados a las ecuaciones diferenciales lineales tanto edo como edp. Esencialmente consiste en hallar una expresión matemática para ciertas funciones, llamadas funciones de Green y a partir de ellas construir soluciones de ciertas edp. El contexto adecuado para las funciones de Green es el del espacio de las distribuciones cuya teoría requiere un tratamiento riguroso fuera del alcance de este libro, no obstante introducimos la teoría de las distribuciones de una forma elemental en la sección 10.3. Cabe mencionar que nuestra aproximación a la teoría de distribuciones, a pesar de ser simplificada, es, sin embargo, de una mayor dificultad que el resto del libro y puede omitirse en un primer curso. Por otra parte, se acostumbra en los textos elementales de ecuaciones diferenciales parciales tener un acercamiento operacional a las funciones de Green, nosotros seguiremos la tradición. Comenzamos con algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 10.1** Considere el problema

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in (0, b), \quad f \in \mathcal{C}[0, b] \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

Al resolver este problema se obtiene que

$$y(x) = \int_0^x (x - \xi)f(\xi)d\xi, \quad 0 \leq x \leq b$$

es la solución, lo cual puede verificar el lector derivando directamente.

Definamos la siguiente función:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x - \xi, & \text{si } 0 \leq \xi \leq x, \\ 0 & \text{si } x \leq \xi \leq b, \end{cases} \quad (10.2)$$

donde x se considera como un parámetro. De esta manera podemos expresar la solución como

$$y(x) = \int_0^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi.$$

lo cual debe verificar el lector. ■

■ **Ejemplo 10.2** Ahora considere el problema

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in (a, b), \quad f \in \mathcal{C}[a, b] \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Al resolver este problema se obtiene que

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi, \quad x \in [a, b]$$

donde

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(x-a)(\xi-b)}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq \xi, \\ \frac{(x-b)(\xi-a)}{b-a} & \text{si } \xi \leq x \leq b. \end{cases} \quad (10.4)$$

De esta forma y es la solución del problema. ■

Ejercicio 10.1 Verifique que las soluciones dadas de los ejemplos 10.1, 10.2, son efectivamente soluciones. ■

■ **Ejemplo 10.3** Considere el importante problema de Poisson:

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= q(r, \theta), \quad 0 < r < 1 \\ u(1, \theta) &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (10.5)$$

donde $q(r, \theta)$ tiene derivadas continuas. Definamos la siguiente función

$$G(r, \theta, \rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \ln R - \frac{1}{2\pi} \ln \bar{R} - \frac{1}{2\pi} \ln \rho, \quad (10.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{R}{\rho \bar{R}} \right) \quad (10.7)$$

donde $R = \sqrt{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi) + \rho^2}$, $\bar{R} = \sqrt{r^2 - 2\frac{r}{\rho} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{\rho^2}}$. Puede verificarse que

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 G(r, \theta, \rho, \phi) q(\rho, \phi) d\rho d\phi,$$

es la solución de la ecuación (10.5). ■

Además, la integral de Poisson (6.62) se puede expresar en términos de la función G . En efecto, la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < r < 1, \\ u(1, \theta) = q(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$

donde q es continua, está dada por la fórmula de Poisson

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - \phi) + r^2} \right] q(\phi) d\phi.$$

La cual es equivalente a

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \rho}(r, \theta, 1, \phi) q(\phi) d\phi,$$

como puede verificarse.

Este ejemplo muestra que la función G también permite resolver ecuaciones homogéneas con condiciones de frontera no homogéneas.

■ **Ejemplo 10.4** Resuelva el problema

$$v_t(x, t) - v_{xx}(x, t) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{10.8}$$

$$v(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{10.9}$$

donde f tiene derivada continua.

Solución. Notamos que la edp en (10.8) es una ecuación no homogénea, la cual se puede resolver por el método de Duhamel de la sección 9.7.1. En efecto, supongamos que el problema tiene solución única. Dado que la solución del problema homogéneo

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{10.10}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{10.11}$$

dada por (9.14) con $\alpha = 1$, es

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} f(y) dy.$$

De esta forma se obtiene la *solución única* de la ecuación de calor no homogénea dada por el método de Duhamel $v(x, t) = \int_0^t u(x, t - \tau) d\tau$:

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t; y, \tau) f(y) dy d\tau,$$

donde

$$K(x, t, y, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-(x-y)^2/(4(t-\tau))}.$$

Note que la $v(x, t)$ puede escribirse como

$$v(x, t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(t - \tau) K(x, t; y, \tau) f(y) dy d\tau.$$

Denotamos por G a la función HK en el integrando anterior. A las funciones G definidas en los ejemplos anteriores se les conoce como funciones de Green del problema correspondiente. ■

Si en el ejemplo (10.1) se define

$$L : \{y \in \mathcal{C}^2[0, b] : y(0) = y'(0) = 0\} \rightarrow \mathcal{C}[0, b] \quad (10.12)$$

$$L[y] = y'' \quad (10.13)$$

entonces la solución $y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$ define un operador inverso derecho L^{-1} del operador L . Se tienen conclusiones similares para los otros problemas. De aquí se sigue que resolver los problemas en los ejemplos anteriores se reduce a determinar la función de Green del problema correspondiente.

Definición 10.1 — Definición de la función de Green. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$. Se considera el problema

$$L[u] = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (10.14)$$

$$B[u] = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (10.15)$$

donde $L[u]$ es un operador lineal el cual está asociado con una ecuación diferencial parcial lineal y $B[u]$ representa condiciones de frontera e iniciales lineales, tales que para cada f definida en Ω el problema (10.14), (10.15) **tiene solución única**. Se dice que una función $G(\mathbf{x}, \xi)$ es una *función de Green* de la ecuación (10.14), con condiciones de frontera (10.15) si la solución única está dada por

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}; \xi) f(\xi) d\xi$$

donde el subíndice ξ indica que en Ω la integración es respecto a esta variable.

De acuerdo con esta definición las funciones G definidas en los ejemplos de la sección 10.1 son funciones de Green de los problemas correspondientes.

Las funciones de Green pueden tener una singularidad, es decir, puede ser que sean discontinuas o bien que alguna de sus derivadas sean discontinuas. Este hecho, se debe a que las funciones de Green son soluciones de una ecuación que involucra el funcional delta de Dirac como se explica en la sección 10.3. En la sección de ejercicios de este capítulo podrán encontrarse ejemplos de cómo calcular funciones de Green asociadas a problemas con ecuaciones diferenciales ordinarias. Debe observarse que para los problemas en edo mencionados y de la sección de ejercicios del capítulo las funciones de Green son continuas, pero no así sus primeras derivadas.

10.2 Métodos para encontrar funciones de Green

Una vez establecida la definición de función de Green puede comprenderse su utilidad para resolver ecuaciones diferenciales. Naturalmente debe uno preguntarse cómo calcular la función de Green. Hay diversas técnicas para calcularla, expansión en funciones propias, uso de transformadas, métodos geométricos. A continuación aplicamos algunas de tales técnicas.

10.2.1 El método de expansión en funciones propias para la función de Green

Sea $L[y] = (py')' + ry$. Consideremos el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} L[y](x) = -\lambda y(x) \\ (cf) \begin{cases} a_1 y(\alpha) + b_1 y'(\alpha) = 0 \\ a_2 y(\beta) + b_2 y'(\beta) = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10.16)$$

Supongamos que el siguiente problema

$$\begin{cases} L[y](x) = f(x) \\ (cf) \begin{cases} a_1 y(\alpha) + b_1 y'(\alpha) = 0 \\ a_2 y(\beta) + b_2 y'(\beta) = 0, \end{cases} \end{cases} \quad (10.17)$$

tiene una única solución.

- N** Observe que las (cf) del problema (10.16) deben ser las mismas que las del problema (10.17).

