



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Colección CBI

Libro de texto

**TEORÍA DE FUNCIONES DE UNA
VARIABLE COMPLEJA**

UNA INTRODUCCIÓN

@ItzzyPrin

Laura Hidalgo Solís

TEORÍA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

UNA INTRODUCCIÓN

Laura Hidalgo Solís

Libro de texto



Casa abierta al tiempo

Dr. Eduardo Peñalosa Castro

Rector General

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Secretario General

Dr. Jesús Alberto Ochoa Tapia

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Mtro. Federico Bañuelos Bárcena

Coordinador de Extensión Universitaria

Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas

Jefe de la Sección de Producción Editorial

TEORÍA DE FUNCIONES DE UNA

VARIABLE COMPLEJA

Primera edición: 2019

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX, México

Registro INDIAUTOR: 03-2014-090411255400.01

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-2132-3

Impreso en México / Printed in Mexico

Gracias Dios por todas tus bendiciones.

Gracias por esos momentos en que sentimos tu presencia, por todo lo bueno y verdadero que hay en nuestra vida: por la familia, los amigos, los abrazos, la alegría, el amor, la esperanza, la paz y la oración, por todo esto y más. . . .

Gracias Dios.



Índice general

1	Prefacio	5
----------	-----------------------	----------

I	Parte Uno
----------	------------------

2	Los números complejos.	1
2.1	Álgebra en $\mathbb{C}$	1
2.2	Representación de $\mathbb{C}$	4
2.3	Propiedades	6
2.4	Transformaciones lineales	9
2.5	Forma polar	10
2.6	Geometría	18
2.7	Otras propiedades	18
2.7.1	$\mathbb{C}$ no es un campo ordenado.	19
2.8	Ejercicios	20
3	Funciones en $\mathbb{C}$	25
3.1	Introducción	25
3.2	Topología	26
3.3	Espacios topológicos	27
3.4	Sucesiones y series	33
3.5	Funciones	40
3.5.1	Límites	42
3.6	Series de potencias	45
3.7	El plano $\mathbb{C}_\infty$	51
3.8	Ejercicios	57

4	Funciones $\mathbb{C}$-diferenciables	63
4.1	Introducción	63
4.2	Funciones $\mathbb{C}$ -lineales.	65
4.3	Funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables y holomorfas	66
4.4	Derivada en ∞	78
4.5	Funciones elementales	79
4.5.1	La fórmula de Euler	79
4.5.2	La función exponencial.	80
4.5.3	La función logaritmo	84
4.5.4	Exponentes complejos	87
4.5.5	Las funciones trigonométricas	89
4.5.6	Funciones hiperbólicas	92
4.5.7	Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas	93
4.6	Funciones armónicas	98
4.7	Ejercicios	104
5	Teorema de Cauchy	109
5.1	Integración Compleja	109
5.2	El teorema de Cauchy para rectángulos	123
5.3	Consecuencias	128
5.3.1	Valores propios de matrices	139
5.3.2	Ecuaciones diferenciales homogéneas	140
5.3.3	Caracterización de polinomios	141
5.4	Módulo máximo	141
5.5	Ejercicios	145
6	Versión homotópica	149
6.1	Homotopía	149
6.2	El índice de una curva	154
6.3	El teorema de Cauchy	157
6.4	Ejercicios	161

II

Parte Dos

7	Laurent y residuos	167
7.1	Singularidades	167
7.2	Series de Laurent	170
7.3	Residuos	180
7.4	El teorema del residuo	185
7.5	Integrales impropias	193
7.5.1	Integrales de tipo $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.	195
7.5.2	Transformadas de Fourier	199
7.5.3	Integrales trigonométricas	204
7.5.4	Integrales de Fresnel	205
7.5.5	La integral gaussiana	208
7.5.6	Transformadas de Mellin	209

7.6	El teorema de Runge	213
7.7	Ejercicios	218
8	Aplicaciones conformes	223
8.1	Aplicaciones conformes	223
8.2	Aplicaciones conformes en $\mathbb{C}_\infty$	227
8.3	Transformaciones de Möbius.	228
8.4	Simetría.	238
8.5	Otros ejemplos	241
8.5.1	La aplicación de Joukowski	241
8.5.2	Funciones trigonométricas	249
8.6	Algunas aplicaciones	250
8.7	Teorema de Riemann	253
8.7.1	Familias de funciones continuas	256
8.7.2	La demostración del teorema de Riemann	258
8.8	Ejercicios	260
9	Funciones armónicas	263
9.1	Funciones armónicas	263
9.2	El núcleo de Poisson	272
9.3	El principio de reflexión	277
9.4	El problema de Dirichlet	279
9.5	Ejercicios	280
10	Funciones especiales	283
10.1	Productos infinitos	283
10.2	Funciones holomorfas con ceros predeterminados	289
10.3	La función gamma de Euler	293
10.3.1	Forma integral de la función Γ	301
10.4	La función theta y su ecuación funcional	305
10.5	La función zeta de Riemann	311
10.6	Ejercicios	316
	Bibliografía	318
A	Notación	321
	Index	329



1. Prefacio

Este libro se basa en las notas de clase que he realizado a lo largo de los años, y su principal objetivo es apoyar al estudiante para que comprenda los elementos básicos de la teoría clásica de funciones compleja valoradas de una variable compleja, y los relacione con otras ramas de las matemáticas, integrando los conocimientos y habilidades adquiridos en cursos anteriores.

Asimismo, se desea por medio de los ejemplos expuestos, que el estudiante reconozca el papel que juega la teoría de funciones de variable compleja dentro de las matemáticas, como un antecesor de diversas áreas de la misma, tales como la teoría de homotopía, de variedades algebraicas, de superficies de Riemann, y de curvas algebraicas, entre otras.

En los primeros dos capítulos desarrollamos la teoría general de los números complejos, mostrando su estructura de campo y, de la topología inducida por su identificación con $\mathbb{R}^2$; asimismo establecemos los conceptos de función compleja valorada de una variable compleja y el de series de potencias con coeficientes complejos.

Posteriormente introducimos los conceptos de funciones diferenciables en el sentido complejo, y de funciones holomorfas, lo cual se verá a lo largo del texto que son conceptos equivalentes. Estudiamos ampliamente los ejemplos más importantes, tales como los polinomios, las funciones racionales, dedicándole atención especial a las transformaciones de Möbius; la exponencial compleja, las ramas del logaritmo complejo, las potencias y raíces complejas, así como las funciones trigonométricas.

También, nos introducimos en el tema de integración, desarrollando la teoría necesaria para demostrar que una función es diferenciable en sentido complejo si, y solamente si, es holomorfa. Entre los resultados que encontramos en esta parte se encuentran el teorema de Cauchy, el teorema de Liouville, el teorema fundamental del álgebra, y el teorema del módulo máximo. Estudiamos además el caso en que una función holomorfa tenga singularidades aisladas, los distintos tipos de singularidades y sus características, así como el teorema del residuo y algunas de sus consecuencias.

En la última parte del libro presentamos una introducción a la teoría de funciones armónicas y su relación con la teoría de funciones holomorfas. Y dejamos al final el estudio de los productos infinitos, las funciones especiales gamma, theta y zeta, con el fin de obtener de la ecuación funcional de la función zeta, que Riemann presenta en su trabajo de 1859, *Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse*, en éste trabajo Riemann muestra que la función zeta es la clave para comprender el comportamiento de los números primos.

Agradezco a mis alumnos, maestros y compañeros su apoyo y comentarios realizados que me han permitido estructurar y corregir mis notas, así como al Dr. Xavier Gómez-Mont y a la M. en C. Ana Irene Ramírez cuya motivación y sugerencias han dado lugar al presente libro. En particular

quiero agradecer al Dr. Sevín Recillas y al Dr. Felipe Zaldívar por sus pláticas y comentarios que a lo largo de los años que me han permitido seguir aprendiendo sobre éste maravilloso mundo de las matemáticas.

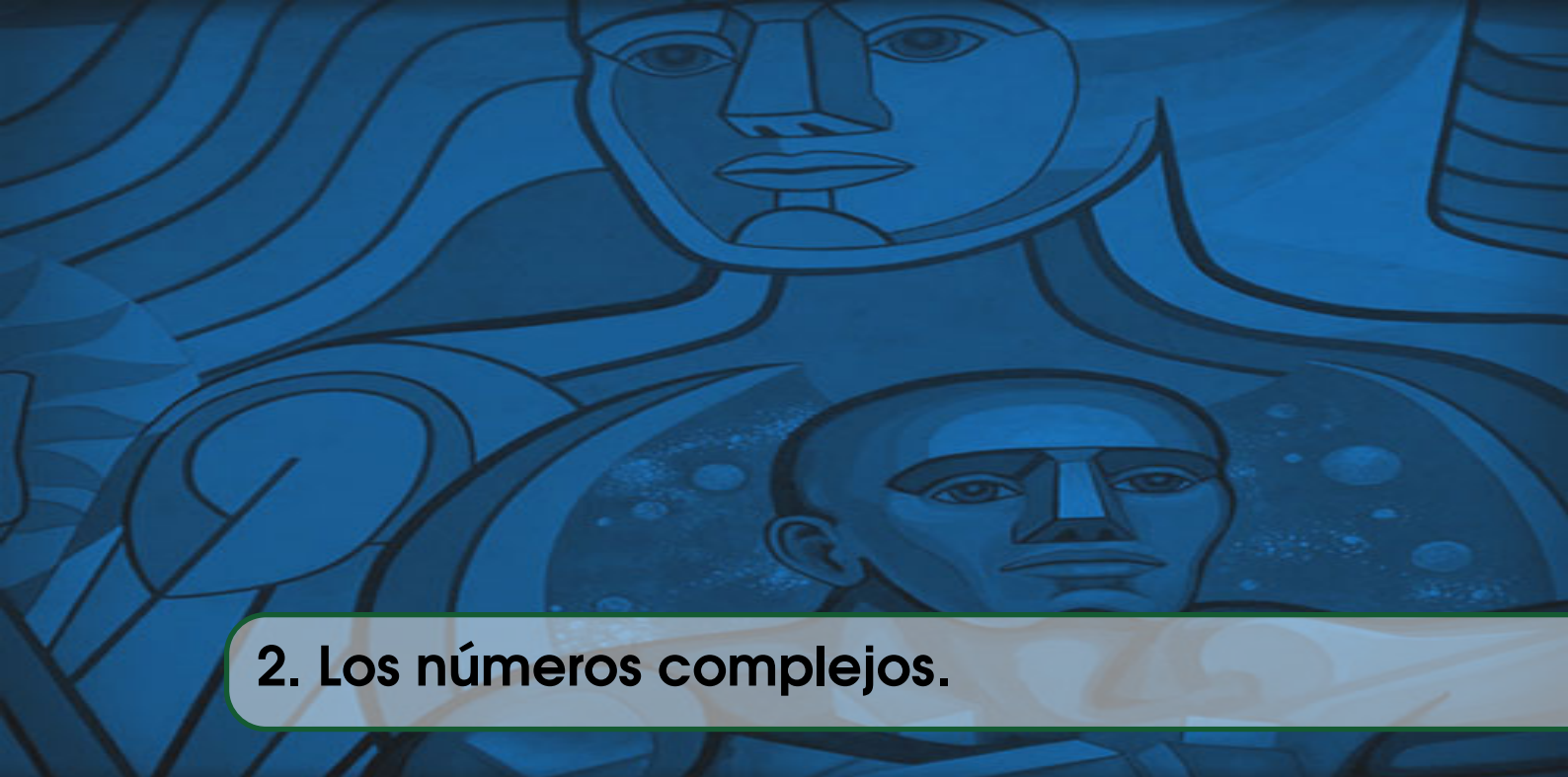
También deseo agradecer a mi familia por su invaluable apoyo en todos los momentos de mi vida.

Finalmente, quiero agradecer a los árbitros por todos sus valiosos y útiles comentarios.

Laura Hidalgo Solís

Parte Uno

2	Los números complejos.	1
2.1	Álgebra en $\mathbb{C}$	
2.2	Representación de $\mathbb{C}$	
2.3	Propiedades	
2.4	Transformaciones lineales	
2.5	Forma polar	
2.6	Geometría	
2.7	Otras propiedades	
2.8	Ejercicios	
3	Funciones en $\mathbb{C}$	25
3.1	Introducción	
3.2	Topología	
3.3	Espacios topológicos	
3.4	Sucesiones y series	
3.5	Funciones	
3.6	Series de potencias	
3.7	El plano $\mathbb{C}_\infty$	
3.8	Ejercicios	
4	Funciones $\mathbb{C}$-diferenciables	63
4.1	Introducción	
4.2	Funciones $\mathbb{C}$ -lineales.	
4.3	Funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables y holomorfas	
4.4	Derivada en ∞	
4.5	Funciones elementales	
4.6	Funciones armónicas	
4.7	Ejercicios	
5	Teorema de Cauchy	109
5.1	Integración Compleja	
5.2	El teorema de Cauchy para rectángulos	
5.3	Consecuencias	
5.4	Módulo máximo	
5.5	Ejercicios	
6	Versión homotópica	149
6.1	Homotopía	
6.2	El índice de una curva	
6.3	El teorema de Cauchy	
6.4	Ejercicios	



2. Los números complejos.

Si este tema ha sido considerado hasta ahora desde un punto de vista erróneo y por tanto se ha visto envuelto en el misterio y rodeado de oscuridad, se debe por mucho a una inadecuada terminología, a la que deberíamos culpar. Si $+1$, -1 y $\sqrt{-1}$ en lugar de haber sido llamadas unidades positiva, negativa e imaginaria (o peor aún, imposible) hubieran recibido los nombres de, digamos, unidades directa, inversa y lateral, difícilmente habría habido lugar para tal oscuridad.

Carl Friederich Gauss
Citado en: Esto no es real,
La historia de i
de Paul J. Nahim

En el presente capítulo introducimos los conceptos algebraicos básicos que necesitaremos posteriormente en el estudio de las funciones holomorfas.

Iniciamos el presente capítulo mostrando la estructura de campo los números complejos y de $\mathbb{R}$ —espacio vectorial normado bidimensional. Además, mostramos una representación geométrica de las operaciones suma y producto. Veremos cómo la fórmula de D’Moivre es útil no solamente en la solución de ecuaciones polinomiales de la forma $z^n = c$ con $c \in \mathbb{C}$ fijo, sino también en la obtención de bellas propiedades trigonométricas. Finalmente, traduciremos las fórmulas clásicas de la geometría analítica plana en términos de la variable compleja.

2.1 El álgebra de los números complejos

Es fundamental que los números reales, denotados por $\mathbb{R}$, y los números complejos satisfagan las mismas leyes fundamentales de la aritmética. En esta sección se estudiarán dichas leyes, así como su interpretación geométrica.

Definición 2.1.1 Un *número complejo* es una expresión formal $x + yi$ donde x, y son números reales e $i^2 = -1$. Denotaremos por $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos.

Suele usarse un solo símbolo, tal como z , para representar un número complejo, y solemos escribir $z = x + yi$.

Si $z_1 = x_1 + y_1i$ y $z_2 = x_2 + y_2i$ son dos números complejos, diremos que dos números complejos z_1, z_2 son *iguales*, y lo denotaremos $z_1 = z_2$ si, y solamente si, $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.

Si $z_1 = x_1 + y_1i$ y $z_2 = x_2 + y_2i$ son dos números complejos, se define la *suma* de z_1 con z_2 , que denotamos $z_1 + z_2$ como:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

y el *producto* de z_1 con z_2 , que denotamos $z_1 z_2$, como:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Ejemplo 1

1. Si $z_1 = \frac{3}{4} + 3i$ y $z_2 = \frac{6}{8} + 3i$, es claro que $z_1 = z_2$.
2. Si $z_1 = 5 + 3i$ y $z_2 = 5 - yi$, entonces $z_1 = z_2$ si, y solamente si $y = -3$.
3. Si $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 - 8i$, entonces $z_1 + z_2 = 4 - 6i$, mientras que $z_1 z_2 = (1 + 2i)(3 - 8i) = ((1)(3) - (2)(-8)) + ((2)(3) + (1)(-8))i = (3 + 16) + (6 - 8)i = 19 - 2i$.
4. Si $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 + 8i$, entonces $z_1 + z_2 = 4 + 10i$, mientras que $z_1 z_2 = -13 + 14i$.
5. Si $z_1 = x_1 + 0i$ y $z_2 = x_2 + 0i$, entonces $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + 0i$ y $z_1 z_2 = x_1 x_2 + 0i$.
6. Si $z_1 = z_2 = 0 + 1i$, entonces $z_1^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 + i^2) + (0i + i0) = -1 + 0i$.

En este momento cabe preguntarse ¿qué propiedades algebraicas satisfacen los números complejos? Tomando en cuenta que las operaciones de suma y producto de los números complejos se definieron en forma tal que cumplieran las mismas reglas algebraicas que el campo de los números reales, resulta natural esperar que $\mathbb{C}$ también sea un campo.

Teorema 2.1.1 El conjunto de los números complejos dotado de las operaciones de suma y producto es un campo.

Demostración. Para verificar que el conjunto de los números complejos dotado de las operaciones de suma y producto definidas anteriormente satisface los axiomas de campo utilizaremos la estructura de campo de los números reales $\mathbb{R}$.

Si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ y $z_3 = e + fi$, donde a, b, c, d, e y f denotan números reales, entonces:

1. Como la suma de números reales es cerrada, entonces $a + c$ y $b + d$ son números reales, de donde

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i,$$

y tenemos que la suma de números complejos es cerrada.

2. Sabemos que, en el campo de los números reales la suma es conmutativa, tenemos así que $a + c = c + a$ y $b + d = d + b$, de donde

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = z_2 + z_1,$$

por lo que la suma también es conmutativa en $\mathbb{C}$.

3. En el campo de los números reales la suma es asociativa, por lo tanto: $a + (c + e) = (a + c) + e$ y $b + (d + f) = (b + d) + f$, se sigue de aquí que:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= a + bi + [(c + e) + (d + f)i] \\ &= a + (c + e) + [b + (d + f)]i \\ &= (a + c) + e + [(b + d) + f]i \\ &= (z_1 + z_2) + z_3, \end{aligned}$$

por lo que la suma en $\mathbb{C}$ es asociativa.

4. Como 0 es el neutro aditivo en $\mathbb{R}$, entonces $a + 0 = a$ y $b + 0 = b$, de donde

$$z_1 = a + b\iota = (a + 0) + (b + 0)\iota = (a + b\iota) + (0 + 0\iota).$$

Esto implica que $0 + 0\iota$ es neutro aditivo en $\mathbb{C}$.

5. Como $a, b \in \mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ es un campo, los números reales a y b tienen inverso aditivo, los cuales denotamos $-a$ y $-b$ respectivamente. Si definimos z_2 como $z_2 = (-a) + (-b)\iota = -a - b\iota$ tenemos que

$$z_1 + z_2 = (a + b\iota) + (-a - b\iota) = (a - a) + (b - b)\iota = 0 + 0\iota.$$

Así $z_2 = -a - b\iota$ es el inverso aditivo de z_1 y solemos denotarlo como $-z_1$.

6. Como $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\iota$, y $ac - bd$ y $ad + bc$ son números reales, tenemos que el producto es cerrado.
7. Sabemos que, en el campo de los números reales el producto es conmutativo, tenemos así que $ac - bd = ca - db$ y $ad + bc = da + cb$, de donde

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\iota = (ca - db) + (da + cb)\iota = z_2 z_1,$$

por lo que el producto es una operación conmutativa en $\mathbb{C}$.

8. Usando las propiedades de campo de los números reales es fácil ver que:

$$a(ce - df) - b(de + cf) = (ac - bd)e - (ad + bc)f,$$

y que

$$b(ce - df) + a(de + cf) = (bc + ad)e + (-bd + ac)f = (ad + bc)e + (ac - bd)f.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 z_3) &= (a + b\iota) + [(ce - df) + (de + cf)\iota] \\ &= [a(ce - df) - b(de + cf)] + [b(ce - df) + a(de + cf)]\iota \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ad + bc)e + (ac - bd)f]\iota \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)\iota](e + f\iota) \\ &= (z_1 z_2)z_3, \end{aligned}$$

tenemos así que el producto en $\mathbb{C}$ es asociativo.

9. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$, y $x + 0 = x$, se sigue de aquí que

$$\begin{aligned} z_1 &= a + b\iota = (a + 0) + (0 + b)\iota \\ &= (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)\iota = (a + b\iota)(1 + 0\iota). \end{aligned}$$

Esto implica que $1 + 0\iota$ es neutro multiplicativo en $\mathbb{C}$.

10. Para obtener el inverso multiplicativo de un número complejo distinto de $0 + 0\iota$, supondremos que $a, b \in \mathbb{R}$, y alguno de ellos no es cero, en particular, $a^2 + b^2 \neq 0$. Si $w = x + y\iota$ fuera inverso multiplicativo de z_1 tendríamos que $1 + 0\iota = z_1 w = (a + b\iota)(x + y\iota) = (ax - by) + (ay + bx)\iota$; tenemos así el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 = ax - by, \quad 0 = bx + ay.$$

Como $a^2 + b^2 \neq 0$, podemos ver que la solución a este sistema de ecuaciones está dada por

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Así $w = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\iota$ es inverso multiplicativo de z_1 y solemos denotarlo como $w = z_1^{-1}$.

11. Para mostrar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, nuevamente utilizaremos las propiedades de campo de los números reales.

$$\begin{aligned}
 z_1(z_2 + z_3) &= (a + b\iota)[(c + e) + (d + f)\iota] \\
 &= [a(c + e) - b(d + f)] + [b(c + e) + a(d + f)]\iota \\
 &= [(ac - bd) + (ae - bf)] + [(ad + bc) + (af + be)]\iota \\
 &= [(ac - bd) + (ad + bc)\iota] + [(ae - bf) + (af + be)\iota] \\
 &= z_1z_2 + z_1z_3.
 \end{aligned}$$

12. Finalmente, consecuencia de la definición de igualdad de números complejos tenemos que el neutro aditivo y el neutro multiplicativo de $\mathbb{C}$ $z = 0 + 0\iota$ y $w = 1 + 0\iota$ son claramente distintos, pues $0 \neq 1$ en $\mathbb{R}$. ■

Haciendo un abuso de notación, al campo de los números complejos $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0 + 0\iota, 1 + 0\iota)$ lo denotamos simplemente con la letra $\mathbb{C}$.

Nótese que la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada como $\phi(a) = a + \iota 0$ es un monomorfismo de campos, por lo que $\mathbb{R}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$. Así, identificaremos el número real a con el número complejo $a + \iota 0$, esto es, $a = a + \iota 0$.

Por otra parte, si $z = 0 + y\iota$ simplemente escribiremos $z = y\iota$, y en este caso diremos que $z = y\iota$ es un *número imaginario*.

Una vez realizadas estas aclaraciones, el ejemplo 3 nos dice que $\iota^2 = -1$, por lo que ι es una solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Proposición 2.1.2 $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión dos.

Demostración. Si $z_1 = x_1 + y_1\iota$ y $z_2 = x_2 + y_2\iota$ son dos números complejos, tenemos que $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\iota$, y si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda z_1 = \lambda x_1 + \lambda y_1\iota$, como consecuencia del teorema anterior, tenemos que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Aún más, los elementos $1 + 0\iota$, $0 + 1\iota$ constituyen una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, pues $x + y\iota = x(1 + 0\iota) + y(0 + 1\iota)$ para cada $x + y\iota \in \mathbb{C}$, y claramente los elementos $1 + 0\iota$, $0 + 1\iota$ son $\mathbb{R}$ -linealmente independientes, por tanto $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión dos. ■

Es claro ahora que podemos definir un $\mathbb{R}$ -isomorfismo μ de espacios vectoriales de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ como $\mu(x + y\iota) = (x, y)$.

Claramente μ respeta las operaciones de espacio vectorial, y la inversa de este isomorfismo está dado como $\mu^{-1}(x, y) = x + y\iota$.

2.2 El diagrama de Wessel-Argand-Gauss

El primero en dar una interpretación geométrica de los números complejos como puntos en el plano fue Caspar Wessel; ignorando la existencia de dicho trabajo Jean Robert Argand redescubre estos resultados.

Por el año 1800, el gran matemático suizo Leonhard Euler adoptó esta representación de los números complejos para obtener las n soluciones de la ecuación $x^n - 1 = 0$, pensando dichas soluciones como los vértices de un polígono regular en el plano. Además Euler es el primero en utilizar el símbolo ι para denotar $\sqrt{-1}$.

Carl Friederich Gauss, en su tesis doctoral (1799) presenta su demostración del *teorema fundamental del álgebra*, así como sus críticas y objeciones a demostraciones anteriores, posteriormente en 1816 y 1831 presenta otras demostraciones de dichos resultados. Euler y Gauss son quienes alcanzan una posición suficientemente madura respecto a los números complejos, y gracias a su reputación transmiten el concepto de número complejo colaborando con la aceptación de los mismos alrededor del año 1831, véase (Nahim, 2008, Cap. 3).

La idea consiste en hacer corresponder al número $a + b\iota$, donde ι es la raíz cuadrada de -1 , con el punto de coordenadas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.¹

¹ Así el conjunto de pares ordenados (a, b) también es denominado plano de Argand por algunos, o plano gaussiano por otros.

En particular, el isomorfismo μ definido en la sección anterior nos permite pensar al número complejo $a + bi$ como un par ordenado (a, b) , y podemos representar al número complejo $a + bi$ con el punto cuyas coordenadas cartesianas son (a, b) , referidas generalmente en un sistema ortogonal de ejes. Esta representación se conoce como el diagrama de Argand, o de Gauss como se muestra en la figura 2.1.

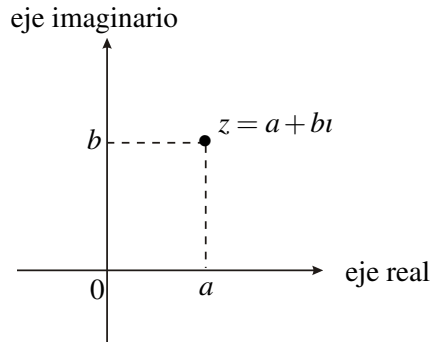


Figura 2.1: El Diagrama de Wessel-Argand-Gauss

Por razones históricas el eje horizontal se denomina el *eje real*, mientras que al eje vertical se denomina el *eje imaginario*.

Si representamos un número complejo $z = a + bi$ no sólo por el par ordenado (a, b) en el diagrama de Wessel-Argand-Gauss, sino como el segmento dirigido que va del origen al punto (a, b) , podemos pensar a los números complejos como vectores.

Definición 2.2.1 Si $z = x + yi$ es un número complejo se define el *conjugado* de z , que denotaremos $\bar{z}$, como el número complejo $\bar{z} = x - yi$.

El número x se denomina la *parte real* de z , y lo denotaremos $x = \text{Re}(z)$. El número y se denomina la *parte imaginaria* de z , y se denota $y = \text{Im}(z)$.

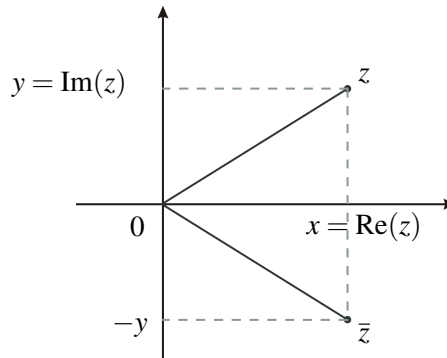


Figura 2.2: El conjugado de un número complejo

Ejemplo 2

1. Si $z = 3 + 5i$, entonces $\bar{z} = 3 - 5i$, $\text{Re}(z) = 3$, y $\text{Im}(z) = 5$.
2. Si $z = 8 - 13i$, entonces $\bar{z} = 8 + 13i$, $\text{Re}(z) = 8$, y $\text{Im}(z) = -13$.
3. Si $z = 13 + 0i = 13$, entonces $\bar{z} = 13 - 0i = 13$, $\text{Re}(z) = 13$ y $\text{Im}(z) = 0$.
4. Si $z = 0 - 18i = -18i$, entonces $\bar{z} = 0 + 18i$, $\text{Re}(z) = 0$, y $\text{Im}(z) = -18$.

La conjugación por un número complejo, nos permite definir una función $\mathbb{C}$ -valuada de variable compleja $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\rho(z) = \bar{z}$.

Al identificar $\mathbb{C}$ con el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ podemos interpretar esta función como la reflexión con respecto al eje x . Es claro que $\bar{\bar{z}} = z$, lo cual corresponde al hecho geométrico que la reflexión en una línea recta es una involución, esto es, una función que coincide con su propia inversa, como podemos apreciar en la figura 2.2.

Tenemos además que $\text{Re}(z)$ corresponde a la proyección ortogonal de z con respecto al eje x , mientras que $\text{Im}(z)$ corresponde a la proyección ortogonal de z con respecto al eje y .

Si los números complejos z_1 y z_2 , los pensamos como vectores en el plano, la suma $z_1 + z_2$ corresponde a la diagonal del paralelogramo que determinan z_1 y z_2 , véase la figura 2.3.

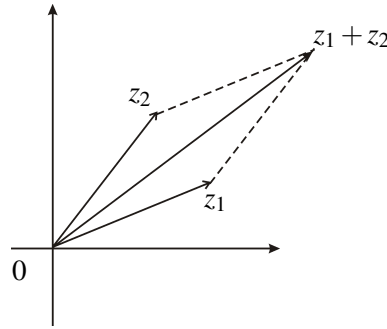


Figura 2.3: Representación geométrica de la suma de números complejos.

2.3 Algunas propiedades de los números complejos

Teorema 2.3.1 Si z y w son números complejos, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.
3. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$.
4. $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.
5. Si z es un número complejo distinto de cero, entonces $z\overline{z}$ es un número real y positivo

Demostración. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\overline{z + w} = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = \overline{z + w}$.
2. $\overline{zw} = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = \overline{zw}$.
3. $\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a + 0i}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$.
4. $\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{0 + 2bi}{2i} = b = \operatorname{Im}(z)$.
5. $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 - b(-b)) + (a(-b) + ba)i = a^2 + b^2$.
Como $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 \geq 0$, y como alguno de ellos es distinto de cero, entonces $a^2 + b^2 > 0$. ■

Como consecuencia del inciso 5 del teorema anterior, la raíz cuadrada de $z\overline{z}$ está bien definida en $\mathbb{R}$, lo cual nos permite definir una función $\mathbb{R}$ -valuada de variable compleja $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ como $|z| = +\sqrt{z\overline{z}}$.

Definición 2.3.1 Si z es un número complejo, se define el *módulo* (o *norma*) de z , que denotaremos $|z|$, como la raíz cuadrada no negativa de $z\overline{z}$, esto es, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Ejemplo 3

1. Si $z = 8 - 15i$, entonces $|z| = \sqrt{(8 - 15i)(8 + 15i)} = \sqrt{289} = 17$.
2. Si $z = -24 + 7i$, entonces $|z| = \sqrt{(-24 + 7i)(-24 - 7i)} = \sqrt{625} = 25$.
3. Si $z = 1 + i$, entonces $|z| = \sqrt{(1 + i)(1 - i)} = \sqrt{2}$.
4. Si $z = 0 + 4i$, entonces $|z| = \sqrt{(0 + 4i)(0 - 4i)} = \sqrt{16} = 4$.
5. Si $z = -21 + 0i$, entonces $|z| = \sqrt{(-21 + 0i)(-21 - 0i)} = \sqrt{441} = 21$.

Como $z = x + 0i$ es un número real, $\overline{z} = z = x$, así $z\overline{z} = x^2 \geq 0$, por lo que $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$. Por tanto, el módulo de un número complejo con $\operatorname{Im}(z) = 0$ coincide con el valor absoluto de su parte real, y como consecuencia del teorema de Pitágoras, el módulo de un número complejo $z = x + yi$ coincide con la distancia que hay del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Véase la figura 2.4.

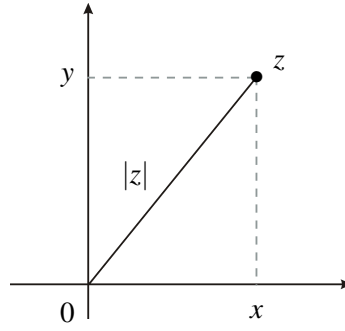


Figura 2.4: El módulo de un número complejo

Como consecuencia de la demostración del teorema 2.1.1, página 2, $\mathbb{C}$ es un campo, se tiene que si $z = x + yi \neq 0$, entonces $z\bar{z} = |z|^2 > 0$, de donde $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Podemos ver la representación del inverso de z en la figura 2.5, que geoméricamente resulta de reflejar z con respecto al eje real y, posteriormente, invertir con respecto a la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$.

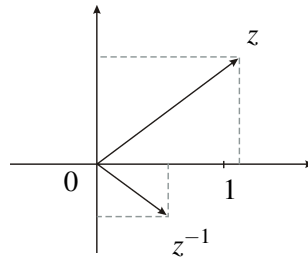


Figura 2.5: El inverso de un número complejo

Proposición 2.3.2 Si z y w son dos números complejos y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $|z| = |\bar{z}|$.
2. $|\lambda z| = |\lambda| |z|$, donde $|\lambda|$ denota el valor absoluto del número real λ .
3. $|zw| = |z| |w|$.
4. Si $z \neq 0$, entonces $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
5. Si $w \neq 0$, entonces $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$.
6. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.
7. (LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO) $|z + w| \leq |z| + |w|$.
8. $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Demostración. Si z y w son dos números complejos, entonces:

1. Como $z = \bar{\bar{z}}$, entonces $z\bar{z} = \bar{\bar{z}}\bar{z}$, de donde

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\bar{\bar{z}}\bar{z}} = |\bar{z}|.$$

2. Si $z = x + yi$, entonces

$$\begin{aligned} |\lambda z| &= |\lambda x + \lambda yi| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| |z|. \end{aligned}$$

3. $|zw| = \sqrt{zw\bar{z}\bar{w}} = \sqrt{(z\bar{z})(w\bar{w})} = \sqrt{z\bar{z}} \sqrt{w\bar{w}} = |z| |w|$.

4. Si $z \neq 0$, entonces $|z| \neq 0$, de donde $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Como consecuencia de los incisos 1 y 2,

$$|z^{-1}| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$

5. Si $w \neq 0$, como consecuencia de los incisos anteriores

$$\left| \frac{z}{w} \right| = |z| |w|^{-1} = |z| |w|^{-1} = \frac{|z|}{|w|}.$$

6. Si $z = x + yi$, entonces $x = \operatorname{Re}(z)$, y $|x| = \sqrt{x^2}$. Como $x^2 \leq x^2 + y^2$, se sigue que $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

7. Para demostrar que $|z + w| \leq |z| + |w|$, notamos que $z\bar{w} = \overline{\bar{z}w}$, de donde, $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(zw)$. Por tanto

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(zw) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|zw| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

esto es

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2,$$

y extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad anterior se obtiene el resultado deseado.

8. Como consecuencia de la desigualdad del triángulo tenemos que $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$, de donde $|z| - |w| \leq |z - w|$.

Análogamente, $|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z|$, así $|w| - |z| \leq |w - z|$. Como consecuencia de lo anterior $||z| - |w|| \leq |z - w|$. ■

Proposición 2.3.3 — La desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si $z_1, \dots, z_n$ y $w_1, \dots, w_n$ son números complejos, entonces

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2.$$

Demostración. Si $A = \sum_{j=1}^n |z_j|^2$, $B = \sum_{j=1}^n |w_j|^2$ y $C = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$, entonces $B \geq 0$. Si $B = 0$, se tiene $w_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$, así $C = 0$, por lo que se cumple la desigualdad.

Supongamos entonces que $B \neq 0$, en particular $B > 0$ y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |Bz_j - Cw_j|^2 &= \sum_{j=1}^n (Bz_j - Cw_j)(B\bar{z}_j - \bar{C}\bar{w}_j) \\ &= B^2 \sum_{j=1}^n |z_j|^2 - B\bar{C} \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j \\ &\quad - BC \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j + |C|^2 \sum_{j=1}^n |w_j|^2 \\ &= B^2 A - 2B\bar{C}C + B|C|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 \\ &= B(AB - |C|^2). \end{aligned}$$

Como cada término de la expresión $\sum_{j=1}^n |Bz_j - Cw_j|^2$ es no negativo, tenemos que $B(AB - |C|^2) \geq 0$, y como $B > 0$, entonces $AB - |C|^2 \geq 0$, como esperábamos demostrar. ■

2.4 Transformaciones lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$

Anteriormente, en la proposición 2.1.2, se demostró que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$ –espacio vectorial con $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Por otra parte, como $\mathbb{C}$ es un campo, también $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$ –espacio vectorial y $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Por tal razón necesitamos distinguir entre transformaciones $\mathbb{R}$ –lineales y transformaciones $\mathbb{C}$ –lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Como es bien sabido, toda transformación lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es de la forma $z \mapsto \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, y en particular, como $\mathbb{R}$ es un subcampo de $\mathbb{C}$ esta transformación es $\mathbb{R}$ –lineal. Por otra parte, la transformación $z \mapsto \bar{z}$ es $\mathbb{R}$ –lineal, pero no es $\mathbb{C}$ –lineal.

Proposición 2.4.1 Una transformación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$ –lineal si, y solamente si, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que

$$T(z) = xT(1) + yT(i) = \lambda z + \mu \bar{z}$$

Demostración. Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, y T es $\mathbb{R}$ –lineal, entonces

$$T(z) = T(x + iy) = xT(1) + yT(i).$$

Si se definen $\lambda = \frac{T(1) - iT(i)}{2}$ y $\mu = \frac{T(1) + iT(i)}{2}$, como $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} T(1) + \frac{z - \bar{z}}{2i} T(i) \\ &= \frac{T(1) - iT(i)}{2} z + \frac{T(1) + iT(i)}{2} \bar{z} \\ &= \lambda z + \mu \bar{z}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= \lambda z + \mu \bar{z} \\ &= \lambda(x + iy) + \mu(x - iy) \\ &= (\lambda + \mu)x + i(\lambda - \mu)y \\ &= xT(1) + yT(i), \end{aligned}$$

donde $T(1) = \lambda + \mu$ y $T(i) = (\lambda - \mu)i$. Como se deseaba demostrar. ■

Proposición 2.4.2 Una transformación $\mathbb{R}$ –lineal $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ –lineal si, y solamente si, $T(i) = iT(1)$, y en este caso $T(z) = T(1)z$.

Demostración. Si T es $\mathbb{C}$ –lineal, claramente

$$T(i) = T(i \cdot 1) = iT(1).$$

Recíprocamente, si $z = x + iy$, como T es $\mathbb{R}$ –lineal entonces,

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x + iy) = T(x) + T(iy) = xT(1) + yT(i) \\ &= xT(1) + iyT(1) = T(1)z, \end{aligned}$$

pues $T(i) = iT(1)$. ■

Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ vía $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de orden 2 con coeficientes reales induce, multiplicando por la derecha, una transformación $\mathbb{R}$ –lineal $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Como todo operador $\mathbb{R}$ –lineal en $\mathbb{R}^2$ es de la forma (2.1), de álgebra lineal elemental se sabe que, trabajar con operadores lineales en $\mathbb{R}^2$ es equivalente a trabajar con matrices de orden 2 con coeficientes reales.

Teorema 2.4.3 Son equivalentes los siguientes enunciados para una matriz con coeficientes reales

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

1. La transformación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ inducida por A es $\mathbb{C}$ -lineal.
2. Los coeficientes a_{ij} de la matriz A satisfacen la siguiente relación

$$a_{21} = -a_{12} \quad \text{y} \quad a_{22} = a_{11},$$

$$\text{es decir } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ y } T(z) = (a_{11} + ia_{21})z.$$

Demostración. Como

$$T(i) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} + ia_{22},$$

de la proposición 2.4.2 se sigue que

$$a_{12} + ia_{22} = T(i) = iT(1) = i(a_{11} + ia_{21}) = -a_{21} + ia_{11},$$

de donde $a_{12} = -a_{21}$ y $a_{11} = a_{22}$. ■

La discusión previa, que nos permite ver una transformación $\mathbb{R}$ -lineal $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en tres formas distintas:

1. Como una matriz 2×2 con coeficientes reales.
2. De la forma $T(z) = T(1)x + T(i)y$.
3. En la forma $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Estas tres posibilidades nos permitirá posteriormente encontrar expresiones para una función compleja valuada de variable compleja, $f = u + iv$ donde $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, en la teoría de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en términos de las derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y (que corresponden a los coeficientes de la matriz A), en términos de las derivadas parciales f_x, f_y (que corresponden a los números $T(1), T(i)$) y, finalmente en términos de $f_z, f_{\bar{z}}$ (que corresponde a considerar λ y μ).

Observación 1 Como demostraremos posteriormente, las condiciones $a_{11} = a_{22}$ y $a_{12} = -a_{21}$ de éste teorema son una manifestación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y, u_y = -v_x$, como mostramos en 4.3.3

2.5 Forma polar de un número complejo

Definición 2.5.1 Si z es un número complejo distinto de cero, el ángulo θ que hay del eje real positivo al vector determinado por z se denomina el *argumento* de z , y se denota $\arg z$; si satisface

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \quad \cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, \quad \text{si } \operatorname{Re} z = 0$$

El ángulo θ definido por medio de estas relaciones está bien determinado salvo múltiplos enteros de 2π radianes; cuando $-\pi < \theta \leq \pi$, diremos que tenemos el *valor principal del argumento*. Al número complejo $z = 0$ no se le asigna argumento. Véase la figura 2.6.

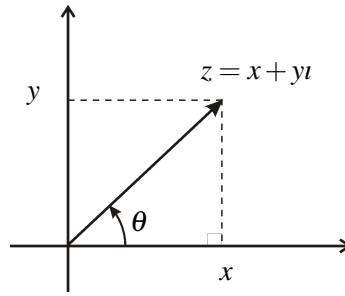


Figura 2.6: El argumento de un número complejo.

El ángulo θ se considera positivo si se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj (levógiro), y negativo en el caso contrario (dextrógiro). En particular, θ es la longitud del arco en la circunferencia unitaria que va del vector $(1, 0)$ al vector $z/|z|$, medido en el sentido levógiro.

Cuando decimos que el argumento queda definido salvo múltiplos enteros de 2π , significa que, si θ es un valor admisible para el argumento, también lo es $\theta + 2\pi k$ para cualquier número entero k , por lo que podemos pensar algunas veces $\arg z$ como $\{\theta + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\}$. Podemos terminar con esta ambigüedad si especificamos un rango particular para el ángulo, esto se conoce como determinar una “rama para el argumento”, se suele considerar la rama principal $-\pi < \theta \leq \pi$, o bien $0 \leq \theta < 2\pi$; aunque puede considerarse cualquier intervalo semiabierto de longitud 2π .

Como consecuencia de la definición del argumento de un número complejo, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$z = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z| (\cos \theta + i \sin \theta).$$

El número complejo $\cos \theta + i \sin \theta$ suele abreviarse como $e^{i\theta}$, o bien $\exp(i\theta)$, esto es,

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta.$$

Esta notación fue utilizada por primera vez en 1748 por L. Euler en su libro *Introductio in Analysis Infinitorum*, y la justificación para ello la daremos posteriormente en la sección 4.5.1, página 79.

Definición 2.5.2 Si $z \neq 0$ es un número complejo, $r = |z|$ y $\theta = \arg(z)$, con $0 \leq \theta < 2\pi$, entonces

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}.$$

Esta representación se denomina la *forma polar* del número complejo z .

Ejemplo 4

1. Si $z_0 = 1 + i$, entonces $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\arg(z_0) = \pi/4$, por lo que, la forma polar del número complejo z_0 está dada como $z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.
2. Si $z_1 = 1 - i$, entonces $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\arg(z_1) = 7\pi/4$, por lo que, la forma polar del número complejo z_1 está dada como $z_1 = \sqrt{2} e^{i(7\pi/4)}$.
3. Si $z_2 = -1 - i$, entonces $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y $\arg(z_2) = 5\pi/4$, por lo que, la forma polar del número complejo z_2 está dada como $z_2 = \sqrt{2} e^{i(5\pi/4)}$.

Representar un número complejo z en términos de su módulo y su argumento, nos permite dar una interpretación geométrica al producto, esto es:

Proposición 2.5.1 El módulo de un producto es el producto de los módulos y el argumento de un producto es la suma de los argumentos de los factores módulo 2π .

Debemos entender esta proposición de la siguiente manera, si θ_1 y θ_2 son valores admisibles para $\arg(z_1)$ y $\arg(z_2)$, por ejemplo, $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 2\pi$, entonces $\theta \equiv \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$, será un valor admisible para $\arg(z_1 z_2)$, es decir, $0 \leq \theta < 2\pi$. Véase la figura 2.7.

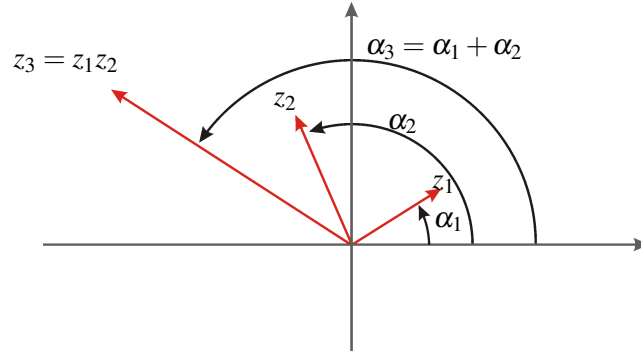


Figura 2.7: El producto de dos números complejos.

Demostración. Si $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$, de trigonometría elemental tenemos que:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

esto es, $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ y $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$. ■

El teorema anterior exhibe el hecho fundamental de que multiplicar números complejos es sumar sus argumentos módulo 2π y multiplicar sus módulos. Cabe recalcar que la suma de los argumentos no necesariamente es el argumento del producto, aún si se toman los argumentos en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Por ejemplo, si $z = -i$ entonces $\arg z = 3\pi/2$, así

$$\arg(-i)(-i) = 3\pi/2 + 3\pi/2 = 3\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Como consecuencia de este resultado tenemos que, si z es un número complejo distinto de cero, entonces:

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \quad \text{y} \quad \arg(z^{-1}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

En particular

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w \pmod{2\pi}.$$

Otra forma de interpretar el producto de números complejos es la siguiente: consideremos $w \in \mathbb{C}$ un número complejo fijo, y definamos la aplicación $\psi_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\psi_w(z) = wz$. Claramente es $\mathbb{R}$ -lineal pues

$$\psi_w(z_1 + \lambda z_2) = w(z_1 + \lambda z_2) = wz_1 + \lambda wz_2 = \psi_w(z_1) + \lambda \psi_w(z_2),$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Al identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ tenemos que ψ_w es la aplicación que simplemente gira al vector z un ángulo igual al argumento de w , y modifica la longitud del vector z por el factor $|w|$. Véase la figura 2.8.

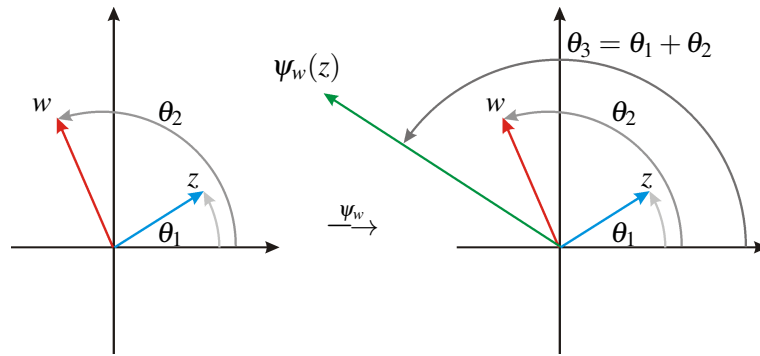


Figura 2.8: La transformación $\mathbb{R}$ -lineal ψ_w

La forma polar para el producto de dos números complejos puede utilizarse para multiplicar más de dos números.

Es fácil ver por inducción que, si $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \sen \theta_j)$ para $j = 1, \dots, n$, entonces:

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n (\cos \phi + i \sen \phi),$$

donde $\phi \equiv \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \pmod{2\pi}$.

La fórmula para el producto de dos números complejos en forma polar es muy útil para calcular las potencias z^n con $n \geq 0$ de un número complejo distinto de cero, ya que, si $z = re^{i\theta}$, utilizando inducción sobre n podemos ver fácilmente que $|z^n| = r^n$ y $\arg(z^n) = n\theta \pmod{2\pi}$, de donde

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

Por otra parte, como $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$, tenemos que la fórmula $z^n = r^n e^{in\theta}$ se cumple para cada número entero n .

Proposición 2.5.2 — Fórmula de D'Moivre. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene forma polar $z = r(\cos \theta + i \sen \theta)$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sen n\theta).$$

Como consecuencia de la fórmula de D'Moivre podemos resolver la ecuación $z^n = w$, esto es, podemos encontrar las raíces n -ésimas de cualquier número complejo no nulo conociendo su módulo y su argumento.²

Proposición 2.5.3 Si $w = r(\cos \theta + i \sen \theta)$ es un número complejo no nulo y $n \in \mathbb{N}$, entonces w tiene exactamente n raíces n -ésimas dadas de la siguiente forma:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sen \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right], k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostración. Observamos que si $w = 0$, entonces sólo hay una única raíz n -ésima de w , a saber $z = 0$. Supongamos ahora que $w \neq 0$, y escribámoslo en forma polar $w = re^{i\theta}$, si $z = \rho e^{i\psi}$ es una raíz n -ésima de w , esto es, si $w = z^n$, como consecuencia de la fórmula de D'Moivre tenemos que $z^n = \rho^n e^{in\psi}$, de donde $\rho^n = r = |w|$ y $n\psi = \theta + 2\pi k$, para algún entero k , de donde:

$$z = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) + i \sen \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \right].$$

Para determinar cuántas raíces n -ésimas hay, dado $k \in \mathbb{Z}$, dividiéndolo entre n obtenemos $k = nq + t$ con $q, t \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq t < n$, por lo tanto

$$\psi = \frac{\theta + 2\pi k}{n} = \frac{\theta + 2(nq + t)\pi}{n} = \frac{\theta + 2\pi t}{n} + 2\pi q,$$

²Abraham D'Moivre (1667-1754), matemático francés quien fuera pionero en el desarrollo de la geometría analítica y el cálculo de probabilidades.

por lo que el ángulo correspondiente a $(\theta + 2\pi k)/n$ es el mismo que el de $(\theta + 2\pi t)/n$ pues difieren por un múltiplo entero de 2π . Por tanto, podemos restringir a $k \in \mathbb{Z}$ para que tome los valores $0 \leq k < n-1$. Por otra parte, dados $j \neq k$ entre 0 y $n-1$, los argumentos $(\theta + 2\pi j)/n$ y $(\theta + 2\pi k)/n$ dan lugar a complejos diferentes. Ya que, si

$$\frac{\theta + 2\pi j}{n} = \frac{\theta + 2\pi k}{n} + 2\pi t$$

entonces $\theta + 2\pi j = \theta + 2\pi k + 2\pi tn$, es decir, $j = tn + k$ por tanto $j - k = tn$ con $0 \leq j, k < n-1$, la única posibilidad de que n divida a $j - k$ es $j - k = 0$, por tanto, $j = k$. ■

Observación 2 En consecuencia, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ resulta que $\sqrt[n]{z}$ no es una función univaluada bien definida, esta relación es multivaluada, es decir, a cada punto del dominio se le asocia más de un valor del contradominio.

Observación 3 Geométricamente, las raíces n -ésimas de un número complejo, distinto de cero, son los vértices de un polígono regular de n lados.

Ejemplo 5

Como el módulo de $z = 1$ es 1 y su argumento es cero, las cinco soluciones z_k con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, de la ecuación $z^5 = 1$ son:

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Así, las raíces quintas de la unidad son:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1; \\ z_1 &= \exp\left(i\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4}i; \\ z_2 &= \exp\left(i\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}i; \\ z_3 &= \exp\left(i\frac{6\pi}{5}\right) = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}i; \\ z_4 &= \exp\left(i\frac{8\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4}i. \end{aligned}$$

Como podemos apreciar en la figura 2.9, las raíces quintas de la unidad corresponden a los vértices de un pentágono regular, con centro en el origen, el cual tiene uno de sus vértices ubicado en el punto 1. Además, $z_4 = \bar{z}_1$ y $z_3 = \bar{z}_2$.

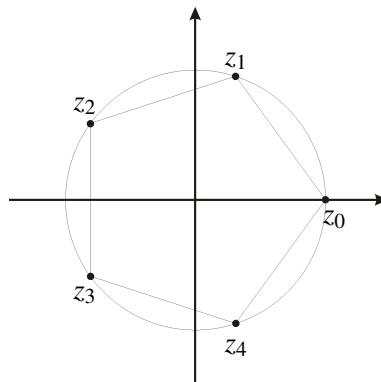


Figura 2.9: Las raíces quintas de la unidad

En general, las raíces n -ésimas de la unidad, esto es, las soluciones de la ecuación $z^n = 1$ están dadas como:

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Como $\zeta = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$ es una raíz distinta de uno, todas las otras raíces pueden expresarse como $1 = \zeta^0, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$, y como $\zeta \neq 1$ es solución de la ecuación:

$$0 = z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1),$$

tenemos que ζ es solución de la ecuación ciclotómica:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0.$$

Veamos otro ejemplo, consideremos $z = 5 + 12i$, entonces

$$|z| = \sqrt{25 + 144} = 13 \quad \text{y} \quad \arg z = \arctan \frac{12}{5} \cong 1.176005207 \text{ rad},$$

de donde la ecuación $z^4 = 5 + 12i$ tiene como soluciones:

$$\zeta_k \cong \sqrt[4]{13} \left(\cos\left(\frac{1.176005207 + 2k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{1.176005207 + 2k\pi}{4}\right) \right)$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &\cong \sqrt[4]{13} \exp\left(i\frac{1.176005207}{4}\right) \cong 1.817354021 + 0.5502505227i, \\ \zeta_1 &\cong \sqrt[4]{13} \exp\left(i\frac{7.459190513}{4}\right) \cong -0.5502505215 + 1.817354021i, \\ \zeta_2 &\cong \sqrt[4]{13} \exp\left(i\frac{13.74237582}{4}\right) \cong -1.817354021 - 0.5502505227i, \\ \zeta_3 &\cong \sqrt[4]{13} \exp\left(i\frac{20.02556113}{4}\right) \cong 0.5502505215 - 1.817354021i. \end{aligned}$$

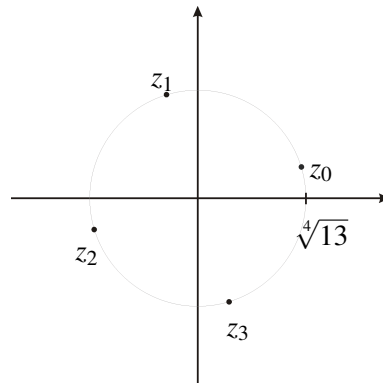


Figura 2.10: Las raíces cuartas de $z = 5 + 12i$

Nótese que, en este caso, mientras que ζ es solución de la ecuación $z^4 = 5 + 12i$, $\bar{\zeta}$ no lo es, véase la figura 2.10.

La fórmula de D'Moivre es sumamente útil para derivar identidades trigonométricas. Por ejemplo, si en la fórmula de D'Moivre tomamos $m = 3$, obtenemos

$$\cos \theta + \iota \sin \theta = \left[\cos \left(\frac{\theta}{3} \right) + \iota \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) \right]^3.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \cos \theta + \iota \sin \theta &= \cos^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) - 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \\ &\quad + \iota \left[3 \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) - \sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) \right], \end{aligned}$$

de donde

$$\cos \theta = \cos^3 \left(\frac{\theta}{3} \right) - 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \cos \left(\frac{\theta}{3} \right),$$

y

$$\sin \theta = 3 \cos^2 \left(\frac{\theta}{3} \right) \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) - \sin^3 \left(\frac{\theta}{3} \right).$$

Realizando el cambio de variable $\theta = 3\alpha$, y el hecho que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos(3\alpha).$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 3(1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

de donde

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin(3\alpha).$$

Por otra parte, si aplicamos la fórmula de D'Moivre a $n = 2$ sabemos que

$$(\cos \theta + \iota \sin \theta)^{\frac{1}{2}} = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \iota \sin \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$$\cos \theta + \iota \sin \theta = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \iota 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

es decir,

$$\cos \theta = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1,$$

o bien

$$\cos \theta = \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Conseguimos así las fórmulas del ángulo medio

$$\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}, \quad \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}.$$

Otra interesante aplicación que podemos deducir de la fórmula de D'Moivre es la identidad

$$\prod_{k=2}^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2^k} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

Como vimos anteriormente

$$\sin \theta = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

y aplicando esta identidad a sí misma, tenemos

$$\sin \theta = 2 \left[2 \sin \left(\frac{\theta}{4} \right) \cos \left(\frac{\theta}{4} \right) \right] \cos \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Iterando este proceso se obtiene

$$\sin \theta = 2^n \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2^2} \right) \cdots \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2^n} \right).$$

Dividiendo todo por θ y reacomodando 2^n , se deduce que

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2^2} \right) \cdots \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right) \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2^n} \right)}{\frac{\theta}{2^n}}.$$

Si n es arbitrariamente grande y θ está expresado en radianes, el último factor del lado derecho cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2^n} \right)}{\frac{\theta}{2^n}} = 1,$$

entonces

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^k \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\theta}{2^n} \right).$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ lo anterior se reduce a la fórmula de Viète:³

$$\frac{2}{\pi} = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{\pi}{16} \right) \cdots.$$

Y como $\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ obtenemos una expresión equivalente, pero quizá más interesante y descriptiva

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots.$$

³François Viète (1540-1603) de origen francés, fue un matemático aficionado que introdujo la primera notación algebraica sistematizada en su libro *En Artem analyticam isagoge*, publicado en Tours, 1591. También estuvo involucrado en el desciframiento de códigos.

2.6 Geometría analítica en $\mathbb{C}$

En la geometría analítica clásica la ecuación de un lugar geométrico se expresa como una relación entre las variables x y y . Tomando en cuenta que, al identificar $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ tenemos $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, entonces podemos expresar un lugar geométrico en términos de las coordenadas z y $\bar{z}$. De igual forma, podemos pensar a una ecuación en variable compleja como una ecuación, o sistema de ecuaciones, en dos variables reales.

Por ejemplo, sabemos que una circunferencia con centro en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ y radio $r > 0$ es el lugar geométrico de los puntos $z = (x, y)$ que equidistan la distancia r del punto z_0 , esto es, $|z - z_0| = r$.

Una línea recta $\mathcal{L}$ en $\mathbb{C}$, puede darse en su forma paramétrica por medio de la ecuación $z = a + tb$, donde a y b son números complejos fijos. Geométricamente hablando, el valor a representa un punto en la recta $\mathcal{L}$, el valor $b \neq 0$, corresponde a un vector de dirección, y t es un parámetro real, es decir:

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} ; z = a + tb, \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$$

Como $z \in \mathcal{L}$ si, y solamente si, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $z = a + tb$, o equivalentemente, si el número $t = \frac{z - a}{b} \in \mathbb{R}$, esto es, $z \in \mathcal{L}$ cuando, y solamente cuando $\text{Im}\left(\frac{z - a}{b}\right) = 0$.

Entonces,

$$\mathcal{L} = \left\{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}\left(\frac{z - a}{b}\right) = 0\right\}.$$

Dos ecuaciones $z = a + tb$ y $z = a' + tb'$ representan rectas paralelas distintas si $a \neq a'$ y b' es múltiplo real de b . La dirección de la recta $z = a + tb$ queda determinada por $\arg(b)$. El ángulo entre las rectas $z = a + tb$ y $z = a' + tb'$ está dado como $\arg(b/b')$; nótese que este ángulo solamente depende del orden en que se dan las rectas. Dos rectas son ortogonales si b/b' tiene parte real cero.

La elipse con focos en w_1 y w_2 , y semieje mayor ℓ , donde $|w_1 - w_2| < 2\ell$, se determina por la siguiente expresión:

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z - w_1| + |z - w_2| = 2\ell\}.$$

De manera similar, la ecuación de la hipérbola con focos en w_1 y w_2 , y eje transversal ℓ , donde $2\ell < |w_1 - w_2| < 2$, se determina por la siguiente expresión:

$$\{z \in \mathbb{C} ; ||z - w_1| - |z - w_2|| = 2\ell\}.$$

2.7 Otras propiedades de $\mathbb{C}$

Si bien el campo de los números complejos tiene propiedades similares al campo de los números reales, también tiene propiedades que lo definen en forma única. En la presente sección mencionaremos algunos de estos resultados.

Proposición 2.7.1 Sea $\mathbb{K}$ un campo que contiene a los reales y para el cual toda ecuación cuadrática tiene solución, entonces $\mathbb{K}$ contiene a $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $j \in \mathbb{K}$ una solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Entonces

$$F = \{x + jy; x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{K}$$

es un subcampo de $\mathbb{K}$ isomorfo a $\mathbb{C}$.

Es claro que F constituye un subcampo de $\mathbb{K}$. Sea $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{K}$ el morfismo dado por $\varphi(x + yi) = x + jy$. Claramente φ es un homomorfismo de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{F}$ y $\varphi(\mathbb{C}) = F$, por lo que basta demostrar que φ es inyectiva.

Si $\varphi(x_1 + y_1i) = \varphi(x_2 + y_2i)$, entonces $x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2$, por lo que $x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2) = 0$. Finalmente, si $y_1 \neq y_2$, entonces

$$j = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$$

y $x^2 + 1 = 0$ tiene una solución real, lo cual es falso, de donde $y_1 = y_2$, $x_1 = x_2$ y $\mathbb{K}$ contiene un subcampo F isomorfo a $\mathbb{C}$. ■

Otro resultado que describe a los números complejos es:

Teorema 2.7.2 — Teorema de Frobenius. Si $\mathbb{K}$ es un campo tal que $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} < \infty$, entonces $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

La demostración de este resultado es tema de un curso más avanzado, por lo que no se incluye en estas notas, sin embargo el lector interesado puede leer el del libro *Álgebra Clásica* de José Antonio Vargas Mendoza (Vargas-Mendoza, 2006, teo. 5.35, pg. 239).

Como sabemos el polinomio $p(x) = x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, el anillo de polinomios con coeficientes reales en una variable. Además, el ideal $\mathfrak{M}$ generado por el polinomio $p(x)$ es máximo, por lo que el anillo cociente $\mathbb{K} = \mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle$ es un campo. Y ya que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K} = 2$, pues el conjunto formado por los polinomios $1, x$ es máximo $\mathbb{R}$ -linealmente independiente, como consecuencia del teorema de Frobenius tenemos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.7.1 $\mathbb{C}$ no es un campo ordenado.

Recordamos que en un campo $\mathbb{K}$ una *ordenación* es un subconjunto P de $\mathbb{K}$ que satisface las siguientes propiedades:

Ord. 1 Dado $x \in \mathbb{K}$, se satisface exactamente una de las siguientes propiedades:

$$x \in P, \text{ o bien } x = 0, \text{ o } x \in -P = \{y \in \mathbb{K}; -y \in P\}.$$

En otras palabras, $\mathbb{K}$ es la unión disjunta de P , $\{0\}$ y $-P$. Esta propiedad se conoce como el *principio de tricotomía*.

Ord. 2 Si $x, y \in P$, entonces $x + y \in P$ y $xy \in P$.

El conjunto P se denomina la *clase positiva* de $\mathbb{K}$, y el campo $\mathbb{K}$ dotado de su clase positiva se llama campo ordenado por P .

Como consecuencia inmediata de la definición tenemos que $1 \in P$, y además, como $1 + \dots + 1 \in P$, el campo $\mathbb{K}$ tiene característica 0.

Por otra parte, si $x, y \in \mathbb{K}$, entonces $x < y$ si $y - x \in P$, y escribimos $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$.

En particular, si x, y, z pertenecen a $\mathbb{K}$, entonces se tienen las siguientes relaciones de orden:

- $x \leq x$ (reflexiva).
- Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitividad).
- Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$ (antisimetría).
- Se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$ (totalidad o completitud).

Si $\mathbb{K}$ es un campo ordenado y $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ entonces $x \in P$ o $-x \in P$. Si $x \in P$ tenemos que $x^2 = x \cdot x \in P$, por otra parte, si $-x \in P$, entonces $x^2 = (-x)(-x) \in P$ por lo que la suma de cuadrados en un campo ordenado es positiva o 0.

Proposición 2.7.3 El campo $\mathbb{C}$ no es un campo ordenado.

Demostración. Si así fuera, deberíamos tener una clase positiva $P \subset \mathbb{C}$ la cual contiene a $1 = 1 + 0i$ y al cuadrado de cualquier número complejo distinto de cero. Si $i \in P$, entonces $i^2 \in P$, pero $i^2 = -1$, como $1 \in \mathbb{C}$, como consecuencia del principio de tricotomía, -1 no puede estar en la clase positiva P , lo cual contradice el hecho de que i esté en P , de donde $-i \in P$, pero suponer esto implicaría que $(-i)^2 \in P$, pero nuevamente $(-i)^2 = -1$, lo cual nos contradice el axioma Ord. 2, por tanto, no es posible construir una clase positiva en $\mathbb{C}$ compatible con las operaciones de campo, por lo que $\mathbb{C}$ no es un campo ordenado. ■

2.8 Ejercicios

1. Efectúe cada una de las operaciones indicadas:

- $(3 - 4i) + (-8 + 2i)$
- $3(-4 + i) - 2(2 - 1 + 7i)$
- $(2 + 3i)(2 - i)$
- $(2 - i)[-2(1 + i) + 3(1 - i)]$
- $\frac{4 - i}{3 + 2i}$
- $\frac{(2 + i)(1 - 2i)(2 + 3i)}{(1 + i)^2}$
- $\frac{i^3 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$
- $2\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^2 - 3\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$

2. Si $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = 2 - \sqrt{3}i$, encuentre el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones:

- $z_1^2 + 2z_1 + 4$
- $|3z_2 - 2z_1|^2$
- $(z_3 + \bar{z}_3)^5$
- $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$
- $\left|\frac{z_1 - z_2 + i}{z_1 + z_2 + 1}\right|$
- $\frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{\bar{z}_2} - \frac{\bar{z}_2}{z_2}\right)$

3. Explique el error en el siguiente razonamiento:

$$-1 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Por tanto $1 = -1$.

4. Demuestre que $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ y que $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

5. Demuestre por inducción que si z_1 y z_2 son dos números complejos cualesquiera, entonces es válido el teorema del binomio

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

y donde se usa la convención $0! = 1$.

6. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 los vectores posición de los vértices del cuadrilátero $ABCD$, como se muestra en la figura 2.11. Demuestre que $ABCD$ es un paralelogramo si y solamente si $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$.

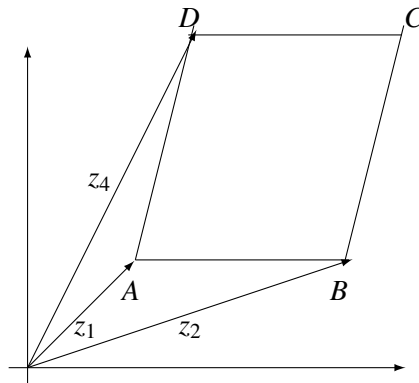


Figura 2.11: Cuadrilátero $ABCD$

7. Los vectores posición de los puntos A, B y C del triángulo ABC están dados por $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 - 2i$ y $z_3 = 1 - 6i$ respectivamente. Demuestre que ABC es un triángulo isósceles y encuentre las longitudes de los lados.

8. Demuestre que $\operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ y que $\overline{i\bar{z}} = -i\bar{z}$.
 9. Demuestre que $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.
 10. Use las propiedades conocidas de módulos para demostrar que si $|z_3| \neq |z_4|$, entonces

$$\left| \frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

11. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ son tales que $z_1 z_2 \neq 0$, entonces,

- a) $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2|$ si, y solamente si, $\arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$.
 b) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, y solamente si, $\arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$.
 c) $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$ si, y solamente si, $\arg z_1 - \arg z_2 = 2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Interprete geoméricamente estas relaciones.

12. Considere la transformación $\mathbb{R}$ -lineal $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Demuestre que:

- a) T es biyectiva si, y solamente si, $\lambda \bar{\lambda} \neq \mu \bar{\mu}$,
 b) Si $\lambda \mu = 0$ y $|\lambda + \mu| = 1$, entonces T es una isometría, es decir, $|T(z)| = |z|$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

13. Factorizando $z^4 - 4z^2 + 3$ en dos factores cuadráticos y usando después la desigualdad $|z \pm w| \geq ||z| - |w||$ demuestre que si z está en la circunferencia $|z| = 2$, entonces

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}.$$

14. Demuestre que

- a) z es real si y solamente si $\bar{z} = z$.
 b) z es real o imaginario puro si y solamente si $\bar{z}^2 = z^2$.

15. Demuestre por inducción las siguientes propiedades:

- a) $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$.
 b) $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$.

16. Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma polar y represéntelos gráficamente.

- a) $4 - 4i$.
 b) $\sqrt{3} - i$.
 c) $-i$.
 d) -8 .
 e) $-2\sqrt{3} - 2i$.
 f) $\sqrt{2}i$.

17. Construya la gráfica de los siguientes números complejos, dados en forma polar, y expreselos en forma rectangular:

- a) $8 \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{4} \right)$.
 b) $6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$.
 c) $2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right)$.
 d) $5 \left(\cos \frac{-2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{-2\pi}{3} \right)$.

18. Escriba en la forma $x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$ los siguientes números:

- a) $[5(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)][3(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ)]$.
 b) $[2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^7$.
 c) $\frac{[2(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)]^4}{[8(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^3}$.

$$d) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^5.$$

19. Si $M(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ denota el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de las matrices

de orden 2, con coeficientes reales y, $S(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ demuestre que:

- a) Sea $S_+(2, \mathbb{R}) = S(2, \mathbb{R}) \setminus \{O\}$, donde O denota la matriz cero. Demuestre que $(S_+(2, \mathbb{R}), \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $\cdot$ denota el producto de matrices.
b) Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y definimos A como $A = H_\lambda \cdot R_\theta$ donde

$$H_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

demuestre que $A \in S_+(2, \mathbb{R})$ y $\det A > 0$.

- c) ¿Es cierto el recíproco del inciso anterior?
d) Demuestre que $S(2, \mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ -subespacio vectorial de dimensión 2 de $M(2, \mathbb{R})$.
e) Demuestre que existe un isomorfismo de $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales entre $S(2, \mathbb{R})$ y $\mathbb{C}$.
20. Usando la notación de la definición 2.5.2, página 11, demuestre que, si $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$, entonces

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

y

$$\theta_3 = \arctan \left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right).$$

21. Demuestre, aplicando la fórmula de D'Moivre, que

- a) $\frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} = 8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta = 2 \cos 3\theta + 2 \cos \theta$.
b) $\cos 4\theta = 8 \sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 1$.

22. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, tal que $|z| = 1$ y $\arg z = \theta$, demuestre que:

$$z - 1 = \left(i \tan \frac{\theta}{2} \right) (z + 1),$$

y represente gráficamente el significado de esta relación.

23. Demuestre, aplicando la fórmula de D'Moivre, que

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) e^{\frac{i(\theta + \varphi)}{2}}$$

y

$$e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2i \sin \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) e^{\frac{i(\theta + \varphi)}{2}},$$

y represente gráficamente el significado de estas relaciones.

24. El *centroide* G de un triángulo $\triangle ABC$ es la intersección de las medianas.⁴ Si los vértices son los números complejos A , B y C , entonces puede suponer que $G = \frac{A+B+C}{3}$. Sobre cada uno de los lados de $\triangle ABC$ construya tres triángulos semejantes a $\triangle ABC$, a saber, los triángulos $\triangle APR$, $\triangle BQP$ y $\triangle CRQ$. Utilice el álgebra de los números complejos para demostrar que el centroide del triángulo $\triangle PQR$ es el mismo que el centroide del triángulo $\triangle ABC$.

⁴Mediana de un triángulo es la línea recta que pasa por un vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas de un triángulo se intersectan en un punto llamado *centroide* o *baricentro*, y es el punto que determina el centro de gravedad del triángulo.

25. Sea $S = \cos \theta + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \dots + \cos((2n-1)\theta)$. Demuestre, aplicando la fórmula de D'Moivre, que

$$S = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin \theta} = \frac{\sin(n\theta) \cos(n\theta)}{\sin \theta}.$$

26. Encuentre cada una de las raíces indicadas y represéntelas gráficamente.

- a) Las raíces cúbicas de 64.
- b) Las raíces cuadradas de $2\sqrt{3} - 2i$.
- c) Las raíces cuartas de $-128i$.
- d) Las raíces sextas de 64.

27. Resuelva las siguientes ecuaciones:

- a) $z^4 + 625 = 0$.
- b) $z^{12} + 1 = \sqrt{3}i$.
- c) $z^2 - 5 + 12i = 0$.
- d) $z^3 = -11 - 2i$.
- e) $5z^2 + 2z + 10 = 0$.
- f) $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$.
- g) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
- h) $(1+z)^5 = (1-z)^5$.

28. Si $p(z)$ es un polinomio en la variable z con coeficientes reales, demuestre que $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$. Concluya que, en este caso, si $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ es un cero de $p(z)$, entonces $\bar{\zeta}_0$ también lo es.

29. Una raíz primitiva de orden n de la unidad es un número complejo ζ tal que $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ son las n raíces n -ésimas de la unidad. Demuestre que si a y b son raíces primitivas de la unidad de orden n , entonces ab es una raíz de la unidad de orden n . ¿Es el conjunto de las raíces de la unidad un grupo multiplicativo? ¿Es el producto de dos raíces primitivas de la unidad una raíz primitiva de la unidad? ¿Es el conjunto de las raíces primitivas de la unidad un grupo multiplicativo?

30. Si $\zeta \neq 1$ es una raíz n -ésima de la unidad, evalúe la siguiente expresión:

$$1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \dots + n\zeta^{n-1}.$$

31. Utilice la ecuación binomial $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, y la fórmula de D'Moivre para demostrar que

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

y que

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

32. Demuestre, aplicando la fórmula de D'Moivre, la identidad:

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

(Sugerencia: El producto dado puede escribirse como $1/2^{n-1}$ veces el producto de las raíces distintas de cero del polinomio $(1-z)^n - 1$.)

33. Demuestre que la función $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\varphi(t) = e^{it}$ es un homomorfismo del grupo aditivo de los números reales en el grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

34. En cada caso, esbozar una gráfica con el conjunto de puntos determinado por la condición propuesta:
- $|z - i| = 4$
 - $|z + 1 - i| \leq 3$
 - $|z + 4i| \geq 4$
 - $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$
 - $||z - 3| - |z + 3|| = 4$
 - $z(\bar{z} + 2) = 3$
 - $\text{Im}(z^2) = 4$
 - $|z - 1| = |z + i|$
35. Si los puntos A y B representados por z_1 y z_2 respectivamente, son tales que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ demuestre que z_1/z_2 es un número imaginario puro y que $\angle AOB = \pi/2$, donde O denota el origen.
36. Demuestre que la ecuación de la recta que pasa por los puntos z_1 y z_2 está dada por

$$\arg\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0.$$

37. Demuestre que una ecuación para una circunferencia que pasa por tres puntos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ está dada por

$$\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) \Big/ \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) = \left(\frac{\bar{z} - \bar{z}_1}{\bar{z} - \bar{z}_2}\right) \Big/ \left(\frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}\right)$$

38. En $\mathbb{R}[x]$, el anillo de polinomios con coeficientes reales en una variable, considere la relación

$$f(x) \sim g(x) \iff \exists_{p(x) \in \mathbb{R}[x]} \text{ tal que } f(x) - g(x) = p(x) \cdot (x^2 + 1).$$

$[f(x)]$ denota la clase de equivalencia del polinomio $f(x)$

- Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- Si $\mathbb{K}$ denota el conjunto cociente, sean $[f(x)], [g(x)] \in \mathbb{K}$ son las clases de equivalencia de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, se definen las operaciones:

Suma: $[f(x)] + [g(x)] := [f(x) + g(x)].$

Producto $[f(x)] \cdot [g(x)] := [f(x) \cdot g(x)].$

Demuestre que estas operaciones están bien definidas, es decir, no dependen del representante.

- Si $f(x) = a_0 + a_1x$ y $g(x) = b_0 + b_1x$, determine las clases de $[f(x)] + [g(x)]$ y de $[f(x)] \cdot [g(x)]$.
- Demuestre que, con las operaciones anteriores, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un campo.
- Aplique el teorema de Frobenius (2.7.2), página 19 para concluir que $\mathbb{K}$ es el campo de los números complejos.

3. Funciones de variable compleja.

3.1 Introducción

Al identificar los conjuntos, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, por medio de la función $\mu(x+yi) = (x,y)$, el módulo de $z = x+yi$, que denotamos $|z|$ se define como el número real no negativo:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

En particular, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces $|z_1 - z_2|$ corresponde a la distancia entre z_1 y z_2 como puntos en $\mathbb{R}^2$. Una propiedad fundamental de la función distancia es que ésta satisface la desigualdad del triángulo, es decir:

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$

para cualesquiera números complejos z_1, z_2 y z_3 .

Esta métrica induce en $\mathbb{C}$ la topología subyacente de $\mathbb{R}^2$. En particular, los conjuntos abiertos, conexos o compactos de $\mathbb{R}^2$ se corresponden con los conjuntos abiertos, conexos o compactos de $\mathbb{C}$.

Cuando utilicemos el concepto de función distinguiremos entre funciones real valuadas de variable real, funciones real valuadas de variable compleja, funciones complejo valuadas de variable real y funciones complejo valuadas de variable compleja.

La teoría de funciones de una variable compleja nos permite extender los conceptos fundamentales del cálculo al dominio complejo. En este capítulo introduciremos los conceptos de límite, continuidad, sucesión, sucesión de Cauchy, serie de potencias convergente en $\mathbb{C}$ y estudiaremos algunas de sus propiedades.

En un principio, dependiendo del contexto en que las funciones complejo valuadas de variable compleja fueron estudiadas recibieron distintos nombres, tales como: función analítica, función regular, función complejo diferenciable y función holomorfa (Krantz, 1999, pg. 16) sin saber que tales caracterizaciones determinaban la misma clase de funciones. En particular, las propiedades de las series de potencias serán básicas en el estudio de las funciones holomorfas y meromorfas.

3.2 La topología en el plano complejo

Definición 3.2.1 Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. La función d se denomina una función *distancia (métrica)* en X , si d satisface las siguientes condiciones:

1. $d(z, w) \geq 0$, para toda $z, w \in X$.
2. $d(z, w) = 0$ cuando, y solamente cuando, $z = w$.
3. $d(z, w) = d(w, z)$ para toda $z, w \in X$.
4. $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$ para toda $z, u, w \in X$. Esta desigualdad se conoce como la desigualdad del triángulo.

En particular, un *espacio métrico* es una pareja (X, d) , donde X es un conjunto no vacío y d es una función distancia (o métrica) en X .

En un espacio métrico (X, d) siempre podemos definir las bolas abiertas (también llamados discos abiertos) como sigue:

Si $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$; con $r > 0$, definimos la *bola abierta con centro en x y radio r* , como el conjunto de puntos en X que distan de x menos que r , simbólicamente

$$B(x, r) = \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

También, definimos la *bola cerrada con centro en x y radio r* , como el conjunto de puntos en X que distan de x a lo más r , es decir:

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in X; d(x, y) \leq r\}.$$

Ejemplo 6

1. Si $X = \mathbb{C}$, y $z, w \in \mathbb{C}$, definimos $d(z, w) = |z - w|$, entonces $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico, y $B(0, 1)$ corresponde al interior del disco unitario con centro en el origen, como se muestra en el lado izquierdo de la figura 3.1.
2. Si $X = \mathbb{C}$, definimos

$$d_2(z, w) = \max\{|\operatorname{Re}(z - w)|, |\operatorname{Im}(z - w)|\},$$

entonces $(\mathbb{C}, d_2)$ es un espacio métrico, y $B(0, 1)$ corresponde al cuadrado unitario con centro en el origen, como se muestra en la parte central de la figura 3.1.

3. Si $X = \mathbb{C}$, definimos $d_3(z, w) = |\operatorname{Re}(z - w)| + |\operatorname{Im}(z - w)|$, entonces $(\mathbb{C}, d_3)$ es un espacio métrico, y $B(0, 1)$ corresponde al cuadrado con centro en el origen, como se muestra en el lado derecho de la figura 3.1.
4. Si $X = \mathbb{C}$, definimos $\rho(z, w) = 0$ si $z = w$ y $\rho(z, w) = 1$ si $z \neq w$, entonces $(\mathbb{C}, \rho)$ es un espacio métrico, y $B(0, 1) = \{0\}$, mientras que la bola cerrada con centro en el origen y radio 1 coincide con $\mathbb{C}$, esto es $\overline{B(0, 1)} = \mathbb{C}$.

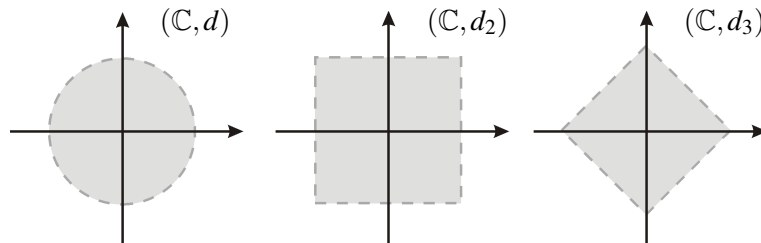


Figura 3.1: La bola con centro en el origen y radio uno con respecto a las métricas d , d_2 y d_3 .

Una métrica permite generalizar los conceptos de conjuntos abiertos (respectivamente cerrados) que hemos estudiado en $\mathbb{R}^n$ a cualquier espacio métrico (X, d) como sigue:

Definición 3.2.2 Dado (X, d) un espacio métrico, y $\Omega \subset X$, diremos que Ω es un subconjunto *abierto* de X si, para cada punto $x \in \Omega$ existe $\varepsilon = \varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$. En este caso, también solemos decir que x es un *punto interior* de Ω .

Cuando no haya lugar a confusiones, simplemente diremos que Ω es abierto. En particular, si $B(x, r) \subset X$ es una bola abierta en X , entonces $B(x, r)$ es un subconjunto abierto de X .

Definición 3.2.3 Dado (X, d) un espacio métrico, x un punto en X y $\Omega \subset X$, diremos que Ω es una *vecindad de x* si Ω es abierto y $x \in \Omega$.

Si (X, d) es un espacio métrico y $\Omega \subset X$ es un conjunto no vacío, entonces Ω es vecindad de cada uno de sus puntos.

Definición 3.2.4 Dado (X, d) un espacio métrico, y x un punto en X , diremos que Ω es una *vecindad perforada* (o *vecindad agujerada*, o *vecindad degenerada*) del punto x si:

1. $\Omega \subset X$, y $\Omega \neq \emptyset$
2. $x \notin \Omega$
3. $\Omega \cup \{x\} \subset X$ es una vecindad de x .