Para construir la función de Green del problema (10.17), sean $\varphi_n(x)$, λ_n las funciones propias y valores propios del problema asociado (10.16). Se propone una solución de (10.17) de la forma

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (10.18)$$

Dada la linealidad de L y dado que las funciones y , φ_n satisfacen las mismas condiciones de frontera homogéneas se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\varphi_n(x)) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \varphi_n(x) = f(x).$$

La ortogonalidad de las funciones propias implica que

$$a_n = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi}{-\lambda_n \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n^2(\xi) d\xi}.$$

Así la solución y puede escribirse como

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (10.19)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi}{-\lambda_n \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n^2(\xi) d\xi} \quad (10.20)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) \varphi_n(x) \varphi_n(\xi) d\xi}{-\lambda_n \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n^2(\xi) d\xi} \quad (10.21)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) G(x, \xi) d\xi, \quad (10.22)$$

donde (10.22) se obtiene intercambiando la suma y la integral. Así la función de Green G está dada por

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(\xi)}{-\lambda_n \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n^2(\xi) d\xi}.$$

(N) Observe que la función de Green satisface las condiciones de frontera.

■ **Ejemplo 10.5** Resolveremos uno de los problemas con los que iniciamos el presente capítulo por medio de la técnica de expansión en funciones propias. Es decir, resolveremos el problema

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in (0, b), \quad f \in \mathcal{C}[0, b] \\ y(0) = 0, \\ y(b) = 0. \end{cases}$$

Solución. El problema de valores propios asociado es

$$\begin{cases} y'' = -\lambda y, & x \in (0, b), \\ y(0) = 0, \\ y(b) = 0, \end{cases}$$

El cual, como se sabe por la teoría desarrollada en el capítulo 7, tiene valores propios $\lambda_n = (n\pi/b)^2$, $n = 1, 2, \dots$ y funciones propias correspondientes $\text{sen}(n\pi/b)$. Por lo tanto la solución del problema está dada por

$$y(x) = \int_0^b f(\xi)G(x, \xi)d\xi,$$

donde

$$G(x, \xi) = -\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi x/b)\text{sen}(n\pi \xi/b)}{(n\pi/b)^2}$$

está desarrollada como una serie de Fourier. ■

10.2.2 Método de las soluciones fundamentales

Si es posible obtener la solución del problema no homogéneo (10.17) mediante el uso de la función de Green asociada G , entonces, como hemos visto, se puede escribir la solución y en la forma

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi)G(x, \xi)d\xi.$$

De la relación formal (9.35), en el caso en que $f(x) = \delta(x - x_0)$ en la ecuación diferencial del problema (10.17), se tiene que

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi)\delta(\xi - x_0)d\xi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(\xi - x_0)G(x, \xi)d\xi = G(x, x_0). \quad (10.23)$$

De esta manera, al menos intuitivamente $y(x) = G(x, x_0)$ es solución de (10.17). Lo cual quiere decir que $G(x, \xi)$ es solución del problema

$$\begin{cases} L[G(x, \xi)] = \delta(x - \xi) \\ (cf) \begin{cases} a_1 G(\alpha, \xi) + b_1 \frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\alpha} = 0 \\ a_2 G(\beta, \xi) + b_2 \frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=\beta} = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (10.24)$$

A las soluciones de la ecuación en (10.24) se les llama **soluciones fundamentales**.

A manera de resumen, el método del problema asociado con la delta de Dirac consiste en que para resolver el problema (10.17) debemos resolver primero el problema asociado al funcional delta (10.24). En la sección 10.3 daremos una justificación teórica de la técnica aquí descrita, pero por ahora procederemos a resolver este tipo de problemas de manera operativa. Continuaremos, como es costumbre en este capítulo, con un ejemplo.

■ **Ejemplo 10.6** Ilustraremos el método descrito en esta sección resolviendo paso a paso el problema

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in (a, b), \quad f \in \mathcal{C}[a, b] \\ y(a) = 0, \\ y(b) = 0. \end{cases}$$

Para ello resolvemos primero el problema asociado

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} G(x, \xi) = \delta(x - \xi), & x \in (a, b), \\ G(a, \xi) = 0, \\ G(b, \xi) = 0. \end{cases} \quad (10.25)$$

Para cada punto $x \neq \xi$ se tiene

$$\frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} = 0,$$

la cual se puede integrar para obtener

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1 x + c_2, & a \leq x < \xi, \\ c_3 x + c_4, & \xi < x \leq b. \end{cases} \quad (10.26)$$

Con las condiciones de frontera $G(a, \xi) = 0$, $G(b, \xi) = 0$ se llega a

$$G(a, \xi) = c_1 a + c_2 = 0$$

y

$$G(b, \xi) = c_3 b + c_4 = 0.$$

En la sección 10.3, ejemplo 10.14, se verá que la delta de Dirac es la derivada distribucional de la función de Heaviside, por lo que al integrar una vez $\frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} = \delta(x - \xi)$ se debe tener que la derivada distribucional de la función de Green es discontinua con una discontinuidad de salto. La altura del salto está dada por la altura de la discontinuidad considerada, la cual en este problema es uno. De esta forma, la función de Green debe ser continua, es decir,

$$G(\xi, \xi) = c_1 \xi + c_2 = c_3 \xi + c_4$$

y

$$\frac{dG(\xi^+, \xi)}{dx} - \frac{dG(\xi^-, \xi)}{dx} = 1.$$

Como $\frac{dG(\xi^+, \xi)}{dx} = c_3$ y $\frac{dG(\xi^-, \xi)}{dx} = c_1$ se tiene $c_3 - c_1 = 1$. Para calcular c_1, c_2, c_3, c_4 entonces se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned} ac_1 + c_2 &= 0 \\ bc_3 + c_4 &= 0 \\ c_1\xi + c_2 - c_3\xi - c_4 &= 0 \\ c_3 - c_1 &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, después de resolver el sistema se encuentra al sustituir en (10.26) que

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{b-\xi}{a-b}x - \frac{a(b-\xi)}{a-b}, & a \leq x < \xi, \\ \frac{a-\xi}{a-b}x - \frac{b(a-\xi)}{a-b}, & \xi < x \leq b. \end{cases}$$

Con lo cual se llega a la solución dada en el ejemplo 10.2. ■

Algunos problemas permiten una aplicación directa de la transformada de Laplace, como veremos a continuación.

■ **Ejemplo 10.7** Encuentre la función de Green del ejemplo 10.1 con $b = \infty$ usando la transformada de Laplace. El problema está dado por

$$\begin{cases} y'' = f(x), & x \in (0, \infty), \quad f \in \mathcal{C}[0, \infty] \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{10.27}$$

Solución. Notamos que las condiciones $y(0) = 0, y'(0) = 0$ son apropiadas para aplicar la transformada de Laplace. Aplicando la transformada de Laplace en el problema asociado

$$\begin{cases} \frac{d^2G(x, \xi)}{dx^2} = \delta(x - \xi), & x \in (0, \infty), \\ G(0, \xi) = 0, \\ \frac{dG(x, \xi)}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\frac{d^2G(x, \xi)}{dx^2}\right] &= \mathfrak{L}[\delta(x - \xi)] \\ s^2\mathfrak{L}[G](s, \xi) &= e^{-s\xi} \\ \mathfrak{L}[G](s, \xi) &= \frac{e^{-s\xi}}{s^2} = \mathfrak{L}[(x - \xi)H(x - \xi)].\end{aligned}$$

Al tomar transformada inversa se obtiene la función de Green $G(x, \xi) = (x - \xi)H(x - \xi)$. Por otro lado la solución del problema es

$$y(x) = \int_0^\infty f(\xi)(x - \xi)H(x - \xi)d\xi,$$

la cual coincide con la solución dada anteriormente para el caso de b finito. ■

En general para el cálculo de la función de Green de un problema de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}G(x, \xi)\right] + s(x)G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (10.28)$$

$$\begin{cases} a_1G(\alpha, \xi) + b_1\frac{dG(x, \xi)}{dx}\Big|_{x=\alpha} = 0 \\ a_2G(\beta, \xi) + b_2\frac{dG(x, \xi)}{dx}\Big|_{x=\beta} = 0, \end{cases} \quad (10.29)$$

se deben considerar las condiciones (10.29), la condición de continuidad de $G(x, \xi)$ es decir

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} G(x, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} G(x, \xi),$$

y la condición de discontinuidad de la primera derivada de la función de Green que para el problema bajo consideración está dada por

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{d}{dx}G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{d}{dx}G(x, \xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Pero debe mencionarse que la función de Green **no siempre existe**, por lo que se debe tener cuidado al verificar que una función propuesta verifique todas y cada una de las condiciones anteriores.

Interpretación intuitiva de la función de Green

En los libros de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo [5]) puede verse que el éxito de la delta de Dirac reside en que puede utilizarse para modelar fenómenos de naturaleza impulsiva, como por ejemplo puede utilizarse para modelar el hecho físico de poner en movimiento una bola de billar o una bola de golf, mediante un golpe. Es decir, la delta de Dirac se usa para modelar fenómenos en donde se aplica una gran fuerza a un objeto dado en un tiempo muy pequeño. Desde este punto de vista, es posible entender intuitivamente lo que significa la función de Green, es decir, es la respuesta a un impulso unitario $\delta(x - \xi)$ en $x = \xi$, descrito por el problema en ecuaciones diferenciales. Por otro lado, si la ecuación siguiente tiene una solución

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} y(x) \right] + s(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{10.30}$$

se muestra intuitivamente que dicha solución es de la forma $\int_0^1 G(x; s)f(s)ds$. En efecto, en vez de considerar $f(x)$ como una función fuente continua, la aproximamos por medio de un conjunto discreto de funciones fuente $f(s_1), f(s_2), \dots, f(s_n)$ que actúan en los puntos $x = s_1, x = s_2, \dots, x = s_n$, todos en el interior de $[0, 1]$. Definimos la función $G(x; s_k)$ como la solución fundamental de la ecuación (10.30) debida a la fuente puntual unitaria que actúa en s_k , es decir $\delta(x - s_k)$. La solución debida a un solo efecto $f(s_k)\Delta s_k$ es por consiguiente $G(x; s_k)f(s_k)\Delta s_k$. Sumando todas estas soluciones para los n términos de las fuentes puntuales que actúan en $[0, 1]$ la solución adquiere la forma siguiente:

$$\sum_{k=1}^n G(x; s_k)f(s_k)\Delta s_k. \tag{10.31}$$

En el límite cuando $|\Delta s_k| \rightarrow 0$, la suma (10.31) tiende a la integral siguiente

$$y(x) = \int_0^1 G(x; s)f(s)ds, \tag{10.32}$$

la cual proporciona una solución a la ecuación (10.30). Es decir una solución fundamental permite obtener una solución de la ecuación (10.30). De lo anterior resulta que el problema esencial para obtener una solución de ecuaciones no homogéneas se reduce a obtener una solución fundamental en cada caso, como hemos visto.

10.2.3 Método de la función de Green para edp

En \mathbb{R}^2 se define la función delta de Dirac como

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta).$$

De esta manera la propiedad fundamental de la delta puede escribirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) dx dy = f(\xi, \eta).$$

Establecido lo anterior se pueden extender los métodos usados para resolver ecuaciones ordinarias para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Por ejemplo, para resolver el problema de Poisson con condiciones de frontera homogéneas suponiendo que tiene una única solución,

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) \\ u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0, \end{cases} \quad (10.33)$$

debemos resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta G(x, y, \xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, \xi, \eta) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(x, y, \xi, \eta) = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \\ G(0, y, \xi, \eta) = G(a, y, \xi, \eta) = G(x, 0, \xi, \eta) = G(x, b, \xi, \eta) = 0. \end{cases}$$

Con lo que la solución del problema de Poisson estará dada por

$$u(x, y) = \iint_R f(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

donde $R = [0, a] \times [0, b]$.

■ **Ejemplo 10.8 — Método de expansión en funciones propias para edp.** Para el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ con condiciones de frontera cero (10.33), puede demostrarse que las funciones propias correspondientes al problema

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \\ u(0, y) = u(a, y) = u(x, 0) = u(x, b) = 0, \end{cases} \quad (10.34)$$

son $\phi_{mn}(x, y) = \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$, con valores propios correspondientes $\lambda_{mn} = -(n\pi/a)^2 - (m\pi/b)^2$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$. En este caso, para obtener la función de Green,

podemos aplicar las mismas fórmulas que en la sección 10.2.1 cambiando solamente la integral por una integral doble, así, por ejemplo

$$\iint_R \phi_{mn}(x,y)^2 dx dy = ab/4.$$

De esta manera, con las fórmulas de la sección 10.2.1 se tiene que

$$G(x,y,\xi,\eta) = -\frac{4}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi x/a)\text{sen}(m\pi y/b)\text{sen}(n\pi\xi/a)\text{sen}(m\pi\eta/b)}{(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2}.$$

Por lo tanto la solución al problema 10.33 está dada por

$$u(x,y) = \iint_R f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta$$

lo cual puede verificar el lector. ■

El método de la solución fundamental, puede emplearse para resolver un problema asociado a la ecuación de onda, para ello debe calcularse primero la función de Green del problema asociado, como se ejemplifica a continuación.

■ **Ejemplo 10.9** Calcule la función de Green que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,t,\xi,\tau) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,t,\xi,\tau) = c^2 \delta(x-\xi)\delta(t-\tau),$$

donde $-\infty < x, \xi < \infty$, y $0 < t, \tau$, con condiciones iniciales

$$G(0,t,\xi,\tau) = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial t}G(x,t,\xi,\tau)|_{x=0} = 0.$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace a la edp, con las condiciones iniciales nulas se obtiene

$$\frac{d^2\bar{G}}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}\bar{G} = -\delta(x-\xi)e^{-s\tau},$$

donde $\mathcal{L}[G(x,t,\xi,\tau)] = \bar{G}(x,s,\xi,\tau)$. Ahora tomamos la transformada de Fourier en la ecuación anterior para obtener

$$\hat{\bar{G}}(\omega,s,\xi,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-i\omega\xi - s\tau)}{\omega^2 + s^2/c^2},$$

donde $\mathfrak{F}[\overline{G}(x, s, \xi, \tau)] = \widehat{G}(\omega, s, \xi, \tau)$. Al tomar la transformada de Fourier inversa se tiene que

$$\overline{G}(x, s, \xi, \tau) = \frac{e^{-s\tau}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(x-\xi)}}{\omega^2 + s^2/c^2} d\omega.$$

La integral compleja en la igualdad anterior puede evaluarse mediante el teorema del residuo (ver [1] o [29], por ejemplo) con lo que se obtiene

$$\overline{G}(x, s, \xi, \tau) = \frac{c \exp(-s\tau - s|x - \xi|/c)}{2s}.$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa se llega a

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{c}{2} H(t - \tau - |x - \xi|/c),$$

la cual es la función de Green del ejemplo. ■

Ejercicio 10.2 Verifique que la solución del problema $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = f(x, t)$ con $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, está dada por $\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$. ■

10.3 Distribuciones y funciones de Green

En esta sección se hace una introducción elemental al estudio de las distribuciones. Como se indicó al principio del capítulo, esta sección es la más complicada del libro y se puede omitir en un primer curso de edp.

Es necesario extender el concepto de derivada, por ejemplo, para dar sentido a las soluciones discontinuas de la ecuación de Burgers. Se espera que para los estudiantes de ecuaciones diferenciales parciales esta sección sea su primer acercamiento a la teoría moderna de ecuaciones diferenciales parciales. El siguiente tratamiento es una simplificación del enfoque de Kesavan en [18], en el cual la teoría se desarrolla en \mathbb{R}^N con $N > 1$.

Definición 10.2 Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se define el soporte de ϕ , $sop(\phi)$, como el conjunto

$$sop(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}},$$

donde, como se acostumbra \bar{A} denota la cerradura de A . Si $\text{sop}(\phi)$ es acotado, se sigue que es compacto, en este caso se dice que ϕ tiene soporte compacto. El conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto es un espacio vectorial que se denota por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

■ **Ejemplo 10.10** Se sabe del cálculo diferencial (ver por ejemplo [26]) que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

pertenece a $C^\infty(\mathbb{R})$. A partir de la función f se puede construir la función

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-a^2/(a^2-x^2)}, & \text{si } |x| < a, \\ 0 & \text{si } |x| \geq a. \end{cases} \tag{10.35}$$

la cual puede demostrarse que pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{sop}(\phi) = [-a, a]$. ■

■ **Definición 10.3** Una sucesión de funciones $\{\phi_n\}$ contenida en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se dice que converge a cero, si existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ tal que $\text{sop}(\phi_n) \subset K$ para toda n y si ϕ_n y todas sus derivadas convergen uniformemente a cero en K , lo cual se denota por $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$.

Dado un espacio vectorial V sobre \mathbb{R} , un funcional T es una transformación $T : V \rightarrow \mathbb{R}$. El funcional se dice lineal si $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$ para toda $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

■ **Definición 10.4** Un funcional lineal $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una distribución en \mathbb{R} si $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ implica $T(\phi_n) \rightarrow 0$.