Por ejemplo, en $(\mathbb{C}, d)$ tenemos que $\Omega = \{x \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\} = B(0, 1) \setminus \{0\}$ es una vecindad perforada, o agujerada, del origen.

Proposición 3.2.1 Si (X, d) es un espacio métrico, entonces:

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ son abiertos.
2. Si Ω_1 y Ω_2 son abiertos, entonces $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es abierto.
3. Si $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos abiertos, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ es abierto.

Demostración. El inciso 1 es consecuencia inmediata de la definición.

Para demostrar el inciso 2, si $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, entonces $x \in \Omega_k$, para $k = 1, 2$. Como Ω_k es abierto, existe $r_k > 0$ tal que $B(x, r_k) \subset \Omega_k$. Definamos r como el menor valor entre r_1 y r_2 , esto es, $r := \min\{r_1, r_2\}$. Entonces $B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset \Omega_k$, para $k = 1, 2$.

Así, $B(x, r) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$, es decir, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es abierto.

Finalmente, si $x \in \bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x \in \Omega_{\alpha_0}$.

Como Ω_{α_0} es abierto, existe $r_{\alpha_0} > 0$ tal que

$$B(x, r_{\alpha_0}) \subset \Omega_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha,$$

por lo que, la unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. ■

3.3 Espacios topológicos

El objetivo de esta sección es enumerar los resultados topológicos fundamentales en el estudio de la teoría de las funciones de variable compleja, por lo que no se incluyen las demostraciones de todos los resultados, sin embargo, se indican las referencias bibliográficas en donde el lector interesado pueda encontrar dichas demostraciones.

Definición 3.3.1 Un *espacio topológico* es una pareja (X, τ) , donde X es un conjunto de elementos y τ es una colección de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío $\emptyset$, y el total X están en τ .
2. $Y_1, Y_2 \in \tau \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \in \tau$.
3. Si $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de conjuntos tales que $Y_\alpha \in \tau$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *conjuntos abiertos* de X . La colección τ se llama una *topología* de X .

En una gran cantidad de ocasiones, no describimos todos los elementos de τ , sino solamente algunos elementos que nos permiten estudiar todos los abiertos de X en la topología τ , esto es:

Definición 3.3.2 Dado un espacio topológico X con topología τ , diremos que β es una *base de la topología* τ si, para todo abierto Ω de la topología τ y todo $p \in \Omega$, existe $\Omega' \in \beta$ tal que $p \in \Omega' \subset \Omega$. Decimos que la base β *genera* la topología τ y a los elementos de β los llamamos *abiertos básicos*.

Así, la proposición 3.2.1 nos dice que en un espacio métrico (X, d) siempre podemos definir una topología τ , donde los abiertos básicos son las bolas abiertas.

En particular, en $\mathbb{C}$ con la métrica $d(z, w) = |w - z|$, las bolas abiertas

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} ; |z - z_0| < r\}$$

constituyen una *base* para la topología inducida.

Corolario 3.3.1 Si $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ son abiertos, entonces $\bigcap_{k=1}^n \Omega_k$ es abierto.

Por lo que, intersecciones finitas de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Definición 3.3.3 Un espacio topológico (X, τ) es *Hausdorff*, o T_2 , si para cada par de puntos distintos x, y existen dos conjuntos abiertos disjuntos $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Ejemplo 7

1. Todo espacio métrico (X, d) es un espacio topológico de Hausdorff.
Si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, entonces $r = d(x, y) > 0$. Así $B(x, r/2)$ y $B(y, r/2)$ son dos abiertos disjuntos, además $B(x, r/2)$ es un abierto que contiene a x pero no a y , mientras que $B(y, r/2)$ es un abierto que contiene a y pero no a x .
2. El espacio de Sierpinski $(\{0, 1\}, \tau)$ cuya topología está dada por $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$ no es de Hausdorff:
Los únicos abiertos a los que pertenece 1 son $\{1\}, \{0, 1\}$ y el único abierto al que pertenece 0 es $\{0, 1\}$. Por tanto, no existen abiertos disjuntos no vacíos que contengan al 0 y 1 respectivamente.
3. Los subespacios topológicos de un espacio Hausdorff también son Hausdorff.

Definición 3.3.4 Dado (X, τ) un espacio topológico, y $\Omega \subset X$, diremos que Ω es un *subconjunto cerrado* en X , si su complemento $X \setminus \Omega$ es abierto.

Cuando no haya lugar a confusiones, simplemente diremos que Ω es cerrado. Como consecuencia de la definición de cerrado, las propiedades de complemento de un conjunto, y la proposición anterior tenemos:

Proposición 3.3.1 Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces:

1. Los conjuntos X y $\emptyset$ son cerrados.
2. Si Ω_1 y Ω_2 son cerrados, entonces $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es cerrado.
3. Si $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia arbitraria de cerrados, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ es cerrado.

Cuidado: Un conjunto es cerrado, si es el complemento de un abierto, este enunciado **no** significa que: si un conjunto no es abierto entonces es cerrado.

De cálculo básico sabemos que en $\mathbb{R}$, con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, el conjunto $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x \leq 1\}$ no es abierto, ni cerrado. Este ejemplo lo podemos generalizar como sigue: Si consideramos el espacio métrico $\mathbb{C}$ con la métrica $d(z, w) = |z - w|$, entonces $\{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$ no es un conjunto abierto, ni cerrado.

Definición 3.3.5 Sea $S \subset \mathbb{C}$, un punto z_0 se dice que es un *punto límite* (*punto de acumulación*) de un conjunto S si toda vecindad perforada de z_0 contiene al menos un punto de S . Esto es, z_0 es un punto límite de S si para toda $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un punto $z \in S \setminus \{z_0\}$ que diste de z_0 menos que ε , simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in S \quad \text{tal que} \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon.$$

Evidentemente z_0 no es un punto de acumulación de S en si existe una vecindad perforada de z_0 que no contenga puntos de S .

Ejemplo 8

Con la métrica usual de $\mathbb{C}$, $d(z, w) = |z - w|$ podemos mostrar lo siguiente:

1. Si $S = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$, entonces $z_0 = 0$ es un punto de acumulación de S , a saber, es el único punto de acumulación de S . Nótese que en este caso $z_0 \notin S$.
2. Si $S = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$, entonces $z_0 = 1$ no es un punto de acumulación de S , a saber, $B(1, 1/2) \setminus \{1\} \cap S = \emptyset$ aunque en este caso $z_0 \in S$.
3. Si $S = \{z \in \mathbb{C} ; 0 \leq \operatorname{Re} z\} \subset \mathbb{C}$, entonces todo punto de S es un punto de acumulación de S .
4. Si $S = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$, entonces todo punto de S es un punto de acumulación de S .
5. Si $S = \{z_1, z_2, \dots, z_n; z_k \in \mathbb{C}\}$, es un conjunto finito de puntos distintos en $\mathbb{C}$, entonces S no contiene puntos de acumulación. Si $r = \min\{|z_j - z_k|; z_j \neq z_k\}$ y $z_i \in S$, entonces $B(z_i, r/2) \setminus \{z_i\} \cap S = \emptyset$.

En particular un conjunto cerrado contiene todos sus puntos de acumulación.

Definición 3.3.6 Sea (X, d) un espacio métrico, y $\Omega \subset X$.

1. El *interior* de Ω , que denotaremos Ω° , se define como el máximo conjunto abierto contenido en Ω , así:

$$\Omega^\circ := \bigcup_{\substack{G \subseteq \Omega \\ G \text{ es abierto}}} G.$$

2. La *cerradura* de Ω , que denotaremos $\overline{\Omega}$, se define como el mínimo subconjunto cerrado que contiene a Ω , de donde:

$$\overline{\Omega} := \bigcap_{\substack{G \supseteq \Omega \\ G \text{ es cerrado}}} G.$$

3. La *frontera* de Ω , que denotaremos $\partial\Omega$, se define como:

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{(X \setminus \Omega)}.$$

Ejemplo 9

1. Sea $(\mathbb{R}, d)$ el espacio métrico de los números reales dotados con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, y consideremos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ el subconjunto de los números racionales, entonces $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
2. En general, si consideramos $(\mathbb{R}^n, d)$ con la métrica usual

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2},$$

entonces $(\mathbb{Q}^n)^\circ = \emptyset$, y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^n$.

Definición 3.3.7 Dado un espacio métrico (X, d) , y $\Omega \subset X$, diremos que Ω es un subconjunto *denso* de X si la cerradura de Ω es X , esto es, $\overline{\Omega} = X$.

Como consecuencia del ejemplo anterior $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, mientras que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}^2$, en particular $\{a + ib \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ es un conjunto denso en $\mathbb{C}$.

Proposición 3.3.2 Dado un espacio métrico (X, d) , si $U, V \subset X$, entonces:

1. U es abierto si, y únicamente si $U = U^\circ$.
2. U es cerrado si, y solamente si $U = \overline{U}$.
3. $U^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus U)}$.
4. $\overline{U} = X \setminus (X \setminus U)^\circ$.
5. $\partial U = \overline{U} \setminus U^\circ$.
6. $\overline{(U \cup V)} = \overline{U} \cup \overline{V}$.
7. $a \in U^\circ$ cuando, y únicamente cuando, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset U$.
8. $a \in \overline{U}$ si, y solamente si para toda $r > 0$, $B(a, r) \cap U \neq \emptyset$.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

En la clase de cálculo, uno de los primeros teoremas que aprendemos para una función real valuada de variable real $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es el teorema del valor intermedio. Este teorema no solamente depende de la continuidad de la función f , depende también de las propiedades del intervalo $[a, b]$ como espacio topológico, concretamente depende del hecho que un intervalo cerrado no puede escribirse como la unión de dos intervalos abiertos ajenos, esta propiedad la llamamos la conexidad del intervalo. De manera general:

Definición 3.3.8 Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *separación* de X es una pareja U, V de conjuntos abiertos no vacíos tales que

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cup V = X.$$

En este caso también diremos que (X, τ) es un espacio *disconexo*.

Diremos que (X, τ) es *conexo* si no existe una separación de X .

Si $\Omega \subset X$, entonces un abierto en Ω es la intersección de un abierto en X con el conjunto Ω , por lo que Ω admite una topología inducida por la topología de X , que denotaremos $\tau|_\Omega$. Diremos que Ω es un subconjunto conexo de X si el espacio topológico $(\Omega, \tau|_\Omega)$ es conexo.

Intuitivamente, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es conexo si es de una sola pieza. Una formulación equivalente de conexidad es la siguiente:

Proposición 3.3.3 Un espacio topológico (X, τ) es conexo si los únicos subconjuntos de X que son tanto abiertos como cerrados son $\emptyset$ y X .

Para una demostración puede consultar el libro (Munkres, 2000, Chap. 3, §23).

Ejemplo 10

1. Si consideramos a $\mathbb{R}$ con la métrica usual, entonces $\Omega \subset \mathbb{R}$ es conexo si, y solamente si, Ω es un intervalo. Se deja como ejercicio verificar esta propiedad.
2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, entonces $B(z_0, r)$ es conexo. Se deja como ejercicio verificar esta propiedad.

Si $z, w \in \mathbb{C}$ denotaremos el segmento de recta de z a w como

$$[z; w] = \{z + t(w - z); 0 \leq t \leq 1\} = \{tw + (1 - t)z; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Un par de propiedades fundamentales que satisfacen los conjuntos conexos, y cuyas demostraciones no incluiremos en las presentes notas, son las siguientes:

Proposición 3.3.4 Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. Si $U \subset X$ es un subespacio topológico conexo, y $V \subset X$ es tal que $U \subset V \subset \overline{U}$, entonces V es un subespacio topológico conexo.
2. La imagen de un espacio conexo bajo una función continua es un espacio conexo.
3. El producto cartesiano finito de espacios conexos, es un espacio conexo.

Para una demostración puede verse el libro de Munkres (Munkres, 2000, Chap. 3, §23, Theo. 23.4-23.6)

Definición 3.3.9 Si $z, w \in \mathbb{C}$, un *polígono* P de z a w es un conjunto formado por segmentos de recta $[z_k; w_k]$ tal que $P = \bigcup_{k=1}^n [z_k; w_k]$ donde $z_1 = z$, $w_n = w$ y $w_k = z_{k+1}$ para $k = 1, \dots, n-1$; denotaremos el polígono P como

$$P = [z; z_2; \dots; z_{k-1}; w].$$

Una caracterización de conjuntos abiertos conexos de un espacio cartesiano, que utilizaremos a lo largo del presente curso, es la siguiente:

Teorema 3.3.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, entonces Ω es conexo si, y solamente si, para cualesquiera dos puntos $z, w \in \Omega$ existe un polígono $P \subset \Omega$ del punto z al punto w .

Demostración. Supongamos que Ω es conexo y sean $z, w \in \Omega$, con $w \neq z$. Mostraremos que existe un polígono $P \subset \Omega$ de z a w para lo cual definimos

$$\mathcal{A} := \{\omega \in \Omega; \text{ existe un polígono } P \subset \Omega \text{ de } z \text{ a } \omega\}.$$

Demostraremos que $\mathcal{A}$ es un conjunto no vacío simultáneamente abierto y cerrado en Ω , por lo que al ser Ω un conjunto conexo tendremos que $\mathcal{A} = \Omega$, es decir, cualesquiera dos puntos están en Ω conectados por un polígono.

Notamos primeramente que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $z \in \mathcal{A}$ ya que $P = [z; z] \subset \Omega$.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ es abierto consideremos $\omega \in \mathcal{A}$; como Ω es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(\omega, r) \subset \Omega$. Por el inciso 2 del ejemplo de conjuntos conexos sabemos que $B(\omega, r)$ es conexo, si $\alpha \in B(\omega, r)$ entonces y el segmento de recta que une ω y α está contenido en $B(\omega, r)$, es decir, $[\omega; \alpha] \subset B(\omega, r) \subset \Omega$, por otra parte, como $\omega \in \mathcal{A}$ existe un polígono $P \subset \Omega$ de z a ω , de donde

$$P' = P \cup [\omega; \alpha] \subset \mathcal{A},$$

es un polígono $P' \subset \Omega$ de z a α , consecuentemente $\mathcal{A}$ es un conjunto abierto.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ es cerrado, demostraremos que $\Omega \setminus \mathcal{A}$ es abierto.

Si $\Omega \setminus \mathcal{A} = \emptyset$, como el vacío es un conjunto abierto, entonces $\mathcal{A}$ es cerrado y habremos terminado.

Supongamos que $\Omega \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$, entonces existe $z_0 \in \Omega \setminus \mathcal{A}$, y como Ω es abierto existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Si $\mathcal{A} \cap B(z_0, r) \neq \emptyset$, existirá $u \in \mathcal{A} \cap B(z_0, r)$. En particular, como $u \in \mathcal{A}$ existe un polígono $P \subset \Omega$ de z a u , por otra parte, como $u \in B(z_0, r)$ y como $B(z_0, r)$ es conexo, $[u; z_0] \subset B(z_0, r) \subset \Omega$, de donde $P' = P \cup [u; z_0] \subset \Omega$, es un polígono de z a z_0 , es decir $z_0 \in \mathcal{A}$, lo cual es una contradicción. Así $B(z_0, r) \cap \Omega \setminus \mathcal{A} \neq \emptyset$, y entonces $\Omega \setminus \mathcal{A}$ es abierto, o equivalentemente $\mathcal{A}$ es cerrado.

Como Ω es conexo y $\mathcal{A}$ es no vacío, entonces $\mathcal{A} = \Omega$, es decir, para cualesquiera dos puntos $z, w \in \Omega$ existe un polígono $P \subset \Omega$ del punto z al punto w .

Recíprocamente, supongamos que para cada par de puntos $z, w \in \Omega$ existe un polígono $P \subset \Omega$ del punto z al punto w . Si Ω fuera desconexo existirían $U, V \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos disjuntos no vacíos tales que $\Omega = (U \cap \Omega) \cup (V \cap \Omega)$.

Elegimos $z \in U$ y $w \in V$, por hipótesis existe un polígono $P \subset \Omega$ de z a w , no puede suceder que todos los segmentos de P esten contenidos en uno solo de los conjuntos $U \cap \Omega$ o $V \cap \Omega$, pues en ese caso $P \subset U$ o bien $P \subset V$ lo que contradice el hecho de que $z \in U$ y $w \in V$. Luego entonces existe un segmento $[z'; w']$ del polígono P con $z' \in U$ y $w' \in V$. Usando el segmento $[z'; w']$ podemos definir el conjunto S como el conjunto de los números reales en el intervalo $[0, 1]$ correspondientes al segmento de recta $[z'; w']$ que están contenidos en el conjunto U y el conjunto T como el conjunto de los números reales en el intervalo $[0, 1]$ correspondientes al segmento de recta $[z'; w']$ que están contenidos en el conjunto V , esto es:

$$\begin{aligned} S &= \{s \in [0, 1]; sw' + (1-s)z' \in U\} \subset \mathbb{R}, \\ T &= \{t \in [0, 1]; tw' + (1-t)z' \in V\} \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Como $U \cap V = \emptyset$ entonces $S \cap T = \emptyset$, pero $0 \in S$ y $1 \in T$, además $S \cup T \subset [0, 1]$. A continuación mostraremos que $S \cup T = [0, 1]$.

Si $t \in [0, 1]$ entonces

$$tw' + (1-t)z' \in [z'; w'] \subset \Omega = (U \cap \Omega) \cup (V \cap \Omega),$$

luego entonces $tw' + (1-t)z' \in U$, o bien, $tw' + (1-t)z' \in V$. En el primer caso $t \in S$ y en segundo $t \in T$, de donde $t \in S \cup T$, luego entonces $S \cup T = [0, 1]$. Por ende S y T son conjuntos abiertos ajenos y no vacíos en $[0, 1]$, lo cual es una contradicción, ya que el intervalo $[0, 1]$ es conexo. Consecuentemente, el conjunto Ω es conexo. ■

Proposición 3.3.6 Supongamos que $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$ indexada por $\alpha \in I$. Si $\bigcap_{\alpha \in I} \Omega_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ es conexo.

Demostración. Si $\Omega = \bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ no fuera conexo, entonces $\Omega = (U \cap \Omega) \cup (V \cap \Omega)$ con $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos $U \cap \Omega \neq \emptyset$, $V \cap \Omega \neq \emptyset$. Como $\bigcap_{\alpha \in I} \Omega_\alpha \neq \emptyset$, existe $z_0 \in \Omega_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Si $z_0 \in A$ entonces $z_0 \in U \cap \Omega_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Como los conjuntos Ω_α son conexos, lo anterior implica que $V \cap \Omega_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in I$. Consecuentemente $V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. ■

Dado un subconjunto abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, si $z_0 \in \Omega$, como $z_0 \in \{z_0\} \subset \Omega$ y el conjunto $\{z_0\}$ es conexo. Consecuentemente, la familia $\{\Omega_\alpha\}$ de subconjuntos conexos de Ω que contienen a z_0 no es vacía, y por la proposición anterior 3.3.6, el conjunto $\bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha \subset \Omega$ es conexo, y es el mayor subconjunto conexo de Ω que contiene a z_0 . Se dice entonces que el conjunto $\bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$ es la *componente conexa* de Ω que contiene a z_0 . Variando $z_j \in \Omega$ y sus componentes conexas $\Omega_j \subset \Omega$ tenemos que

$$\Omega = \bigcup_{z_j \in \Omega} \Omega_j.$$

En particular, si $z_j, z_k \in \Omega$ se tiene que $\Omega_j = \Omega_k$, o bien, $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$, como consecuencia de la proposición anterior 3.3.6 el conjunto $\Omega_j \cup \Omega_k$ es conexo y contiene a z_j y z_k . Por la maximalidad de las componentes conexas $\Omega_j = \Omega_j \cup \Omega_k = \Omega_k$. Consecuentemente, las componentes conexas de Ω forman una partición de Ω .

Corolario 3.3.2 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces las componentes conexas de Ω son conjuntos abiertos.

Se deja como ejercicio demostrar esta propiedad, véase (Munkres, 2000, Chap. 3, §23).

Otra propiedad fundamental que satisface el intervalo $[a, b]$, y que es crucial en la demostración del teorema del valor máximo para una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es la compacidad del intervalo $[a, b]$. La compacidad de un conjunto será una propiedad fundamental en el estudio de diversas propiedades que satisfacen las funciones holomorfas, así como las propiedades de familias de funciones holomorfas definidas en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Definición 3.3.10 Si (X, τ) es un espacio topológico, una *cubierta abierta* de X es una familia de conjuntos abiertos $\{U_k\}$ de X tales que $X = \bigcup_k U_k$.

Ejemplo 11

1. Para $k \in \mathbb{Z}$, si $U_k = (k, k+2) = \{x \in \mathbb{R} ; k < x < k+2\}$, es claro que los intervalos U_k son abiertos y $\mathbb{R} = \bigcup_k U_k$, por lo que $\{U_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$.
2. Para $n \in \mathbb{N}$, consideramos la bola abierta $B(0, n) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < n\}$, claramente $\mathbb{C} = \bigcup B(0, n)$, de donde $\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{C}$.

Definición 3.3.11 Sea (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{K} \subset X$, diremos que $\mathcal{K}$ es *compacto* si toda cubierta abierta de $\mathcal{K}$ tiene una subcubierta finita. Esto es, si $\mathcal{U}$ es una familia arbitraria de conjuntos abiertos de X tal que:

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

entonces existe un número finito de conjuntos $U_1, \dots, U_n$ en $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{k=1}^n U_k.$$

Ejemplo 12

1. Claramente el conjunto vacío, y los subconjuntos finitos de X son compactos.
2. Si $D = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}$, entonces D no es compacto, pues si consideramos la cubierta $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $U_n = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1 - 1/n\}$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $D \subset \bigcup U_n$, por lo que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de D , sin embargo es claro que esta cubierta no tiene subcubierta finita.

Definición 3.3.12 Sea (X, d) un espacio métrico, $\Omega \subset X$, diremos que Ω es un *subconjunto acotado* de X si existen $M > 0$ y $x_0 \in X$ tal que $d(x_0, x) \leq M$ para cada $x \in \Omega$. Además, se define el *diámetro* de Ω como

$$\text{diam}(\Omega) = \sup\{d(x, y) ; x, y \in \Omega\}.$$

Un resultado que nos permite identificar los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ (con la métrica usual) es el siguiente:

Teorema 3.3.7 — Teorema de Heine-Borel. Un subconjunto $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ es compacto si, y solamente si, $\mathcal{K}$ es cerrado y acotado.

La demostración de éste resultado queda fuera del objetivo de las presentes notas, pero puede consultarse en (Munkres, 2000, Chap. 3, §27, Thm. 27.3, pg. 173-174) o bien, (Conway, 2010, Theorem 4.10, pg. 23).

Un concepto que resultará útil, cuando estudiemos la proyección estereográfica, es el siguiente:

Definición 3.3.13 Sea X es un espacio topológico, Hausdorff, no compacto, una *compactificación* del espacio X es una pareja (Y, h) que consta de un espacio topológico Y Hausdorff, compacto y un homeomorfismo h de X sobre un subconjunto denso de Y .

Frecuentemente identificamos X con su imagen $h(X) \subset Y$ y simplemente decimos que Y es una compactificación de X .

Si $X \subsetneq Y$ y $Y \setminus X$ consta solamente de un punto, se dice que Y es una compactificación a un punto de X .

El teorema de Alexandroff nos dice que X tiene una compactificación a un punto Y si, y sólo si, X es un espacio Hausdorff localmente compacto y X no es compacto. Esta compactificación es llamada compactificación de Alexandroff. Además, la compactificación de Alexandroff está bien definida salvo homeomorfismos. Para una demostración de este resultado puede consultarse el libro de topología de Munkres (Munkres, 2000, Chap. 3, §29), o bien, el libro de topología de Dugundji (Dugundji, 1978, Chap. XI, §8, Thm 8.4, pg. 246).

3.4 Sucesiones y series

Uno de los conceptos más útiles que tenemos al estudiar el conjunto de los $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico es el de convergencia de una sucesión, así podemos extender el papel que juega el cálculo en $\mathbb{R}^2$ al analizar $\mathbb{C}$ con la métrica inducida de $\mathbb{R}^2$. De manera similar a como se hace en $\mathbb{R}$, podemos

decir que

Definición 3.4.1 Una *sucesión* en $\mathbb{C}$ es una función $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, su imagen bajo s la denotamos como $s(n) = s_n$. También usamos la notación $\{s_n\}$ para denotar una sucesión en $\mathbb{C}$.

Diremos que la sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* a s , con $s \in \mathbb{C}$ si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N = N_\varepsilon$ tal que $|s_n - s| < \varepsilon$ siempre y cuando $n \geq N$. Denotaremos esto como: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ o bien, $s_n \rightarrow s$ si $n \rightarrow \infty$. En este caso también se dice que el número complejo s es el *límite* de la sucesión $\{s_n\}$.

De manera similar al caso de sucesiones con coeficientes reales podemos definir el concepto de sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Definición 3.4.2 Se dice que la sucesión de números complejos $\{s_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si dado ε , un número real positivo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|s_m - s_n| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$.

Si $\{s_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$, y escribimos cada $s_n = a_n + b_n i$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, tenemos las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en $\mathbb{R}$. Recíprocamente, si tenemos dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ en $\mathbb{R}$, y definimos $s_n = a_n + b_n i$, entonces $\{s_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$.

Proposición 3.4.1 Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números complejos, con $s_n = a_n + b_n i$, con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. La sucesión $\{s_n\}$ es de Cauchy cuando, y sólo cuando, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$.
2. La sucesión $\{s_n\}$ converge a $s = a + bi$ en $\mathbb{C}$ si, y únicamente si, $\{a_n\}$ converge al número a en $\mathbb{R}$ y $\{b_n\}$ converge al número b en $\mathbb{R}$.

Demostración. Para la primera parte, sea $\{s_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, con $s_n = a_n + b_n i$.

Como $|\operatorname{Re}(w)| \leq |w|$ y además $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Re}(-iw)$, entonces $|\operatorname{Im}(w)| \leq |w|$, para cada número complejo w .

Dado ε un número real positivo, como $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy, existe un entero positivo N tal que $|s_n - s_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$, de donde :

$$|a_n - a_m| = |\operatorname{Re}(s_n - s_m)| \leq |s_n - s_m| < \varepsilon,$$

y

$$|b_n - b_m| = |\operatorname{Im}(s_n - s_m)| \leq |s_n - s_m| < \varepsilon,$$

siempre que $n, m \geq N$, así $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Recíprocamente, dado ε un número real positivo, como las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son de Cauchy en $\mathbb{R}$ existe un entero positivo N tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \text{ y } |b_n - b_m| < \varepsilon/2 \text{ siempre que } n, m \geq N.$$

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo tenemos:

$$|s_n - s_m| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)i| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon$$

siempre que $n, m \geq N$. Es decir, $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Para la segunda parte, supongamos ahora que la sucesión $\{s_n\}$ converge a s en $\mathbb{C}$, con $s_n = a_n + b_n i$ y $s = a + bi$. Dado un número real positivo ε , existe un entero positivo N tal que $|s_n - s| < \varepsilon$, de donde:

$$|a_n - a| = \left| \frac{(s_n - s) + \overline{(s_n - s)}}{2} \right| \leq \frac{|s_n - s|}{2} + \frac{|\overline{s_n - s}|}{2} = 2d \frac{|s_n - s|}{2} < \varepsilon,$$

y

$$|b_n - b| = \left| \frac{(s_n - s) - \overline{(s_n - s)}}{2i} \right| \leq \frac{|s_n - s|}{2} + \frac{|\overline{s_n - s}|}{2} = 2 \frac{|s_n - s|}{2} < \varepsilon,$$

si $n \geq N$.

Finalmente, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ que convergen a los valores a y b respectivamente, dado un número real positivo ε , existe un entero positivo N tal que $|a_n - a| < \varepsilon/2$ y $|b_n - b| < \varepsilon/2$ si $n \geq N$. Si $s_n = a_n + b_n i$ y $s = a + b i$, entonces:

$$\begin{aligned} |s_n - s| &= |(a_n + b_n i) - (a + b i)| = |(a_n - a) + (b_n - b)i| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $n \geq N$.

Por lo que la sucesión $\{s_n\}$ converge a s . ■

Teorema 3.4.2 El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo.

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge en $\mathbb{R}$. Así, las partes real e imaginaria de una sucesión de Cauchy $\{s_n\}$ en $\mathbb{C}$ convergen en $\mathbb{R}$ a dos números, digamos a y b , tenemos entonces que la sucesión de Cauchy $\{s_n\}$ converge al número complejo $s = a + b i$. Concluimos de aquí que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo. ■

Definición 3.4.3 — Límite superior. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales.

1. Si $\{a_n\}$ no está acotada superiormente, se define el *límite superior* como

$$\limsup a_n = \infty.$$

2. Si $\{a_n\}$ está acotada por arriba, entonces también la sucesión $\{a_{n+m}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada por arriba para cada $m \in \mathbb{N}$. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ se define

$$\alpha_m = \sup\{a_{n+m}; n \in \mathbb{N}\},$$

entonces la sucesión $\{\alpha_m\}$ claramente es una sucesión decreciente. Si $\lim \alpha_m = -\infty$ se define

$$\limsup a_n = -\infty.$$

3. Si $\{a_n\}$ está acotada por arriba y $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha \in \mathbb{R}$, se define

$$\limsup a_n = \alpha.$$

Definición 3.4.4 — Límite inferior. Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales.

1. Si $\{a_n\}$ no está acotada inferiormente, se define el *límite inferior* como

$$\liminf a_n = -\infty.$$

2. Si $\{a_n\}$ está acotada por abajo, entonces también la sucesión $\{a_{n+m}\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada por abajo para cada $m \in \mathbb{N}$. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ se define

$$\alpha_m = \inf\{a_{n+m}; n \in \mathbb{N}\},$$

entonces la sucesión $\{\alpha_m\}$ claramente es una sucesión creciente. Si $\lim \alpha_m = \infty$ se define

$$\liminf a_n = \infty.$$

3. Si $\{a_n\}$ está acotada por abajo y $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha \in \mathbb{R}$, se define

$$\liminf a_n = \alpha.$$

Proposición 3.4.3 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\limsup a_n = -\infty$ cuando, y sólo cuando, $\lim a_n = -\infty$.
2. $\limsup a_n = \infty$ si, y sólo si, existe una subsucesión de $\{a_n\}$ cuyo límite es ∞ .
3. $\limsup a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, para toda $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N}; a_n \geq \alpha - \varepsilon\}$ es acotado y el conjunto $\{n \in \mathbb{N}; a_n > \alpha - \varepsilon\}$ es no acotado.
4. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\lim a_n = \alpha$ cuando, y solamente cuando, $\limsup a_n = \alpha = \liminf a_n$.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

De acuerdo con Bradley y Sandifer (R. E. Bradley, 2009, Chap.9), Cauchy en su *Cours d'analyse*, definió las series de números complejos en términos de series de números reales, y determinó condiciones bajo las cuales una serie de números complejos converge en términos de los criterios de convergencia de series de números reales.

Definición 3.4.5 Si $a_n \in \mathbb{C}$ para cada entero no negativo n , diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge al número complejo a si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N = N_\varepsilon$ tal que, si $m \geq N$ entonces $\left| \left(\sum_{n=0}^m a_n \right) - a \right| < \varepsilon$.

Es decir, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ de números complejos converge al número complejo $a \in \mathbb{C}$, si la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ converge al número a .

Se escribirá $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, o simplemente $\sum a_k = a$. En este caso, también se suele decir que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente.

Se dice que una serie *diverge* si $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n|$ no existe o es infinito. Es claro que una serie con términos complejos converge si, y solamente si, las series formadas por las partes real e imaginaria de los términos convergen.

Como una sucesión es convergente cuando, y solamente cuando, es una sucesión de Cauchy, tenemos el siguiente criterio:

Proposición 3.4.4 — Criterio de Cauchy. La serie $\sum a_k$ converge si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se tiene

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

para cada $p \in \mathbb{N}$.

En particular, para $p = 1$ se obtiene un criterio útil de divergencia.

Corolario 3.4.1 Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, o no existe, entonces $\sum a_k$ diverge.

Nótese que, aunque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, ya que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} &\geq 2^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, así al sumar las desigualdades se sigue que

$$\sum_{n=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{n} \geq 1 + \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2} = 1 + 2^n.$$

Consecuentemente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ diverge a ∞ y, como consecuencia de los criterios de comparación, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge a ∞ .

Definición 3.4.6 Se dice que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo y el criterio de Cauchy, tenemos el siguiente criterio:

Teorema 3.4.5 Si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, entonces converge.

Demostración. Supongamos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, dada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon,$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. Como consecuencia del Criterio de Cauchy la serie $\sum a_k$ converge. ■

Esta proposición es muy útil pues la serie $\sum |a_k|$ es real, y se pueden aplicar los criterios de convergencia para series reales. A continuación presentamos diversos criterios de convergencia de series con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Proposición 3.4.6 — Serie geométrica. Si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge al valor $\frac{1}{1-r}$, y diverge si $|r| \geq 1$.

Demostración. Para demostrar que la serie geométrica converge al valor $\frac{1}{1-r}$ si $|r| < 1$, conside-

remos $s_n = \sum_{k=0}^n r^k$; entonces $r \cdot s_n = \sum_{k=1}^{n+1} r^k$, así que $s_n - r s_n = 1 - r^{n+1}$, de donde

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Si $|r| < 1$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - r}.$$

Por otra parte, si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^{n+1} = \infty$, por lo cual, la serie geométrica diverge. Si $r = 1$ entonces $s_n = n + 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, y la serie diverge. Si $r = -1$, entonces

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

por lo que la sucesión de sumas parciales no converge, consecuentemente la serie geométrica diverge en este caso. ■

Ejemplo 13

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ converge absolutamente si $r < 1$, pues $|(-r)^n| = r^n$, y por el criterio de la serie geométrica, $\sum r^n$ converge.

Proposición 3.4.7 — Criterio de comparación. Sean $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ y $\{c_k\}$ sucesiones de números reales.

1. Si $|a_k| \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge absolutamente.
2. Si $0 \leq c_k \leq d_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum c_k$ diverge, entonces $\sum d_k$ también diverge.

Demostración. Para demostrar el primer criterio de comparación, aplicaremos el criterio de Cauchy. Supongamos que $|a_k| \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y que la serie $\sum b_k$ converge. Dada $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$ se tiene que

$$0 \leq \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{n+p} b_k \leq \varepsilon$$

para cada $p \in \mathbb{N}$. Luego entonces la serie $\sum a_k$ es convergente.

Para demostrar el segundo criterio de comparación, supóngase que $0 \leq c_k \leq d_k$ y que $\sum c_k$ diverge, como $s_n = \sum_{k=0}^n c_k$ es una sucesión creciente de números positivos, ésta diverge si, y únicamente si, es no acotada, por lo que dada $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$M \leq \sum_{k=0}^n c_k \leq \sum_{k=0}^n d_k.$$

Por ende, $\sum d_k$ es no acotada y por tanto, es divergente. ■

Proposición 3.4.8 — Criterio de la p -serie. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ converge si $p > 1$ y diverge a ∞ si $p \leq 1$.

Demostración. Para demostrar el criterio de la p -serie, notamos que, si $p \leq 1$, como la función n^x es creciente, entonces $n^{-1} \leq n^{-p}$, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ es divergente, como consecuencia de las pruebas de comparación para series reales, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ diverge si $p \leq 1$.

Por otra parte, si $p > 1$, como la función $f(x) = x^p$ es creciente entonces

$$\begin{aligned}
s_{2^k-1} &= \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^k-1)^p} \right) \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}} \\
&< \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto las sumas parciales de la serie $\sum n^{-p}$ están acotadas superiormente. Consecuentemente la serie $\sum n^{-p}$ es convergente si $p > 1$. ■

Proposición 3.4.9 — Criterio de la razón o de D'Alembert . Supóngase que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe y es menor que uno, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Si el límite es mayor que uno, la serie diverge, y si el límite es uno, el criterio falla.

Demostración. Para demostrar el criterio de la razón, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, podemos encontrar $0 < \beta < 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \beta.$$

En particular

$$\begin{aligned}
|a_{N+1}| &< \beta |a_N|, \\
|a_{N+2}| &< \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N| \\
&\vdots \\
|a_{N+p}| &< \beta^p |a_N|
\end{aligned}$$

Consecuentemente, para $n \geq N$ se tiene que

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \beta^n$$

Como $0 < \beta < 1$ la serie $\sum \beta^n$ converge, y como consecuencia del criterio de comparación se sigue que la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.

Por otra parte, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para $n \geq N$, entonces $\lim a_n \neq 0$, por lo que la serie $\sum a_n$ diverge. ■

Por ejemplo, anteriormente hemos visto que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, y en este caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{ mientras que por el criterio de la } p\text{-serie la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge y } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

por lo que el criterio no permite asegurar que sucede cuando este límite es uno.

De acuerdo con (R. E. Bradley, 2009, Chap. 6, §6.2, pg. 91-92) el criterio de la raíz se cita como la definición de los límites superior e inferior en [DSB Cauchy, p. 136].

Proposición 3.4.10 — Criterio de la raíz o Criterio de Cauchy. Supóngase que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe y es menor que uno, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergerá absolutamente. Si el límite es mayor que uno, la serie diverge, y si el límite es uno, el criterio falla.

Demostración. Sea $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, y supongamos que $0 \leq \alpha < 1$, podemos elegir $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \alpha < \beta < 1$, y existe un entero N tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta \text{ para cada } n \geq N.$$

En particular, si $n \geq N$, entonces $|a_n| < \beta^n$.

Como $0 < \beta < 1$, la serie $\sum \beta^n$ converge, y como consecuencia del criterio de comparación $\sum a_n$ converge absolutamente.

Por otra parte, si $\alpha > 1$ existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > \beta > 1$, y como $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$, si $\alpha_m = \sup\{\sqrt[n+m]{|a_{n+m}|}; n \in \mathbb{N}\}$ entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha$. Como esta es una sucesión decreciente de números positivos, tenemos que, para valores de m suficientemente grandes, $\alpha_m > \beta > 1$. Por ende $|a_n| > \beta^n > 1$ para una infinidad de valores $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\lim a_n \neq 0$, así $\sum a_n$ diverge.

Finalmente, la serie armónica diverge y la serie $\sum n^{-2}$ converge, y por la regla de L'Hôpital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp\left(\frac{\log n}{n}\right)} = 1.$$

Análogamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp\left(\frac{2 \log n}{n}\right)} = 1.$$

Por lo que, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, el criterio falla, como esperábamos demostrar. ■

3.5 Funciones de variable compleja

En la presente sección estudiaremos los conceptos de límites y continuidad de funciones complejo valuadas de variable compleja, así como el de serie de potencias en una variable compleja. En el capítulo 4 veremos que toda función holomorfa satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann 4.3.3, y por ende, es diferenciable en sentido complejo. Posteriormente, en el capítulo 5 mostraremos que toda función diferenciable en sentido complejo es holomorfa.

Definición 3.5.1 Por una *función $\mathbb{C}$ -valuada de variable compleja*, entendemos una función cuyo dominio es un subconjunto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y los valores que toma están en $\mathbb{C}$. Es decir,

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Asociadas a la función f aparecen las funciones $\mathbb{R}$ -valuadas de variable compleja,

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z), \quad z \in \Omega.$$

Al identificar $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, las funciones u y v pueden ser vistas como funciones de dos variables reales que toman valores en $\mathbb{R}$, así, podemos escribir

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Es decir, tener una función compleja de variable compleja es tener dos funciones $\mathbb{R}$ -valuadas que dependen de dos variables reales.

Diremos que la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$ -valuada si, $\text{Im } f(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$, o equivalentemente, si $v(x, y) = 0$ para toda (x, y) donde $z = x + iy \in \Omega$.

Si se usan las coordenadas polares r, θ en lugar de x, y , véase la definición 2.5.2, página 11, se puede escribir

$$f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

Ejemplo 14

1. Si $f(z) = z$, entonces $f(x + iy) = x + iy$, de donde

$$u(x, y) = x \quad y \quad v(x, y) = y,$$

o en coordenadas polares

$$f(r, \theta) = r \cos \theta + ir \sin \theta,$$

de donde

$$u(r, \theta) = r \cos \theta \quad y \quad v(r, \theta) = r \sin \theta.$$

2. Si $f(z) = z^{-1}$, entonces para $z \neq 0$,

$$f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

así

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

o en coordenadas polares

$$f(r, \theta) = r^{-1} \cos \theta - ir^{-1} \sin \theta,$$

es decir

$$u(r, \theta) = \frac{1}{r} \cos \theta \quad y \quad v(r, \theta) = -\frac{1}{r} \sin \theta.$$

3. $f(z) = \bar{z}$, entonces $f(x + iy) = x - iy$, por lo que

$$u(x, y) = x \quad y \quad v(x, y) = -y,$$

en coordenadas polares tenemos

$$f(r, \theta) = r \cos \theta - ir \sin \theta,$$

de donde

$$u(r, \theta) = r \cos \theta \quad y \quad v(r, \theta) = -r \sin \theta.$$

4. Si $f(z) = |z|^2$, entonces $f(x + iy) = x^2 + y^2$, así

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad y \quad v(x, y) = 0,$$

y en coordenadas polares $f(r, \theta) = r^2$, de donde

$$u(r, \theta) = r^2 \quad y \quad v(r, \theta) = 0.$$

5. Si $f(z) = z^2$, entonces

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

de donde

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad y \quad v(x, y) = 2xy.$$

En coordenadas polares, como $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ tenemos que

$$x^2 - y^2 = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 (1 - 2 \sin^2 \theta),$$

$$2xy = r^2 (2 \sin \theta \cos \theta) = r^2 \sin(2\theta),$$

de donde

$$u(r, \theta) = r^2 (1 - 2 \sin^2 \theta) \quad y \quad v(r, \theta) = r^2 \sin(2\theta).$$

3.5.1 Límites y continuidad

Definición 3.5.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío, z_0 un punto de acumulación de Ω (véase 3.3.5), y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Se dice que un número complejo L es el *límite de f cuando z tiende a z_0* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$ con $z \in \Omega$ se tiene que $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Al igual que en variable real, si el límite existe, éste es único y se denota

$$L = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}} f(z) \quad \text{o simplemente} \quad L = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

La definición de límite nos dice que, cuando éste existe, podemos lograr que el punto $f(z)$ esté tan cerca de L como queramos eligiendo el punto z suficientemente cercano a z_0 , pero distinto de z_0 .

Como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico, esta definición es equivalente a pedir que para cada sucesión $\{z_n\}$ de números complejos, con $z_n \in \Omega \setminus \{z_0\}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = L$.

El estudio de los límites puede abreviarse estableciendo una conexión entre los límites de funciones de una variable compleja y los de funciones de una variable real.

Teorema 3.5.1 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, para $z = x + iy \in \Omega$ suponemos que $f(z) = (u + iv)(z)$, o equivalentemente $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, sea $z_0 = x_0 + iy_0$ y $L = u_0 + iv_0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ si, y solamente si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Demostración. Supongamos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Dada $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1,$$

y

$$|v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2.$$

Definamos $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

por lo que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$.

Recíprocamente, si $|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$ siempre que $0 < |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta$, como

$$|u - u_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)| = |(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon,$$

y

$$|v - v_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)| = |(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon,$$

siempre que $0 < |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta$, se sigue inmediatamente que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0, \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$



Proposición 3.5.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío, z_0 un punto de acumulación de Ω y sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones. Supongamos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ existen, entonces:

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$.
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \cdot g)(z) = \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \right) \cdot \left(\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \right)$.
3. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g}(z) = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema anterior y las propiedades de límites para funciones $\mathbb{R}$ -valuadas. ■

Definición 3.5.3 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto y $z_0 \in \Omega$, se dice que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es *continua en z_0* si

1. z_0 está en el dominio de f .
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Y diremos que f es *continua en Ω* si f es continua en cada punto de Ω .

Por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ y $z \in \Omega$, se tiene que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Y ya que las bolas abiertas son base para la topología de $\mathbb{C}$ inducida por la métrica $d(z, w) = |z - w|$, lo anterior implica que f es continua en z_0 si, y sólo si, la imagen inversa de un conjunto abierto alrededor de $f(z_0)$ es un conjunto abierto en Ω .

Al igual que en el caso de límites, la propiedad de continuidad de una función $\mathbb{C}$ -valuada de variable compleja puede reducirse al estudio de la continuidad de funciones $\mathbb{R}$ -valuadas, esto es:

Proposición 3.5.3 Supongamos que $f(z) = u(z) + \imath v(z)$, es una función complejo valuada definida en el conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$, sea $z_0 = x_0 + \imath y_0 \in \Omega$ y que $f(z_0) = u_0 + \imath v_0$, entonces f es continua en z_0 si, y únicamente si, u y v son continuas en z_0 .

Demostración. Como f es continua en el punto z_0 , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = u_0 + \imath v_0$, por otra parte, como consecuencia de las propiedades de límites

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (u(z) + \imath v(z)) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) + \imath \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) \right). \end{aligned}$$

Entonces, para las partes real e imaginaria tenemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0, \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0,$$

y recíprocamente. ■

Como consecuencia de la definición de continuidad y de las propiedades de límites tenemos que la suma y el producto de funciones continuas en z_0 es continua en z_0 , además si el denominador no se anula en z_0 , también el cociente de funciones continuas en z_0 es continua en z_0 , esto es:

Proposición 3.5.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$ y sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas en z_0 , entonces:

1. $f + g$ es continua en z_0 .
2. $f \cdot g$ es continua en z_0 .
3. Si $g(z_0) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en z_0 .

Proposición 3.5.5 Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que la imagen de f está contenida en Ω' . Si f y g son continuas, entonces la composición $g \circ f$ es continua.

Demostración. Si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto, como g es continua se tiene que $g^{-1}(U)$ es abierto en Ω' , y como f es continua se sigue que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en Ω . ■

Teorema 3.5.6 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

1. Si $U \subset \Omega$ es conexo, entonces $f(U)$ es conexo.
2. Si $\mathcal{K} \subset \Omega$ es compacto, entonces $f(\mathcal{K})$ es compacto.

Demostración. Para la primera parte, supongamos que $V \subset f(U)$ es abierto y cerrado en $f(U)$ y que $V \neq \emptyset$. Entonces, $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ y $f^{-1}(V)$ es abierto y cerrado en el conexo U porque f es continua, entonces $f^{-1}(V) = U$ de donde $V = f(U)$ y por lo tanto $f(U)$ es conexo.

Para la segunda parte, si $\mathcal{K} = \emptyset$, entonces $f(\mathcal{K}) = \emptyset$ y no hay nada que probar. Supongamos que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ y sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de $f(\mathcal{K})$, es decir, $f(\mathcal{K}) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Entonces,

$\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{K}$ y como $\mathcal{K}$ es compacto, éste admite una subcubierta finita.

Supongamos que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_j)$, de donde

$$f(\mathcal{K}) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(U_j)\right) \subset \bigcup_{j=1}^n f(f^{-1}(U_j)) \subset \bigcup_{j=1}^n U_j,$$

por lo que $\{U_1, \dots, U_n\}$ es una subcubierta finita de $f(\mathcal{K})$. ■

Definición 3.5.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función, diremos que f es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ , que depende sólo de ε , tal que para cada $w \in \Omega$ se tiene que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ siempre que $|z - w| < \delta$.

En otras palabras, f es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un δ , que depende sólo de ε , tal que para cada $w \in \Omega$ se tiene que $f(B(w, \delta)) \subset B(f(w), \varepsilon)$.

Nótese que toda función uniformemente continua es continua.

Teorema 3.5.7 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, si Ω es compacto entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$, para cada $z \in \mathbb{C}$ el conjunto $B(z, \varepsilon/2)$, y como f es continua, en particular el conjunto $U_z = f^{-1}(B(z, \varepsilon/2))$ es abierto. Luego entonces $\mathcal{U} = \{U_z\}_{z \in \mathbb{C}}$ es una cubierta abierta de Ω .

Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de Ω , para cada $w \in \Omega$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $w \in U_z$, y como U_z es un conjunto abierto, existe δ_w tal que $B\left(w, \frac{\delta_w}{2}\right) \subset U_z$, de donde $\mathcal{W} = \left\{B\left(w, \frac{\delta_w}{2}\right)\right\}_{w \in \Omega}$ es una cubierta abierta de Ω .

Como Ω es un conjunto compacto, podemos extraer de $\mathcal{W}$ una subcubierta abierta finita $\left\{B\left(w_j, \frac{\delta_{w_j}}{2}\right) ; j = 1, \dots, n\right\}$. Definimos $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{w_j}}{2} ; j = 1, \dots, n\right\} > 0$.

Por tanto, si $w \in \Omega$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $w \in B\left(w_i, \frac{\delta_{w_i}}{2}\right)$, por lo que, si $|u - w| < \delta$, y como consecuencia de la desigualdad del triángulo,

$$|u - w_i| \leq |u - w| + |w - w_i| < \delta + \frac{\delta_{w_i}}{2} \leq \delta_{w_i}, \quad (3.1)$$

es decir, $B(w, \delta) \subset B(w_i, \delta_{w_i}) \subset U_{\zeta}$ para algún $\zeta \in \mathbb{C}$.

Luego entonces

$$f(B(w, \delta)) \subset f(U_{\zeta}) = f(f^{-1}(B(\zeta, \varepsilon/2))) \subset B(\zeta, \varepsilon/2), \quad (3.2)$$

y como $f(w) \in B(\zeta, \varepsilon/2)$, para cada $u \in B(w, \delta)$ tenemos que

$$|f(u) - f(w)| < |f(u) - \zeta| + |\zeta - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por ende, $f(B(w, \delta)) \subset B(f(w), \varepsilon)$, por lo que f es uniformemente continua. ■

3.6 Series de potencias

En esta sección generalizaremos la idea a series de potencias en variable real a variable compleja. Esta generalización se conoce como “prolongación” o “continuación” (analítica) de una función real al plano complejo.

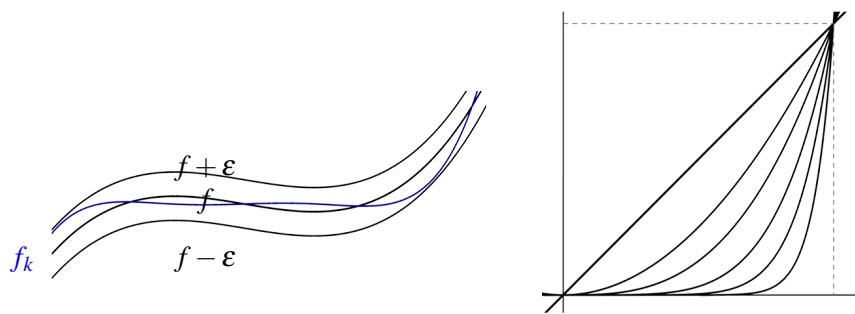
Definición 3.6.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto, y supóngase que $f_1, f_2, \dots$ son funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Diremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente si para cada $z \in \Omega$ la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge. El límite define una nueva función $f(z)$ sobre Ω . Usaremos la notación $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Así, para cada $\zeta \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo $N = N_{\zeta, \varepsilon}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$.

Otro tipo importante de convergencia es la convergencia uniforme, que definiremos a continuación:

Definición 3.6.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto, y supóngase que $f_1, f_2, \dots$ son funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Diremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función f de Ω en $\mathbb{C}$ si, para cada $\varepsilon > 0$ hay un entero positivo N , que solamente depende de ε , tal que para todo $z \in \Omega$ se tiene $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$.

En particular $\sup\{|f(x) - f_n(x)|; x \in \Omega\} \leq \varepsilon$, si $n \geq N$.

Desde luego, toda sucesión uniformemente convergente es convergente. La diferencia básica entre los dos conceptos es la siguiente: si $\{f_n\}$ converge en Ω , entonces hay una función f tal que, para todo $\varepsilon > 0$ y toda $z \in \Omega$, hay un entero que depende de ε y de z , que cumple la condición $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$; si $\{f_n\}$ converge uniformemente en Ω , es posible encontrar, para cada $\varepsilon > 0$ un entero N , que satisface $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \Omega$. Véase la figura 3.2.



La familia f_k converge uniformemente a f .

La familia de funciones $g_n(x) = x^n$, con $x \in [0, 1]$ no converge uniformemente.

Figura 3.2: Convergencia uniforme y no uniforme

Una de las principales propiedades que tenemos es la siguiente:

Proposición 3.6.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ y supóngase que $\{f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ es una sucesión de funciones continuas. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f , entonces f es continua.

Demostración. Dado $z_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f , existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ para toda $z \in \Omega$.

Como f_n es continua, existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(z_0) - f_n(z)| < \varepsilon/3$ si $|z - z_0| < \delta$.
Si $|z - z_0| < \delta$ y $n \geq N$, entonces

$$|f(z_0) - f(z)| \leq |f(z_0) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

con lo cual se obtiene el resultado deseado. ■

Definición 3.6.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, si $\{f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}\}$ es una sucesión de funciones, para cada $z \in \Omega$ definimos $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$. Diremos que $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ si, y solamente si, $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z)$ para cada $z \in \Omega$.

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f cuando, y sólo cuando, la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ converge uniformemente a f .

Esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a f si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero $N = N_\varepsilon$ tal que si $n > N$, entonces

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon \text{ para cada } z \in \Omega.$$

La convergencia uniforme se puede establecer en términos de sucesiones de Cauchy como podemos apreciar en el siguiente resultado:

Proposición 3.6.2 — Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, para $n \in \mathbb{N}$ son dos sucesiones de funciones. Entonces

1. $\{f_n\}$ converge uniformemente en Ω si, y solamente si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n > N$ entonces $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in \Omega$ y cada entero positivo p .
2. La serie de funciones $\sum_{k=1}^n g_k(z)$ converge uniformemente en Ω si, y únicamente si, para cada

$\varepsilon > 0$ existe un entero n tal que si $n \geq N$ se tiene $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z) \right| < \varepsilon$ para cada $z \in \Omega$ y cada entero positivo p .

Demostración. Basta demostrar el primer enunciado, pues el segundo es consecuencia del primero.

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en Ω , para $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/2$, para cada $z \in \Omega$, esto implica que

$$|f_n(z) - f_{n+p}(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

para cada $z \in \Omega$.

Recíprocamente, si para cada $z \in \Omega$ existe el límite cuando n tiende a infinito de $f_n(z)$, el cual denotaremos $f(z)$, pues $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo.

Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in \Omega$ y cada $p \in \mathbb{N}$. Como $f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z)$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \text{ para cada } n, m \geq N.$$

Por lo cual $\{f_n\}$ converge uniformemente a f . ■

Proposición 3.6.3 — Criterio M de Weierstrass. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, consideremos $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones definidas en Ω , y supóngase que existe una sucesión de constantes reales $M_n \geq 0$ tales que:

1. $|u_n(z)| \leq M_n$ para cada $z \in \Omega$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente en Ω .

Demostración. Dada $\varepsilon > 0$, como $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, entonces es de Cauchy, luego existe $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq N$ y $m \geq n$, entonces $\sum_{k=n+1}^m M_k < \varepsilon/2$. Si $s_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z)$ entonces, para $m \geq n \geq N$ tenemos que

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |u_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

por tanto, la serie $s_n(z)$ es uniformemente de Cauchy, y por ende, converge a un punto $s(z)$.

Es decir, tenemos una función $s : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$|s(z) - s_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para toda $z \in \Omega$, si $n \geq N$. ■

Por ejemplo, $\sum_{k=n+1}^{\infty} z^n/n$ converge uniformemente en $\overline{B(0, r)}$ si $0 \leq r < 1$, basta tomar $M_n = r^n/n$ y aplicar el criterio M de Weierstrass.

Cabe notar que no es posible tomar $r = 1$. Si $\sum x^n/n$ convergiera uniformemente en $[0, 1]$, dada $\varepsilon > 0$ existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que, $n \geq N$ implicaría

$$\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots + \frac{x^{n+p}}{n+p} < \varepsilon$$

para cada $x \in [0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$. Como la serie armónica

$$\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \dots$$

diverge a infinito, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N+p} > 2\varepsilon.$$

Elegimos x cercano a 1 tal que $x^{N+p} > 1/2$. Por tanto

$$\frac{x^N}{N} + \dots + \frac{x^{N+p}}{N+p} > x^{N+p} \left(\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N+p} \right) > \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo cual es una contradicción.

Definición 3.6.4 Una *serie de potencias compleja alrededor del punto z_0* es una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ con $c_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Uno de los ejemplos más sencillos, y útiles lo constituye la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Como

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

y $z^n \rightarrow 0$ si $|z| < 1$ concluimos que la serie geométrica converge a $1/(1 - z)$ si $|z| < 1$, mientras que $|z^n| \geq 1$ si $|z| > 1$, por lo que, la serie diverge para $|z| > 1$.

En la próxima sección estudiaremos las propiedades que satisfacen las series de potencias, concretamente veremos que toda serie de potencias tiene asociado, al igual que este ejemplo, un disco de convergencia.

El siguiente resultado es muy importante, esencialmente nos habla de la convergencia de la series de potencias, concretamente nos dice que una serie converge en una región específica del plano complejo.

Lema 3.6.1 — Lema de Abel. Dada una sucesión $\{c_n\}$ de números complejos, existe $R \geq 0$ (R puede ser ∞) tal que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

converge si $|z| < R$, y diverge para $|z| > R$. Además, la serie converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de la bola abierta con centro en el origen y radio R , esto es, $\mathcal{K} \subset B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$.¹

Demostración. Sea

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists_{M=M(r) \in \mathbb{R}} \text{ tal que } \forall_{n \geq 0}, |c_n| r^n \leq M\}.$$

Si $|z| > R$, la sucesión $|c_n||z|^n$ no es acotada, luego entonces la serie $\sum c_n z^n$ no puede converger.

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto compacto de $B(0, R)$ y como $R > 0$, podemos elegir $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < R$ y tal que $\mathcal{K} \subset \overline{B(0, \rho)}$.

Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\rho < r < R$. Por definición de R existe $M = M(r) > 0$ tal que $|c_n| r^n \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in \mathcal{K}$, tenemos que $|z| \leq \rho < r$, de donde:

$$|c_n z^n| \leq |c_n| \rho^n \leq M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n$$

Como $\rho < r$, la serie $\sum (\frac{\rho}{r})^n$ converge. Aplicando el Criterio M de Weierstrass, se sigue que la serie $\sum c_n z^n$ converge uniformemente en $\mathcal{K}$. ■

Corolario 3.6.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto no vacío, y f una función complejo valuada definida en Ω . Si para cada $z_0 \in \Omega$, existe una vecindad U de z_0 , contenida en Ω , y una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ tal que, para cada $z \in U$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$, entonces f es continua en Ω .

¹R. Narasimhan, en (Narasimhan, 1985, Chap. 1, §1, pg. 6) adjudica este resultado a N. H. Abel (1802-1829). Además, C. Caratheodory, en (Conway, 2010, Part four III. , §215, pg. 214-216) explica el método que utiliza Abel para determinar la convergencia uniforme de una serie de potencias en su bola de convergencia de radio 1.

Definición 3.6.5 Dada una sucesión $\{c_n\}$ de números complejos, el número dado por

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists_{M=M(r) \in \mathbb{R}} \forall_{n \geq 0} |c_n| r^n \leq M\},$$

de acuerdo con el lema 3.6.1, se denomina el *radio de convergencia* de la serie $\sum c_n z^n$.

Desde luego, hay diversas formas de obtener el radio de convergencia de una serie, dos métodos prácticos para calcular R son los criterios de la razón y de la raíz, que recordamos a continuación:

Proposición 3.6.4 Considere una serie de potencias $\sum c_n z^n$.

1. Criterio de la razón: Si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$

existe, entonces es igual al radio de convergencia R de la serie.

2. Criterio de la raíz: Si $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existe, entonces $R = 1/\rho$ es el radio de convergencia de la serie. Si $\rho = 0$, entonces $R = \infty$, y $R = 0$ si $\rho = \infty$.

Recordamos que, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{|c_n|; n \in \mathbb{N}\})$.

Demostración. 1. Utilizando los criterios de convergencia para series con términos reales, tenemos que la serie $\sum |c_n| r^n$ converge, si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| r^{n+1}}{|c_n| r^n} < 1,$$

y diverge si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| r^{n+1}}{|c_n| r^n} > 1,$$

de aquí, la serie converge si:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} > r;$$

y diverge si:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} < r.$$

Ya que

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists_{M=M(r) \in \mathbb{R}} \text{ tal que } \forall_{n \geq 0}, |c_n| r^n \leq M\},$$

tenemos $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

2. Aplicando el criterio de la raíz para series reales, sabemos que la serie $\sum |c_n| r^n$ converge si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n| r^n} < 1$ (diverge si este límite es mayor que uno); o equivalentemente, converge si

$$r < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Además $\sum |c_n| r^n$ diverge si $r > \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$, aplicando lo anterior se sigue que:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

como esperábamos demostrar. ■

Ejemplo 15

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tiene radio de convergencia uno.
2. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $R = \infty$, utilizando el criterio de la razón es fácil ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = \infty.$$

3. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^n}$ tiene radio de convergencia $R = e$, si se aplica el criterio de la raíz se obtiene

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^n}} = \frac{1}{e},$$

de donde $R = \frac{1}{\rho} = e$.

4. Consideremos la sucesión de Fibonacci: $c_0 = 1$, $c_1 = 1$ y para cada $n \geq 2$ se define $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$. Definimos la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

si z está en el disco de convergencia de f .

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n \\ &= 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} z^{n+2} \\ &= 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} + c_n) z^{n+2} \\ &= 1 + z + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2} \\ &= 1 + z + z \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= 1 + z + z \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - 1 \right) + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= 1 + z + z(f(z) - 1) + z^2 f(z) \\ &= 1 + (z + z^2) f(z), \end{aligned}$$

es decir, $f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$ de donde f está definida si $1 - z - z^2 \neq 0$.

Consecuentemente, si $z \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; ya que la sucesión de Fibonacci tiene la propiedad

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \varphi$, donde $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es el número áureo.

Como consecuencia del criterio de la razón tenemos que la serie tiene radio de convergencia

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Lema 3.6.2 El radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

coincide con el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

Demostración. Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, y R' el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$, en particular:

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists_{M=M(r) \in \mathbb{R}} \text{ tal que } \forall_{n \geq 0}, |c_n| r^n \leq M\}$$

y

$$R' = \sup\{r \in \mathbb{R}; r \geq 0, \exists_{N=N(r) \in \mathbb{R}} \text{ tal que } \forall_{n \geq 0}, |(n+1)c_{n+1}| r^n \leq N\}.$$

Demostraremos primeramente que $R' \leq R$. Supongamos que $n \geq 1$, entonces

$$|c_n z^n| \leq |n c_n z^n| = |n c_n z^{n-1}| |z|.$$

De aquí, si $|z| = r \leq R'$, entonces

$$|n c_n| r^n = (|n c_n| r^{n-1}) r \leq N r \leq N R',$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

Luego entonces, si $|z| = r \leq R'$ existe $M_{R'} = N R' \in \mathbb{R}$ tal que, $|c_n| r^n \leq M$, por lo que $R' \leq R$. Si $R = 0$, en particular $R' = 0 = R$.

Supongamos ahora que $R > 0$, veremos ahora que $R \leq R'$. Como consecuencia de la densidad de los números reales podemos elegir $r, \rho \in \mathbb{R}$ tales que $0 < r < \rho < R$, entonces

$$n |c_n| r^{n-1} = \left(\frac{1}{r} |c_n| \rho^n \right) \left[n \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \right] \leq \frac{1}{r} M_\rho n \left(\frac{r}{\rho} \right)^n.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha^n = 0$ si $|\alpha| < 1$, se sigue que si $|z| = r \leq R$, existe $N_r \in \mathbb{R}$ tal que, $|n c_n| r^{n-1} \leq N_r$, por lo que, $R \leq R'$. ■

3.7 El plano extendido

Algunas veces será necesario estudiar el comportamiento de una función de variable compleja cuando el módulo de z crece arbitrariamente, por lo cual resulta conveniente agregar al plano complejo un punto ideal, llamado *el punto al infinito*, que denotaremos ∞ .

Al agregar el símbolo ∞ a los complejos, también podemos definir las operaciones de suma y producto con el punto ∞ por medio de las siguientes reglas:

1. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z + \infty = \infty + z = \infty$.
2. Si $z \neq 0$, entonces $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$.

Sin embargo, no es posible definir $\infty - \infty$, $\infty \cdot \infty$ y $0 \cdot \infty$ sin violar las leyes de la aritmética.

Como convención podemos decir que, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $\frac{z}{\infty} = 0$, y si $w \neq \infty$ $\frac{\infty}{w} = \infty$. La cual, podemos pensarla como una consecuencia de las propiedades de los límites en $\mathbb{C}$.

Los puntos en el plano junto con el punto al infinito forman el *plano complejo extendido*, esto es $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que denotaremos $\mathbb{C}_\infty$. También introduciremos una función distancia en $\mathbb{C}_\infty$ para discutir las propiedades de continuidad, y nuevas propiedades que se relacionen con el concepto de límite, y que pueda tener una función complejo valuada de variable compleja en el punto al infinito.

Es agradable introducir un modelo geométrico en los cuales todos los puntos del plano extendido tengan una representación concreta, para lo cual consideraremos la esfera $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

la cual corta al plano $x_3 = 0$ en la circunferencia con centro en el origen y radio 1, y se denomina el ecuador. Los puntos $N = (0, 0, 1)$ y $S = (0, 0, -1)$ son los polos norte y sur respectivamente. Si $N = (0, 0, 1)$, podemos identificar $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ con $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ y además estamos identificando $\mathbb{R}^2$ con el plano $\Pi = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$, y el punto N con el punto al infinito.

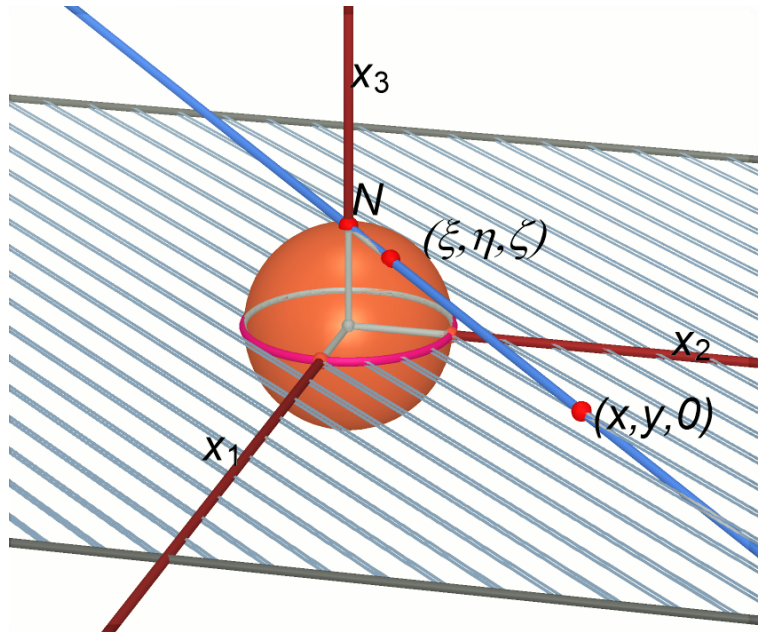


Figura 3.3: La proyección estereográfica.

Para mostrar cómo la esfera es un modelo geométrico del complejo extendido, emplearemos la proyección estereográfica, $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, dada como sigue: $\varphi(N) = \infty$. Si $P = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ consideremos la línea ℓ_P que une el punto N con el punto P . Esta recta intersecta al plano Π en un punto, el cual denotamos $\varphi(P) = (x, y, 0)$, esto es, $\varphi(P) = \ell_P \cap \Pi$. Claramente $\varphi(P) = \varphi(P')$ si, y únicamente si $P = P'$, es decir, φ es inyectiva.

Además, φ es suprayectiva, esto es, si $Q \in \Pi$, consideramos la recta ℓ_Q que pasa por los puntos N y Q , dicha recta corta exactamente en un punto $P \in \mathbb{S}^2$, en particular $\varphi(P) = Q$.

Como $\mathbb{S}^2$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto $\mathbb{S}^2$ es compacto. Además, como consecuencia del teorema de Alexandroff ((Munkres, 2000, Chap. 3, §29 Example 4, pag. 185)) tenemos compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^2$.

Para obtener las funciones coordenadas, supóngase que $P = (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}^2$ y $\varphi(P) = (x, y, 0)$, entonces

$$\ell_P : U(x, y, z) = N + t(P - N) \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego entonces

$$U(x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow (x, y, 0) = (0, 0, 1) + t(\xi, \eta, \zeta - 1) \Leftrightarrow t = \frac{1}{1 - \zeta},$$

de donde

$$\varphi(P) = \left(\frac{\xi}{1-\zeta}, \frac{\eta}{1-\zeta}, 0 \right). \quad (3.3)$$

Recíprocamente, si $Q(x, y, 0) \in \Pi$, entonces

$$\ell_Q : U(\xi, \eta, \zeta) = N + t(Q - N) \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Entonces $U(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}^2 \Leftrightarrow |U| = 1 \Leftrightarrow \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, y como $U(\xi, \eta, \zeta) \in \ell_Q$ entonces $|(\xi, \eta, \zeta)| = |(tx, ty, 1-t)| = 1 \Leftrightarrow t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ o bien $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$. Por lo que

$$\varphi^{-1}(x, y, 0) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \quad (3.4)$$

O equivalentemente, si $z = x + iy$ la relación anterior puede expresarse como

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), \quad \varphi^{-1}(\infty) = N. \quad (3.5)$$

Definición 3.7.1 La función $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \frac{\xi}{1-\zeta} + i \frac{\eta}{1-\zeta} & \text{si } (\xi, \eta, \zeta) \neq (0, 0, 1), \\ \infty & \text{si } (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

es la *proyección estereográfica*.

La función $\varphi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2$ está dada por

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ \varphi^{-1}(\infty) = N. \end{cases}$$

En la teoría de funciones de variable compleja la esfera $\mathbb{S}^2$ se denomina la *esfera de Riemann*.

Podemos notar además que, bajo la proyección estereográfica, los puntos del ecuador corresponden a la circunferencia unitaria con centro en el origen, el hemisferio sur, es decir,

$$\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}^2; \zeta < 0\}$$

corresponde a los puntos en el interior de la circunferencia, y el hemisferio norte, esto es, $\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{S}^2; \zeta > 0\}$ a los puntos en el exterior de la circunferencia.

A continuación enumeramos algunas propiedades de la proyección estereográfica.

Teorema 3.7.1 Bajo la proyección estereográfica las circunferencias en la esfera se proyectan en líneas rectas o circunferencias en el plano, y viceversa. Aún más, una línea recta en el plano corresponde a una circunferencia en la esfera que pasa por el polo norte N .

Demostración. Una circunferencia en la esfera está dada como la intersección de la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ con un plano $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$, donde $A^2 + B^2 > 4D(D - C)$. Si (ξ, η, ζ) es un punto en esta intersección, el punto $(x_1, x_2, 0)$ que le corresponderá según la proyección estereográfica φ deberá satisfacer la ecuación:

$$(C - D)(x_1^2 + x_2^2) + Ax_1 + Bx_2 = D, \quad x_3 = 0. \quad (3.6)$$

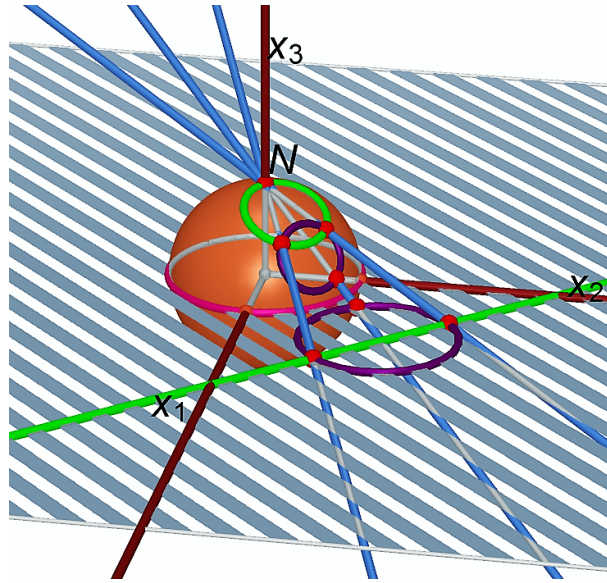


Figura 3.4: Propiedades de la proyección estereográfica.

Esta ecuación corresponde a una circunferencia en el plano $x_3 = 0$ si $C \neq D$, y a una línea recta si $C = D$.

Podemos notar que, si $C = D$ entonces, la circunferencia original pasa por el punto $N = (0, 0, 1)$.

Recíprocamente, si iniciamos con la ecuación (3.6), con $A^2 + B^2 > 4D(D - C)$, tenemos una circunferencia en el plano $x_3 = 0$ cuando $C \neq D$, y una línea recta si $C = D$.

Usando las ecuaciones (3.3) y (3.4), podemos ver que los puntos sobre la esfera que están en la imagen inversa bajo φ de la circunferencia o recta cuya ecuación está dada por (3.6) también están en el plano $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$. ■

Teorema 3.7.2 La proyección estereográfica preserva ángulos.

Es decir, si dos curvas se intersectan en el plano $\{x_3 = 0\}$, y sus tangentes en el punto de intersección forman un ángulo α , entonces las tangentes de las imágenes estereográficas de dichas curvas en la imagen del punto de intersección formarán un ángulo α . Basta demostrar el teorema en el caso de líneas rectas.

Demostración. Dos líneas rectas en el plano $\{x_3 = 0\}$ que pasan por el punto Q se transforman en dos circunferencias sobre la esfera a través de los puntos $(1, 0, 0)$ y (ξ_0, η_0, ζ_0) y estas circunferencias forman el mismo ángulo en cada una de sus dos intersecciones, como se muestra en la figura 3.5. Si las dos rectas son

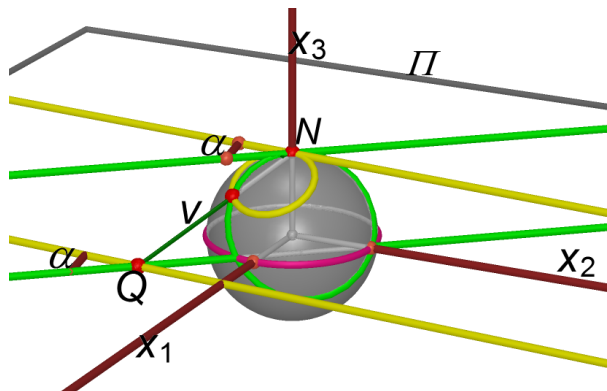


Figura 3.5: La proyección estereográfica preserva ángulos.

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 &= 0, & x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 &= 0, & x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

entonces sus imágenes bajo la proyección estereográfica están sobre los planos

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3(1-x_3) &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3(1-x_3) &= 0, \end{aligned}$$

respectivamente. Las tangentes a las circunferencias correspondientes en el polo norte son las intersecciones de estos planos con el plano $\{x_3 = 1\}$, esto es, sus ecuaciones son:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= 0, & x_3 &= 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= 0, & x_3 &= 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

respectivamente, y es claro que, trasladando por el vector $v = N - Q$, el ángulo entre estas dos líneas rectas es el mismo que el ángulo entre las dos líneas rectas dadas por

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 &= 0, & x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 &= 0, & x_3 &= 0, \end{aligned}$$

■

En la representación esférica no hay una interpretación simple de la suma y la multiplicación, sin embargo, los puntos en la esfera son indistinguibles, así el punto al infinito, visto en la esfera, no se distingue de los otros puntos.

Consideremos dos puntos en el plano extendido $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$, deseamos ahora calcular la distancia entre $\varphi^{-1}(z) = (\xi, \eta, \zeta)$ y $\varphi^{-1}(z') = (\xi', \eta', \zeta')$ como puntos en la esfera de Riemann, véase la figura 3.6.

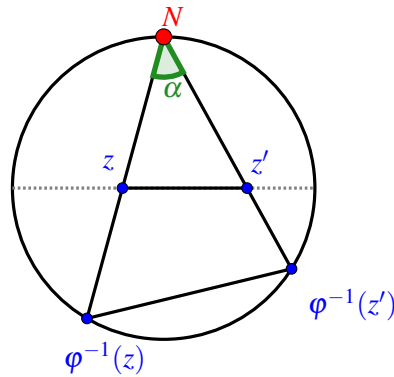


Figura 3.6: Distancia cordal

Si consideramos en $\mathbb{R}^3$ el triángulo con vértices N , $\varphi^{-1}(z)$, y $\varphi^{-1}(z')$, como consecuencia de la ley de los cosenos

$$\|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z')\|^2 = \|\varphi^{-1}(z)\|^2 + \|\varphi^{-1}(z')\|^2 - 2\cos\alpha$$

donde α es el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{N\varphi^{-1}(z)}$ y $\overrightarrow{N\varphi^{-1}(z')}$.

Como $\varphi^{-1}(z), \varphi^{-1}(z') \in \mathbb{S}^2$, en particular,

$$\|\varphi^{-1}(z)\| = \|\varphi^{-1}(z')\| = 1$$

y

$$\cos\alpha = (\xi, \eta, \zeta) \cdot (\xi', \eta', \zeta') = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta',$$

de donde

$$\begin{aligned}\|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z')\|^2 &= (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 \\ &= 2 - 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\end{aligned}$$

Como consecuencia de la ecuación (3.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= \frac{(z + \bar{z})(z' + \bar{z}') - (z - \bar{z})(z' - \bar{z}')}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \\ &= \frac{+(|z|^2 - 1)(|z'|^2 - 1)}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \\ &= \frac{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1) - 2|z - z'|^2}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(z')\|^2 &= 2 - 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \\ &= 2 - 2 \frac{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1) - 2|z - z'|^2}{(|z|^2 + 1)(|z'|^2 + 1)} \\ &= \frac{4|z - z'|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}.\end{aligned}$$

Definición 3.7.2 La *distancia cordal* en el plano extendido es la función $\chi : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\chi(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}} \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

Y

$$\chi(z_1, \infty) = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} \chi(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}.$$

Como consecuencia de la definición de distancia cordal

$$\chi(z_1, z_2) = \|\varphi^{-1}(z_1) - \varphi^{-1}(z_2)\|.$$

Como consecuencia de la definición tenemos que $\chi(z_1, z_2)$ es una función distancia, esto es, si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ entonces:

1. $\chi(z_1, z_2) \geq 0$ y la igualdad se cumple solamente para $z_1 = z_2$.
2. $\chi(z_2, z_1) = \chi(z_1, z_2)$.
3. $\chi(z_1, z_2) \leq \chi(z_1, z_3) + \chi(z_3, z_2)$.

Estas propiedades son consecuencia de la definición de χ .

Para tratar apropiadamente con estos términos, introducimos los conceptos de límite en infinito, y al infinito apropiados:

Definición 3.7.3 Sea $\{z_m\}$ una sucesión de números complejos, y sea $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función.

1. Diremos que la sucesión $\{z_n\}$ tiende a ∞ cuando, para cada $R > 0$, exista $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $N \leq n$ entonces $|z_n| > R$.
2. El límite cuando z tiende a ∞ de la función $f(z)$ existe y es igual a un número complejo z_0 , cuando, para cada $\varepsilon > 0$, exista una $R > 0$ tal que, si $|z| \geq R$ entonces $|f(z) - z_0| < \varepsilon$. Si dicho límite existe lo denotaremos $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = z_0$.
3. El límite cuando z tiende a z_0 de la función $f(z)$ existe, y es igual a ∞ , cuando, para cada

$R > 0$, exista una $\delta > 0$ tal que, si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z)| \geq R$.

Si dicho límite existe lo denotaremos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

4. El límite cuando z tiende a ∞ de la función $f(z)$ existe, y es igual a ∞ si, para cada $N > 0$, exista una $R > 0$ tal que, si $|z| \geq R$ entonces $|f(z)| > N$.

Si dicho límite existe lo denotaremos $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

Por ejemplo, si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son tales que $ad - bc \neq 0$, la función $t : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $t(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, es continua, y su imagen es $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

Podemos notar que $\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bd-ad}{c \lim_{z \rightarrow -d/c} (cz+d)} = \infty$. Por otra parte, es claro que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{w} + b}{\frac{c}{w} + d} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{a+bw}{c+dw} = \frac{a}{c},$$

por lo que t se extiende a una función $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Es fácil ver que la función T es biyectiva, y continua.

Basándonos nuevamente en la proyección estereográfica, de acuerdo con esta definición, un punto está cerca del punto ∞ cuando esté fuera de un círculo arbitrariamente grande.

Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos, entonces:

1. $z_n \rightarrow z_0$ si, y solamente si $\chi(z_n, z_0) \rightarrow 0$.
2. $z_n \rightarrow \infty$ si, y únicamente si $\chi(z_n, \infty) \rightarrow 0$.

3.8 Ejercicios

1. Encuentre todos los puntos de acumulación de cada uno de los siguientes conjuntos:
 - a) $S = \{i^n; n \in \mathbb{N}\}$.
 - b) $S = \{i^n/n; n \in \mathbb{N}\}$.
 - c) $S = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; 0 \leq \arg z \leq \pi/2\}$.
 - d) $S = \{(-1)^n(1+i)^n \frac{n-1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.
2. Demuestre que si un conjunto contiene todos sus puntos de acumulación, entonces es cerrado.
3. Demuestre que un conjunto finito de puntos en $\mathbb{C}$ no puede tener puntos de acumulación.
4. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, demuestre que $\{z_0\}$ es un conjunto cerrado.
5. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$ tienen alguna de las propiedades siguientes: abierto, cerrado, ni abierto ni cerrado.
 - a) $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| \leq 1\}$.
 - b) $\{z \in \mathbb{C}; 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 5\}$.
 - c) $\{z \in \mathbb{C}; 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\}$.
 - d) $\{z \in \mathbb{C}; -1 < \operatorname{Im} z \leq 2\}$.
6. Demuestre que $I \subset \mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, I es un intervalo.
7. Estudie la convergencia de las sucesiones
 - a) $\left\{ \frac{i^n}{n} \right\}$.
 - b) $\left\{ \frac{(1+i)^n}{n} \right\}$.

8. Demuestre, usando la definición de límite, que

a) $\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0$.

b) $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$.

c) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z + i} = 0$.

9. Demuestre que para cualquier número complejo z ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3z}{n^2} \right) = 1.$$

10. Demuestre que la sucesión $\left\{ -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $z_0 = -2$.

11. Aplicando teoremas sobre límites, calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - in + 1 - 3i}{(2n + 4i - 3)(n - i)}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + 2i} - \sqrt{n + i}$.

12. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$.

13. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{1/n}$.

14. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1+i}{2} \right)^n =$.

15. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} n i^n$ no existe.

16. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de números complejos, y suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ell$, demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = \ell.$$

17. Demuestre la proposición 3.4.3. Si $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

b) $\limsup a_n = -\infty$ si y sólo si $\lim a_n = -\infty$.

c) $\limsup a_n = \infty$ si y sólo si existe una subsucesión de $\{a_n\}$ cuyo límite es ∞ .

d) $\limsup a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N}; a_n \geq \alpha - \varepsilon\}$ es acotado y el conjunto $\{n \in \mathbb{N}; a_n > \alpha - \varepsilon\}$ es no acotado.

e) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\lim a_n = \alpha$ cuando, y solamente cuando, $\limsup a_n = \alpha \liminf a_n$.

18. Si $\limsup a_n = \alpha$ y $c > 0$ es un número real, demuestre que $\limsup ca_n = c\alpha$.

19. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones acotadas de números reales, demuestre que

a) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.

b) $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$.

20. Describa, para cada una de las siguientes funciones, el máximo conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde la función se encuentra definida:

a) $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$.

b) $f(z) = \frac{1}{z - \bar{z}}$.

c) $f(z) = \bar{z}^2 - \frac{2i}{z^2 + 1}$.

21. Usando las propiedades de límites demuestre que:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 i^n}{n^3 + 1} = 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n + 3i} - \frac{in}{n + 1} \right) = 1 - i$.

22. Demuestre que $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^2$ no existe.

23. Se dice que un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es *convexo* si para cualesquiera dos puntos $z, w \in \Omega$ se tiene que el segmento que une los puntos z y w está contenido en Ω .
- Demuestre que, si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces $B(z_0, r)$ es un conjunto convexo.
 - Demuestre que, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$ es un conjunto convexo.
 - Demuestre que la intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos es un conjunto convexo.
24. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, demuestre que:

$$\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Omega).$$

25. Suponga que $\Omega \subset \mathbb{C}$. Demuestre que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua si, y solamente si, para cada sucesión $\{z_n\}$ que converge a z_0 en Ω se tiene que la sucesión $\{f(z_n)\}$ converge a $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$.
26. Demuestre, utilizando la definición de límite, que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ implica } \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|.$$

27. Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, $z_0 \in \Omega$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua tal que $f(z_0) \neq 0$, entonces existe una vecindad de z_0 sobre la cual la función f no se anula.
28. Demuestre que las funciones $f(z) = \bar{z}$ y $g(z) = |z|$ son continuas.
29. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ converge, y encuentre el valor de la suma.
30. Demuestre que la serie $1 - 2i + 3i - 4i + \dots$ diverge.

31. Si $z = re^{i\theta}$, donde $0 < r < 1$, use la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ para demostrar las identidades trigonométricas $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r \cos \theta - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ cuando $0 < r < 1$. (Nótese que estas fórmulas son válidas también para $r = 0$.)

32. Demuestre el criterio de la serie alternada. Si $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ para $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots = \sum (-1)^{n-1} a_n$$

converge.

33. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{n\pi i/4}}{e^n - 1}$.

34. Estudie la convergencia de las series

$$a) \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$$

$$b) \frac{1}{5} - \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 8 \cdot 11} - \dots$$

$$c) \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \dots$$

35. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a A , y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a B , demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n)$ converge a $A + iB$. ¿Es verdadero el recíproco?

36. Estudie la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{5^{n/2}}$ donde $\omega = \sqrt{3} + i$.

37. Demuestre que

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \text{ diverge, de este modo demostramos que una serie cuyo término } n\text{-ésimo tiende a cero no converge necesariamente.}$$

38. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n}$ converge para $|z| < 2$ y encuentre la suma.

39. Considere la serie $z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots$
- Demuestre que la serie converge para $|z| < 1$ y encuentre la suma.
 - Demuestre que la serie converge uniformemente para $|z| \leq 1/2$.
 - ¿Converge la serie uniformemente para $|z| \leq 1$?
40. Demuestre que
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en cualquier punto de la bola unitaria con centro en el origen.
 - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en cualquier punto de la bola unitaria con centro en el origen, pero no converge en $z = 1$.
 - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge en cualquier punto de la bola unitaria con centro en el origen.
 - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ converge en cualquier punto de la bola unitaria con centro en el origen.
41. Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ donde:
- $a_n = \log n$.
 - $a_n = (\log n)^2$.
 - $a_n = n!$.
 - $a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$. *Sugerencia:* Utilice la fórmula de Stirling $\ln n! \approx n \ln n - n$, que se reescribe frecuentemente como $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.² Una cota para la fórmula es

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{e^{12n+1}} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{e^{12n}}.$$

42. Determine el conjunto de valores de z para los cuales converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1}).$$

43. Encuentre la región de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z}}{(n+1)^{3/2}}$

44. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ converge (absolutamente) para $|z| \leq 1$.

45. Encuentre la región de convergencia de las series

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

46. ¿Para qué valores de z la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$ converge?

47. Demuestre que, si $|z| < 1$ entonces:

- $\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \dots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \dots = \frac{z}{1-z}$.
- $\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \dots + \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} + \dots = \frac{z}{1-z}$.

²La fórmula de Stirling es un método que permite obtener una aproximación de $n!$ para n grande. Lleva el nombre en honor al matemático escocés del siglo XVIII James Stirling.

48. Demuestre la convergencia uniforme de la serie en la región indicada

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$, para $|z| \leq 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$, para $1 < |z| < 2$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}$, para $|z| \leq 1$.

49. Demuestre que la serie $1 + az + a^2z^2 + \dots$ converge uniformemente a $1/(1 - az)$ dentro y sobre el círculo de radio R , donde $R < 1/|a|$.

50. Estudie la convergencia absoluta y uniforme de la serie

$$\frac{z}{3} + \frac{z(3-z)}{3^2} + \frac{z(3-z)^2}{3^3} + \frac{z(3-z)^3}{3^4} + \dots$$

51. Si $z, w \in \mathbb{C}$ demuestre que $\chi(z^{-1}, w^{-1}) = \chi(z, w)$.

52. Demuestre que la distancia cordal $\chi : \mathbb{C}_{\infty} \times \mathbb{C}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las condiciones:

a) $\chi(z, w) \geq 0$ y $\chi(z, w) = 0$ si y sólo si $z = w$.

b) $\chi(z, w) = \chi(w, z)$.

c) $\chi(z_1, z_2) \leq \chi(z_1, z_3) + \chi(z_3, z_2)$.

53. Si $P, Q \in \mathbb{S}^2$ se definen las operaciones de suma y producto en $\mathbb{S}^2$ como sigue:

$$P + Q = \varphi^{-1}(\varphi(P) + \varphi(Q))$$

y

$$P \cdot Q = \varphi^{-1}(\varphi(P) \cdot \varphi(Q)).$$

En términos de las coordenadas de $P = (\xi, \eta, \zeta)$ y de $Q = (\xi', \eta', \zeta')$, escriba explícitamente las coordenadas de $P + Q$ y $P \cdot Q$.

4. Teoría de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables.

4.1 Introducción

Como vimos en el capítulo anterior, el concepto de función de variable compleja representa un caso particular del concepto matemático de función, esto es, si Ω es un subconjunto de $\mathbb{C}$, a cada punto $z \in \mathbb{C}$ se le asocia exactamente un número complejo w . Abreviando, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es la función que a cada número $z \in \Omega$ le asocia el valor $w = f(z)$.

En este capítulo aplicaremos los conceptos de límite y continuidad de funciones compleja valuadas de variable compleja, junto con la estructura de campo de $\mathbb{C}$, para definir el concepto de derivada en el sentido complejo, y estudiaremos sus propiedades elementales.

Introduciremos algunos ejemplos de funciones diferenciables en sentido complejo, y mostraremos que las funciones holomorfas son diferenciables en sentido complejo.

Antes de iniciar, recordaremos la definición de derivada parcial con respecto a una variable real:

Definición 4.1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $a \in \Omega$, $1 \leq j \leq n$. Se define la *derivada parcial* $(\partial f / \partial x_j)(a)$ de f en el punto a , como el siguiente límite, cuando este existe,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Denotaremos por $\mathcal{C}^1(\Omega)$ al conjunto de funciones $\mathbb{R}$ -valuadas definidas sobre Ω tales que $(\partial f / \partial x_j)(a)$ exista y sea una función continua para cada $a \in \Omega$ y $1 \leq j \leq n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ se define inductivamente $\mathcal{C}^k(\Omega)$ como el conjunto de funciones para las cuales las derivadas parciales de todos los órdenes menores o iguales a k existen y son funciones continuas para cada $a \in \Omega$. Finalmente $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre Ω , esto es, $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$.

De variable real recordamos que suele ser útil construir funciones continuamente diferenciables que toman el valor cero fuera de un intervalo dado, pero no dentro de él. Por otra parte es imposible que una serie de potencias pueda tener esa propiedad. Esto prueba que existe un gran salto entre funciones continuamente diferenciables y funciones analíticas de variable real; y en general las funciones continuamente diferenciables no son necesariamente iguales a sus series de Taylor.

Para dar una construcción explícita de dichas funciones, podemos comenzar con la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

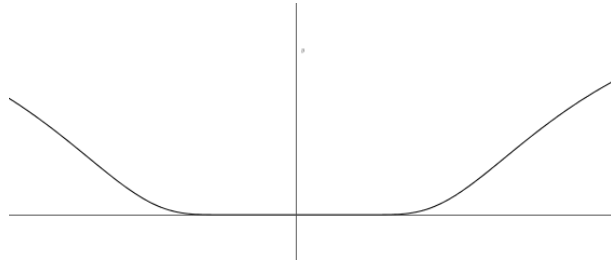


Figura 4.1: Función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, que sólo se anula en $x_0 = 0$ y cuyas derivadas en $x_0 = 0$ siempre se anulan

Esta función es continua, pues e^{-1/x^2} es continua si $x \neq 0$, y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Aún más, ésta función también satisface que, $\lim_{x \rightarrow 0} p(x)f(x) = 0$ para cualquier polinomio $p(x)$; ya que el crecimiento exponencial con exponente negativo domina a cualquier polinomio.

Se sigue que todas las derivadas de $f(x)$ en $x_0 = 0$, son iguales a cero, esto es, $f^{(n)}(0) = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Si consideramos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es claro que $f(x)$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, pero $f(x)$ no admite una serie de Taylor alrededor de $x_0 = 0$ ya que para toda $x < 0$ se tiene que $f(x) = 0$, mientras que, $f(x) > 0$ para toda $x > 0$.

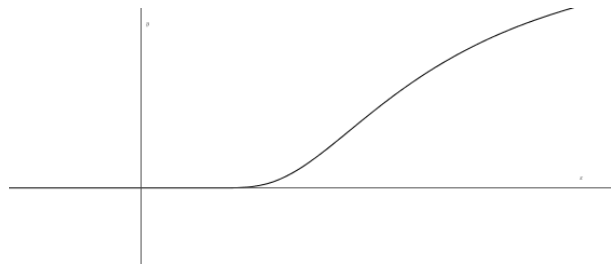


Figura 4.2: Función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que no admite serie de Taylor en $x_0 = 0$.

Si para $x_0 > 1$ consideramos ahora la función $f(x)f(x_0 - x)$ esta será cero fuera del intervalo $(0, x_0)$ y será distinta de cero en el intervalo abierto $(0, x_0)$. Este tipo de funciones tienen un comportamiento extremadamente lento cerca de 0.

Esto no sucede con las funciones que son diferenciables en sentido complejo, demostraremos que si $f(z)$ es diferenciable en sentido complejo, $f(z)$ siempre admite desarrollo en serie de Taylor-McLaurin en cada uno de sus puntos, y recíprocamente. Lo anterior muestra una de las principales diferencias que hay entre las funciones diferenciables en sentido real y complejo.

En otras palabras, demostraremos que los conceptos holomorfo y diferenciable en sentido complejo son equivalentes, aunque en el presente capítulo solamente demostraremos que toda función holomorfa es diferenciable en sentido complejo, para demostrar el recíproco requeriremos de la teoría de integración, que desarrollaremos a lo largo del capítulo 5.

4.2 Funciones $\mathbb{C}$ -lineales.

Anteriormente hemos visto que el campo $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión dos, y en la sección 2.4, proposición 2.4.2, determinamos bajo qué condiciones una transformación $\mathbb{R}$ -lineal $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ -lineal

En particular, una transformación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ -lineal si existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(z) = \lambda \cdot z$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Así, el teorema 2.4.3 nos dice que los coeficientes a_{ij} de la matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ representa la multiplicación por un número complejo si, y solamente si $a_{11} = a_{22}$ y $a_{12} = -a_{21}$.

Consecuentemente, podemos determinar condiciones necesarias y suficientes para que la matriz jacobiana de una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sea $\mathbb{C}$ -lineal.

Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con:

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

la matriz Jacobiana de f en $z_0 \in \Omega$, se define como la matriz de derivadas parciales

$$Df(x, y)|_{z_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix},$$

la cual induce, de manera natural, una transformación $\mathbb{R}$ -lineal entre $T_{z_0}\Omega \cong \mathbb{R}^2$, el plano tangente a Ω en el punto z_0 , y $T_{f(z_0)}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$, el plano tangente a $\mathbb{R}^2$ en el punto $f(z_0)$, a saber, la diferencial de f en z_0 . Dicha transformación está dada como sigue:

$$Df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$Df_{z_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

y es la mejor aproximación lineal de la función f en una vecindad del punto z_0 .

Como una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede describirse en términos de funciones coordenadas como

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

e identificando vía $\mu(x + iy) = (x, y)$, tenemos $f(z) = u(z) + iv(z)$, puede escribirse como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ basándonos en esto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.1 Siguiendo con la notación anterior, $(\partial u / \partial x)(z_0) = (\partial v / \partial y)(z_0)$ y $(\partial u / \partial y)(z_0) = -(\partial v / \partial x)(z_0)$ cuando, y solamente cuando, la aplicación diferencial

$$Df_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

dada como

$$Df_{z_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

para $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, es una transformación $\mathbb{C}$ -lineal.

Demostración. Si $\zeta = \xi + i\eta$, como consecuencia de la definición de diferencial tenemos que

$$Df_{z_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

y del teorema 2.4.3 página 10, la diferencial Df_{z_0} es $\mathbb{C}$ -lineal si, y solamente si,

$$Df_{z_0} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

es decir,

$$(\partial u / \partial x)(z_0) = (\partial v / \partial y)(z_0) \text{ y } (\partial u / \partial y)(z_0) = -(\partial v / \partial x)(z_0).$$

■

Las ecuaciones $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ y $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ se conocen como las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* y juegan un papel fundamental en la teoría de funciones de variable compleja como veremos posteriormente.

4.3 Funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables y holomorfas

A lo largo de la presente sección $\Omega \subset \mathbb{C}$ denotará un subconjunto abierto no vacío.

Definición 4.3.1 Dada una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ complejo valuada definida sobre Ω , y $z_0 \in \Omega$, diremos que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 si

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. Cuando este límite existe, lo denotaremos por $f'(z_0)$, o bien $\frac{df}{dz}(z_0)$, y este límite se denomina la derivada de f en z_0 .

Diremos que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 para cada $z_0 \in \Omega$. En este caso, la función $z_0 \mapsto f'(z_0)$, que denotaremos f' , se denomina la *derivada de f* .

Cuando f sea $\mathbb{C}$ -diferenciable en todo $\mathbb{C}$ diremos que f es una *función entera*.

Ejemplo 16

1. Las funciones constantes $\mathbb{C}$ -valuadas son $\mathbb{C}$ -diferenciables, esto es, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es fijo, y $f(z) = \lambda$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z para cada $z \in \mathbb{C}$ y $f'(z) = 0$. En otras palabras, las funciones constantes son enteras.
2. Dada $n \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = z^n$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable para toda $z \in \mathbb{C}$, pues

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{(z^n + nz^{n-1}h + \dots + h^n) - z^n}{h} \\
&= \frac{h(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h + \dots + h^{n-1})}{h} \\
&= nz^{n-1} + \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \left(\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) \\
&= nz^{n-1}.
\end{aligned}$$

Por lo que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f(z) = z^n$ es entera.

3. La función que a cada $z \in \mathbb{C}$ le asocia su conjugado **no** es $\mathbb{C}$ -diferenciable. Si $f(z) = \bar{z}$, dados $z \in \mathbb{C}$, y $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + h - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

por otra parte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+ih} - \bar{z}}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} - ih - \bar{z}}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-ih}{ih} = -1,$$

por lo cual, el límite no puede existir, es decir, $f(z) = \bar{z}$ no es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

En variable real, una función diferenciable es continua, esto también se cumple para funciones de variable compleja.

Proposición 4.3.1 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , entonces f es continua en Ω .

Demostración. La demostración es análoga a la que se realiza para funciones real valuadas de variable real, y se deja como ejercicio para el lector. ■

A continuación veremos cómo expresar el hecho de que f sea $\mathbb{C}$ -diferenciable en términos de las variables reales x, y , y de las funciones coordenadas $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ que determinan a f .

Proposición 4.3.2 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función complejo valuada definida sobre Ω , y $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 , con $z_0 \in \Omega$, entonces

1. Existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f'(z_0)$

Demostración. Dado $z_0 = \alpha + i\beta \in \Omega$, y $h \in \mathbb{R}$ con $z_0 + h \in \Omega$, por definición de $f'(z_0)$ y la unicidad del límite tenemos:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\alpha + h + i\beta) - f(\alpha + i\beta)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).
\end{aligned}$$

De manera similar tenemos para $z_0 + ih \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\alpha + i(\beta + h)) - f(\alpha, \beta)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

En particular $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f'(z_0)$. ■

Observación 4 Las condiciones de esta proposición no son suficientes para garantizar la existencia de la derivada en el sentido complejo en un punto, como muestra el siguiente ejemplo debido a Menchoff:

Consideremos la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Entonces, para $h \neq 0$ tenemos que

$$\frac{f(h)}{h} = \left(\frac{h}{|h|} \right)^4,$$

el cual toma el valor 1 cuando h es real, es decir $\text{Im } h = 0$, o bien, cuando h es imaginario puro, es decir, $\text{Re } h = 0$.

Si $u = \text{Re } f$, y $v = \text{Im } f$, entonces $u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1$, $u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0$, por lo cual existen las derivadas parciales en el origen y las ecuaciones de Cauchy se satisfacen en el origen.

Si existiera la derivada en el origen, como consecuencia de la proposición anterior

$$f'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 1 + 0i,$$

además

$$f'(0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(0) = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y}(0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(0) \right) = -i(0 + 1i) = 1.$$

Pero si el límite $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ existiera, sería independiente de la trayectoria elegida, si $z = (1 + i)x$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{(1+i)x}{|(1+i)x|} \right)^4 = \frac{(1+i)^4 x^4}{(\sqrt{2})^2 |x|^4} = -\frac{4}{4} = -1,$$

pero por la unicidad del límite, tenemos que $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(z)}{z}$ no existe.

Por lo cual, es necesario dar condiciones adicionales para garantizar la existencia de la $\mathbb{C}$ -derivada.

Nótese que una función $f(x, y)$, de las variables reales x, y puede verse formalmente como una función $g(z, \bar{z})$, de las variables z y $\bar{z}$, donde dichas variables están relacionadas como: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $y = \frac{z + \bar{z}}{2i}$, $x = \frac{z - \bar{z}}{2}$.

Derivando formalmente $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$.

Como consecuencia de la regla de la cadena en derivadas parciales podemos definir la derivada parcial de la función f con respecto a las variables z y $\bar{z}$, esto es,

Definición 4.3.2 Sea f una función complejo valuada definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y supóngase que f posee primeras derivadas parciales con respecto a las variables reales x, y en el punto z_0 ; entonces las derivadas parciales de la función f con respecto a las variables z y $\bar{z}$ se definen como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right).\end{aligned}$$

De manera similar, podemos recuperar las derivadas parciales de f con respecto a las variables x, y en términos de las variables z y $\bar{z}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) &= i \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right).\end{aligned}$$

Utilizando esta notación tenemos:

Corolario 4.3.1 Si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , $z_0 \in \Omega$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Como una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede describirse en términos de funciones coordenadas como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, e identificando vía $\mu(x + iy) = (x, y)$, tenemos $f(z) = u(z) + iv(z)$, basándonos en esto, podemos reescribir el corolario anterior en términos de las funciones coordenadas u y v como sigue:

Corolario 4.3.2 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función, $z_0 \in \Omega$, y escribimos $f = u + iv$, donde $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 , entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Definición 4.3.3 Sea f una función complejo valuada definida sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$, y escriba $f = u + iv$, donde u y v son funciones real valuadas definidas sobre Ω . Las ecuaciones:

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$.
2. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
3. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$.

son equivalentes por pares, se denominan las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Ahora estamos interesados en determinar condiciones suficientes para que una función sea $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Proposición 4.3.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función complejo valuada definida en Ω , supóngase que $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ existen y son continuas en Ω . Supóngase además que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\iota \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{sobre } \Omega.$$

Entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω .

Demostración. Sea $\zeta = \xi + \iota\eta \in \mathbb{C}$ con $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, y escribamos $f = u + \iota v$, donde u y v son funciones real valuadas definidas en Ω . Sea $z_0 = \alpha + \iota\beta \in \Omega$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$\begin{aligned} u(z_0 + \zeta) - u(z_0) &= u(\alpha + \xi, \beta + \eta) - u(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta)\xi + \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta)\eta + \varepsilon_1(\xi, \eta), \end{aligned}$$

donde $\lim_{\xi, \eta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(\xi, \eta)}{|\xi| + |\eta|} = 0$ se cumple por el teorema de Taylor, ya que las funciones $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ son continuas.

Análogamente

$$v(z_0 + \zeta) - v(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)\xi + \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta)\eta + \varepsilon_2(\xi, \eta),$$

donde $\lim_{\xi, \eta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(\xi, \eta)}{|\xi| + |\eta|} = 0$; multiplicando esta última ecuación por ι y sumándola a la ecuación anterior tenemos:

$$f(z_0 + \zeta) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\eta + \varepsilon(\zeta),$$

donde $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\zeta)}{\zeta} = 0$. Como $\partial f/\partial y = \iota(\partial f/\partial x)$, entonces

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ \zeta \neq 0}} \frac{f(z_0 + \zeta) - f(z_0)}{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\zeta)}{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

■

La hipótesis de la continuidad en las derivadas parciales resulta ser superflua, este hecho fue demostrado por Looman (1923) en *Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*, prueba que, desafortunadamente tenía un error, el cual fue corregido por Menchoff (1936) en *Les conditions de monogénéité*. Ya que la demostración de este resultado es bastante técnica, no la incluimos en este momento, sin embargo, a continuación enunciamos la versión fuerte de este resultado.

Teorema 4.3.4 — Looman-Menchoff. Sea f una función $\mathbb{C}$ -valuada, continua, definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supóngase que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en cada punto de Ω y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial f/\partial x = -\iota(\partial f/\partial y)$. Entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω .

Podemos reescribir la proposición 4.2.1, página 65 como sigue:

Proposición 4.3.5 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -valuada, continua definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y sea $z_0 \in \Omega$. Entonces f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si, y solamente si la aplicación diferencial $Df_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una transformación $\mathbb{C}$ -lineal. En este caso

$$Df_{z_0}(\zeta) = f'(z_0) \cdot \zeta \quad \text{para toda } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Esta proposición nos dice que la diferencial Df_{z_0} es la mejor aproximación lineal de la función f en una vecindad del punto z_0 , esto es:

Proposición 4.3.6 — Diferenciabilidad. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Entonces, f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ si y solamente si f puede escribirse como

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \varepsilon(z)(z - z_0),$$

donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante, $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en z_0 y $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = \varepsilon(z_0) = 0$; en cuyo caso $f'(z_0) = c$.

Demostración. Si $f'(z_0)$ existe, podemos definir $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0; \end{cases} \quad (4.1)$$

es claro que la función ε está bien definida en Ω , y como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = 0$$

se sigue que ε es continua en z_0 .

Recíprocamente, si f satisface la ecuación (4.1), para $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c + \varepsilon(z)$$

de donde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (c + \varepsilon(z)) = c$$

luego entonces $c = f'(z_0)$. ■

En variable real, una función diferenciable es continua, esto también se cumple para funciones en variable compleja. Esto es consecuencia inmediata de la caracterización equivalente de derivada que hace Constantin Carathéodory en su libro *Theory of functions of a complex variable* (Carathéodory, 1964, Part Three, §124, pg 119):

Definición 4.3.4 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función, donde Ω es un abierto conexo en $\mathbb{C}$; entonces f es diferenciable en un punto $z_0 \in \Omega$ en el sentido de Carathéodory si existe una función $\varphi_f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua en z_0 que satisface la siguiente relación:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi_f(z) \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

El número $\varphi_f(z_0)$ es la derivada de Carathéodory de f en z_0 .

Las condiciones sobre la función φ_f implican que si $f(z)$ es diferenciable en el punto z_0 , entonces f también es continua en z_0 . Además, la hipótesis de que φ_f sea continua en z_0 significa que $\varphi_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi_f(z)$ existe, y coincide con $f'(z_0)$ la derivada de f en el sentido usual.

Por definición, la función φ_f está determinada en forma única para $z \neq z_0$, de donde $f'(z_0) = \varphi_f(z_0)$.

Proposición 4.3.7 — Carathéodory. Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in \Omega$. Entonces, f tiene una $\mathbb{C}$ -derivada en z_0 si, y únicamente si, f es diferenciable en el sentido de Carathéodory en z_0 .

Demostración. Si f es diferenciable en el punto z_0 , en el sentido de Carathéodory, entonces para todo $z \neq z_0$

$$\varphi_f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

donde φ_f es continua en z_0 por lo que

$$f'(z_0) = \varphi_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Recíprocamente, si $f'(z_0)$ existe en el sentido usual, definamos $\varphi_f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\varphi_f(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Entonces claramente φ_f es continua en z_0 y si $z \neq z_0$ se tiene que

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi_f(z)$$

y para $z = z_0$ obviamente también se cumple la igualdad anterior. ■

Además, esta caracterización también es válida para funciones real valuadas de variable real, y presenta un par de aspectos didácticos destacados: nos muestra que el proceso de acercamiento de las pendientes de las secantes a la pendiente de la tangente es continuo y por tanto, la continuidad es esencial para la derivabilidad; la segunda parte se refiere a la facilidad de la derivación como un proceso de factorización repetitivo y no como cálculo de límites, así como simplicidad en la demostración de teoremas de linealidad, regla de la cadena, álgebra de derivadas (suma, producto y cociente), aplicado a funciones polinomiales.

Corolario 4.3.3 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , entonces f es continua en Ω .

Demostración. Dada $z \in \Omega$, si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z , por la proposición 4.3.7, f es diferenciable en el punto z en el sentido de Carathéodory, por lo tanto existe una función $\varphi_f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua en z que satisface la siguiente relación:

$$f(w) = f(z) + (w - z)\varphi_f(w) \quad \text{para cada } w \in \Omega.$$

Como la suma y el producto de funciones continuas es continua, tenemos que la función f es continua en z . ■

Otras propiedades que cumplen las funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables son las siguientes:

Proposición 4.3.8 — El álgebra de la derivada. Sea Ω un subconjunto abierto conexo, no vacío. Si f y g son funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en Ω y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

1. $\lambda f + g$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , y $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$.
2. $f \cdot g$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , y $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
3. Si $g(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$, entonces f/g es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector. ■

Como consecuencia de la proposición 4.3.8 tenemos que, el conjunto de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en Ω es un anillo conmutativo con unidad.

Como consecuencia inmediata de la formulación de Carathéodory, proposición 4.3.7, probaremos la regla de la cadena para la derivada de una composición de funciones.

Teorema 4.3.9 — Regla de la Cadena. Si $U, V \subset \mathbb{C}$ son abiertos, y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ son $\mathbb{C}$ -diferenciables, y $f(U) \subset V$, entonces $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ también es $\mathbb{C}$ -diferenciable en U . Además, si $z_0 \in U$ entonces $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

Demostración. Si $z_0 \in U$, como f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 , como consecuencia de la proposición 4.3.7, existe una función φ_f continua en z_0 tal que

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\varphi_f(z) \quad \text{para cada } z \in U,$$

y además $f'(z_0) = \varphi_f(z_0)$.

Análogamente, como g es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $f(z_0)$, nuevamente por la proposición 4.3.7 existe una función φ_g continua en $f(z_0)$ tal que

$$g(w) - g(f(z_0)) = (w - f(z_0))\varphi_g(w) \quad \text{para cada } w \in V$$

con $g'(f(z_0)) = \varphi_g(f(z_0))$.

Luego entonces, para $w = f(z)$ con $z \in U$ tenemos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0) &= g(f(z)) - g(f(z_0)) \\ &= (f(z) - f(z_0))\varphi_g(f(z)) \\ &= (z - z_0)\varphi_f(z)\varphi_g(f(z)) \\ &= (z - z_0)\varphi_f(z)(\varphi_g \circ f)(z) \end{aligned}$$

Por la unicidad de $\varphi_{g \circ f}$ se tiene $\varphi_{g \circ f} = (\varphi_g \circ f)\varphi_f$. Como f es continua en z_0 y φ_g es continua en $f(z_0)$ entonces $\varphi_g \circ f$ es continua en z_0 . Además φ_f es continua en z_0 y como el producto de funciones continuas es continua, entonces $(\varphi_g \circ f) \cdot \varphi_f$.

Se sigue de aquí que

$$(g \circ f)'(z_0) = (\varphi_g \circ f)\varphi_f(z_0) = \varphi_g(f(z_0))\varphi_f(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0),$$

como deseábamos demostrar. ■

Teorema 4.3.10 — Teorema de la función inversa. Si $z_0 \in \Omega$ y f es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable, tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces existe una vecindad U de z_0 y una vecindad V de $f(z_0)$ tal que, la función $f|_U : U \rightarrow V$ es biyectiva, su inversa $f|_V^{-1} : V \rightarrow U$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en V , y su derivada está dada por:

$$\frac{df|_V^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{f'_V(z)}, \quad \text{donde} \quad w = f_V(z).$$

Demostración. Como f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 , entonces

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \det Df(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Aplicando el teorema de la función inversa para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, se deduce que existen vecindades abiertas U de z_0 y V de $f(z_0)$ en $\mathbb{C}$ tales que $f|_U : U \rightarrow V$ es biyectiva; f^{-1} es $\mathbb{R}$ -diferenciable en V , y para cada $z \in U$ se tiene

$$Df^{-1}(f(z)) = \left(\frac{1}{\det Df(z)} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial x}(z) \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial x}(z) \end{pmatrix}$$

Por lo que f^{-1} satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en V , y por el teorema 4.3.4 es $\mathbb{C}$ -diferenciable. Además

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{\det Df(z)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial v}{\partial x}(z) \right) = \frac{\overline{f'(z)}}{|f'(z)|^2} = \frac{1}{f'(z)}.$$

■

Proposición 4.3.11 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto y conexo, y supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω tal que $f'(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$, entonces f es una función constante en Ω .

Demostración. Si $z, w \in \Omega$, queremos demostrar que $f(z) = f(w)$. Como Ω es conexo, podemos encontrar una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = w$. Además, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ tal que $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es diferenciable para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como consecuencia de la regla de la cadena en dichos subintervalos se tiene

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0,$$

pues $f'(s) = 0$ para toda $s \in \Omega$. Por otra parte, si $f = u + iv$, con u y v funciones real valuadas definidas en Ω , entonces

$$0 = \frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{du(\gamma(t))}{dt} + i \frac{dv(\gamma(t))}{dt},$$

para cada $t \in [t_{i-1}, t_i]$, de donde $\frac{du(\gamma(t))}{dt} = 0$ y $\frac{dv(\gamma(t))}{dt} = 0$, y como $u \circ \gamma$ son funciones real valuadas de variable real con derivadas cero, del cálculo elemental sabemos que, $u \circ \gamma$ y $v \circ \gamma$ son funciones constantes en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i] \subset [0, 1]$, además $u \circ \gamma(t_i) = u \circ \gamma(t_{i-1})$ y $v \circ \gamma(t_i) = v \circ \gamma(t_{i-1})$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tales que $u \circ \gamma = c_1$, y $v \circ \gamma = c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Luego entonces

$$f(z) = (u + iv)(\gamma(0)) = c_1 + ic_2 = (u + iv)(\gamma(1)) = f(w).$$

■

En lo que resta de esta sección, veremos que hay formas alternativas de decir cuándo una función es $\mathbb{C}$ -diferenciable; una de ellas se basa en la representación local de una función en términos de una serie de potencias convergente las cuales se denominan, funciones holomorfas, esto nos permitirá utilizar indistintamente los términos $\mathbb{C}$ -diferenciable, y holomorfo.

Definición 4.3.5 Sea f una función complejo valuada definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diremos que f es *holomorfa* en Ω si, para cada $z_0 \in \Omega$, existe una vecindad U de z_0 , $U \subset \Omega$, y una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ tal que, para cada $z \in U$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$.

Una función holomorfa también se denomina función analítica compleja, o simplemente, función f es analítica. En particular, demostraremos posteriormente que una función es $\mathbb{C}$ -diferenciable si, y solamente si, coincide con su serie de Taylor en una vecindad de cada punto de su dominio, véase la definición 5.3.1 en la página 130.

Las funciones que puede representarse localmente por medio de una serie de potencias se suelen dividir en dos importantes clases: las funciones analíticas reales y las funciones analítico complejas, también llamadas holomorfas.

Una propiedad fundamental de una función holomorfa es su unicidad: Cada función holomorfa es un “todo conectado orgánicamente”, lo que representa una función “única” en todo su dominio natural de la existencia. Esta propiedad, que en el siglo XVIII fue considerada como inseparable de la noción misma de una función, se convirtió de fundamental importancia en la primera mitad del siglo XIX, cuando se origina la teoría de las funciones holomorfas. La teoría de las funciones holomorfas se construyó como la teoría de funciones de una variable compleja. La palabra holomorfa se deriva del griego $\sigma\lambda\omicron\sigma$ (holos), que significa “todo,” y $\mu\omicron\rho\phi\eta$ (morpho), que significa “forma” o “apariencia.” La palabra holomorfa fue introducida en 1875 por Briot y Bouquet, 2ª ed, pg. 14. (Krantz, 1999, pg. 16). Muchos matemáticos prefieren el término función holomorfa sobre el de función analítica, el cual es primordialmente utilizado por los físicos e ingenieros (Knopp, 1996, pg.83-111).

Las propiedades básicas que distinguen a las funciones holomorfas de otras funciones definidas en el plano fueron descubiertas por una gran cantidad de matemáticos, entre los cuales cabe mencionar a Cauchy, Fourier, Lagrange, Liouville, Riemann y Weierstrass entre otros, aunque la mayor parte fue desarrollada y divulgada por Cauchy, quien en 1825 publica *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* el teorema de Cauchy, que estudiaremos posteriormente en el capítulo 5.

De acuerdo con Felix Klein (Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX Klein (2006)), Cauchy creó su teoría de funciones de variable compleja estudiando la convergencia de las series en el plano complejo en su Cours d'Analyse de 1821 (Serie 2, Volumen 3 de su colección de trabajos), y como veremos a lo largo de las presentes notas, una gran cantidad de propiedades de las funciones complejo valuadas de variable compleja se pueden deducir cuando las funciones se representan como una serie de potencias.

Como veremos posteriormente, las funciones analíticas reales y complejas tienen diferencias importantes. Las funciones holomorfas tienen más estructura que las funciones analíticas reales.

De acuerdo con el teorema de Liouville 5.3.9, página 138, una función holomorfa en $\mathbb{C}$ y acotada es constante, lo cual no sucede para funciones real valuadas de variable real, como sucede, por ejemplo, con la función $f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Además, una función analítica real valuada definida en un abierto contenido propiamente en $\mathbb{R}$ puede extenderse a una función holomorfa definida en un abierto de $\mathbb{C}$, por ejemplo la función analítica $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge a $f(x) = 1/(1+x^2)$ si $|x| < 1$, sin embargo, la función $f(x) = 1/(1+x^2)$, real valuada de variable real, está definida en todo $\mathbb{R}$. Si extendemos dicha función analítica a variable compleja tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, que converge a la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ para $|z| < 1$, sin embargo, la función $f(z)$ se encuentra definida en $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \subsetneq \mathbb{C}$.

A continuación veremos que toda función holomorfa es $\mathbb{C}$ -diferenciable en el interior de su círculo de convergencia. Antes de demostrar que toda función holomorfa es $\mathbb{C}$ -diferenciable, demostraremos el siguiente lema:

Lema 4.3.1 Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$|(\alpha + \beta)^n - \alpha^n| \leq n|\beta|(|\alpha| + |\beta|)^{n-1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $\alpha = 0$, la afirmación se cumple. Supongamos que $\alpha \neq 0$, y sea $t = \beta/\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
|(\alpha + \beta)^n - \alpha^n| &= |\alpha^n[(1+t)^n - 1]| = |\alpha|^n \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t^k \right| \\
&\leq |\alpha|^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |t|^k = |\alpha|^n [(1+|t|)^n - 1].
\end{aligned}$$

Para $\tau \geq 0$, tenemos

$$(1 + \tau)^n - 1 = n \int_0^\tau (1+u)^{n-1} du \leq n\tau(1 + \tau)^{n-1}.$$

De donde

$$|(\alpha + \beta)^n - \alpha^n| \leq |\alpha|^n \cdot n \cdot \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \left(1 + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \right)^{n-1} = n|\beta|(|\alpha| + |\beta|)^{n-1}.$$

■

Proposición 4.3.12 Sea $R > 0$ y suponga que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ si $|z - z_0| < R$. Entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$. Además

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Demostración. Sean $z \in B(z_0, R)$, y $\zeta \in \mathbb{C}$, tales que

$0 < |\zeta| < \frac{1}{2}(R - |z - z_0|)$. Entonces

$$\frac{1}{\zeta} (f(z + \zeta) - f(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{(z + \zeta - z_0)^n - (z - z_0)^n}{\zeta}.$$

Sea $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia del lema anterior

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} c_n \frac{(z + \zeta - z_0)^n - (z - z_0)^n}{\zeta} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} n |c_n| (|\zeta| + |z - z_0|)^{n-1} \leq \sum_{n=N}^{\infty} n |c_n| \rho^{n-1}$$

donde $\rho = \frac{1}{2}(R + |z - z_0|) < R$. Como $|z - z_0| < R$, también tenemos $|z - z_0| < \rho$, de donde

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^N |c_n| \left| \frac{(z + \zeta - z_0)^n - (z - z_0)^n}{\zeta} - n(z - z_0)^{n-1} \right| + 2 \sum_{n>N} n |c_n| \rho^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ahora, dada $\varepsilon > 0$, podemos elegir N , que depende de ε , z y R , tal que $\sum_{n>N} n |c_n| \rho^{n-1} < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Además

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{(z + \zeta - z_0)^n - (z - z_0)^n}{\zeta} = n(z - z_0)^{n-1}.$$

Entonces, podemos elegir $\delta > 0$, que depende de N, z y $\{c_n\}$, $n \leq N$, donde $\delta < \frac{1}{2}(R - |z - z_0|)$, tal que

$$\sum_{n \leq N} |c_n| \left| \frac{(z + \zeta - z_0)^n - (z - z_0)^n}{\zeta} - n(z - z_0)^{n-1} \right| < \varepsilon$$

para $0 < |\zeta| < \delta$. Así, para $0 < |\zeta| < \delta$, tenemos

$$\left| \frac{f(z + \zeta) - f(z)}{\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \right| < 2\varepsilon.$$

Además la convergencia es uniforme en z si z se restringe al disco $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$ donde $r < R$. ■

Corolario 4.3.4 Si Ω es abierto en $\mathbb{C}$, cualquier función holomorfa en Ω es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω .

Corolario 4.3.5 Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces

1. Para cada $k \geq 1$ la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k}$$

tiene radio de convergencia R .

2. La función f es infinitamente $\mathbb{C}$ -diferenciable sobre $B(z_0, R)$ y, para $k \geq 1$ y $z \in B(z_0, R)$ tenemos:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k}.$$

3. Para $n \geq 0$, el n -ésimo término de la serie de f satisface

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Corolario 4.3.6 Si Ω es abierto en $\mathbb{C}$ y f es holomorfa en Ω , entonces f es infinitamente $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω .

Ejemplo 17

1. Considere la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, como consecuencia del criterio de la razón, esta serie tiene radio de convergencia

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 1$$

y su derivada está dada como

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}.$$

Note que la serie de $f'(z)$ no converge para $z = 1$.

2. Por otra parte, si consideramos la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, como consecuencia del criterio de la razón

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

y su derivada es

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = f(z).$$

En consecuencia $f(z) = f'(z) = f''(z) = \dots$

4.4 Derivada en ∞

En esta parte, daremos la definición de $\mathbb{C}$ -derivada en ∞ , asimismo, si $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ es un punto tal que $f(z_0) = \infty$, definiremos $f'(z_0)$.

Definición 4.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ un abierto tal que $\infty \in \Omega$; diremos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en ∞ cuando la función auxiliar $F(z) = f(1/z)$ esté definida en una vecindad de $z = 0$ y sea $\mathbb{C}$ -diferenciable en $z = 0$. En este caso se define $f'(\infty) = F'(0)$.

Ejemplo 18

Si $q(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m$ es un polinomio de grado $m \geq 1$, con $b_m \neq 0$, entonces $f(z) = 1/q(z)$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z; q(z) = 0\}$, y si se define $f(\infty) = 0$, podemos considerar la función

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z^m}{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Como $b_m \neq 0$, claramente $F(z)$ está definida en una vecindad de cero, y $F(0) = 0$, y como

$$F'(z) = \frac{z^{m-1} \left(\sum_{k=1}^m kb_k z^{m-k} \right)}{\left(\sum_{k=0}^m b_k z^{m-k} \right)^2},$$

entonces $F'(0) = 0$, esto es, F' está bien definida en $z = 0$, de donde f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en ∞ .

Definición 4.4.2 Si $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es un conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función.

1. Si $f(z_0) \in \mathbb{C}$, se dice que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 cuando exista $r > 0$ tal que $f(B(z_0, r)) \subset \mathbb{C}$ y f restringida a $B(z_0, r)$ sea $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 en el sentido usual.
2. Si $f(z_0) = \infty$, se dice que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 cuando la función $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ sea $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 según la parte anterior de esta definición. En este caso

$$f'(z_0) := \left(\frac{1}{f} \right)'(z_0).$$

En la definición anterior se incluye la posibilidad de que $z_0 = \infty$. En este caso, si $f(\infty) = \infty$, que f sea $\mathbb{C}$ -diferenciable en ∞ significa que la función auxiliar $F(z) = \frac{1}{f(1/z)}$ es diferenciable en 0, y además $f'(\infty) = F'(0)$.

Obsérvese que si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, entonces f es continua en z_0 .

Ejemplo 19

Si

$$f(z) = \begin{cases} \frac{p(z)}{q(z)} & \text{si } q(z) \neq 0 \\ \infty & \text{si } q(z) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

es una función racional, con $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ sin ceros comunes, entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en cada $z \in \mathbb{C}_\infty$.

Ya sabemos que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable si $z \in \mathbb{C}$ con $q(z) \neq 0$, así bastará ver que si $f(z_0) = \infty$ entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z_0 . Si $q(z_0) = 0$, como p y q no tienen ceros comunes, entonces $p(z_0) \neq 0$, así en una vecindad de z_0 tenemos que la función $1/f(z) = q(z)/p(z)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $z = z_0$. Por otra parte, si $f(\infty) = \infty$, entonces $\deg p - \deg q \geq 1$ y, de acuerdo con lo visto anteriormente $1/f(z) = q(z)/p(z)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en ∞ .

Lema 4.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ un conjunto abierto no vacío, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. f es $\mathbb{C}$ -diferenciable para cada $z \in \Omega$.
2. Para cada $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$ y una de las dos funciones $f, 1/f$ toma valores finitos en $B(z_0, r)$ y es $\mathbb{C}$ -diferenciable en el sentido usual.

Demostración. Si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en cada $z \in \Omega$, entonces f es continua en Ω , por lo que si $f(z_0) \in \mathbb{C}$ para cada $z_0 \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$ y $f(B(z_0, r)) \subset \mathbb{C}$, luego entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en el sentido usual en $B(z_0, r)$. Por otra parte, si $f(z_0) = \infty$, entonces $1/f(z_0) = 0$, y razonando de manera similar, existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$ y $\frac{1}{f}(B(z_0, r)) \subset \mathbb{C}$. Es decir, $1/f$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en el sentido usual para cada $w \in B(z_0, r)$: la afirmación es obvia cuando $f(w) = \infty$, y es consecuencia de la $\mathbb{C}$ -diferenciabilidad de f en z cuando $f(w) \neq \infty$.

Recíprocamente, si $f(B(z_0, r)) \subset \mathbb{C}$, el resultado es trivial. Por otra parte, si $(1/f)(B(z_0, r)) \subset \mathbb{C}$ entonces $f(z) \neq 0$ para todo $z \in B(z_0, r)$ y para ver que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en cada $w \in B(z_0, r)$ basta considerar los casos $1/f(w) = 0$ y $1/f(w) \neq 0$.

En el primer caso, al ser $f(w) = \infty$ se obtiene que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en w por la definición 4.4.2, y en el segundo caso aplicando las reglas de la derivabilidad usual de un cociente. ■

4.5 Funciones elementales y sus propiedades

Las funciones polinomiales, funciones algebraicas racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, trigonométricas inversas, hiperbólicas inversas, así como las que se derivan de éstas por medio de un número finito de operaciones algebraicas de adición, multiplicación y extracción de raíces se llaman *funciones elementales*.

Como consecuencia del ejemplo 16, página 66, y la proposición 4.3.8 tenemos que los polinomios son funciones enteras y las funciones algebraicas racionales, esto es, aquellas que están dadas como cociente de dos polinomios son funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en su dominio.

El objetivo principal de la presente sección es extender las otras funciones elementales de variable real a variable compleja y mostrar que éstas son $\mathbb{C}$ -diferenciables eligiendo apropiadamente sus dominios.

4.5.1 La fórmula de Euler

Leonhard Euler en 1740 descubrió la fórmula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Para explicar la fórmula de Euler debemos responder a la pregunta ¿Qué significa $e^{i\theta}$?

Si x es un número real, sabemos que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ satisface las propiedades

$$\frac{df}{dx} = f(x), \quad \text{y} \quad f(0) = 1.$$

De manera similar, si k es una constante real, como consecuencia de la regla de la cadena la función $F(x) = e^{kx}$ satisface la propiedad

$$\frac{dF}{dx} = kF(x), \quad \text{y} \quad F(0) = 1.$$

Puede extenderse la acción de la función exponencial e^x de valores reales, a valores imaginarios, pidiendo que esta propiedad se cumpla para $k = i$, esto es

$$\frac{de^u}{dt} = ie^u.$$

Para que esta ecuación tenga sentido, imaginemos a una partícula moviéndose a lo largo de una curva en $\mathbb{C}$. Este movimiento puede describirse paramétricamente diciendo que en el tiempo t la partícula ocupa la posición $\gamma(t)$. La velocidad $v(t)$ es el vector cuya longitud y dirección están determinados por la velocidad instantánea, y la dirección instantánea del movimiento, tangente a la trayectoria, del movimiento de la partícula.

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = v(t).$$

Así, dada una función compleja $\gamma(t)$ de la variable real t , podemos visualizar γ como la posición de una partícula en movimiento, con velocidad $\dot{\gamma}(t)$.

Si $\gamma(t) = e^{it}$, como multiplicar por i equivale a girar por un ángulo recto en levógiro y además

$$\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}$$

tenemos que la velocidad es igual a la posición girada por un ángulo recto. Como la posición inicial de la partícula es $\gamma(0) = e^0 = 1$, la velocidad inicial es i , de donde la partícula se mueve en dirección vertical hacia arriba. Un instante después la partícula se mueve ligeramente en esta dirección, y la nueva velocidad formará un ángulo recto con respecto al nuevo vector de posición. Continuando con este proceso, podemos ver que la partícula se mueve alrededor del círculo unitario.

Sabemos que $\gamma(t) = e^{it}$ tiene módulo uno a lo largo del movimiento, es decir, $|\gamma(t)| = 1$. Se sigue que la velocidad de la partícula $|\dot{\gamma}(t)| = |i| = 1$. Así, después de un tiempo $t = \theta$ la partícula viajará una distancia θ alrededor del círculo unitario, y así el ángulo de $\gamma(t) = e^{i\theta}$ será θ . Este es el significado geométrico de la fórmula de Euler. Véase la figura 4.3.

4.5.2 La función exponencial.

Podemos definir la función exponencial como la solución de la ecuación diferencial $f'(z) = f(z)$ con condición inicial $f(0) = 1$. Si suponemos que hay una función holomorfa que, en una vecindad del origen satisfaga esta propiedad, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots \\ f'(z) &= c_1 + 2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

si queremos que $f = f'$, como dos series de potencias alrededor del cero coinciden si son iguales término a término, debemos tener $c_{n-1} = nc_n$ para toda $n \geq 1$, ahora bien, la condición inicial $f(0) = 1$ nos dice $c_0 = 1$, de donde $c_1 = 1$, así $2c_2 = 1$, es decir, $c_2 = \frac{1}{2}$ y, procediendo inductivamente podemos ver que, $c_n = \frac{1}{n!}$.

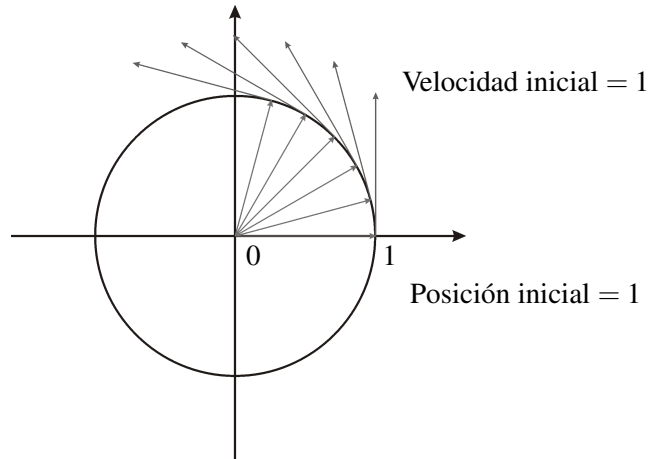


Figura 4.3: Representación geométrica de la fórmula de Euler

Definición 4.5.1 La única solución a la ecuación diferencial

$$f'(z) = f(z) \quad \text{con condición inicial} \quad f(0) = 1$$

se denomina *la función exponencial* y se denota e^z o bien $\exp z$; ésta determina una función holomorfa en $\mathbb{C}$.

Por supuesto, como consecuencia del criterio de la razón, la serie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

tiene radio de convergencia infinito, es decir, la serie converge en todo el plano, y como vimos anteriormente, toda función holomorfa es $\mathbb{C}$ -diferenciable, de donde, f es una función *entera*.

Nuevamente, como consecuencia de la ecuación diferencial $f'(z) = f(z)$, tenemos que la función exponencial satisface el teorema de la adición, esto es:

Teorema 4.5.1 — El teorema de la adición. Si $a, b \in \mathbb{C}$ entonces:

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{4.2}$$

Demostración. Sabemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(e^z \cdot e^{c-z}) &= \frac{d}{dz}(e^z) \cdot e^{c-z} + e^z \frac{d}{dz}(e^{c-z}) \\ &= e^z \cdot e^{c-z} + e^z \cdot (-e^{c-z}) \\ &= e^z \cdot (e^{c-z} - e^{c-z}) = 0, \end{aligned}$$

como e^z está definida y es holomorfa en $\mathbb{C}$, el cual es conexo, también la función $e^z \cdot e^{c-z}$, es holomorfa en $\mathbb{C}$ y su derivada es idénticamente nula en $\mathbb{C}$.

De la proposición 4.3.11 se sigue que $e^z \cdot e^{c-z}$ es constante. Para encontrar el valor de dicha constante bastará evaluar esta función en $z = 0$, por lo que $e^z \cdot e^{c-z} = e^0 \cdot e^{c-0} = e^c$, tomando $z = a$ y $c = a + b$ tenemos

$$e^a e^b = e^a e^{(a+b)-a} = e^{a+b}.$$

■

Como consecuencia del teorema de la adición tenemos diversas propiedades, las cuales enunciaremos a continuación:

Corolario 4.5.1 La función exponencial es nunca nula.

Demostración. Como $e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$, entonces e^z es nunca nula. ■

Para $x \in \mathbb{R}$ el desarrollo en serie de la exponencial muestra que $e^x \geq 1$ si $x \geq 0$, y así, e^x y e^{-x} son recíprocos, y $0 < e^x < 1$ cuando $x < 0$.

Proposición 4.5.2 Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Demostración. Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, el teorema de la adición nos dice que $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Ahora

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y, \end{aligned}$$

de donde $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. ■

Corolario 4.5.2 Si $z = x + iy$, entonces $|e^z| = e^x$.

Demostración. Si $z = x + iy$, entonces

$$|e^z| = |e^x e^{iy}| = |e^x| |e^{iy}| = e^x.$$

■

Antes de continuar analizando esta función, recordamos que:

Definición 4.5.2 Una función $f(z)$ tiene *período* c si, $f(z+c) = f(z)$ para toda z . En este caso decimos que f es una *función periódica* de período c .

El hecho que la serie tenga coeficientes reales implica que $\exp \bar{z}$ es el complejo conjugado de $\exp z$, esto es, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$. Así

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = 1.$$

De lo anterior podemos concluir que $e^z = 1$ si, y solamente si $z = 2\pi in$ para algún entero n .

Luego entonces, si $e^{z+c} = e^z$, entonces $e^c = 1$, así $c = 2\pi in$ con $n \in \mathbb{N}$. Y podemos concluir que

Corolario 4.5.3 La función exponencial es periódica de período $2\pi i$.

Desde un punto de vista algebraico, la aplicación $f(y) = e^{iy}$ establece un homomorfismo entre el grupo aditivo de los números reales y el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo uno. El núcleo de este homomorfismo es el subgrupo formado por todos los múltiplos enteros de 2π .

La geometría de la función exponencial es simple, por ejemplo, la recta horizontal $\text{Im } z = b$ se transforma en la semirrecta que parte del origen con argumento b . Por otra parte, la recta vertical con $\text{Re } z = a$ se transforma en la circunferencia de radio e^a recorrida una infinidad de veces, como podemos apreciar en la figura 4.4.

En particular, si consideramos la región rectangular

$$R = \{z \in \mathbb{C}; a \leq x \leq c, b \leq y \leq d\},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $a < c$ y $b < d$, de acuerdo con lo visto en el párrafo anterior, la imagen de R bajo la función exponencial corresponde a la fracción de anillo circular

$$\Re = \{w \in \mathbb{C}; e^a \leq |w| \leq e^c, b \leq \arg w \leq d\},$$

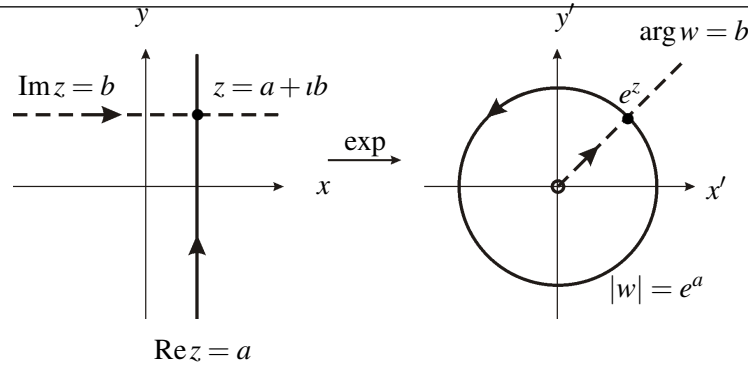


Figura 4.4: Geometría de la función exponencial

como se muestra en la figura 4.5. Si $w = e^z$ se representa en coordenadas polares como $w = \rho e^{i\theta}$, el segmento vertical AD se aplica sobre el arco $\rho = e^a, b \leq \theta \leq d$, y de manera similar, el segmento vertical BC se aplica sobre el arco $\rho = e^c, b \leq \theta \leq d$. El segmento horizontal AB se transforma en el segmento de recta que une los puntos e^A y e^B , mientras que la imagen del segmento horizontal DC corresponde al segmento de recta que une los puntos e^D y e^C .

En particular, si $b = 0$ y $d = \pi$, la región rectangular se transforma en la mitad de un anillo circular.

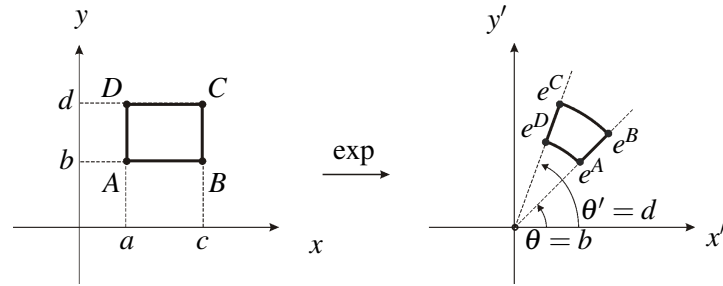


Figura 4.5: Imagen de un rectángulo bajo la función exponencial

Proposición 4.5.3 Sea $y_0 \in \mathbb{R}$, la función exponencial restringida al conjunto

$$A_{y_0} = \{z \in \mathbb{C}; y_0 \leq \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$$

es biyectiva sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Demostración. Si $z_1, z_2 \in A_{y_0}$ son tales que $e^{z_1} = e^{z_2}$, entonces $e^{z_1 - z_2} = 1$, por lo que $z_1 - z_2 = 2\pi in$ con $n \in \mathbb{Z}$, y como $z_1, z_2 \in A_{y_0}$, entonces $z_1 - z_2 = 0$, por lo que la función exponencial restringida a A_{y_0} es inyectiva.

Como mencionamos anteriormente, la función exponencial nunca es nula, por lo que, la imagen de la función exponencial está contenida en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Para mostrar la suprayectividad, si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, debemos encontrar $z = x + iy$ tal que $e^z = w$, para lo cual expresamos w en forma polar, es decir, $w = re^{i\theta}$ con $y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$. Luego entonces, como consecuencia del teorema de adición 4.5.1, tenemos

$$re^{i\theta} = w = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

es decir,

$$r = e^x \quad y \quad y = \theta + 2\pi n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como $w \neq 0$ entonces $|w| = r \neq 0$ por lo que la ecuación $r = e^x$ puede resolverse en los reales, en forma única, $x = \ln r$, de donde

$$z = \ln r + i(\theta + 2\pi n) \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$e^z = e^{\ln r + i(\theta + 2\pi n)} = e^{\ln r} e^{i\theta} = r e^{i\theta} = w.$$

es decir, $z = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ son las soluciones de la ecuación $e^z = w$, en particular, z está en A_{y_0} para un único $n \in \mathbb{Z}$. ■

4.5.3 La función logaritmo

Como vimos en el corolario 4.5.3 de la sección anterior, la función exponencial no es inyectiva, pues es periódica de período $2\pi i$, sin embargo, como $\frac{d \exp z}{dz} \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, el teorema de la función inversa nos dice que la función $\exp z$, al menos localmente, tiene función inversa. Cuando dicha inversa exista la llamaremos una *rama de logaritmo*.

Como $e^z \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces $e^z = 0$ no tiene solución, esto es, **el número cero no tiene logaritmo**.

Como vimos en la proposición 4.5.3, para $w \neq 0$, la ecuación $e^{x+iy} = w$ es equivalente a pedir

$$x + iy = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi n) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Así, obtenemos una relación multivaluada ¹

$$\log w = \ln|w| + i(\arg w + 2\pi n) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo 20

1. Si $z = 1 - i\sqrt{3}$, entonces $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ y además $\arg z = \theta = -\pi/3$, por lo que $e^w = 1 - i\sqrt{3}$ cuando

$$w = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Si $z = i$, entonces $|z| = 1$ y $\arg z = \theta = \frac{\pi}{2}$. Por tanto $e^w = i$ si

$$w = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right) = i\frac{(4n+1)\pi}{2} \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

3. Si $z = -1$ entonces $|z| = 1$ y $\arg z = \theta = \pi$. Por lo que $e^w = -1$ si

$$w = \ln 1 + i(\pi + 2\pi n) = i\pi(1 + 2n) \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Así, para que $\log$ sea una función, es necesario restringir el contradominio, por el momento este conjunto será de la forma:

$$A_{y_0} = \{z \in \mathbb{C}; y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$$

Nótese que, si $z = re^{i\theta}$ la función

$$\log z = \ln r + i\theta \quad r > 0, y_0 < \theta < y_0 + 2\pi$$

con componentes

$$u(r, \theta) = \ln r \quad \text{y} \quad v(r, \theta) = \theta$$

es univaluada y continua en este dominio.

Si se extendiera la definición de esta función sobre la semirrecta $\theta = y_0$, la función no sería continua, y por ende, tampoco $\mathbb{C}$ -diferenciable. Si z está en esta semirrecta $\theta = y_0$, hay puntos arbitrariamente próximos a z en los que los valores de v son cercanos tanto a y_0 como a $y_0 + 2\pi$.

¹ Se suele decir que el *logaritmo* es una función multivaluada, pues para cada valor $w \neq 0$ hay una infinidad de valores de z tales que $e^z = w$.

Por ejemplo, si $z_0 = -1$ y

$$A_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C}; -\pi \leq \operatorname{Im} z < \pi\}$$

y tomamos la sucesión de puntos $z_n = \left(-1 + \frac{i}{n}\right)$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(z_n) = i\pi$. Sin embargo, si consideramos la sucesión de puntos $w_n = \left(-1 - \frac{i}{n}\right)$, también $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = -1$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(w_n) = -i\pi$.

Definición 4.5.3 Si y_0 es un número real arbitrario, la función con dominio

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; \arg z = y_0\},$$

contradominio $A_{y_0} = \{z \in \mathbb{C}; y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$ y regla de correspondencia

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \quad \arg z \in (y_0, y_0 + 2\pi)$$

se denomina una *rama del logaritmo*.

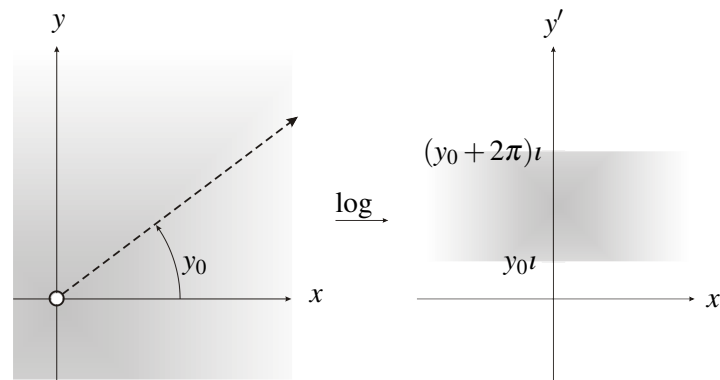


Figura 4.6: Dominio e imagen de una rama del logaritmo

Así podríamos definir

Definición 4.5.4 La rama de la “función logaritmo” que tiene dominio

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; \arg z = \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\},$$

el plano menos el semieje real negativo, contradominio $A_{-\pi} = \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ y regla de correspondencia:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{donde} \quad \arg z \in (-\pi, \pi)$$

se llama *la rama principal de la función logaritmo*.

Observación 5 Por convención, el logaritmo $\log z$ de un número real positivo z siempre se toma como el logaritmo natural real de z , esto es, si $z > 0$ entonces $\log z = \ln z$, a menos que se especifique lo contrario.

La geometría de la función logaritmo puede obtenerse de la geometría de la función exponencial, esto puede deducirse fácilmente si expresamos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en forma polar, esto es, si $z = re^{i\theta}$, podemos ver que circunferencias concéntricas al origen se transforman en segmentos de recta verticales, mientras que las semirrectas que parten del origen se transforman en rectas horizontales.

Proposición 4.5.4 Una función logaritmo es la inversa de la exponencial en el siguiente sentido: si $\log z$ representa una rama de logaritmo, entonces

$$\exp(\log z) = z.$$

Además, si para $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo se elige la rama $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$, entonces

$$\log(\exp z) = z.$$

Demostración. Como $\log z = \ln|z| + i \arg z$, entonces

$$\exp(\log z) = \exp(\ln|z|) \cdot \exp(i \arg z) = |z| \frac{z}{|z|} = z.$$

Recíprocamente, si $z = x + iy$, con $y_0 < y < y_0 + 2\pi$, como $\arg(e^z) = \arg(e^{iy}) = y$, se tiene

$$\log(\exp z) = \ln|\exp z| + i \arg(\exp z) = \ln(e^x) + iy = x + iy = z.$$

■

Las ramas de logaritmo se pueden definir en conjuntos más generales que A_{y_0} esto es:

Definición 4.5.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo y tal que $0 \notin \Omega$, y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $z = \exp(f(z))$ para toda $z \in \Omega$. La función f se denomina una *rama del logaritmo*.

Si f es una rama de logaritmo definida sobre un conjunto abierto, conexo $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y $n \in \mathbb{Z}$, basados en lo discutido en los párrafos anteriores, entonces la función $g(z) = f(z) + 2\pi in$ es otra rama de logaritmo.

Recíprocamente, si f y g son dos ramas del logaritmo, entonces para cada $z \in \Omega$, se tiene que $f(z) = g(z) + 2\pi in$ para algún entero n donde, en principio, el entero n depende de la elección del punto z . Sin embargo, podemos ver que el entero n es independiente de $z \in \Omega$, para esto, consideremos la función $h(z) = \frac{f(z) - g(z)}{2\pi i}$. Como f y g son continuas en Ω , la función h resulta continua en Ω , y su imagen $h(\Omega)$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$. Como Ω es conexo, y la imagen bajo una función continua de un conjunto conexo es conexo, entonces $h(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ es conexo, por lo que $h(z)$ es constante, es decir, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $h(z) = n$ para toda $z \in \Omega$, de donde $f(z) = g(z) + 2\pi in$.

Definición 4.5.6 Un *corte* es una porción de recta o curva elegida con el fin de definir una función, o rama, f de una relación multivaluada F . Los puntos de corte para f son puntos singulares de f y cualquier punto que es común a todos los cortes de F se llama un *punto de ramificación*.

Ejemplo 21

1. La semirrecta $\{re^{i\pi}; r \geq 0\}$ constituye el corte para la rama principal de la función logaritmo, el origen es el punto de ramificación.
2. La semirrecta $\{re^{iy_0}; r \geq 0\}$ constituye el corte para la rama A_{y_0} de la función logaritmo definida en 4.5.3.

El teorema de la adición para la función exponencial implica:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

y

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad \text{mód } 2\pi.$$

Como $\frac{de^z}{dz} = e^z \neq 0$, el teorema de la función inversa implica que localmente, e^z tiene inversa, y como la función inversa es única, esta debe ser una rama de la función logaritmo. Además, la derivada de la función inversa f^{-1} de la función exponencial $f(z) = e^z$, en el punto $w = e^z$ es igual a

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}, \quad \text{de donde,} \quad \frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z},$$

y obtenemos así el siguiente resultado:

Corolario 4.5.4 Cualquier rama de la función logaritmo es $\mathbb{C}$ -diferenciable, y su derivada es z^{-1} .

4.5.4 Exponentes complejos

Cuando $z \neq 0$ y b es cualquier número complejo, podemos definir la relación z^b por medio de la ecuación

$$z^b = \exp(b \log z)$$

donde $\log z$ denota la relación logaritmo multivaluada. Por tal razón es necesario precisar cuál rama de $\log z$ se elige para obtener una función bien definida.

Definición 4.5.7 Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si f es una rama del logaritmo definida en Ω , y $b \in \mathbb{C}$ es fijo, podemos definir una función

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{como} \quad g(z) = \exp(b f(z)) = z^b.$$

Si escribimos simplemente $g(z) = z^b$ como función, deberemos entender $z^b = \exp(b \log z)$ donde $\log z$ es la rama principal del logaritmo, en particular, como $g(z)$ es composición de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables, entonces $g(z) = z^b$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable, y aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$g'(z) = \frac{d \exp(b \log z)}{dz} = \frac{b}{z} \exp(b \log z),$$

y recordando que $z = \exp(\log z)$ tenemos que

$$g'(z) = b \frac{\exp(b \log z)}{z} = b \frac{z^b}{z} = b z^{b-1}.$$

De manera general tenemos la siguiente definición:

Definición 4.5.8 Si $a, b \in \mathbb{C}$, y $a \neq 0$, y f es una rama del logaritmo, se define a^b como:

$$a^b = \exp(b f(a)).$$

Ejemplo 22

1. Por ejemplo, si deseamos calcular i^i en la rama principal de logaritmo tenemos que

$$i^i = \exp(i \log(i)) = \exp\left(i \left(\ln|i| + i \frac{\pi}{2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

lo cual es aproximadamente $i^i \approx 0.2078795763$.

2. Si ahora deseamos calcular $(1+i)^i$ en la rama principal de logaritmo

$$\begin{aligned} (1+i)^i &= \exp(i \log(1+i)) = \exp\left(i \left(\ln|1+i| + i \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \exp\left(i \left(\ln(\sqrt{2}) + i \frac{\pi}{4}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \exp\left(i \ln(\sqrt{2})\right) \\ &\approx 0.4288290063 + 0.1548717525i \end{aligned}$$

3. Finalmente, calculemos i^{1+i} en la rama principal de logaritmo

$$\begin{aligned} i^{1+i} &= \exp((1+i) \log(i)) = \exp\left((1+i) \left(\ln|i| + i \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} i \\ &\approx 0.2078795764i \end{aligned}$$

Observación 6 Si a es un número real positivo, y $f(z) = \log z$ es la rama principal de logaritmo, entonces $\log a$ también es un número real, y a^b es una función bien definida, pues $\log a = \ln a \in \mathbb{R}$ está definido en forma única.

Proposición 4.5.5 Si b es un número racional, con forma reducida p/q , y $a \neq 0$, entonces a^b admite exactamente q valores distintos, y pueden representarse como $\sqrt[q]{a^p}$, las raíces q -ésimas de a^p .

Demostración. Se tiene que

$$\exp\left(\frac{p}{q}(2\pi in)\right) = \exp\left(\frac{p}{q}(2\pi im)\right)$$

para $m, n \in \mathbb{Z}$ cuando, y solamente cuando,

$$\frac{p}{q}(n-m) \in \mathbb{Z}$$

y como m.c.d. $(p, q) = 1$, lo anterior se satisface cuando, y sólo cuando, n es congruente con m módulo q , por lo que $z^{p/q}$ toma exactamente q valores. Además

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\log z\right)\right)^q = \exp(p\log z) = z^p.$$

■

Finalmente, cuando el exponente no es un número racional, la situación es mucho más interesante.

Proposición 4.5.6 Si $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y $b \notin \mathbb{Q}$ son números fijos, entonces a^b toma un número infinito de valores.

Demostración. La demostración se sigue de lo siguiente. Si $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $e^{b2\pi in} = e^{b2\pi im}$ si, y solamente si $e^{b2\pi i(n-m)} = 1$, de donde $b(n-m) \in \mathbb{Z}$ cuando, y solamente cuando $n = m$.

Por otra parte, si $b = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $e^{b2\pi in} = e^{-2\pi ny}e^{2\pi ix}$. Por lo que, si $e^{b2\pi in} = e^{b2\pi im}$, al tomar normas obtenemos $e^{-2\pi ny} = e^{-2\pi my}$ y $m = n$ ■

Basados en este concepto tenemos:

Definición 4.5.9 Para $n \in \mathbb{N}$ la función raíz n -ésima, que denotaremos $\sqrt[n]{z}$, o bien, $z^{1/n}$, se define como

$$\sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{\log z}{n}\right),$$

donde $\log z$ denota la rama principal de logaritmo, a menos que se especifique lo contrario.

Como una aplicación de lo visto anteriormente, analizaremos ahora la función $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ usando la rama principal de logaritmo Ω definida en 4.5.4.

Recordamos que la función $\sqrt{z} = \exp\left(\frac{1}{2}\log z\right)$ es discontinua en el semieje real negativo.

El número $z^2 + 1$ cruza el semieje real negativo, en sentido contrario a las manecillas del reloj, cuando z cruza el semieje $(i, i\infty)$ o bien, el semieje $(-i\infty, -i)$. Así, estos ejes son discontinuidades de $\sqrt{z^2 + 1}$.

De acuerdo con la definición 4.5.8, la función exponencial con base a , donde $a \in \mathbb{C}$ es cualquier constante arbitraria se expresa como

$$a^z = \exp(z \log a),$$

la cual es, en general, una relación multivaluada. Cuando se especifica un valor para $\log a$, la función a^z es una función entera, lo cual es consecuencia de la regla de la cadena, pues esta función es composición de funciones enteras. A saber,

$$\frac{d a^z}{dz} = \frac{d \exp(z \log a)}{dz} = \log a \exp(z \log a) = a^z \log a.$$

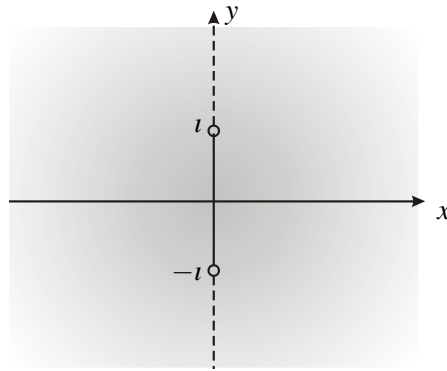


Figura 4.7: Representación del dominio de la función $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$

4.5.5 Las funciones trigonométricas

Definición 4.5.10 Se definen las *funciones trigonométricas* como:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

que se denominan respectivamente, las funciones coseno y seno.

Estas funciones son claramente holomorfas con radio de convergencia infinito, y así, son funciones enteras. Es inmediato de la definición que

$$\cos z = \cos(-z) \quad \text{y} \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Sustituyendo la expresión en serie de potencias de e^{iz} obtenemos

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Para $z = x \in \mathbb{R}$ estas expresiones se reducen al desarrollo de Taylor de la series $\cos x$ y $\sin x$, y tienen propiedades similares a las funciones trigonométricas de variable real, pero también tendremos diferencias significativas, tales como el hecho de que estas funciones no son acotadas.

Como consecuencia de las definiciones de las funciones $\cos z$ y $\sin z$ tenemos la fórmula de Euler.

Proposición 4.5.7 Para cada $z \in \mathbb{C}$, las funciones trigonométricas satisfacen las siguientes relaciones:

1. La fórmula de Euler: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$,
2. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,
3. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,
4. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

Demostración. Por definición, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ y $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ para demostrar la fórmula de

Euler basta substituir estas expresiones en el lado derecho de la relación 1 :

$$\begin{aligned}\cos z + i \sin z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz}) + (e^{iz} - e^{-iz})}{2} \\ &= \frac{2e^{iz}}{2} = e^{iz}.\end{aligned}$$

Para nuestro segundo enunciado, notamos que

$$\cos^2 z = \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}$$

mientras que

$$\sin^2 z = -\frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}$$

de donde

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

Nuestro tercer enunciado es consecuencia de la fórmula de la adición.

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z-w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &\quad + \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z-w)} - e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) \\ &\quad + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right) \\ &= \sin z \cos w + \cos z \sin w.\end{aligned}$$

El cuarto enunciado es análogo al tercero

$$\begin{aligned}\cos(z+w) &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z-w)} + e^{i(z-w)} + e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &\quad + \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z-w)} - e^{i(z-w)} + e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \left(\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\right) \\ &= \cos z \cos w - \sin z \sin w.\end{aligned}$$

■

También es fácil verificar que

Proposición 4.5.8 Las funciones trigonométricas coseno y seno son enteras, y sus derivadas están dadas como

$$\cos' z = -\operatorname{sen} z, \quad \operatorname{sen}' z = \cos z.$$

Demostración. Como estas funciones trigonométricas son suma de funciones enteras, por ende, son enteras, además como consecuencia de la proposición 4.3.8 y de la definición de la función exponencial tenemos que

$$\begin{aligned} \cos' z &= \frac{1}{2} \frac{d(e^{iz} + e^{-iz})}{dz} = \frac{1}{2} (ie^{iz} - ie^{-iz}) \\ &= \frac{i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) = - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \\ &= -\operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

La otra propiedad es análoga

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}' z &= \frac{1}{2i} \frac{d(e^{iz} - e^{-iz})}{dz} = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) \\ &= \frac{i}{2i} (e^{iz} + e^{-iz}) = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \\ &= \cos z. \end{aligned}$$

■

Además, como la función exponencial es periódica de período $2\pi i$, tenemos que las funciones trigonométricas seno y coseno son periódicas de período 2π . Además

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - z \right) = \cos z.$$

Es interesante notar que las funciones seno y coseno complejas se relacionan con las funciones trigonométricas hiperbólicas reales, esto es, si $x \in \mathbb{R}$ entonces ²

$$\cosh x = \cos(ix) \quad \text{y} \quad i \sinh x = \operatorname{sen}(ix).$$

Ya que

$$\cos(ix) = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x,$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(ix) &= \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} \\ &= i \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = i \sinh x. \end{aligned}$$

Si definimos la función tangente como

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

²Recordamos que las funciones hiperbólicas reales se definen respectivamente como $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

tenemos que esta función es $\mathbb{C}$ -diferenciable si $\operatorname{sen} z \neq 0$, es decir, cuando $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nótese que

$$\lim_{z \rightarrow \frac{(2k+1)\pi}{2}} |\tan z| = \infty.$$

Para la función tangente, las fórmulas de adición nos dicen que

$$\tan(z+w) = \frac{\tan z + \tan w}{1 - \tan z \tan w}$$

en particular

$$\tan(x+iy) = \frac{\tan x(1 - \tanh^2 y)}{1 + \tan^2 x \tanh^2 y} + i \frac{(1 + \tan^2 x) \tanh y}{1 + \tan^2 x \tanh^2 y}.$$

Esta última fórmula muestra que $\tan z \in \mathbb{R}$ si y sólo si, $z \in \mathbb{R}$. Mientras que $\tan z$ tiene parte real cero si x es múltiplo de $\pi/2$. Los únicos ceros de la función tangente son de la forma $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, y $\tan z$ es una función periódica de período π .

Se deja como ejercicio mostrar que para cada $k \in \mathbb{Z}$ la imagen de la banda

$$\left\{ x+iy \in \mathbb{C}; \frac{(2k-1)\pi}{2} < x \leq \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}$$

bajo la función tangente es $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Finalmente, como $\lim_{y \rightarrow \infty} \tanh y = 1$, tenemos que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \tan(x \pm iy) = \pm i.$$

Las otras funciones trigonométricas, al igual que en variable real, están definidas en términos de las funciones $\cos$ y sen , y se deja como ejercicio dar su expresión en términos de la función exponencial, así como verificar sus principales propiedades.

4.5.6 Funciones hiperbólicas

El seno y coseno hiperbólicos de una variable compleja se definen de igual manera que en una variable real, a saber:

Definición 4.5.11 Se definen las funciones *seno* y *coseno hiperbólico* como:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Como e^z y e^{-z} son funciones enteras, se sigue que $\operatorname{senh} z$ y $\cosh z$ también son funciones enteras. Además

$$\frac{d \operatorname{senh} z}{dz} = \cosh z, \quad \frac{d \cosh z}{dz} = \operatorname{senh} z.$$

$$-i \operatorname{senh}(iz) = \operatorname{sen} z, \quad \cosh(iz) = \cos z$$

$$-i \operatorname{sen}(iz) = \operatorname{senh} z, \quad \cos(iz) = \cosh z$$

Proposición 4.5.9 Las funciones seno y coseno hiperbólico satisfacen las siguientes identidades:

1. $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z, \quad \cosh(-z) = \cosh z$
2. $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
3. $\operatorname{senh}(z+w) = \operatorname{senh} z \cosh w + \cosh z \operatorname{senh} w$
4. $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \operatorname{senh} z \operatorname{senh} w$
5. $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$

$$6. \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$7. |\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$8. |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

donde $z = x + iy$.

Demostración. Se deja como ejercicio. ■

La periodicidad de $\sin z$ y $\cos z$ implican que $\sinh z$ y $\cosh z$ sean periódicas con período $2\pi i$. Como $\sinh z = -i \sin(iz)$ tenemos que $\sinh z = 0$ si, y solamente si $\sin(iz) = 0$, es decir, $z = n\pi i$ con $n \in \mathbb{Z}$. De manera análoga tenemos que $\cosh z = \cos(iz)$ de donde $\cosh z = 0$ si, y solamente si $\cos(iz) = 0$, es decir, $z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i$ con $n \in \mathbb{Z}$.

La tangente hiperbólica de z se define como

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

y es $\mathbb{C}$ -diferenciable siempre que $\cosh z \neq 0$. Las funciones cotangente, secante y cosecante hiperbólica, que denotamos $\coth$, sech y csch respectivamente, son las recíprocas de $\tanh z$, $\cosh z$ y $\sinh z$ respectivamente. De manera análoga al caso de una variable real tenemos

Proposición 4.5.10 Las funciones trigonométricas hiperbólicas satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\frac{d \tanh z}{dz} = \operatorname{sech}^2 z$
2. $\frac{d \coth z}{dz} = -\operatorname{csch}^2 z$
3. $\frac{d \operatorname{sech} z}{dz} = -\operatorname{sech} z \tanh z$
4. $\frac{d \operatorname{csch} z}{dz} = -\operatorname{csch} z \coth z$

Demostración. Se deja como ejercicio. ■

4.5.7 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Ya que las funciones trigonométricas e hiperbólicas son periódicas, éstas no poseen una inversa global, sin embargo, en aquellos puntos donde la derivada no sea nula tendremos, al menos localmente, una función inversa.

Las inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas se pueden describir en términos de logaritmos, por lo que, dependiendo del problema, será necesario elegir apropiadamente las ramas de logaritmo que se utilizarán.

Para calcular la función inversa del seno procederemos de manera similar a lo que hicimos cuando definimos la función logaritmo: dada $w \in \mathbb{C}$ determinaremos aquellos puntos z que satisfacen $\sin w = z$, es decir,

$$\sin w = z \quad \text{si, y solamente si,} \quad \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

o equivalentemente, tenemos la ecuación cuadrática en e^{iw}

$$(e^{iw})^2 - 2iz e^{iw} - 1 = 0.$$

Resolviendo en e^{iw} obtenemos

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Tomando logaritmo en ambos miembros de la ecuación anterior tenemos la expresión

$$w = -i \log \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Así, para obtener todas las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen} w = z$ debemos resolver las dos ecuaciones

$$\operatorname{arc sen}(z) = w = -\iota \log \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

y

$$\operatorname{arc sen}(z) = w = -\iota \log \left(\iota z - \sqrt{1 - z^2} \right)$$

respectivamente.

Como la función logaritmo es multivaluada, también lo es la función arco seno.