■ **Ejemplo 10.11** Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice localmente integrable si para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_K |f(x)| dx < \infty.$$

Por ejemplo, toda función continua en \mathbb{R} es localmente integrable. Dada una función localmente integrable f se define el funcional lineal $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la

relación

$$T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx.$$

No es difícil demostrar que T es una transformación lineal. Supongamos que (ϕ_n) es tal que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces existe un compacto $K \subset \mathbb{R}$, tal que el $\sup_{x \in K} \phi_n(x) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, por lo tanto

$$\left| \int_K f(x)\phi_n(x)dx \right| \leq \left| \sup_{x \in K} \phi_n(x) \right| \int_K |f(x)|dx \rightarrow 0,$$

cundo $n \rightarrow \infty$, de donde T_f es una distribución en \mathbb{R} . ■

■ **Ejemplo 10.12 — Delta de Dirac.** Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Se define como

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Claramente δ_{x_0} es una transformación lineal, efectivamente

$$\delta_{x_0}(\alpha\phi + \psi) = (\alpha\phi + \psi)(x_0) = \alpha\phi(x_0) + \psi(x_0) = \alpha\delta_{x_0}(\phi) + \delta_{x_0}(\psi).$$

Supongamos que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$. Puesto que $\phi_n(x_0) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que $\delta_{x_0}(\phi_n) \rightarrow 0$. Por lo tanto δ_{x_0} es una distribución en \mathbb{R} . ■

(N) Obsérvese que no hay nada esotérico en la definición de la distribución delta. El funcional *delta de Dirac* definido por $\delta(\phi) = \delta_0(\phi) = \phi(0)$ está perfecta y simplemente definido en el contexto del espacio de distribuciones. Más aún, lo que debería dar fin a toda polémica sobre la delta de Dirac es que no existe ninguna función localmente integrable f para la cual se tenga

$$T_f = \delta,$$

lo cual se demuestra en el siguiente lema.

Lema 10.1 No existe función localmente integrable f tal que la distribución inducida cumpla $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx = \delta(\phi)$

Demostración. Supongamos que existe f localmente integrable en \mathbb{R} tal que $T_f = \delta$. Considere las funciones¹ $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte en $[-\varepsilon, \varepsilon]$ tales que $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$ y $\phi_\varepsilon \equiv 1$ en $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. Entonces

$$\delta(\phi_\varepsilon) = \phi_\varepsilon(0) = 1,$$

para toda ε . Por lo tanto

$$1 = \delta(\phi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_\varepsilon(x)dx = \int_{|x| \leq \varepsilon} f(x)\phi_\varepsilon(x)dx \leq \int_{|x| \leq \varepsilon} |f(x)|dx \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0$$

dado que f es localmente integrable, lo cual es una contradicción. □

Los ejemplos y lema anteriores muestran que el espacio de distribuciones contiene al espacio generado por las funciones localmente integrables. La situación es compleja ya que además incluye distribuciones definidas por medidas y otras más, así que el espacio de distribuciones es extraordinariamente vasto.

10.3.1 Derivadas de distribuciones

Las funciones localmente integrables nos servirán para construir algunas propiedades de las distribuciones en general. Entre estas, la propiedad de derivación débil.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con primera derivada continua en \mathbb{R} , entonces f' es localmente integrable. Sea Ω un intervalo abierto y acotado, para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte contenido en Ω se obtiene, integrando por partes que

$$T_{f'}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = f(x)\phi(x) \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = -T_f(\phi').$$

Esta propiedad motiva la siguiente definición.

Definición 10.5 Sea $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ una distribución. Se define la derivada distribucional T' de T como

$$T'(\phi) = -T(\phi').$$

Ahora demostraremos que T' es una distribución. Dado que la derivación sobre ϕ es lineal, la derivada T' es lineal. Sea ϕ_n una sucesión tal que $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$, se tiene $\phi'_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$, dado que T es distribución $T(\phi'_n) \rightarrow 0$ y por lo tanto $T'(\phi_n)$ también converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, T' es una distribución. Se usa también la notación $T' = \frac{dT}{dx}$.

¹Las cuales pueden construirse a partir de las funciones definidas en (10.35).

■ **Ejemplo 10.13** De la definición de la delta de Dirac

$$\frac{d\delta}{dx}(\phi) = -\phi'(0).$$

Así la derivada distribucional de la delta es el negativo del funcional dipolo D definido por $D(\phi) = \phi'(0)$. ■

■ **Ejemplo 10.14** La función de Heaviside H definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (10.36)$$

es localmente integrable y por lo tanto induce una distribución

$$T_H(\phi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)dx = \int_0^{\infty} \phi(x)dx.$$

Cuya derivada está dada por

$$\frac{dT_H}{dx}(\phi) = -T_H(\phi') = -\int_0^{\infty} \frac{d\phi}{dx}dx = \phi(0) = \delta(\phi).$$

Es decir, ¡la **derivada distribucional** de la función de Heaviside es la delta de Dirac! ■

En libros avanzados suele omitirse la palabra *distribucional* para decirse simplemente *derivada* lo cual suele causar confusión en los estudiantes. Un ejemplo de que la distribución inducida por la derivada clásica y la derivada distribucional son objetos diferentes, es justamente el ejemplo 10.14. Claramente la derivada clásica de la función de Heaviside es la función cero excepto en el punto $x = 0$ donde la derivada clásica *no está definida*, por lo tanto la distribución inducida por la derivada clásica de la función Heaviside es el funcional cero $\mathbf{0}(\phi) \equiv 0$, mientras que su derivada distribucional es $\delta(\phi)$, la cual no es cero. Puede demostrarse que si $f \in C^1$ entonces coinciden estas dos nociones.

Para continuar requerimos el concepto de *soporte de una distribución*. Dada una función f localmente integrable, la distribución $T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ permite definir el soporte $sop(T_f)$ de T_f como $sop(f)$. Para una distribución T en general, el soporte, $sop(T)$, se define como el complemento del conjunto abierto más grande en el cual la distribución se anula (una distribución T se anula en conjunto abierto Ω , si $T(\phi) = 0$ para toda ϕ con soporte contenido en Ω), por ejemplo $sop(\delta) = \{0\}$. De manera

análoga al concepto de funciones con soporte compacto se tiene el de *distribuciones con soporte compacto*. Establecido este concepto, se puede definir la convolución de dos distribuciones, al menos una de ellas de soporte compacto. Una vez más, el ejemplo de distribuciones inducidas por funciones localmente integrables nos ayuda a definir la convolución de distribuciones, para este fin, primero definimos la convolución entre una distribución y una función $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Recordamos que la convolución entre dos funciones u, v integrables en \mathbb{R} , se define como

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)v(x-y)dy.$$

Si definimos $(\tau_x u)(y) = u(y-x)$ y $\widehat{u}(y) = u(-y)$ se tiene

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\tau_x \widehat{v}(y)dy.$$

Si u es localmente integrable se extiende la definición de la convolución para la distribución inducida por u y la función $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ como

$$(T_u * \phi)(x) = T_u(\tau_x \widehat{\phi}).$$

En general, se define para una distribución T cualquiera la convolución $T * \phi$ donde $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ como la función

$$(T * \phi)(x) = T(\tau_x \widehat{\phi}).$$

Ejercicio 10.3 a) Compruebe que

$$\widehat{(\tau_x u)} = \tau_{-x}(\widehat{u}) \tag{10.37}$$

$$\tau_x \tau_y = \tau_{x+y}. \tag{10.38}$$

b) Demuestre que $\tau_x(\phi)$ está en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ para $x \in \mathbb{R}$. ■

Introducimos ahora la convolución entre distribuciones.

Definición 10.6 Sean S, T distribuciones, al menos una de ellas con soporte compacto. La convolución $S * T$ es la única distribución caracterizada por las siguientes condiciones equivalentes:

- i) $(S * T) * \phi = S * (T * \phi)$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- ii) $(S * T)(\phi) = (S * (T * \hat{\phi}))(0)$.

Se tiene el siguiente resultado importante

Teorema 10.1 Sea T una distribución, entonces

$$T = \delta * T = T * \delta$$

y

$$T^{(n)} = \delta^{(n)} * T.$$

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces

$$(\delta * \phi)(x) = \delta(\tau_x \hat{\phi}) = \tau_x \hat{\phi}(0) = \hat{\phi}(-x) = \phi(x).$$

Por lo tanto $\delta * \phi = \phi$. Por otra parte, en el lema 10.2 se demuestra que $*$ es conmutativa y asociativa para distribuciones, de este hecho se sigue que

$$(\delta * T) * \phi = (T * \delta) * \phi = T * (\delta * \phi) = T * \phi.$$

Entonces $(\delta * T - T) * \phi = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de donde se sigue que $\delta * T - T = 0$. Efectivamente, si S es una distribución tal que $S * \phi = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces como $\hat{\phi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tenemos

$$0 = (S * \hat{\phi})(0) = S(\phi)$$

y por lo tanto $S \equiv 0$.

Para las derivadas demostramos primero dos cosas:

- i) $(T * \phi)^{(n)} = (T^{(n)} * \phi) = T * (\phi^{(n)})$.
- ii) $(T_1 * T_2)^{(n)} = (T_1^{(n)} * T_2) = T_1 * (T_2^{(n)})$.

Demostración parte i). Tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(T * \phi)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T * \phi)(x) - (T * \phi)(x - h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(T * \phi)(x) - \tau_h(T * \phi)(x)] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(T * \phi)(x) - (T * (\tau_h \phi))(x)] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(T * (\phi - \tau_h \phi))(x)] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} T \left(\tau_x \left(\frac{\widehat{(\phi - \tau_h \phi)}}{h} \right) \right) \\
 &= T \left(\tau_x \left(\frac{\widehat{d\phi}}{dx} \right) \right) = \left(T * \frac{d\phi}{dx} \right)
 \end{aligned}$$

dado que $\frac{d\phi}{dx} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. La parte faltante de la demostración se deja como ejercicio.

Demostración parte ii). Se tiene que

$$\begin{aligned}
 (T_1 * T_2)^{(n)} * \phi &= (T_1 * T_2) * \phi^{(n)}, \quad \text{por la parte i)} \\
 &= T_1 * (T_2 * \phi^{(n)}), \quad \text{definición 10.6} \\
 &= T_1 * ((T_2)^{(n)} * \phi), \quad \text{parte i)} \\
 &= (T_1 * (T_2)^{(n)}) * \phi, \quad \text{definición 10.6.}
 \end{aligned}$$

Con argumentos similares a los de la parte i) se tiene $(T_1 * T_2)^{(n)} = T_1 * (T_2)^{(n)}$. \square

Lema 10.2 — Kesavan (18). Sean T_1, T_2, T_3 distribuciones en \mathbb{R}^N .

i) Si al menos alguna de T_1, T_2 tiene soporte compacto, entonces

$$T_1 * T_2 = T_2 * T_1.$$

ii) Si S_1 y S_2 son los soportes de T_1 y T_2 respectivamente, y al menos uno de ellos compacto, entonces

$$\text{sop}(T_1 * T_2) \subset S_1 \cup S_2.$$

iii) Si al menos dos de las distribuciones T_1, T_2, T_3 tienen soporte compacto entonces

$$T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3.$$

Demostración. La demostración es directa, sin embargo demasiado técnica para un primer acercamiento, sugerimos que el lector revise en el libro citado. \square

■ **Ejemplo 10.15** Consideramos la función de Heaviside H , entonces

$$\begin{aligned}\delta' * H &= \delta * H' = \delta * \delta = \delta \\ 1 * \delta' &= 1' * \delta = 0,\end{aligned}$$

como el lector puede verificar. \blacksquare

Definición 10.7 Considérese un operador diferencial

$$L[u] = \sum_{n=0}^m a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} u(x),$$

donde $a_n(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Sean S, T distribuciones tales que

$$L(T) = S, \tag{10.39}$$

entonces se dice que T es una solución distribucional de la ecuación (10.39). En particular, si existe una solución distribucional de la ecuación

$$L(T) = \delta, \tag{10.40}$$

se dice que T es una *solución fundamental distribucional* de la ecuación (10.40). También se dice que T es una solución fundamental del operador L .

■ **Ejemplo 10.16** La distribución inducida por la función de Heaviside T_H es una solución fundamental de la ecuación

$$\frac{d}{dx} T = \delta,$$

como se vio en el ejemplo 10.14. \blacksquare

N Claramente, se dice *una solución fundamental* ya que la distribución inducida por cualquier constante C es solución de la ecuación $\frac{d}{dx}T = 0$ y así $T_H + C$ también es solución fundamental de la ecuación, es decir

$$(T_H + C)' = \delta.$$

En el siguiente ejemplo se proporcionan soluciones fundamentales para el operador de Laplace Δ en \mathbb{R}^N , $N \geq 2$.

■ **Ejemplo 10.17 — Operador de Laplace.** Hemos visto en la sección 4.2 que la ecuación de Laplace es invariante respecto de rotaciones. De ello se desprende que la ecuación

$$\Delta u = 0$$

tiene simetría esférica lo cual hace posible encontrar soluciones de la forma

$$u = \psi(r)$$

donde

$$r = \sqrt{\sum_i (x_i - \xi_i)^2}$$

es decir, soluciones que son invariantes bajo rotaciones alrededor del punto $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$. Puede demostrarse por medio de la regla de la cadena (como se hizo en la sección 4.2 para $N = 2, 3$) que en éstas condiciones la ecuación de Laplace se reduce a

$$\Delta u = \psi''(r) + \frac{N-1}{r} \psi'(r) = 0,$$

así ψ satisface una ecuación diferencial ordinaria, la cual al integrarse se obtiene

$$\psi'(r) = Cr^{1-N}$$

y finalmente

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{Cr^{2-N}}{2-N}, & \text{si } N > 2 \\ C \log r & \text{si } N = 2 \end{cases} \tag{10.41}$$

donde C es una constante. ■

- N** Puede demostrarse que para cierta constante C la función $u(x) = \psi(r)$ es solución fundamental del operador Δ , es decir, la solución u del ejercicio anterior, satisface la ecuación simbólica

$$\Delta u = \delta_{\xi}.$$

Finalmente, las soluciones fundamentales si existen, nos permiten resolver ecuaciones más complejas, si T es una solución fundamental con soporte compacto de la ecuación $L(T) = \delta$ se tiene

$$L(S * T) = \sum_{n=1}^m a_n(x)(S * T)^{(n)} = S * \left(\sum_{n=1}^m a_n(x)T^{(n)} \right) = S * \delta = S,$$

es decir, $S * T$ es solución de la ecuación $L[E] = S$, de acuerdo con el teorema 10.1.

Para terminar este capítulo motivamos con un ejemplo para introducir una definición equivalente de función de Green, siempre que ésta exista, de un problema con valores en la frontera asociado a $L[u]$, a saber, como una solución fundamental que satisface las condiciones de frontera. Las funciones de Green pueden ser calculadas explícitamente sólo en algunos casos. El mayor poder de las funciones de Green se encuentra en la teoría de edp que es objeto de un curso más avanzado, el cual puede estudiarse por ejemplo en [18] o en [25].

■ **Ejemplo 10.18** Considere el ejemplo 10.2. La función de Green está dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(x-a)(\xi-b)}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq \xi, \\ \frac{(x-b)(\xi-a)}{b-a} & \text{si } \xi \leq x \leq b. \end{cases}$$

Se demuestra que G es la solución distribucional del siguiente problema con valores en la frontera como función de x .

$$y''(x) = \delta(x - \xi), \quad a < x < b \quad (10.42)$$

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (10.43)$$

Observe que la función G satisface las condiciones de frontera. Para demostrar que G satisface la ecuación (10.42) se escribe G en términos de la función de Heaviside como sigue:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{b-a} [H(x - \xi)(x - b)(\xi - a) + H(\xi - x)(x - a)(\xi - b)]$$

y se calcula

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) &= \frac{1}{b-a} \delta(x-\xi)[(x-b)(\xi-a) - (x-a)(\xi-b)] \\ &\quad + \frac{1}{b-a} [H(x-\xi)(\xi-a) + H(\xi-x)(\xi-b)]. \end{aligned}$$

Notemos que $\delta(x-\xi)[(x-b)(\xi-a) - (x-a)(\xi-b)] = 0$ y por lo tanto

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \xi) = \frac{1}{b-a} [\delta(x-\xi)(\xi-a) - \delta(x-\xi)(\xi-b)] = \delta(x-\xi)$$

inversamente, si G satisface (10.42) y (10.43) entonces G es la función de Green del problema, como puede verificarse. ■

Para el caso general se tiene la siguiente:

Definición 10.8 — Función de Green. Una función de Green para el problema (10.14), (10.15), siempre que exista, es una solución en el sentido de distribuciones del problema

$$L[G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \tag{10.44}$$

$$B[G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \mathbf{y} \in \Omega, \tag{10.45}$$

donde las derivadas en los operadores están tomadas con respecto a \mathbf{x} .