Como consecuencia de la definición de logaritmo

$$\log \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right) = \ln \left| \iota z + \sqrt{1 - z^2} \right| + \iota \left(\arg \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right) + 2\pi n \right),$$

con $n \in \mathbb{Z}$, y $-\pi \leq \arg \theta \leq \pi$ de donde, si $w = \operatorname{arc sen} z$, se sigue que

$$\operatorname{arc sen} z = \left(\arg \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right) + 2\pi n \right) - \iota \ln \left| \iota z + \sqrt{1 - z^2} \right|$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Por otra parte, como

$$\iota z - \sqrt{1 - z^2} = \frac{(\iota z - \sqrt{1 - z^2})(\iota z + \sqrt{1 - z^2})}{\iota z + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{-1}{\iota z + \sqrt{1 - z^2}}$$

$$\text{entonces } \ln \left| \frac{-1}{\iota z + \sqrt{1 - z^2}} \right| = -\ln \left| \iota z + \sqrt{1 - z^2} \right|,$$

Además

$$\arg z^{-1} = -\arg z \quad \text{y} \quad \arg(-z) = \pi + \arg z$$

por lo que, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \arg(\iota z - \sqrt{1 - z^2}) &= \arg \left(\frac{-1}{\iota z + \sqrt{1 - z^2}} \right) \\ &= \pi + \arg \left(\frac{1}{\iota z + \sqrt{1 - z^2}} \right) \\ &= \pi - \arg(\iota z + \sqrt{1 - z^2}) \end{aligned}$$

módulo $2\pi n$, con $n \in \mathbb{Z}$, de donde

$$\log \left(\iota z - \sqrt{1 - z^2} \right) = -\ln \left| \iota z + \sqrt{1 - z^2} \right| + \iota \left(-\arg \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right) + (2n + 1)\pi \right)$$

con $n \in \mathbb{Z}$.

Así, para obtener la solución de $w = -\iota \log \left(\iota z - \sqrt{1 - z^2} \right)$ bastará multiplicar el renglón anterior por $-\iota$, esto es:

$$\operatorname{arc sen}(z) = w = - \left(\arg \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right) + (2n + 1)\pi \right) + \iota \ln \left| \iota z + \sqrt{1 - z^2} \right|$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $-\pi < \arg z < \pi$. Como consecuencia de lo anterior tenemos que $\operatorname{sen} w = z$ cuando

$$\operatorname{arc sen}(z) = \left(\arg \left(\iota z + \sqrt{1 - z^2} \right) + 2\pi n \right) - \iota \ln \left| \iota z + \sqrt{1 - z^2} \right|$$

o bien

$$\operatorname{arc sen}(z) = -\left(\arg\left(\iota z + \sqrt{1-z^2}\right) + (2n+1)\pi\right) + \iota \ln\left|\iota z + \sqrt{1-z^2}\right|$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $-\pi < \arg z < \pi$.

De manera similar, si deseamos encontrar todas las soluciones de la ecuación $\cos w = z$, es decir

$$\frac{e^{\iota w} + e^{-\iota w}}{2} = z$$

implica que $(e^{\iota w})^2 - 2ze^{\iota w} + 1 = 0$, luego entonces $e^{\iota w} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$.

Tomando logaritmo en ambos miembros de la ecuación, y multiplicando el resultado por $-\iota$ tenemos:

$$\operatorname{arc cos}(z) = w = -\iota \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

o equivalentemente

$$\operatorname{arc cos}(z) = w = -\iota \log(z + \iota \sqrt{1-z^2}).$$

Como el logaritmo es multivaluado, también lo es la relación arco coseno, y procediendo de manera análoga a la vista anteriormente, debemos considerar una rama de logaritmo para que la función arco coseno quede bien definida.

Por último,

$$z = \tan w = \frac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{cos} w} = \frac{1}{\iota} \left(\frac{e^{\iota w} - e^{-\iota w}}{e^{\iota w} + e^{-\iota w}} \right) = \frac{1}{\iota} \left(\frac{e^{2\iota w} - 1}{e^{2\iota w} + 1} \right).$$

Resolviendo esta ecuación para $e^{2\iota w}$ tenemos

$$\iota z = \frac{e^{2\iota w} - 1}{e^{2\iota w} + 1}, \quad \text{de donde} \quad e^{2\iota w} = \frac{1 + \iota z}{1 - \iota z}; \quad z \neq -\iota,$$

es decir

$$\operatorname{arctan} z = w = \frac{1}{2\iota} \log\left(\frac{1 + \iota z}{1 - \iota z}\right) \quad \text{si} \quad z \neq \pm \iota.$$

Como el logaritmo es una relación multivaluada, también lo es la relación arco tangente, de donde

$$\operatorname{arctan} z = \frac{1}{2\iota} \ln\left|\frac{1 + \iota z}{1 - \iota z}\right| + \frac{1}{2} \left[\arg\left(\frac{1 + \iota z}{1 - \iota z}\right) + 2\pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Ejemplo 23

1. Si consideramos $\operatorname{arc sen} z$ como una relación multivaluada, la expresión

$$\operatorname{arc sen} z = -\iota \log\left(\iota z + \sqrt{1-z^2}\right)$$

nos dice que

$$\operatorname{arc sen}(\iota) = -\iota \log(-1 \pm \sqrt{2})$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} \ln|-1 + \sqrt{2}| &= \ln|\sqrt{2} - 1| = \ln\left|\frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right| \\ &= -\ln|1 + \sqrt{2}| \end{aligned}$$

y $\arg(-1 + \sqrt{2}) = 0 + 2\pi n$, entonces

$$\log(-1 + \sqrt{2}) = -\ln|1 + \sqrt{2}| + 2n\pi i, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, tenemos que $\ln|-1 - \sqrt{2}| = \ln(1 + \sqrt{2})$ y $\arg(-1 - \sqrt{2}) = \pi + 2\pi n$, entonces

$$\log(-1 - \sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2}) + (1 + 2n)\pi i, \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

los números $(-1)^{n+1} \ln(1 + \sqrt{2}) + n\pi i$, con $n \in \mathbb{Z}$ constituyen el conjunto de valores de $\log(-1 \pm \sqrt{2})$.

Luego entonces, todos los valores posibles w tales que $\operatorname{sen} w = i$ son de la forma

$$\operatorname{arc sen}(i) = n\pi + i(-1)^n \ln(1 + \sqrt{2}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Si consideramos $\operatorname{arc cos} z$ como una relación multivaluada, la expresión

$$\operatorname{arc cos} z = -i \log(z \pm \sqrt{1 - z^2})$$

nos dice que

$$\operatorname{arc cos}(i) = -i \log(i \pm \sqrt{2}).$$

Si consideramos la expresión $-i \log(i + \sqrt{2})$ tenemos:

$$\begin{aligned} & -i \log(i + \sqrt{i^2 - 1}) \\ &= -i \log(i(1 + \sqrt{2})) \\ &= -i \left[\ln|i(1 + \sqrt{2})| + i \left[\arg(i(1 + \sqrt{2})) + 2\pi n \right] \right] \\ &= -i \left[\ln|1 + \sqrt{2}| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} + 2n \right) \pi - i \left(\ln|1 + \sqrt{2}| \right). \end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga con la otra rama de la raíz cuadrada tenemos que

$$\begin{aligned} & -i \log(i - \sqrt{i^2 - 1}) \\ &= -i \log(i(1 - \sqrt{2})) \\ &= -i \left[\ln|i(1 - \sqrt{2})| + i \left[\arg(i(1 - \sqrt{2})) + 2\pi n \right] \right]. \end{aligned}$$

Como

$$i(1 - \sqrt{2}) = \frac{1}{i(1 + \sqrt{2})},$$

entonces

$$\ln|i(1 - \sqrt{2})| = \ln \left| \frac{1}{i(1 + \sqrt{2})} \right| = -\ln|i(1 + \sqrt{2})| = -\ln|1 + \sqrt{2}|.$$

Además

$$\arg((1 - \sqrt{2})i) = \arg\left(\frac{1}{i(1 + \sqrt{2})}\right) = -\arg(i(1 + \sqrt{2})) = -\frac{\pi}{2},$$

entonces

$$\operatorname{arc cos}(i) = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \pi + i \left(\ln|1 + \sqrt{2}| \right) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Uniendo ambas expresiones tenemos que

$$\operatorname{arc cos}(i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + 2n \right) \pi - i \left(\ln|1 + \sqrt{2}| \right) \\ \left(2n - \frac{1}{2} \right) \pi + i \left(\ln|1 + \sqrt{2}| \right) \end{cases} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}.$$

Para obtener funciones univaluadas debemos elegir una rama para la raíz de $1 - z^2$ y una rama de logaritmo, por ejemplo si elegimos la rama $+\sqrt{1 - z^2}$ y la rama principal de logaritmo tenemos que

$$\operatorname{arc sen}(i) = -i \log(i^2 + \sqrt{2}) = -i \log(-1 + \sqrt{2}),$$

y como

$$\log(-1 + \sqrt{2}) = \ln(\sqrt{2} - 1) \cong -0.88137$$

así,

$$\operatorname{arc sen}(i) = -i \ln(\sqrt{2} - 1) \cong 0.88137i.$$

De manera similar, eligiendo la rama $\sqrt{z^2 - 1}$ y la rama principal de logaritmo tenemos que

$$\operatorname{arc cos}(i) = -i \log(i + \sqrt{i^2 - 1}) = -i \log(i + \sqrt{-2})$$

como $\ln|i(1 + \sqrt{2})| = \ln|1 + \sqrt{2}| \cong 0.88137$ y $\arg(i(1 + \sqrt{2})) = \frac{\pi}{2}$, así

$$\operatorname{arc cos}(i) \cong 1.57079 - .88137i.$$

Eligiendo ramas apropiadas para la función logaritmo, cuando esto es necesario, obtenemos funciones univaluadas.

Así, eligiendo una rama para la raíz cuadrada y la rama principal de la función logaritmo tenemos que las inversas de las funciones trigonométricas están dadas como:

$$\operatorname{arc sen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\operatorname{arc cos} z = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{arctan} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

$$\operatorname{arccsc} z = -i \log\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right)$$

$$\operatorname{arcsec} z = -i \log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)$$

$$\operatorname{arctan} z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$$

Y como las funciones trigonométricas inversas son composición de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables, ellas son funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en sus respectivos dominios.

De las expresiones anteriores es fácil obtener sus derivadas, mientras las dos primeras dependen de los valores que se adoptan para las raíces cuadradas, la tercera no depende de cómo se hace univaluada, así

$$\frac{d \operatorname{arc sen} z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$$\frac{d \operatorname{arc cos} z}{dz} = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

$$\frac{d \operatorname{arctan} z}{dz} = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Una notación alternativa para la función inversa de arc sen es sen^{-1} , para la de arc cos es cos^{-1} y para arctan es tan^{-1}

De manera similar, se pueden calcular las funciones hiperbólicas inversas, y obtenemos

Proposición 4.5.11 Las funciones hiperbólicas inversas satisfacen las siguientes relaciones:

1. $\operatorname{arsenh}(z) = \log(z + \sqrt{1+z^2})$
2. $\operatorname{arccosh}(z) = \log(z + \sqrt{z+1}\sqrt{z-1})$
3. $\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Demostración. Se deja como ejercicio deducir las fórmulas anteriores. ■

4.6 Funciones armónicas

Las funciones armónicas de dos variables reales aparecen frecuentemente en la física como funciones potenciales de campos planos de vectores, y sus propiedades están sumamente relacionadas con la teoría de las funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables. En la presente sección daremos la definición de función armónica y sus propiedades más elementales, y posteriormente, en el capítulo 9 estudiaremos más a fondo sus propiedades y aplicaciones.

Definición 4.6.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, es decir, una función cuyas derivadas parciales de orden menor o igual a 2 existen y son continuas para cada $z \in \Omega$. Definimos

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

El operador $u \mapsto \Delta u$ se denomina el *operador Laplaciano* en $\mathbb{C}$. También se puede definir el operador

$$\Delta^c u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

El operador Δ^c se denomina el *Laplaciano complejo*.

Es inmediato de las definiciones de $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \bar{z}$ que

$$\Delta^c u = \frac{1}{4} \Delta u.$$

Ejemplo 24

1. Es claro que la función $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $u(x, y) = 3x^2 + y^2$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= 6 + 2 = 8.$$

2. Consideremos ahora la función $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $u(x, y) = x^2 - y^2$, claramente u es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= 2 - 2 = 0.$$

3. Si $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como $u(z) = z\bar{z}$, es fácil ver que u es de clase $\mathcal{C}^2$ y

$$\Delta^c u = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial (z\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Definición 4.6.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Diremos que u es una *función armónica*, o *función potencial*, en Ω si el Laplaciano de u es cero en Ω , es decir:

$$\Delta u(z) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(z) = 0 \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

La ecuación $\Delta u = 0$ se llama la *ecuación de Laplace*.

Además, es claro que la suma de dos funciones armónicas es una función armónica, y si se multiplica una función armónica por una constante real se obtiene una función armónica. Como consecuencia de esto, el conjunto de las funciones armónicas definidas en Ω , dotado de la suma de funciones, y el producto de funciones por escalares reales es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy tenemos que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son armónicas, esto es:

Proposición 4.6.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω , entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas en Ω .³

Demostración. Como f es $\mathbb{C}$ -diferenciable y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, las funciones u y v al menos son de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω , pero como una función $\mathbb{C}$ -diferenciable satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$.

Tenemos que $u_{xx} = v_{xy}$, $u_{yy} = -v_{yx} = -v_{xy}$, $v_{yy} = u_{yx}$ y $v_{xx} = -u_{xy}$, de donde

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{xy} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{xy} + u_{xy} = 0.$$

Por lo que u y v son funciones armónicas en Ω . ■

Ahora nos planteamos si el problema recíproco será cierto: es decir, ¿las funciones armónicas son la parte real de alguna función $\mathbb{C}$ -diferenciable?

Un respuesta parcial está dada en el siguiente resultado, aunque como veremos posteriormente, una función armónica en una región Ω no necesariamente es la parte real de una función $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en Ω .

Proposición 4.6.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto no vacío y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en Ω , entonces existe D un disco abierto contenido en Ω y una función $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en D .

Demostración. Consideremos la diferencial $pdx + qdy$ con $p = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $q = \frac{\partial u}{\partial x}$. Como u es armónica, p y q tienen derivadas parciales continuas en Ω y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Se sigue de cálculo que la diferencial $pdx + qdy$ es localmente exacta.¹ En otras palabras, existe un abierto $D \subset \Omega$ y una función $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su diferencial es $dv = pdx + qdy$, es decir, en D tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = p = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q = \frac{\partial u}{\partial x}$$

luego entonces, como consecuencia del teorema de Lomann-Menchoof 4.3.4 la función $f = u + iv$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en D . ■

³Pedir que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es una condición superflua, pues como mostraremos posteriormente en el capítulo 5, corolario 5.2.2, página 125, toda función $\mathbb{C}$ -diferenciable es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

¹Recordamos que: una diferencial $pdx + qdy$ es localmente exacta en Ω si es exacta en alguna vecindad de cada punto en Ω .

Definición 4.6.3 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ reciben el nombre de *armónicas conjugadas*.

Ejemplo 25 Si $f(z) = 4z^2 - 3iz = 4(x+iy)^2 - 3i(x+iy) = (4x^2 - 4y^2 + 3y) + i(8xy - 3x)$, entonces $u(x, y) = 4x^2 - 4y^2 + 3y$, $v(x, y) = 8xy - 3x$.

Puesto que u y v satisfacen la ecuación de Laplace, u y v son armónicas conjugadas.

Proposición 4.6.3 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto conexo y $v_1, v_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son dos funciones armónicas conjugadas de la función armónica $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ entonces $v_1 - v_2$ es una constante.

Demostración. Como las funciones $f_1 = u + iv_1$ y $f_2 = u + iv_2$ son $\mathbb{C}$ -diferenciables en Ω , entonces la diferencia $g = f_1 - f_2 = 0 + i(v_1 - v_2)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω .

Aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann a la función g tenemos que

$$\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial y} = 0.$$

Y como Ω es conexo tenemos que $v_1 - v_2$ es una constante. ■

A continuación mostramos algunos ejemplos de funciones armónicas.

Ejemplo 26

1. Las funciones armónicas más simples son las funciones lineales $u(x, y) = ax + by + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Es fácil ver esto ya que $u_{xx} = u_{yy} = 0$, de donde $\Delta u = 0$, así, u es armónica.
2. La función $u(re^{i\theta}) = r^n \cos n\theta$ es armónica en $\mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Si $z \in \mathbb{C}$ se expresa en coordenadas polares como $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ como consecuencia del teorema de D'Moivre, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, de donde $\operatorname{Re} z^n = r^n \cos n\theta = u(re^{i\theta})$. Como la función $f(z) = z^n$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces $u = \operatorname{Re} f$ es armónica.
3. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales, si

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n + b_n}} = R > 0,$$

entonces la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n \tag{4.3}$$

define una función armónica en $B(0, R)$.

Sea $z = re^{i\theta}$, si $c_n = a_n - ib_n$ entonces

$$\begin{aligned} c_n z^n &= (a_n - ib_n) r^n e^{in\theta} \\ &= (a_n - ib_n) (r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta) \\ &= (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n + i(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n \end{aligned}$$

Así, $\operatorname{Re} c_n z^n = (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$. Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)$ define una función holomorfa si

$$|z| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n + b_n|}} = R$$

concluimos que la serie dada en la ecuación (4.3) define una función armónica en $B(0, R)$.

4. La función $\log |z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero no posee función armónica conjugada en dicho abierto.

Para mostrar que $u(z) = \log|z|$ es armónica en Ω será suficiente mostrar que u que satisface la ecuación de Laplace. Como $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ entonces

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x, y) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.\end{aligned}$$

Por otra parte, u no puede tener una armónica conjugada en Ω . Para ver esto, consideremos el abierto $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}; z \leq 0\}$, la función identidad en Ω_0 , que denotaremos 1_{Ω_0} , nunca es nula en el conjunto simplemente conexo Ω_0 , como consecuencia del corolario 6.1.4, página 154, que estudiaremos posteriormente, existe una función holomorfa $g : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $1_{\Omega_0}(z) = \exp(g(z))$, en esta rama, podemos tomar la función logaritmo principal

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg z.$$

Si $u(z) = \log|z|$ tuviera armónica conjugada en Ω , existiría una función armónica $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ sería holomorfa en Ω , y en particular, en Ω_0 . Por ende, v y $\arg z$ serían armónicas conjugadas de $u|_{\Omega_0}$. Como Ω_0 es conexo, por la proposición 4.6.3 las funciones v y $\arg z$ difieren por una constante, así v sería discontinua en cada punto de la semirrecta $\{z \in \mathbb{R}; z \leq 0\}$, lo cual contradice el hecho que $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Observación 7 Es decir, una función armónica en Ω no necesariamente es la parte real de una función holomorfa en Ω .

Proposición 4.6.4 Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, entonces

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.4}$$

es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Demostración. Si escribimos $U = \frac{\partial u}{\partial x}$, $V = -\frac{\partial u}{\partial y}$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.\end{aligned}$$

Como consecuencia del teorema de Looman Menchoff 4.3.4, página 70, tenemos que f es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω . ■

Lo anterior es la forma más natural de pasar de funciones armónicas a funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables.

Dada la parte real (o imaginaria) de una función $\mathbb{C}$ -diferenciable, la otra se puede determinar salvo una constante aditiva arbitraria.

Ejemplo 27

La función $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ es armónica en $\mathbb{C}$ y podemos determinar su armónica conjugada como sigue:

1. Calculando las derivadas parciales de primer y segundo orden tenemos que:

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + y, & u_y &= -2y + x, \\ u_{xx} &= 2, & u_{yy} &= -2,\end{aligned}$$

de donde $\Delta u = 0$, así u es armónica en $\mathbb{C}$.

2. Como $v_y = u_x = 2x + y$, entonces

$$v(x, y) = \int u_x dy = \int (2x + y) dy = 2xy + \frac{y^2}{2} + g(x).$$

3. Por otra parte $v_x = 2y + g'(x) = v_x = -u_y = 2y - x$, de donde $g'(x) = -x$.
4. Así $g(x) = -\frac{x^2}{2} + c$.
5. De donde

$$v(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy + c.$$

6. Como $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, haciendo el cambio de variables tenemos que

$$\begin{aligned} u(z, \bar{z}) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}(z+\bar{z}) - \frac{i}{4}(z^2 - \bar{z}^2), \\ v(z, \bar{z}) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + c \\ &= -\frac{1}{4}(z^2 + \bar{z}^2) - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) + c. \end{aligned}$$

7. Por lo que

$$u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z}) = z^2 - \frac{i}{2}z^2 + c.$$

8. La función $f(z) = (1 - i/2)z^2 + c = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$, con c constante es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

De manera general, dada una función u armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, conocemos las derivadas parciales de su armónica conjugada v a través de las condiciones de Cauchy-Riemann cuando ésta exista, de manera que el cálculo de primitivas de funciones reales de una variable real o, equivalentemente, el cálculo de las funciones potenciales de la forma diferencial

$$-u_y(x, y)dx + u_x(x, y)dy$$

no lleva, en casos sencillos al menos, a expresiones explícitas para la función v (salvo constantes aditivas). Este procedimiento es fácilmente “automatizable”, y resulta cómodo llevarlo a cabo mediante programas de cálculo simbólico como Maple, Mathematica, Matlab, Scilab, wxMaxima.⁴

Téngase en cuenta que los programas de cálculo numérico, como los antes citados, no proporcionan constantes de integración. Además, el número de funciones cuyas primitivas se pueden calcular “explícitamente” es limitado.

Proposición 4.6.5 La composición de una función $\mathbb{C}$ -diferenciable de clase $\mathcal{C}^2$ con una función armónica es una función armónica, esto es, si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω_1 con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, entonces $g \circ f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica.

Demostración. Sean $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, entonces

$$g \circ f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Derivando nuevamente con respecto a la variable x tenemos

⁴Scilab y wxMaxima son aplicaciones basadas en la filosofía de *Open Source*, Scilab tiene un lenguaje de programación similar a Matlab, mientras que el lenguaje de programación de wxMaxima es similar al de Maple.

$$\frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial x^2} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2.$$

De manera análoga

$$\frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial y^2} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2.$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} \Delta(g \circ f) &= \frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial g}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial g}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

de donde

$$\Delta(g \circ f) = \Delta g \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = (\Delta g) |f'|^2.$$

Como g es armónica $\Delta g = 0$, de donde $\Delta(g \circ f) = 0$. ■

Basados en la ecuación (4.4) tenemos la 1-forma diferencial

$$f dz = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \iota \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \quad (4.5)$$

En esta expresión la parte real es la diferencial de u ,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Si u tiene a v como su armónica conjugada, entonces la parte imaginaria puede escribirse como

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

En general, no hay una función conjugada única, y en estas circunstancias es mejor no utilizar la notación dv . En su lugar escribiremos

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (4.6)$$

la cual se denomina la *diferencial conjugada* de du . Como consecuencia de la ecuación (4.5) tenemos

$$f dz = du + \iota * du. \quad (4.7)$$

4.7 Ejercicios

- Utilice la definición de derivada para demostrar directamente que, si $f(z) = \frac{1}{z}$ entonces $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ para $z \neq 0$.
- Utilice la definición de derivada para demostrar directamente la proposición 4.3.1, página 67, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , entonces f es continua en Ω .
- Verifique que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para las funciones $f(z) = z^2$ y $f(z) = z^3$.
- Demuestre que una función $\mathbb{C}$ -diferenciable no puede tener módulo constante a menos que sea constante.
- Demuestre que f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\Omega \subset \mathbb{C}$ si, y solamente si $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable, donde $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C}; \bar{z} \in \Omega\}$.
- Si $\Omega = \Omega^*$, observe que Ω es simétrico con respecto al eje real. Concluya que $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $g(z) = f(z) - f^*(z)$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable.
- Obtenga las partes real e imaginaria de las siguientes funciones, y verifique que, en sus respectivos dominios, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann
 - $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.
 - $f(z) = z - \frac{1}{z}$.
- Demuestre la proposición 4.3.8 usando primeramente la definición de $\mathbb{C}$ -diferenciable y posteriormente el criterio de Carathéodory dado en la proposición 4.3.7.
- Demuestre que no hay funciones holomorfas $f = u + iv$ con $u(x, y) = x^2 + y^2$.
- Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable de la forma $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$, demuestre que f es un polinomio de primer grado en z .
- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable y $\operatorname{Re} f = u$ es constante, demuestre que f es constante. Similarmente, si $\operatorname{Im} f = v$ es constante, entonces f es constante.
- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable y, en cada punto $z \in \Omega$ se tiene que $f(z) = 0$ o $f'(z) = 0$, demuestre que f es constante. *Sugerencia:* considere la función $f^2(z)$.
- Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, $z_0 \in \Omega$, y sean f y g dos funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en z_0 , con $g'(z_0) \neq 0$. Demuestre o refute el siguiente enunciado:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

- Regla de L'Hôpital* Sean f y g dos funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables en un abierto conexo Ω , $z_0 \in \Omega$ y supongamos que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero $g'(z_0) \neq 0$. Demuestre que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

- Calcule, si existen, los siguientes límites:

- $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1}$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2}$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2}$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z}$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}$.
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z^2}$.

16. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida como

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Demuestre que, si $z_0 = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$. A continuación demuestre que $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ si $z = x(1 + i)$ con $x \neq 0$. Concluya de aquí que no existe $f'(0)$. Verifique que, a pesar de esto, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen.

17. Demuestre que $f'(z)$ no existe en ningún punto para

- a) $f(z) = z - \bar{z}$.
- b) $f(z) = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}$.

¿Qué puede decir de la función $f(z) = z\bar{z}$?

18. Definamos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, y para $w \in \mathbb{D}$ definamos la función $f_w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como $f_w(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}$.

Demuestre los siguientes enunciados:

- a) f_w transforma el disco unitario en sí mismo.
- b) f_w es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\mathbb{D}$.
- c) f_w intercambia los puntos 0 y w .
- d) Si $|z| = 1$, entonces $|f_w(z)| = 1$.
- e) $f_w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es biyectiva.

19. Sean U, V subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ funciones diferenciables, defina $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ como $h = g \circ f$. Demuestre la regla de la cadena:

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{f}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}, \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{f}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

20. Sea $z = x + iy \in \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω . Supongamos que $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$, y consideremos el cambio de coordenadas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta.$$

y que

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta, \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \theta.$$

Deduzca de aquí las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

21. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto conexo, $z_0 \in \Omega$ y suponiendo que la función $f(z) = u(z) + i v(z)$ está definida en una vecindad $U \subset \Omega$ del punto $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ y que las primeras derivadas parciales de u y v con respecto a r y θ existen en U . Si esas derivadas parciales son continuas en z_0 y satisfacen la forma polar

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

en z_0 , demuestre que $f'(z_0)$ existe.

22. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable, con $f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$. Si existen constantes reales a, b , y c no todas cero tales que $au(x, y) + bv(x, y) = c$. Demuestre que f es constante en Ω . ¿La conclusión continúa siendo válida si a, b y c son números complejos, no todos reales?

23. Sean $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 1\}$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable. Suponga además que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Demuestre que existen una constante real c y una constante compleja d tal que $f(z) = \iota cz + d$ para cada z en Ω .

24. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable de orden al menos $n+1$ en Ω . Suponga que $f^{(n+1)}$ (la $(n+1)$ -ésima derivada de f) existe y es idénticamente cero en Ω . Demuestre que f es un polinomio de grado a lo más n .
25. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable de segundo orden en Ω . Demuestre que

$$f''(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2}.$$

26. Demuestre que sobre la circunferencia $z = re^{i\theta}$, se tiene que

$$|e^{iz}| = e^{-r \sin \theta}.$$

27. Verifique que las funciones hiperbólicas satisfacen las siguientes relaciones:

$$\cosh z = \cos(\iota z) \quad \text{y} \quad \sinh z = -\iota \sin(\iota z)$$

respectivamente. Muestre que las funciones son real valuadas para valores reales de la variable z y utilice los teoremas de adición para obtener las partes real e imaginaria de estas funciones.

28. Describa la imagen del conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bajo la función $\sqrt[3]{z}$ definida en la rama principal de la función logaritmo $\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \arg z < \pi\}$.
29. Demuestre que si $w \in \mathbb{R}$, entonces $|z^w| = |z|^w$.
30. Exhiba $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z^w| \neq |z|^{|w|}$.
31. Resuelva $\cos z = 1/2$, y $\sin z = 1 + \iota$.
32. Utilice el hecho que $e^{iz} = \cos z + \iota \sin z$ y las identidades

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\iota}$$

para demostrar las siguientes identidades trigonométricas:

- $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$.
- $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$.
- $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$.
- $\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$.
- $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.
- $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.
- $\tan(z + \pi) = \tan z$.

33. Demuestre que

- $\frac{d \tan z}{dz} = \sec^2 z$.
- $\frac{d \cot z}{dz} = -\csc^2 z$.
- $\frac{d \sec z}{dz} = \sec z \tan z$.
- $\frac{d \csc z}{dz} = -\csc z \cot z$.
- $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{sen} z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$.

$$f) \frac{d \operatorname{arctanh} z}{dz} = \frac{1}{1-z^2}.$$

34. Demuestre la proposición 4.5.9

- a) $\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z.$
- b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$
- c) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$
- d) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.$
- e) $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$
- f) $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$
- g) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y.$
- h) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y.$

donde $z = x + iy.$

35. Demuestre la proposición 4.5.10, para los valores de z donde las expresiones tengan sentido:

- a) $\frac{d \tanh z}{dz} = \operatorname{sech}^2 z.$
- b) $\frac{d \coth z}{dz} = -\operatorname{csch}^2 z.$
- c) $\frac{d \operatorname{sech} z}{dz} = -\operatorname{sech} z \tanh z.$
- d) $\frac{d \operatorname{csch} z}{dz} = -\operatorname{csch} z \coth z.$

36. Demuestre que $\arcsen z + \arccos z = \frac{1}{2}\pi + 2\pi n$ para $n \in \mathbb{Z}.$

37. Deduzca las expresiones correspondientes para las funciones hiperbólicas inversas $\operatorname{arcsenh}, \operatorname{arccosh}$ y $\operatorname{arctanh}$ que aparecen en la proposición 4.5.11.

38. Demuestre que $\operatorname{arccoth} z = \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{z} \right).$

39. Sean $\log$ y $\sqrt{}$ dos ramas cualesquiera de las funciones logaritmo y raíz cuadrada respectivamente. Demuestre que si $z \neq 0, \pm i$, entonces

$$\cot \left(\frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}} \right) = \frac{1}{z}.$$

40. Encuentre todas las funciones holomorfas $f = u + iv$ tales que $u(x, y) = x^2 - y^2.$

41. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo que no contiene al origen, y supóngase que la función $f; \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω . Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares y suponiendo la continuidad de las derivadas parciales, demuestre que la función $u(r, \theta)$ satisface en Ω la forma polar de la ecuación de Laplace, a saber,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

42. Determine si cada una de las siguientes funciones $u(x, y)$ son armónicas en algún dominio y encuentre de ser posible, para cada una de ellas, una conjugada armónica $v(x, y).$

- a) $u(x, y) = e^{-x} (x \sin y - y \cos y).$
- b) $u(x, y) = 2x(1 - y).$
- c) $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3.$

43. Resuelva la ecuación diferencial parcial $\Delta u = x^2 - y^2.$

44. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, suponga que en Ω la función v es armónica conjugada de u y a su vez u es armónica conjugada de v . Demuestre que u y v son constantes en $\Omega.$

45. Suponga que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo tal que, $z \in \Omega \Leftrightarrow \bar{z} \in \Omega.$ Demuestre que las funciones $u(z)$ y $u(\bar{z})$ son simultáneamente armónicas en $\Omega.$

5. Integral de línea y el teorema de Cauchy.

En este capítulo veremos que la generalización inmediata de una integral real a los números complejos es definir la integral de una función compleja sobre una curva. Este concepto nos permitirá estudiar una serie de propiedades fundamentales en el análisis de funciones de una variable compleja, las cuales son muy complicadas de demostrar sin el uso de la integración compleja, propiedades mediante las cuales iniciaremos la distinción fundamental entre las funciones real valuadas de variable real y las funciones holomorfas. Estos resultados son el objetivo principal de este libro.

Algunas de las propiedades fundamentales que estudiaremos en el presente capítulo son:

- LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY: Si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en el interior y sobre la circunferencia $\gamma(t) = a + e^{2\pi it}$ con $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a).$$

Esta fórmula constituye la pieza fundamental de las funciones holomorfas, y esencialmente nos dice que el valor promedio de una función $\mathbb{C}$ -diferenciable sobre una circunferencia es igual al valor de la función en el centro de la circunferencia.

- TODA FUNCIÓN $\mathbb{C}$ -DIFERENCIABLE ES INFINITAMENTE $\mathbb{C}$ -DIFERENCIABLE.
- TODA FUNCIÓN $\mathbb{C}$ -DIFERENCIABLE ES HOLOMORFA.

Es posible demostrar que una función $\mathbb{C}$ -diferenciable es holomorfa sin utilizar integración a lo largo de curvas, aunque las demostraciones suelen ser más complicadas, R. L. Plunket demostró la continuidad de la derivada en *A topological proof of the continuity of the derivate of a function of a complex variable*. Bull. Amer. Math. Soc. **65**, (1959); 1-4. Mientras que E.H. Connel y P. Porcelli demostraron la existencia de todas las derivadas en *A proof of the power series expansion without Cauchy's formula*. Bull. Amer. Math. Soc. **67**, (1961); 177-181. Ambos artículos basan sus demostraciones en una demostración topológica del teorema de la aplicación abierta, pues éste se encuentra muy relacionado con la estructura de las funciones holomorfas, según demuestra Stoilow, cuya disertación puede encontrarse en el libro de C. T. Whyburn *Topological analysis*, 2nd ed. Princeton. 1964.

5.1 Integración Compleja

Como mencionamos anteriormente, las demostraciones clásicas donde se prueba que las funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables son holomorfas se basan en la integración a lo largo de curvas, por lo

cual iniciamos la presente sección recordando algunas definiciones y propiedades fundamentales de curvas e integración.

Definición 5.1.1 Una *curva* o *trayectoria* en una región $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$, para algún intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con interior no vacío, es decir $a < b$.

Los puntos $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ se denominan los *extremos de la curva*, $\gamma(a)$ se denomina el *punto inicial*, y $\gamma(b)$ se denomina el *punto final*. También se suele decir que γ inicia en $\gamma(a)$ y termina en $\gamma(b)$.

Dados $x_0, x_1 \in \mathbb{C}_\infty$, diremos que la curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ une x_0 con x_1 si: $\gamma(a) = x_0$ y $\gamma(b) = x_1$. En este caso también decimos que γ es una *curva de x_0 a x_1* .

1. Diremos que γ es una *curva cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si $x_0 = \gamma(a) = \gamma(b)$, también decimos que γ es un *lazo* en x_0 .
2. Diremos que γ es una *curva simple* si γ es una función inyectiva, esto es, si $s, t \in [a, b]$ con $s \neq t$, entonces $\gamma(s) \neq \gamma(t)$.
3. Diremos que γ es una *curva cerrada simple* si $s, t \in (a, b)$ con $s \neq t$, entonces $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva cerrada simple también se denomina *curva de Jordan*.
4. Decimos que γ es una *curva suave* (o *curva lisa*) si

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

existe para cada $t \in [a, b]$ y $\dot{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua.

5. Se dice que γ es una *curva suave por partes* (o *curva lisa por partes*) si γ es continua y existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $I = [a, b]$, tal que γ es suave sobre cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$, con $1 \leq j \leq n$.
6. Denotamos la imagen de la curva γ como $im(\gamma)$, o $\gamma([a, b])$, esto es $im(\gamma) = \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$. La imagen de γ también se denomina la *traza*, o *soporte de la curva*.
7. Dada la curva γ en X , definimos la *curva inversa* de γ , que se denota $-\gamma$ (o también γ^{-1}) como $-\gamma: [a, b] \rightarrow X$, dada por $-\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$. Note que $-\gamma(a) = \gamma(b)$, $-\gamma(b) = \gamma(a)$, y además $im(-\gamma) = im(\gamma)$. La curva inversa de γ es la curva que recorre la traza de γ en sentido opuesto.
8. Si $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow X$, $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow X$ son dos curvas tales que el punto inicial de γ_2 coincide con el punto final de γ_1 , esto es, $\gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$, definimos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ como sigue:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow X, \quad \text{con } a = a_1, \quad b = b_1 + b_2 - a_2,$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b_1, \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{si } b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$

Como $\gamma_2(b_1 + a_2 - b_1) = \gamma_2(a_2) = \gamma_1(b_1)$, esta función está bien definida y es continua. Nótese que $im(\gamma_1 + \gamma_2) = im(\gamma_1) \cup im(\gamma_2)$, esta curva se obtiene recorriendo primero γ_1 y posteriormente γ_2 .

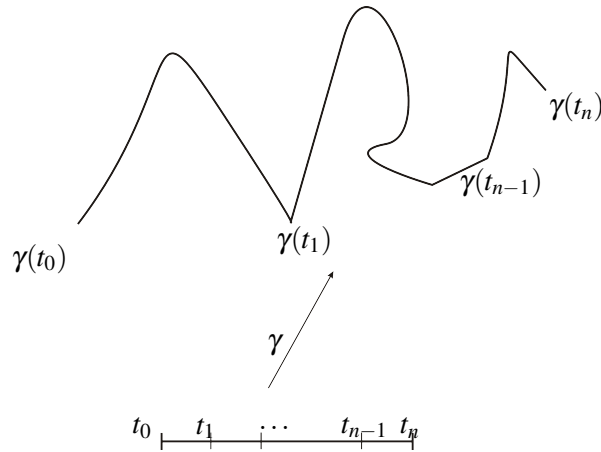
Observe que, en el inciso 8, la continuidad de γ en B_1 es consecuencia del lema del empaste.

Recordamos que una función $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tiene derivada $\dot{\gamma}(t)$ para cada punto $t \in [a, b]$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \dot{\gamma}(t)$$

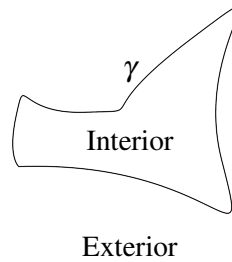
existe para $a < t < b$ y los límites laterales derecho e izquierdo existen para $t = a$ y $t = b$ respectivamente. Por supuesto, esto es equivalente a pedir que las curvas real valuadas $\text{Re } \gamma$ e $\text{Im } \gamma$ tengan derivada.

Además, una curva cerrada simple es homeomorfa a una circunferencia, esto es, hay una función biyectiva y bicontinua de una curva en la circunferencia. Como una circunferencia separa el plano en una región acotada, llamada el interior de la curva y otra no acotada, el exterior de la curva, esta propiedad se hereda a las curvas de Jordan.

**Figura 5.1:** Curva suave por partes

Teorema 5.1.1 — Teorema de la curva de Jordan. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada simple, el complemento de γ es la unión de dos conjuntos abiertos conexos mutuamente excluyentes, y cada punto de γ es un punto frontera de cada dominio. Uno de los dominios determinado por γ es acotado, y se denomina el *interior* de la curva, el otro, es no acotado, y se denomina el *exterior* de la curva.

Para más información sobre este resultado puede consultar (Dugundgi, 1978, Chap. XVII, §Thm. 5.4 pg. 362), o bien, (Munkres, 2000, Chap. 10 §63, pg. 390).

**Figura 5.2:** Curva de Jordan

Podemos notar que, si γ es una curva suave por partes en Ω , entonces $-\gamma$ también lo es. Si γ_1 y γ_2 son curvas suaves por partes en Ω , y el punto final de γ_1 coincide con el punto inicial de γ_2 , entonces $\gamma_1 + \gamma_2$ es una curva suave por partes.

Definición 5.1.2 Sean $\gamma_k: [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ dos curvas en $\mathbb{C}_\infty$, diremos que γ_2 es una *reparametrización* de γ_1 , (o que γ_2 se obtiene de γ_1 por medio de una reparametrización), si existe una función continua, suprayectiva, y estrictamente creciente $h: [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ tal que $\gamma_1 \circ h = \gamma_2$.

Ejemplo 28

1. Si $\gamma_1: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ se define como $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ se define como $\gamma_2(t) = e^{2\pi it}$ entonces γ_2 es una reparametrización de γ_1 pues, si $h: [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$ está dada como $h(t) = 2\pi t$, entonces

$$(\gamma_1 \circ h)(t) = \gamma_1(h(t)) = \gamma_1(2\pi t) = e^{2\pi it} = \gamma_2(t).$$

2. Dados $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$, si $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ se define como $\gamma_1(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ y $\gamma_2: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{C}$ se define como $\gamma_2(t) = z_0 + 2t(z_1 - z_0)$ entonces γ_2 es una reparametrización de γ_1 ya que, si $h: [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$ está dada como $h(t) = 2t$, entonces

$$(\gamma_1 \circ h)(t) = \gamma_1(h(t)) = \gamma_1(2t) = z_0 + 2t(z_1 - z_0) = \gamma_2(t).$$

En este caso $\operatorname{im}(\gamma_1) = \operatorname{im}(\gamma_2)$. Si X es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, y si γ_k son curvas suaves por partes, se pedirá adicionalmente que h sea diferenciable.

Definición 5.1.3 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Diremos que una función $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, es de *variación acotada* si existe un número real positivo M tal que para toda partición

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$$

del intervalo cerrado $[a, b]$ se tiene que la variación de γ respecto a la partición $\mathcal{P}$, que denotaremos $v(\gamma, \mathcal{P})$ es:

$$v(\gamma, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

La *variación total* de γ , que denotamos $v(\gamma)$ se define como

$$v(\gamma) = \sup\{v(\gamma, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ es una partición del intervalo } [a, b]\}.$$

Es fácil ver que, si γ es de variación acotada, entonces $\operatorname{Re} \gamma$ e $\operatorname{Im} \gamma$ son de variación acotada y recíprocamente.

Definición 5.1.4 Diremos que γ es una *curva rectificable* si la variación total de γ es finita, es decir,

$$v(\gamma) = \sup\{v(\gamma, \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ es una partición del intervalo } [a, b]\} < \infty.$$

Cuando sea necesario escribiremos $v_a^b(\gamma)$ con el fin de hacer énfasis en el intervalo donde se define la curva γ .

Ejemplo 29

1. Un polígono regular de n lados, tales como un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono son ejemplos de curvas rectificables.
2. La curva de Koch es un ejemplo de curva no rectificable de longitud infinita, que encierra un área finita¹.

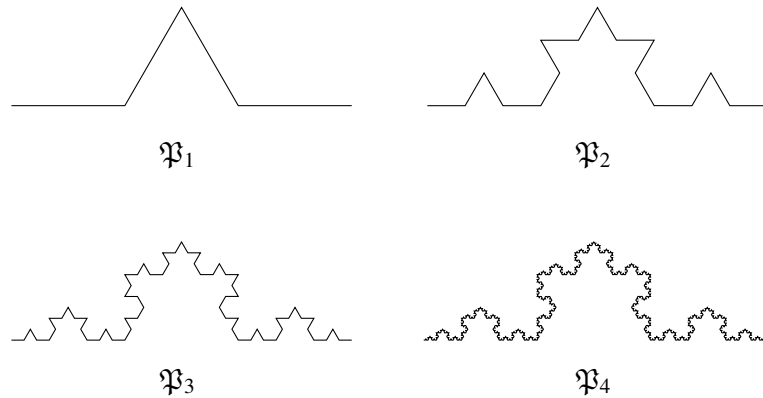


Figura 5.3: Porción del proceso de construcción de la curva de Koch

Para construir ésta curva, consideremos un triángulo equilátero cuyo lado es una unidad. Dividimos cada lado en tres partes iguales de longitud $1/3$. En cada uno de los lados, sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un diente como se muestra en el primer cuadro de la figura 5.3 en la iteración $n = 1$. Obtenemos así una curva poligonal $\mathfrak{P}_1$ de longitud $3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 4$. Repetimos la operación ($n = 2$) con

¹Koch, H. Von. *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*. Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik 1, 1904, 681-704.

cada uno de los cuatro nuevos segmentos de cada uno de los “lados”. Obtendremos así la curva $\mathfrak{P}_2$ de longitud $3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right) = \frac{16}{3}$. La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch o copo de nieve de Koch. En la n -ésima iteración la curva estará formada por $3 \cdot 4n$ trozos, de perímetro $\frac{4n}{3^{n-1}}$. La curva de Koch resulta del paso al límite de la sucesión de curvas poligonales $\mathfrak{P}_n$. Cuando n tiende a infinito la longitud de esta curva $\mathfrak{P}_n$ será

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{longitud}(\mathfrak{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \infty.$$

En la figura 5.3 se muestra el proceso hasta la cuarta iteración.

Proposición 5.1.2 1. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es rectificable y $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces

$$v_a^b(\gamma) = \sum_{k=1}^m v_{t_{k-1}}^{t_k}(\gamma).$$

2. Si $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ son rectificables y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)(t) := \alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)$$

también es rectificable y

$$v(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2) \leq |\alpha| v(\gamma_1) + |\beta| v(\gamma_2).$$

Demostración. La primera propiedad es consecuencia inmediata de la definición y del hecho que si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son dos particiones de $[a, b]$ tales que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ entonces $v(\gamma; \mathcal{P}) \leq v(\gamma; \mathcal{P}')$.

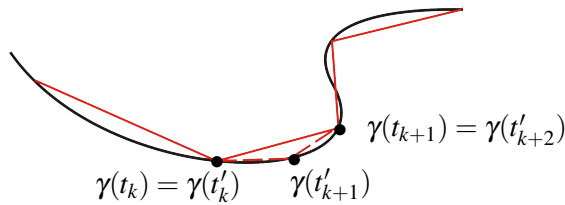


Figura 5.4: Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ entonces $v(\gamma; \mathcal{P}) \leq v(\gamma; \mathcal{P}')$.

Para la segunda parte, si $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} v(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2) &= \sum_{k=1}^m |(\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)(t_k) - (\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^m |(\alpha\gamma_1(t_k) - \alpha\gamma_1(t_{k-1})) + (\beta\gamma_2(t_k) - \beta\gamma_2(t_{k-1}))| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |\alpha\gamma_1(t_k) - \alpha\gamma_1(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^m |\beta\gamma_2(t_k) - \beta\gamma_2(t_{k-1})| \\ &= |\alpha| \sum_{k=1}^m |\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})| + |\beta| \sum_{k=1}^m |\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1})| \\ &\leq |\alpha| v(\gamma_1; \mathcal{P}) + |\beta| v(\gamma_2; \mathcal{P}). \end{aligned}$$

■

Proposición 5.1.3 Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva suave por partes, entonces γ es rectificable y

$$v(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

donde $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$.

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y supongamos que $\dot{\gamma}(t)$ está definida para cada $t \in [t_k, t_{k+1}]$, y $k = 1, \dots, m-1$, entonces

$$\begin{aligned} v(\gamma; \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que

$$v(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \quad (5.1)$$

y en particular γ es rectificable.

Ahora, como $\dot{\gamma}$ es continua en el compacto $[a, b]$, entonces es uniformemente continua y así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $|s - t| < \delta_1$ implica que $|\dot{\gamma}(s) - \dot{\gamma}(t)| < \varepsilon$. Sea $\delta_2 > 0$ tal que si la norma de la partición $\|\mathcal{P}\| := \max\{|t_k - t_{k-1}|; k = 1, \dots, m\} < \delta_2$, entonces,

$$\left| \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt - \sum_{k=1}^m |\dot{\gamma}(\tau_k)| |t_k - t_{k-1}| \right| < \varepsilon.$$

donde τ_k es cualquier punto en $[t_{k-1}, t_k]$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^m |\dot{\gamma}(\tau_k)| (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(\tau_k) dt \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\dot{\gamma}(\tau_k) - \dot{\gamma}(t)) dt \right| + \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \right| \end{aligned}$$

Si $\|\mathcal{P}\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $|\dot{\gamma}(\tau_k) - \dot{\gamma}(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Como consecuencia del teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^m \varepsilon (t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \\ &= \varepsilon + \varepsilon(b - a) + v(\gamma; \mathcal{P}) \leq \varepsilon(1 + b - a) + v(\gamma) \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tenemos que

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \leq v(\gamma). \quad (5.2)$$

Luego entonces,

$$v(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

■

Definición 5.1.5 Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave, la *longitud de arco* de γ se define como:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

La longitud de arco también es independiente de la parametrización.

Corolario 5.1.1 Si $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ son curvas suaves por partes definidas en Ω , entonces

$$\ell(\gamma_1 + \gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) \quad \text{y} \quad \ell(-\gamma) = \ell(\gamma).$$

Ejemplo 30

1. Si $\gamma(t) = \exp(it)$, con $t \in [0, 2\pi]$, es una parametrización del círculo unitario, entonces

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

2. Si $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, el segmento de recta que une a z_0 con z_1 es la curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$, y su longitud de arco es $|z_0 - z_1|$.

Desde luego, lo que deseamos hacer es generalizar la integral de línea real al caso complejo, es decir, deseamos que esta integral siga siendo independiente de las reparametrizaciones y que sea $\mathbb{C}$ -lineal, para lo cual daremos la siguiente definición:

Definición 5.1.6 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva suave en Ω , y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -valuada, y continua definida en Ω . Se define la *integral de línea a lo largo de γ* , la cual denotamos $\int_{\gamma} f dz$ o simplemente $\int_{\gamma} f$, por la fórmula:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Nuevamente, podemos escribir la función continua f en términos de sus partes real e imaginaria como $f(z) = u(z) + iv(z)$, con u, v funciones $\mathbb{R}$ -valuadas definidas en Ω , y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) &= [u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t))] [\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)] \\ &= [u(\gamma(t))\dot{x}(t) - v(\gamma(t))\dot{y}(t)] + i[u(\gamma(t))\dot{y}(t) + v(\gamma(t))\dot{x}(t)] \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b \left[u(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} - v(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} \right] dt \\ &\quad + i \int_a^b \left[u(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} + v(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} \right] dt, \end{aligned}$$

la cual resulta más fácil de recordar si escribimos formalmente

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b [u dx - v dy] + i \int_a^b [u dy + v dx]$$

o bien

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b [u\dot{x} - v\dot{y}] + i \int_a^b [u\dot{y} + v\dot{x}] dt.$$

Desde luego, aún debemos verificar que, con esta definición, se extienden las propiedades de la integral de línea, y que la integral, en este caso, resulta $\mathbb{C}$ -lineal. Y si γ es una curva de z_0 a z_1 , podemos preguntarnos si $\int_{\gamma} f$ depende, o no, de la curva γ . En esta sección trataremos de dar respuesta a estas preguntas, pero antes veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 31

1. Evaluemos ahora $\int_{\gamma} e^z dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, \pi/2]$. En este caso

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} e^z dz &= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} e^{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} e^{(\cos t + i \sin t)} \cdot (-\sin t + i \cos t) dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} -e^{\cos t} [\cos(\sin t) \cdot \sin t + \sin(\sin t) \cdot \cos t] dt \\
 &\quad + i \int_0^{\pi/2} -e^{\cos t} [\sin(\sin t) \cdot \sin t - \cos(\sin t) \cdot \cos t] dt \\
 &= e^{\cos t} \cos(\sin t) \Big|_0^{\pi/2} + i e^{\cos t} \sin(\sin t) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= e^{\cos t + i \sin t} \Big|_0^{\pi/2} = e^i - e.
 \end{aligned}$$

2. Ahora evaluaremos $\int_{\gamma} f dz$, donde $f(z) = (z-a)^{-1}$, y $\gamma(t) = re^{2\pi i t} + a$, con $t \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Tenemos

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^n \frac{1}{(re^{2\pi i t} + a) - a} \cdot 2\pi r i t \cdot e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^n dt = 2\pi n i.$$

Esta fórmula posteriormente nos será muy útil. A continuación veremos que la integral no depende de la reparametrización de la curva, esto es:

Proposición 5.1.4 Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave. Si $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es una repametrización de γ , entonces

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f,$$

para toda función continua f definida sobre un conjunto abierto que contenga a la imagen de la curva γ .

Demostración. Como σ es una reparametrización de γ , existe una función $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$, continua, diferenciable y creciente tal que $\sigma(t) = (\gamma \circ h)(t)$. Si $s = h(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \int_c^d f(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t) dt &= \int_c^d f((\gamma \circ h)(t)) \dot{\gamma}(h(t)) h'(t) dt \\
 &= \int_a^b f(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_{\gamma} f.
 \end{aligned}$$

■

Proposición 5.1.5 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, no vacío, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas, λ una constante compleja, y sean γ, γ_1 y γ_2 curvas suaves, tales que el punto final de γ_1 coincide con el punto inicial de γ_2 . Entonces:

1. $\int_{\gamma} \lambda f = \lambda \int_{\gamma} f.$
2. $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g.$
3. $\int_{-\gamma} f = - \int_{\gamma} f.$
4. $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$

Demostración. (1) Si $f = u + iv$, con $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones $\mathbb{R}$ -valuadas, continuas definidas en Ω , $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$, con $\lambda_k \in \mathbb{R}$, y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces: $\lambda f = (\lambda_1 u - \lambda_2 v) + i(\lambda_1 v + \lambda_2 u)$, de donde

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \lambda f &= \int_a^b [(\lambda_1 u - \lambda_2 v)\dot{x} - (\lambda_1 v + \lambda_2 u)\dot{y}]dt + i \int_a^b [(\lambda_1 u - \lambda_2 v)\dot{y} + (\lambda_1 v + \lambda_2 u)\dot{x}]dt \\ &= \lambda_1 \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})dt - \lambda_2 \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})dt + i \left(\lambda_1 \int_a^b (u\dot{y} + v\dot{x})dt + \lambda_2 \int_a^b (u\dot{x} - v\dot{y})dt \right) \\ &= \lambda \int_a^b f. \end{aligned}$$

(2) Si $f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, γ como antes, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} (f + g) &= \int_a^b [(u_1 + u_2)\dot{x} - (v_1 + v_2)\dot{y}]dt + i \int_a^b [(u_1 + u_2)\dot{y} + (v_1 + v_2)\dot{x}]dt \\ &= \int_a^b [u_1\dot{x} - v_1\dot{y}]dt + i \int_a^b [u_1\dot{y} + v_1\dot{x}]dt + \int_a^b [u_2\dot{x} - v_2\dot{y}]dt + i \int_a^b [u_2\dot{y} + v_2\dot{x}]dt \\ &= \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g. \end{aligned}$$

(3) Si f y γ son como en el inciso (1), entonces $-\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$, y como consecuencia de la regla de la cadena

$$\frac{d(-\gamma)(t)}{dt} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \frac{d(b-t)}{dt} = -\frac{d\gamma(t)}{dt},$$

de donde, si $s = b + a - t$:

$$\int_{-\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(b + a - t))\dot{\gamma}(b + a - t)(-dt) = - \int_a^b f(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)ds = - \int_{\gamma} f.$$

(4) Finalmente, sea f como en el inciso (1), y considere las curvas $\gamma_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$, si $t \in [a, b]$ y $\gamma_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$, si $t \in [b, c]$, con $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_1(t)dt + \int_b^c f(\gamma_2(t))\dot{\gamma}_2(t)dt \\ &= \int_a^b (u\dot{x}_1 - v\dot{y}_1)dt + i \int_a^b (u\dot{y}_1 + v\dot{x}_1)dt + \int_b^c (u\dot{x}_2 - v\dot{y}_2)dt + i \int_b^c (u\dot{y}_2 + v\dot{x}_2)dt \\ &= \int_a^b (u\dot{x}_1 - v\dot{y}_1)dt + \int_b^c (u\dot{x}_2 - v\dot{y}_2)dt + i \left(\int_a^b (u\dot{y}_1 + v\dot{x}_1)dt + \int_b^c (u\dot{y}_2 + v\dot{x}_2)dt \right). \end{aligned}$$

Como estamos integrando funciones real valuadas, tenemos que

$$\int_a^b (u\dot{x}_1 - v\dot{y}_1)dt + \int_b^c (u\dot{x}_2 - v\dot{y}_2)dt = \int_a^c (u\dot{x} - v\dot{y})dt$$

y que

$$\int_a^b (u\dot{y}_1 + v\dot{x}_1)dt + \int_b^c (u\dot{y}_2 + v\dot{x}_2)dt = \int_a^c (u\dot{y} - v\dot{x})dt$$

donde $x(t) = x_1(t)$ si $t \in [a, b]$ y $x(t) = x_2(t)$ si $t \in [b, c]$, procedemos en forma análoga para $y(t)$. De donde:

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f$$

como deseábamos mostrar. ■

Definición 5.1.7 Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva suave por partes, con $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, una partición de $[a, b]$ tal que $\gamma_k = \gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}$ es suave para $k = 0, \dots, n-1$. Definimos $\int_{\gamma} f dz$ como

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f dz.$$

Podemos notar, como consecuencia de la proposición anterior, que el valor de la integral de f a lo largo de γ no depende de la partición utilizada.

La siguiente propiedad nos permite obtener una estimación del valor de las integrales.

Proposición 5.1.6 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto no vacío y $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ es una curva suave por partes en Ω , f una función continua, tal que existe una constante real $M \geq 0$ con $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in im(\gamma)$, entonces

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \ell(\gamma).$$

En forma más general tenemos:

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz|,$$

donde, por definición,

$$\int_{\gamma} |f| |dz| := \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Demostración. Como $\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \int_a^b M |\dot{\gamma}(t)| dt = M \ell(\gamma) \end{aligned}$$

pues, por hipótesis, $|f(\gamma(t))| \leq M$ para toda $t \in [a, b]$. ■

Teorema 5.1.7 — Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ es una curva suave por partes, y f es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es una curva cerrada, es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = 0.$$

Demostración. Si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces

$$f(\gamma(t)) = u(t) + \iota v(t),$$

con $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, y

$$\frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} = \frac{du}{dt}(t) + \iota \frac{dv}{dt}(t),$$

de donde

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_a^b \frac{du}{dt} dt + \iota \int_a^b \frac{dv}{dt} dt.$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo a las funciones reales de variable real $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$, tenemos

$$\int_a^b \frac{du}{dt} dt = u(b) - u(a), \quad y \quad \int_a^b \frac{dv}{dt} dt = v(b) - v(a),$$

y como

$$(u(b) - u(a)) + \iota(v(b) - v(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

podemos concluir que

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

■

Corolario 5.1.2 Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función polinomial, y γ es cualquier curva cerrada en $\mathbb{C}$, suave por partes, entonces

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Ejemplo 32

Si $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\alpha}$ para algún $\alpha \in (0, \pi)$, γ es el segmento que une z_0 con z_1 , y $f(z) = 1/z$, sabemos que $\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}$, donde $\log$ está definido en la rama principal, $\{z \in \mathbb{C}; -\pi < \arg z < \pi\}$.

Como $\log(z_1) = i\alpha$, y $\log(1) = 0$, entonces $\int_{\gamma} f = i\alpha$.

Definición 5.1.8 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $c < d$. El conjunto

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{z \in \mathbb{C}; a \leq \operatorname{Re} z \leq b, \quad c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$$

se denomina *rectángulo cerrado*.

El interior del rectángulo R , el cual está dado por $\{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Re} z < b, \text{ y } c < \operatorname{Im} z < d\}$, se denomina *rectángulo abierto*.

Los puntos $v_1 = a + ic$, $v_2 = b + ic$, $v_3 = b + id$, $v_4 = a + id$ se denominan los *vértices del rectángulo R* .

Proposición 5.1.8 — Versión compleja del teorema de Green. Si Ω es un subconjunto abierto no vacío en $\mathbb{C}$, R un rectángulo cerrado contenido en Ω y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω , entonces

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f dz.$$

Demostración. Si $R = \{x + iy \in \mathbb{C}; x \in [a, b] \text{ y } y \in [c, d]\}$ es un rectángulo cerrado contenido en Ω , con vértices $v_1 = a + ic$, $v_2 = b + ic$, $v_3 = b + id$, y $v_4 = a + id$, los lados de R , se pueden parametrizar como $\gamma_1(t) = t + ic$, con $a \leq t \leq b$, $\gamma_2(t) = b + it$, con $c \leq t \leq d$, $\gamma_3(t) = b + a - t + id$, con $a \leq t \leq b$ y $\gamma_4(t) = d + c - t$ con $c \leq t \leq d$. Por definición

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2} \int \int_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \iota \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

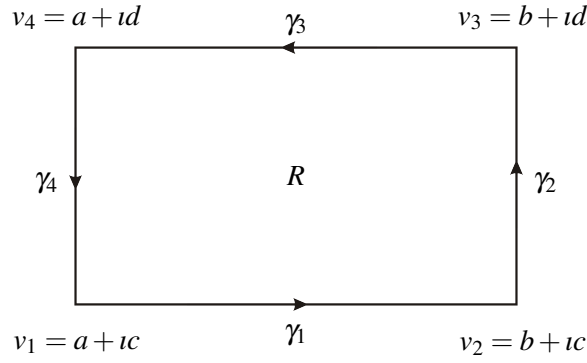


Figura 5.5: Rectángulo cerrado en Ω

Como

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [f(x, d) - f(x, c)] dx = \int_{-\gamma_3} f dz - \int_{\gamma_1} f dz,$$

de manera similar obtenemos:

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = -i \left(\int_{\gamma_2} f dz + \int_{\gamma_4} f dz \right).$$

Sumando las integrales anteriores obtenemos:

$$\int \int_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f dz = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f dz.$$

■

Corolario 5.1.3 Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, y f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , entonces para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ tenemos

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

Demostración. Si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, como consecuencia de la proposición anterior 5.1.8, tenemos $\int_{\partial R} f dz = 0$. ■

Este teorema es cierto en el caso en que f sea una función holomorfa.

A diferencia del corolario 5.1.3, el siguiente resultado no pide que la función f sea de clase $\mathcal{C}^1$, y es un resultado que juega un papel fundamental en nuestro estudio de las funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables, en particular, nos permitirá ver que estas funciones son holomorfas.

Teorema 5.1.9 — Teorema de Cauchy-Goursat. Si Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, y f es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en Ω entonces, para cualquier rectángulo cerrado $R \subset \Omega$,

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

Demostración. Consideremos un rectángulo cerrado $R = \{x + iy \in \mathbb{C}; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ contenido en Ω , donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $c < d$, y denotemos por $v_k, k = 1, \dots, 4$ los vértices de R , esto es $v_1 = a + ic$; $v_2 = b + ic$, $v_3 = b + id$ y $v_4 = a + id$, y tomemos los siguientes puntos auxiliares:

$$\begin{aligned} v_0 &:= \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4), & w_1 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2), & w_2 &= \frac{1}{2}(v_2 + v_3), \\ w_3 &= \frac{1}{2}(v_3 + v_4), & w_4 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_4) \end{aligned}$$

Esto es, v_0 es el centro del rectángulo R , y los puntos w_k son los puntos medios de cada uno de los lados de R .

Dividamos R en cuatro rectángulos cerrados R_1, R_2, R_3 y R_4 , donde R_1 tiene vértices v_1, w_1, v_0 y w_4 ; los vértices de R_2 son w_1, v_2, w_2 y v_0 ; R_3 tiene vértices v_0, w_2, v_3, w_3 , y finalmente, los vértices de R_4 son w_4, v_0, w_3 y v_4 , en este orden, por lo cual cada ∂R_k se recorre en sentido levógiro, como muestra la figura 5.6.

Como consecuencia de la proposición 5.1.5, tenemos que

$$\int_{\partial R} f dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} f dz.$$

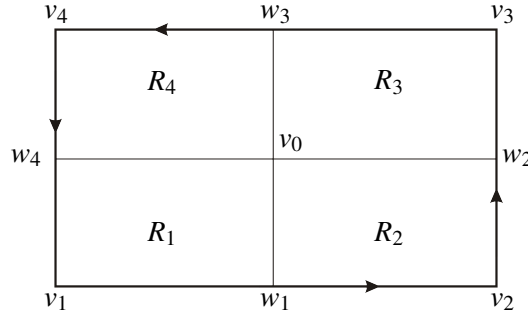


Figura 5.6: Rectángulos cerrados en Ω

Denotemos por

$$A := \left| \int_{\partial R} f dz \right|,$$

entonces

$$A := \left| \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} f dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial R_k} f dz \right|,$$

En particular, existe $v_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R_{v_1}} f dz \right| \geq \frac{1}{4} A.$$

Además, $\ell(\partial R_{v_1}) = \frac{1}{2} \ell(\partial R)$, y el diámetro de R_{v_1} es la mitad del diámetro de R , es decir:

$\text{diam}(R_{v_1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(R)$. De manera similar a la anterior, ahora dividamos R_{v_1} en cuatro rectángulos $R_{v_1, \mu}$, con $\mu = 1, \dots, 4$, introduciendo el centro, y los puntos medios de los lados de R_{v_1} , tenemos

$$\int_{R_{v_1}} f dz = \sum_{\mu=1}^4 \int_{\partial R_{v_1, \mu}} f dz,$$

luego entonces, existe $v_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R_{v_1, v_2}} f dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_{v_1}} f dz \right| \geq \frac{1}{4^2} A,$$

además,

$$\ell(\partial R_{v_1, v_2}) = \frac{1}{2} \ell(\partial R_{v_1}) = \frac{1}{2^2} \ell(\partial R),$$

y

$$\text{diam}(\partial R_{v_1, v_2}) = \frac{1}{2} \text{diam}(\partial R_{v_1}) = \frac{1}{2^2} \text{diam}(\partial R).$$

Iterando este proceso, encontramos una sucesión de rectángulos cerrados $\{R_{v_1, v_2, \dots, v_k} : k \in \mathbb{N}\}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. $R_{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}} \subset R_{v_1, v_2, \dots, v_k}$,
2. $\ell(\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}) = \frac{1}{2^k} \ell(\partial R)$,
3. $\text{diam}(R_{v_1, v_2, \dots, v_k}) = \frac{1}{2^k} \text{diam}(R)$, y
4. $\left| \int_{\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}} f dz \right| \geq \frac{1}{4^k} A$.

El inciso (1) nos dice que tenemos una sucesión

$$\{R_{v_1, v_2, \dots, v_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

de compactos anidados, aunado esto al inciso (3) tenemos que existe un único punto $\alpha \in R$ tal que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_{v_1, v_2, \dots, v_k} = \{\alpha\}.$$

Definimos $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, por $\varepsilon(z) = f(z) - [f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha)]$.

Como f es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , entonces ε es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , y $\varepsilon(\alpha) = 0$.

Así

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\varepsilon(z)}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\varepsilon(z) - \varepsilon(\alpha)}{z - \alpha} = 0.$$

Por tanto, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - \alpha| < \delta$ implica $|\varepsilon(z)| < \varepsilon|z - \alpha|$.

Como $f(\alpha) + (z - \alpha)f'(\alpha)$ es un polinomio en la variable z , como consecuencia del corolario anterior 5.1.3,

$$\int_{\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}} f(\alpha) + (z - \alpha)f'(\alpha) = 0.$$

Luego entonces

$$\int_{\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}} \varepsilon dz = \int_{\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}} f dz.$$

Por otra parte, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(R_{v_1, v_2, \dots, v_n}) = 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $\text{diam}(R_{v_1, v_2, \dots, v_k}) < \delta$. En particular $|z - \alpha| < \delta$, si $z \in R_{v_1, v_2, \dots, v_k}$. De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^k} A &\leq \left| \int_{\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}} f dz \right| = \left| \int_{\partial R_{v_1, v_2, \dots, v_k}} \varepsilon dz \right| \\ &\leq \varepsilon \text{diam}(R_{v_1, v_2, \dots, v_k}) \ell(R_{v_1, v_2, \dots, v_k}) = \varepsilon \frac{1}{2^k} \text{diam}(R) \frac{1}{2^k} \ell(R), \end{aligned}$$

es decir, $A < \varepsilon \text{diam}(R) \ell(\partial R)$.

Como ε es arbitraria, entonces $A = 0$. ■

Para poder aplicar este teorema necesitamos una versión más fuerte.

Teorema 5.1.10 Si Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, f una función $\mathbb{C}$ -valuada y continua en Ω , $z_0 \in \Omega$, y f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\Omega \setminus \{z_0\}$, entonces para cualquier rectángulo cerrado $R \subset \Omega$

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

Demostración. Si $z_0 \notin R$, aplicamos el teorema anterior. Si $z_0 \in \partial R$, sea R_ε un rectángulo cerrado contenido en el interior de R , y cuyos vértices convergen a R cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

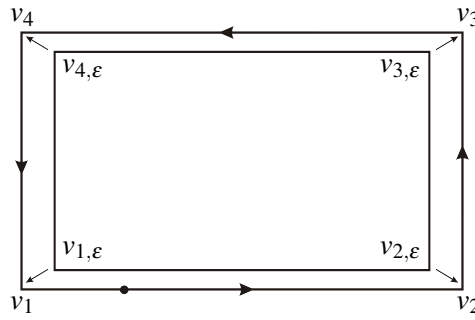


Figura 5.7: $R_\epsilon \rightarrow R$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$

Como f es continua en Ω y R es compacto, entonces f es uniformemente continua en R , luego entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial R_\epsilon} f dz = \int_{\partial R} f dz.$$

Pero, como consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat $\int_{\partial R_\epsilon} f dz = 0$, de donde $\int_{\partial R} f dz = 0$.

Finalmente, supongamos que z_0 es un punto en el interior del rectángulo R , esto es $z_0 \in (a, b) \times (c, d)$, digamos $z_0 = \alpha + i\beta$. Sea R_1 el rectángulo con vértices $v_1 = a + ic$, $w_1 = \alpha + ic$, $w_2 = \alpha + id$ y $v_4 = a + id$, R_2 el rectángulo con vértices $w_1, v_2 = b + ic$, $v_3 = b + id$, w_2 , como se muestra en la figura 5.8.

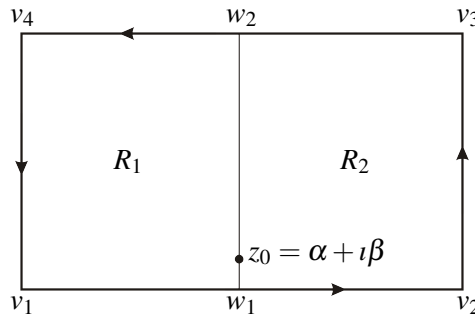


Figura 5.8: El punto z_0 en el interior del rectángulo R

Entonces

$$\int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_1} f dz + \int_{\partial R_2} f dz.$$

Como $z_0 \in \partial R_1$ y $z_0 \in \partial R_2$, en el caso anterior mostramos que $\int_{\partial R_k} f dz = 0$, para $k = 1, 2$, de donde

$$\int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_1} f dz + \int_{\partial R_2} f dz = 0.$$

■

5.2 El teorema de Cauchy para rectángulos

A partir de este momento, y a menos que se especifique lo contrario, si R es un rectángulo cerrado, su frontera ∂R , se recorrerá en sentido levógiro.

Lema 5.2.1 Si R es un rectángulo cerrado en $\mathbb{C}$, y $z_0 \in R \setminus \partial R$ es un punto en el interior de R , entonces

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i.$$

Demostración. Dado $t \in [0, 1]$, existe un único $\rho(t)$ tal que, en la frontera de R , tenemos el punto $z_0 + \rho(t)e^{2\pi it}$. Consideremos la curva suave por partes $r(t) = z_0 + \rho(t)e^{2\pi it}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_0^1 \frac{1}{\rho(t)e^{2\pi it}} \frac{d\rho(t)e^{2\pi it}}{dt} dt = \int_0^1 \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + \int_0^1 2\pi i dt \\ &= \ln(\rho(1)) - \ln(\rho(0)) + 2\pi i = 2\pi i \end{aligned}$$

donde el logaritmo es el logaritmo real de un número positivo, y como $\rho(0) = \rho(1)$, entonces $\ln(\rho(1)) - \ln(\rho(0)) = 0$. ■

Teorema 5.2.1 — Teorema de Cauchy para rectángulos. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado, z_0 un punto en el interior de R , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. Para $z \in \Omega$, la función

$$\varphi_f(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

dada en la proposición 4.3.7, página 72, es continua en Ω , y $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\Omega \setminus \{z_0\}$, así como consecuencia del teorema 5.1.10 y el lema 5.2.1, se tiene $\int_{\partial R} \varphi_f dz = 0$, y

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} \varphi_f dz &= \int_{\partial R} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\partial R} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0), \end{aligned}$$

de donde $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. ■

Teorema 5.2.2 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío, y f es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , entonces f es holomorfa en Ω , es decir, dado $z_0 \in \Omega$, existe $r > 0$, la cual depende de z_0 y Ω , y existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ para toda z tal que $|z - z_0| < r$.

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$, y sea $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado tal que $z_0 \in R \setminus \partial R$, y tomemos $r > 0$ tal que $B(z_0, r)$, la bola cerrada con centro en z_0 y radio r esté contenida en el interior del rectángulo R . Como consecuencia del teorema de Cauchy para rectángulos tenemos:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Por otra parte

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - z_0} \left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^{-1} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad \text{si } |w - z_0| < |z - z_0|.$$

Si $w \in B(z_0, r)$ y $z \in \partial R$, entonces $|w - z_0| \leq \tau|z - z_0|$, con $0 < \tau < 1$, y τ solo depende de r y R . Luego entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

y como la serie converge uniformemente para $w \in B(z_0, r)$, y $z \in \partial R$, podemos intercambiar la suma con la integral, de donde

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) (w - z_0)^n,$$

o equivalentemente $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n$, con $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$.

Es decir, toda función $\mathbb{C}$ -diferenciable es holomorfa. ■

En vista de esto, los conceptos $\mathbb{C}$ -diferenciable, holomorfo y $\mathbb{C}$ -analítico, son equivalentes, y los usaremos indistintamente a partir de este momento. Más aún, como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, entonces $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$, y el valor c_k es independiente de ∂R , además la identidad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

se satisface para $|z - z_0| < \rho$, donde ρ es el radio de convergencia de la serie.

Corolario 5.2.1 Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, y $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ en Ω , entonces f es holomorfa.

No podemos suprimir la condición $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, pues como sabemos, la función $f(z) = \bar{z} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y f no es holomorfa.

Corolario 5.2.2 Toda función $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω es infinitamente $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Corolario 5.2.3 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, si $|z - z_0| < \rho$, donde ρ es la distancia del punto z_0 a la frontera de Ω , esto es, $\rho = d(z_0, \partial\Omega)$. Recuerde que $d(z_0, \partial\Omega) = \min\{d(z_0, \omega) \in \mathbb{R}; \omega \in \partial\Omega\}$.

Corolario 5.2.4 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω , $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado, y z_0 un punto en el interior de R , entonces $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$.

Demostración. Como mencionamos anteriormente $f^{(k)}(z_0) = k!c_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$. ■

Teorema 5.2.3 — Teorema de Morera. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua en Ω , y si $\int_{\partial R} f dz = 0$ para todo rectángulo cerrado $R \subset \Omega$, entonces f es holomorfa en Ω .

Demostración. Dado $z_0 = \alpha + i\beta \in \Omega$, consideremos $r > 0$ tal que $B = B(z_0, r) \subset \Omega$.

Si $z \in B(z_0, R)$, es de la forma $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$), sean $z' = x + i\beta$, y $\gamma_z = \gamma_1 + \gamma_2$, donde γ_1 es el segmento de recta que une z_0 con z' , y γ_2 es el segmento que une z' con z , los cuales podemos parametrizar como: $\gamma_1(t) = t + i\beta$, con $t \in [\alpha, x]$; y $\gamma_2(t) = x + it$ con $t \in [\beta, y]$ respectivamente.

Definimos $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw$.

Si $h \neq 0$ es un número real tal que $z + ih \in B(z_0, r)$, entonces

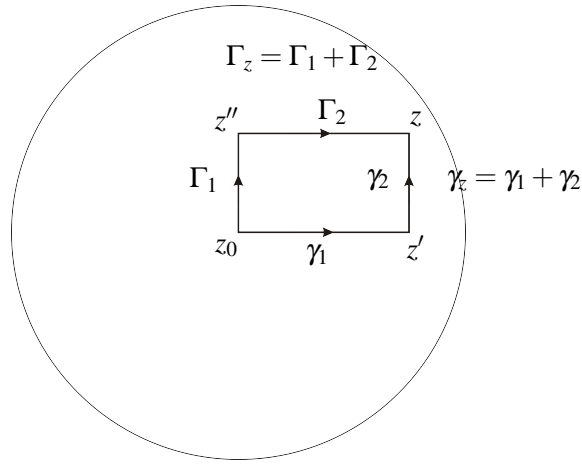


Figura 5.9: El teorema de Morera

$$\frac{F(z + \iota h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\lambda} f(w) dw,$$

donde λ es el segmento de recta que une z con el punto $z + \iota h$, por ende, $\lambda(t) = x + \iota t$, con $y \leq t \leq y + h$, y $\dot{\lambda}(t) = \iota$. Entonces

$$\frac{F(z + \iota h) - F(z)}{h} = \frac{\iota}{h} \int_y^{y+h} f(x + \iota t) dt.$$

De donde, para cada $z \in B(z_0, r)$ tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + \iota h) - F(z)}{h} = \iota f(z).$$

Por otra parte, si $z'' = \alpha + \iota y$, y Γ_z es la curva $\Gamma_1 + \Gamma_2$, donde Γ_1 es el segmento de recta que une z_0 con z'' , y Γ_2 el segmento que une z'' con z , si $h \neq 0$ es un número real suficientemente pequeño, entonces:

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_L f(w) dw,$$

donde L es el segmento de recta que une z con el punto $z + h$, por ende, $\lambda(t) = t + \iota y$, con $x \leq t \leq x + h$, y $\dot{\lambda}(t) = 1$, y procediendo de manera similar a la realizada en el párrafo anterior, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Afirmamos que:

$$\int_{\gamma_z} f = \int_{\Gamma_z} f.$$

Si $x \neq \alpha$ y $y \neq \beta$, y consideramos el rectángulo R con vértices z_0, z', z, z'' , su frontera ∂R , está dada por $\gamma_z - \Gamma_z$, y por hipótesis $\int_{\partial R} f = 0$, luego entonces:

$$0 = \int_{\partial R} f = \int_{\gamma_z} f - \int_{\Gamma_z} f.$$

Por otra parte, si $x = \alpha$, entonces $z' = z_0$ y $z'' = z$, de donde

$$\int_{\gamma_z} f = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f + \int_{\overrightarrow{z z}} f = \int_{z' z} f = \int_{z_0 z} f$$

ya que $\overrightarrow{z_0 z}$ se reduce a un punto y por tanto $\int_{\overrightarrow{z_0 z}} f = 0$.

Análogamente, como $\overrightarrow{z'' z}$ se reduce a un punto $\int_{\Gamma_z} f = \int_{\overrightarrow{z_0 z}} f$.

Cuando $y = \beta$ se procede de manera similar a la anterior, de donde $\int_{\gamma_z} f(w) dz = \int_{\Gamma_z} f(w) dw$.

Como las derivadas parciales $\partial F / \partial x = f$, y $\partial F / \partial y = \iota f$, existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\partial F / \partial x = f = -\iota(\iota f) = -\iota(\partial F / \partial y)$, entonces F es $\mathbb{C}$ -diferenciable en z , para cada $z \in B(z_0, r)$, y como z_0 es un punto arbitrario de Ω , y por la proposición 4.3.3 F es holomorfa en Ω . ■

Como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, si tenemos una función holomorfa F , definida en un abierto conexo no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$, tal que $F' = f$, entonces $\int_{\gamma} f dz = 0$ para cualquier curva cerrada, suave por partes contenida en Ω . Recíprocamente, el resultado anterior nos dice que, si f satisface la condición $\int_{\partial R} f = 0$, para cualquier rectángulo cerrado contenido en Ω , entonces f es holomorfa, lo cual proporciona otra caracterización de las funciones holomorfas.

En otras palabras, hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 5.2.4 — Caracterización de funciones holomorfas. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La función f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω .
2. La función f tiene derivadas parciales en cada punto de Ω , y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann en cada punto Ω .
3. Para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ se tiene que

$$\int_{\partial R} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

4. Para cada rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ se tiene que

$$f(z) = \int_{\partial R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para cada punto z en el interior de R .

5. La función f admite un desarrollo en serie de potencias alrededor de cada punto $z \in \Omega$.

Demostración. En el capítulo 4 demostramos en la proposición 4.3.2 que $1 \Rightarrow 2$, y del teorema de Looman-Menchof 4.3.4 se tiene que $2 \Rightarrow 1$.

En el presente capítulo, demostramos el teorema de Cauchy-Goursat 5.1.9, el cual nos dice que $1 \Rightarrow 3$ y también el teorema de Morera 5.2.3 que nos da el recíproco del teorema de Cauchy-Goursat, es decir, $3 \Rightarrow 1$.

También demostramos el teorema de Cauchy para rectángulos 5.2.1 por lo que $1 \Rightarrow 4$.

Como consecuencia del teorema de Cauchy para rectángulos 5.2.1 obtenemos en el teorema 5.2.2 que nos dice que toda función $\mathbb{C}$ -diferenciable es holomorfa.

Por otra parte, en la proposición 4.3.12 demostramos que toda función holomorfa es $\mathbb{C}$ -diferenciable.

Finalmente, el teorema de Cauchy para rectángulos implica que toda función diferenciable es holomorfa. ■

Definición 5.2.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, no vacío, f una función holomorfa en Ω . Una primitiva de f sobre Ω es una función F , holomorfa en Ω , cuya derivada es f , es decir, $F' = f$.

Como consecuencia de que toda función holomorfa admite un desarrollo en serie de potencias, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 5.2.5 Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ en la bola abierta con centro en z_0 y radio r , $B(z_0, r)$, entonces f tiene una primitiva en $B(z_0, r)$.

Demostración. Definamos $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$, claramente $F' = f$ y como consecuencia del corolario 4.3.4, el radio de convergencia de F coincide con el de f . Por tanto, F es una primitiva de f en $B(z_0, r)$. ■

Proposición 5.2.6 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo, y sea f una función holomorfa en Ω . Si F y G son dos primitivas de f en Ω , entonces $F - G$ es constante por la proposición 4.3.11.

Demostración. Como F y G son primitivas de f en Ω , entonces $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$, y como Ω es conexo, tenemos que la función $F - G$ es constante. ■

5.3 Consecuencias del teorema de Cauchy

En la presente sección, analizaremos el comportamiento de las funciones holomorfas, en particular veremos como ciertas condiciones locales determinan el comportamiento global de la función.

El siguiente resultado es uno de los principales teoremas sobre la convergencia de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables, este teorema fue formulado por Karl Weierstrass aproximadamente en 1860.

Teorema 5.3.1 — Teorema de Weierstrass de convergencia de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo, y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables definidas en Ω . Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre cada disco cerrado contenido en Ω , entonces f es $\mathbb{C}$ -diferenciable. Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$ puntualmente sobre Ω y uniformemente sobre cualquier disco cerrado contenido en Ω .

Análogamente, si $\{g_k\}$ es una sucesión de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables definidas sobre un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, y si $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente sobre cada disco cerrado contenido en Ω , entonces g es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω y $g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k(z)$ puntualmente sobre Ω y uniformemente sobre cualquier disco cerrado contenido en Ω .

La demostración del teorema de convergencia de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables depende del teorema de Morera 5.2.3 y del teorema de Cauchy para rectángulos 5.2.1, que estudiamos en la sección anterior. Para la demostración de este teorema requeriremos además del siguiente lema.