10.4 Problemas y ejercicios del Capítulo 10

1. Algunos problemas de edo pueden resolverse mediante la construcción de una función de Green usando un método alternativo al presentado en este libro. Como ejemplo resolveremos el problema

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (10.46)$$

A fin de resolver este problema se procede como sigue:

- a) Muestre que el siguiente problema tiene como solución única la trivial y por lo tanto la función de Green existe

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (10.47)$$

La función de Green se encuentra a partir de la solución general de la ecuación en (10.47) para $x < \xi$ y $x > \xi$ y definiendo:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi) \cos x + a_2(\xi) \sin x & 0 \leq x \leq \xi \\ b_1(\xi) \cos x + b_2(\xi) \sin x & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10.48)$$

Muestre que bajo las hipótesis:

- i) $\lim_{x \rightarrow \xi^-} G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^+} G(x, \xi) = 0$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow \xi^+} G_x(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} G_x(x, \xi) = 1$,
- iii) $G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0$.

(N) Estas propiedades son una consecuencia directa de la definición 10.8.

Las funciones a_1, a_2, b_1, b_2 quedan determinadas y de hecho

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin(\xi-1) \sin x}{\sin 1} & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\sin \xi \sin(x-1)}{\sin 1} & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (10.49)$$

- b) Dada la función de Green del inciso anterior muestre que la solución del problema (10.46) está dada por

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \xi d\xi.$$

Demuestre lo anterior dividiendo la integral en los intervalos

$$0 \leq x \leq \xi \text{ y } \xi \leq x \leq 1.$$

2. Como en el ejercicio anterior, resuelva el problema

$$y'' - y = x \tag{10.50}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{10.51}$$

por medio de la función de Green. Demuestre que la función

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)e^x + a_2(\xi)e^{-x} & 0 \leq x \leq \xi \\ b_1(\xi)e^x + b_2(\xi)e^{-x} & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{10.52}$$

bajo las hipótesis:

- i) $\lim_{x \rightarrow \xi^-} G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^+} G(x, \xi) = 0,$
- ii) $\lim_{x \rightarrow \xi^+} G_x(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} G_x(x, \xi) = 1,$
- iii) $G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0.$

Las funciones a_1, a_2, b_1, b_2 están determinadas y G está dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sinh(\xi-1)\sinh x}{\sinh 1} & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{\sinh \xi \sinh(x-1)}{\sinh 1} & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{10.53}$$

Demuestre que

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \xi d\xi = \frac{\sinh x}{\sinh 1} - x.$$

Compruebe que $y(x)$ así definida es solución de (10.50) junto con las condiciones de frontera.

3. En general un problema con valores en la frontera asociado a la ecuación diferencial ordinaria de orden n puede resolverse mediante la función de Green. Dado el problema

$$\begin{aligned} L[y] &= a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = f(x), \quad x \in (a, b) \\ V_k[y] &= \alpha_k^0 y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) \\ &\quad + \beta_k^0 y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \\ &= 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

donde $a_k, k = 0, \dots, n$ y f son funciones continuas y $a_n(x) \neq 0$, para $x \in [a, b]$. Demuestre que el operador L posee una y una sola función de Green (si el problema homogéneo asociado tiene sólo la solución trivial) dada por

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= a_1(\xi)y_1(x) + a_2(\xi)y_2(x) + \dots + a_n(\xi)y_n(x), \text{ para } a \leq x \leq \xi, \\ G(x, \xi) &= b_1(\xi)y_1(x) + b_2(\xi)y_2(x) + \dots + b_n(\xi)y_n(x), \text{ para } \xi \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Donde y_1, \dots, y_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada $L[y] = 0$ y la función $G(x, \xi)$ satisface las hipótesis

i) $\lim_{x \rightarrow \xi^-} G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^+} G(x, \xi) = 0$, y

$$\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, \xi) = 0, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

ii) $\lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(x, \xi) = \frac{1}{a_n(\xi)}$,

iii) G como función de x satisface las condiciones de frontera.

Demuestre que $L[G(x, \xi)] = 0$, para $x \neq \xi$. En tal caso la solución del problema $L[y] = f(x)$ con condiciones de frontera $V_k[y] = 0$ está dada por

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

4. (Tomado de [20].) Use el problema anterior para determinar la función de Green asociada al problema

$$y^{iv} = 1; y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

y resuélvalo.

Solución. $G(x, \xi) = x^2/6(3\xi - x), 0 \leq x \leq \xi; \xi^2/6(3x - \xi), \xi \leq x \leq 1, y = x^2/24(x^2 - 4x + 6)$.

5. Resuelva mediante la función de Green, el problema $y'' + y = x^2; y(0) = y(\pi/2) = 0$.
6. Resuelva el problema siguiente por el método de expansión en funciones propias

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = f(x), y(0) = 0, y(l) = 0.$$

7. Derive con respecto a ρ la función G definida en el ejemplo 10.3 en la sección 10.1 para obtener la fórmula integral de Poisson.
8. Utilice las funciones definidas en 10.35 para construir las funciones ϕ_ϵ usadas en la demostración del lema 10.1.

9. Complete la parte i) en la demostración del teorema 10.1 , es decir, demuestre la igualdad que falta y proceda por inducción a completar la demostración.
10. Considere la ecuación de calor unidimensional con las condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) &= 0 \\ u(L,t) &= 0 \\ u(x,0) &= g(x).\end{aligned}$$

Use el método de separación de variables para resolver el problema e intercambie el orden de integración con el de la suma infinita. ¿La solución así descrita contiene una función de Green? Explique.

A Hechos básicos del Cálculo

A.1 Concavidad

Definición A.1 Se dice que una función f es cóncava hacia arriba (convexa) en un intervalo (a, b) si y sólo si para todo x, y del intervalo se cumple

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \text{ para } 0 < t < 1. \quad (\text{A.1})$$

Similarmente, se dice que f es cóncava hacia abajo si $-f$ es cóncava hacia arriba, en este caso se cumple que

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y), \text{ para } 0 < t < 1. \quad (\text{A.2})$$

El lector debe notar que tomando $t = 1/2$ en la definición A.1 se tiene la relación

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad (\text{A.3})$$

es decir, f es cóncava hacia arriba si evaluada en el punto intermedio de x y y , la función es menor que el promedio de f en los puntos x, y .

En el caso en el que la función $f = f(x)$ es derivable se puede ver fácilmente (por ejemplo en [26, Teorema 2 p. 287]) que la función es cóncava hacia arriba en (a, b) , si

f' es creciente ¹. Además se sabe que si $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ en un intervalo, entonces $\frac{df(x)}{dx}$ es creciente. Podemos concluir que si $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$, en un intervalo, la función en un punto cualquiera del intervalo será menor que el promedio de la función evaluada en puntos vecinos que circunden al punto dado de acuerdo con (3.7). Por otra parte, si f es cóncava hacia abajo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{A.4}$$

Así que puede demostrarse que si $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$, entonces la función f en un punto cualquiera del intervalo será mayor que el promedio de la función evaluada en puntos vecinos que circunden al punto dado de acuerdo a (A.4).

A.2 El teorema de Gauss

La siguiente formulación simple del teorema de Gauss es suficiente para las aplicaciones en este libro

Teorema A.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región sólida simple cuya superficie frontera $\partial\Omega$, con normal exterior \mathbf{n} , está orientada positivamente. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a Ω . Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV \tag{A.5}$$

A.3 Convergencia de series

Definición A.2 Sean f y $\phi_n, n = 1, 2, \dots$ funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ y sean $c_n \in \mathbb{C}$ constantes. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ converge puntualmente

¹Se dice que una función f es creciente en un intervalo, si $f(a) < f(b)$ siempre que a y b sean puntos en el intervalo con $a < b$.

a $f(x)$, es decir, en cada punto x de $[a, b]$, si $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n \phi_n(x) = f(x)$, para cada $x \in [a, b]$.