Lema 5.3.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto conexo, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva en Ω y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en $\gamma([0, 1])$ las cuales convergen uniformemente a f en $\gamma([0, 1])$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} f dz.$$

Análogamente, si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en $\gamma([0, 1])$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformemente sobre $\gamma([0, 1])$, entonces

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} g_n dz.$$

Demostración. Como consecuencia del Criterio de Cauchy para convergencia uniforme, se sigue que la función f es continua, por tanto, integrable. Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/\ell(\gamma)$ para toda $z \in \gamma([0, 1])$.

Entonces, como consecuencia de la proposición 5.1.6,

$$\left| \int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n - f) \right| \leq \int_{\gamma} |f_n - f| |dz| < \varepsilon.$$

La segunda afirmación es consecuencia de la primera, aplicando el resultado a la sucesión de sumas parciales. ■

A continuación presentamos la demostración del teorema de convergencia de funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables.

Demostración. Basta demostrar la primera parte. Sean $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre $\overline{B(z_0, r)}$, entonces f es continua sobre $\overline{B(z_0, r)}$. Sea γ cualquier curva cerrada en $\overline{B(z_0, r)}$. Como f_n es $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces $\int_{\gamma} f_n = 0$. Como consecuencia del lema anterior 5.3.1, se tiene que $\lim \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$, de donde $\int_{\gamma} f = 0$. Así, por el teorema de Morera 5.2.3 f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $B(z_0, r)$.

Debemos demostrar que f'_n converge uniformemente a f' en conjuntos cerrados. Para hacer esto, usaremos del teorema de Cauchy 5.2.1. Sea $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$, y sea $\rho > r$ tal que la circunferencia con centro z_0 y radio ρ , $\gamma = z_0 + \rho e^{2\pi i t}$, con $t \in [0, 1]$ esté contenida en Ω .

Para cada $z \in B(z_0, r)$, como consecuencia del teorema de Cauchy 5.2.1, página 124, tenemos

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \text{y} \quad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Por hipótesis la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre el disco cerrado $\overline{B(z_0, \rho)} \subset \Omega$. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, podemos elegir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ sobre $\gamma([0, 1])$. Además,

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right|.$$

Como $|\zeta - z_0| = \rho$ y $z \in \overline{B(z_0, r)}$, entonces $|\zeta - z| \geq \rho - r$. Por lo cual, si $n \geq N$, se tiene que

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(\rho - r)^2} \ell(\gamma) = \frac{\varepsilon \rho}{(\rho - r)^2}.$$

Como ρ y r son constantes fijas independientes de $z \in \overline{B(z_0, r)}$, tenemos que f'_n converge uniformemente a f' sobre discos cerrados. ■

Un resultado que nos habla del comportamiento especial de las funciones holomorfas es el siguiente:

Teorema 5.3.2 — Principio de continuación analítica. Sea Ω un subconjunto abierto, conexo, no vacío de $\mathbb{C}$, y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si existe un subconjunto abierto no vacío U contenido en Ω tal que $f(z) = 0$ para cada $z \in U$, entonces $f(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$.

Demostración. Para $n \geq 1$ denotemos por $f^{(n)}$ la n -ésima derivada de f , y $f^{(0)} = f$, y denotemos por E_n el conjunto de puntos $z \in \Omega$ cuya n -ésima derivada es cero, esto es, $E_n = \{z \in \Omega; f^{(n)}(z) = 0\}$, y definimos $E = \bigcap_{n \geq 0} E_n$.

Queremos demostrar que $E = \Omega$, para lo cual demostraremos que E es un conjunto no vacío, cerrado y abierto en Ω , y como Ω es conexo, entonces E debe coincidir con Ω .

Como $f(z) = 0$ para toda $z \in U \neq \emptyset$, entonces $U \subset E$, por ende, $E \neq \emptyset$.

Como $f^{(n)}$ es continua, y E_n es la imagen inversa de un punto, que en particular es un conjunto cerrado, entonces E_n es un conjunto cerrado. Por otra parte, como la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, entonces E es un conjunto cerrado en Ω .

Ahora demostraremos que E es abierto, sea $z_0 \in E$, como f es holomorfa en Ω , existe $r > 0$ y una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, para toda $z \in B(z_0, r)$ y como toda función holomorfa es diferenciable tenemos

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k},$$

donde $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. Como $z_0 \in E$, entonces $f^{(k)}(z_0) = 0$ para toda $k \geq 0$, de donde $c_k = 0$ para toda $k \geq 0$, por lo que $f(z) = 0$ para toda $z \in B(z_0, r)$, es decir $B(z_0, r) \subset E$. Por tanto, E es abierto.

Como E es abierto, cerrado y no vacío en un conjunto conexo, entonces $E = \Omega$, y por tanto, $f \equiv 0$ en Ω . ■

Definición 5.3.1 — Serie de Taylor. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío, f una función holomorfa en Ω , y $z_0 \in \Omega$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

se denomina la *serie de Taylor de f en z_0* .

Como consecuencia del principio de continuación analítica, teorema 5.3.2, página 129, tenemos que la serie de Taylor de f en z_0 converge a f en una vecindad de z_0 , además de que es la única serie $\sum c_n(z - z_0)^n$ con esta propiedad.

Ejemplo 33

1. Consideremos la función $f(z) = (1 - z)^{-1}$, claramente f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, en particular en el punto $z_0 = 0$. Por lo que, podemos obtener la serie de Taylor de f en $z_0 = 0$.

Como $f(z) = (1 - z)^{-1}$, podemos ver que $f'(z) = (1 - z)^{-2}$, y en general, la n -ésima derivada de f está dada como $f^{(n)}(z) = n!(1 - z)^{-(n+1)}$, por tanto, $f^{(n)}(0) = n!$ los coeficientes de la serie de Taylor de f están dados como $c_n = f^{(n)}(0) = n! = 1$, para $n \geq 0$.

Luego entonces la serie de Taylor de f alrededor del punto $z_0 = 0$ está dada por la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, la cual tiene radio de convergencia $r = 1$.

2. Como consecuencia de esto, la serie de Taylor de la función $g(z) = (1 - z)^{-2}$ alrededor de $z_0 = 0$ está dada como $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$, pues $f(z) = (1 - z)^{-1}$, implica que $f'(z) = -(1 - z)^{-2}(-1) = (1 - z)^{-2} = g(z)$.

3. Consideremos ahora la función,

$$\log(z + 1) = \ln|z + 1| + i \arg(z + 1),$$

con $-\pi < \arg(z+1) < \pi$, en particular $z_0 = 0$ está en el dominio de analiticidad de la función $\log(z+1)$.

Como $\frac{d \log(z+1)}{dz} = \frac{1}{z+1}$ entonces la n -ésima derivada de $\log(z+1)$ está dada como $\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(z+1)^{-n}$ si $n \geq 1$. Por ende, los coeficientes de su serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ están dados por $c_0 = \log(1) = 0$, y $c_n = \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right) / n! = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Por tanto, la serie de Taylor de $\log(z+1)$ alrededor de $z_0 = 0$ está dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, y la serie converge si $|z| < 1$.

4. Si $h(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, aplicando fracciones parciales podemos encontrar números complejos A y B , tales que

$$\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

a saber $A = -1$ y $B = 1$, es decir:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2}.$$

Como vimos anteriormente, la función $(1-z)^{-1}$ en $z_0 = 0$ tiene serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, por otra parte, procediendo de manera análoga al primer ejemplo, tenemos que la serie de Taylor de $(z-2)^{-1}$ está dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n$, la cual tiene radio de convergencia 2.

Por lo que, la serie de Taylor de $h(z)$ en $z_0 = 0$ está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} z^n,$$

y la serie converge si $|z| < 1$.

5. La serie de Taylor de e^z alrededor de $z_0 = 0$ está dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, y tiene radio de convergencia infinito, es decir, la expresión converge para toda $z \in \mathbb{C}$. Esto es consecuencia de la definición de la función exponencial, y de la unicidad de la serie de Taylor.
De manera similar, podemos demostrar que:
6. La serie de Taylor de e^{z^2} alrededor de $z_0 = 0$ está dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$, y tiene radio de convergencia infinito, es decir, la expresión converge para toda $z \in \mathbb{C}$.
7. La serie de Taylor de $\sin z$, alrededor de $z_0 = 0$, está dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$, y esta expresión converge para toda $z \in \mathbb{C}$.
8. La serie de Taylor de $\cos z$, alrededor de $z_0 = 0$, está dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, y esta expresión converge para toda $z \in \mathbb{C}$.
9. A continuación procederemos a obtener los primeros términos de la serie de Taylor para la función $\tan z$, alrededor de $z_0 = 0$.
Como $\tan z = \sin z / \cos z$ y $\cos 0 = 1$, tenemos que $\tan z$ es holomorfa en una vecindad de $z_0 = 0$, luego entonces, existe $r > 0$ y una sucesión de números complejos c_n tales que $\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, y la expresión converge si $|z| < r$.

En particular

$$\operatorname{sen} z = \tan z \cos z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) \cos z.$$

Sustituyendo las expresiones en serie de Taylor de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ en $z_0 = 0$ obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \right).$$

Usando ahora el hecho de, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$, con $d_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} & z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\ &= c_0 + c_1 z + \left(c_2 - \frac{c_0}{2!} \right) z^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!} \right) z^3 \\ & \quad + \left(c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!} \right) z^4 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} \right) z^5 \\ & \quad + \left(c_6 - \frac{c_4}{2!} + \frac{c_2}{4!} - \frac{c_0}{6!} \right) z^6 + \dots \end{aligned}$$

Comparando término a término, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= c_0 & 1 &= c_1 \\ 0 &= c_2 - \frac{c_0}{2!} & -\frac{1}{3!} &= c_3 - \frac{c_1}{2!} \\ 0 &= c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!} & \frac{1}{5!} &= c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} \\ 0 &= c_6 - \frac{c_4}{2!} + \frac{c_2}{4!} - \frac{c_0}{6!} \dots \end{aligned}$$

de donde, podemos deducir $0 = c_0 = c_2 = c_4 = c_6 = \dots$ y $c_1 = 1$, $c_3 = \frac{c_1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$, $c_5 = \frac{1}{5!} + \frac{c_3}{2!} - \frac{c_1}{4!} = \frac{2}{15}, \dots$

Por ende, la serie de Taylor de $\tan z$ en $z = 0$ está dada por $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots$, y la serie converge si $|z| < \pi/2$.

Teorema 5.3.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto conexo, y f una función holomorfa en Ω . Si

$$Z_f := \{z \in \Omega; f(z) = 0\}$$

entonces Z_f es un conjunto discreto si f no es idénticamente nula. Es decir, Z_f es un conjunto cerrado y cada punto de Z_f es aislado.

El conjunto Z_f es el *conjunto de ceros de la función holomorfa f* .

Demostración. Como f es continua entonces Z_f es un conjunto cerrado. Sea $z_0 \in Z_f$, entonces existe una vecindad U de z_0 y una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in U$$

Tenemos que $c_0 = f(z_0) = 0$. Como f no es idénticamente nula, como consecuencia del principio de continuación analítica, teorema 5.3.2, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \neq 0$. Sea k el mínimo entero positivo n tal que $c_n \neq 0$. Entonces

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k g(z)$$

Claramente $g(a) = c_k \neq 0$, por lo cual, existe una vecindad $V \subset U$ de a tal que $g(z) \neq 0$ para cada $z \in V$. Luego entonces

$$Z_f \cap V = \{z_0\}$$

es decir, z_0 es un punto aislado de Z_f . ■

Corolario 5.3.1 — Principio de la identidad. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto conexo, si f y g son dos funciones holomorfas en Ω y si el conjunto

$$\{z \in \Omega; f(z) = g(z)\}$$

tiene un punto de acumulación en Ω , entonces f coincide con g en Ω .

Demostración. Sea $h = f - g$, como Z_h tiene un punto de acumulación como consecuencia del teorema anterior Z_h no es discreto, por lo tanto $h \equiv 0$ en Ω . ■

Corolario 5.3.2 Si f es una función holomorfa, $\mathbb{C}$ -valuada definida en un abierto conexo Ω , y f no es idénticamente cero, entonces para cada $z_0 \in \Omega$ con $f(z_0) = 0$ existe un entero $n \geq 1$ y una función holomorfa g definida en una vecindad de z_0 tal que $g(z_0) \neq 0$ y $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ para toda $z \in \Omega$. Esto es, cada cero de f tiene multiplicidad finita.

Demostración. Sea $n - 1$ el máximo entero positivo tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$ para $0 \leq k \leq n - 1$ y definamos

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} & \text{si } z \neq z_0 \\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Como f es holomorfa, y $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n},$$

de donde $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n}$ es holomorfa en una vecindad de z_0 . ■

En este caso se dice que f tiene un cero en z_0 de multiplicidad n .

Teorema 5.3.4 — Teorema de independencia de trayectorias. Si f es una función continua sobre un conjunto abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. (Independencia de la trayectoria) Si z_0 y z_1 son dos puntos en Ω , y las curvas γ_0 y γ_1 son trayectorias en Ω de z_0 a z_1 , entonces $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.
2. Si γ es una curva cerrada contenida en Ω , entonces $\int_{\gamma} f = 0$.
3. Existe una primitiva (global) de f en Ω .

Demostración. Es claro que las condiciones 1 y 2 son equivalentes.

Que el enunciado 3. implique el 1. es consecuencia del teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

Recíprocamente, como consecuencia del teorema de Morera 5.2.3, f es holomorfa en Ω , de donde, f es $\mathbb{C}$ -diferenciable en Ω , y como consecuencia del principio de continuación analítica, f tiene primitiva en Ω . ■

Teorema 5.3.5 — Teorema de Cauchy-Goursat para bolas. Si f es holomorfa en la bola con centro en z_0 y radio ρ , entonces f tiene una primitiva en $B(z_0, \rho)$. Además, para cada curva cerrada γ contenida en $B(z_0, \rho)$ tenemos que $\int_{\gamma} f = 0$.

Demostración. Como consecuencia de la proposición 5.2.5, la función f tiene primitiva en $B(z_0, \rho)$.

Y como consecuencia del teorema de independencia de las trayectorias 5.3.4, tenemos que, para cualquier curva cerrada γ contenida en $B(z_0, \rho)$, se tiene que $\int_{\gamma} f = 0$. ■

Teorema 5.3.6 — Fórmula integral de Cauchy para bolas. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ es tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, entonces, para cada función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y cada $w \in B(z_0, r)$ se tiene que:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz,$$

donde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ está dada como $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$.

Demostración. Definimos la función $\varphi_f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\varphi_f(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & z \in \Omega \setminus \{w\} \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

Entonces φ_f es holomorfa en Ω , para ver esto, basta verificar que φ_f es holomorfa en una vecindad de w . Como f es holomorfa en Ω , f admite un desarrollo en serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - w)^n$ en una vecindad de w , y tenemos que $\varphi_f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - w)^{n-1}$ para estos valores de z , como consecuencia del teorema anterior 5.3.5, se tiene $\int_{\gamma} \varphi_f = 0$ de donde

$$0 = \int_{\gamma} \varphi_f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dz,$$

así $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz = f(w) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - w} = 2\pi i f(w)$. ■

Este resultado se puede generalizar y determinar el valor de la k -ésima derivada de la función f en un punto z_0 en términos de la integral de la función $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$, para lo cual, demostraremos primeramente el siguiente resultado:

Lema 5.3.2 Supongamos que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva rectificable, y que φ está definida y es continua sobre la traza de la curva γ . Para cada entero $m \geq 1$, si se define

$$F_m(z) := \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^m} d\zeta$$

para cada $z \notin im(\gamma)$. Entonces cada F_m es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{im(\gamma)\}$ y $F'_m(z) = mF_{m+1}(z)$.

Demostración. Primeramente veremos que cada función F_m es continua. Si fijamos un punto $z_0 \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{im(\gamma)\}$ y definimos $r = d(z_0, \gamma)$, note que como $im(\gamma)$ es un conjunto compacto y φ es una función continua en $im(\gamma)$, entonces su imagen es compacta, en particular es acotada, digamos $|\varphi(\zeta)| \leq M$ para todo $\zeta \in im(\gamma)$.

Como $a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1})$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - z)^m} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^m} &= \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) \sum_{k=1}^m \frac{1}{(\zeta - z)^{m-k}} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{k-1}} \\ &= (z - z_0) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^m (\zeta - z_0)} + \frac{1}{(\zeta - z)^{m-1} (\zeta - z_0)^2} + \dots + \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^m} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad anterior por $\varphi(\zeta)$, e integrando a lo largo de γ , obtenemos:

$$F_m(z) - F_m(z_0) = (z - z_0) \int_{\gamma} \left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^m (\zeta - z_0)} + \dots + \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^m} \right) d\zeta \quad (5.3)$$

donde $z \in B(z_0, r/2)$ y $\zeta \in im(\gamma)$, por lo que $|z - z_0| < r/2$, $|\zeta - z_0| \geq r > r/2$ y $|\zeta - z| < r/2$, luego entonces

$$\left| \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{m-k} (\zeta - z_0)^{k+1}} \right| < \left(\frac{2}{r} \right)^{m+1} M.$$

Para toda $\varepsilon > 0$, si $\delta := \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\varepsilon r^{m+1}}{M \ell(\gamma) 2^{m+1}} \right\} \leq \frac{r}{2}$ y si $|z - z_0| < \delta$ como consecuencia de la ecuación (5.3) tenemos que

$$|F_m(z) - F_m(z_0)| \leq |z - z_0| M \ell(\gamma) \left(\frac{2}{r} \right)^{m+1} < \delta \ell(\gamma) M \left(\frac{2}{r} \right)^{m+1} < \varepsilon,$$

es decir, la función F_m es continua.

Ahora, dividiendo ambos lados de la ecuación (5.3) por $z - z_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} &= \int_{\gamma} \left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^m (\zeta - z_0)} + \dots + \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^m} \right) d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^m (\zeta - z_0)} d\zeta + \dots + \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^m} d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) (\zeta - z_0)^{-1}}{(\zeta - z)^m} d\zeta + \dots + \frac{\varphi(\zeta) (\zeta - z_0)^{-m}}{(\zeta - z)} d\zeta. \end{aligned}$$

Como $z_0 \notin im(\gamma)$, la función

$$\varphi(\zeta) (\zeta - z_0)^{-k} = \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k}.$$

es continua en la traza de la curva γ para cada k . Por el argumento de la primera parte de la demostración se sigue que cada una de las integrales del lado derecho es una función continua de z . Por lo tanto, si $z \rightarrow z_0$ se sigue que

$$\begin{aligned} F'_m(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_m(z) - F_m(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^m (\zeta - z_0)} d\zeta + \dots + \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^m} d\zeta \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta) (\zeta - z_0)^{-1}}{(\zeta - z)^m} d\zeta + \dots + \frac{\varphi(\zeta) (\zeta - z_0)^{-m}}{(\zeta - z)} d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta + \dots + \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta \\ &= m F_{m+1}(z_0). \end{aligned}$$

■

Corolario 5.3.3 — Fórmula integral de Cauchy para derivadas. Sean f una función holomorfa definida en un abierto conexo Ω , y $z_0 \in \Omega$. Si $r > 0$ es tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, y γ es la circunferencia con centro en z_0 y radio $r > 0$ parametrizada por $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ con $0 \leq t \leq 1$. Entonces, para cada $z \in B(z_0, r)$ se tiene que

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Demostración. Dado $z \in B(z_0, r)$, como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy para bolas, teorema 5.3.6,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Aplicando el lema 5.3.2, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$, y aplicando el mismo lema 5.3.2 a $f'(z)$ tenemos

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta.$$

Y al iterar el procedimiento tenemos:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

para cada $k \geq 0$. ■

Aún más, podemos ver que el valor de una función holomorfa en un punto es siempre el promedio de los valores que dicha función toma sobre los puntos de cualquier circunferencia que tenga a dicho punto como centro, esto es:

Corolario 5.3.4 — Principio de la media. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ es tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$, entonces, para cada función f holomorfa en Ω se tiene que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Demostración. Como consecuencia de la fórmula de Cauchy para bolas, si $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$ está dada por $\gamma(t) = z_0 + e^{it}$ se tiene que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + e^{it})}{(z_0 + e^{it}) - z_0} ie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + e^{it}) dt.$$
■

Como consecuencia del principio de la media 5.3.4 tenemos

Corolario 5.3.5 — Desigualdad de la media. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ es tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$. Entonces, para cada función f holomorfa en Ω se tiene que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

Demostración. Como consecuencia del principio de la media 5.3.4 tenemos:

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$
■

La fórmula integral de Cauchy para bolas nos permitirá obtener la serie de Taylor de una función holomorfa dada.

Teorema 5.3.7 — Teorema de Taylor. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y sea $B(z_0, r)$ la bola abierta con centro z_0 y radio r . Si f es holomorfa en $B(z_0, r)$, entonces la serie de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ para toda $z \in B(z_0, r)$.

Demostración. Sea $0 < \rho < r$ y $w \in B(z_0, \rho)$ fijo, entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - w} dz,$$

donde $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{2\pi i t}$ para $0 \leq t \leq 1$.

Ahora

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - z_0} \left(1 - \frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

la serie converge uniformemente para $|z - z_0| = \rho$ y $|w - z_0| < \rho$, entonces

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n \quad \text{donde} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Como consecuencia del principio de continuación analítica 5.3.2, página 129,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

De donde, la serie de Taylor de f en z_0 converge a f sobre $B(z_0, \rho)$. Como $\rho < r$ es arbitraria, esto demuestra el resultado. ■

Teorema 5.3.8 — Desigualdades de Cauchy. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, y $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Si f es una función holomorfa en $B(z_0, R)$, y si para $0 < \rho < R$ definimos $M_{\rho} = \sup_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|$, entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_{\rho}}{\rho^n}.$$

Equivalentemente, si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ es la serie de Taylor de f en z_0 , entonces

$$|c_n| \leq \frac{M_{\rho}}{\rho^n} \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Demostración. Como consecuencia del teorema anterior, si $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{2\pi i t}$ para $0 \leq t \leq 1$, y $n \geq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 f(z_0 + \rho e^{2\pi i t}) (\rho e^{2\pi i t})^{-n-1} \frac{d}{dt} (\rho e^{2\pi i t}) dt \\ &= \rho^{-n} \int_0^1 f(z_0 + \rho e^{2\pi i t}) \cdot e^{-2\pi i n t} dt, \end{aligned}$$

de donde

$$|c_n| \leq \rho^{-n} \int_0^1 |f(z_0 + \rho e^{2\pi i t})| dt \leq M_{\rho} \rho^{-n}.$$

■

Definición 5.3.2 Diremos que una función es *entera*, si la función está definida y es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

Ejemplo 34

1. Si $c \in \mathbb{C}$, y $f(z) = c$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces f es entera.
2. Si $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ es una función polinomial de grado n con $a_n \neq 0$, entonces f es entera.
3. $f(z) = ae^{bz}$, con $a, b \in \mathbb{C}$ fijos, es una función entera.
4. La suma, el producto, y la composición de funciones enteras, es entera.

En particular, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.3.6 Si f es una función entera, entonces f tiene una representación en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

con radio de convergencia infinito.

Teorema 5.3.9 — Teorema de Liouville. Si f es una función entera y acotada, entonces f es constante.

Demostración. Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para toda $z \in \mathbb{C}$; como f es entera, en particular es holomorfa en $B(z_0, R)$ para toda $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$. Aplicando las desigualdades de Cauchy para $n = 1$ tenemos:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Como R es arbitraria, tomando el límite cuando R tiende a ∞ tenemos $f'(z) = 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$, y como $\mathbb{C}$ es conexo, entonces f es constante. ■

Si $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos, el algoritmo de la división nos dice que podemos encontrar dos polinomios $s(z)$ y $r(z)$ tales que $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$, donde el grado de $r(z)$ es menor que el grado de $q(z)$ (si $r(z) = 0$ diremos que $r(z)$ tiene grado $-\infty$).

En particular, si z_0 es un número complejo tal que $p(z_0) = 0$, entonces $p(z) = (z - z_0)q(z)$; si $q(z_0) = 0$, podemos factorizar nuevamente $z - z_0$ de $q(z)$, continuando con este proceso tenemos $p(z) = (z - z_0)^m t(z)$, con $1 \leq m \leq \text{grado de } p(z)$, y $t(z)$ es un polinomio tal que $t(z_0) \neq 0$.

Corolario 5.3.7 Las únicas funciones holomorfas en el plano extendido son las constantes.

Definición 5.3.3 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, y $z_0 \in \Omega$ es un punto que satisface $f(z_0) = 0$, diremos que z_0 es un *cero de multiplicidad* $m \geq 1$ si, existe una vecindad $B(z_0, r) \subset \Omega$ del punto z_0 , y una función holomorfa $g : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ para toda $z \in B(z_0, r)$ y $g(z_0) \neq 0$.

Teorema 5.3.10 — Teorema fundamental del álgebra.. Si $p(z)$ es un polinomio no constante, con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces existe un número complejo z_0 tal que $p(z_0) = 0$.

Demostración. Supongamos que $p(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = 1/p(z)$ es una función entera.

Como $p(z)$ no es constante, entonces $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$, de donde:

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. En particular, existe $R > 0$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| > R$.

Por otra parte, como f es continua, en particular, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ si $|z| \leq R$. Sea $N = \max\{1, M\}$, entonces $|f(z)| \leq N$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

Es decir, f es entera y acotada, y como consecuencia del teorema de Liouville 5.3.9, f es constante, lo cual implica que p también es constante, lo cual contradice nuestra hipótesis. ■

Corolario 5.3.8 Si $p(z)$ es un polinomio no constante, y $a_1, \dots, a_m$ son sus ceros, tal que a_j tiene multiplicidad k_j , entonces

$$p(z) = c(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_m)^{k_m},$$

para alguna constante c , además $k_1 + \dots + k_m$ es el grado de $p(z)$.

Una generalización del teorema de Cauchy para derivadas puede usarse para definir una función holomorfa y sus derivadas por medio de una integral como sigue:

Teorema 5.3.11 — Teorema de Cauchy para derivadas. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo, y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una trayectoria en γ . Sea g una función continua definida en la traza de γ . Si z no está en la traza de γ y definimos

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Entonces f es holomorfa en el complemento de γ en Ω , y sus derivadas están dadas por

$$f^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega \setminus \gamma([a, b])$. Como $\gamma([a, b])$ es compacto, entonces $0 < \delta = \min\{d(z_0, \gamma(t)); t \in [a, b]\}$, y sea $R \in \mathbb{R}$ con $0 < R < \delta$ tal que $\overline{B(z_0, R)} \subset \Omega$.

Sea $0 < r < R$, en particular $B(z_0, r) \subset \overline{B(z_0, R)}$, de manera similar al teorema de Cauchy 5.3.11

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$

Y la serie converge de manera uniforme y absoluta si $|z - z_0| \leq s$.

Luego entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \right) \right) g(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \end{aligned}$$

$$\text{donde } a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta. \quad \blacksquare$$

5.3.1 Valores propios de matrices

Un *valor propio para una matriz* A de tamaño $n \times n$ es un número complejo λ tal que la matriz $\lambda I_n - A$ es singular, donde I_n denota la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Como consecuencia del teorema fundamental del álgebra 5.3.10 una matriz de tamaño $n \times n$ tiene al menos un valor propio complejo. El determinante $\det(zI_n - A)$ es un polinomio de grado n en la variable z . Este es el *polinomio característico de* A . Como consecuencia de la regla de Cramer $\lambda I_n - A$ es singular para un valor determinado λ si, y solamente si, $\det(\lambda I_n - A) = 0$, esto es, cuando y sólo cuando λ es un cero del polinomio característico de A . Es decir, A tiene un valor

propio. Este resultado es crucial para demostrar que toda matriz con coeficientes complejos es triangulable.²

Por ejemplo, dada la matriz $A := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ su polinomio característico está dado como:

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & 3 \\ -3 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2 + 9 = x^2 - 2x + 10.$$

Como consecuencia de la fórmula del binomio de Newton sus ceros son $1 + 3i$ y $1 - 3i$. Esto es, los valores propios de A son $1 + 3i$ y $1 - 3i$.

5.3.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas

El teorema fundamental del álgebra también tiene aplicaciones en ecuaciones diferenciales. Se dice que una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes es una ecuación de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (5.4)$$

donde $y^{(k)}$ es la k -ésima derivada de y .

Podemos ver fácilmente que esta ecuación tiene una solución de la forma $y = e^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, ya que, si $y = e^{\lambda x}$ entonces

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda x};$$

y como la exponencial es una función nunca nula, esta expresión es cero cuando, y solamente cuando el polinomio auxiliar $\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k$ se anula para alguna $\lambda \in \mathbb{C}$, esto es, cuando λ es una raíz del polinomio auxiliar. Como consecuencia del teorema fundamental del álgebra, todo polinomio no constante tiene un cero, por lo cual la ecuación (5.4) tiene una solución de la forma $y = e^{\lambda x}$.

Por otra parte, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son las raíces de (5.4), y ellas son distintas, entonces la solución general de (5.4) es una combinación lineal de las funciones $e^{\lambda_k x}$.

Cuando los coeficientes de (5.4) son números reales, estamos interesados en obtener únicamente las soluciones reales a esta ecuación diferencial. Como la ecuación polinomial asociada solamente tiene coeficientes reales, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un cero del polinomio asociado, entonces $\bar{\lambda}$ también lo es. En particular, si $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Como

$$e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2} \text{ y } e^{\alpha x} \sin \beta x = \frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i}$$

para obtener las soluciones reales de (5.4) debemos tomar cualquier combinación lineal

$$C e^{\alpha x} \cos \beta x + D e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x} (C \cos \beta x + D \sin \beta x)$$

con $C, D \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, la ecuación

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

tiene ecuación polinomial asociada $x^2 - 2x + 10 = 0$, cuyas soluciones son $1 \pm 3i$. Así la solución general es

$$y = A e^{(1+3i)x} + B e^{(1-3i)x}$$

con $A, B \in \mathbb{C}$, y cuya solución general real es

$$y = e^x (C \cos 3x + D \sin 3x) \text{ con } C, D \in \mathbb{R}.$$

²Gabriel Cramer (1704 – 1752), fue profesor en la ciudad de Ginebra, Suiza. Trabajó en análisis y determinantes, fue reconocido sobre todo por su trabajo *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* en la cual publicó la regla de Cramer en 1750.

5.3.3 Caracterización de polinomios

En la demostración del teorema de Liouville solo se utiliza la desigualdad de Cauchy para la derivada de primer orden de una función holomorfa. Es posible generalizar este resultado usando las estimaciones de las derivadas de orden superior.

Teorema 5.3.12 Sea f una función entera, entonces f es un polinomio de grado a lo más n si, y únicamente si existen constantes positivas A y B tales que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n \text{ para cada } z \in \mathbb{C}. \quad (5.5)$$

Demostración. Primeramente, mostraremos que todo polinomio satisface la desigualdad (5.5).

Supongamos que $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$ es un polinomio de grado a lo más n , entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_n.$$

Como consecuencia de la definición de límite, si $\varepsilon = 1$, existe $R > 0$ tal que, si $|z| > R$ entonces

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} - a_n \right| < 1.$$

Como consecuencia de la desigualdad del triángulo

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} < |a_n| + 1 \text{ si } |z| > R.$$

Sea $B = |a_n| + 1$, entonces $|f(z)| < B|z|^n$ si $|z| > R$.

Por otra parte, como f es continua y $\overline{B(0, R)} = \{z; |z| \leq R\}$ es compacto, entonces f es acotada, de donde, existe $A > 0$ tal que $|f(z)| < A$ si $|z| \leq R$. Combinando ambas desigualdades tenemos que $|f(z)| \leq A + B|z|^n$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

Recíprocamente, como f es entera, f admite desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$, con radio de convergencia infinito, es decir:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \text{ para cada } z \in \mathbb{C}.$$

Para cada $k \geq 1$, como consecuencia de la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned} |f^{(n+k)}(0)| &\leq \frac{(n+k)!}{2\pi r^{n+k}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})| dt \\ &\leq \frac{(n+k)!}{2\pi r^{n+k}} \int_{-\pi}^{\pi} (A + Br^n) dt \\ &\leq \frac{(n+k)!}{r^{n+k}} A + \frac{(n+k)}{r^k} B, \end{aligned}$$

y como $\frac{(n+k)!}{r^{n+k}} A + \frac{(n+k)!}{r^k} B \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$, entonces $|f^{(n+k)}(0)| = 0$ para toda $k \geq 1$. Luego entonces, $f(z)$ es un polinomio de grado a lo más n . ■

5.4 El principio del módulo máximo

En esta sección estudiaremos el principio del máximo y el teorema de la aplicación abierta, los cuales son fundamentales en el estudio de las funciones holomorfas. Para demostrar el principio del máximo utilizaremos algunas propiedades de las funciones armónicas que ya estudiamos en el capítulo 4 sección 4.6.

Lema 5.4.1 Sea I un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{R}$ y $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2(I)$. Si existe $t_0 \in I$ tal que $\phi(t) \leq \phi(t_0)$ para toda $t \in I$, entonces $\phi''(t_0) \leq 0$.

Demostración. Como $\phi \in \mathcal{C}^2(I)$, como consecuencia del ejercicio 25, página 106 tenemos:

$$\phi''(t_0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\phi(t_0 + h) + \phi(t_0 - h) - 2\phi(t_0)}{h^2}$$

y $\phi(t_0 \pm h) \leq \phi(t_0)$, entonces $\phi(t_0 + h) + \phi(t_0 - h) - 2\phi(t_0) \leq 0$ para cada h , de donde, la segunda derivada de ϕ en t_0 es negativa, simbólicamente $\phi''(t_0) \leq 0$. ■

Proposición 5.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una función real valuada definida en Ω . Supóngase que existe $(x_0, y_0) \in \Omega$ tal que $u(x, y) \leq u(x_0, y_0)$ para toda $(x, y) \in \Omega$. Entonces

$$\Delta u(x_0, y_0) \leq 0.$$

Demostración. Como consecuencia del lema anterior

$$(\partial^2 u / \partial x^2)(x_0, y_0) \leq 0 \text{ y } (\partial^2 u / \partial y^2)(x_0, y_0) \leq 0,$$

de donde $\Delta u(x_0, y_0) \leq 0$. ■

Teorema 5.4.2 — Versión débil del principio del máximo. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto abierto, y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una función real valuada. Supóngase además que

$$\Delta u(z) \geq 0 \text{ para toda } z \in \Omega.$$

Entonces, para cada conjunto abierto $U \subset \Omega$ cuya cerradura en Ω es un conjunto compacto, se tiene:

$$u(z) \leq \sup_{w \in \partial U} u(w) \text{ para toda } z \in U. \quad (5.6)$$

Demostración. Supóngase que $\Delta u(z) \geq 0$ para cada $z \in \Omega$, y consideremos U un subconjunto de Ω cuya cerradura en Ω sea un conjunto compacto, y sea $z_0 \in \bar{U}$ tal que

$$u(z_0) = \sup_{w \in \bar{U}} u(w). \quad (5.7)$$

Entonces, si la desigualdad (5.6) no se cumple, z_0 no puede pertenecer a ∂U , de donde $z_0 \in U$, y tenemos $u(w) \leq u(z_0)$ para toda $w \in U$. De la proposición anterior 5.4.1 se sigue que $\Delta u(z_0) \leq 0$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo cual la desigualdad (5.6) se satisface si $\Delta u > 0$ sobre Ω .

Supóngase ahora que $\Delta u \geq 0$ sobre Ω , sea $\varepsilon > 0$ y en Ω definimos la función real valuada u_ε como sigue:

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon |z|^2$$

Entonces $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$. Como U es un subconjunto de Ω con cerradura compacta en Ω tenemos

$$u_\varepsilon(z) \leq \sup_{w \in \partial U} u_\varepsilon(w) \text{ } z \in U$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene la desigualdad (5.6). ■

Corolario 5.4.1 Sean Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, y f una función holomorfa en Ω . Si U es abierto y tiene cerradura compacta en Ω , entonces

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} \{|f(w)|\}, \text{ para cada } z \in U.$$

Demostración. Si $u(z) = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$, entonces

$$\Delta u = 4\Delta^c u = 4 \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 4|f'(z)|^2 \geq 0,$$

lo cual permite aplicar el teorema 5.4.2 y concluir que

$$|f(z)| \leq \sup_{w \in \partial U} \{|f(w)|\}, \quad \text{para cada } z \in U.$$

■

Teorema 5.4.3 — Teorema de la función abierta. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante, entonces f es una función abierta de Ω en $\mathbb{C}$, esto es, para cualquier conjunto abierto $U \subset \Omega$, el conjunto $f(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$, bastará demostrar que $f(\Omega)$ es una vecindad de $f(z_0)$. Reemplazando, si es necesario, la función f por $f - f(z_0)$ podemos suponer que $f(z_0) = 0$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \overline{B(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$.

Sea $\delta = \inf_{|z-z_0|=r} |f(z)| > 0$. Sea $w \in \mathbb{C}$, $w \notin f(\Omega)$. Si definimos

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

ya que $|w| \geq \delta/2$ se sigue que ϕ es holomorfa en $B(z_0, r) \subset \Omega$, y como consecuencia de la versión débil del principio del máximo 5.4.2

$$\frac{1}{|w|} = |\phi(z_0)| \leq \sup_{|z-z_0|=r} |\phi(z)| = \frac{1}{\inf_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|}.$$

Tenemos $|f(z) - w| \geq |f(z)| - |w| \geq \delta - |w|$ si $|z - z_0| = r$. Luego entonces, si $|w| < \delta$ se cumple

$$\frac{1}{|w|} \leq \frac{1}{\delta - |w|},$$

es decir, $|w| \geq \delta/2$. Así $|w| \geq \delta$ o $|w| \geq \delta/2$. Por lo tanto

$$f(\Omega) \supset \left\{ w \in \mathbb{C}; |w| < \frac{\delta}{2} \right\},$$

así, $f(\Omega)$ es una vecindad de $0 = f(z_0)$.

■

Teorema 5.4.4 — Principio del módulo máximo para funciones holomorfas. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, conexo, no vacío, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.

Demostración. Como Ω es abierto, dada $z_0 \in \Omega$, existe $\delta > 0$ tal que $B(z_0, \delta) \subset \Omega$. En particular $\overline{B(z_0, \delta/2)} \subset \Omega$. Para cualquier $r < \delta/2$ la traza de la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dada por $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}$ esta contenida en $B(z_0, \delta/2)$. Como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy para bolas, teorema 5.3.6, página 134 se sigue que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + re^{2\pi it}) 2\pi i r e^{\pi i t}}{re^{2\pi it}} dt \\ &= \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi it}) dt. \end{aligned}$$

Como $|f(z_0 + re^{2\pi i t})| \leq |f(z_0)|$, y $\ell(\gamma) = 2\pi r$, entonces

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi i t}) dt \right| \leq \int_0^1 |f(z_0 + re^{2\pi i t})| dt \\ &\leq \int_0^1 |f(z_0)| dt = |f(z_0)|, \end{aligned}$$

es decir,

$$|f(z_0)| = \int_0^1 |f(z_0 + re^{2\pi i t})| dt.$$

Por lo tanto

$$\int_0^1 (|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{2\pi i t})|) dt = 0, \quad (5.8)$$

pero por hipótesis $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \Omega$, en particular $|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{2\pi i t})| \geq 0$ para cada $t \in [0, 1]$, como consecuencia de la ecuación (5.8), $|f(z_0)| = |f(z_0 + re^{2\pi i t})|$ para cada $t \in [0, 1]$ y toda $r \in (0, \delta/2)$. Luego entonces, la imagen de la bola abierta $B(z_0, \delta/2)$ bajo f es el arco circular $|w| = |f(z_0)|$, lo cual contradice el teorema de la función abierta 5.4.3, es decir, $f(z) = f(z_0)$ para cada $z \in B(z_0, r)$. Como consecuencia del principio de la identidad 5.3.1, $f(z) = f(z_0)$ para cada $z \in \Omega$. ■

Teorema 5.4.5 — Principio del módulo máximo para funciones holomorfas, segunda versión. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, acotado, conexo, no vacío, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, y definimos

$$M = \sup_{\zeta \in \partial\Omega} \left(\limsup_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in \Omega}} |f(z)| \right),$$

entonces $|f(z)| < M$ para toda $z \in \Omega$ a menos que f sea constante.

Demostración. Como Ω es acotada, entonces $\overline{\Omega}$ es cerrado y acotado, por tanto, compacto. Como $|f|$ es continua en $\overline{\Omega}$, entonces $|f|$ alcanza su máximo en $\overline{\Omega}$. Es decir, existe $z_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \overline{\Omega}$. Si f es constante, no hay nada que demostrar. Si f no es constante, como consecuencia del teorema 5.4.4, el punto z_0 no puede estar en Ω , por lo tanto, $z_0 \in \partial\Omega$. ■

Es decir, las funciones holomorfas definidas sobre regiones acotadas alcanzan su módulo máximo en la frontera.

Cabe notar que no es posible remover la hipótesis de ser acotada, por ejemplo, si $\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$ y $f(z) = e^z$, entonces $|f(w)| = 1$ para cada $w \in \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z = 0\}$, pero f no es acotada en Ω .

En particular, podemos aplicar el teorema del módulo máximo para estudiar el comportamiento de las funciones holomorfas, por ejemplo:

Lema 5.4.2 — Lema de Schwarz. Si f es una función holomorfa definida sobre $\mathbb{D}$ y $|f(z)| \leq 1$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces $f(z) = cz$ para alguna constante c , $|c| = 1$.

Demostración. Si definimos la función $\varphi_f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi_f(z) = f(z)/z$ si $z \neq 0$, y $\varphi_f(z) = f'(0)$ si $z = 0$, entonces φ es continua, y holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y como consecuencia del teorema de Morera 5.2.3, φ_f es holomorfa en $\mathbb{D}$.

Si $\mathbb{D}_r = \overline{B(0, r)}$ para $0 < r < 1$, por el principio del módulo máximo $|\varphi_f(z)| \leq 1/r$, para toda $z \in \mathbb{D}_r$, de donde $|f(z)| \leq |z|/r$, para $z \in \mathbb{D}$ fija, consideremos $r \rightarrow 1$, entonces $|f(z)| \leq |z|$. Claramente $|\varphi_f(0)| \leq 1$; es decir, $|f'(0)| \leq 1$.

Si $|f(z_0)| = |z_0|$, y $z_0 \neq 0$, entonces $|\varphi_f(z_0)| = 1$ es máximo en $\mathbb{D}_r$, donde $|z_0| < r < 1$, y así φ_f es constante en $\mathbb{D}_r$ y como la constante es independiente de r , entonces $f(z) = cz$, para alguna constante de módulo uno c . ■

5.5 Ejercicios

1. Si m y n son dos números enteros, demuestre que

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

2. Utilice el ejercicio anterior para evaluar la integral

$$\int_{\gamma} z^m \bar{z}^n dz$$

donde m y n son enteros y γ es la circunferencia unitaria recorrida en sentido levógiro.

3. Evalúe $\int_{\gamma} x dz$, donde γ es el segmento de recta de $-1 - i$ a $1 + i$.
 4. Evalúe $\int_{\gamma} x dz$, donde γ es la circunferencia de radio r con centro en el origen recorrida en sentido levógiro.
 5. Evalúe $(1 - i) \int_{\gamma} (z + \bar{z})^2 dz$ a lo largo de la curva $\gamma(t) = t + 2it^2$ para $1 \leq t \leq 2$.
 6. Sin evaluar, demuestre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

donde $\gamma: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada como $\gamma(t) = 2e^{it}$.

7. Si $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada como $\gamma(t) = re^{2\pi it}$ con $r > 1$. Demuestre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\log z}{z^2} dz \right| < 2\pi \left(\frac{2\pi + \ln r}{r} \right).$$

Posteriormente utilice la regla de L'Hôpital para demostrar que el valor de esta integral tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$.

8. Si N denota un entero positivo, y γ_N es el cuadrado recorrido en sentido levógiro con vértices:

$$v_1 = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi(-1 - i), \quad v_2 = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi(1 - i),$$

$$v_3 = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi(1 + i), \quad \text{y } v_4 = \left(N + \frac{1}{2}\right) \pi(-1 + i).$$

- a) Si $z = x + iy$, utilice las desigualdades $|\sen z| \geq |\sen x|$ y $|\cos z| \geq |\cos x|$ para demostrar que $|\sen z| \geq 1$ en los lados verticales de γ_N y $|\sen z| > \sinh \frac{\pi}{2}$ en los lados horizontales.
 b) Utilice el inciso anterior para demostrar que existe una constante positiva M , independiente de N , tal que $|\sen z| \geq M$ para todo punto z en la traza de γ_N .
 c) Basándose en los incisos anteriores, demuestre que

$$\left| \int_{\gamma_N} \frac{dz}{z^2 \sen z} \right| \leq \frac{16}{(2N + 1)\pi M}$$

y que, por tanto, el valor de esta integral tiende a cero cuando N tiende a infinito.

9. Evalúe la siguiente integral

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 - 1},$$

donde la circunferencia está recorrida en sentido positivo.

10. Si γ es una curva cerrada simple que encierra una región Ω de área A , demuestre que

$$A = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz.$$

11. Evalúe $\int_{\gamma} (24\bar{z} + 9z) dz$ alrededor de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
12. Verifique el teorema de Cauchy para la función $f(z) = z^2 + 3iz + 2$ sobre el cuadrado con vértices $-1 - i$, $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$ recorrido en sentido levógiro.
13. Suponga que $f(z)$ es holomorfa en una región que contiene a la curva cerrada γ . Demuestre que

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

tiene parte real cero.

14. Suponga que $f(z)$ es holomorfa y satisface la desigualdad $|f(z) - 1| < 1$ en una región Ω . Demuestre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para cada curva cerrada en Ω .

15. Obtenga el valor numérico de $\int_{\gamma} e^z dz$, donde γ es la circunferencia unitaria con centro en el origen recorrida en sentido levógiro, y demuestre que:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\theta + \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\theta + \sin \theta) d\theta = 0.$$

16. Muestre que $\int_{3+4i}^{4-3i} (3iz^2 + 4z) dz$ tiene el mismo valor a lo largo de las siguientes curvas:
- La recta que une $3 + 4i$ con $4 - 3i$.
 - La curva que se obtiene recorriendo primero la recta que une $3 + 4i$ con $4 + 4i$ y posteriormente $4 + 4i$ con $4 - 3i$.
 - El arco de circunferencia $|z| = 5$ que une los puntos mencionados en el inciso anterior.

17. Sea $G(z) = \int_{\pi(1-i)}^z \sin 6z dz$.

- Demuestre que $G(z)$ es independiente de la trayectoria que une $\pi(1 - i)$ con el punto z .
- Obtenga el valor $G(2\pi i)$.
- Demuestre que $G'(z) = \sin 6z$.

18. Demuestre que $\int_{-1}^1 z' dz = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} (1 - i)$, donde z' está definida si $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ por $z' = \exp(i \log z)$, con $|z| > 0$, y donde la trayectoria de integración es cualquier curva que vaya de $z = -1$ a $z = 1$ por el semiplano superior $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$.

19. Evalúe $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z+2} dz$ si

- γ es la circunferencia con centro en el origen y radio 3 recorrida en sentido levógiro.
- γ es la circunferencia con centro en el origen y radio 1 recorrida en sentido levógiro.
- γ es la circunferencia con centro en -2 y radio 1.

20. Evalúe $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2 + 1} dz$ alrededor del rectángulo con vértices $-1 - 2i$, $1 - 2i$, $1 + 2i$, $-1 + 2i$.

21. Demuestre que $\int_{\gamma} \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \sin t$ si $t > 0$ y γ es la circunferencia con centro en el origen y radio 3.

22. Si γ es la circunferencia de radio r con centro en el origen recorrida en sentido levógiro, demuestre que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 9)(z^2 + 2z + 2)} dz = 0.$$

23. Sea $\gamma: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$. Demuestre que para toda constante $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i.$$

A continuación, utilice la definición de integral de línea para expresar esta integral en términos de la variable θ y deduzca que

$$\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi.$$

24. Utilice la desigualdad de Cauchy para obtener una aproximación de la derivada de $\sin z$ en $z = 0$, y determine el error en la aproximación del cálculo.
25. Una función no constante $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es tal que $f(z+a) = f(z)$, y $f(z+ib) = f(z)$ donde a y b son constantes reales positivas dadas. Demuestre que f no puede ser holomorfa en el rectángulo $R = \{x+iy \in \mathbb{C}; 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.
26. Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera tal que $|f(z)| \geq 1$ para toda $z \in \mathbb{C}$, demuestre que f es constante.
27. Realice todos los detalles de la demostración del teorema fundamental del álgebra para demostrar que la función polinomial $f(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 6z + 2$ tiene exactamente cuatro ceros, y determine los ceros de $f(z)$.
28. Determine todos los ceros del polinomio

$$f(z) = z^3 - iz^2 - 24z - 26i.$$

29. Evalúe $\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta$.
30. Obtenga el valor máximo del módulo de la función $f(z)$ en el disco unitario con centro en el origen si $f(z) = z^2 + 3z + 2$.
31. Encuentre el máximo de $|e^z|$ si $|z| < 1$.
32. Sea f una función holomorfa en una región Ω y suponga que $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$. Sea $z_0 \in \Omega$ y suponga que $f(z_0) \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, muestre que existe $z \in \Omega$ y $\zeta \in \Omega$ tales que $|z - z_0| < \varepsilon$, $|\zeta - z_0| < \varepsilon$, y

$$|f(z)| > |f(z_0)| \quad |f(\zeta)| < |f(z_0)|.$$

Sugerencia: Aplique el teorema del módulo máximo.

33. Sean $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y simplemente conexo, y $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas tales que $|f(z)| = |g(z)|$ para cada $z \in \Omega$ y con $f \neq 0$ salvo en puntos aislados. Demuestre que existe una constante $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $f(z) = e^{i\theta} g(z)$.
34. Demuestre la siguiente generalización del lema de Schwarz:
- Si $|z_0| < R$, demuestre que la transformación $T(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$ transforma la bola abierta de radio R biyectivamente sobre la bola abierta con centro en el origen y radio 1.
 - Sea f una función holomorfa sobre la bola abierta con centro en el origen y radio R y suponga que f es acotada en el interior de la bola con centro en el origen y radio R , es decir, existe una constante real positiva M tal que $|f(z)| < M$ si $|z| < R$. Suponga además que $f(z_0) = w_0$. Demuestre que

$$\left| \frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|.$$

35. Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera y $|f(z)| \leq M$ para z en la circunferencia con centro en el origen y radio R , donde $R > 0$ es una constante real fija, demuestre entonces que para cada z en el interior de la bola con centro en el origen y radio R se tiene que $|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!M}{(R - |z|)^k}$, para cada entero no negativo k .

36. Sean $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Demuestre que, si γ es una circunferencia con centro en z_0 de radio suficientemente pequeño, entonces

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

(Sugerencia: Aplique el teorema de la función inversa).

37. Desarrolle cada una de las siguientes funciones en una serie de Taylor alrededor del punto indicado y determine la región de convergencia en cada caso:

a) $f(z) = \operatorname{sen} z$ en $z = \pi/2$.

b) $f(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 2$ en $z = -2$.

c) $f(z) = \frac{z}{e^z + 1}$ en $z = 0$.

d) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - 2}$ en $z = 0$.

e) $f(z) = ze^z$ en $z = 1$.

38. Sin efectuar el desarrollo, determine si las funciones dadas admiten desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto indicado y determine la región de convergencia.

a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 4}$ en $z = 0$.

b) $f(z) = \frac{z - 3}{(z + 1)(z - 4)}$ en $z = 2$.

c) $f(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sinh z}$ en $z = 0$.

d) $f(z) = \cot z$ en $z = 0$.

39. Eligiendo la rama de $f(z) = \sqrt{1 + z^3}$ que toma el valor 1 en $z = 0$, demuestre que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{2} \frac{3}{4}z^6 - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6}z^9 + \dots, \quad |z| < 1.$$

40. Eligiendo la rama de $\operatorname{arc} \operatorname{sen} z$ que toma el valor 0 en $z = 0$, demuestre que

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{z^5}{5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{z^7}{7} + \dots, \quad |z| < 1.$$

6. Homotopía y el teorema de Cauchy.

Para extender el teorema de Cauchy-Goursat a regiones más generales que rectángulos y bolas, necesitamos demostrar algunos teoremas de deformación, por lo cual se introduce el concepto de homotopía y se dan condiciones que garanticen la independencia de la integral de una función holomorfa en un conjunto Ω de las curvas que consideramos en ella. Para simplificar nuestra notación, a menos que se especifique lo contrario, todas las curvas que consideremos en el presente capítulo estarán parametrizadas por el intervalo $[0, 1]$.

6.1 Homotopía

Definición 6.1.1 Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $x_0, x_1 \in X$. Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$, son dos curvas de x_0 a x_1 , diremos que γ_0 es homotópica a γ_1 en X con puntos extremos fijos, si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $H(0, t) = \gamma_0(t)$ si $0 \leq t \leq 1$;
2. $H(1, t) = \gamma_1(t)$ si $0 \leq t \leq 1$;
3. $H(s, 0) = x_0$ si $0 \leq s \leq 1$, y
4. $H(s, 1) = x_1$ si $0 \leq s \leq 1$.

La idea de la definición es muy simple, pues cuando s varía de 0 a 1, tenemos una familia de curvas que se deforman continuamente de la curva γ_0 a la curva γ_1 .

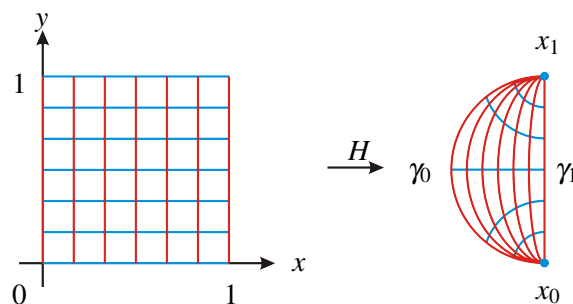


Figura 6.1: Homotopía en X con puntos extremos fijos

Para $s_0 \in [0, 1]$ fijo, definimos la curva $\gamma_{s_0}(t) := H(s_0, t)$. Para cada s , la curva γ_s es una curva en X con extremos $\gamma_s(0) = x_0$ y $\gamma_s(1) = x_1$.

Y se deja como ejercicio verificar que la propiedad de que dos curvas sean homotópicas con puntos extremos fijos es una relación de equivalencia.

Ejemplo 35

Si $X = \mathbb{C}$, $\gamma_0(t) = t(1 + \iota)$, y $\gamma_1(t) = t + \iota t^2$, entonces γ_0 es homotópica a γ_1 , con extremos fijos 0 y $1 + \iota$, y una homotopía está dada por la función continua, $H(s, t) = t + \iota t^{1+s}$.

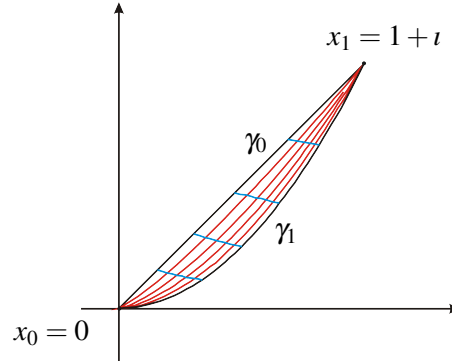


Figura 6.2: $\gamma_0(t) = (1 + \iota)t$ y $\gamma_1(t) = t + \iota t^2$ son homotópicas con extremos fijos.

Definición 6.1.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$, son dos curvas cerradas en X , diremos que γ_0 es homotópica, como curva cerrada, a γ_1 en X , si existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $H(0, t) = \gamma_0(t)$ si $0 \leq t \leq 1$;
2. $H(1, t) = \gamma_1(t)$ si $0 \leq t \leq 1$;
3. $H(s, 0) = H(s, 1)$ si $0 \leq s \leq 1$.

Nuevamente, si $s_0 \in [0, 1]$ fijo, se define $\gamma_{s_0}(t) := H(s_0, t)$. Cada curva $\gamma_{s_0} : [0, 1] \rightarrow X$ es cerrada en X .

Ejemplo 36

1. Si $X = \mathbb{C}$, la curva $\gamma_0(t) = \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t$, es homotópica a $\gamma_1(t) = 2 \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t$, como curva cerrada.

Una homotopía, como curvas cerradas, está dada por la función continua

$$H(s, t) = (1 + s) \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t.$$

Claramente $H(0, t) = \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t = \gamma_0(t)$, además $H(1, t) = (1 + 1) \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t = \gamma_1(t)$, mientras que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= (1 + s) \cos 0 + \iota \sin 0 = (1 + s) \\ &= (1 + s) \cos 2\pi + \iota \sin 2\pi = H(s, 1). \end{aligned}$$

2. Si $X = \mathbb{C}$, $\gamma_0(t) = \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t$, y $\gamma_1(t) = 0$, entonces γ_0 es homotópica, como curva cerrada, a γ_1 , y una homotopía está dada por,

$$H(s, t) = (1 - s) (\cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t).$$

3. Si $X = \mathbb{C} \setminus \{1/2\}$, y consideramos las curvas cerradas $\gamma_0(t) = \cos 2\pi t + \iota \sin 2\pi t$, y $\gamma_1(t) = 0$, para $t \in [0, 1]$, entonces γ_0 no es homotópica, como curva cerrada, a γ_1 . Se deja al lector verificarlo.

Definición 6.1.3 Sea (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq \Omega \subset X$. Decimos que Ω es simplemente conexo si toda curva cerrada en Ω es homotópica a un punto, esto es, a una curva constante.

Ejemplo 37

1. $\mathbb{C}$ es un conjunto simplemente conexo.

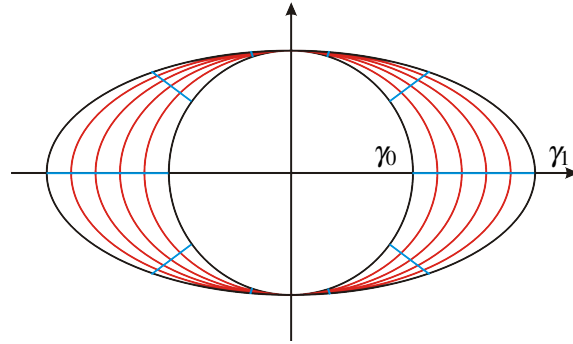


Figura 6.3: Las curvas $\gamma_0(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ y $\gamma_1(t) = 2 \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ son homotópicas como curvas cerradas.

2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ es un conjunto simplemente conexo.
3. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ entonces la bola agujerada con centro z_0 y radio r , $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\}$ no es un conjunto simplemente conexo.

Las demostraciones de 1 y 2 son similares a dadas en el ejemplo 2, y se omite la prueba del inciso 3.

Definición 6.1.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, decimos que Ω es *convexo* si, para toda $z_0, z_1 \in \Omega$, se tiene que $\lambda z_0 + (1 - \lambda)z_1 \in \Omega$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

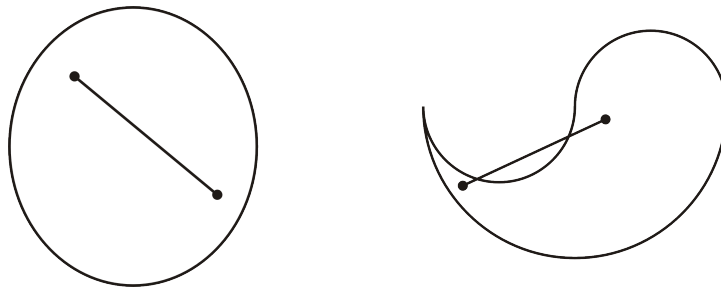


Figura 6.4: A la izquierda mostramos un conjunto convexo, a la derecha, un conjunto no convexo

Esto es, un conjunto Ω es convexo si contiene todos los segmentos de línea recta que pueden construirse entre una pareja arbitraria de puntos en Ω .

Ejemplo 38

1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, claramente la bola con centro z_0 y radio r , $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$ es un conjunto convexo.
2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, claramente la bola agujerada $\Omega = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\}$ no es un conjunto convexo, pues el segmento de recta que une los puntos $z_0 - r/2$ y $z_0 + r/2$ no está contenido en Ω .

Proposición 6.1.1 Si Ω es un conjunto abierto y convexo en $\mathbb{C}$, entonces cualesquiera dos curvas cerradas en Ω son homotópicas, como curvas cerradas, en Ω . Además, cualesquiera dos curvas con los mismos puntos extremos fijos son curvas homotópicas con puntos extremos fijos.

Demostración. Sean $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ y $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dos curvas en Ω , definamos la función $H(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$, claramente H es continua, $H(0, t) = \gamma_0(t)$, $H(1, t) = \gamma_1(t)$.

Si γ_0 y γ_1 son curvas cerradas, entonces $\gamma_k(0) = \gamma_k(1)$ para $k = 0, 1$. Así,

$$H(s, 0) = s\gamma(0) + (1-s)\gamma_1(0) = s\gamma(1) + (1-s)\gamma_1(1) = H(s, 1).$$

Por lo cual H es una homotopía, como curvas cerradas, de γ_0 a γ_1 .

Por otra parte, si $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, al evaluar H en $s, 0$ obtenemos:

$$H(s, 0) = s\gamma_1(0) + (1-s)\gamma_0(0) = sz_0 + (1-s)z_0 = z_0, \text{ y}$$

$$H(s, 1) = s\gamma_1(1) + (1-s)\gamma_0(1) = sz_1 + (1-s)z_1 = z_1,$$

por lo cual H es una homotopía de γ_0 a γ_1 con puntos extremos fijos. ■

Corolario 6.1.1 Un conjunto convexo es simplemente conexo.

Teorema 6.1.2 — Teorema de deformación. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío, y suponga que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, y que las curvas $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow \Omega$, para $k = 0, 1$, son suaves por partes en Ω .

1. Si $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, y γ_0 es homotópica a γ_1 en Ω , entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

2. Si γ_0 y γ_1 son homotópicas, como curvas cerradas, en Ω , entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Demostración. Como γ_0 es homotópica a γ_1 , existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que

1. $H(0, t) = \gamma_0(t)$ si $0 \leq t \leq 1$;
2. $H(1, t) = \gamma_1(t)$ si $0 \leq t \leq 1$;
3. $H(s, 0) = z_0$ si $0 \leq s \leq 1$, y
4. $H(s, 1) = z_1$ si $0 \leq s \leq 1$.

Para cada valor de $s_0 \in [0, 1]$ fijo, la función $\gamma_{s_0}(t) := H(s_0, t)$ es una curva intermedia que se obtiene durante el proceso de deformación. Análogamente, para cada valor fijo $t_0 \in [0, 1]$, la curva $\Gamma_{t_0}(s) = H(s, t_0)$ es una curva con extremos

$$\Gamma_{t_0}(0) = H(0, t_0) = \gamma_0(t_0) \text{ y } \Gamma_{t_0}(1) = H(1, t_0) = \gamma_1(t_0).$$

Luego entonces, las rectas horizontales y verticales en el cuadrado corresponden a una red de curvas en Ω , donde el lado izquierdo del cuadrado corresponde a la curva γ_0 , y el derecho a la curva γ_1 . Por otro lado, los lados superior e inferior del cuadrado corresponden a los puntos extremos de la curva, esto es $\Gamma_0(s) = z_0$ y $\Gamma_1(s) = z_1$, como muestra la figura 6.5:

Sean $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$, y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ particiones de $[0, 1]$.

Como H es continua en Ω y $K = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces la imagen de K bajo H , que denotamos $H(K)$, es un subconjunto compacto de Ω .

Sea $\rho = d(H(K), \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Concluimos así que, si $|H(s, t) - z| < \rho$ entonces $z \in \Omega$. Como H es uniformemente continua en K , existe $\delta > 0$ tal que $|H(s, t) - H(s', t')| < \rho$ siempre que $d((s, t), (s', t')) < \delta$.

Si elegimos las particiones de $[0, 1]$ regulares de longitud $\frac{1}{n}$, para $n > \frac{\sqrt{2}}{\delta}$ tal que cada subcuadrado tenga diámetro menor que δ . Si R_{kj} denota el rectángulo con esquinas

$$(s_{k-1}, t_{j-1}), (s_k, t_{j-1}), (s_k, t_j), (s_{k-1}, t_j),$$

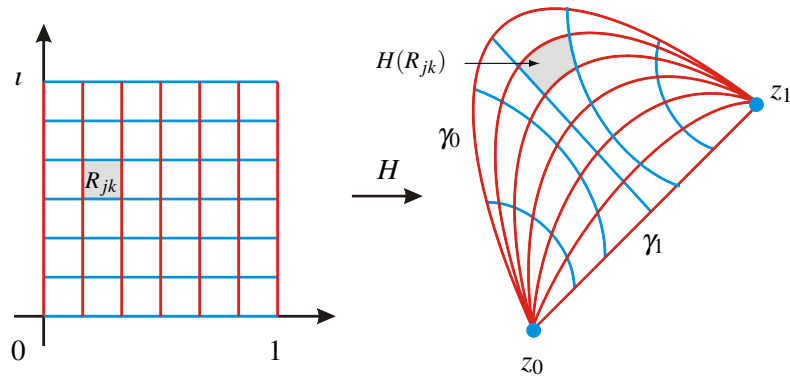


Figura 6.5: Subdivisión para la demostración del teorema de deformación

entonces la imagen bajo H del rectángulo R_{jk} esta contenida dentro de la bola con centro (s_{k-1}, t_{j-1}) y radio ρ , que denotamos $B_{kj} = B(H(s_{k-1}, t_{j-1}), \rho)$, la cual, por construcción, está contenida en Ω . Denotemos por Γ_{kj} la imagen bajo H de la frontera del rectángulo R_{kj} recorrida en sentido levógiro, esto es, $\Gamma_{kj} = H(\partial R_{kj})$ y Γ_{kj} es una curva rectificable.

Entonces

$$\sum_{j,k=1}^n \int_{\Gamma_{kj}} f = \int_{\Gamma_0} f + \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_0} f.$$

Como Γ_{jk} es una curva cerrada contenida completamente en la bola B_{kj} , sobre el cual la función f es holomorfa, el teorema de Cauchy para bolas implica que, cada integral en la suma del lado izquierdo es cero, por ende,

$$0 = \int_{\Gamma_0} f + \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_0} f.$$

Como $\Gamma_0(s) = z_0$ y $\Gamma_1(s) = z_1$, entonces $\int_{\Gamma_0} f = \int_{\Gamma_1} f = 0$, de donde, $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

Cuando las curvas γ_0 y γ_1 son cerradas, se procede de manera similar, y se aplica el hecho que $\Gamma_0(s) = H(s, 0) = H(s, 1) = \Gamma_1(s)$. ■

Como consecuencia del teorema de deformación obtenemos la siguiente generalización del teorema de Cauchy-Goursat:

Teorema 6.1.3 — Versión homotópica del teorema de Cauchy-Goursat. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

para cualquier curva cerrada γ homotópica a un punto en Ω .

Demostración. Ya que la curva γ es homotópica a la curva constante σ , como consecuencia del inciso 2 del teorema de deformación 6.1.2,

$$\int_{\gamma} f = \int_{\sigma} f = 0.$$

■

Corolario 6.1.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y simplemente conexo (véase definición 6.1.3, página 150). Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

para cualquier curva cerrada γ en Ω .

Corolario 6.1.3 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto simplemente conexo, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω .

Demostración. Como consecuencia del corolario anterior $\int_{\gamma} f dz = 0$ para toda curva cerrada γ en Ω . Aplicando el teorema de independencia de trayectorias 5.3.4, esto es equivalente a que f admita una primitiva global en Ω . ■

Corolario 6.1.4 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa nunca nula, es decir, $f(z) \neq 0$ si $z \in \Omega$, entonces existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \exp(g(z))$. Además, si $z_0 \in \Omega$ y $e^{w_0} = f(z_0)$, podemos elegir g tal que $g(z_0) = w_0$.

Demostración. Ya que f es nunca nula, entonces $\frac{f'}{f}$ es holomorfa en Ω , y como consecuencia del corolario anterior, $\frac{f'}{f}$ admite una primitiva g , esto es, existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g' = \frac{f'}{f}$.

$$\text{Entonces } \frac{d}{dz} (f e^{-g}) = (f' - f g') e^{-g} = 0.$$

Como Ω es simplemente conexo 6.1.3, la función $f e^{-g}$ es constante, es decir, existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f e^{-g} = c$. Más aún, como f y la función exponencial son no nulas en Ω , tenemos que $c \neq 0$. Luego entonces, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $e^{\alpha} = c$. Como $f e^{-g} = c = e^{\alpha}$ tenemos que $f = e^g e^{\alpha} = e^{g+\alpha}$.

Si hubiera otra función holomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = e^h$, entonces $e^g = f = e^h$. Si $j = g - h$ entonces j es holomorfa en Ω y $e^j \equiv 1$, de donde $j' e^j = 0$, luego entonces j es una función constante con $e^j = 1$, es decir, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $j = e^{2\pi i k}$. ■

La función g tal que $f = e^g$ obtenida en el corolario anterior se denomina una *rama de logaritmo de f en Ω* .

Observación 8 Así, el corolario anterior nos dice que, en un subconjunto simplemente conexo (véase definición 6.1.3) contenido propiamente en el plano complejo, siempre podemos definir ramas de logaritmo.

Corolario 6.1.5 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa nunca nula en Ω . Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, existe una función holomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h^n = f$.

Demostración. Como consecuencia del corolario anterior, existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^g = f$, si definimos $h = e^{g/n}$, entonces $h^n = (e^{g/n})^n = e^g = f$. ■

6.2 El índice de una curva

Es fácil ver que $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$ si $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, con $0 \leq t \leq 1$, este resultado lo generalizaremos en la siguiente proposición:

Proposición 6.2.1 Si $z_0 \in \mathbb{C}$, y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada, suave por partes que no pasa por z_0 , es decir, $z_0 \notin \text{im}(\gamma)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

es un número entero.

Demostración. Bastará demostrar este resultado en el caso en que γ sea una curva suave. Definimos $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(t) = \int_0^t \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

Claramente $g(0) = 0$, y $g(1) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$.

Además

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z_0}, \quad \text{si } 0 \leq t \leq 1.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-g(t)} (\gamma(t) - z_0) \right) &= e^{-g(t)} \dot{\gamma}(t) - \dot{g}(t) e^{g(t)} (\gamma(t) - z_0) \\ &= e^{-g(t)} \left(\dot{\gamma}(t) - \frac{\dot{\gamma}(t)}{(\gamma(t) - z_0)} (\gamma(t) - z_0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Luego entonces la función $e^{g(t)} (\gamma(t) - z_0)$ es constante, y como γ es una curva cerrada, $\gamma(0) = \gamma(1)$, en particular

$$e^{-g(0)} (\gamma(0) - z_0) = \gamma(0) - z_0 = \gamma(1) - z_0 = e^{-g(1)} (\gamma(1) - z_0)$$

lo cual implica que, $1 = e^{-g(0)} = e^{-g(1)}$, pues $z_0 \notin \text{im}(\gamma)$. Entonces $g(1) = 2\pi i k$, para algún entero k . ■

Definición 6.2.1 Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada, suave por partes, para cada $z_0 \notin \text{im}(\gamma)$, el índice de γ con respecto al punto z_0 , se define como

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Este número también se denomina el *número de vueltas de γ alrededor de z_0* .

Como consecuencia de la proposición anterior, el índice de una curva con respecto a un punto es un número entero.

Recordamos que, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva suave por partes, la curva $-\gamma$ definida como $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$ es una reparametrización, que cambia la orientación, de la curva inicial, y si $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es otra curva tal que $\gamma(1) = \sigma(0)$, entonces $\gamma + \sigma$ es la curva definida como $(\gamma + \sigma)(t) = \gamma(2t)$ si $0 \leq t \leq 1/2$, y $(\gamma + \sigma)(t) = \sigma(2t - 1)$ si $1/2 \leq t \leq 1$.

Proposición 6.2.2 Si $\gamma, \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos curvas cerradas, suaves por partes, con el mismo punto inicial, $z_0 \in \mathbb{C}$ entonces:

1. $n(\gamma, z_0) = -n(-\gamma, z_0)$, si $z_0 \notin \text{im}(\gamma)$.
2. $n(\gamma + \sigma, z_0) = n(\gamma, z_0) + n(\sigma, z_0)$, si $z_0 \notin \text{im}(\gamma + \sigma)$.
3. Si $z_0 \notin \text{im}(\gamma) \cup \text{im}(\sigma)$ y si γ es homotópica a σ en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, entonces $n(\gamma, z_0) = n(\sigma, z_0)$.

Demostración. Las primeras dos propiedades son consecuencia de la proposición 5.1.5, mientras que la tercera propiedad es consecuencia del teorema de deformación 6.1.2. ■

Teorema 6.2.3 Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$, suave por partes, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \text{im}(\gamma)$. Entonces $n(\gamma, z_0)$ es localmente constante, esto es, para cada componente conexa U de Ω , existe una constante $c_U \in \mathbb{Z}$ tal que $n(\gamma, z_0) = c_U$ para cada $z_0 \in U$. Además, $n(\gamma, z_0) = 0$ si z_0 pertenece a la componente no acotada de Ω .^a

^aUna componente conexa de un espacio topológico (X, τ) es un subconjunto máximo conexo, esto es, $Y \subset X$ es una componente conexa de X si, Y es un conjunto conexo y si Z contiene propiamente al conjunto Y , entonces Z es desconexo. Las componentes conexas de X forman una partición de X , y si X es conexo, entonces X es su única componente conexa.

Demostración. Definamos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como $f(z) = n(\gamma, z)$, a continuación demostraremos que f es continua. Como Ω es abierto las componentes conexas de Ω son conjuntos abiertos. Sea $z_0 \in \Omega$, demostraremos que f es continua en z_0 .

Sea $\varepsilon > 0$ y definamos $r = d(z_0, \text{im}(\gamma))$, la distancia de la curva γ al punto z_0 , como Ω es abierto, $r > 0$.

Si $\delta := \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{\pi r^2 \varepsilon}{2\ell(\gamma)} \right\}$, entonces $\delta > 0$. Dada $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \delta < \frac{r}{2}$, por la definición de índice de una curva tenemos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |n(\gamma, z) - n(\gamma, z_0)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right|. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| |d\zeta| \\ &= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z| |\zeta - z_0|} \\ &< \frac{\delta}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z| |\zeta - z_0|}. \end{aligned}$$

Como $\zeta \in \text{im}(\gamma)$, entonces $|\zeta - z_0| \geq r > \frac{r}{2}$, $|\zeta - z| \geq \frac{r}{2}$, además $|z - z_0| < \delta < \frac{r}{2}$, de donde

$$\frac{\delta}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z| |\zeta - z_0|} < \frac{\delta}{2\pi} \left(\frac{4}{r^2} \left| \int_{\gamma} |d\zeta| \right| \right) \leq \frac{2\delta}{\pi r^2} \ell(\gamma) \leq \varepsilon.$$

Luego entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, por lo que f es continua en Ω .

De donde, $\text{im}(f) \subset \mathbb{Z}$, y para cada componente conexa $U \subset \Omega$, se tiene que $f(U)$ es un punto, en particular f es constante, digamos $c_U \in \mathbb{Z}$, en el conjunto U .

Si ahora U_0 denota la componente no acotada de Ω , existe $R > 0$ tal que $U_0 \supset \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Si $\varepsilon > 0$, elegimos z_0 con $|z_0| > R$ y $|z - z_0| > (2\pi\varepsilon)^{-1}\ell(\gamma)$, uniformemente para $z \in \text{im}(\gamma)$, consecuentemente $|n(\gamma, z_0)| < \varepsilon$, en particular $\lim_{z \rightarrow \infty} n(\gamma, z_0) = 0$, y como $n(\gamma, z_0)$ es constante en U_0 , entonces $n(\gamma, z_0) = 0$ para cada $z_0 \in U_0$. ■

Ejemplo 39

Si consideramos la curva γ que se muestra en la figura 6.6

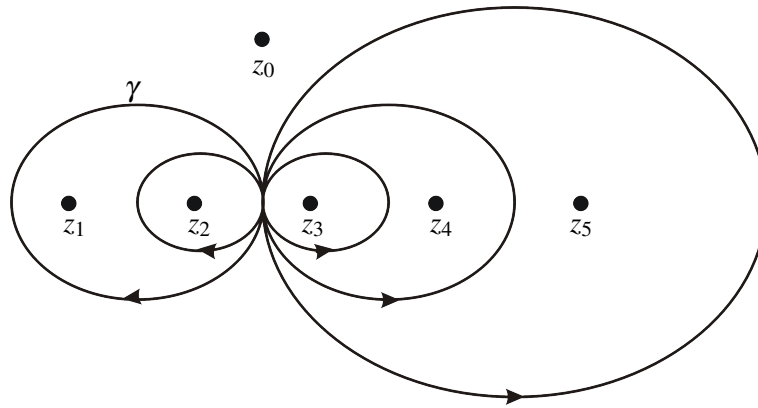


Figura 6.6: El índice de una curva γ en los puntos z_k

podemos ver que $n(\gamma, z_0) = 0$, $n(\gamma, z_1) = -1$, $n(\gamma, z_2) = -2$, $n(\gamma, z_3) = 3$, $n(\gamma, z_4) = 2$, y finalmente $n(\gamma, z_5) = 1$.

Como consecuencia de esto, el *interior de una curva cerrada* γ puede definirse como

$$\{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) \neq 0\},$$

y esta definición, para curvas cerradas simples, coincide con el interior de una curva definido por el teorema de la curva de Jordan.

6.3 El teorema de Cauchy

En esta sección presentamos la generalización del teorema de Cauchy a cualquier curva cerrada.

Teorema 6.3.1 — Fórmula integral de Cauchy. Sea f una función holomorfa definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sea γ una curva cerrada en Ω suave por partes, sea z_0 un punto que no esté sobre la imagen de la curva γ , y supongamos que γ es homotópica a un punto. Entonces

$$n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema de Cauchy para rectángulos. Para $z \in \Omega$, definamos la función:

$$\varphi_f(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Claramente φ_f es continua en Ω , y holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$, como consecuencia del teorema de Cauchy 5.1.10 y el teorema de deformación 6.1.2 se tiene que $0 = \int_{\gamma} \varphi_f dz$, y como

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \varphi_f dz &= \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i n(\gamma, z_0) f(z_0), \end{aligned}$$

de donde $n(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. ■

Como consecuencia del lema 5.3.2 visto en el capítulo 5, y del teorema 6.3.1 tenemos el siguiente resultado:

Corolario 6.3.1 — Fórmula integral de Cauchy para derivadas. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva suave por partes. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto que no esté sobre la imagen de la curva γ , y supóngase que γ es homotópica a un punto en Ω . Entonces

$$n(\gamma, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz.$$

A continuación aplicaremos la fórmula integral de Cauchy para obtener $\int_{\gamma} f$, donde γ es una curva cerrada, y f es una función holomorfa en un abierto que contiene a la cerradura de la región acotada por γ , salvo quizá un número finito de puntos. Adicionalmente se pide los puntos donde f no es holomorfa no se encuentren en la traza de γ .

Ejemplo 40

1. $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz$, donde $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$, con $0 \leq t \leq k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como $f(z) = z^2$ es entera, $1 \notin \text{im}(\gamma)$, y $n(\gamma, 1) = 1$, aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z-1} dz = f(1)n(\gamma, 1) = 1 \cdot k = k,$$

despejando obtenemos que $2\pi i k$ es el valor deseado.

2. $\int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$ donde $\gamma(t) = 2e^{2\pi i t}$, con $0 \leq t \leq 1$.

Para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy, necesitamos que el denominador sea de la forma $(z - z_0)^k$ para alguna $k \geq 0$. Notamos también que $n(\gamma, \pm i) = 1$, y

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = (z^2-1) \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i}{2} \left(\frac{z^2-1}{z+i} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{z^2-1}{z-i} \right)$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz &= \int_{\gamma} \left(\frac{i}{2} \left(\frac{z^2-1}{z+i} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{z^2-1}{z-i} \right) \right) dz \\ &= \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z+i} dz - \frac{i}{2} \int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z-i} dz \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z-i} dz = (i^2-1)n(\gamma, i) = i^2-1 = -2$$

y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z+i} dz = ((-i)^2-1)n(\gamma, -i) = i^2-1 = -2$$

de donde

$$\int_{\gamma} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz = \frac{i}{2}(-4\pi i) - \frac{i}{2}(-4\pi i) = 0$$

3. $\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} dz$, donde $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, si $0 \leq t \leq 1$.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy para derivadas, con $n = 3$ y $f(z) = \operatorname{sen} z$ entonces:

$$f^{(3)}(0)n(\gamma, 0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^4} dz.$$

Como $n(\gamma, 0) = 1$, y $f^{(3)}(z) = -\cos z$, entonces $f^{(3)}(0) = -1$, luego entonces

$$\int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} (-1) = -\frac{\pi i}{3}.$$

4. $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde $\gamma(t) = 1 + e^{2\pi i t}$, con $0 \leq t \leq 1$.

Nótese que $\left(\frac{z}{z-1} \right)^n = \frac{z^n}{(z-1)^n}$, y si $f(z) = z^n$, como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

$$n(\gamma, 1)f^{(n-1)}(1) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^n}{(z-1)^{n-1}} dz.$$

Como $f^{(n-2)}(z) = (n-1)!$, y $n(\gamma, 1) = 1$, entonces $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n = 2\pi i$.

También podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy para obtener integrales de la forma $\int_{\gamma} \frac{f'}{f}$, si f es holomorfa en una región Ω que contenga en su interior la región acotada por la curva γ , y que admita solo un número finito de ceros en Ω . Recordamos que, si z_0 es un cero de la función holomorfa f , existe un entero positivo m , y una función holomorfa $g(z)$, tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, con $g(z_0) \neq 0$. De donde, si $z_1, \dots, z_s$ son los ceros de f con $z_j \neq z_k$ si $j \neq k$, entonces existen enteros positivos $m_1, \dots, m_s$, y una función holomorfa g tal que $f(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_s)^{m_s} g(z)$ con $g(z) \neq 0$, en particular

$$\begin{aligned} f'(z) &= m_1(z - z_1)^{m_1-1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_s)^{m_s} g(z) + \cdots \\ &\quad + m_j(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_j)^{m_j-1} \cdots (z - z_s)^{m_s} g(z) + \cdots \\ &\quad + m_s(z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_s)^{m_s-1} g(z) \\ &\quad + (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_s)^{m_s} g'(z). \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{m_s}{z - z_s} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\gamma} \left(\frac{m_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{m_s}{z - z_s} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{m_1}{z - z_1} dz + \cdots + \int_{\gamma} \frac{m_s}{z - z_s} dz + \int_{\gamma} \frac{g'}{g} dz \end{aligned}$$

Como g no se anula en Ω , entonces g'/g es holomorfa en Ω , así $\int_{\gamma} \frac{g'}{g} = 0$, y por la definición del

índice $n(\gamma, z_k) = 2\pi i \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k}$, de donde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^s m_k n(\gamma, z_k). \quad (6.1)$$

Consecuentemente, si f es holomorfa en Ω y γ es una curva cerrada simple tal que la cerradura de región acotada por γ este contenida en Ω , entonces la expresión

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

puede considerarse como una función que cuenta los ceros de $f(z)$ en el interior de γ , donde un cero de multiplicidad k se cuenta k veces.