Definición A.3 Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, es decir, en cada punto x de $[a, b]$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que para toda $x \in [a, b]$ si $n > N$, entonces $\left| f(x) - \sum_{n=0}^N c_n \phi_n(x) \right| < \varepsilon$.

Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden

Ecuaciones de primer orden no homogéneas

Apéndice. Ecuaciones de segundo orden

Ecuaciones homogéneas

Ecuación de Euler

Ecuaciones no homogéneas

Método de Frobenius

B Ecuaciones diferenciales

Los aspectos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias son prerequisite de cualquier curso de ecuaciones diferenciales parciales. Para un estudio detallado de los temas tratados en este apéndice se recomienda [5].

B.1 Ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden

B.1.1 Ecuaciones de primer orden no homogéneas

Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x), \tag{B.1}$$

a la función

$$\mu(x) = e^{\int a(x)dx},$$

se le conoce como factor integrante de la ecuación (B.1). La solución de la ecuación se encuentra multiplicando por el factor integrante e integrando posteriormente de donde

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} \left(\int \mu(x)b(x)dx + c \right).$$

B.2 Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes

B.2.1 Ecuaciones homogéneas

Considere la ecuación

$$Ay''(t) + By'(t) + Cy(t) = 0 \tag{B.2}$$

donde A, B, C son constantes reales dadas. Para resolverla se propone $y(t) = e^{\alpha t}$. Al derivar y al sustituir en (B.2) se obtiene después de dividir por $e^{\alpha t}$ la *ecuación característica* dada por:

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0, \tag{B.3}$$

la cual es una ecuación cuadrática que se puede resolver para α . Se tienen las siguientes soluciones generales de la ecuación ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes:

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{1/(2A)(-B+\sqrt{B^2-4AC})t} + c_2 e^{1/(2A)(-B-\sqrt{B^2-4AC})t}, & I > 0 \\ e^{-B/(2A)t} [c_1 \cos((4AC - B^2)t) + c_2 \operatorname{sen}((4AC - B^2)t)], & I < 0, \\ c_1 e^{-B/(2A)t} + c_2 t e^{-B/(2A)t}, & I = 0, \end{cases} \tag{B.4}$$

donde $I = B^2 - 4AC$.

B.2.2 Ecuación de Euler

Una ecuación de la forma $ar^2R''(r) + brR'(r) + cR(r) = 0$ se llama ecuación de Euler. Para resolverla, se propone una solución de la forma $R(r) = r^\alpha, r > 0$. Derivando esta expresión y sustituyendo en la ecuación de Euler se tiene después de cancelar r^α :

$$a\alpha(\alpha - 1) + b\alpha + c = 0$$

o bien

$$a\alpha^2 + (b - a)\alpha + c = 0,$$

la cual es llamada ecuación característica de la ecuación de Euler. Si α_1, α_2 son raíces distintas de la ecuación anterior se tiene la solución general

$$R(r) = c_1 r^{\alpha_1} + c_2 r^{\alpha_2}. \tag{B.5}$$

■ **Ejemplo B.1** La ecuación $r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0$ tiene ecuación característica $\alpha^2 - n^2 = 0$, de donde $\alpha = \pm n$ y así $R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$. ■

B.2.3 Ecuaciones no homogéneas

En esta sección consideramos ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$Ay''(t) + By'(t) + Cy(t) = g(t). \quad (\text{B.6})$$

La solución de esta ecuación (ver por ejemplo [5]) está dada por la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada $Ay''(t) + By'(t) + Cy(t) = 0$, mas una solución particular $\psi(t)$, es decir ψ satisface $A\psi''(t) + B\psi'(t) + C\psi(t) = g(t)$.

■ **Ejemplo B.2** Resuelva la ecuación $y'' + y = 3$.

Solución. Una solución particular es $\psi(t) = 3$. La solución de la ecuación homogénea asociada $y'' + y = 0$ es $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Por lo tanto la solución general de la ecuación $y'' + y = 3$ es $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 3$. ■

Supongamos que la ecuación homogénea asociada a la ecuación (B.6) tiene soluciones linealmente independientes $y_1(t), y_2(t)$ entonces una solución particular de la ecuación (B.6) está dada por la fórmula

$$\psi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

donde

$$u_1'(t) = -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} \text{ y } u_2'(t) = -\frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}$$

$W[y_1, y_2](t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$ es el Wronskiano de y_1, y_2 . En la práctica u_1, u_2 pueden encontrarse por integración directa en sólo algunos casos, dado que las expresiones para tales funciones pueden llegar a ser muy complicadas. A pesar de las complicaciones para encontrar una solución particular de la (edo) resulta que para ciertas funciones $g(t)$ se pueden encontrar soluciones particulares por el método de la conjetura juiciosa. Por ejemplo cuando

$$g(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$$

se propone a ψ de la forma

$$\psi(t) = \begin{cases} A_0 + A_1t + \cdots + A_nt^n, & C \neq 0, \\ t(A_0 + A_1t + \cdots + A_nt^n), & C = 0, n \neq 0, \\ t^2(A_0 + A_1t + \cdots + A_nt^n), & C = B = 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Los coeficientes A_k , $0 \leq k \leq n$ se calculan directamente al sustituir ψ en la ecuación diferencial e igualar el resultado con los coeficientes de $g(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ los cuales se suponen conocidos. Este método, conocido como la *conjetura juiciosa* puede generalizarse sin dificultad para g de la forma

$$g(t) = (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n)e^{\alpha t},$$

con α real o incluso $\alpha = \omega i$, donde $i = \sqrt{-1}$.

B.2.4 Método de Frobenius

Considérese la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes no constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = 0. \quad (\text{B.8})$$

Se dice que $x = 0$ es un punto ordinario de $a(x)$ y $b(x)$ si ambas funciones pueden desarrollarse en series de Taylor alrededor de $x = 0$. En tal caso se garantiza que y puede escribirse como

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (\text{B.9})$$

Si $x = 0$ no es un punto ordinario, se le llama punto singular, por ejemplo, para la ecuación de Bessel de orden n :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - n^2}{x^2}y = 0 \quad (\text{B.10})$$

se tiene que la función $a(x) = \frac{1}{x}$ tiene un polo simple en $x = 0$ y la función $b(x) = \frac{x^2 - n^2}{x^2}$ tiene un polo doble en $x = 0$. Este caso, puede resolverse haciendo

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (\text{B.11})$$

El método de Frobenius consiste en proponer una solución de la forma (B.11) sustituirla en la ecuación diferencial por resolver y obtener los coeficientes a_n y el parámetro p a partir de la serie obtenida.

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, Third Edition, Mc Graw Hill 1979.
- [2] Anderson, J. D., *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw Hill 1994.
- [3] Atkinson, K., E., *An introduction to Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. 1989.
- [4] Bitsadze, A. V., Kalinichenko, D. F., *A collection of problems on the equations of Mathematical Physics*, MIR Publishers Moscow 1977.
- [5] Braun, M., *Differential Equations and Their Applications*, Springer Verlag 1993.
- [6] Churchill, R. V., *Operational Mathematics Third Edition*, McGraw Hill, 1972.
- [7] Churchill, R. V., Brown J. W., *Fourier Series and Boundary value Problems Third Edition*, McGraw-Hill, 1978.
- [8] Courant R., John F., *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 2*, Limusa Noriega editores 2004.

- [9] Drabek, P., Hulova. G., *Elements of Partial Differential Equations*, de Gruyter, 2007.
- [10] Friedman, A., *Foundation of Modern Analysis*, Dover Publications, Inc New York 1982.
- [11] Friedberg S. H., Insel A. J., Spence L. E., *Linear Algebra*, Prentice Hall 2005.
- [12] Folland G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Applications*, Johnn Wiley and Sons, Inc. 1984.
- [13] Gasquet, C., Witomski, P. *Fourier Analysis and applications*, Springer-Verlag New York 1999.
- [14] Heaviside, O., *Electromagnetic Theory, V.II*, London, the electrician printing and publishing, 1899.
- [15] Isaacson, E., Keller, H. B., *Analysis of Numerical Methods* Jhonn Wiley, New York, 1966.
- [16] John, F., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag N. Y., 1982.
- [17] Katznelson Y., *An introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publication, Inc, New York 1968.
- [18] Kesavan S., *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley and Sons, Inc. 1989.
- [19] Keane M. K., *A Very Applied First Course in Partial Differential Equations*, Prentice Hall 2002.
- [20] Krasnov M., Kisielov A., Makarenko G.m *Ecuaciones integrales*, Editorial Mir. 1982.
- [21] Lax P. D., *The Formation and Decay of Shock Waves*, The American Mathematical Monthlty, Vol 79, No. 3 (1972) p 227-241.
- [22] Lehmann, Ch., *Geometría analítica*, ed. Limusa, 2007.
- [23] Ockendon J., Howison S., Lacey A., Movchan A., *Applied Partial Differential Equations* Oxford University Press 1999.