Esto lo podemos aplicar para calcular integrales como la siguiente:

$$\int_{\gamma} \frac{2z+1}{z^2+z+1} dz, \text{ donde } \gamma(t) = 2e^{2\pi i t}, \text{ con } 0 \leq t \leq 1.$$

Como $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$, los ceros de z^2+z+1 son las raíces cúbicas de la unidad ζ_k , $k=0,1,2$ con $\zeta_0=1$. Claramente $|\zeta_k|=1$, y por ende, se encuentran en el interior de γ , además $n(\gamma, \zeta_k)=1$, de donde

$$\int_{\gamma} \frac{2z+1}{z^2+z+1} dz = 2\pi i (n(\gamma, \zeta_1) + n(\gamma, \zeta_2)) = 2\pi i (1+1) = 4\pi i.$$

En particular podemos demostrar el siguiente resultado:

Proposición 6.3.2 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y suponga que f es una función holomorfa en $B(z_0, R)$. Sea $\alpha = f(z_0)$. Si $f(z) - \alpha$ tiene un cero de orden m en z_0 , entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que, si $0 < |\zeta - \alpha| < \delta$, entonces $f(z) = \zeta$ tiene exactamente m soluciones en $B(z_0, \varepsilon)$.

Esta proposición nos dice que, $f(B(z_0, \varepsilon)) \supset B(\alpha, \delta)$. Además, el hecho que $f(z) - \alpha$ tenga un cero de multiplicidad finita, garantiza que f no es constante.

Demostración. Como los ceros de una función holomorfa son aislados, si $m=1$, podemos escoger $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < R/2$. De donde, $f(z) = \alpha$ no tiene soluciones si $0 < |z - z_0| < 2\varepsilon$, y $f'(z) \neq 0$ si $0 < |z - z_0| < 2\varepsilon$. (Si $m \geq 2$, entonces $f'(z_0) = 0$.)

Sea $\gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{2\pi i t}$, con $0 \leq t \leq 1$, y consideremos la curva $\sigma = f \circ \gamma$.

Como $\alpha \notin \text{im}(\sigma)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(\alpha, \delta) \cap \text{im}(\sigma) = \emptyset$.

De donde, $B(\alpha, \delta)$ está contenida en alguna componente de $\mathbb{C} \setminus \text{im}(\sigma)$; esto es, $|\alpha - \zeta| < \delta$ implica $n(\sigma, \alpha) = n(\sigma, \zeta)$, ya que

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)}{f(\gamma(t)) - \alpha} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dw}{w - \alpha} = n(\sigma, \alpha) \\ &= n(\sigma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)}{f(\gamma(t)) - \zeta} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - \zeta} dz. \end{aligned}$$

Y como $n(\gamma, z)$ debe ser cero, o uno, y tenemos exactamente m soluciones de la ecuación $f(z) = \zeta$ en el interior de $B(z_0, \varepsilon)$. Como $f'(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, cada una de las raíces debe ser simple. ■

Teorema 6.3.3 — Teorema de la función abierta. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Entonces, $f(U) \subset \mathbb{C}$ es abierto si $U \subset \Omega$ es abierto.

Demostración. Sea $U \subset \Omega$ un conjunto abierto, $U \neq \emptyset$, y supongamos que $z_0 \in U$, y sea $\alpha = f(z_0)$. Como vimos en la proposición anterior 6.3.2, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $B(z_0, \varepsilon) \subset U$ y $f(B(z_0, \varepsilon)) \supset B(\alpha, \delta)$. ■

Corolario 6.3.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, abierto. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva, denotemos $G = f(\Omega)$. Entonces $f^{-1} : G \rightarrow \Omega$ es $\mathbb{C}$ -diferenciable y $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$, donde $w = f(z)$.

Demostración. Como consecuencia del teorema de la función abierta 6.3.3, f^{-1} es continua y Ω es abierto. Como $z = f^{-1}(f(z))$ para cada $z \in \Omega$, como consecuencia de la regla de la cadena $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$, donde $w = f(z)$. ■

6.4 Ejercicios

- ¿ Se satisface el teorema de Cauchy separadamente para las partes real e imaginaria de una función holomorfa f ? Si es así, demuéstrela; si no, dé un contraejemplo.
- Utilice una rama apropiada de la función logaritmo para evaluar $\int_{\gamma} \sqrt{z}$, donde γ es la parte superior del círculo unitario orientado en sentido levógiro: primero directamente, y posteriormente, usando el teorema fundamental de las integrales de línea.
- Sean Ω un conjunto abierto conexo, $x_0, x_1 \in \Omega$, y $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dos curvas de x_0 a x_1 . Demuestre que la relación γ_0 es homotópica a γ_1 con puntos extremos fijos es una relación de equivalencia.
- Sean Ω un conjunto abierto conexo, y $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dos curvas constantes distintas. Demuestre que, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una curva cerrada rectificable y γ es homotópica a γ_k para $k = 0, 1$, entonces γ_0 es homotópica a γ_1 . *Sugerencia:* Conecte los puntos a y b por medio de una curva.
- Sean Ω un conjunto abierto conexo, $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dos curvas cerradas. Demuestre que la relación γ_0 es homotópica a γ_1 como curvas cerradas es una relación de equivalencia.
- Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo, no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva rectificable, demuestre que $f \circ \gamma$ también es una curva rectificable.
- Sea $w = re^{i\theta} \neq 0$ un número complejo fijo, y sea γ una curva rectificable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de 1 a w . Demuestre que existe un entero k tal que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log r + i(\theta + 2\pi k).$$

- Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son dos conjuntos abiertos, simplemente conexos, y cuya intersección es conexa y no vacía, demuestre que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\Omega_1 \cup \Omega_2$ son ambos simplemente conexos.
- Demuestre que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es un conjunto simplemente conexo, (véase la definición 6.1.3 en la página 150).
- Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, muestre que cada curva cerrada en Ω es homotópica a una curva cerrada cuya imagen está contenida en la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$.
- Evalúe las siguientes integrales:
 - $\int_{\gamma} \frac{z^2}{(z-1)^3} dz$, donde γ es la circunferencia de radio 2 con centro en el origen orientada en sentido levógiro.
 - $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$, donde γ es la circunferencia de radio 1 con centro en el origen orientada en sentido levógiro.
- Obtenga todos los valores posibles de $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 1}$, donde γ es cualquier curva cerrada rectificable en $\mathbb{C}$ cuya traza no contiene a los puntos ± 1 .
- Sea f una función holomorfa en el interior y sobre una curva cerrada simple γ . Suponga que $f = 0$ sobre γ . Muestre que $f(z) = 0$ para cada punto z en el interior de γ .
- Evalúe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz$$

si $t > 0$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada como $\gamma(\theta) = 3e^{6\pi i \theta}$.

15. Sea f una función holomorfa sobre una región Ω , y sea γ una curva cerrada en Ω . Para $z_0 \in \Omega \setminus \text{im}(\gamma)$, demuestre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta$$

¿ Puede generalizar este resultado ?

16. Suponga que f es entera y que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Demuestre que f es constante.
17. Aplique la fórmula integral de Cauchy para evaluar las siguientes integrales sobre la curva $\gamma(t) = 2e^{2\pi it}$ con $0 \leq t \leq 1$.

a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 1}$

b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + z + 1}$

c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 - 8}$

d) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 2z - 3}$

18. Sea f holomorfa en una región Ω que contiene a la cerradura de la bola con centro z_0 y radio r . Demuestre que

$$\begin{aligned} \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_0) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} - \frac{1}{(z - z_0)^2} \right) f(z) dz \end{aligned}$$

para z_1, z_2 en el interior de γ , donde γ es la circunferencia con centro z_0 y radio r recorrida una vez en sentido levógiro.

19. Obtenga la serie de Taylor de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alrededor de $z_0 = 1$.

b) $f(z) = z^2 e^z$ alrededor de $z_0 = 0$.

20. Obtenga los primeros términos de la serie de Taylor de la función $f(z) = e^z \sin z$ alrededor de $z_0 = 0$.

21. Calcule la serie de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) e^{z^2} , alrededor de $z_0 = 1$

b) $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$, alrededor de $z_0 = 0$

22. Obtenga los primeros términos de la serie de Taylor de $\sqrt{z^2 - 1}$ alrededor de 0, utilizando una rama apropiada para la función logaritmo.

23. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva, demuestre que $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$.

24. Demuestre que para cada entero positivo n se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n 2k} 2\pi.$$

25. Aplique la fórmula integral de Cauchy para demostrar el teorema de Cayley-Hamilton. Si A es una matriz de orden n con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $\chi_A(z) = \det(z - A)$ es el polinomio característico de A , entonces $\chi_A(A) = 0$.¹

26. Si $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como $p(z) = \text{Re}(z)$, demuestre que p es una función abierta pero no cerrada. *Sugerencia:* Considere $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C}; \text{Im } z = \frac{1}{\text{Re } z} \text{ con } \text{Re } z \neq 0 \right\}$.

¹C. A. McCarthy, *Amer. Math. Monthly*, **82** (1975), 390-391

27. Si $p(z)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, y $R > 0$ es un número suficientemente grande tal que $p(z)$ no se anula fuera de $\overline{B(0, R)}$. Si $\gamma(t) = Re^{2\pi i t}$ para $t \in [0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i n.$$

28. Aplique la fórmula 6.1 para dar otra demostración del teorema fundamental del álgebra.
29. Si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, conexo y no vacío. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:
- a) Ω es simplemente conexo.
 - b) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es conexo.
 - c) Para cada función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, entonces existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = e^g$.
 - d) Para cada función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, y para cada entero positivo n , existe una función holomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = h^n$.
30. Si f es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $|f(z)| < 1$ para cada $z \in \mathbb{D}$, demuestre que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{si } z \in \mathbb{D}.$$

Este resultado es el lema de Schwarz-Pick, y determina la invarianza del lema de Schwarz.

Parte Dos

7	Laurent y residuos	167
7.1	Singularidades	
7.2	Series de Laurent	
7.3	Residuos	
7.4	El teorema del residuo	
7.5	Integrales impropias	
7.6	El teorema de Runge	
7.7	Ejercicios	
8	Aplicaciones conformes	223
8.1	Aplicaciones conformes	
8.2	Aplicaciones conformes en $\mathbb{C}_\infty$	
8.3	Transformaciones de Möbius.	
8.4	Simetría.	
8.5	Otros ejemplos	
8.6	Algunas aplicaciones	
8.7	Teorema de Riemann	
8.8	Ejercicios	
9	Funciones armónicas	263
9.1	Funciones armónicas	
9.2	El núcleo de Poisson	
9.3	El principio de reflexión	
9.4	El problema de Dirichlet	
9.5	Ejercicios	
10	Funciones especiales	283
10.1	Productos infinitos	
10.2	Funciones holomorfas con ceros predeterminados	
10.3	La función gamma de Euler	
10.4	La función theta y su ecuación funcional	
10.5	La función zeta de Riemann	
10.6	Ejercicios	
	Bibliografía	318
A	Notación	321
	Index	329



7. Series de Laurent y cálculo de residuos.

En el presente capítulo estudiaremos funciones que son holomorfas en una bola cuyo centro ha sido removido, esto nos llevará al concepto de un tipo particular de puntos, que llamaremos singularidades aisladas, de las cuales hay de tres tipos, a saber:

1. removible;
2. polo;
3. singularidad esencial.

El primer tipo nos dice que la función se puede extender a una función holomorfa en toda la bola, es decir, puede removerse la singularidad. El tercer tipo nos habla del comportamiento “aleatorio” de la función en cualquier vecindad de dicho punto, esto es, la función toma prácticamente cualquier valor en una vecindad de tal punto. El segundo tipo de singularidades nos dice que, cerca de un polo z_0 , una función holomorfa f alrededor de z_0 , salvo el punto z_0 , puede escribirse en la forma $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N}$, donde $h(z)$ es una función holomorfa en z_0 y $h(z_0) \neq 0$. Esto nos conducirá, de manera inmediata al concepto de función meromorfa.

Podemos decir que, los polinomios son el ejemplo extremo de la importancia que puede llegar a tener el conocimiento de los ceros de una función en la determinación y el estudio de la misma. Sin llegar a tal extremo, el estudio de los ceros de las funciones holomorfas es también un aspecto importante en su estudio. De manera similar, hay una serie de resultados significativos que pueden aplicarse para determinar el comportamiento de una función meromorfa, en términos de sus ceros y polos, los cuales estudiaremos a lo largo de este capítulo.

Introduciremos el concepto de serie de Laurent y clasificaremos las singularidades aisladas de una función en términos de su serie de Laurent. En particular, demostraremos el teorema de extensión de Riemann, el teorema de Casorati-Weierstrass, y enunciaremos el teorema de Picard.

También demostraremos el teorema del residuo y algunas de sus consecuencias. Aplicaremos el teorema del residuo para evaluar ciertas integrales definidas sobre la recta real, las cuales no pueden ser evaluadas usando los métodos tradicionales del cálculo.

7.1 Clasificación de singularidades

Definición 7.1.1 Se dice que una función f tiene una *singularidad aislada* en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe $R > 0$ tal que f está definida y es holomorfa en $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, pero no en $B(z_0, R)$.

Una singularidad aislada z_0 se denomina una *singularidad removible* si existe una función holomorfa $g : B(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para $z \neq z_0$.

Las funciones $f(z) = 1/z$, $g(z) = \cos(1/z)$ y $h(z) = \operatorname{sen} z/z$ tienen singularidades aisladas en el punto $z_0 = 0$, pero sólo $h(z)$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$ ya que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

para $z \neq 0$, y la función $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ es holomorfa y tiene radio de convergencia infinito.

Por otra parte, la función $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/z)}$ tiene singularidades en $z = 0$, y en $z = 1/n$ con $n \in \mathbb{Z}$, los cuales están comprendidos en el segmento del eje real $[-1, 1]$. Salvo $z = 0$ todas estas singularidades son aisladas. El punto singular $z = 0$ no es aislado porque toda vecindad agujerada del origen contiene otros puntos singulares de la función, esto es, dado $\varepsilon > 0$, si denotamos por $m \in \mathbb{N}$ a cualquier entero positivo tal que $1/\varepsilon < m$, se tendrá que $0 < 1/m < \varepsilon$, lo cual implica que el punto singular $z = 1/m$ está en la vecindad agujerada $V = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < \varepsilon\}$.

Teorema 7.1.1 — Teorema de extensión de Riemann. Si la función f tiene una singularidad aislada en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces el punto z_0 es una singularidad removible si, y solamente si,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$$

Demostración. Sea $R > 0$ y supongamos que f es una función holomorfa en $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, y $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, definamos

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

Entonces g es continua y holomorfa en $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, aún más, como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z) - 0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0,$$

entonces g es holomorfa en $B(z_0, R)$ y $g'(z_0) = 0$, por lo tanto, la función g admite un desarrollo en serie de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}.$$

En particular, $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}$ para $z \neq z_0$, y como la función

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}$$

es holomorfa en $B(z_0, R)$ tenemos que z_0 es una singularidad removible de la función f .

Recíprocamente, supongamos que la función f tiene una singularidad removible en el punto z_0 , por tanto existe $R > 0$ y una función holomorfa $g : B(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para $z \neq z_0$, en particular

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0.$$



Nótese que lo anterior nos dice que, si z_0 es una singularidad removible de f , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.

Como consecuencia del teorema de extensión de Riemann tenemos que el punto z_0 es una singularidad removible de la función f si, y solamente si, la función f es acotada en una vecindad del punto z_0 .

Definición 7.1.2 Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de la función f , entonces z_0 es un *polo* de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Esto es, para cada $M > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(z)| \geq M$ siempre que $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Es fácil ver que la función $f(z) = 1/(z - z_0)^n$ tiene un polo en z_0 para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 7.1.2 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región con $z_0 \in \Omega$ y si f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ la cual tiene un polo en z_0 , entonces existe un entero positivo m y una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}. \quad (7.1)$$

Demostración. Si f tiene un polo en z_0 , entonces $1/f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 , por lo cual, la función

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es holomorfa en $B(z_0, R)$ para algún $R > 0$. Como $h(z_0) = 0$, por el corolario (5.3.2), existe un entero $m > 0$ y una función φ holomorfa en $B(0, R)$ tal que $h(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$ con $\varphi(z_0) \neq 0$. Esto es $(z - z_0)^m f(z) = 1/\varphi(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 . Tómese $g(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ para obtener la igualdad 7.1. ■

Definición 7.1.3 Si f tiene un polo en z_0 y m es el mínimo entero positivo tal que $(z - z_0)^m f(z)$ tenga una singularidad removible en z_0 , diremos que f tiene un *polo de orden m en z_0* .

Si f tiene un polo de orden m en z_0 y $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$, como g es holomorfa en $B(z_0, R)$, ésta admite expansión de serie de potencias en z_0 . Sea

$$g(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_{m-1}(z - z_0)^{m-1} + (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z - z_0)^k;$$

entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z - z_0)^k \\ &= \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z - z_0} + h(z) \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde $h(z)$ es una función holomorfa en $B(z_0, R)$, y $c_0 \neq 0$.

Definición 7.1.4 Si f tiene un polo de orden m en z_0 y f satisface la ecuación anterior, entonces

$$S(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{z - z_0}$$

se denomina la *parte singular (o parte principal)* de f en z_0 .

La parte principal de f en z_0 mide qué tan singular es f en el punto z_0 .

Ejemplo 41

Sea $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ una función racional, es decir, el cociente de dos polinomios, y supongamos que los polinomios no tienen factores comunes. Entonces, los polos de $f(z)$ son los ceros de $q(z)$ y el orden de un polo de f es la multiplicidad del cero correspondiente de $q(z)$. Supongamos que z_0 es un cero de $q(z)$ y sea $S(z)$ la parte singular de $f(z)$ en z_0 , es decir,

$$f(z) = S(z) + h(z) \text{ con } h(z) \text{ holomorfa en } B(z_0, r).$$

Entonces, $f(z) - S(z) = h(z)$, con $h(z)$ holomorfa en $B(z_0, r)$ y además $h(z)$ es una función racional cuyos polos diferentes de z_0 también son polos de $f(z)$. Más aún, si $\tilde{S}(z)$ es la parte singular de $h(z)$ en uno de sus polos, entonces $\tilde{S}(z)$ también es la parte singular de $f(z)$ en ese polo.

Por inducción, si $z_1, \dots, z_n$ son los polos de $f(z)$ y si $S_j(z)$ son las partes singulares de $f(z)$ en los polos z_j , entonces

$$f(z) = \sum_{j=1}^n S_j(z) + R(z) \quad (7.3)$$

donde $R(z)$ es una función racional sin polos y por lo tanto es un polinomio, por lo que 7.3 es la descomposición en fracciones parciales de $f(z)$.

Definición 7.1.5 Si una singularidad aislada no es removible ni polo, entonces se denomina una *singularidad esencial*.

No es difícil ver que $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de $\exp(1/z)$, y dejamos como ejercicio verificar esto.

7.2 Series de Laurent

Definición 7.2.1 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, y sean R_1 , y R_2 dos números tales que $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Se define el anillo con centro en z_0 , radio interior R_1 y exterior R_2 , que denotaremos $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$ como el conjunto

$$\text{an}(z_0; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Por ejemplo $\text{an}(0; 1, \infty)$ corresponde a los puntos que están fuera de la bola cerrada de radio 1 con centro en el origen, esto es, $\text{an}(0; 1, \infty) = \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, 1)}$, mientras que $\text{an}(0; 1, 2)$ corresponde a los puntos que están fuera de la bola cerrada de radio 1 con centro en el origen, pero dentro de la bola abierta de radio 2 con centro en el origen, finalmente $\text{an}(0; 0, 1)$ es la bola agujerada con centro en el origen y radio 1, esto es, $\text{an}(0; 0, 1) = B(0, 1) \setminus \{0\}$. Para la representación del caso general véase la figura 7.1.

En lo que sigue, también escribiremos

$$\int_{|z-z_0|=r} f dz \quad \text{o bien} \quad \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

o alguna otra notación similar, para denotar $\int_{\gamma_r} f$ donde $\gamma_r(t) = z_0 + re^{2\pi it}$ con $0 \leq t \leq 1$, donde r denota un número real no negativo.

Cabe notar que dentro del anillo $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$ las funciones holomorfas tienen un buen comportamiento, esto es:

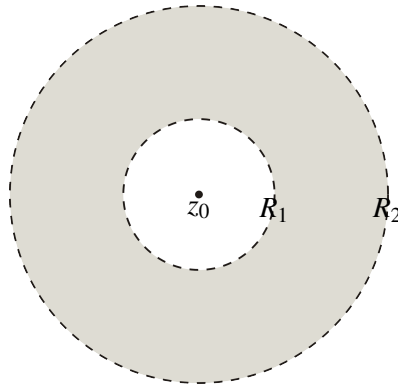


Figura 7.1: Representación del anillo $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$

Lema 7.2.1 — De Cauchy para circunferencias concéntricas. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sean R_1 y R_2 tales que $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Supóngase además que f es una función holomorfa en el anillo $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$. Entonces, para cada número real r tal que $R_1 < r < R_2$:

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} f d\zeta$$

es independiente de r .

Demostración. En caso necesario se realiza el cambio de variable $\zeta = z - z_0$, por lo cual, sin perder generalidad podemos suponer que $z_0 = 0$. Para $r \in \mathbb{R}$ con $R_1 < r < R_2$ definimos la función

$$I(r) := \int_{|\zeta| = r} f(\zeta) d\zeta.$$

Para ver que $I(r)$ es independiente de r bastará ver que $\frac{dI(r)}{dr} = 0$.

Sea $\gamma(t) = re^{2\pi i t}$ para $0 \leq t \leq 1$, una parametrización de la circunferencia con centro en el origen y radio r , entonces

$$\int_{|\zeta| = r} f(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f(re^{2\pi i t}) \cdot 2\pi i r \cdot e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \int_0^1 g(re^{2\pi i t}) dt,$$

donde $g(\zeta) = \zeta f(\zeta)$. Como consecuencia de las reglas de Leibniz obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dr}(r) &= \frac{d}{dr} \left(2\pi i \int_0^1 g(re^{2\pi i t}) dt \right) = 2\pi i \int_0^1 \frac{\partial g(re^{2\pi i t})}{\partial r} dt \\ &= \frac{1}{r} \int_0^1 \frac{\partial g(re^{2\pi i t})}{\partial t} dt = g(re^{2\pi i t}) \Big|_0^1 = \frac{1}{r} (g(r) - g(r)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

pues

$$\frac{\partial g(re^{2\pi i t})}{\partial t} = 2\pi i r \frac{\partial g(re^{2\pi i t})}{\partial r}. \quad (7.4)$$

Esto es, la integral es independiente de r . ■

Lema 7.2.2 — Fórmula integral de Cauchy en una región anular. Si R_1 y R_2 son tales que $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, y f es una función holomorfa en el anillo $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$, si $z \in \text{an}(z_0, R_1, R_2)$. Elegimos R_3 y R_4 tales que $R_1 < R_3 < |z - z_0| < R_4 < R_2$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Demostración. Nuevamente, y sin perder generalidad, podemos suponer que $z_0 = 0$. En el anillo $\text{an}(0; R_1, R_2)$ definamos la función

$$\varphi_f(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } \zeta = z. \end{cases}$$

Claramente la función φ_f es homomorfa en $\text{an}(0; R_1, R_2) \setminus \{z\}$ y continua en $\text{an}(0; R_1, R_2)$. Como consecuencia del teorema de Morera 5.2.3 la función φ_f es holomorfa en $\text{an}(0; R_1, R_2)$.

Como consecuencia del lema anterior 7.2.1, la integral es independiente de r si $R_1 < |r| < R_2$, de donde

$$\int_{|\zeta|=R_3} \varphi_f d\zeta = \int_{|\zeta|=R_4} \varphi_f d\zeta.$$

Como

$$\int_{|\zeta|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } |\zeta - z| < \rho, \\ 0 & \text{si } |\zeta - z| > \rho. \end{cases}$$

De donde

$$\int_{|\zeta|=R_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{|\zeta|=R_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

despejando $f(z)$, se obtiene el resultado deseado. ■

Si consideramos las funciones

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=R_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{para } |z - z_0| < R_4,$$

y

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=R_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{para } R_3 < |z - z_0|,$$

dadas en el lema anterior 7.2.2, se tiene que

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \quad \text{para } R_3 < |z - z_0| < R_4.$$

En el siguiente teorema 7.2.1 veremos que la función $f_1(z)$ es holomorfa en $B(z_0, R_4)$ y por lo tanto tiene una serie de Taylor 5.3.1 alrededor de z_0 , es decir, existe una sucesión de números complejos $\{a_n\}$ tal que

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < R_4.$$

Por otra parte, veremos que la función $f_2(z)$ es holomorfa si $R_3 < |z - z_0|$, es decir, la función f_2 es holomorfa en una vecindad del ∞ , y se puede expresar como una serie de Laurent en potencias negativas de z en una vecindad del infinito, esto es, existe una sucesión de números complejos $\{b_n\}$ tales que

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_{-n} (z - z_0)^n, \quad \text{para } R_3 < |z - z_0|.$$

Luego entonces, si

$$c_n := \begin{cases} a_n & \text{para } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ b_{-n} & \text{para } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \text{ para } R_3 < r < R_4, n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 7.2.1 — Teorema de Laurent. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, R_1, R_2 son tales que $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ y f es holomorfa en el anillo $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$, entonces existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que la serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (7.5)$$

converge absoluta y uniformemente a $f(z)$ en la cerradura de $\text{an}(z_0; R_3, R_4)$ donde R_3, R_4 son números tales que $R_1 < R_3 < R_4 < R_2$. Los coeficientes c_n están dados por la fórmula:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}$$

donde la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, está dada como $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$, para cualquier $r \in \mathbb{R}$ con $R_1 < r < R_2$. Además, dicha serie es la única con estas propiedades.

La demostración se basa en los dos lemas anteriores 7.2.1 y 7.2.2:

Demostración. Sin perder generalidad, supongamos que $z_0 = 0$. Sea $z \in \text{an}(0; R_1, R_2)$ y elijamos números reales R_3 y R_4 tales que

$$R_1 < R_3 < |z| < R_4 < R_2,$$

y sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $R_1 < r < R_2$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se define

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Como consecuencia del lema 7.2.1, los números c_n no dependen de r .

Como $|z| < R_4$, si $|\zeta| = R_4$, entonces:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

y la serie converge uniformemente. Así,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R_4} f(\zeta) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R_4} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \end{aligned}$$

Por otra parte, si fijamos z tal que $R_3 < |z|$ y $|\zeta| = R_3$ de manera similar a la vista anteriormente tenemos

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$$

y la serie converge uniformemente. Luego entonces

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_3} f(\zeta) \left(- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_3} f(\zeta) \zeta^n \right) \frac{1}{z^{n+1}} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n, \end{aligned}$$

donde $m = -n - 1$.

Como consecuencia del lema 7.2.2

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Supongamos que una serie de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ converge para cada punto z en el anillo $\text{an}(0; R_1, R_2)$.

Luego entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rho^n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}| \rho^{-n} = 0$ siempre que $R_1 < \rho < R_2$.

Como consecuencia de la demostración del lema de Abel 3.6.1, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente para $|z| < R_4 < R_2$ y $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente si $R_1 < R_3 < |z|$ para cualesquier R_3 y R_4 tales que $R_1 < R_3 < R_4 < R_2$. Lo anterior demuestra la existencia de la serie.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existe otra sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \text{ para } z \in \text{an}(0; R_1, R_2).$$

Por la propiedad de convergencia uniforme antes demostrada, si $r \in \mathbb{R}$ es tal que $R_1 < r < R_2$, y $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(re^{2\pi i t}) e^{-2\pi i m t} dt &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (re^{2\pi i t})^n e^{-2\pi i m t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_0^1 r^n e^{2\pi i (n-m)t} dt \\ &= a_m r^m, \end{aligned}$$

de donde

$$a_m = r^{-m} \int_0^1 f(re^{2\pi i t}) e^{-2\pi i m t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta = c_m.$$

Con lo cual se demuestra la unicidad. ■

Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r$ y f es una función holomorfa en el abierto $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, el teorema de Laurent 7.2.1 muestra que existe una única expresión de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < r.$$

Corolario 7.2.1 Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función f , holomorfa en $\text{an}(z_0; 0, R)$ para algún $R > 0$, y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

su desarrollo en serie de Laurent en $\text{an}(z_0; 0, R)$. Entonces

1. z_0 es una singularidad removible de f si, y únicamente si, $c_n = 0$ para todo $n < 0$;
2. z_0 es un polo de orden k de f si, y solamente si, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_{-k} \neq 0$ y $c_n = 0$ para todo $n < -k$;
3. z_0 es una singularidad esencial de f cuando, y solamente cuando, $c_n \neq 0$ para infinitos valores negativos de n .

Demostración. Si z_0 es una singularidad removible de f , por definición existe una función holomorfa g tal que $f(z) = g(z)$ para cada $z \neq z_0$. Como g es holomorfa 5.3.1 existe una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ tal que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

y por la unicidad de la serie de Laurent 7.2.1 tenemos que $f(z) = g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ para cada $z \in \text{an}(z_0; 0, R)$, y, en particular $c_n = 0$ para cada entero negativo n .

Recíprocamente, si $f(z)$ admite un desarrollo en serie de Laurent $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ como consecuencia del teorema de Taylor g es holomorfa en una vecindad de z_0 , y coincide con f para $z \neq z_0$, por lo que f tiene una singularidad removible en z_0 .

Para la segunda parte, supongamos que $c_{-k} \neq 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y que $c_n = 0$ para todo $n < -k$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

de donde

$$(z-z_0)^k f(z) = (z-z_0)^k \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k} z^m,$$

Y por la definición de orden de un polo 7.1.3 tenemos que la función f tiene un polo de orden k en z_0 y recíprocamente.

Finalmente, si f tiene una singularidad esencial en z_0 , por definición, z_0 no puede ser singularidad removible ni polo, como consecuencia de los incisos anteriores, hay una infinidad de valores $c_n \neq 0$ con n un entero negativo y recíprocamente. ■

En el punto del infinito “se invierten los términos”, como era de esperar. Si una función f tiene una singularidad aislada en ∞ , ésta será holomorfa en $\text{an}(0; R, \infty)$, para algún $R > 0$, y de acuerdo con el teorema de Laurent 7.2.1

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

para $z \in \text{an}(0; R, +\infty)$. Denominaremos a esta serie el desarrollo en *serie de Laurent de f en el infinito*.

Corolario 7.2.2 Sea f una función con una singularidad aislada en ∞ , holomorfa en $\text{an}(0; R, \infty)$ para algún $R > 0$, y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

su desarrollo en serie de Laurent en $\text{an}(0; R, \infty)$. Entonces:

1. ∞ es una singularidad removible si, y solamente si, $c_n = 0$ para todo $n \geq 1$;
2. ∞ es un polo de orden k si, y únicamente si, $c_k \neq 0$ y $c_n = 0$ para todo $n > k$;
3. ∞ es una singularidad esencial cuando, y solamente cuando, $c_n \neq 0$ para infinitos valores positivos de n .

Demostración. Es consecuencia de aplicar el corolario anterior el punto singular 0 de la función F definida en $\text{an}(0; 0, 1/R)$ por

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

tendrá como desarrollo de Laurent

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m} z^m$$

donde $m = -n$. ■

Definición 7.2.2 Sea Ω un subconjunto abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, y supóngase que f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Si $r > 0$ es un número suficientemente pequeño para que el anillo $\text{an}(z_0; 0, r)$ esté contenido en Ω , tenemos una expansión

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r$$

la cual se denomina la *serie de Laurent* de la función f en el punto z_0 .

El coeficiente c_{-1} del término $\frac{1}{z - z_0}$ se denomina el *residuo de f en z_0* , y lo denotaremos $c_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$.

Nótese que $c_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$, el residuo de f en z_0 , es el único número complejo con la propiedad de que la función

$$f(z) - \frac{c_{-1}}{z - z_0}$$

tenga primitiva en $\text{an}(z_0; 0, r)$. Como consecuencia de esto, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.2.2 Si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \setminus \{z_0\}$ y tiene una singularidad aislada en z_0 con residuo c_{-1} en z_0 . Si $\overline{B(z_0, r)} \setminus \{z_0\} \subset \Omega$, y si $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$ para $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Demostración. Como z_0 es una singularidad aislada de f , entonces f admite una expansión en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma} c_n (z - z_0)^n.$$

La aplicación $z \mapsto (z - z_0)^n$ tiene primitiva para $n \neq -1$, por lo que

$$\int_{\gamma} c_n (z - z_0)^n dz = 0, \quad \text{para } n \neq -1$$

y

$$\int_{\gamma} c_{-1} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i c_{-1},$$

de aquí se concluye el resultado. ■

Como consecuencia de lo visto en el corolario 7.2.2 podemos decir que

Definición 7.2.3 Dado un número real $R > 0$, supongamos que f es una función holomorfa en $\text{an}(0; R, \infty)$, y definamos $F(z) = f(1/z)$. Entonces

1. La función f tiene un *polo de orden k en ∞* si F tiene un polo de orden k en 0.
2. La función f tiene un *cero de orden k en ∞* si F tiene un cero de orden k en 0.
3. Definimos el *residuo de f en ∞* , que denotaremos $\text{Res}(f, \infty)$, como

$$\text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{z^2} F(z), 0\right),$$

o equivalentemente

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f,$$

donde $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ se define como $\gamma(t) = \rho e^{it}$ para $\rho > R$.

Otro concepto que juega un papel fundamental en el estudio de las funciones de variable compleja es el siguiente:

Definición 7.2.4 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $E \subset \Omega$ un conjunto discreto y f una función $\mathbb{C}$ -valuada holomorfa en $\Omega \setminus E$, diremos que f es *meromorfa en Ω* si cada punto de E es un polo de f .

Es decir, una función f es meromorfa si para cada puntos $w \in E$, existe una función g_w holomorfa en una vecindad U_w de w y un entero positivo N_w tal que $f(z) = \frac{g_w(z)}{(z - z_0)^{N_w}}$, para cada $z \in U_w$. Esto es, f puede escribirse localmente como el cociente de dos funciones holomorfas.

Supongamos que f es una función meromorfa en Ω , podemos extender la función f a una función $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ como

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \text{ no es un polo de } f, \\ \infty & \text{si } z \text{ es un polo de } f. \end{cases}$$

Con el fin de simplificar la notación, simplemente escribiremos f en lugar de $\tilde{f}$.

Por definición z_0 es un polo de f si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, tenemos que f es una función continua de Ω en $\mathbb{C}_{\infty}$. Así, podemos pensar a las funciones meromorfas como funciones holomorfas en $\mathbb{C}_{\infty}$ con singularidades en las cuales se puede remover la discontinuidad de la función f .

Lema 7.2.3 Sea $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, y supóngase que f es una función holomorfa en $\text{an}(z_0; 0, r)$. Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ la expansión en serie de Laurent de f en z_0 . Entonces f es meromorfa sobre $B(z_0, r)$ si, y solamente si, existe un entero positivo N tal que $c_n = 0$ para cada $n < -N$.

Demostración. Supóngase que f es meromorfa en $B(z_0, r)$, y sea U una bola centrada en z_0 sobre la cual hay definidas dos funciones holomorfas g, h , con $h(z) \neq 0$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$ y $h(z) \cdot f(z) = g(z)$ para cada $z \in U \cap (B(z_0, r) \setminus \{z_0\})$.

Sea $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^N \phi(z)$, donde N es el mínimo $n \geq 0$ tal que $a_n \neq 0$. Entonces $\phi(z_0) = a_N \neq 0$, consecuentemente, existe una bola V centrada en z_0 , tal que $V \subset U$ y $\phi(z) \neq 0$ para cada $z \in V$. En particular, la función g/ϕ es holomorfa en V . Sea $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ la expansión en serie de Taylor de g/ϕ en z_0 . Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-N}, \quad \text{para } z \in V \setminus \{z_0\}$$

como consecuencia de la unicidad de la expansión en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

tenemos que $c_n = b_{n+N}$ para cada $n \geq -N$, y $c_n = 0$ para cada $n < -N$.

Recíprocamente, si $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, como consecuencia del lema de Abel 3.6.1 tenemos que existe un entero positivo N tal que la función $(z-z_0)^N f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-N}(z-z_0)^n$ es holomorfa en $B(z_0, r)$. ■

En particular, si una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ es meromorfa, entonces que la imagen inversa del punto ∞ ,

$$f^{-1}(\infty) = \{\text{polos de } f \text{ en } \Omega\},$$

que es un conjunto discreto.

Teorema 7.2.3 Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Existe un entero positivo N tal que $(z-z_0)^N f(z)$ es acotada en una vecindad de z_0 .
2. Existe una función holomorfa $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $g(z_0) \neq 0$ y tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N}, \quad \text{para cada } z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

3. Existe una vecindad abierta $U \subset \Omega$ de z_0 y una función holomorfa $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ no nula en $U \setminus \{z_0\}$ y con un cero de orden N en z_0 , tal que

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} \quad \text{para cada } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

4. $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, es decir, para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z-z_0| < \delta$ implica $|f(z)| \geq M$.

Demostración. Demostraremos que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

($1 \Rightarrow 2$:) Supongamos que existe un entero positivo N tal que $(z-z_0)^N f(z)$ es acotada en una vecindad de z_0 , por el teorema de extensión Riemann 7.1.1, la función $(z-z_0)^N f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 , es decir, existe una función holomorfa $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(z) = (z-z_0)^N f(z)$ para cada $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, con $g(z_0) \neq 0$.

($2 \Rightarrow 3$:) Supongamos que existe una función holomorfa $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $g(z_0) \neq 0$ y tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N}$, para cada $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Como los ceros de una función holomorfa no constante son aislados, y $g(z_0) \neq 0$, entonces existe una vecindad abierta $U \subset \Omega$ tal que $g(z) \neq 0$ para cada

$z \in U$. Luego entonces la función $h(z) = \frac{(z - z_0)^N}{g(z)}$ es holomorfa en U , $h(z) \neq 0$ si $z \in U \setminus \{z_0\}$, y $h(z)$ tiene un cero de orden N en z_0 , y $f(z) = 1/h(z)$ si $z \in U \setminus \{z_0\}$.

(3 $\Rightarrow$ 4 :) Si existe una vecindad abierta $U \subset \Omega$ de z_0 y una función holomorfa $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ no nula en $U \setminus \{z_0\}$ y con un cero de orden N en z_0 , tal que $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ para cada $z \in U \setminus \{z_0\}$. Entonces $h(z) = (z - z_0)^N \varphi(z)$, donde φ es una función holomorfa y no nula en U . Luego entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|h(z)|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|^N |\varphi(z)|} = \frac{1}{|\varphi(z_0)|} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|^N} = \infty.$$

(4 $\Rightarrow$ 1 :) Supongamos que para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ implica $|f(z)| \geq M$. Luego entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0$ si $0 < |z - z_0| < \delta$. Por lo tanto $1/f(z)$ está acotada en una vecindad de z_0 y como consecuencia del teorema de extensión de Riemann 7.1.1

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

por lo que z_0 es una singularidad removible de $1/f(z)$.

Si

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

entonces $g(z)$ es una función holomorfa en una vecindad $U \subset \Omega$ de z_0 . Como z_0 es un cero de $g(z)$, existe un entero positivo N y una función holomorfa ψ con $\psi(z_0) \neq 0$ tal que $g(z) = (z - z_0)^N \psi(z)$. Por lo tanto $(z - z_0)^N f(z) = \frac{1}{\psi(z)}$, con $1/\psi(z)$ holomorfa en una vecindad de z_0 , y por lo tanto, acotada en una vecindad de z_0 . ■

Definición 7.2.5 Sea Ω un conjunto abierto conexo en $\mathbb{C}$ y sea f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω .

Sea $z_0 \in \Omega$, y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

la expansión en serie de Laurent de f en z_0 .

Se define el *orden de f en z_0* , que denotaremos $\text{ord}_{z_0}(f)$ como $\min\{n \in \mathbb{Z} ; c_n \neq 0\}$. Si f es la función cero en Ω , se define $\text{ord}_{z_0}(f) = \infty$.

Como consecuencia de las definiciones, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 7.2.4 Sea Ω un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$, y f una función meromorfa en Ω , no idénticamente nula. Sea $z_0 \in \Omega$

1. z_0 es un polo de f si, y solamente si, $\text{ord}_{z_0}(f) < 0$. En este caso, la función $1/f$ tiene un cero de multiplicidad $-\text{ord}_{z_0}(f)$ en z_0 .
2. f es holomorfa y tiene un cero en z_0 si, y únicamente si, $\text{ord}_{z_0}(f) > 0$. En este caso, $\text{ord}_{z_0}(f)$ es la multiplicidad del cero de f en z_0 .
3. f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ cuando, y solamente cuando, $\text{ord}_{z_0}(f) \geq 0$.
4. f es holomorfa en z_0 y $f(z_0) \neq 0$ si, y solamente si, $\text{ord}_{z_0}(f) = 0$.
5. Si f y g son funciones meromorfas definidas en Ω , entonces

$$\text{ord}_{z_0}(f \cdot g) = \text{ord}_{z_0}(f) + \text{ord}_{z_0}(g).$$

6. Si f y g son funciones meromorfas definidas en Ω y $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, entonces $\text{ord}_{z_0}(\lambda f) = \text{ord}_{z_0}(f)$, además $\text{ord}_{z_0}(f + g) \geq \min\{\text{ord}_{z_0}(f), \text{ord}_{z_0}(g)\}$.

Finalmente, si $\text{ord}_{z_0}(f) \neq \text{ord}_{z_0}(g)$, entonces

$$\text{ord}_{z_0}(f + g) = \min\{\text{ord}_{z_0}(f), \text{ord}_{z_0}(g)\}.$$

Definición 7.2.6 Sea f una función meromorfa sobre el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, y sea $z_0 \in \Omega$.

Decimos que f tiene un *polo simple* en z_0 si $\text{ord}_{z_0}(f) = -1$.

Decimos que f tiene un *cero simple* en z_0 si $\text{ord}_{z_0}(f) = 1$.

Si $\text{ord}_{z_0}(f) = k > 0$, decimos que f tiene un *cero de orden k* en z_0 . En particular, un cero simple es un cero de orden uno.

Si $\text{ord}_{z_0}(f) = -k$ con k en $\mathbb{N}$, decimos que f tiene un *polo de orden k* en z_0 . En particular, un polo simple es un polo de orden -1 .

Como consecuencia de lo visto anteriormente, z_0 es una singularidad esencial de una función f si, en la expansión de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ de f en z_0 , hay una infinidad de enteros $n < 0$ con $c_n \neq 0$.

En este caso, por lo visto anteriormente, cuando una función $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 , como la singularidad no es removible los valores $|f(z)|$ cerca de z_0 no están acotados, y como tampoco es un polo, no existe $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$. Así, los valores de $f(z)$ deben estar “vagando” por casi todo $\mathbb{C}$. El teorema que probaremos a continuación nos dice en forma precisa cuál es el comportamiento de los valores de $f(z)$ para valores de z suficientemente cercanos a una singularidad esencial z_0 .

Teorema 7.2.5 — Teorema de Casorati-Weierstrass. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, y considerese el anillo $\text{an}(z_0; 0, r) = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z - z_0| < r\}$. Sea f una función holomorfa en $\text{an}(z_0; 0, r)$, y supongamos que z_0 tiene una singularidad esencial de f . Entonces $f(\text{an}(z_0; 0, r))$ es denso en $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que el resultado es falso, entonces existen $c \in \mathbb{C}$, y $\delta > 0$ tales que

$$f(\text{an}(z_0; 0, r)) \cap \{w \in \mathbb{C} ; |w - c| < \delta\} = \emptyset.$$

Entonces la función $g = (f - c)^{-1}$ es holomorfa en $\text{an}(z_0; 0, r)$ y $|g(z)| \leq \delta^{-1}$. Por el teorema de extensión de Riemann existe una función G holomorfa en $B(z_0, r)$, tal que $G(z) = g(z)$ para cada $z \in \text{an}(z_0; 0, r)$. Entonces G es nunca nula sobre $B(z_0, r)$, además $G \cdot (f - c) = 1$ sobre $\text{an}(z_0; 0, r)$ y la función f está dada como $f(z) = c + \frac{1}{G(z)}$ sobre $\text{an}(z_0, 0, r)$.

Por lo tanto f se extiende holomorfamente a $B(z_0, r)$, con $f(z_0) = c + \frac{1}{G(z_0)}$, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que z_0 es una singularidad esencial de f . ■

No sólo esto es cierto, se tiene el teorema de Picard que asegura que existe a lo más un valor $c \in \mathbb{C}$ tal que $c \notin f(\text{an}(z_0; 0, r))$.

Teorema 7.2.6 — Teorema de Picard. Sea $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\text{an}(z_0; 0, R)$. Sea f una función holomorfa en $\text{an}(z_0; 0, R)$, y supongamos que f tiene una singularidad esencial en z_0 . Entonces $f(\text{an}(z_0; 0, R))$ contiene a todos los números complejos con a lo más una excepción.

Este teorema forma parte de un curso avanzado, por lo cual, su demostración no queda incluida en el presente texto. Para una demostración, puede verse (Narasimhan, 1985, pg. 95, Cap. 4).

7.3 Residuos

Como consecuencia de lo visto en la sección anterior, si z_0 es un punto singular de la función f , y si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ existe y no es cero, entonces f tiene un polo simple en z_0 , y este límite coincide con el residuo de f en z_0 . Aplicaremos este resultado para obtener un método para calcular el residuo de la función f en el punto z_0 .

Proposición 7.3.1 Sean g y h funciones holomorfas en z_0 y supóngase que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Demostración. Sabemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = h'(z_0) \neq 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} = \frac{1}{h'(z_0)}.$$

Por eso

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

existe y es igual al residuo de f en z_0 . ■

En general, si $g(z)$ tiene un cero de orden k y $h(z)$ tiene un cero de orden l con $l > k$, entonces $g(z)/h(z)$ tiene un polo de orden $l - k$, pues $g(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$, $h(z) = (z - z_0)^l \psi(z)$, donde $\phi(z_0) \neq 0$ y $\psi(z_0) \neq 0$. Así

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{\phi(z)/\psi(z)}{(z - z_0)^{l-k}}$$

donde la función ϕ/ψ es holomorfa en z_0 y no nula en z_0 . Generalizando el resultado anterior tenemos:

Proposición 7.3.2 Supóngase que $g(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 y que $h(z)$ tiene un cero de orden $k + 1$, entonces g/h tiene un polo simple con residuo

$$\text{Res} \left(\frac{g}{h}, z_0 \right) = (k + 1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

Demostración. Como $g(z)$ tiene un cero de orden k en z_0 , como consecuencia del teorema de Taylor tenemos que

$$g(z) = (z - z_0)^k \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} + (z - z_0)^{k+1} \phi(z)$$

donde $\phi(z)$ es holomorfa en una vecindad de z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Análogamente

$$h(z) = (z - z_0)^{k+1} \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k + 1)!} + (z - z_0)^{k+2} \psi(z)$$

con $\psi(z)$ holomorfa en una vecindad de z_0 y $\psi(z_0) \neq 0$.

Por lo tanto

$$(z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} + (z - z_0)\phi(z)}{\frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k + 1)!} + (z - z_0)\psi(z)}$$

y cuando $z \rightarrow z_0$, este valor converge al cociente de los límites

$$(k + 1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}.$$
■

En particular, esto muestra que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = (k+1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}.$$

Para polos de orden mayor o igual que 2, podemos desarrollar fórmulas que nos permitan calcular el residuo, por ejemplo:

Proposición 7.3.3 Si f tiene una singularidad aislada en z_0 y si k es el mínimo entero positivo tal que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden k en z_0 y si escribimos $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$, entonces ϕ puede definirse en forma única en z_0 tal que ϕ es holomorfa en z_0 y

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Demostración. Como $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe, la función $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$ tiene una singularidad removible en z_0 , y en una vecindad de z_0 tenemos que

$$\phi(z) = (z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + \dots$$

y así

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$$

Si $c_{-k} = 0$, entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k-1} f(z)$ existe, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto z_0 es un polo de orden k .

Finalmente, considerando la expansión de ϕ en serie de Taylor en z_0 , y derivando $k-1$ veces, obtenemos que $\phi^{(k-1)}(z_0) = (k-1)!c_{-1}$. ■

Ejemplo 42

1. A continuación encontraremos todos los residuos de la función:

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}.$$

Solución: Como $f(z)$ es el cociente de los polinomios $g(z) = z^2 - 2z = z(z-2)$ y $h(z) = (z+1)^2(z^2+4)$, y $g(z) = 0$ cuando $z = 0$, o bien, $z = 2$, mientras que $h(z) = 0$ cuando $z = -1$ o $z = \pm 2i$, tenemos que g y h no tienen factores comunes y la función $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-1, \pm 2i\}$.

De lo anterior es fácil ver que $z_0 = -1$ es un polo doble de $f(z)$, mientras que $z_1 = 2i$ y $z_2 = -2i$ son polos simples de $f(z)$.

Examinaremos primeramente el polo doble $z_0 = -1$.

Como consecuencia de la proposición 7.3.3, si definimos

$$\phi(z) := (z - (-1))^2 f(z),$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, -1) &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} \phi(z) \Big|_{z_0=-1} \\
&= \frac{d}{dz} \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 4} \Big|_{z_0=-1} \\
&= \frac{(z^2 + 4)(2z - 2) - (z^2 - 2z)(2z)}{(z^2 + 4)^2} \Big|_{z_0=-1} \\
&= \frac{2z^2 + 8z - 8}{(z^2 + 4)^2} \Big|_{z_0=-1} \\
&= -\frac{14}{25}.
\end{aligned}$$

Ahora, examinaremos $z_1 = 2i$. De acuerdo con la proposición 7.3.1

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)}.$$

Como

$$\begin{aligned}
h'(z) &= 2(z+1)(z^2+4) + (z+1)^2(2z) \\
&= 2(z^3 + z^2 + 4z + 4) + (z^2 + 2z + 1 + 1)(2z) \\
&= 4z^3 + 6z^2 + 10z + 8,
\end{aligned}$$

entonces $h'(2i) = -16 - 12i$, y $g(2i) = -4 - 4i$, de donde

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)} = \frac{-4 - 4i}{-16 - 12i} = \frac{7 + i}{25}.$$

De manera análoga

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{g(z_2)}{h'(z_2)} = \frac{-4 + 4i}{-16 + 12i} = \frac{7 - i}{25}.$$

2. Sea $f(z) = e^z \csc^2 z = \frac{e^z}{\sin^2 z}$, como e^z es nunca nula y $\sin z$ tiene un cero simple si $z_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\sin^2 z$ tiene un cero de orden dos en los puntos $z_k = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que $f(z)$ tiene polos de orden dos en dichos puntos.

Aplicando la proposición 7.3.3, si $\phi(z) = (z - z_k)^2 f(z)$ tenemos que:

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{\phi'(z_k)}{1!}.$$

De donde $\operatorname{Res}(f, z_k)$ está dado como:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_k) &= \frac{d}{dz} \left((z - z_k)^2 e^z \csc^2 z \right) \Big|_{k\pi} \\
&= e^z \csc^2 z \left(-2(z - k\pi)^2 \cot z + (z - k\pi)^2 \right) \Big|_{k\pi} \\
&\quad + e^z \csc^2 z (2(z - k\pi)) \Big|_{k\pi} \\
&= e^z \left(\frac{-2(z - k\pi)^2 \cos z + (z - k\pi)^2 \sin z}{\sin^3 z} \right) \Big|_{k\pi} \\
&\quad + e^z \left(\frac{2(z - k\pi) \sin z}{\sin^3 z} \right) \Big|_{k\pi}
\end{aligned}$$

Sustituyendo $u = z - k\pi$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_k) &= \\ &= e^{k\pi+u} \left(\frac{u^2 \sin(k\pi+u) + 2u \sin(k\pi+u) - 2u^2 \cos(k\pi+u)}{\sin^3(k\pi+u)} \right) \Big|_{u=0} \\ &= e^{k\pi+u} \left(\frac{u^2 \sin(k\pi+u) + 2u \sin(k\pi+u) - 2u^2 \cos(k\pi+u)}{\sin^3(k\pi+u)} \right) \Big|_{u=0}. \end{aligned}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, k\pi) &= \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u^2 \sin(k\pi+u) + 2u \sin(k\pi+u) - 2u^2 \cos(k\pi+u)}{\sin^3(k\pi+u)} \right) \\ &= e^{k\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u^2}{\sin^2(k\pi+u)} + 2 \frac{u \sin(k\pi+u) - u^2 \cos(k\pi+u)}{\sin^3(k\pi+u)} \right) \\ &= e^{k\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(k\pi+u) \cos(k\pi+u)} \\ &\quad + 2e^{k\pi} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(k\pi+u)} \right) \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi+u) - u \cos(k\pi+u)}{\sin^2(k\pi+u)} \right) \\ &= e^{k\pi} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(k\pi+u) - \sin^2(k\pi+u)} \\ &\quad + e^{k\pi} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{\cos(k\pi+u)} \right) \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u+k\pi) + u \cos(k\pi+u)}{2 \sin(k\pi+u) \cos(k\pi+u)} \right) \\ &= e^{k\pi} \left(1 + 2 \frac{1}{\cos(k\pi)} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u \sin(k\pi+u)}{2 \sin(u+k\pi) \cos(k\pi+u)} \right) \\ &= e^{k\pi} \left(1 + \frac{1}{\cos(k\pi)} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi+u) + u \cos(k\pi+u)}{(\cos^2(k\pi+u) - \sin^2(k\pi+u)) \text{den}} \right) \\ &= e^{k\pi} (1 + 0) = e^{k\pi}. \end{aligned}$$

Es decir, $\text{Res}(f, k\pi) = e^{k\pi} \cos(k\pi)$.

Por otra parte, si desarrollamos $f(z) = e^z \csc^2 z$ en serie de Laurent alrededor de $z_k = k\pi$ y obtendremos el coeficiente de $1/(z - k\pi)$ obtendremos el residuo buscado. Sea $u = z - k\pi$ y desarrollemos la serie de Laurent en torno a $u = 0$, entonces $e^{k\pi+u} \csc^2(k\pi+u) = e^{k\pi} e^u \csc^2 u$. Utilizando el desarrollo en serie de Taylor para e^u y $\sin u$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{k\pi} e^u \csc^2 u &= \frac{e^{k\pi} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \right)}{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \right)^2} \\ &= \frac{e^{k\pi} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots \right)}{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{6} + \frac{u^4}{120} - \dots \right)^2} \\ &= \frac{e^{k\pi} \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots \right)}{u^2 \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} - \frac{u^6}{315} + \dots \right)} \\ &= e^{k\pi} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{5}{6} + \frac{u}{2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Así, $\text{Res}(f, k\pi) = e^{k\pi}$.

7.4 El teorema del residuo

Teorema 7.4.1 — Teorema del residuo. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y sea E un conjunto discreto en Ω . Sea γ una curva cerrada en $\Omega \setminus E$ la cual es homotópica a una curva constante en Ω .

Entonces, para cada función holomorfa en $\Omega \setminus E$, el conjunto $\{a \in E; n(\gamma, a) \neq 0\}$ es finito y tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in E} \text{Res}(f, a) \cdot n(\gamma, a).$$

Demostración. Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus E$, y sea $H: I \times I \rightarrow \Omega$ una homotopía de γ a una constante fijando $\gamma(0) = \gamma(1)$. Sea $\mathcal{K} = H(I \times I)$; como $\mathcal{K}$ es la imagen bajo una función continua de un conjunto compacto, $\mathcal{K}$ es compacto, y así $\mathcal{K} \cap E$ es finito. Si $a \in E$ y $a \notin \mathcal{K}$, entonces H es una homotopía de γ a una constante en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, por lo tanto $n(\gamma, a) = 0$. Por lo que $\{a \in E; n(\gamma, a) \neq 0\}$ está contenido en $E \cap \mathcal{K}$ y este conjunto es finito. Supongamos que $E \cap \mathcal{K} = \{a_1, \dots, a_p\}$, y sea g_j la parte principal de f en a_j . Entonces $f - \left(\sum_{j=1}^p g_j \right)$ es holomorfa en un conjunto abierto $U \supset \mathcal{K}$, y γ es homotópica a una constante en U . Como consecuencia del teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{j=1}^p \int_{\gamma} g_j dz.$$

Sea

$$g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} (z - a_j)^n, \quad z \neq a_j.$$

Como la serie converge uniformemente sobre $\text{im}(\gamma)$ tenemos

$$\int_{\gamma} g_j dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} \int_{\gamma} (z - a_j)^n dz = 2\pi i c_{-1}^{(j)} \cdot n(\gamma, a_j)$$

ya que $(z - a_j)^n$ tiene primitiva sobre $\mathbb{C} - \{a_j\}$ para $n \neq -1$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f dz = \sum_{j=1}^p n(\gamma, a_j) c_{-1}^{(j)} = \sum_{j=1}^p n(\gamma, a_j) \cdot \text{Res}(f, a_j) = \sum_{a \in E} n(\gamma, a) \text{Res}(f, a)$$

pues $n(\gamma, a) = 0$ si $a \in E$, $a \neq a_j$. ■

Ejemplo 43

1. A continuación obtendremos el valor de la siguiente integral:

$$\int_{|z|=1} e^{-1/z} \text{sen}(1/z) dz.$$

Nótese que la función $f(z) = e^{-1/z} \text{sen}(1/z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y en $z_0 = 0$ tiene una singularidad esencial.

Como

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

y

$$\text{sen}(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots$$

al realizar el producto de las series tenemos

$$\begin{aligned}
 e^{-1/z} \operatorname{sen}(1/z) &= \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \dots\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) \\
 &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \\
 &\quad - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!z^4} - \dots \\
 &\quad + \frac{1}{2z^3} - \dots \\
 &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots
 \end{aligned}$$

De donde $\operatorname{Res}(e^{-1/z} \operatorname{sen}(1/z)) = 1$.

Aplicando el teorema del residuo

$$\int_{|z|=1} e^{-1/z} \operatorname{sen}(1/z) dz = 2\pi i.$$

2. Ahora obtendremos el valor de la integral:

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z} dz.$$

Notamos que e^z es una función entera nunca nula, y como la función $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ es entera y tiene ceros simples en los puntos de la forma $z_k = \frac{\pi}{2}i + k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$, consecuentemente, los puntos z_k con $k = -2, -1, 0, 1$ están en el interior de la circunferencia $|z| = 5$.

En la figura 7.2, podemos apreciar los ceros simples de la función $\cosh z$ con módulo menor que cinco.

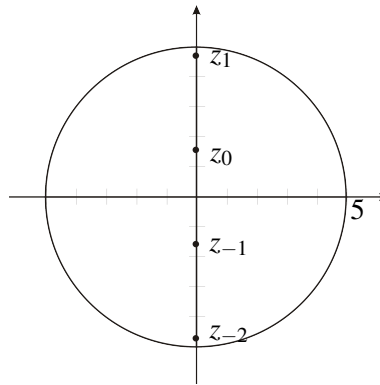


Figura 7.2: Ceros de $\cosh z$ en $B(0, 5)$

Como

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, z_k\right) = \frac{e^{z_k}}{\sinh(z_k)} = \frac{i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = 1.$$

De donde

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z} dz = 2\pi i \sum_{k=-2}^1 \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, z_k\right) = 2\pi i (1 + 1 + 1 + 1) = 8\pi i.$$

Como consecuencia del teorema del residuo 7.4.1 podemos dar otra demostración de la fórmula integral de Cauchy

Corolario 7.4.1 — Fórmula integral de Cauchy. Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y sea γ una curva cerrada en Ω , homotópica a una constante. Sea f una función holomorfa en Ω y $z_0 \in \Omega \setminus \text{im}(\gamma)$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = n(\gamma, z_0) f(z_0).$$

Demostración. La función $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0\}$ y $\text{Res}(g, z_0) = f(z_0)$. Como consecuencia del teorema del residuo, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = n(\gamma, z_0) f(z_0).$$

■

Supongamos que f es holomorfa y tiene un cero de orden n en z_0 , entonces $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$ con $\phi(z_0) \neq 0$. Por tanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

y ϕ'/ϕ es holomorfa en una vecindad de z_0 .

Por otra parte, supongamos que f tiene un polo de orden m en z_0 , esto es, $f(z) = (z - z_0)^{-m} \phi(z)$, donde g es holomorfa y $\phi(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_0} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

y nuevamente ϕ'/ϕ es holomorfa en una vecindad de z_0 .

Usando el análisis anterior podemos deducir el siguiente resultado:

Teorema 7.4.2 — Principio del argumento. Sea f una función meromorfa en Ω con polos $p_1, \dots, p_m$ y ceros $z_1, \dots, z_n$ contados de acuerdo a su multiplicidad. Si γ es una curva cerrada homotópica a una constante en Ω y que no pasa por los puntos $p_1, \dots, p_m, z_1, \dots, z_n$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, p_j).$$

Demostración. Aplicando repetidamente las expresiones obtenidas en el párrafo anterior tenemos que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - p_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)},$$

donde ϕ es holomorfa y nunca nula en Ω . Como ϕ'/ϕ es holomorfa, como consecuencia del teorema de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - z_k} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - p_j} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right) dz \\ &= \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^m n(\gamma, p_j). \end{aligned}$$

■

Usando la definición de orden de una función en un punto, podemos reescribir este resultado como:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \text{ord}_a(f)$$

donde Z_f es el conjunto de ceros de f y P_f es el conjunto de polos de f .

Ejemplo 44

A continuación, aplicaremos el principio del argumento 7.4.2 para evaluar

$$\int_{|z|=3} \tan z \, dz.$$

Como $\tan z = \sin z / \cos z$, si consideramos $f(z) = \cos z$, f es una función entera, por lo que P_f es el conjunto vacío y $Z_f = \{\frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}\}$. En el interior del círculo de radio 3 tenemos sólo los ceros $z_{\pm} = \pm\pi/2$, y el índice de la curva $\gamma(t) = 3e^{2\pi it}$ con $0 \leq t \leq 1$ con respecto a las puntos $z_{\pm}$ está dado como $n(\gamma, z_{\pm}) = 1$.

Como $\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z$, podemos deducir que:

$$\int_{\gamma} \tan z \, dz = - \int_{\gamma} \frac{-\sin z}{\cos z} \, dz = -2\pi i (n(\gamma, z_+) + n(\gamma, z_-)) = -2\pi i (1 + 1) = -4\pi i.$$

El por qué se denomina “principio del argumento,” se debe a lo siguiente:

Si pudieramos definir $\log f(z)$, entonces $\log f(z)$ sería una primitiva de f'/f , y tendríamos así que $\int_{\gamma} f'/f = 0$. Como ningún cero o polo de f está sobre $im(\gamma)$, para cada $z \in im(\gamma)$ existe un disco $B(z, r_z)$ en el cual se puede definir una rama de $\log f(z)$. Las bolas forman una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $im(\gamma)$, y por el teorema de la cubierta de Lebesgue, véase (Munkres, 2000, Lema 27.5, pg. 175), existe un número positivo ε , llamado el *número de Lebesgue para la cubierta $\mathcal{U}$* , tal que para cada $z \in im(\gamma)$ podemos definir una rama de $\log f(z)$ sobre $B(z, \varepsilon)$. Usando la continuidad uniforme sobre γ (donde $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$), existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tal que $\gamma(t) \in B(\gamma(t_{j-1}), \varepsilon)$ para $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ y $1 \leq j \leq k$. Sea ℓ_j la rama de $\log f$ definida en $B(\gamma(t_{j-1}), \varepsilon)$ para $1 \leq j \leq k$.

Como $\gamma(t_j) \in B(\gamma(t_j), \varepsilon) \cap B(\gamma(t_{j+1}), \varepsilon)$, podemos elegir $\ell_1, \dots, \ell_k$ tales que $\ell_1(\gamma(t_1)) = \ell_2(\gamma(t_1))$; $\ell_2(\gamma(t_2)) = \ell_3(\gamma(t_2))$; $\dots$; $\ell_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = \ell_k(\gamma(t_{k-1}))$. Si γ_j denota la restricción de γ al intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, como $\ell'_j = f'/f$, entonces

$$\int_{\gamma_j} \frac{f'}{f} \, dz = \ell_j(\gamma(t_j)) - \ell_j(\gamma(t_{j-1})) \quad \text{para } 1 \leq j \leq k.$$

Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{f'}{f} \, dz = \sum_{k=1}^j \int_{\gamma_j} \frac{f'}{f} \, dz = \ell_k(\gamma(1)) - \ell_1(\gamma(0)).$$

Como γ es una curva cerrada, entonces $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$, por lo que existe un entero K tal que

$$\ell_k(\gamma(1)) - \ell_1(\gamma(0)) = \ell_k(z_0) - \ell_1(z_0) = 2\pi i K.$$

Como $2\pi i K$ es un número imaginario, tenemos que $\text{Im}(\ell_k(z_0)) - \text{Im}(\ell_1(z_0)) = 2\pi K$. Es decir, cuando z se desplaza a lo largo de γ , $\arg f(z)$ cambia por $2\pi K$.

Teorema 7.4.3 — Versión débil del teorema de Rouché. Sean f y g funciones meromorfas en una vecindad de $\overline{B(z_0, R)}$, sin ceros o polos sobre la circunferencia con centro z_0 y radio r , $\gamma = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$. Si Z_f, Z_g (respectivamente P_f, P_g) son los números de ceros (polos) de f y g en el interior de γ contados de acuerdo con sus multiplicidades y si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

sobre γ , entonces

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

Demostración. De las hipótesis

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1$$

sobre γ . Si $\lambda = f(z)/g(z)$ y si λ es un número real positivo, la desigualdad anterior nos da que $\lambda + 1 < \lambda + 1$, lo cual es absurdo. Así, la imagen de la curva γ bajo la función meromorfa f/g está contenida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Si ℓ es una rama de logaritmo sobre Ω entonces $\ell(f(z)/g(z))$ es una primitiva bien definida de $(f/g)'/(f/g)$ en una vecindad de γ . Entonces

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f/g)'}{(f/g)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) = (Z_f - P_f) - (Z_g - P_g).$$

■

Este enunciado del teorema de Rouché fue descubierto por Irving Glicksberg (Amer. Math. Monthly, **83** (1976), 186-187). En el enunciado clásico se supone que f y g satisfacen la desigualdad $|f+g| < |g|$. Pero la versión débil nos permite dar diversas aplicaciones, por ejemplo, es posible dar otra demostración del teorema fundamental del álgebra.

Corolario 7.4.2 — Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio $p(z)$ con coeficientes complejos de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el término principal del polinomio $p(z)$ es uno. Si $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, entonces

$$\frac{p(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}$$

y como $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z)/z^n = 1$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que, si $|z| = R$ entonces

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1,$$

es decir, $|p(z) - z^n| < |z|^n$ si $|z| = R$. Por la versión débil del teorema de Rouché 7.4.3, $p(z)$ debe tener n ceros en el interior de $|z| = R$. ■

Teorema 7.4.4 — Teorema de Rouché . Supongamos que:

1. $f(z)$ y $g(z)$ son holomorfas en los puntos de una curva cerrada simple γ y en su interior.
2. $|f(z)| > |g(z)|$ en todos los puntos de la traza de γ .

Entonces $f(z)$ y $f(z) + g(z)$ tienen, contando multiplicidades, el mismo número de ceros en el interior de γ .

Demostración. Por hipótesis, si z está en la traza de γ

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0 \quad \text{y} \quad |f(z) + g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0.$$

Si Z_f y Z_{f+g} denotan los ceros de f y $f+g$ en el interior de γ , contando multiplicidades, como consecuencia del principio del argumento 7.4.2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} dz = Z_{f+g}.$$

Como

$$f+g = f \left(1 + \frac{g}{f} \right) \quad \text{y} \quad (f+g)' = \left(f \left(1 + \frac{g}{f} \right) \right)',$$

entonces

$$\begin{aligned}
 Z_{f+g} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f' \left(1 + \frac{g}{f}\right) + f \left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{f \left(1 + \frac{g}{f}\right)} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f'}{f} + \frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{1 + \frac{g}{f}} \right) dz \\
 &= Z_f + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{1 + \frac{g}{f}} dz.
 \end{aligned}$$

Pero

$$\left| \left(1 + \frac{g}{f}\right) - 1 \right| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

lo cual significa que la imagen de la traza de γ bajo la transformación $1 + \frac{g}{f}$ está en la bola con centro en 1 y radio 1. Luego entonces, esta imagen no encierra al origen. Así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left(1 + \frac{g}{f}\right)'}{\left(1 + \frac{g}{f}\right)} dz = 0$$

Consecuentemente, $Z_f = Z_{f+g}$. ■

Ejemplo 45

1. A continuación determinaremos el número de soluciones de la ecuación

$$z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$$

en el interior de la bola con centro en el origen y radio uno.

Sea

$$f(z) = -4z^3 \quad \text{y} \quad g(z) = z^7 + z - 1$$

Si $|z| = 1$ entonces $|f(z)| = |-4z^3| = 4$ y además $|g(z)| \leq |z|^7 + |z| + 1 = 3$.

Se cumple así que $|f(z)| > |g(z)|$ en $|z| = 1$, y que f y g son holomorfas en todos los puntos de $|z| = 1$. Entonces f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de la circunferencia $|z| = 1$, por lo que $f(z) + g(z)$ también tiene tres ceros en el interior de esta circunferencia.

Las aproximaciones numéricas a las soluciones de la ecuación

$$z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$$

están dadas por: $z_0 \cong -1.313849700$, $z_1 \cong -0.7920616533$, $z_2 \cong -0.02488372890 - 1.456125932i$, $z_3 = \bar{z}_2$, $z_4 \cong 0.377267571 - 0.425476709i$, $z_5 = \bar{z}_4$, $z_6 = 1.401143669$, y de lo anterior es claro que z_1 , z_4 y $z_5 = \bar{z}_4$ son los valores aproximados de los ceros de $f+g$ en $\mathbb{D}$.

2. A continuación mostraremos que todas las soluciones de la ecuación $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ están en el anillo $\text{an}(0; 1, 2)$.

Primeramente veremos que esta ecuación no tiene soluciones si $|z| < 1$, para lo cual definimos

$$f(z) := 12 \quad \text{y} \quad g(z) := z^7 - 5z^3.$$

Sobre $|z| = 1$ tenemos

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z|^7 + |5z^3| = 1 + 5 = 6 \leq 12 = |f(z)|.$$

Por el teorema de Rouché 7.4.4, las funciones $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros dentro de la circunferencia $|z| = 1$, pero $f(z) = 12$ es no nula, es decir, $g(z)$ no se anula dentro de la circunferencia $|z| = 1$.

Consideremos ahora la circunferencia $|z| = 2$, y en este caso definimos

$$f(z) := z^7 \quad \text{y} \quad g(z) := 12 - 5z^3.$$

Si $|z| = 2$ tenemos que $|f(z)| = |z^7| = 2^7 = 128$, por otra parte, podemos acotar el módulo de la función $g(z)$ como $|g(z)| = |12 - 5z^3| \leq |12| + |5z^3| = 12 + 40 = 52$, esto es, $|g(z)| < |f(z)|$. Por el teorema de Rouché 7.4.4, el polinomio $f(z) + g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ tiene el mismo número de ceros en el interior de la circunferencia $|z| = 2$ que $f(z) = z^7$, esto es, todos los ceros están dentro del círculo $|z| < 2$.

Consecuentemente, todas las raíces del polinomio $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ están en el anillo $\text{an}(0; 1, 2)$.

Una aproximación a los valores numéricos de las soluciones de la ecuación

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

son $z_0 \cong -1.661302392$, $z_1 \cong -0.681586035 - 1.002298198i$, $z_2 \cong \bar{z}_1$, $z_3 \cong 0.1743265244 - 1.590690159i$, $z_4 \cong \bar{z}_3$, $z_5 \cong 1.337910707 - 0.3605832538i$, $z_6 \cong \bar{z}_5$.

3. Si $a > e$, mostraremos que la ecuación $e^z = az^n$ tiene n soluciones en el interior del círculo unitario.

Sea $f(z) = e^z$ y $g(z) = -az^n$. Entonces g tiene exactamente n raíces. Debemos mostrar que, para $|z| = 1$ se tiene $|f(z)| < |g(z)|$. Si $z = x + iy$ con $|z| = 1$, entonces $|f(z)| = |e^z| = e^x \leq e$. Como $|g(z)| = a > e$, como consecuencia del teorema de Rouché 7.4.4, la ecuación $e^z = az^n$ tiene n soluciones en el interior del círculo unitario.

Teorema 7.4.5 — Teorema de Hurwitz. Sea Ω una región y supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en Ω la cual converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω a la función f . Supóngase que f no es idénticamente nula, sea $z_0 \in \Omega$ y tomemos $R > 0$ tal que $\overline{B(z_0, R)} \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para $|z - z_0| = R$. Entonces existe un entero positivo N tal que para $n \geq N$, f y f_n tienen el mismo número de ceros en $B(z_0, R)$.

Demostración. Como $f(z) \neq 0$ para $|z - z_0| = R$, sea

$$\delta = \inf\{|f(z)| \in \mathbb{R}; |z - z_0| = R\} > 0.$$

Como f_n converge uniformemente a f sobre el conjunto $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = R\}$, existe un entero N tal que si $n \geq N$ y $|z - z_0| = R$, entonces $f_n(z) \neq 0$. Si $|z - z_0| = R$ y

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\delta}{2} < |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|.$$

Como consecuencia del teorema de Rouché 7.4.3 f y f_n tienen el mismo número de ceros en $B(z_0, R)$ ■

Corolario 7.4.3 Si Ω es una región y $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones holomorfas en Ω la cual converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω a la función f , y f_n nunca se anula en Ω , entonces f es idénticamente nula, o bien, f es nunca nula.

Definición 7.4.1 Sean Ω y Ω' dos conjuntos abiertos en $\mathbb{C}$. Una *aplicación holomorfa* f de Ω en Ω' es una función holomorfa definida en Ω tal que $f(\Omega) \subset \Omega'$.

Decimos que f es un *isomorfismo analítico* de Ω sobre Ω' si existe una aplicación holomorfa $g : \Omega' \rightarrow \Omega$ tal que $g \circ f$ es la aplicación identidad en Ω y $f \circ g$ es la identidad en Ω' .

Si $\Omega = \Omega'$ y $f : \Omega \rightarrow \Omega$ es un isomorfismo analítico, entonces f se denomina un *automorfismo analítico* de Ω .

Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una aplicación holomorfa, diremos que f es *localmente un isomorfismo analítico* si para cada $z_0 \in \Omega$ existe una vecindad U de z_0 tal que $f(U) = U'$ es abierto y $f|_U$ es un isomorfismo analítico sobre U' .

Proposición 7.4.6 Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω , y $z_0 \in \Omega$. Entonces $f'(z_0) \neq 0$ si, y solamente si, existe una vecindad U de z_0 tal que $f|_U$ es inyectiva.

Demostración. Sea $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}$ para $0 \leq t \leq 1$. Entonces $n(\gamma, b) = 1$ si $b \in B(z_0, r)$, mientras que $n(\gamma, b) = 0$ si $r < |b - z_0|$.

Supóngase que existe $r_1 > 0$ tal que $B(z_0, r_1) \subset \Omega$ y $f|_{B(z_0, r_1)}$ es inyectiva. Sea $0 < r < r_1$ tal que $f'(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| \leq r$.

Supongamos que $f'(z_0) = 0$, como f es inyectiva sobre $B(z_0, r_1)$, el único cero de $f - f(z_0)$ es el punto z_0 . Como consecuencia del principio del argumento 7.4.2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = \text{ord}_{z_0}(f - f(z_0)) \geq 2, \text{ ya que } f'(z_0) = 0.$$

Sea $\delta = \inf_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)| > 0$, y sea $w \in \mathbb{C}$, un punto tal que $|w - f(z_0)| < \delta$. La función

$$w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$$

es claramente continua en $B(f(z_0), \delta)$. Como consecuencia del principio del argumento 7.4.2 esta función sólo toma valores enteros. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz \geq 2, \quad w \in B(f(z_0), \delta).$$

Nuevamente, aplicando el principio del argumento 7.4.2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f - w} dw = \sum_{b \in B(z_0, r), f(b) = w} \text{ord}_b(f - w).$$

Por la elección de r , $f'(z) \neq 0$ si $z \in B(z_0, r)$, $z \neq z_0$. Así, deben existir al menos dos puntos distintos $b_1, b_2 \in B(z_0, r)$ con $f(b_1) = w = f(b_2)$, lo cual contradice la hipótesis de que $f|_{B(z_0, r_1)}$ es inyectiva. Por lo cual $f'(z_0) \neq 0$.

Recíprocamente, si $f'(z_0) \neq 0$, elegimos r tal que

$$\overline{B(z_0, r)} \cap \{z \in \Omega ; f(z) = f(z_0)\} = \{z_0\}.$$

Como $f'(z_0) \neq 0$ debemos tener $\text{ord}_{z_0}(f - f(z_0)) = 1$, por lo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz = 1.$$

Si $\delta = \inf_{|z - z_0| = r} |f(z) - f(z_0)|$ entonces $\delta > 0$ y además,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = 1, \quad \text{para } |w - f(z_0)| < \delta.$$

El principio del argumento 7.4.2 implica que existe un único punto $z \in B(z_0, r)$ tal que $f(z) = w$, $w \in B(f(z_0), \delta)$.

De donde, si $U = B(z_0, r) \cap f^{-1}(B(f(z_0), \delta))$, $f|_U$ es inyectiva y $f(U) = B(f(z_0), \delta)$. ■

Teorema 7.4.7 Sean Ω, Ω' dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, dada una aplicación holomorfa $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, si f es biyectiva entonces f es un isomorfismo analítico de Ω sobre Ω' .

Demostración. Por el teorema de la aplicación abierta, f^{-1} es una aplicación continua de Ω' en Ω .

Como consecuencia de la proposición anterior, $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$.

Sea $a \in \Omega$, $b = f(a)$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$. Definamos $\delta := \inf_{|z-a|=r} |f(z) - b|$. Como f^{-1} es continua, existe $\varepsilon > 0$, con $0 < \varepsilon < \delta$ tal que $f^{-1}(B(b, \varepsilon)) \subset B(a, r)$.

Sea $w_0 \in B(b, \varepsilon)$, $z_0 = f^{-1}(w_0)$, entonces $f(z_0) = w_0$ y

$$\frac{f'(z)}{f(z) - w_0} = \frac{1}{z - z_0} + h(z), \quad z \in \Omega$$

donde h es holomorfa en Ω . Ya que $\text{ord}_{z_0}(f - w_0) = 1$ y $f(z) \neq w_0$ si $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, tenemos $f(z) - w_0 = (z - z_0)\phi(z)$ con ϕ holomorfa en Ω y $\phi(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, así $h = \phi'/\phi$.

De donde

$$\frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} = \frac{z}{z - z_0} + zh(z) = \frac{z_0}{z - z_0} + 1 + zh(z).$$

Así

$$f^{-1}(w_0) = z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} dz, \quad w_0 \in B(b, \varepsilon).$$

La función $w \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz$ es holomorfa en $B(b, \varepsilon)$. Ya que $a \in \Omega$ y $b \in \Omega'$ son arbitrarios, se sigue que f^{-1} es holomorfa en Ω' . ■

Corolario 7.4.4 Si Ω, Ω' son abiertos en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una aplicación holomorfa, entonces f es localmente un isomorfismo analítico si, y solamente si, $f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$.

7.5 Integrales impropias y el teorema del residuo

El teorema del residuo suele utilizarse como una eficiente herramienta en la evaluación de integrales definidas.

Ésta tiene su importancia particular cuando es imposible encontrar la integral indefinida explícitamente, pero si los métodos de cálculo pueden aplicarse, el uso de los residuos suele ser frecuentemente laborioso.

El hecho de que el cálculo de residuos se realice con respecto a integrales complejas y no reales no es una desventaja, ya que la evaluación de una integral compleja es equivalente a la evaluación de dos integrales reales.

Debemos advertir que existen serias limitaciones y el método no es infalible. En primer lugar, el integrando debe estar relacionado con alguna función holomorfa, lo cual no es muy serio, pues basta extender el dominio a los complejos. Sin embargo, la técnica de integración compleja se aplica solamente a curvas cerradas, mientras que las integrales reales siempre se extienden sobre un intervalo. La elección del camino puede requerir de gran ingenio.

A continuación describiremos algunas clases de integrales en las que puede aplicarse el teorema del residuo. Sugerimos ver el libro de Marsden y Hoffman (Marsden y Hoffman, 1987, Cap.4, pp.294-329), así como el libro de Spiegel de la serie Schaum's (Spiegel, 1971, Cap. 7, pp.173-200) para obtener una gran variedad de ejemplos.

Definición 7.5.1 En cálculo, la integral impropia de una función continua $f(x)$ definida sobre la semirrecta $x \geq 0$ se define como

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx.$$

Cuando el límite de la derecha existe se dice que la integral impropia es *convergente* y que

converge a ese límite.

Si $f(x)$ es continua para toda $x \in \mathbb{R}$, la integral impropia de $f(x)$ sobre la recta $-\infty < x < \infty$ se define como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx$$

y cuando los dos límites de la derecha existen se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge a su suma.

A veces resulta útil otro valor asignado a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, conocido como el valor principal de Cauchy (V.P.).

Definición 7.5.2 El valor principal de Cauchy (V.P.) se define como el número

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

siempre que este límite exista.

Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ es convergente, su valor principal de Cauchy existe y es el número al que converge la integral, ya que

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx$$

y los límites de estas dos integrales para cuando R tiende a ∞ existen si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge.

Observación 9 La existencia del valor principal de Cauchy no asegura que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ sea convergente.

Ejemplo 46

Podemos apreciar que si $f(x) = x$ el valor principal de Cauchy existe, pero la integral no es convergente, esto es:

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx \text{ no existe.}$$

Notamos que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 x dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} x dx \\ &= \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R_1}^0 + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{R_2} \\ &= -\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{R_1^2}{2} + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_2^2}{2} \end{aligned}$$

y puesto que la suma de estos dos últimos límites no existe, la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ no existe.

Si $f(x)$ es una función par, es decir, si $f(x) = f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, la simetría de la gráfica de $y = f(x)$ respecto del eje y nos permite escribir

$$\int_0^R f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x) dx$$

y vemos que $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge a la mitad del valor principal de Cauchy

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

cuando este valor existe.

Además, como $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge y

$$\int_{-R_1}^0 f(x) dx = \int_0^{R_1} f(x) dx$$

la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge al doble de $\int_0^{\infty} f(x) dx$.

Con esto hemos demostrado que, si $f(x)$ es una función par y el valor principal de Cauchy existe, entonces

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

7.5.1 Integrales de tipo $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

A continuación evaluaremos

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

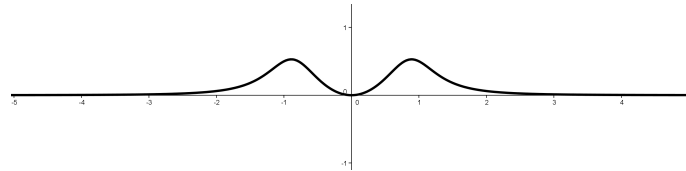


Figura 7.3: La gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Lo primero que notamos es que la función real valuada de variable real $f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1}$ se extiende de manera natural a la función meromorfa de variable compleja $f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1}$, y es claro que la función f es par, puesto que

$$f(-z) = \frac{(-z)^2}{(-z)^6 + 1} = \frac{z^2}{z^6 + 1} = f(z),$$

por lo que

$$V.P. \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx.$$

Observamos que la función $f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1}$ tiene singularidades aisladas, las cuales son los ceros del polinomio $z^6 + 1$; utilizando la fórmula D'Moivre, notamos que las raíces sextas de -1 están dadas como

$$z_k = \exp\left(\frac{(\pi + 2\pi k)\iota}{6}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

y es claro que ninguna de ellas está en el eje real, como lo muestra la figura 7.4.

Las tres primeras raíces están en el semiplano superior.

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{6}\iota}, \quad z_1 = e^{\frac{\pi}{2}\iota} = \iota, \quad z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}\iota}.$$

Cuando $R > 1$, los puntos z_k para $k = 0, 1, 2$ están en el interior de la región semicircular acotada por el segmento $\gamma_1(t) = t$ con $-R < t < R$ del eje real y la mitad superior $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$ que va desde el punto $z = R$ hasta el punto $z = -R$.

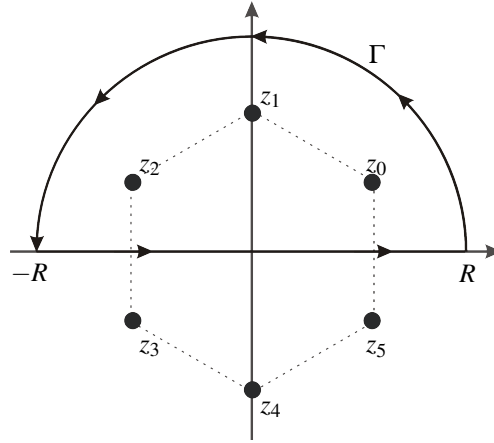


Figura 7.4: La curva Γ utilizada para evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$

Integrando $f(z)$ en sentido levógro a lo largo de la curva $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2}{z^6 + 1} dz &= 2\pi\iota \left[\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^6 + 1}, z_0\right) + \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^6 + 1}, z_1\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^6 + 1}, z_2\right) \right]. \end{aligned}$$

Como los polos de $f(z)$ son simples, como consecuencia de la proposición 7.3.3, si $\phi(z) = (z - z_k)f(z)$ tenemos:

$$\text{Res}\left(\frac{z^2}{z^6 + 1}, z_k\right) = \lim_{z \rightarrow z_k} \phi(z).$$

Así pues,

$$2\pi\iota \left[\sum_{k=0}^2 \text{Res}\left(\frac{z^2}{z^6 + 1}, z_k\right) \right] = 2\pi\iota \left(\frac{1}{6\iota} - \frac{1}{6\iota} + \frac{1}{6\iota} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

De donde, para cada $R > 1$ se tiene que

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \frac{\pi}{3} - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Cuando $|z| = R$, tenemos

$$|z^2| = R^2 \quad \text{y} \quad |z^6 + 1| \geq ||z^6| - 1| = R^6 - 1.$$

Luego entonces, si z es cualquier punto en la traza de γ_2

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2}{z^6 + 1} \right| \leq \frac{R^2}{R^6 - 1},$$

de donde

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^6 + 1} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R^2}{R^6 - 1} dt = \frac{R^2}{R^6 - 1} (\pi R) = \frac{\pi R^3}{R^6 - 1}.$$

Ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, este cociente tiende a cero cuando R tiende a ∞ , es decir:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi R^3}{R^6 - 1} = 0.$$

Luego entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{z^6 + 1} dz = 0.$$

De lo anterior se deduce que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \int_{\Gamma} f(z) dz = \frac{\pi}{3}$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}.$$

Como $f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1}$ es una función par, concluimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}.$$

Los aspectos que podemos destacar en el presente ejemplo son:

1. Extender la función f de variable real a variable compleja.
2. La función $f(z)$ no tiene puntos singulares en el eje x .
3. La curva Γ es la frontera de un semidisco cuyo interior contiene los puntos singulares de f que se encuentran en el semiplano superior $\mathbb{H}$, y contendrá al eje x cuando $R \rightarrow \infty$.
4. La función f es tal que $\lim_{R \rightarrow 0} \left| \int_{\gamma_2} f dz \right| = 0$.
5. Por el teorema del residuo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \text{Res}(f, a).$$

Generalizando el proceso anterior podemos deducir el siguiente resultado:

Proposición 7.5.1 Supongamos que f es holomorfa sobre un conjunto abierto que contenga al semiplano superior $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \geq 0\}$, salvo para un número finito de singularidades aisladas ninguna de las cuales se encuentra sobre el eje real, y que existen constantes $M > 0$, $R > 0$ y $p > 1$ tales que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ siempre que $z \in \mathbb{H}_+$ y $|z| \geq R$. Entonces

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}_+} \text{Res}(f, a).$$

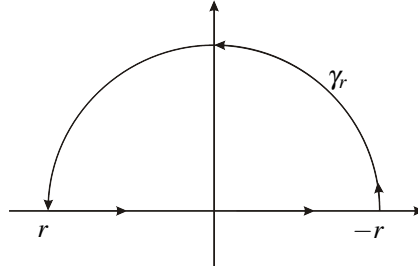


Figura 7.5: La curva γ_r utilizada para evaluar $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Demostración. Sea $r > R$ y consideramos la curva $\gamma_r = \gamma_{r,1} + \gamma_{r,2}$ donde $\gamma_{r,1}(t) = t$ para $-r \leq t \leq r$, y $\gamma_{r,2}(t) = re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$, y elegimos r suficientemente grande para que γ_r contenga en su interior todos los polos de f que están en el semiplano superior, véase la figura 7.5.

Como consecuencia del teorema del residuo 7.4.1

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}_+} \text{Res}(f, a).$$

Por otra parte

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta.$$

Como $|f(z)| \leq M/|z|^p$ siempre que $z \in \mathbb{H}_+$ y $|z| \geq R$, entonces $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, de donde

$$\left| \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \leq \pi \cdot \frac{M}{r^p} r = \frac{\pi M}{r^{p-1}}$$

y como $p > 1$, $\lim_{r \rightarrow \infty} 1/r^{p-1} = 0$, por lo que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| = 0.$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}_+} \text{Res}(f, a).$$

Como f es continua en $\mathbb{R}$ y como $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^p}$ para $|x| \geq R$, entonces f es integrable como función de $x \in \mathbb{R}$, de donde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

De aquí concluimos que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}_+} \text{Res}(f, a).$$

■

Corolario 7.5.1 Si $f = p/q$ donde p y q son polinomios con coeficientes reales tales que $\deg q \geq \deg p + 2$ y q no tiene ceros reales, entonces

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{a \in H} \text{Res}(f, a).$$

Demostración. Sea $n = \deg p$, entonces $\deg q \geq n + p$ con $p \geq 2$. Como p es un polinomio, si $|z| \geq 1$ existe $M_1 > 0$ tal que $|p(z)| \leq M_1 |z|^n$, análogamente existen $M_2 > 0$ y $R > 1$ tal que $|q(z)| \geq M_2 |z|^{n+p}$.

Por lo tanto

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{M_1}{M_2} \frac{1}{|z|^p} \leq \frac{M_1}{M_2} \frac{1}{|z|^2}$$

para $|z| \geq R$. Por lo cual se satisfacen las hipótesis de la proposición anterior. ■

Ejemplo 47

A continuación procederemos a evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

La función $f(z) = (z^4 + 1)^{-1}$ es holomorfa salvo en las raíces cuartas de -1 , ninguna de las cuales se encuentra sobre el eje real, por lo que cumple las hipótesis del corolario anterior.

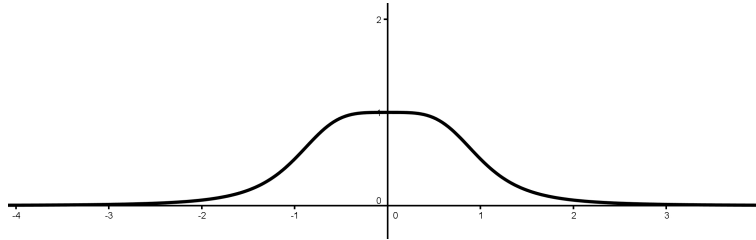


Figura 7.6: La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Las raíces cuartas de -1 son $z_0 = e^{\pi i/4}$, $z_1 = e^{3\pi i/4}$, $z_2 = e^{5\pi i/4}$ y $z_3 = e^{7\pi i/4}$, y corresponden a polos simples de f , pero solo los dos primeros están en el semiplano superior. Como consecuencia de la proposición 7.3.1, el residuo en uno de tales puntos z_k es $\frac{z_k^3}{4} = -\frac{z_k}{4}$, así

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, e^{\pi i/4}) + \operatorname{Res}(f, e^{3\pi i/4}) &= \frac{-1}{4}(e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4}) = \frac{-1}{4}e^{\pi i/4}(1 + e^{\pi i/2}) \\ &= \frac{-1}{4} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) (1+i) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

de donde

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, e^{\pi i/4}) + \operatorname{Res}(f, e^{3\pi i/4}) \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

7.5.2 Transformadas de Fourier

A continuación presentaremos una técnica que permita evaluar integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx,$$

las cuales se denominan las *transformadas de Fourier seno y coseno de f* . Si f es una función definida sobre el eje real para el cual estas integrales tienen sentido, las dos integrales anteriores pueden relacionarse con la expresión

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad w \in \mathbb{R},$$

la cual define una nueva función denominada la *transformada de Fourier* de f .

De manera análoga se define la *transformada inversa de Fourier* como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad x \in \mathbb{R}.$$

Este tipo de integrales tienen gran importancia en ecuaciones diferenciales. Si ω y $f(x)$ son reales, las transformadas de Fourier seno y coseno son las partes real e imaginaria de las transformadas de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \operatorname{Re} F(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = -\operatorname{Im} F(\omega)$$

Si ω es real y f satisface ciertas condiciones, estas integrales pueden evaluarse usando la siguiente proposición

Proposición 7.5.2 Si $\omega > 0$, y f es una función holomorfa sobre un conjunto abierto que contenga al semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$, excepto para un número finito de singularidades aisladas ninguna de las cuales está sobre el eje real. Supongamos que $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \mathbb{H}}} |f(z)| = 0$, entonces la

integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$ existe en el sentido de que $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(x) e^{i\omega x} dx$ y $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^0 f(x) e^{i\omega x} dx$ existen, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a).$$

Si $f(x)$ es real para $x \in \mathbb{R}$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ son iguales respectivamente a sus partes real e imaginaria.

Demostración. Sea $\omega > 0$, y sea γ el contorno del rectángulo con vértices $(-x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, (x_2, y_1) , y $(-x_1, y_1)$, donde $y_1 > x_1, x_2 > 0$ y x_1, x_2, y_1 se eligen suficientemente grandes para que en el interior de γ se encuentren todos los polos de la función f pertenecientes al semiplano superior, véase la figura 7.7.

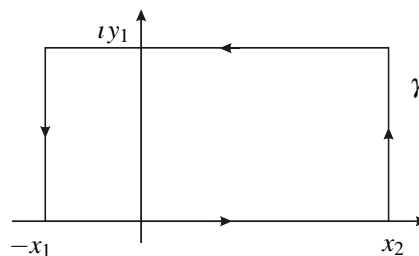


Figura 7.7: Curva γ usada para evaluar las integrales de Fourier

Por el teorema del residuo 7.4.1, página 185

$$\int_{\gamma} f(z) e^{i\omega z} dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a).$$

A continuación estimaremos el módulo de las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+y_1t)} f(x_2+y_1t) i dy;$$

$$I_2 = \int_{x_2}^{-x_1} e^{i\omega(x+y_1t)} f(x+y_1t) dx;$$

$$I_3 = \int_{y_1}^0 e^{i\omega(-x_1+y_1t)} f(-x_1+y_1t) i dy.$$

Dada $\varepsilon > 0$, elegimos R tal que $|f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|z| \geq R$ y $z \in \mathbb{H}$. Sea

$$M_1 := \max\{|f(x_2+y_1t)|; 0 \leq y \leq y_1\},$$

$$M_2 := \max\{|f(x+y_1t)|; -x_1 \leq x \leq x_2\},$$

$$M_3 := \max\{|f(-x_1+y_1t)|; 0 \leq y \leq y_1\}.$$

Si $y_1 > x_1 > R$ y $y_1 > x_2 > R$, entonces $M_1 < \varepsilon$, $M_2 < \varepsilon$ y $M_3 < \varepsilon$, de donde

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_0^{y_1} e^{-\omega y} |f(x_2+y_1t)| dy \\ &\leq M_1 \int_0^{y_1} e^{-\omega y} dy = \frac{M_1}{\omega} (1 - e^{-\omega y_1}) \leq \frac{M_1}{\omega}. \end{aligned}$$

Análogamente, $|I_3| \leq M_3/\omega$. Finalmente

$$|I_2| \leq \int_{-x_1}^{x_2} e^{-\omega y_1} |f(x+y_1t)| dz \leq M_2 e^{-\omega y_1} (x_2 + x_1).$$

Como $\omega > 0$, podemos elegir y_1 suficientemente grande para que $e^{-\omega y_1} (x_1 + x_2) < \varepsilon$. Como

$$\int_{\gamma} f(z) e^{i\omega z} f(z) dz = I_1 + I_2 + I_3 + \int_{-x_1}^{x_2} f(x) e^{i\omega x} dx$$

tenemos que

$$\int_{-x_1}^{x_2} f(x) e^{i\omega x} dx - 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a) = -(I_1 + I_2 + I_3).$$

Así,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-x_1}^{x_2} f(x) e^{i\omega x} dx - 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a) \right| \\ &\leq \frac{M_1}{\omega} + \frac{M_3}{\omega} + M_2 e^{-\omega y_1} (x_1 + x_2) \\ &< \frac{2\varepsilon}{\omega} + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Como ε es arbitraria

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty}} \int_{-x_1}^{x_2} f(x) \cdot e^{i\omega x} f(x) dx$$

existe y es igual a $2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, a)$. ■

Corolario 7.5.2 Si $f(x) = p(x)/q(x)$ con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, $\deg q > \deg p$ y q no tiene ceros sobre el eje real, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \text{Res}(f(z)e^{i\omega z}, a).$$

Demostración. Si $f(x) = p(x)/q(x)$, con $\deg q \geq \deg p + 1$, para $|z| \geq 1$, existe un $M_1 > 0$ tal que $|p(z)| \leq M_1|z|^n$, donde $n = \deg p$, y existe $R > 1$ y $M_2 > 0$ tal que para $|z| \geq R$ tenemos $|q(z)| \geq M_2|z|^{n+1}$. De donde

$$\frac{|p(z)|}{|q(z)|} \leq \frac{M_1}{M_2|z|}$$

para $|z| \geq r$, por lo cual se satisfacen las hipótesis de la proposición anterior. ■

Ejemplo 48

1. Calcaremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

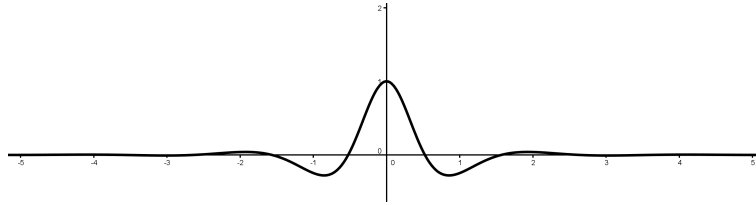


Figura 7.8: Gráfica de la función $\frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2}$ para $x \in \mathbb{R}$

Como el integrando es una función par, bastará ver que existe el valor principal de Cauchy de la integral y calcularlo.

Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

y notamos que $f(z)e^{i3z}$ es una función holomorfa si $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \geq 0\} \setminus \{i\}$. La singularidad $z = i$ está en el interior del semiplano superior, y es un polo de orden dos.

Como consecuencia del teorema del residuo 7.4.1, página 185

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i3x} dx = 2\pi i \text{Res}(e^{3iz}f(z), i).$$

Como $z = i$ es un polo de orden dos de la función $f(z)$, entonces $z = i$ es un polo de orden dos de la función $f(z)e^{3iz}$. Si definimos

$$\phi(z) = (z - i)^2 f(z)e^{3iz},$$

entonces

$$\text{Res}\left(\frac{e^{3iz}}{(z^2 + 1)^2}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\phi'(z)}{1!} = \frac{1}{ie^3}.$$

De donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{ie^3}\right) = \frac{2\pi}{e^3}.$$

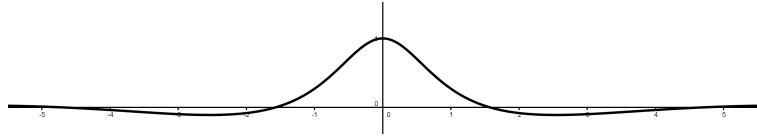


Figura 7.9: Gráfica de la función $\frac{\cos x}{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \text{Como } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{3xi} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(3x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(3x) dx \\ &= \frac{2\pi}{e^3}. \end{aligned}$$

Comparando partes real e imaginaria tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(3x) dx = \frac{2\pi}{e^3}.$$

2. Como segundo ejemplo, deseamos mostrar que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

Como la función $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2 + 1}$ es par, entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

A continuación calcularemos los residuos de $\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ en el semiplano superior. Notamos que el único polo en el semiplano superior es i , el cual es un polo simple, por lo que

$$\text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z^2 + 1}, i \right) = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \text{Re} \left(2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i} \right) \right) = \pi e^{-1}.$$

Como la función $\frac{\cos x}{x^2 + 1}$ es par, se sigue que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

Las proposiciones 7.5.1 y 7.5.2 no se pueden aplicar en casos muy importantes, es claro que estos criterios fallan si hay singularidades en el eje real, aunque veremos posteriormente como subsanar este problema.

Un ejemplo importante lo constituye una función cuya conducta sobre el eje real, o sobre el semiplano superior, no es la requerida por estas proposiciones, a saber, la función de probabilidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

El problema radica en que e^{-z^2} no tiene la conducta apropiada cuando $z \rightarrow \infty$. A lo largo del eje real tiende a cero más rápido que cualquier polinomio, sin embargo, a lo largo de las rectas a $\arg z = \pm\pi/4$ o $\arg z = -3\pi/4$, su valor absoluto es constante igual a 1, y en ambas direcciones a lo largo del eje imaginario crece más rápido que cualquier polinomio. Sin embargo, como veremos posteriormente, es posible evaluar su integral.

7.5.3 Integrales trigonométricas

Proposición 7.5.3 Sea $R(x, y)$ una función racional de las variables x, y cuyo denominador no se anula sobre la circunferencia unitaria. Entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi \sum_{a \in \mathbb{D}} \text{Res}(f(z), a),$$

donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ y

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Demostración. Si $z = x + iy$ está sobre la circunferencia unitaria, entonces

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad y \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Como R no tiene polos sobre la circunferencia unitaria, f tampoco, luego entonces si $\gamma = e^{2\pi i t}$ con $0 \leq t \leq 1$ es una parametrización de la circunferencia unitaria, por el teorema del residuo 7.4.1

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{D}} \text{Res}(f, a).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \frac{ie^{i\theta}}{ie^{i\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta = \int_{\gamma} f, \end{aligned}$$

lo cual demuestra esta proposición. ■

Ejemplo 49

Deseamos evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10 - 6 \cos \theta}.$$

Como consecuencia de la proposición anterior

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10 - 6 \cos \theta} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(10 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} \\ &= \int_{\gamma} \frac{dz}{i(-3z^2 + 10z - 3)} \\ &= \int \frac{idz}{(z - 3)(3z - 1)}. \end{aligned}$$

Los polos del integrando son $z = 3$ y $z = 1/3$, por lo cual el integrando tiene solamente un polo en el interior del disco unitario, y el residuo es

$$\text{Res}\left(f, \frac{1}{3}\right) = \frac{i}{1 - 9} = -\frac{i}{8},$$

de donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10 - 6 \cos \theta} = \frac{\pi}{4}.$$

7.5.4 Integrales de Fresnel

Las integrales de Fresnel son dos funciones trascendentales que hacen honor a Augustin-Jean Fresnel y que son empleadas en campos que se basan en ecuaciones de ondas, como la óptica. Las mismas se originan al realizar el análisis de fenómenos de difracción de Fresnel en el campo próximo, y se definen según las siguientes expresiones integrales:

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt \quad \text{y} \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

Basados en el conocimiento de las series de potencias de las funciones $\sin t$ y $\cos t$ podemos deducir que las integrales de Fresnel admiten las siguientes expansiones que convergen para todo x :

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \sin(t^2) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+2}}{(2n+1)!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{4n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}. \end{aligned}$$

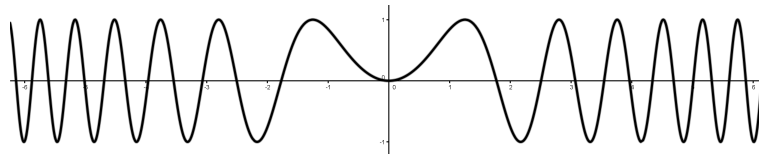


Figura 7.10: La gráfica de la función $\sin x^2$

Además

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos(t^2) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}. \end{aligned}$$

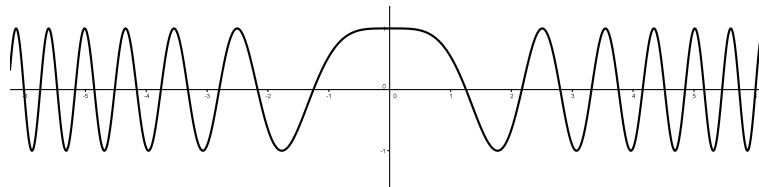


Figura 7.11: La gráfica de la función $\cos x^2$

Salvo en casos especiales, no es posible evaluar a las integrales que definen las funciones $C(x)$ y $S(x)$ en forma cerrada. Usando la paridad de las funciones $\sin(x^2)$ y $\cos(x^2)$ podemos deducir que las integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx$$

existen y son iguales a $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

A continuación mostraremos que las integrales existen, y posteriormente, aplicaremos el teorema del residuo para calcular explícitamente su valor.

Recuerde que $\sin x = 0$ si $x = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, así $\sin x^2 = 0$ si $x_k = \sqrt{\pi k}$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o bien, $x_{-k} = -\sqrt{\pi k}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Como $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, la distancia entre dos ceros consecutivos tiende a cero cuando n tiende a ∞ .

En particular, las cantidades

$$a_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin x^2 dx$$

decrecen monótonamente a cero.

Por el criterio de la serie alternante, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a algún número A .

Si R es cualquier número real, (para facilitar los cálculos, supondremos $R > 0$), entonces existe un único $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N-1} \leq R < x_N$, y $\int_0^R \sin x^2 dx$ está entre las sumas parciales $\sum_{n=0}^{N-1} a_n$ y $\sum_{n=0}^N a_n$.

Por lo tanto $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sin x^2 dx$ existe y es igual a A .

De manera análoga se muestra que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos x^2 dx$ existe.

Consideremos ahora integrar la función

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{\sin(\sqrt{\pi}z)}$$

a lo largo de la trayectoria $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ ilustrada en la figura 7.12:

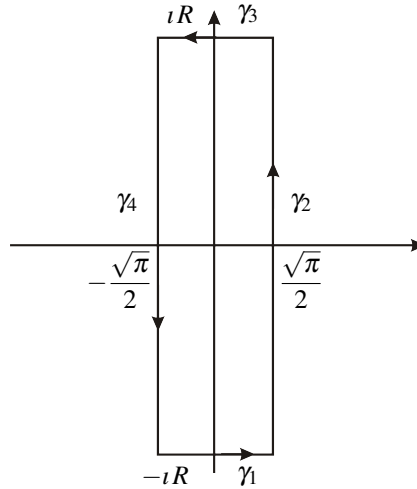


Figura 7.12: Curva γ usada para evaluar las integrales de Fresnel

La función f tiene un polo simple en el interior de γ en $z = 0$, y aplicando nuevamente la proposición 7.3.1:

$$\text{Res} \left(\frac{e^{iz^2}}{\sin(\sqrt{\pi}z)}, 0 \right) = \frac{e^0}{\sqrt{\pi} \cos(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Como consecuencia del teorema del residuo 7.4.1 se tiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) = 2\sqrt{\pi}i.$$

A lo largo de la curva $\gamma_1(x) = x - Ri$ con $-\sqrt{\pi}/2 \leq x \leq \sqrt{\pi}/2$, tenemos que

$$\left| e^{iz^2} \right| = \left| e^{i(x^2 - 2Rix - R^2)} \right| = e^{2Rx}$$

y

$$\left| \operatorname{sen}(\sqrt{\pi}z) \right| = \frac{1}{2} \left| e^{i\sqrt{\pi}x + R\sqrt{\pi}} - e^{-i\sqrt{\pi}x - R\sqrt{\pi}} \right| \geq \frac{1}{2} (e^{R\sqrt{\pi}} - 1)$$

de donde

$$\left| \int_{\gamma_1} f \right| \leq \frac{2}{e^{R\sqrt{\pi}} - 1} \int_{-\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/2} e^{2Rx} dx \leq \frac{1}{R} \frac{e^{R\sqrt{\pi}} - e^{-R\sqrt{\pi}}}{e^{R\sqrt{\pi}} - 1}$$

el cual tiende a cero cuando R tiende a infinito, es decir,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_1} f \right| = 0.$$

De manera análoga se demuestra que, si $\gamma_3(t) = x + Rt$ con $-\sqrt{\pi}/2 \leq x \leq \sqrt{\pi}/2$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_3} f \right| = 0.$$

Calculando la integral en las trayectorias faltantes $\gamma_2(t) = \sqrt{\pi}/2 + it$ y $\gamma_4(t) = -\sqrt{\pi}/2 - it$ con $-R \leq t \leq R$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_4} f &= \int_{-R}^R \frac{e^{i(\sqrt{\pi}/2 + it)^2}}{\operatorname{sen}(\pi/2 + \sqrt{\pi}it)} i dt + \int_{-R}^R \frac{e^{i(-\sqrt{\pi}/2 - it)^2}}{\operatorname{sen}(-\pi/2 - \sqrt{\pi}it)} (-i) dt \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{i(\sqrt{\pi}/2 + it)^2}}{\cos(\sqrt{\pi}it)} i dt + \int_{-R}^R \frac{e^{i(\sqrt{\pi}/2 + it)^2}}{-\cos(-\sqrt{\pi}it)} (-i) dt \\ &= i \int_{-R}^R \frac{e^{i(\pi/4 - t^2)} (e^{-\sqrt{\pi}t} + e^{\sqrt{\pi}t})}{\cos(t\sqrt{\pi}t)} dt \\ &= 2ie^{i\pi/4} \int_{-R}^R \frac{e^{-t^2} (e^{-\sqrt{\pi}t} + e^{\sqrt{\pi}t})}{e^{-\sqrt{\pi}t} + e^{\sqrt{\pi}t}} dt \\ &= 2ie^{i\pi/4} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt \\ &= 2e^{3\pi i/4} \int_{-R}^R e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{2}(-1 + i) \left(\int_{-R}^R \cos t^2 dt - i \int_{-R}^R \operatorname{sen} t^2 dt \right). \end{aligned}$$

Cuando R tiende a infinito obtenemos

$$2\sqrt{\pi}i = \sqrt{2}(-1 + i) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx \right),$$

y

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}i &= \left(- \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx \right) \\ &\quad + i \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx \right). \end{aligned}$$

La parte real de esta ecuación muestra que las integrales son iguales, mientras que la segunda parte muestra que el valor común es $\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

7.5.5 La integral gaussiana

Un ejemplo clásico de las aplicaciones del teorema del residuo es la evaluación de la integral impropia de la función gaussiana e^{-x^2} sobre toda la recta de los números reales. Debe su nombre al matemático y físico alemán Carl Friedrich Gauss, y su valor es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

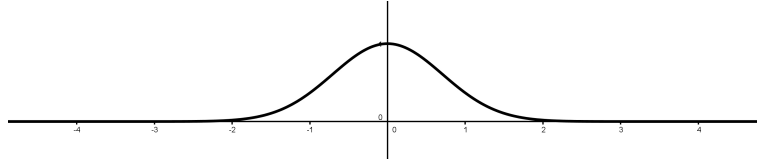


Figura 7.13: La gráfica de la función e^{-x^2} , con $x \in \mathbb{R}$

La función $f(x) = e^{-x^2}$ es un caso particular de las funciones gaussianas $f(x) = a \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right)$, las cuales, aunque son funciones elementales, no poseen primitivas elementales. Sin embargo, el valor exacto de la integral impropia sobre todo el rango real puede derivarse a partir del valor de la integral de Gauss obteniéndose que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right) dx = a|c|\sqrt{2\pi}.$$

El valor de la integral es 1 si, y únicamente si, $a = \frac{1}{|c|\sqrt{2\pi}}$, en cuyo caso la función gaussiana es la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = b$ y varianza $\sigma^2 = c^2$. Las funciones gaussianas con $c^2 = 2$ son las autofunciones de la transformada de Fourier. Esto significa que la transformada de Fourier de una función gaussiana no es solamente otra función gaussiana, sino que además es un múltiplo escalar de la función original. La gráfica de la función es simétrica con forma de campana, conocida como *campana de Gauss*. El parámetro a es la altura de la campana centrada en el punto b , y $|c|$ determina el ancho de la misma.

La primitiva de una función gaussiana es la función error. Estas funciones aparecen en numerosos contextos de las ciencias naturales, ciencias sociales, matemáticas e ingeniería, por ejemplo:

En estadística y teoría de probabilidades, las funciones gaussianas aparecen como la función de densidad de la distribución normal, la cual es una distribución de probabilidad límite de sumas complicadas, según el teorema del límite central. Véase por ejemplo, (Cinlar, 2010, Cap. 2), y (Roman, 2004, Cap. 8).

A continuación mostraremos como evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

utilizando el teorema del residuo.

Sea $f(z) = e^{-z^2}$ y consideremos la integral de f a lo largo de la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ como muestra la figura 7.14:

Para γ_1 y γ_3 se tiene

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^R e^{-x^2} dx$$

y

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_R^0 e^{-t^2} e^{\pi i/4} dt = e^{5\pi i/4} \int_0^R (\cos t^2 - i \sin t^2) dt.$$

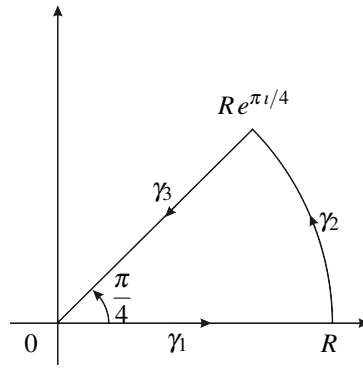


Figura 7.14: Curva γ usada para evaluar la integral Gaussiana

A lo largo de $z = R e^{it}$

$$|f(z)| = |e^{-R^2(\cos 2t + i \sin 2t)}| = e^{-R^2 \cos 2t}.$$

Como $0 \leq t \leq \pi/4$ tenemos que $\cos 2t \geq 1 - 4t/\pi$, de donde

$$|f(z)| \leq e^{-R^2} e^{4R^2 t/\pi},$$

luego entonces

$$\left| \int_{\gamma_2} f \right| \leq \int_0^{\pi/4} |e^{-R^2} e^{4R^2 t/\pi} (i R e^{it})| dt = R e^{-R^2} \frac{\pi}{4R^2} (e^{R^2} - 1) = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}).$$

De donde $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_2} f \right| = 0$.

Como $f(z) = e^{-z^2}$ es entera $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, de donde

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx - i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \right].$$

Como ambas integrales de la derecha existen y son iguales a $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$, tenemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{(1-i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Usando el hecho de que el integrando es una función par tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

7.5.6 Transformadas de Mellin

La transformada de Mellin de una función f está definida como:

$$\{\mathcal{M}f\}(a) := \int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx.$$

Esta transformada integral está relacionada con la teoría de las series de Dirichlet, y es usada habitualmente en teoría de números; el cambio de variables $x = e^{-u}$ muestra que la transformada de Mellin está sumamente relacionada con las transformadas de Laplace y de Fourier y la teoría de la función gamma, y forma parte de las funciones especiales.

Nótese que para extender la función $x^{a-1}f(x)$ a variable compleja, necesitamos utilizar la función $z^{a-1}f(z)$, y como $z^{a-1} = \exp((a-1)\log z)$, eso implica que la función holomorfa $z^{a-1}f(z)$ no está definida a lo largo de un “corte” de ramificación. Véase la definición de corte, 4.5.6 en la página, 86.

Ejemplo 50

El origen y el rayo $\theta = \pi$ determinan un corte para la rama principal de la función logaritmo

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg z \quad \text{con} \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

El origen es un punto de ramificación para las ramas de la función logaritmo.

Proposición 7.5.4 Sea f holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo un número finito de singularidades aisladas, ninguna de las cuales está sobre el eje real positivo. Sea $a > 0$ con la restricción $a \notin \mathbb{Z}$ y supongamos que

1. Existen constantes $M_1, R_1 > 0$ y $b > a$ tales que para $|z| \geq R_1$, se cumple:

$$|f(z)| \leq \frac{M_1}{|z|^b}; \text{ y}$$

2. Existen constantes $M_2, R_2 > 0$ y $0 < d < a$ tales que para $0 < |z| \leq R_2$, se cumple:

$$|f(z)| \leq \frac{M_2}{|z|^d}.$$

Entonces la integral $\int_0^\infty x^{a-1}f(x)dx$ existe, en el sentido de que es absolutamente convergente, y

$$\int_0^\infty x^{a-1}f(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen}(a\pi)} \sum_{a \in (\operatorname{Sing} f) \setminus \{0\}} \operatorname{Res}(z^{a-1}f(z), a)$$

donde $z^{a-1} = \exp((a-1)\log z)$ usando la rama $0 < \arg z < 2\pi$.

Demostración. La existencia, en el sentido de la integrabilidad absoluta, de la función $\int_0^\infty x^{a-1}f(x)dx$ es consecuencia de las condiciones $|f(x)| \leq \frac{M_1}{x^b}$ para x suficientemente grande y $|f(x)| \leq \frac{M_2}{x^d}$ para x suficientemente pequeña, junto con los criterios de comparación para integrales.

Para analizar la integral recordamos que $z^{a-1} = \exp((a-1)\log z)$, está definido en la rama de logaritmo $0 < \arg z < 2\pi$. Como 0 es claramente un punto de ramificación de $z^{a-1}f(z)$, la curva que usaremos está dada como $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ donde $\gamma_1(t) = re^{it}$ con $0 < \eta < t < 2\pi - \eta$, $-\gamma_2(t) = te^{-i\eta}$ con $\varepsilon < t < r$, $-\gamma_3(t) = \varepsilon e^{it}$ con $\eta < t < 2\pi - \eta$ y $\gamma_4(t) = te^{i\eta}$ con $\varepsilon < t < r$ con ε y η suficientemente pequeños y r suficientemente grande, tales que $\varepsilon < R_2$, $r \geq R_1$; y tal que γ encierra a todos los polos de $f(z)$ excluyendo el polo en el origen. Se muestra γ en la figura 7.15

Denotemos

$$I = \int_\gamma z^{a-1}f(z)dz,$$

y para $k = 1, 2, 3, 4$

$$I_k = \int_{\gamma_k} z^{a-1}f(z)dz.$$

Esto es

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Como consecuencia del teorema del residuo

$$I = 2\pi i \sum_{p \in (\operatorname{Sing} f) \setminus \{0\}} \operatorname{Res}(z^{a-1}f(z), p).$$

Es claro que las singularidades de $z^{a-1}f(z)$ son las mismas que las de $f(z)$, salvo quizá $z = 0$.

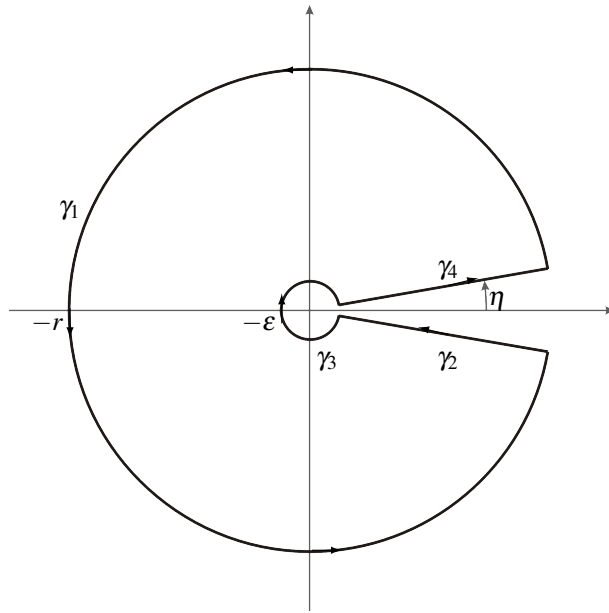


Figura 7.15: Curva γ usada para evaluar la transformada de Mellin

Mostraremos primero que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3 = 0$ y que $\lim_{r \rightarrow \infty} I_1 = 0$ independientemente del valor de η .

Recordamos que, cuando $a \in \mathbb{R}$ $|z^{a-1}| = |z|^{a-1}$, así

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{\gamma_3} |z^{a-1}| |f(z)| |dz| \leq M_2 \int_{\gamma_3} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^d} |dz| \\ &= M_2 \varepsilon^{a-d-1} \ell(\gamma_3) < 2\pi M_2 \varepsilon^{a-d}. \end{aligned}$$

Como $0 < d < a$, entonces $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi M_2 \varepsilon^{a-d} = 0$, de donde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_3| = 0$, independientemente del valor de η .

Por otra parte

$$|I_1| \leq \int_{\gamma_1} |z^{a-1}| |f(z)| |dz| \leq M_1 \int_{\gamma_1} \frac{|z|^{a-1}}{|z|^b} |dz| < 2\pi M_1 r^{a-b}.$$

Como $b > a$ entonces $a - b < 0$, de donde $\lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi M_1 r^{a-b} = 0$, independientemente de η .

A continuación estudiaremos la conducta de I_2 e I_4 cuando $\eta \rightarrow 0$, ε y r permanecen fijos.

Notamos además que hay una discontinuidad en la función $z^{a-1}f(z)$ al cruzar el eje x positivo, por lo que no es de esperarse que $I_2 = -I_4$.

Por definición

$$I_2 = \int_r^\varepsilon (t e^{(2\pi-\eta)i})^{a-1} f(t e^{(2\pi-\eta)i}) e^{(2\pi-\eta)i} dt.$$

Cuando $\eta \rightarrow 0$ tenemos que

$$(t e^{(2\pi-\eta)i})^{a-1} f(t e^{(2\pi-\eta)i}) e^{(2\pi-\eta)i} \rightarrow t^{a-1} e^{2\pi ai} f(t)$$

uniformemente sobre $[\varepsilon, r]$; así,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} I_2 = \int_r^\varepsilon t^{a-1} e^{2\pi ai} f(t) dt.$$

Análogamente,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} I_4 = \int_r^\varepsilon t^{a-1} f(t) dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} (I_2 + I_4) &= (1 - e^{2\pi a i}) \int_r^\varepsilon t^{a-1} f(t) dt \\ &= -2e^{\pi a i} (\sin \pi a) \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Supongamos que se ha dado $\delta > 0$, podemos elegir $r > 0$ suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña para que

$$\left| \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t) dt - \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt \right| < \frac{\delta}{4}.$$

Además, podemos elegirlos en forma tal que

$$\frac{|I_1|}{|2ie^{\pi a i} (\sin \pi a)|} < \frac{\delta}{4} \quad \frac{|I_3|}{|2ie^{\pi a i} (\sin \pi a)|} < \frac{\delta}{4}.$$

Y podemos elegir η suficientemente pequeña para que

$$\left| \frac{I_2 + I_4}{-2ie^{\pi a i} (\sin \pi a)} - \int_\varepsilon^r t^{a-1} f(t) dt \right| < \frac{\delta}{4}.$$

Esto implica que

$$\left| \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt - \frac{1}{2ie^{\pi a i} (\sin \pi a)} \right| < \delta.$$

Como δ es arbitraria, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{a-1} f(t) dt &= \frac{1}{-2ie^{\pi a i} \sin(\pi a)} \\ &= \frac{-\pi e^{-\pi a i}}{\sin(\pi) a} \sum_{p \in (\text{Sing } f) \setminus \{0\}} \text{Res}(z^{a-1} f(z), p). \end{aligned}$$

■

Corolario 7.5.3 Las hipótesis de la proposición 7.5.4 se cumplen si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios de grados p y q respectivamente y satisfacen las siguientes condiciones:

1. $0 < a < q - p$.
2. Si n_Q es el orden del cero de Q en $z = 0$ (con la condición de que $n_Q = 0$ si $Q(0) \neq 0$) y si n_P es el orden del cero de P en $z = 0$, entonces $n_Q - n_P < a$. (Esta condición se cumple si $n_Q = 0$.)

Ejemplo 51

Si $0 < a < 1$ mostraremos que

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a \pi}.$$

Esta integral impropia es importante en el estudio de la *función gamma*. En este ejemplo podemos notar que tal integral es impropia no sólo a causa de su límite superior de integración, sino además porque su integrando tiene en $x = 0$ una discontinuidad. La integral converge cuando

$0 < a < 1$ porque el integrando se comporta como x^{-a} cerca de $x = 0$ y como x^{-a-1} cuando x tiende a infinito.

Al considerar la función $\frac{z^{a-1}}{1+z}$, tenemos que $z = 0$ es un punto de ramificación.

La función $f(z) = \frac{1}{1+z}$, es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ y en $z = -1 = e^{\pi i}$ tiene un polo simple, y

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^{a-1}}{1+z}, -1 \right) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{a-1}}{z+1} = (e^{\pi i})^{a-1} = e^{(a-1)\pi i}.$$

Además, $Q(z) = 1$, $P(z) = 1+z$, por lo que $p = 0$, $q = 1$, y por hipótesis $0 < a < 1 = q - p$; y $n_Q - n_P = 0 < a$, por lo que se cumplen las condiciones del corolario 7.5.3, así, se cumplen las hipótesis de la proposición 7.5.4.

Aplicando la proposición 7.5.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx &= -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen} a \pi} \operatorname{Res} \left(\frac{z^{a-1}}{1+z}, -1 \right) = -\frac{\pi e^{-\pi a i}}{\operatorname{sen} a \pi} e^{(a-1)\pi i} \\ &= -\frac{\pi}{\operatorname{sen} a \pi} e^{-\pi i} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a \pi}. \end{aligned}$$

7.6 El teorema de Runge

Sabemos que toda función holomorfa es localmente el límite de una sucesión de polinomios (las sumas parciales de su serie de Taylor), luego cabe preguntarse si esto sigue siendo cierto globalmente, es decir, si dada una función holomorfa en un abierto es el límite de una sucesión de polinomios. La respuesta es negativa en general. De hecho solamente es cierto en los conjuntos abiertos simplemente conexos, pero en el caso general tenemos al menos que toda función holomorfa es el límite de una sucesión de funciones racionales.

Proposición 7.6.1 Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo, no vacío, y $\mathcal{K}$ un conjunto compacto en Ω ; entonces existen segmentos de recta $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ en $\Omega \setminus \mathcal{K}$ tales que para cada función holomorfa f definida en Ω ,

$$f(z) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta} d\zeta$$

para cada $z \in \mathcal{K}$. Los segmentos de recta forman un número finito de polígonos cerrados.

Demostración. Sin perder generalidad, supondremos que $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}^\circ}$. Sea $\delta > 0$ tal que $2\delta < d(\mathcal{K}, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ y se colocará una cuadrícula de líneas rectas horizontales y verticales en $\mathbb{C}$ de tal manera que dos líneas rectas consecutivas del mismo tipo disten menos que δ . Sean $R_1, \dots, R_m$ los rectángulos que se obtienen al intersectar tales rectas con $\mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ es compacto, solamente hay un número finito de tales rectángulos, y consideremos ∂R_k , la frontera del rectángulo R_k , como un polígono orientado en levógiro para $1 \leq k \leq m$.

Si $z \in R_k$, para $1 \leq k \leq m$, se tiene que $d(z, \mathcal{K}) \leq \sqrt{2}\delta$, de donde $R_k \subset \Omega$. Supongamos que R_k y R_l tienen un lado en común, y denotemos por ℓ_k y ℓ_l los segmentos de recta en ∂R_k y ∂R_l respectivamente, tales que $R_k \cap R_l = \{\ell_k\} = \{\ell_l\}$. Ya que ∂R_k y ∂R_l están orientados en levógiro, los segmentos de recta ℓ_k y ℓ_l están dirigidos en sentido opuesto. Consecuentemente, si φ es una función continua definida sobre $\{\ell_k\}$, entonces

$$\int_{\ell_k} \varphi + \int_{\ell_l} \varphi = 0.$$

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ aquellos segmentos dirigidos de recta que constituyen un lado de exactamente uno de los rectángulos R_j para $1 \leq j \leq m$. Entonces

$$\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \varphi = \sum_{i=1}^m \int_{\partial R_i} \varphi \quad (7.6)$$

para cada función φ continua en $\bigcup_{j=1}^m \partial R_j$.

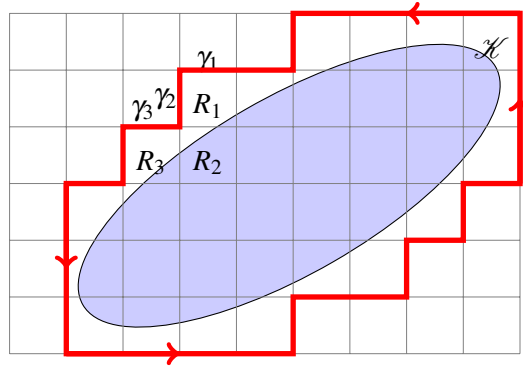


Figura 7.16: Los segmentos orientados $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ son los lados de los polígonos buscados.

Afirmamos que γ_k está contenida en $\Omega \setminus \mathcal{K}$. De hecho, si uno de los γ_k interseca $\mathcal{K}$, es fácil ver que hay dos rectángulos en la cuadrícula con γ_k como un lado y por lo tanto ambos están en $\mathcal{K}$. Es decir, γ_k es la parte común de dos de los rectángulos $R_1, \dots, R_m$ y esto contradice la elección de γ_k .

Si z pertenece a $\mathcal{K}$ y no está en la frontera de cada R_k , y la función f es holomorfa en Ω , entonces la función

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right)$$

es continua sobre $\bigcup_{j=1}^m \partial R_j$. Como consecuencia de la ecuación 7.6 se obtiene

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (7.7)$$

Como z está en el interior de exactamente uno de los R_j , si $z \notin R_j$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0;$$

y si $z \in R_j$ como consecuencia del teorema de Cauchy 5.2.1 tenemos que la ecuación 7.7 nos dice que

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (7.8)$$

siempre que $z \in \mathcal{K} \setminus \bigcup_{j=1}^m \partial R_j$. Y como ambos lados de la ecuación 7.8 son funciones continuas sobre $\mathcal{K}$ y coinciden sobre un subconjunto denso de $\mathcal{K}$, entonces la ecuación 7.8 se satisface para toda $z \in \mathcal{K}$. Por construcción los segmentos de recta forman un número finito de polígonos cerrados. ■

Lema 7.6.1 Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva rectificable y $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto tal que $\mathcal{K} \cap \{\gamma\} = \emptyset$. Si f es una función continua sobre la traza de γ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función racional $R(z)$ cuyos polos sólo están sobre $\{\gamma\}$ y tal que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \varepsilon \quad \text{para cada } z \in \mathcal{K}.$$

Demostración. Como $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ es compacto, y γ es continua, entonces $\text{im}(\gamma)$ es compacto, de donde $\text{im}(\gamma) \times \mathcal{K}$ también es compacto, y como la función $g : \{\gamma\} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ es continua en $\text{im}(\gamma) \times \mathcal{K}$, entonces la función $g(\zeta, z)$ es uniformemente continua en $\{\gamma\} \times \mathcal{K}$, por ende, existe $\delta > 0$ tal que si $s, t \in [0, 1]$ y $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| < \frac{\varepsilon}{v(\gamma)} \quad \text{para toda } z \in \mathcal{K},$$

donde $v(\gamma)$ denota la variación acotada de la curva rectificable γ , como vimos en la definición 5.1.4. Luego entonces, podemos tomar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ tal que

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| < \frac{\varepsilon}{v(\gamma)} \quad \text{para toda } t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad z \in \mathcal{K}, \quad (7.9)$$

Se define

$$R(z) = \sum_{i=1}^n \frac{f(\gamma(t_{i-1}))}{\gamma(t_{i-1}) - z} (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})).$$

Claramente R es una función racional cuyos polos son los puntos $\gamma(0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{n-1})$. Como consecuencia de la ecuación 7.9 se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \dot{\gamma}(t) dt - \sum_{i=1}^n \frac{f(\gamma(t_{i-1}))}{\gamma(t_{i-1}) - z} (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1}) - z} \right) \dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1}) - z} \right| |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{v(\gamma)} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Para toda $z \in \mathcal{K}$. ■

Se deja como ejercicio al lector mostrar que, si $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto, las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ son las mismas que las de $\mathbb{C}_{\infty} \setminus \mathcal{K}$ y las componentes no acotadas se diferencian únicamente en el punto ∞ .

Consideramos el espacio $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ de todas las funciones continuas en $\mathcal{K}$ con valores en $\mathbb{C}$, y sobre éste espacio defínase la función distancia ρ dada como

$$\rho(f, g) = \sup\{ |f(z) - g(z)| ; z \in \mathcal{K} \}, \quad \text{para } f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{K}).$$

Se deja como ejercicio mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{uniformemente en } \mathcal{K}.$$

Con lo cual $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ es un espacio métrico completo. Aún más, $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ es un álgebra con la suma y el producto definidos puntualmente.

Se define $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ como el conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ para las cuales existe una sucesión de funciones racionales $\{R_n\}$ con polos en E tal que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ uniformemente sobre el conjunto compacto $\mathcal{K}$.

También se deja como ejercicio mostrar que $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ que contiene cada función racional con un polo en E .

Decir que $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ significa que si $f, g \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha f, f + g, fg \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$, es decir, si dos sucesiones de funciones racionales con polos en E tienden a dos funciones de $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$, entonces la suma y el producto de las sucesiones tienden a la suma y el producto de las funciones, luego siguen en $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$.

Antes de enunciar el teorema de Runge, necesitaremos los siguientes resultados topológicos:

Lema 7.6.2 Sea Ω un subconjunto abierto en $\mathbb{C}$, entonces existe una sucesión $\{\mathcal{K}_n\}$ de subconjuntos compactos de Ω tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$. Además, los conjuntos $\mathcal{K}_n$ pueden elegirse de manera que satisfagan las siguientes condiciones:

- (a) $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}^\circ$;
- (b) Si $\mathcal{K} \subset \Omega$ y $\mathcal{K}$ es compacto, entonces $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$;
- (c) Cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_n$ contiene una componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{K}_n = \overline{B(0, n)} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} ; \frac{1}{n} \leq d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \right\};$$

como $\mathcal{K}_n$ es la intersección de dos conjuntos cerrados, entonces es cerrado, y como está contenido en un conjunto acotado, también es acotado. Como consecuencia del teorema de Heine-Borel $\mathcal{K}_n$ es un conjunto compacto.

Además, el conjunto

$$B(0, n+1) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} ; \frac{1}{n+1} < d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \right\};$$

es abierto, contiene a $\mathcal{K}_n$ y está contenido en $\mathcal{K}_{n+1}$, por lo que $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}^\circ$.

Claramente $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$, aún más, como consecuencia del inciso anterior $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n^\circ$; Consecuentemente, si $\mathcal{K} \subset \Omega$ es compacto, los conjuntos $\{\mathcal{K}_n^\circ; n \in \mathbb{N}\}$ constituyen una cubierta abierta de $\mathcal{K}$, y por ende, existe n_0 tal que $\mathcal{K} \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} \mathcal{K}_n^\circ$. Como consecuencia del inciso (a)

$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{n_0}$. Para la última parte, como $\mathcal{K}_n \subset \Omega$, entonces $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_n \supset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, así podemos notar que la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_n$ debe contener al punto ∞ y por ende, deberá contener a la componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ que contiene al punto ∞ . Así la componente no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}$ contiene a ∞ , por lo que, si D es una componente acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_n$ existe $z \in D$ tal que $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < \frac{1}{n}$. Luego entonces, existe un punto $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $|w - z| < \frac{1}{n}$.

Así $B\left(w, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_n$; como los discos son conexos y z está en la componente conexa D de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_n$ se sigue que $D \subset B\left(w, \frac{1}{n}\right)$. De donde, si D_1 es la componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ que contiene a w , entonces $D_1 \subset D$. ■

Lema 7.6.3 Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ conjuntos abiertos tales que $V \subset U$ y $\partial V \cap U = \emptyset$. Si H es una componente conexa de U y $H \cap V \neq \emptyset$, entonces $H \subset V$.

Demostración. Si $z \in H \cap V$ y $G \subset V$ es la componente conexa de V que contiene a z , como consecuencia de 3.3.6 tenemos que $H \cup G$ es conexo, y además $H \cup G \subset U$. Como $\partial G \subset \partial V$ y por hipótesis $\partial G \cap H = \emptyset$, entonces

$$H \setminus G = H \cap ((\mathbb{C} \setminus \overline{G}) \cup \partial G) = H \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{G}),$$

por lo que $H \setminus G$ es abierto en H . Pero, por hipótesis H es abierto, lo cual implica que

$$H \setminus G = H \cap (\mathbb{C} \setminus G)$$

es cerrado en H . Como H es conexo y $G \neq \emptyset$, entonces $H \setminus G = \emptyset$. De donde, $H = G \subset V$. ■

Lema 7.6.4 Sea $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}_\infty$ un conjunto compacto, si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$, entonces $(z-a)^{-1} \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$.

La demostración se dividirá en dos casos, a saber, $\infty \in E$ e $\infty \notin E$.

Demostración. Si $\infty \notin E$, sean $U = \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ y $V = \{a \in \mathbb{C}; (z-a)^{-1} \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})\}$. Por definición $E \subset V \subset U$.

$$\text{Si } a \in V \text{ y } |b-a| < d(a, \mathcal{K}), \text{ entonces } b \in V. \quad (7.10)$$

Por lo tanto, existe r con $0 < r < 1$ tal que $|b-a| < r|z-a|$ para cada $z \in \mathcal{K}$. Y como

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{z-a} \left(\frac{1}{1 - \frac{b-a}{z-a}} \right) \quad (7.11)$$

entonces $\frac{|b-a|}{|z-a|} < r < 1$ para cada $z \in \mathcal{K}$, como consecuencia del criterio M de Weierstrass 3.6.3, página 47, tenemos que

$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{1}{1 - \frac{b-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b-a}{z-a} \right)^n \quad (7.12)$$

converge uniformemente sobre $\mathcal{K}$.

Si $Q_n(z) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{b-a}{z-a} \right)^k$, como $a \in V$ y $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ es un álgebra, entonces $(z-a)^{-1}Q_n(z) \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$. Como $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ es cerrado, la ecuación 7.11 implica que $(z-b)^{-1} \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$, por lo que $b \in V$.

Como consecuencia de la condición 7.10, el conjunto V es abierto.

Por otra parte, si $b \in \partial V$ y $\{a_n\}$ es una sucesión en V tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, como V es abierto, $b \notin V$ y como consecuencia de 7.10 se tiene que $|b-a_n| \geq d(a_n, \mathcal{K})$. Ya que la distancia de un punto a un conjunto es cero si, y sólo si el punto está en la cerradura del conjunto, tenemos

$$d(b, \mathcal{K}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, \mathcal{K}) = 0 \text{ o bien } b \in \mathcal{K}.$$

Por lo tanto $\partial V \cap U = \emptyset$. Si H es una componente de $U = \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ entonces $H \cap E \neq \emptyset$, consecuentemente $H \cap V \neq \emptyset$. Como consecuencia del lema 7.6.4, $H \subset V$. Y como H es una componente arbitraria, tenemos que $U \subset V$, o bien, $U = V$.

Por otra parte, si $\infty \in E$, dado a_0 un punto en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ tal que $\chi(a_0) \leq \frac{1}{2}d(\infty, \mathcal{K})$ y $|a_0| > 2 \max\{|z|; z \in \mathcal{K}\}$, donde χ es la distancia cordal en $\mathbb{C}_\infty$, véase 3.7.2, página 56.

Sea $E_0 = (E \setminus \{\infty\}) \cup \{a_0\}$, entonces E_0 intersecta cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}$. Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ como consecuencia del primer caso $(z-a)^{-2} \in \mathcal{B}_{E_0}(\mathcal{K})$.

Como $|z/a_0| < 1/2$, para cada $z \in \mathcal{K}$, entonces

$$\frac{1}{z-a_0} = -\frac{1}{a_0 \left(1 - \frac{z}{a_0}\right)} = -\frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_0} \right)^n$$

converge uniformemente sobre $\mathcal{K}$.

Como $Q_n(z) = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^n \left(\frac{z}{a_0} \right)^k$ es un polinomio y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(z) = (z-a_0)^{-1}$$

uniformemente sobre $\mathcal{K}$. Ya que Q_n tiene su único polo en ∞ , entonces $Q_n \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$, por lo que $(z-a_0)^{-1} \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$. ■

Teorema 7.6.2 — Teorema de Runge. Seas K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, E un subconjunto de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}$ que intersecta cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}$. Si f es una función holomorfa en un abierto que contenga al conjunto $\mathcal{K}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función racional $R(z)$ cuyos polos se encuentran solamente en E y tal que

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon \text{ para cada } z \in \mathcal{K}.$$

La demostración que aquí se presenta se debe a S. Grabiner (*Amer. Math. Monthly*, **83**, (1976), 807-808.)

El teorema de Runge nos dice que si una función f es holomorfa en una vecindad de un conjunto compacto $\mathcal{K}$, y $\varepsilon > 0$, entonces es posible encontrar una función racional $R(z)$ con polos solamente en E tal que $\rho(f, R) < \varepsilon$.

Demostración. Si f es holomorfa en un conjunto abierto Ω y $\mathcal{K} \subset \Omega$, como consecuencia de la proposición 7.6.1 y del lema 7.6.1 para cada $\varepsilon > 0$ existe una función racional con polos solamente en $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ tal que si $z \in \mathcal{K}$, entonces $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$. Como consecuencia del lema 7.6.4 y el hecho que $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ sea un álgebra se sigue que $R \in \mathcal{B}_E(\mathcal{K})$. ■

El teorema de Runge puede enunciarse de un modo topológico más natural:

Corolario 7.6.1 Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, E un subconjunto de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tal que E intersecta cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, si $\mathcal{R}_E(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones racionales cuyos polos están solamente en E , y consideramos $\mathcal{R}_E(\Omega)$ como subespacio del espacio de funciones holomorfas en Ω , entonces para cada función holomorfa f en Ω existe una sucesión $\{R_n\}$ en $\mathcal{R}_E(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = f$. Es decir, $\mathcal{R}_E(\Omega)$ es denso en el espacio de funciones holomorfas definidas en Ω .

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto compacto de Ω y $\varepsilon > 0$, como consecuencia del lema 7.6.2 existe un conjunto compacto $\mathcal{K}_1$ tal que $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1 \subset \Omega$ y cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_1$ contiene una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. De donde E intersecta cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}_1$. Como consecuencia del teorema de Runge 7.6.2, existe $R \in \mathcal{R}_E(\Omega)$ tal que $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ para cada $z \in \mathcal{K}$. Iterando éste proceso se obtiene la sucesión deseada. ■

Corolario 7.6.2 Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, entonces para cada función f holomorfa en Ω , existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$ en el espacio de funciones holomorfas en Ω .

7.7 Ejercicios

- Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en el punto $z_0 = 0$. Determine si la singularidad es removible, polo o esencial.
 - $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$.
 - $f(z) = \exp(z^{-1})$.
 - $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z}$.
 - $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2(z+1)}$.
- Determine los polos y las partes principales de la función $\frac{z^2 + 1}{z^3 - 3z^2 + 2z}$.
- Determine los polos de la función $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ y obtenga la parte principal de f en el punto $z_0 = 0$.
- Determine los polos de las funciones
 - $\tan z$.
 - $\cot z$.
 Obtenga el orden de cada uno de los polos, así como las partes principales.

5. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$, determine la expansión en serie de Laurent de f en cada una de las regiones indicadas:

- a) $\text{an}(0; 0, 1)$.
- b) $\text{an}(0; 1, 2)$.
- c) $\text{an}(0; 2, \infty)$.
- d) $\text{an}(-1; 0, 1)$.
- e) $\text{an}(-1; 1, 2)$.
- f) $\text{an}(-1; 2, \infty)$.

6. Sean $p(z)$ y $q(z)$ son dos polinomios sin factores comunes, y $z = z_0$ es un cero de $q(z)$. Para los casos indicados, encuentre la parte principal de la función

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

- a) Si z_0 es un cero simple de $q(z)$.
- b) Si z_0 es un cero de multiplicidad dos de $q(z)$.

7. Dados $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ con $z_0 \neq z_1$, sea

$$f(z) = \log \frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

- a) Determine cuál es el máximo abierto Ω en el cual la función f es holomorfa.
- b) Si f tiene singularidades aisladas, determine cuáles son y clasifíquelas.
- c) Determine, si existe, el desarrollo en serie de Laurent de la función f en el infinito, determinando en qué dominio es válido el desarrollo.

8. Calcule el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \log \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$$

en las regiones indicadas:

- a) $\text{an}(0; 1, 2)$.
- b) $\text{an}(0, 2, \infty)$.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto; si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa salvo en los polos de f , demuestre que los polos de f no pueden tener un punto límite en Ω .
10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ no es idénticamente nula en Ω y si f tiene una singularidad aislada en z_0 , demuestre que si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^s |f(z)| = 0 \quad (7.13)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0|^s |f(z)| = \infty \quad (7.14)$$

para algún número real s , entonces existe un entero m tal que la ecuación 7.13 se cumple si $s > m$ y la ecuación 7.14 se cumple si $s < m$.

11. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad esencial en z_0 si y solamente si las ecuaciones 7.13 y 7.14 no se satisfacen para cualquier número real s .
12. Sea $R > 0$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; |z| > R\}$. Recordamos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad removible, polo, o una singularidad esencial en infinito si $f(z^{-1})$ tiene una singularidad removible, un polo, o una singularidad esencial en cero respectivamente.
- a) Demuestre que una función entera tiene una singularidad removible en infinito si y solamente si la función es constante.
 - b) Dé una caracterización de aquellas funciones racionales que tienen una singularidad removible en infinito.
13. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si f es una función meromorfa en Ω y $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ se define por

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \text{ no es un polo de } f \\ \infty & \text{si } z \text{ es un polo de } f, \end{cases}$$

demuestre que f es una función continua.

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, denote por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de funciones holomorfas en Ω , y por $\mathcal{M}(\Omega)$ el conjunto de funciones meromorfas en Ω dotados de las operaciones usuales de suma y producto.
- Demuestre que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio entero.
 - Demuestre que $\mathcal{M}(\Omega)$ es un campo.
 - ¿Es $\mathcal{M}(\Omega)$ el campo de fracciones de $\mathcal{H}(\Omega)$?
15. Demuestre la siguiente generalización del principio del argumento: sea f una función meromorfa en una región Ω con ceros $z_1, \dots, z_n$ y polos $p_1, \dots, p_m$ contados de acuerdo a su multiplicidad. Si g es holomorfa en Ω y γ es una curva cerrada rectificable homotópica a una curva constante en Ω y tal que la traza de γ no pasa por los ceros o polos de la función f , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n g(z_j) n(\gamma, z_j) - \sum_{k=1}^m g(p_k) n(\gamma, p_k).$$

16. Demuestre que

$$\exp \left[\frac{a}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] = J_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} (z^n + (-z)^{-n}) J_n(a)$$

donde $J_n(a)$ es la función de Bessel

$$J_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^{n+2k}}{2^{n+2k} k! (n+k)!}.$$

17. Demuestre que la función

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$ y por lo tanto su serie de Laurent, alrededor de $z_0 = 0$, es una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Demuestre que el radio de convergencia de esta serie es 2π . Escriba los coeficientes c_n de la serie de potencias anterior como $c_n = B_n/n!$, es decir, defina $B_n := n!c_n$, de tal forma que la serie anterior es:

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \text{para } |z| < 2\pi.$$

- Demuestre que $B_0 = 1$.
- Demuestre que $B_1 = 1$.
- Demuestre que $B_n = 0$ si $n > 1$ es impar.
- Calcule los primeros coeficientes B_n , digamos para $n \leq 10$.
- Demuestre que los números B_n son racionales.
- Demuestre la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

para $n \geq 1$, donde $\binom{n+1}{k}$ es el coeficiente binomial correspondiente.

Los números racionales B_n dados anteriormente se conocen como los *números de Bernoulli*.

18. Evalúe las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo 7.4.1

- $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-5)} dz.$
- $\int_{|z|=4} \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-5)} dz.$

$$\begin{aligned} c) & \int_{|z|=6} \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-5)} dz. \\ d) & \int_{|z-5|=1} \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-5)} dz. \\ e) & \int_{|z-3|=1/2} \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-5)} dz. \end{aligned}$$

19. Determine cuántos ceros tiene la función $f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ en el interior del disco unitario $\mathbb{D}$. *Sugerencia:* Considere $g(z) = -4z^5$, y aplique el teorema de Rouché.

20. Evalúe las siguientes integrales

$$\begin{aligned} a) & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x - 1}. \\ b) & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}. \\ c) & \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx. \end{aligned}$$

21. Demuestre que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \pi.$$

22. Demuestre que, si $a > 1$ entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}.$$

23. Demuestre que, para cada $\zeta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-2\pi i x \zeta)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2} (1 + 2\pi |\zeta|) e^{-2\pi |\zeta|}.$$

24. Suponga que f tiene un polo simple en z_0 y sea g una función holomorfa en un abierto que contiene al punto z_0 . Demuestre que

$$\text{Res}(fg, z_0) = g(z_0) \text{Res}(f, z_0).$$

25. Utilice el ejercicio anterior para demostrar que, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región y f es holomorfa en Ω salvo por los polos simples $z_0, z_1, \dots, z_n$, y si g es una función holomorfa en Ω , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) g(z) dz = \sum_{k=0}^n n(\gamma, z_k) g(z_k) \text{Res}(f, z_k)$$

para cualquier curva rectificable γ contenida en el conjunto $\Omega \setminus \{z_0, \dots, z_n\}$ con γ homotópica a una curva constante en Ω .

26. Si f es una función entera, demuestre que f tiene una singularidad esencial en ∞ .

27. Si f es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo por un número finito de singularidades aisladas $z_0, z_1, \dots, z_n$, demuestre que

$$\text{Res}(f, \infty) = - \sum_{k=0}^n \text{Res}(f, z_k).$$

28. Sea γ la frontera del rectángulo con vértices $v_1 = n(1 + i) + \frac{1}{2}$, $v_2 = n(-1 + i) - \frac{1}{2}$,

$$v_3 = n(-1 - i) - \frac{1}{2} \text{ y } v_4 = n(1 - i) + \frac{1}{2}.$$

a) Evalúe $\int_{\gamma} \frac{\pi}{(z+a)^2} \cot \pi z dz$ cuando a no es un número entero.

b) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \frac{\pi}{(z+a)^2} \cot \pi z dz = 0$.

c) Utilizando la primera parte demuestre que

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2}.$$

Sugerencia: $z = x + iy \Rightarrow |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$ y $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$. Demuestre que $|\cot \pi z| \leq 2$ para z en la traza de γ si n es suficientemente grande.

29. Demuestre que si $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto, las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$ son las mismas que las de $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{K}$ y las componentes no acotadas se diferencian únicamente en el punto ∞ .
30. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0$ si, y solamente si, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ uniformemente en $\mathcal{K}$, donde

$$\rho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i} \min\{1, \max\{|f_n(z) - f(z)|; z \in \mathcal{K}_i\}\}.$$

Es decir, el espacio $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ de todas las funciones $\mathbb{C}$ -valuadas, continuas en $\mathcal{K}$, es un espacio métrico completo.

31. Demuestre que $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ es un álgebra con la suma y el producto definidos puntualmente.
32. Demuestre que $\mathcal{B}_E(\mathcal{K})$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ que contiene cada función racional con un polo en E .
33. Demuestre la siguiente versión del *teorema del desarrollo de Mittag-Leffler*.

Sea f una función holomorfa en $z_0 = 0$ y meromorfa en $\mathbb{C}$, cuyas únicas singularidades en $\mathbb{C}$ son una sucesión infinita de polos simples $z_1, z_2, \dots$ ordenados en forma tal que $|z_1| \leq |z_2| \leq |z_3| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$, y tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$. Sean $b_n = \operatorname{Res}(f, z_n)$ y γ_n circunferencias de radio r_n que no pasan por ningún polo de f y sobre las cuales $|f(z)| < M$ donde M es independiente de n y $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$.

Entonces

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n} \right).$$

Sugerencia: Si $\zeta \neq 0$ no es un polo de f , entonces la función $g(z) = \frac{f(z)}{z - \zeta}$ tiene polos en ζ y en z_n para cada n . Aplique el teorema del residuo a las funciones $g(z)$ y $f(z)/z$ sobre todos los polos interiores al círculo de radio r_n .

34. Aplique el teorema del desarrollo de Mittag-Leffler visto en el ejercicio anterior para demostrar

$$\begin{aligned} a) \tan z &= 2z \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{1}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right). \\ b) \cot z &= \frac{1}{z} 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} + \dots \right). \\ c) \sec z &= \pi \left(\frac{1}{(\pi/2)^2 - z^2} + \frac{3}{(3\pi/2)^2 - z^2} + \frac{5}{(5\pi/2)^2 - z^2} + \dots \right). \\ d) \csc z &= \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} + \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} + \dots \right). \end{aligned}$$



8. Aplicaciones conformes

Una aplicación conforme es aquella que preserva ángulos en cada punto de su dominio, véase la figura 8.1. Las aplicaciones conformes han sido utilizadas por matemáticos, cartógrafos y físicos para estudiar regiones cuidando que la forma de las regiones se preserve a pequeña escala.

Estudiaremos el comportamiento general de las aplicaciones conformes definidas sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, así como una familia especial de este tipo de aplicaciones conocidas como las aplicaciones de Möbius.

En el presente capítulo demostraremos el teorema de la aplicación de Riemann, 8.7.1 página 254, el cual es uno de los teoremas más importantes de la teoría de funciones de una variable compleja. El problema básico consiste en determinar bajo qué condiciones existe una transformación conforme f de un conjunto abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$, la bola con centro en el origen y radio 1.

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ el problema de encontrar un homeomorfismo conforme entre Ω y un abierto más sencillo Ω' tiene gran trascendencia desde el punto de vista de las aplicaciones. El isomorfismo conforme permite efectuar un cambio de variable con el que cierto problema, planteado inicialmente en Ω , se puede convertir en un problema similar, planteado en Ω' , el cual es más sencillo de trabajar.

8.1 Aplicaciones conformes

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva suave y $t_0 \in (a, b)$, es un punto tal que, $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$, su derivada en t_0 sea distinta de cero, entonces γ tiene una recta tangente en el punto $z_0 = \gamma(t_0)$, a saber, la recta que pasa por el punto z_0 con vector de dirección $\dot{\gamma}(t_0)$, o equivalentemente, con pendiente $\tan(\arg(\dot{\gamma}(t_0)))$.

Definición 8.1.1 Si $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos curvas suaves en $\mathbb{C}$ que pasan por el punto z_0 , es decir $\gamma_1(t_1) = z_0 = \gamma_2(t_2)$ con $a < t_1 < b$, $c < t_2 < d$, y $\dot{\gamma}_k(t_k) \neq 0$ para $k = 1, 2$, definimos *el ángulo entre las curvas γ_1 y γ_2 en el punto z_0* como el ángulo formado por sus rectas tangentes en z_0 , esto es

$$\arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)).$$

Consideremos, por ejemplo, la función $\mathbb{C}$ -diferenciable $f(z) = z^2$, identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ vía $(x, y) \mapsto x + iy$ nos permite ver a $f(x + iy)$ como $u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, si consideramos las rectas verticales $x = c$, tenemos que $u = c^2 - y^2$ y $v = 2cy$, de

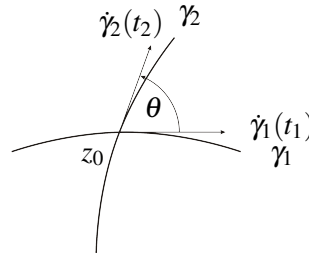


Figura 8.1: Ángulo $\theta = \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1))$ entre γ_1 y γ_2 .

donde $v^2 = 4c^2y^2 = 4c^2(c^2 - u)$, es decir, cada recta vertical $x = c$ se transforma en la parábola horizontal $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ con vértice en $(c^2, 0)$ y que abre hacia la izquierda, mientras que las rectas horizontales $y = d$ se transforman en las parábolas horizontales $v^2 = 4d^2(u + d^2)$ con vértice $(-d^2, 0)$ que abren hacia la derecha.

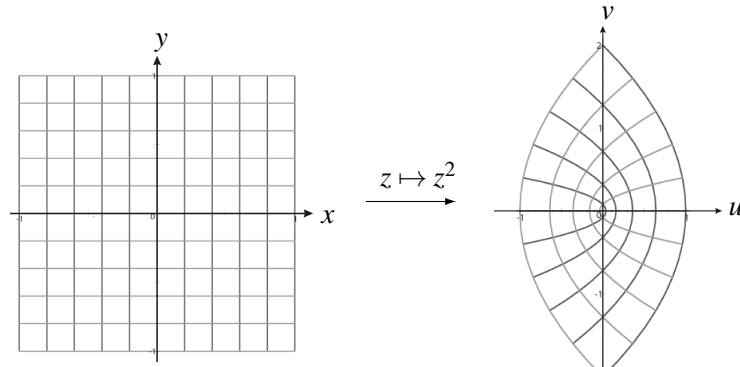


Figura 8.2: Geometría de la función $f(z) = z^2$

El lector puede probar que estas parábolas se intersectan ortogonalmente en todos los puntos de la forma $(c^2 - d^2, \pm|2cd|)$, como se muestra en la figura 8.2.

Cabe notar que cuando c tiende a cero, la parábola $v^2 = -4c^2(u - c^2)$ tiende al semieje real $v = 0$.

El hecho de que se preserven los ángulos no es un fenómeno exclusivo de las rectas que elegimos, o de la función en sí; el hecho de que se preserven los ángulos es una propiedad, denominada *conforme*, que exploraremos de manera general en la presente sección.

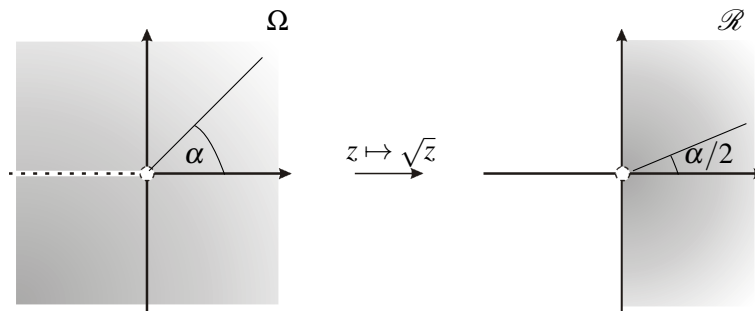


Figura 8.3: La imagen de Ω bajo $g(z) = \sqrt{z}$

Podemos examinar con más detalle esta función. Por ejemplo, de los capítulos anteriores sabemos que $f(z) = z^2$ transforma el círculo con centro en el origen y radio $r > 0$ en el círculo con centro en el origen y radio r^2 cubriéndolo 2 veces.

Aún más, si tomamos la forma polar de un punto $z_0 = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la semirecta que va del origen a z_0 bajo f se transforma en la semirecta que pasa por el origen y el punto $z_1 = r^2e^{2i\theta}$.

Luego entonces, si $S(\alpha, \beta) := \{z \in \mathbb{C}; \alpha < \arg(z) < \beta\}$ con $0 < \beta - \alpha < \pi$, como consecuencia

de lo anterior vemos que, bajo f , este conjunto se transforma en

$$S(2\alpha, 2\beta) := \{z \in \mathbb{C}; 2\alpha < \arg(z) < 2\beta\},$$

por lo que en el origen, y sólo en el origen, no se preservó el ángulo $\beta - \alpha$, esto se debe a que la función $f(z) = z^2$ deja de ser *conforme* en el origen.

Esta pequeña discusión nos da una idea de la naturaleza de la función $f(z) = z^2$, y nos orienta sobre el comportamiento general de la teoría de las funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables.

Antes de enunciar el resultado que nos dice bajo qué condiciones una función $\mathbb{C}$ -diferenciable preserva ángulos recordamos que, si $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ es una curva suave con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en Ω , entonces $\sigma := f \circ \gamma$ también es una curva suave, y como consecuencia de la regla de la cadena $\dot{\sigma}(t) = f'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)$.

Si para $t_0 \in \mathbb{R}$ con $a < t_0 < b$ denotamos $\gamma(t_0) = z_0$, y suponemos que $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$, aún más, $\arg(\dot{\sigma}(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{\gamma}(t_0))$.

Teorema 8.1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, y f una función $\mathbb{C}$ -diferenciable definida en Ω . Entonces f preserva ángulos en cada punto $z_0 \in \Omega$ donde $f'(z_0) \neq 0$.

Demostración. Si $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ y $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ son dos curvas suaves contenidas en Ω que pasan por z_0 , en particular, existen $t_1 \in (a_1, b_1)$ y $t_2 \in (a_2, b_2)$ tales que $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, con $\dot{\gamma}_k(t_k) \neq 0$ para $k = 1, 2$.

Como $\sigma_k = f \circ \gamma_k$, entonces

$$\arg(\dot{\sigma}_1(t_1)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)) = \arg(f'(z_0)) = \arg(\dot{\sigma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)),$$

o equivalentemente

$$\arg(\dot{\sigma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\sigma}_1(t_1)) = \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1)).$$

Esto significa que f transforma cualesquiera dos curvas que pasen por z_0 en dos curvas que pasan por $f(z_0)$ y, cuando $f'(z_0) \neq 0$, los ángulos entre las curvas se preservan en magnitud y sentido. ■

Así, la función $f(z) = z^2$ preserva ángulos, en magnitud y sentido, si $z_0 \neq 0$. Mientras que la función $g(z) = z + \frac{1}{z}$ preserva ángulos, en magnitud y sentido, si $g'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} \neq 0$, esto es, si $z_0 \neq \pm 1$, nótese que 0 no está en el dominio de $g(z)$, por lo que no se estudia el comportamiento de $g(z)$ en $z_0 = 0$.

Definición 8.1.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $z_0 \in \Omega$, y f una función $\mathbb{C}$ -valuada definida en Ω . Diremos que f es una *aplicación conforme en z_0* si, f tiene la propiedad de preservar ángulos, en magnitud y sentido, en el punto z_0 , y además existe el siguiente límite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

Diremos que f es *conforme en Ω* , si f es conforme en z para cada $z \in \Omega$.

En particular, como consecuencia del teorema 8.1.1, si f es $\mathbb{C}$ -diferenciable y $f'(z) \neq 0$ para cada z , entonces es conforme.

Ejemplo 52

Como consecuencia del teorema 8.1.1, la función exponencial es conforme en todo $\mathbb{C}$. Si consideramos las rectas verticales $z = a + iy$ con $a \in \mathbb{R}$ fijo, entonces $f(z) = e^a e^{iy}$ son circunferencias con centro en el origen y radio e^a . Mientras que, la imagen de la recta horizontal $z = x + ib$, con $b \in \mathbb{R}$ fijo, está dada como $f(x) = e^x e^{ib}$ y corresponde a la semirrecta que forma un ángulo b con el eje real positivo. En la figura 8.4 mostramos el comportamiento de una familia de dichas rectas.

Cuando $f'(z_0) = 0$, no necesariamente se preservan los ángulos.

Recordamos que, si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$ -diferenciable, un punto $z_0 \in \Omega$ donde $f'(z_0) = 0$ se denomina un *punto singular*.

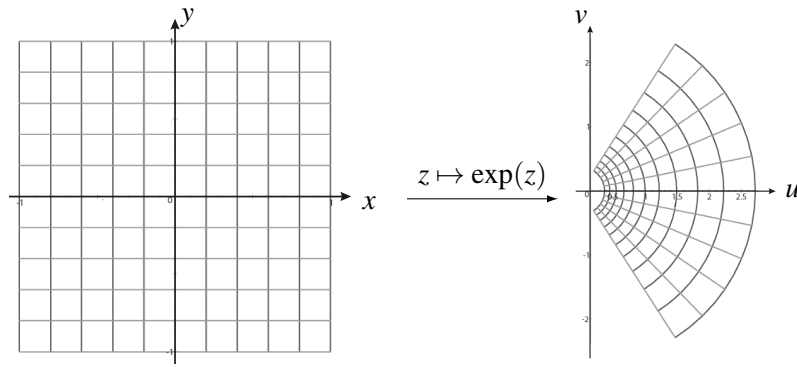


Figura 8.4: Geometría conforme de la función exponencial

Observación 10 Nótese que la función $f(z) = \bar{z}$ preserva los ángulos en magnitud, pero invierte el sentido, por lo que esta función no es conforme. Si una transformación preserva ángulos en magnitud y dirección, pero no necesariamente en sentido, se llama *isogonal*.

Proposición 8.1.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$ -diferenciable, y denotemos por Ω' la imagen de Ω bajo f . Si $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ es conforme y biyectiva, entonces $f^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$ también es conforme y biyectiva.

Demostración. Como f es biyectiva, su función inversa f^{-1} existe, y como consecuencia del teorema de la función inversa, f^{-1} es $\mathbb{C}$ -diferenciable, y

$$\frac{df^{-1}(w)}{dw} = \frac{1}{\frac{df(z)}{dz}} \quad \text{donde} \quad w = f(z).$$

Como f es conforme $f'(z) \neq 0$, así $\frac{df^{-1}(w)}{dw} \neq 0$, de donde, f^{-1} es conforme. ■

Proposición 8.1.3 Sean $\Omega_k \subset \mathbb{C}$, conjuntos abiertos no vacíos para $k = 1, 2, 3$, y $f_k : \Omega_k \rightarrow \Omega_{k+1}$ funciones $\mathbb{C}$ -diferenciables, para $k = 1, 2$. Supongamos que f_1 y f_2 son conformes y biyectivas, entonces $f_2 \circ f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$ es conforme y biyectiva.