- [24] Pinsky, M. A., *Introducción al análisis de Fourier y las ondas*, International Thomson Editores 2003.
- [25] Renardy M., Rogers C. R., *An Introduction to Partial Differential Equations, second edition*, Springer-Verlag New York 2004.
- [26] Spivak, M., *Calculus*, ed Reverté, S. A., 1981.
- [27] Strauss, W. A., *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- [28] Tijonov, A., Samarsky, A., *Ecuaciones de la física matemática* ed. MIR Moscú 1980.
- [29] Weinberg, H. F., *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales*, Ed. Reverté, Barcelona 1992.
- [30] Zachmanoglou E. C., Thoe D. W., *Introduction to Partial Differential Equations*, Dover Publications, Inc., New York, 1986.
- [31] Zill D. G., Cullen M.R., *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 8a edición, Cengage Learning, 2008.

Índice alfabético

C

- clasificación de las edp 6
- coeficientes de Fourier,
 - para la ecuación de calor, 87
 - para la ecuación de onda, 96
- condiciones
 - de frontera (cf) 43
 - de tipo Dirichlet 44
 - de tipo Neumann 44
 - de tipo Robin 44
 - generales 45
 - iniciales (ci) 43
- conjetura juiciosa, método de la, 238
- convergencia,
 - puntual 232
 - uniforme 233

- convexa, función, 231
- convexión, 21

D

- Delta de Dirac, 217
- Derivada distribucional, 218
- Distribución, 216
 - delta de Dirac, 217
 - soporte de una, 219
- Duhamel, principio de 49, **191** ,
principio clásico de, **195**.

E

- ecuación
 - de Burgers, 29
 - de calor, **39**

Deducción de la, 39
 descripción de la, 45
 de Euler, 236
 de movimiento de una membrana circular, 134
 de Laplace, **55**
 de Legendre, 135
 de onda, 61
 de transporte, 21
 ecuación característica,
 de la ecuación diferencial ordinaria
 de segundo orden 236
 de la ecuación parcial homogénea de
 primer orden 22
 edp, **1**
 ecuaciones de Maxwell 65
 ecuaciones diferenciales ordinarias
 de primer orden 235
 de segundo orden
 con coeficientes constantes 236
 no homogéneas 237
 extensión periódica 112

F

factor integrante, 235
 frecuencia fundamental, 98
 Fick, ley de 42
 forma canónica, **7**
 de las ecuaciones elípticas, 10
 de las ecuaciones hiperbólicas, 8
 de las ecuaciones parabólicas, 9
 forma cuadrática **13**
 Definida, 13
 Degenerada, 13
 indefinida, 13
 Fórmula integral de Poisson, 102, 203.

Fórmula de Duhamel, 193
 Fórmula de Kirchhoff-Poisson, 71.
 fórmula de Rodrigues, 137
 fórmula en diferencias finitas para
 la ecuación de onda, 150
 la ecuación de calor, 152
 Fourier,
 Ley de, 39
 series de, 85, 109
 fuente, 53

G

Gauss, el teorema de, **232**
 Gibbs, fenómeno de, 90, 111
 Green, función de, 179,
 definición de la función de, 205,
 definición formal de la función de,
 226

I

Invarianza del operador de Laplace
 respecto de rotaciones, **57**

L

Laplaciano,
 en coordenadas polares y esféricas,
 58
 Ley de Newton de intercambio de tempe-
 ratura, 44

M

Método de las características 22

Métodos numéricos, 147

diferencias finitas, 148

para ecuación Laplace, 159

Crank-Nicholson, 155

N

n-ésimos armónicos, 97

O

Operador

lineal, 2

autoadjunto, 141

Ortogonales, vectores, 141

P

Polinomios de

Legendre, 136

Hermite, Thevycheff, 145

principio de Duhamel, 191

principio de Huygens, 73

principio del máximo,

para la ecuación de calor 47

para la ecuación de Laplace 55

principio de superposición 81, 86

problema de calor (PC), 43

problema de Sturm-Liouville

regular, 142

singular, 130

S

serie de Fourier,

para la ecuación de calor 86

para la ecuación de onda 95

trigonométricas 109

solución de la ecuación

de calor

mediante separación de variables,

79

de onda

mediante separación de variables,

94

método de D'Alembert, 66

de laplace

mediante separación de variables,

98

solución fundamental, 179

distribucional, 223

Sturm-Liouville, problema de 125

sumidero, 53

T

Técnica de separación de variables, 79

Teorema

de unicidad

para la ecuación de calor, 48

para la ecuación de Poisson, 56

Principio del máximo

para la ecuación de calor, 47

para la ecuación de Laplace, 55

Transformada

de Fourier, 171

de Laplace, 180

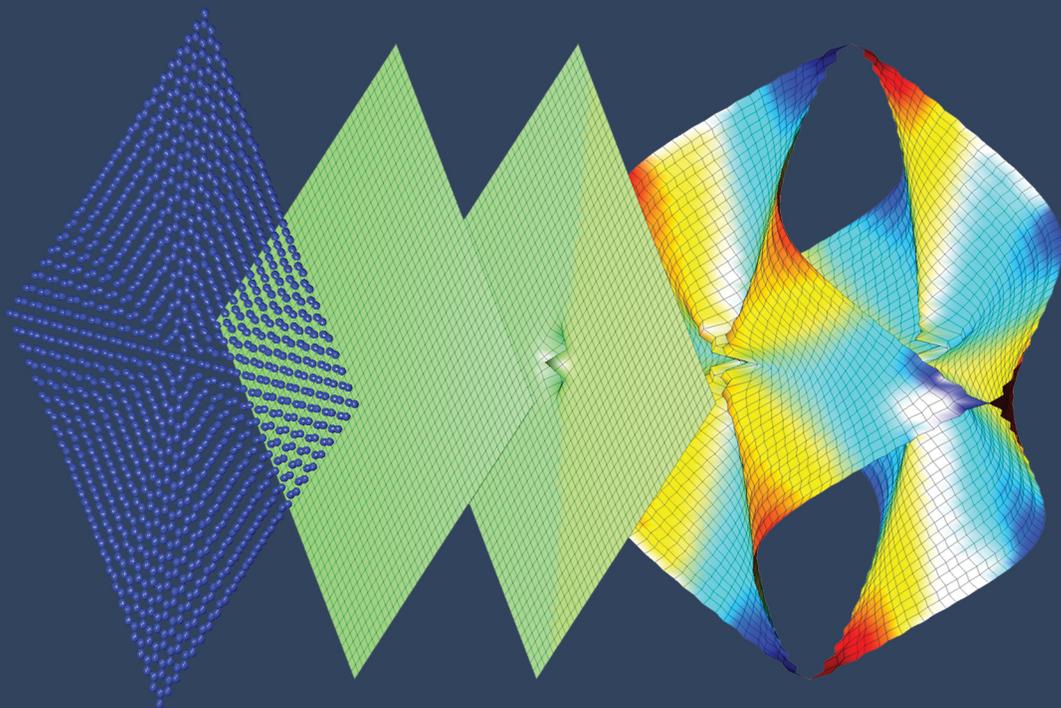
U

Unicidad de las soluciones de las ecuaciones parabólicas, 48

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Parciales
se terminó de imprimir en julio de 2014,
en los talleres de Ideas de Impresión,
Emilio Carranza No. 400, Col. Sn. Andrés Tetepilco,
C. P. 09440, México D. F.

La edición consta de 500 ejemplares más sobrantes para reposición.

Armado por:
Mabel Karina López Sánchez



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina
Del. Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F.
Tel. (01) 58 04 46 00