Demostración. Como f_1 y f_2 son funciones biyectivas y $\mathbb{C}$ -diferenciables, entonces $f_2 \circ f_1$ es biyectiva y $\mathbb{C}$ -diferenciable. Como consecuencia de la regla de la cadena

$$(f_2 \circ f_1)'(z) = f_2'(f_1(z)) \cdot f_1'(z) \neq 0,$$

lo cual implica que $f_2 \circ f_1$ es conforme. ■

Corolario 8.1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío. Entonces

$$\{f : \Omega \rightarrow \Omega; f \text{ es } \mathbb{C}\text{-diferenciable, conforme y biyectiva}\}$$

constituye un grupo bajo la composición de funciones.

Definición 8.1.3 Si $\Omega_k \subsetneq \mathbb{C}$ son abiertos y conexos, $k = 1, 2$. Diremos que Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes si existe una transformación conforme y biyectiva de Ω_1 en Ω_2 .

El teorema de la aplicación abierta de Riemann 8.7.1 implica que dos regiones simplemente conexas, propiamente contenidas en $\mathbb{C}$, son conformemente equivalentes.

En la figura 8.5 mostramos el efecto de algunas aplicaciones conformes sobre algunos subconjuntos del plano.

El teorema de la aplicación abierta de Riemann 8.7.1 implica que dos regiones simplemente conexas, propiamente contenidas en $\mathbb{C}$, son conformemente equivalentes.

En la figura 8.5, página 227, en el segundo inciso, $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}$ no son regiones simplemente conexas.

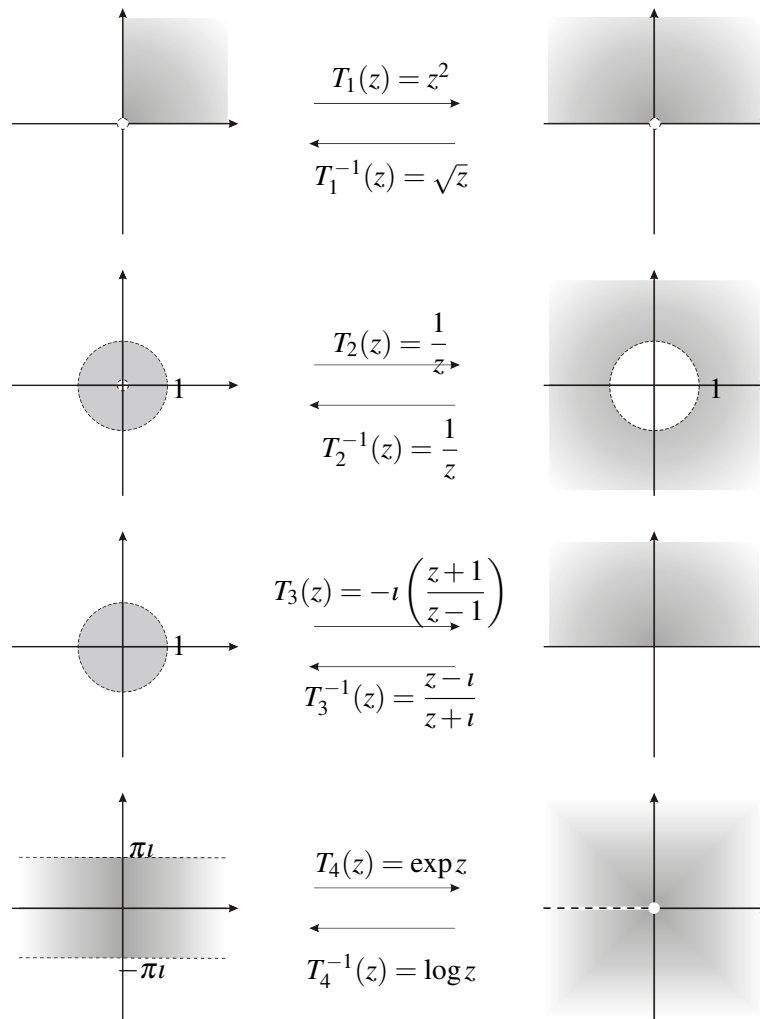


Figura 8.5: Geometría de algunas aplicaciones conformes

8.2 Aplicaciones conformes en $\mathbb{C}_\infty$

Después de haber extendido la noción de derivada al caso de funciones definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ con valores en $\mathbb{C}_\infty$ consideramos aquí el significado geométrico de la condición $f'(a) \neq 0$. Cuando $a = \infty$, o bien cuando $f(a) = \infty$, la interpretación geométrica se logra a través de la aplicación inducida mediante la proyección estereográfica en la esfera de Riemann.

El hecho de que las transformaciones derivables en sentido generalizado con derivada no nula inducen en la esfera de Riemann aplicaciones que preservan ángulos orientados es la principal motivación para la definición (4.4.2) de función $\mathbb{C}$ -derivable en ∞ (o en un punto a con $f(a) = \infty$.) La noción de ángulo orientado entre un par de vectores no nulos se puede dar en todo espacio euclidiano orientado de dimensión dos, después de identificarlo con $\mathbb{C}$ mediante una base ortonormal positiva.

Si E_1, E_2 son espacios euclidianos orientados de dimensión dos, dada una aplicación $f : U \rightarrow E_2$ definida en un abierto $U \subset E_1$, se puede extender la noción de preservación de ángulos orientados en un punto $a \in U$. En este contexto se sigue cumpliendo que una aplicación lineal $L : E_1 \rightarrow E_2$ preserva ángulos orientados si, y solamente si es no singular y el ángulo orientado entre cada par ordenado de vectores no nulos (w_1, w_2) de E coincide con el formado entre sus imágenes $(L(w_1), L(w_2))$.

Después de esto, la noción de aplicación que preserva ángulos orientados en un punto se puede extender al caso de una aplicación $F : U \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ cuyo dominio U es un abierto de la esfera de Riemann y $\mathbb{C}_\infty = \{v \in \mathbb{R}^3; \|v\| = 1\}$. Dado un punto $p \in \mathbb{C}_\infty$, sea $E_p \simeq \mathbb{C}$ el espacio vectorial tangente a $\mathbb{C}_\infty$ en p dotado de la estructura euclidiana inducida por la del espacio ambiente $\mathbb{R}^3$ en el que se considera inmerso, y orientado mediante el vector normal entrante, es decir, $\{u_1, u_2\}$ es base

positiva de E_p cuando $\{u_1, u_2, n\}$ es base positiva para la orientación canónica de $\mathbb{R}^3$, siendo n el vector normal entrante a $\mathbb{C}_\infty$ en p .

Definición 8.2.1 Una aplicación F definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}_\infty$, con valores en $\mathbb{C}_\infty$ se dice que *preserva ángulos orientados* en $p \in U$ cuando ocurre lo siguiente: Si $\gamma_1, \gamma_2 : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow U$ son dos curvas derivables por $p = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ con vectores tangentes no nulos $v_1 = \dot{\gamma}_1(0)$, $v_2 = \dot{\gamma}_2(0)$ entonces sus imágenes son curvas derivables por $q = F(p)$, con vectores tangentes no nulos $w_1 = \frac{d(F \circ \gamma_1)}{dt}(0)$, $w_2 = \frac{d(F \circ \gamma_2)}{dt}(0)$ y el ángulo orientado del par (w_1, w_2) coincide con el ángulo orientado del par (v_1, v_2) .

A la hora de interpretar, sobre la esfera de Riemann, el significado geométrico de las aplicaciones conformes conviene tener presente que la proyección estereográfica conserva ángulos orientados (véase el teorema 3.7.2 en la página 54) según la anterior definición.

Definición 8.2.2 Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ se dice que es *conforme en el abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ si f es derivable en cada $z \in \Omega$ con $f'(z) \neq 0$. Un *isomorfismo conforme* del abierto $\Omega_1 \subset \mathbb{C}_\infty$ sobre el abierto $\Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ es una aplicación biyectiva $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.

En la próxima sección, estudiaremos las transformaciones de Möbius, y demostraremos que estas transformaciones son conformes en $\mathbb{C}_\infty$.

8.3 Transformaciones de Möbius.

En la presente sección estudiamos una familia especial de aplicaciones conformes, así como la forma de obtener aplicaciones conformes específicas entre dos regiones dadas.

Uno de los ejemplos más simples y útiles, de aplicaciones conformes que discutiremos son las fraccionales lineales, esto es, aplicaciones de la forma:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con a, b, c y d números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

Este tipo de aplicaciones fueron utilizadas por Möbius en 1853 para estudiar una clase de aplicaciones geométricas la cual denominó *Kreisverwandtschaften*. Este tipo de aplicaciones también se denominan homografías.¹

Definición 8.3.1 Una aplicación fraccional lineal

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una *aplicación de Möbius* si los números complejos a, b, c y d satisfacen la condición $ad - bc \neq 0$.

La condición $ad - bc \neq 0$ simplemente nos dice que la aplicación T no es constante, además basta pedir $ad - bc = 1$, y se deja como ejercicio al lector verificar estos hechos.

Nótese que

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \left| \frac{az + b}{cz + d} \right| = \infty, \quad \text{y} \quad \lim_{w \rightarrow a/c} \left| \frac{-dw + b}{cw - a} \right| = \infty$$

Lo anterior permite extender la aplicación de Möbius $T : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$ a la aplicación $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ como sigue:

¹Kreis verwandtschaften: círculo de afinidades

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Proposición 8.3.1 Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una aplicación de Möbius, entonces T es conforme y biyectiva de $\mathbb{C}_\infty$ sobre $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Si definimos

$$S(z) = \begin{cases} \frac{dz-b}{-cz+a} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\} \\ \infty & \text{si } z = a/c \\ -d/c & \text{si } z = \infty \end{cases},$$

podemos ver fácilmente que $T \circ S(z) = S \circ T(z) = z$. Por lo que $S = T^{-1}$ es la aplicación inversa de T , y es claro que T^{-1} también es una aplicación de Möbius.

Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, entonces $T'(z_0) = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} \neq 0$, por lo que T es $\mathbb{C}$ -diferenciable para $z \neq -\frac{d}{c}$.

Para estudiar la conformidad de T en los puntos $-\frac{d}{c}$ e ∞ , consideraremos primeramente el caso $c \neq 0$.

De acuerdo con las definiciones (4.4.2) y (8.2.2) T es conforme en ∞ si $t(z) = T(1/z)$ es conforme en $z_0 = 0$, pero

$$t(z) = T\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a+bz}{c+dz}$$

de donde

$$t'(z) = \frac{bc-ad}{(c+dz)^2}, \quad \text{de donde } t'(0) = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0$$

Es decir, T es conforme en ∞ .

Por otra parte, si $z = -\frac{d}{c}$, aplicando las definiciones (4.4.2) y (8.2.2) T es conforme en $z_0 = -\frac{d}{c}$ si $t(z) = \frac{1}{T(z)}$ es conforme en $z_0 = -\frac{d}{c}$. Pero

$$t(z) = \frac{1}{T(z)} = \frac{cz+d}{az+b} \quad \text{y} \quad t'(z) = \frac{cb-ad}{(az+b)^2}.$$

$$\text{Así, } t'\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{c^2}{bc-ad}.$$

Finalmente, si $c = 0$, podemos escribir la transformación $T(z)$ como $T(z) = az+b$ con $T(\infty) = \infty$, en particular $T'(z) = a \neq 0$ si $z \in \mathbb{C}$. Finalmente, para verificar que T es conforme en $z_0 = \infty$, tenemos que

$$t(z) = \frac{1}{T(1/z)} = \frac{z}{a+bz}, \quad \text{con } t(0) = 0$$

de donde

$$t'(z) = \frac{a}{(a+bz)^2} \neq 0$$

Por lo cual t es conforme en 0, es decir, T es conforme en $z_0 = \infty$. ■

Proposición 8.3.2 Si $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ y $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ son dos transformaciones de Möbius, entonces:

1. $S \circ T$ es una transformación de Möbius.
2. T^{-1} es una transformación de Möbius.
3. $Id(z) = z$ es una transformación de Möbius.

Demostración. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $S = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ entonces

$$\begin{aligned} (S \circ T)(z) &= S(T(z)) = S\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\alpha\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \beta}{\gamma\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \delta} \\ &= \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)} \end{aligned}$$

Y notamos que

$$\begin{aligned} (\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) &= (\alpha \gamma ab + \beta \gamma bc + \alpha \delta ad + \beta \delta cd) \\ &\quad - (\alpha \gamma ab + \beta \gamma ad + \alpha \delta bc + \beta \delta dc) \\ &= \alpha \delta (ad - bc) - \gamma \beta (ad - bc) \\ &= (ad - bc)(\alpha \delta - \gamma \beta) \neq 0 \end{aligned}$$

por lo que $S \circ T$ es una transformación de Möbius.

De acuerdo con la proposición anterior $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ es una transformación de Möbius.

Claramente la función identidad $Id(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z$ es de Möbius. ■

La proposición anterior nos dice que el conjunto de las transformaciones de Möbius definidas en la esfera de Riemann (plano complejo estendido), $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ constituye un grupo bajo la composición, el cual denotaremos $Möb$.

Por otra parte, si $GL(2, \mathbb{C})$ denota el grupo de matrices invertibles, 2×2 con coeficientes complejos, es claro que tenemos un homomorfismo de grupos $\psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Möb$, dado como:

$$\psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Además, si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una aplicación de Möbius, y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces

$$T(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

esto es, los coeficientes a, b, c y d no son únicos.

A nivel de grupos esto significa que el homomorfismo ψ no es inyectivo, y su núcleo está dado como $\ker \psi = \{\lambda \cdot I_2 \in GL(2, \mathbb{C}) ; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, donde I_2 denota la matriz identidad 2×2 . Como consecuencia del primer teorema de isomorfismos de Noether, el grupo $Möb$ es isomorfo al grupo $GL(2, \mathbb{C}) / \ker \psi$.

Aún más, el grupo $Möb$ es isomorfo al grupo $SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) ; \det(A) = 1\}$.

Observación 11 Como consecuencia de lo visto anteriormente tenemos que una transformación de Möbius es un automorfismo de $\mathbb{C}_\infty$.

Ahora cabe preguntarse si el grupo $Möb$ coincide con el grupo de automorfismos de $\mathbb{C}_\infty$, que denotaremos $Aut(\mathbb{C}_\infty)$.

Para responder esta pregunta, consideremos ahora el grupo cociente

$$PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I_2\},$$

el cual se llama el grupo proyectivo lineal.

Ahora es claro que la sucesión

$$1 \rightarrow \{\pm I_2\} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} Aut(\mathbb{C}_\infty) \quad (8.1)$$

es exacta, donde las dos primeras flechas denotan la inclusión.²

Como vimos anteriormente, la imagen de ψ es precisamente el grupo $Möb$, por lo cual es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$.

En otras palabras, tenemos los siguientes isomorfismos de grupos:

$$\begin{aligned} Möb &\simeq GL(2, \mathbb{C}) / \ker \psi \\ &\simeq SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I_2\} \simeq Aut(\mathbb{C}_\infty). \end{aligned}$$

Podemos destacar algunos casos especiales de aplicaciones de Möbius, a saber:

Definición 8.3.2 Si $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una aplicación de Möbius, entonces:

1. Si $T(z) = z + b$, con $b \neq 0$, entonces T se denomina una traslación;
2. Si $T(z) = az$, con $a > 0$, entonces T se denomina una dilatación;
3. Si $T(z) = e^{i\theta}z$, con $\theta \in \mathbb{R}$, T se denomina una rotación;
4. Si $T(z) = az$, con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, T se denomina una homotecia, en particular, una homotecia es una composición de rotaciones y dilataciones; finalmente
5. Si $T(z) = 1/z$, T se denomina una inversión.

Geométricamente hablando: Una traslación por $b \in \mathbb{C}$ mueve un punto $z \in \mathbb{C}$ una distancia $|b|$ en la dirección $\arg(b)$, sólo el punto al infinito permanece invariante bajo traslaciones.

Una dilatación expande el plano si $a > 1$, y lo contrae si $a < 1$. Sólo el origen y el punto al infinito permanecen invariantes bajo dilataciones.

Una rotación por un ángulo θ , gira todo punto z alrededor del origen un ángulo θ , y sólo deja invariantes el origen y el punto al infinito.

Una inversión es la composición de dos reflexiones, la primera sobre el eje real y la segunda sobre la circunferencia unitaria, aunque ninguna de estas aplicaciones sea una transformación de Möbius. Los puntos $z = \pm 1$ son sus únicos puntos fijos.

Proposición 8.3.3 Si T es una aplicación de Möbius, entonces T es la composición de traslaciones, homotecias e inversiones.

Demostración. Si $c = 0$, entonces $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, definamos $T_1(z) = \frac{a}{d}z$ y $T_2(z) = z + \frac{b}{d}$. Claramente $T = T_2 \circ T_1$.

Si $c \neq 0$, definamos:

$$T_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z}, \quad T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z \quad \text{y} \quad T_4(z) = z + \frac{a}{c},$$

entonces $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$. ■

Notamos además que, si $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es una aplicación de Möbius, entonces z es un *punto fijo* de T , esto es, $T(z) = z$ si, y únicamente si $az + b = z(cz + d)$, lo cual implica

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (8.2)$$

Como esta ecuación es cuadrática, concluimos que: *una transformación de Möbius, distinta de la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos*, o equivalentemente, si una transformación de Möbius fija al menos tres puntos, entonces es la identidad $Id(z) = z$.

²Una sucesión es exacta si para cada par de funciones consecutivas en la sucesión, el núcleo de la segunda función coincide con la imagen de la primera.

Cuando pedimos además que $ad - bc = 1$ podemos decir un poco más, la transformación de Möbius $T(z)$ tiene un único punto fijo, si y solamente si, la ecuación cuadrática 8.2 tiene una única solución, lo cual sucede cuando, y solamente cuando, $(a - d)^2 + 4bc = 0$, y como $bc = ad - 1$ lo anterior equivale a pedir que $(a + d)^2 - 4 = 0$.

Además, $T(z)$ tiene exactamente dos puntos fijos si $c \neq 0$ y $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$, o equivalentemente, cuando $(a + d)^2 - 4 \neq 0$.

Como el grupo $Möb$ es isomorfo a $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I_2\}$, de acuerdo con lo discutido en el párrafo anterior, tenemos que los puntos fijos de T son determinados por la *traza cuadrada* de T ; esto es, si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es su representación matricial, el valor $(a + d)^2$, es precisamente el cuadrado de la traza de la matriz $A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Como $\text{tr}(A_{-T}) = -\text{tr}(A_T)$ y $\text{tr}(A_S \cdot A_T \cdot A_S^{-1}) = \text{tr}(A_T)$ para cada $S, T \in Möb$, la aplicación $\tau : Möb \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\tau(T) = \text{tr}^2(A_T)$ está bien definida.

Proposición 8.3.4 Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius distinta de la identidad con $ad - bc = 1$, entonces:

1. Si $\tau(T) = 4$, entonces T tiene un único punto fijo.
2. Si $\tau(T) \neq 4$, entonces T tiene dos puntos fijos.

Demostración. Para demostrar el primer inciso supondremos primeramente que $c \neq 0$, como $\tau(T) = 0$, de la ecuación cuadrática 8.2 se sigue que $(a - d)^2 + 4bc = 0$, por lo cual T tiene un único punto fijo. Por otra parte, si $c = 0$ se sigue que $ad = 1$, por lo que $T(z) = a^2z + ab$, si z fuera un punto fijo de T , entonces $a^2z + ab = z$ o equivalentemente $z = \frac{ab}{a^2 - 1}$. Como $\tau(T) = (a + a^{-1})^2 = 4$, se sigue que $a^2 = 1$. Luego entonces $T(z) = z + b$ y como T es distinta de la identidad, por lo tanto T tiene un único punto fijo en ∞ .

Procediendo de manera análoga para el segundo inciso, si $c \neq 0$, como $\tau(T) \neq 0$ de la ecuación cuadrática 8.2 se sigue que $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$, por lo cual T tiene dos puntos fijos. Si $c = 0$ entonces ∞ es un punto fijo, y el otro punto fijo está en $z = \frac{ab}{a^2 - 1}$. Como $\tau(T) \neq 4$ concluimos que $a^2 \neq 1$ y $\frac{ab}{a^2 - 1} \neq \infty$. ■

Definición 8.3.3 Decimos que dos transformaciones de Möbius S y T son *conjugadas* en $PGL(2, \mathbb{C})$ si existe $R \in PGL(2, \mathbb{C})$ tal que $S = R \circ T \circ R^{-1}$.

Es claro que la conjugación define una relación de equivalencia en el grupo $PGL(2, \mathbb{C})$, y nos interesa determinar cómo son sus clases de conjugación.

Proposición 8.3.5 Toda transformación de Möbius distinta de la identidad, $T \in PGL(2, \mathbb{C})$, es conjugada a una traslación de la forma $z \mapsto z + 1$ o a una transformación de la forma $z \mapsto az$.

Demostración. Si T tiene un único punto fijo z_0 consideremos la transformación $U(z) = \frac{1}{z - z_0}$, entonces U manda z_0 a ∞ y la transformación $U \circ T \circ U^{-1}$ fija únicamente a ∞ .

Como consecuencia de la proposición 8.3.4 tenemos que $T_b(z) = U \circ T \circ U^{-1}(z) = z + b$, para algún $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sea $V(z) = z/b$, entonces $V \circ T_b \circ V^{-1}(z) = z + 1$, y por lo tanto, $(V \circ U) \circ T \circ (V \circ U)^{-1}(z) = z + 1$. Esto es, T es conjugada a la traslación $T_1(z) = z + 1$.

Si T tiene dos puntos fijos z_0 y z_1 , entonces existe $R \in PGL(2, \mathbb{C})$ que manda los puntos z_0, z_1 en $0, \infty$ respectivamente. Consecuentemente la transformación $R \circ T \circ R^{-1}$ fija los puntos 0 e ∞ . Como consecuencia de lo visto previamente en la página 231, se sigue que $(R \circ T \circ R^{-1})(z) = az$ para algún $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. ■

Proposición 8.3.6 Cualesquiera dos traslaciones en el grupo $PGL(2, \mathbb{C})$ son conjugadas. Además, dos transformaciones $T(z) = az$ y $S(z) = bz$ son conjugadas en $PGL(2, \mathbb{C})$ si, y solamente si, $b = a$ o $b = a^{-1}$.

Demostración. La primera parte es consecuencia de la proposición anterior 8.3.5. Para demostrar la segunda parte, supongamos que S y T son conjugadas en $PGL(2, \mathbb{C})$, donde $a, b \neq 1$. Entonces $\tau(T) = \tau(S)$, es decir

$$a + \frac{1}{a} + 2 = b + \frac{1}{b} + 2.$$

Esto implica $b = a$ o $b = a^{-1}$. Recíprocamente, si $b = a^{-1}$, entonces $J \circ S \circ J^{-1} = T$, donde $J(z) = z^{-1}$ es la inversión. Por lo tanto, S y T son conjugadas en $PGL(2, \mathbb{C})$. ■

Corolario 8.3.1 Cualesquiera dos transformaciones de Möbius distintas de la identidad son conjugadas en $PGL(2, \mathbb{C})$ si y solamente si tienen la misma traza cuadrada τ .

Definición 8.3.4 Una transformación de Möbius T se llama

1. *Parabólica*, si T es conjugada a una traslación de la forma $T(z) = z + 1$.
2. *Elíptica*, si T es conjugada a una rotación $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$, con $\theta \in \mathbb{R}$.
3. *Hiperbólica*, si T es conjugada a una dilatación $H_\lambda(z) = \lambda z$ con $\lambda > 0$.
4. *Loxodrómica*, si T es conjugada a una homotecia de la forma $L(z) = az$ donde $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ y $|a| \neq 1$.

Como consecuencia de lo visto anteriormente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 8.3.7 Si $T \in PGL(2, \mathbb{C}) \setminus \{Id\}$, entonces:

1. T es elíptica si, y solamente si, $0 \leq \tau(T) < 4$.
2. T es parabólica si, y únicamente si, $\tau(T) = 4$.
3. T es hiperbólica cuando, y sólo cuando, $\tau(T) > 4$.
4. T es loxodrómica si, y sólo si, $\tau(T) < 0$ o $\tau(T) \notin \mathbb{R}$.

Demostración. Se deja como ejercicio al lector ■

Si T es una aplicación de Möbius, $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ son tres puntos distintos con $\alpha = T(a)$, $\beta = T(b)$, $\gamma = T(c)$ y S es otra aplicación de Möbius tal que $\alpha = S(a)$, $\beta = S(b)$, $\gamma = S(c)$, entonces $S^{-1} \circ T$ fija los puntos a, b y c , por ende $S^{-1} \circ T = Id$, de donde $S = T$. En resumen:

Proposición 8.3.8 Una aplicación de Möbius está determinada, en forma única, por su acción sobre cualesquiera tres puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$.

Si $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ con $z_k \neq z_l$ para $k \neq l$, definamos $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ como:

$$T(z) = \begin{cases} \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)} & \text{si } z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \\ \frac{z - z_3}{z - z_4} & \text{si } z_2 = \infty \\ \frac{z_2 - z_4}{z - z_4} & \text{si } z_3 = \infty \\ \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} & \text{si } z_4 = \infty. \end{cases}$$

En cualquiera de estos casos $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$ y $T(z_4) = \infty$, además T es la única aplicación de Möbius con esta propiedad.

Definición 8.3.5 Si $z_1 \in \mathbb{C}_\infty$, entonces $(z_1, z_2; z_3, z_4)$, la *razón cruzada* de z_1, z_2, z_3 y z_4 , es la imagen de z_1 bajo la única aplicación de Möbius que transforma z_2 en 1, z_3 en 0 y z_4 en ∞ .

Por ejemplo,

$$(z_2, z_2; z_3, z_4) = 1; (z_3, z_2; z_3, z_4) = 0; y(z, 1; 0, \infty) = z.$$

Además, si T es cualquier aplicación de Möbius y w_2, w_3 y w_4 son puntos tales que $T(w_2) = 1, T(w_3) = 0$ y $T(w_4) = \infty$, entonces $T(z) = (z, w_2; w_3, w_4)$.

La razón cruzada se empezó a estudiar en el siglo XVII, en el contexto de la Geometría Proyectiva, donde desempeña un papel importante, como el principal invariante de las proyectividades. Los términos razón armónica y razón doble son usados como sinónimos de razón cruzada. De estas dos la primera es más frecuente, pero razón cruzada es la más usada de las tres.

Proposición 8.3.9 Si z_2, z_3, z_4 son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, y T es cualquier aplicación de Möbius, entonces

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4))$$

para cada $z_1 \in \mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Sea $S(z) = (z, z_2; z_3, z_4)$, la razón cruzada de z, z_2, z_3 y z_4 , entonces S es una transformación de Möbius, tal que $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0$ y $S(z_4) = \infty$.

Si $U = S \circ T^{-1}$, entonces

$$U(T(z_k)) = (S \circ T^{-1})(T(z_k)) = S(z_k),$$

donde $U(z) = (z, T(z_2); T(z_3), T(z_4))$ para toda $z \in \mathbb{C}_\infty$.

En particular, si $z = T(z_1)$ tenemos

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)).$$

■

Corolario 8.3.2 Si z_2, z_3, z_4 son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, y w_2, w_3, w_4 también son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, entonces existe una única aplicación de Möbius T tal que $T(z_k) = w_k$, para $k = 2, 3, 4$.

Demostración. Dadas las transformaciones de Möbius $S(z) = (z, z_2; z_3, z_4)$ y $U(z) = (w, w_2; w_3, w_4)$, entonces $T(z) = U^{-1} \circ S(z)$ es una transformación de Möbius tal que $T(z_k) = w_k$, para $k = 2, 3, 4$. Si R fuese otra transformación de Möbius tal que $R(z_k) = w_k$, para $k = 2, 3, 4$, entonces $R^{-1} \circ T$ deja fijos tres puntos distintos, por lo que coincide con la función identidad, es decir $R = T$, por lo que T es única. ■

Como sabemos de geometría elemental, tres puntos no colineales en el plano $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, determinan una única circunferencia. Si pensamos $\mathbb{C}_\infty$ como la compactificación de $\mathbb{C}$ por medio de la proyección estereográfica (véase el capítulo página 52), podemos ver que las rectas en $\mathbb{C}$ corresponden a circunferencias en $\mathbb{C}_\infty$ que pasan por ∞ . En particular, a una recta en el plano también la llamaremos circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$.

Proposición 8.3.10 Una aplicación de Möbius transforma circunferencias en circunferencias.

Demostración. De acuerdo con la proposición 8.3.3, podemos escribir T como una composición de traslaciones, homotecias e inversiones, concretamente, $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, con $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$,

$$T_2(z) = \frac{1}{z}, T_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z \text{ y } T_4(z) = z + \frac{a}{c}.$$

En $\mathbb{R}^2$, de geometría analítica elemental, sabemos que las traslaciones (T_1 y T_4), y las homotecias (T_3) transforman circunferencias en circunferencias, y rectas en rectas, por lo que bastará ver que las inversiones transforman circunferencias o rectas en circunferencias o rectas.

De geometría analítica básica sabemos que una circunferencia, o recta, satisface una ecuación de la forma

$$Ax + By + C(x^2 + y^2) = D$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, constantes no todas cero.

Sea $z = x + iy \neq 0$, sea $z^{-1} = u + iv$, entonces $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, y $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, la ecuación de la circunferencia es equivalente a:

$$Au - Bv - D(u^2 + v^2) = -C,$$

la cual también corresponde a una recta o a una circunferencia. ■

Proposición 8.3.11 Si z_1, z_2, z_3, z_4 son cuatro puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, entonces $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ es un número real si, y solamente si, los cuatro puntos están en una circunferencia en $\mathbb{C}_\infty$.

Demostración. Si $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es la aplicación $T(z) = (z, z_2; z_3, z_4)$ entonces $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$; si $z = x \in \mathbb{R}$, y $w = T^{-1}(x) \neq 1$, entonces $x = T(w)$, de donde $T(w) = \overline{T(w)}$, es decir

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\overline{aw + b}}{\overline{cw + d}}$$

lo cual implica

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|w|^2 + (a\overline{d} - \overline{a}d)w + (b\overline{c} - \overline{b}c)\overline{w} + (b\overline{d} - \overline{b}d) = 0.$$

Si $a\overline{c} \in \mathbb{R}$, entonces $a\overline{c} - \overline{a}c = 0$. Sean $\alpha = 2(a\overline{d} - \overline{a}d)$, $\beta = \iota(b\overline{d} - \overline{b}d)$, y multiplicando la ecuación anterior por ι tenemos

$$0 = \text{Im}(\alpha w) - \beta = \text{Im}(\alpha w - \beta)$$

pues $\beta \in \mathbb{R}$. Esto es, w está en la recta determinada por la ecuación anterior.

Si $a\overline{c}$ no es real, la ecuación

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|w|^2 + (a\overline{d} - \overline{a}d)w + (b\overline{c} - \overline{b}c)\overline{w} + (d\overline{d} - \overline{d}d) = 0,$$

se transforma en

$$|w|^2 + \gamma w + \overline{\gamma}\overline{w} - \delta = 0$$

para algunas constantes $\gamma \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}$. En particular $|w + \gamma| = \lambda$, donde

$$\lambda = (|\gamma|^2 + \delta)^{1/2} = \frac{|ad - bc|}{|\overline{a}c - a\overline{c}|} > 0.$$

Como γ y λ son independientes de x y como la ecuación $|w + \gamma| = \lambda$ es la ecuación de una circunferencia, concluimos que $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ es un número real si, y solamente si, los cuatro puntos están en una circunferencia. ■

Corolario 8.3.3 Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ en $\mathbb{C}_\infty$, existe una aplicación de Möbius tal que $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Observación 12 Un caso particular se tiene cuando el valor de la razón cruzada es -1

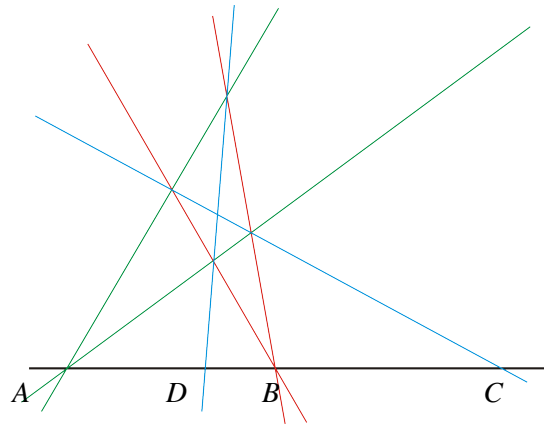


Figura 8.6: C es conjugado armónico de D con respecto a A y B

Recordamos que, en la geometría proyectiva cuatro puntos colineales A , B , C y D son armónicos, si existe un cuadrángulo completo en el cual dos lados opuestos pasan por A , otros dos lados opuestos pasan por B , y los lados restantes pasan por C y D respectivamente.

El punto C se denomina el *conjugado armónico* de D con respecto a A y B .³

El concepto de *conjunto armónico* procede de la música, pues expresa la relación de los puntos que una cuerda AB que produce una cierta nota, debe oprimirse para obtener las otras notas de la triada mayor, es decir, si dos teclas blancas A y B de un piano producen las notas *do* y *sol*, las teclas blancas correspondientes a C y D son las que producen las notas *mi* y el siguiente *do*.

Desde luego, la condición de que cuatro puntos A , B , C y D formen un conjunto armónico puede reducirse a pedir que la razón doble sea -1 , esto es:

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = -1$$

Desargues descubrió que la razón doble de cuatro puntos colineales es invariante bajo proyecciones.

Cabe notar que, dados cuatro puntos colineales A , B , C y D hay $24 = 4!$ permutaciones diferentes de ellos, por lo que hay 24 razones cruzadas posibles, sin embargo los valores de éstas razones cruzadas no son todos diferentes. Las 24 permutaciones pueden ser agrupadas en seis grupos de cuatro tales que las razones cruzadas de cada grupo son iguales. Más aún, si uno de estos valores es λ , los cinco valores restantes son

$$1 - \lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \quad \text{y} \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Regresando al estudio de las transformaciones conformes en $\mathbb{C}$, si $\mathbb{D}$ es el disco unitario abierto con centro en el origen, podemos ver que:

Lema 8.3.1 Si $|a| < 1$, la aplicación $\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ es un automorfismo holomorfo en $\mathbb{D}$.

Demostración. Claramente ϕ_a no es constante y es holomorfa si $z \neq 1/\bar{a}$. Como $|a| < 1$ entonces $\left| \frac{1}{\bar{a}} \right| = \frac{1}{|a|} > 1$. Por lo tanto ϕ_a es holomorfa en $\mathbb{D}$.

³Un cuadrángulo (completo) es un conjunto formado por cuatro puntos, donde cualesquiera tres de ellos no son colineales, y las seis rectas determinadas por estos cuatro puntos. Los puntos se llaman vértices y las rectas lados del cuadrángulo

Cuando $|z| = 1$, tenemos que

$$|\phi_a(z)| = \left| \frac{z-a}{z(\bar{z}-\bar{a})} \right| = \left| \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} \right| = 1.$$

Por el principio del máximo $\phi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Además $\phi_{-a}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y es claro que ϕ_{-a} es la función inversa de ϕ_a , esto es,

$$\phi_a \circ \phi_{-a} = \phi_{-a} \circ \phi_a = Id_{\mathbb{D}}.$$

■

Proposición 8.3.12 Si $z_0 \in \mathbb{D}$, y $\theta \in [0, 2\pi)$ fijos, la aplicación

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

es conforme y biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ y recíprocamente.

Demostración. Primeramente veremos que, si $|z| = 1$, entonces $|T(z)| = 1$. Como $|z| = 1$, entonces $\bar{z}z = 1$, de donde:

$$|T(z)| = \left| e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \left| \frac{z - z_0}{\bar{z}z - \bar{z}_0 z} \right| = \frac{1}{|z|} \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1.$$

Como consecuencia de lema anterior T es $\mathbb{C}$ -diferenciable en $\mathbb{D}$.

Como $T(z_0) = 0 \in \mathbb{D}$, por continuidad, T transforma el interior de $\mathbb{D}$ en sí mismo. Y como T es la restricción a $\mathbb{D}$ de una transformación conforme, T es conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.

Sean f un automorfismo holomorfo de $\mathbb{D}$, y $b = f(0)$, entonces $F = \phi_b \circ f$ es un automorfismo de $\mathbb{D}$ con $F(0) = 0$.

Como consecuencia del lema de Schwarz 5.4.2

$$|F(z)| \leq |z|, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{D}.$$

Ahora $F^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ también es un automorfismo de $\mathbb{D}$ con $F^{-1}(0) = 0$. Así

$$|F^{-1}(z)| \leq |z|, \quad \text{para cada } z \in \mathbb{D},$$

si tomamos $z = F(w)$, con $w \in \mathbb{D}$, entonces $|w| \leq |F(w)|$ con $w \in \mathbb{D}$.

Así $|F(z)/z| \cong 1$, por lo que $F(z) = e^{i\theta} z$ para alguna constante $\theta \in \mathbb{R}$. Por ende $f(z) = e^{i\theta} \phi_a(z)$, donde $a = -e^{i\theta} b$.

Obtenemos que toda aplicación conforme y biyectiva de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ es de la forma

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

■

Otro conjunto interesante a estudiar es el semiplano superior $\mathbb{H}_+$ el cual, está definido como $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$.

Proposición 8.3.13 Sea $\mathbb{H}_+$ el semiplano superior. Cualquier aplicación de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es conforme y biyectiva de $\mathbb{H}_+$ en $\mathbb{H}_+$ si y sólo si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y $ad - bc > 0$.

Demostración. Si T es una aplicación de la forma indicada en el enunciado, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces T deja invariante el eje real extendido $\mathbb{R}_\infty$, y como $\text{Im } T(i) = (ad - bc)/(c^2 + d^2) > 0$, por conexidad, la imagen del semiplano superior $\mathbb{H}_+$ bajo T es el semiplano superior $\mathbb{H}_+$.

Recíprocamente, si T deja invariante el semiplano superior, en particular $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$. Como los tres puntos $z_2 = T^{-1}(1)$, $z_3 = T^{-1}(0)$, $z_4 = T^{-1}(\infty)$ están en $\mathbb{R}_\infty$. Usando la fórmula de la razón cruzada para $T(z) = (z, z_2; z_3, z_4)$ tenemos que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = (c^2 + d^2) \text{Im } T(i) > 0$. ■

En otras palabras, el grupo de automorfismos conformes del semiplano superior $\text{Aut}(\mathbb{H}_+)$ coincide con $PSL(2, \mathbb{R})$.

El estudio de éstas familias de automorfismos es importante ya que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}_+$ constituyen un modelo de la geometría hiperbólica bidimensional, y son conocidos respectivamente como el *disco de Poincaré* y el *semiplano de Poincaré*. Para más información sobre éste modelo puede consultarse el libro (J. P. Gilman. I. Kra, 2007, Chap 8. §8.4 pgs. 158–167).

Estos dos modelos son conformemente equivalentes vía la transformación de Cayley $C : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

De acuerdo con lo anterior concluimos que

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = C \cdot PSL(2, \mathbb{R}) \cdot C^{-1} = \left\{ \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}; a, c \in \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}.$$

8.4 Simetría.

Recordamos que dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el punto $(x, -y)$ es simétrico a (x, y) con respecto al eje x , la transformación $\rho(x, y) = (x, -y)$ es una transformación $\mathbb{R}$ -lineal que preserva distancias.

De manera más general, puede definirse simetría con respecto a cualquier otra recta $y = mx$, como:

$$\rho_\theta(x, y) = (R_\theta \circ \rho \circ R_{-\theta})(x, y)$$

donde $m = \tan \theta$, y $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ es la rotación que gira el plano un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

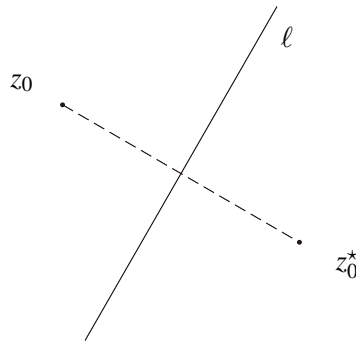


Figura 8.7: z_0^* es simétrico de z_0 con respecto a ℓ

También podemos ver esta transformación directamente de la ecuación de la recta $y = mx$ sin necesidad de utilizar el ángulo θ , para lo cual, consideramos $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y la base ortogonal $\beta' = \{(1, m), (-m, 1)\}$, entonces la matriz de cambio de coordenadas de la base β' en la base β está dada como:

$$Q = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta'}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$Q^{-1} = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\beta}^{\beta'} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la transformación ρ_m que da la reflexión con respecto a la recta $y = mx$ es

$$[\rho_m]_{\beta'} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\rho_m(x, y) = \frac{1}{1+m^2} ((1-m^2)x + 2my, 2mx + (m^2-1)y).$$

Finalmente, si deseamos reflejar con respecto a cualquier línea $y = mx + b$, con $b \neq 0$ bastará considerar, de manera adicional, la traslación $t_b(x, y) = (x, y - b)$, y considerar la composición $t_{-b} \circ \rho_m \circ t_b$ para obtener el simétrico de un punto con respecto a una recta. Ahora bien, podemos generalizar esta idea, y considerar el simétrico de un punto con respecto a una circunferencia como sigue:

Definición 8.4.1 Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia en $\mathbb{C}_{\infty}$ que pase por los puntos z_2, z_3 y z_4 . Dados $z, z^* \in \mathbb{C}_{\infty}$, diremos que z^* es el punto simétrico a z con respecto a $\mathcal{C}$ si, y solamente si $(z^*, z_2; z_3, z_4) = \overline{(z, z_2; z_3, z_4)}$.

Cabe notar que, de manera similar al caso de las rectas en $\mathbb{R}^2$:

- La definición sólo depende de $\mathcal{C}$, y no de los puntos z_2, z_3 y z_4 .
- z es el punto simétrico a z^* con respecto a $\mathcal{C}$.
- Los puntos de $\mathcal{C}$ son los únicos que son simétricos a ellos mismos, es decir, $z = z^*$ si, y solamente si, $z \in \mathcal{C}$.
- La transformación $z \mapsto z^*$ es biyectiva, y se denomina la reflexión con respecto a $\mathcal{C}$.

Para ver que esto es realmente una generalización del caso descrito anteriormente, supongamos $z_4 = \infty$, así $\mathcal{C}$ corresponde a una recta en $\mathbb{C}$, y

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = (z^*, z_2; z_3, \infty) = \overline{(z, z_2; z_3, \infty)} = \overline{\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3},$$

esto implica

$$\left| \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} \right| = \left| \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} \right|$$

de donde $|z^* - z_3| = |z - z_3|$, por lo cual z y z^* equidistan de cada punto de $\mathcal{C}$. Además

$$\operatorname{Im} \frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im} \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = -\operatorname{Im} \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Por ende, y a menos que $z \in \mathcal{C}$, tenemos que los puntos z y z^* están en distintas componentes determinadas por $\mathcal{C}$. Además, la recta que une z y z^* es perpendicular a $\mathcal{C}$.

Por otra parte, si $\infty \notin \mathcal{C}$, podemos suponer

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = R\}, \quad 0 < R < \infty$$

y aplicando sistemáticamente la invariancia de la razón cruzada para una aplicación de Möbius (véase la proposición 8.3.9), podemos concluir que:

$$\begin{aligned} (z^*, z_2; z_3, z_4) &= \overline{(z, z_2; z_3, z_4)} = \overline{(z - a, z_2 - a; z_3 - a, z_4 - a)} \\ &= \left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}; \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a} \right) = \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_2; z_3, z_4 \right). \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra que el punto simétrico de z es $z^* = a + R^2(\bar{z} - \bar{a})^{-1}$, o equivalentemente z y z^* satisfacen la relación

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2.$$

Consecuentemente, el producto de las distancias de z y z^* al centro es R^2 , esto es, $|z - a| \cdot |z^* - a| = R^2$. Además,

$$\frac{z^* - a}{z - a} = \frac{R^2}{|z - a|^2} > 0,$$

lo cual significa que z y z^* están en la misma semirrecta con punto inicial a .

Supongamos ahora que $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}$, si z es un punto en el interior de la región acotada por $\mathcal{C}$, hay una construcción geométrica muy simple para z^* , la cual describimos en la figura 8.8:

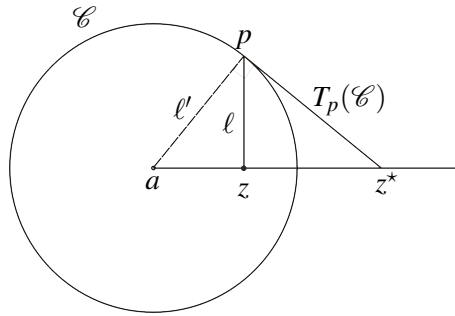


Figura 8.8: El punto z^* es el simétrico de z con respecto a $\mathcal{C}$

- Considere la semirrecta que pasa por z e inicia en a .
- Considere la perpendicular ℓ a la semirrecta anterior y que pasa por z .
- Sea p el punto de intersección de ℓ con $\mathcal{C}$.
- Considere la recta tangente $T_p \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ en el punto p .
- Al estudiar la semejanza de los triángulos $\triangle apz^*$ y $\triangle azp$ es claro que z^* es el punto de intersección de la semirrecta az con $T_p \mathcal{C}$.

De manera similar, si z es un punto en el exterior de la región acotada por $\mathcal{C}$, procedemos de la siguiente forma

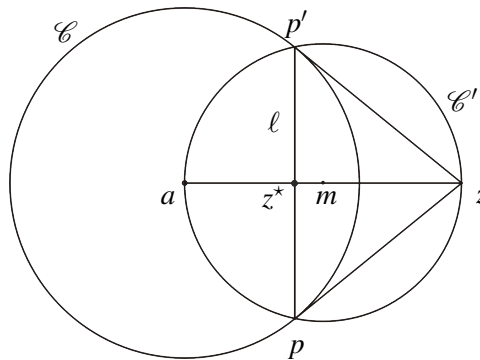


Figura 8.9: El punto z^* es el simétrico de z con respecto a $\mathcal{C}$

- Trazamos el segmento ℓ que une los puntos a y z .
- Se toma el punto medio m del segmento ℓ .
- Se traza la circunferencia $\mathcal{C}'$ por a con centro en m .
- Sean p y p' los puntos donde intersectan las circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. Las rectas zp y zp' son las tangentes a $\mathcal{C}$ por el punto exterior z .

- Tomamos el segmento de recta ℓ' que une p con p' .
- El punto z^* es el punto de intersección de ℓ con ℓ' , lo cual se deduce de la semejanza de los triángulos rectángulos $\triangle apz$ y $\triangle apz^*$, véase la figura 8.9.

En particular, los puntos a e ∞ son simétricos con respecto a $\mathcal{C}$.

Proposición 8.4.1 — El principio de simetría. Si una aplicación de Möbius manda la circunferencia $\mathcal{C}_1$ sobre la circunferencia $\mathcal{C}_2$, entonces cualquier par de puntos simétricos con respecto a $\mathcal{C}_1$ se transforman bajo T en un par de puntos simétricos con respecto a $\mathcal{C}_2$.

Demostración. Si z_2, z_3 y z_4 son tres puntos distintos en $\mathcal{C}_1$, si z y z^* son simétricos con respecto a $\mathcal{C}_1$, y T es una aplicación de Möbius que transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$, entonces

$$(z^*, z_2; z_3, z_4) = \overline{(z, z_2; z_3, z_4)}.$$

Como consecuencia de la proposición 8.3.9 tenemos que:

$$\begin{aligned} (T(z^*), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) &= (z^*, z_2; z_3, z_4) \\ &= \overline{(z, z_2; z_3, z_4)} \\ &= \overline{(T(z), T(z_2); T(z_3), T(z_4))} \end{aligned}$$

Luego entonces $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos con respecto a $\mathcal{C}_2$. ■

8.5 Otros ejemplos de aplicaciones conformes

8.5.1 La aplicación de Joukowski

La aplicación de Joukowski en el plano complejo, es la más simple de un conjunto de transformaciones de la forma

$$J(z) = a_0 z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

Estas modifican el plano sensiblemente para valores pequeños de z , pero $J(z) \sim a_0 z$ cuando $|z| \rightarrow \infty$.

Además, como veremos en la subsección 8.5.2, página 249, la aplicación de Joukowski nos ayuda a entender el comportamiento geométrico de las funciones trigonométricas, las cuales son de suma importancia en el estudio de la matemática, así como en los problemas de aplicaciones relacionados con fenómenos que muestren comportamientos periódicos o casiperiódicos.

Definición 8.5.1 La aplicación $J : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por

$$J(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) & \text{si } z \neq 0, \infty \\ \infty & \text{si } z = 0, \infty \end{cases}$$

se denomina la aplicación de Joukowski.

Usando la definición 4.4.1 se comprueba fácilmente que, si $z \neq 0, \infty$, entonces $J'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$, mientras que $J'(0) = J'(\infty) = 2$, y es fácil mostrar que $J'(z) = 0$ si, y únicamente si, $z = \pm 1$. Luego entonces J es conforme en cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{\pm 1\}$.

En los problemas concretos de representación conforme, frecuentemente hay que averiguar cuándo la función es inyectiva en un abierto Ω contenido en su dominio. Una condición necesaria para ello es que su derivada no se anule en Ω , pero como la condición no es suficiente, el problema se debe afrontar directamente para la función concreta.

En particular, la condición $J(z_0) = J(z_1)$, con $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ se escribe como

$$(z_0 - z_1) \left(1 - \frac{1}{z_0 z_1} \right) = 0,$$

luego entonces $J(z_0) = J(z_1)$ con $z_0 \neq z_1$ si, y solamente si, $z_0 z_1 = 1$. En toda vecindad de ± 1 existen puntos $z_0 \neq z_1$ con $z_0 z_1 = 1$, esto es, $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{\pm 1\}$ es una condición necesaria para que $J|_\Omega$ sea inyectiva. Una condición más fuerte que es necesaria y suficiente para la inyectividad de $J|_\Omega$ es la dada en la siguiente proposición.

Proposición 8.5.1 Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{\pm 1\}$, la condición $z \in \Omega$ con $1/z \notin \Omega$ es una condición necesaria y suficiente para que $J|_\Omega$ sea inyectiva. En este caso J establece un isomorfismo conforme entre Ω y su imagen $J(\Omega)$.

Demostración. Si $J|_\Omega$ es inyectiva, de acuerdo con lo visto anteriormente si $z \in \Omega$, entonces $1/z \notin \Omega$. Por otra parte, para caracterizar los abiertos Ω sobre los cuales $J|_\Omega$ es inyectiva debemos encontrar los abiertos contenidos en $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ y considerar el conjunto $S_\omega = \{z \in \mathbb{C}_\infty; J(z) = \omega\}$. Nótese que $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{\pm 1\}$ implica que $J(\Omega) \cap \{\pm 1\} = \emptyset$, por lo que podemos suponer que $w \notin \{\pm 1\}$.

Si $w \neq \infty$, la ecuación $J(z) = \omega$ tiene dos soluciones distintas $z_0, z_1 = 1/z_0 \in \mathbb{C}$, a saber, las soluciones de la ecuación de segundo orden $z^2 - 2wz + 1 = 0$.

Cuando $w = \infty \in J(\Omega)$ la ecuación $J(z) = \infty$ también tiene dos soluciones distintas $z_0 = 0$ y $z_1 = \infty$.

Así, la condición del enunciado garantiza que para cada $\omega \in J(\Omega)$ el conjunto $S_\omega \cap \Omega$ sólo tiene un elemento, luego entonces $J|_\Omega$ es inyectiva.

Finalmente, como $J'(z) \neq 0$, tenemos que $J|_\Omega : \Omega \rightarrow J(\Omega)$ es un isomorfismo conforme. ■

Es claro que los abiertos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ y $\mathbb{H}_+ = \{z; \text{Im } z > 0\}$ cumplen la condición de la proposición 8.5.1, de modo que J establece isomorfismos conformes entre cada uno de ellos y sus imágenes. Siguiendo la filosofía de la primera sección, tenemos que

$$u(x, y) = \text{Re } J(z) = \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2}\right),$$

y

$$v(x, y) = \text{Im } J(z) = \left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}\right).$$

Si $c \in \mathbb{R}$ es constante, entonces

$$u(c, y) = \left(\frac{c}{2}\right) \left(\frac{c^2 + y^2 + 1}{c^2 + y^2}\right), \text{ de donde } y^2 = \frac{c(c^2 + 1 - 2uc)}{2u - c},$$

reemplazando este valor en $v^2(c, y)$ obtenemos la ecuación cúbica:

$$v^2 c(2u - c) = (c - u)^2 (c^2 - 2uc + 1).$$

Procediendo de manera análoga, si $d \in \mathbb{R}$ es constante, entonces

$$v(x, d) = \left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{x^2 + d^2 - 1}{x^2 + d^2}\right),$$

de donde $x^2 = \frac{d^3 - 2vd^2 - d}{2vd}$, y reemplazando este valor en $u^2(x, d)$ obtenemos la ecuación cúbica:

$$d(2v - d)u^2 = -4vd^3 + 5v^2d^2 - 2v^3d + d^4 - d^2 + 2vd - v^2.$$

En la figura 8.10, página 243 mostramos el efecto que tiene la transformación de Joukowski en las rectas $x = \text{Re } z = c$, $y = \text{Im } z = d$ para $-2.5 < c, d < 2.5$

Una descripción de la aplicación de Joukowski que resulta útil para estudiar el efecto que tiene esta transformación sobre una región determinada es la siguiente:

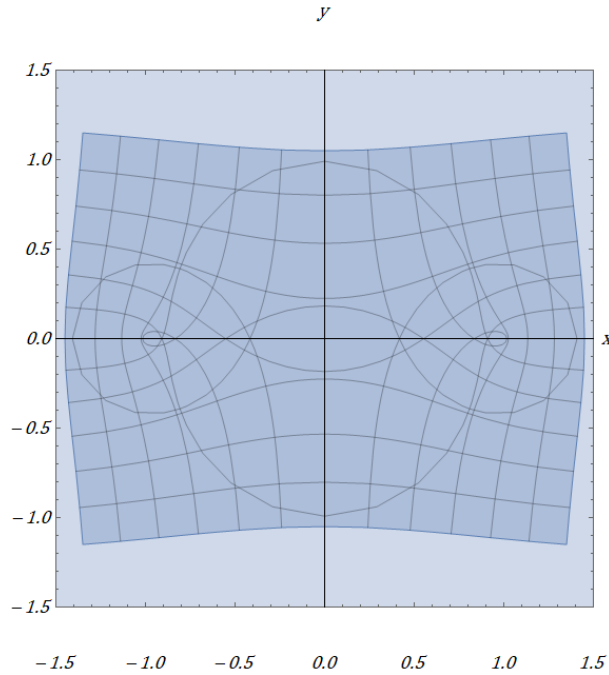


Figura 8.10: La imagen bajo $J(z)$ de una familia de rectas.

Proposición 8.5.2 La transformación $J : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$J(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) & \text{si } z \neq 0, \infty \\ \infty & \text{si } z = 0, \infty \end{cases}$$

se puede descomponer como:

$$J(z) = (T^{-1} \circ f \circ T)(z), \quad (8.3)$$

donde $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ y $f(z) = z^2$.

En particular, esta descomposición nos permite obtener la imagen $J(\mathbb{D})$ del disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ y la imagen $J(\mathbb{H}_+)$ del semiplano superior $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z > 0\}$, a saber:

$$J(\mathbb{D}) = \mathbb{C}_\infty \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 1\} \text{ y } J(\mathbb{H}_+) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}.$$

Demostración. Como $T^{-1}(z) = (z+1)/(1-z)$, entonces

$$(T^{-1} \circ f \circ T)(z) = T^{-1} \left(\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

A continuación usaremos esta descomposición para estudiar las regiones $J(\mathbb{D})$ y $J(\mathbb{H}_+)$.

Primeramente notamos que $T(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$, y $f(z) = z^2$ establece un isomorfismo conforme entre el semiplano superior $\mathbb{H}_+$ y $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$. Además T^{-1} transforma el semieje real positivo en $\{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}$, así tenemos que

$$J(\mathbb{H}) = T^{-1}(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 1\}.$$

Análogamente, $T(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C}; \text{Re } z < 0\} = \mathbb{H}_\ell$, y $f(\mathbb{H}_\ell)$ es el abierto $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$, de donde

$$J(\mathbb{D}) = T^{-1}(\Omega') = \mathbb{C}_\infty \setminus \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}.$$

La descomposición de $J_{|\mathbb{H}_+}$ como

$$\mathbb{H}_+ \xrightarrow{T} \mathbb{H}_+ \xrightarrow{f} \Omega \xrightarrow{T^{-1}} J(\mathbb{H}_+)$$

permite obtener una fórmula explícita para la inversa de $J_{|\mathbb{H}_+}$. La inversa de $f : \mathbb{H}_+ \rightarrow \Omega$ es $h(z) = i\sqrt{-z}$, luego entonces, para la inversa de $J_{|\mathbb{H}_+}$ se tiene la fórmula

$$w = (T^{-1} \circ h \circ T)(z) = \frac{1 + h(T(z))}{1 - h(T(z))}$$

multiplicando numerador y denominador por $1 + h(T(z))$ la fórmula se simplifica a

$$w = z + i(1+z)\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

De manera análoga, si usamos la descomposición de $J_{|\mathbb{D}}$ dada por:

$$\mathbb{D} \xrightarrow{T} \mathbb{H}_\ell \xrightarrow{f} \Omega' \xrightarrow{T^{-1}} J(\mathbb{D})$$

y usando que $g(z) = -\sqrt{z}$ es la inversa de $f : \mathbb{H}_\ell \rightarrow \Omega'$ se tiene que la inversa de $J_{|\mathbb{D}}$ es:

$$w = (T^{-1} \circ g \circ T)(z) = \frac{1 - \sqrt{T(z)}}{1 + \sqrt{T(z)}},$$

cuando $z \neq \infty$ se puede simplificar la fórmula a

$$w = z - (z+1)\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}.$$

■

Una de las aplicaciones de ésta función es el estudio de perfiles aerodinámicos.

En aeronáutica se denomina perfil aerodinámico, o simplemente perfil, a la forma del área transversal de un elemento, que al desplazarse a través del aire es capaz de crear a su alrededor una distribución de presiones que genere sustentación.

El diseño aerodinámico de las alas de los aviones existe una inmensa variedad de perfiles aerodinámicos, no obstante, la forma básica es siempre la misma: El perfil tiene un borde redondeado, llamado borde de ataque, que se enfrenta a la corriente incidente y un borde de salida, llamado borde de fuga en la parte posterior.

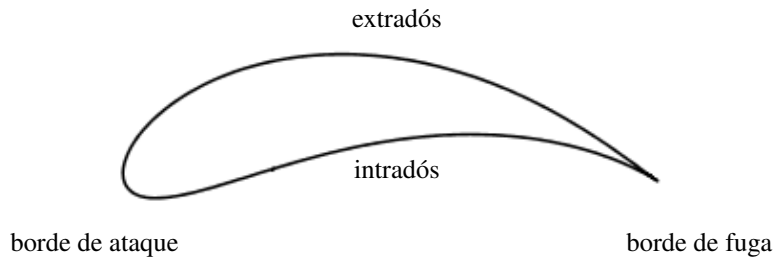


Figura 8.11: Componentes del perfil aerodinámico

Normalmente los perfiles se dibujan horizontales denominándose extradós o cara de succión a la parte superior del perfil de aspecto convexo e intradós o cara de presión a la inferior de aspecto cóncavo. Cada una de estas características geométricas cumplen funciones específicas que juntas caracterizan el eficaz comportamiento aerodinámico de los perfiles.²

Una de las aplicaciones que se le ha dado a la aplicación de Joukowski es que convierte a una circunferencia de radio $a > 1$ en la forma de un perfil aerodinámico, véase la figura 8.12.

²Proviene del latín *intra*, dentro y *dorsum*, dorso. Se contrapone con la voz *trasdós* o *extradós*.

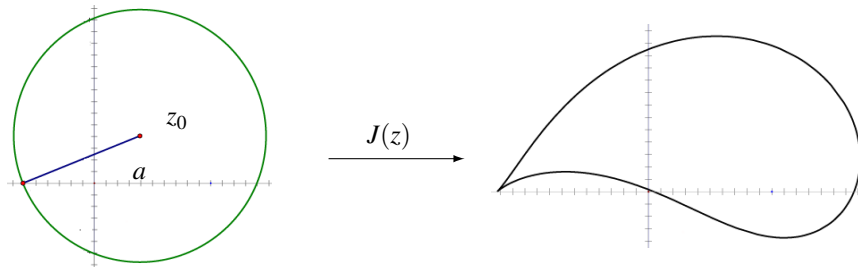


Figura 8.12: Perfil de Joukowski

El comportamiento del aire al pasar por el borde del ala, se puede estudiar en términos del comportamiento del aire al pasar por la circunferencia y la aplicación conforme asociada.

Una aplicación conforme en todo el plano z , aplicada a una circunferencia, no podría generar un perfil con borde de fuga afilado, porque cualquier quiebre en la curva violaría la conservación de ángulos que impone la condición de ser conforme. Pero en este caso, si uno de los puntos de la circunferencia es $z = \pm 1$, en la imagen de ese punto puede aparecer un quiebre en la curva: ese punto se transforma en el borde de fuga del perfil. En el ejemplo de la figura 8.12, es el punto $z = -1$. Como el punto $z = 1$ queda en el interior del círculo, su imagen queda dentro del perfil, y no afecta los ángulos que lo tienen como vértice, ni el campo de flujo alrededor del mismo.

Examinemos la aplicación de Joukowski $J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. En coordenadas cartesianas escribamos $z = x + iy$ y $J(z) = u + iv$, entonces

$$u + iv = \frac{1}{2} \left((x + iy) + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right)$$

lo cual implica que

$$u = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right), \quad v = \frac{y}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right). \quad (8.4)$$

Las coordenadas de los puntos en la circunferencia original se obtienen de la ecuación

$$\gamma(t) = z_0 + ae^{it}, \quad \text{con } 0 \leq t < 2\pi.$$

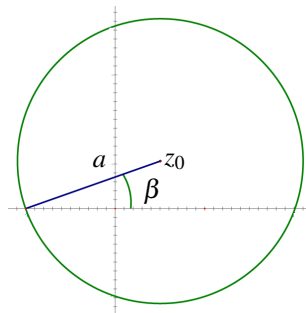


Figura 8.13: Círculo que pasa por -1 con radio a y ángulo β

Las coordenadas del centro del círculo quedan determinadas por su radio a , y por el ángulo β que muestra la figura 8.13, de modo que el punto $z = -1$ sea la intersección de la circunferencia con el eje real negativo.

A continuación analizaremos algunos casos particulares:

1. TRANSFORMACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CENTRADA EN EL ORIGEN: En el caso general, con $1 < a$, la transformación es conforme en todos los puntos de la circunferencia. La ecuación de tal circunferencia es:

$$\gamma(t) = ae^{it}, \text{ con } 0 \leq t < 2\pi, \quad (8.5)$$

o equivalentemente $x^2 + y^2 = a^2$. Si se despejan x y y en función de u y v (ecuación 8.4) obtenemos

$$x = \frac{u}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)}, \quad y = \frac{v}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}$$

y considerando la ecuación 8.5, obtenemos:

$$\left(\frac{\frac{u}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)}}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\frac{v}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)}\right)^2 = a^2,$$

es decir,

$$\left(\frac{\frac{u}{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)}}{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\frac{v}{\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)}}{\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)}\right)^2 = 1, \quad (8.6)$$

que es la ecuación de una elipse.

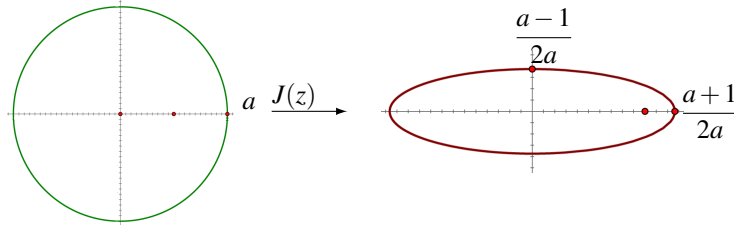


Figura 8.14: Imagen de $\gamma(t) = ae^{it}$ bajo $J(z)$ para $a > 1$.

En el caso límite en que $a = 1$ la circunferencia se transforma en el segmento del eje real $-1 \leq x \leq 1$. Se observa que si $a = 1$, los puntos $z = \pm 1$ pertenecen a la circunferencia, y se transforman en $J(z) = \pm 1$ respectivamente. En este caso no es aplicable la ecuación (8.6), ya que el denominador del segundo término se anula. Sin embargo, en coordenadas polares la transformación es muy sencilla:

$$J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Al variar θ , el segmento es recorrido dos veces, desde 1 hasta -1 y viceversa.

2. TRANSFORMACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA CENTRADA EN $(0, y_0)$: La ecuación de la circunferencia con centro $(0, y_0)$ y radio a está dada por

$$x^2 + (y - y_0)^2 = a^2 \quad \text{o bien} \quad \gamma(t) = iy_0 + ae^{it} \quad \text{con } 0 \leq t < 2\pi.$$

Entonces J establece un isomorfismo conforme entre el interior (respectivamente exterior) de la región limitada por γ en $\mathbb{C}_\infty$ y el complemento de un arco de circunferencia que pasa por ± 1 e iy_0 . Para ver esto, notamos que bajo $T(z) = (z-1)/(z+1)$ la circunferencia γ se transforma en una línea recta. Luego $H = T(\Omega)$ es un semiplano abierto, la imagen G de este semiplano bajo $f(z) = z^2$ es el complemento de una semirrecta que parte del origen. Por otro lado $J(\Omega) = T^{-1}(G)$ es el complemento de un arco de circunferencia de extremos $T^{-1}(0) = 1$ y $T^{-1}(\infty) = -1$. Como la circunferencia con centro en iy_0 tiene radio a y pasa por los puntos ± 1 , entonces $a^2 = 1 + y_0^2$, de donde, $J(iy_0) = iy_0$, tenemos así que la circunferencia $\gamma(t) = iy_0 + ae^{it}$ se transforma en el arco de circunferencia que pasa por los puntos $1, -1, iy_0$, como podemos apreciar en la figura 8.15.

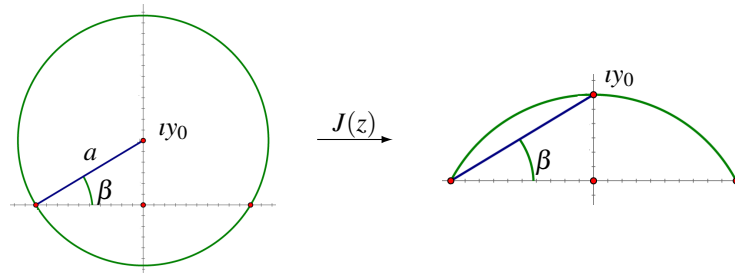


Figura 8.15: Imagen de $\gamma(t) = iy_0 + ae^{it}$ bajo $J(z)$

También aquí, el límite cuando $y_0 \rightarrow 0$ es el segmento $[-1, 1]$.

3. TRANSFORMACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CENTRADA EN $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$: Este caso corresponde al parámetro $\beta = 0$. La transformación da un perfil simétrico, como se muestra en la figura 8.16.

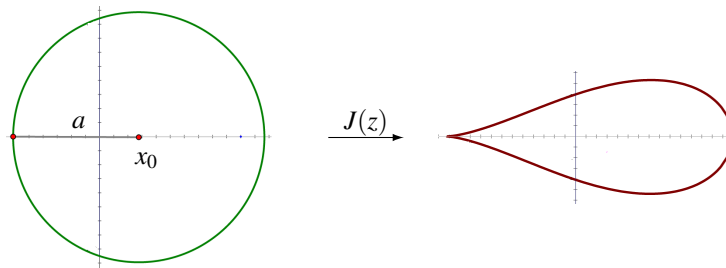


Figura 8.16: Imagen de $\gamma(t) = x_0 + ae^{it}$ bajo $J(z)$

El punto $z = -1$ se convierte en el punto $J(-1) = -1$, que es el borde de fuga del perfil. La imagen del punto $z = 1$, $J(1) = 1$ queda en el interior del perfil. El borde de ataque es la imagen del punto $z = x_0 + a = 2x_0 + 1$ (cruce con el eje x), y es el punto $J(x_0 + a)$.

4. CASO GENERAL: CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN $z_0 = (x_0, y_0)$: En este caso la circunferencia se transforma en un perfil no simétrico, como puede apreciarse en la figura 8.17.

De los ejemplos vistos, se puede inferir que los parámetros que determinan la forma del perfil son las coordenadas del centro de la circunferencia. En particular:

- La coordenada x_0 relacionada con el cociente $1/a$, determina el espesor del perfil resultante. Los casos en que el centro cae sobre el eje y , con $x_0 = 0$, dan arcos de circunferencia.
- La coordenada y_0 relacionada con el ángulo β , determina la curvatura de la línea media del perfil. Los casos en que el centro cae sobre el eje x ($\beta = 0$) dan perfiles simétricos, es decir, su línea media es el segmento de recta que constituye el eje de simetría

Una antigua construcción gráfica para $J(z) = z + b^2/z$, sin calcular componentes, sigue los

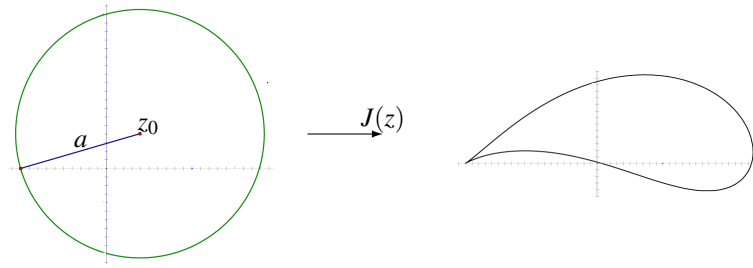


Figura 8.17: Imagen de $\gamma(t) = z_0 + ae^{it}$ bajo $J(z)$

siguientes pasos, como se muestra en la siguiente figura:⁴

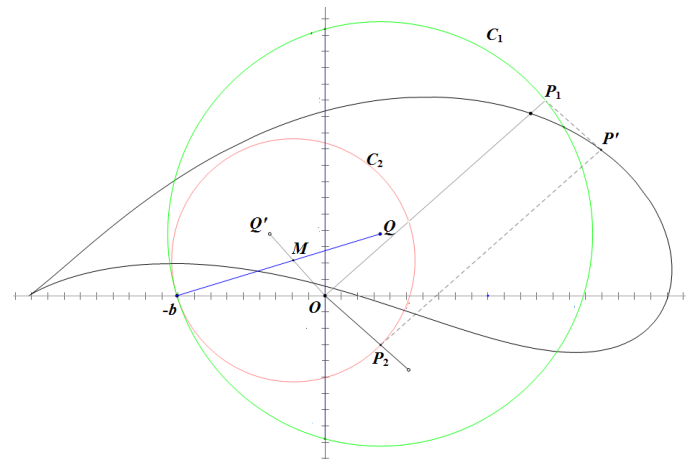


Figura 8.18: Perfil de Joukowski $J(z) = z + b^2/z$

1. Desde el origen de coordenadas O se marca el punto $z = -b$.
2. Desde $z = -b$, con ángulo β y a una distancia a , se ubica el centro del círculo al que llamaremos Q .
3. Con centro Q y radio a , se traza la circunferencia C_1 , que es la que se quiere transformar.
4. El segmento OQ y el eje y determinan el ángulo δ .
5. Con el mismo ángulo δ medido desde el eje y hacia la dirección negativa de x , se traza el segmento OM , donde M es el punto de intersección con OQ .
6. Con centro en M y radio $(-b)M$, se traza la circunferencia C_2 .
7. Para trazar el perfil, se dan valores a θ desde 0 a 2π . Con θ , se determina sobre C_1 el punto $P_1 : z = re^{i\theta}$, y con $-\theta$, sobre C_2 queda el punto $P_2 : \frac{b^2}{z} = \frac{b^2}{r}e^{-i\theta}$.
8. La suma vectorial de ambos (por el método gráfico del paralelogramo), da el punto P' que pertenece al perfil, y es la imagen de P_1 . Recorriendo todos los valores de θ , queda dibujado el perfil de Joukowski.

La forma de este perfil presenta el extradós y el intradós tangentes en el borde de fuga (el perfil tiende a un espesor nulo en ese punto). Esto es un problema tanto desde el punto de vista constructivo, como desde el de resistencia estructural. Por otro lado, las características aerodinámicas tampoco son buenas: el mínimo de presión está muy cerca del borde de ataque, por lo que el flujo debe recorrer gran parte del extradós con un gradiente de presión adverso. Hay otras aplicaciones conformes que generan mejores perfiles, sin embargo, la aplicación de Joukowski fue la primera explorada analíticamente.

⁴Véase el artículo Trefftz, E. *Graphic construction of Joukowski wings*, from: "Zeitschrift für Flugtechnik Motorluftschiffahrt", Technical Memorandums, National Advisory Committee for Aeronautics, No. 336, May 31, 1913, reimpresso en Washington, October, 1925, pp. 17-26, puede conseguirse en la siguiente liga: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930090787.pdf>.

8.5.2 Funciones trigonométricas

Consideremos la función $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, esta función puede escribirse como

$$\cos(z) = (J \circ \exp \circ \varphi)(z)$$

donde $\varphi(z) = iz$ es una rotación por $\pi/2$, $\exp(z)$ es la función exponencial, y $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ es la aplicación de Joukowski. Ahora bien, como $\varphi'(z) = i$, tenemos que φ es un automorfismo conforme de $\mathbb{C}_\infty$. Además, la función exponencial es inyectiva en cualquier región del tipo

$$W_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Im} z < b\} \text{ con } b - a \leq 2\pi.$$

Finalmente, la aplicación de Joukowski J es inyectiva en $\mathbb{D}$, el disco unitario abierto.

Consideremos ahora la región

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z\},$$

como $\varphi(z) = iz$ corresponde a una rotación de $\pi/2$ radianes en levógiro, entonces

$$\Omega' = \varphi(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Si $z \in \Omega'$, y $x = \operatorname{Re} z$ entonces $|e^z| = e^x < 1$, y como la función exponencial es inyectiva en Ω' , tenemos que la imagen de Ω' bajo la función exponencial corresponde al interior del disco unitario con centro en el origen, esto es, $\exp(\Omega') = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Como hemos visto anteriormente,

$$J(\mathbb{D}) = \mathbb{C}_\infty \setminus \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\},$$

es decir, tenemos la siguiente situación:

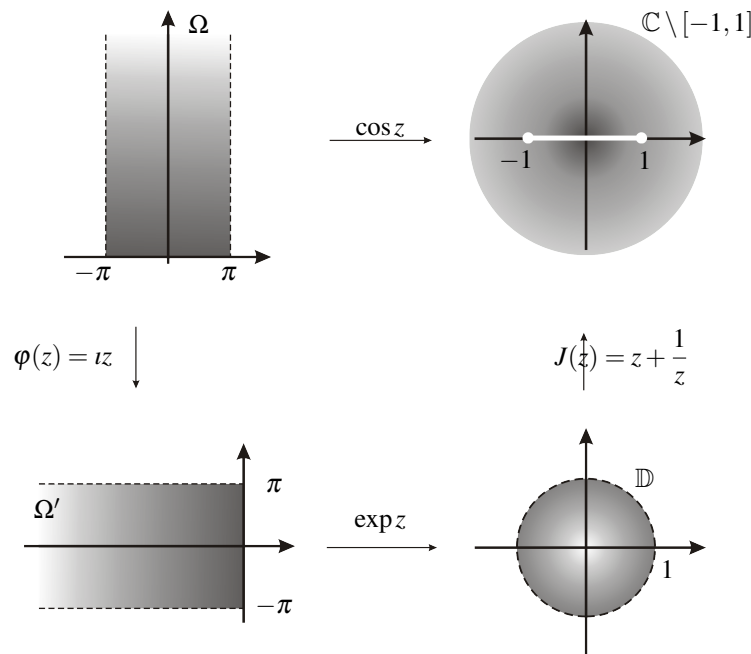


Figura 8.19: La función $\cos z$

Como $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$ y $\cos(z - \frac{\pi}{2}) = \sin z$, si ahora tomamos

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}; -\frac{3\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, 0 < \operatorname{Im} z\},$$

tenemos que la imagen de esta región Ω nuevamente es $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Si ahora consideramos la función

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}},$$

esto es:

$$\tan z = (T \circ \psi \circ \exp \circ \varphi)(z),$$

donde $\varphi(z) = iz$, $\exp$ es la función exponencial, $\psi(z) = z^2$ y $T(z) = i \frac{1-z}{1+z}$.

Para $a \in \mathbb{R}$ una constante fija, consideremos la recta $\ell_a = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = a\}$, su imagen bajo φ es ahora la recta $L_a = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = a\}$. La imagen bajo la función exponencial de esta recta es la semirrecta que parte del origen con pendiente a . A su vez, la imagen de esta semirrecta bajo la función $\psi(z) = z^2$ es la semirrecta que parte del origen con pendiente $2a$, y bajo la transformación de Möbius T , la imagen de esta semirrecta es una semicircunferencia.

De manera similar, si $b \in \mathbb{R}$ es una constante fija, y $L_b = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = b\}$, entonces su imagen bajo φ es la recta $\ell_b = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = -b\}$. La imagen de esta recta bajo la función exponencial es la circunferencia con centro en el origen y radio e^{-b} . Bajo la función $\psi(z) = z^2$ esta circunferencia se transforma en la circunferencia con centro en el origen y radio e^{-2b} . Finalmente, bajo la transformación T esta circunferencia se transforma en una circunferencia. En particular, las rectas $\operatorname{Re} z = -\frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$ se transforman en las dos mitades de la circunferencia unitaria.

8.6 Algunas aplicaciones de las transformaciones conformes

Las transformaciones conformes tienen una gran cantidad de aplicaciones, tanto en matemáticas como en otras áreas de la ciencia, tales como física, ingeniería, hidrodinámica, óptica entre otras. En la presente sección mencionaremos algunas de ellas, y daremos algunas referencias para aquellos que deseen profundizar más en el tema.

Un ejemplo geométrico de ello es la siguiente generalización de uno de los problemas de Apolonio:⁵

Consideremos $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ dos circunferencias en $\mathbb{C}$ tangentes una a la otra en un único punto z_0 , y supongamos que $\mathcal{C}_1$ está contenida en el interior de $\mathcal{C}_0$. Consideremos además $\{\mathcal{C}_k\}_{k=2}^n$ una cadena de circunferencias sucesivamente tangentes entre sí, y a su vez tangentes a $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ como se muestra en la figura 8.20.

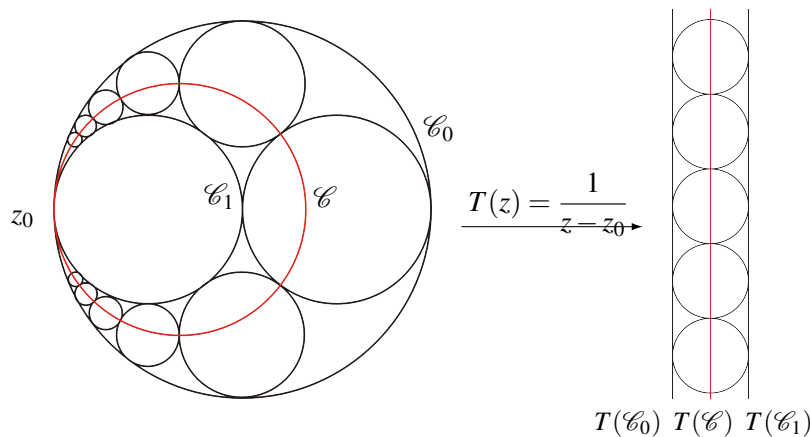


Figura 8.20: Familia de circunferencias mutuamente tangentes

Usando la geometría de las transformaciones conformes es fácil ver que los puntos de tangencia de todas las circunferencias $\mathcal{C}_k$ están sobre una misma circunferencia $\mathcal{C}$. Para esto, si $T(z) = \frac{1}{z - z_0}$

⁵Los problemas de tangencias de Apolonio: Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados.

tenemos que $T(z_0) = \infty$ y las circunferencias $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ se transforman en dos rectas paralelas. y la cadena de circunferencias tangentes en un haz de circunferencia tangentes a esas dos rectas paralelas, luego sus puntos de tangencia están en otra recta $T(\mathcal{C})$ paralela a $T(\mathcal{C}_0)$ y $T(\mathcal{C}_1)$ que la transformación inversa transforma en una circunferencia que pasa por los puntos de tangencia del haz original.

Otro ejemplo interesante es el siguiente, consideremos dos circunferencias no concéntricas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, de manera que $\mathcal{C}_2$ esté propiamente contenida en el interior de $\mathcal{C}_1$. Deseamos encontrar una transformación conforme T tal que $T(\mathcal{C}_1)$ y $T(\mathcal{C}_2)$ sean dos circunferencias concéntricas.

Con el fin de simplificar los cálculos podemos suponer que $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, y que $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z - c| = c\}$ es una circunferencia con centro en c que pasa por el origen, donde $c \in \mathbb{R}$ es un punto tal que $0 < c < 1/2$, véase la figura 8.21, página 251.

Como una aplicación de la forma

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad \text{con } |\alpha| < 1$$

transforma el disco unitario en sí mismo y las aplicaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias podemos encontrar un valor explícito para α que transforme $\mathcal{C}_2$ en la circunferencia con centro en el origen y radio r , esto es, $\{z \in \mathbb{C}; |z| = r\}$. Para lo cual, elegiremos $\alpha \in \mathbb{R}$ en forma tal que $T(0) = -r$ y $T(2c) = r$.

De donde $-r = T(0) = \alpha$ y $r = T(2c) = \frac{2c - \alpha}{\bar{\alpha}2c - 1}$, lo cual implica que $2c - \alpha = (\bar{\alpha}2c - 1)(-\alpha)$. Obteniéndose así la siguiente ecuación cuadrática

$$c\alpha^2 - \alpha + c = 0$$

y como $0 < c < 1/2$ sus soluciones reales están dadas como

$$\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4c^2}}{2c} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c^2}}{2c}$$

pero $\alpha_1 > 1$, por lo que este valor no es admisible, y $0 < \alpha_2 < 1$, por lo que

$$T(z) = \frac{z - \alpha_2}{\bar{\alpha}_2 z - 1} = \frac{z - \frac{-1 - \sqrt{1 - 4c^2}}{2c}}{\frac{-1 - \sqrt{1 - 4c^2}}{2c}z - 1} = \frac{2cz - (1 - \sqrt{1 - 4c^2})}{(1 - \sqrt{1 - 4c^2})z - 2c}.$$

Nótese que el radio de la circunferencia $T(\mathcal{C}_2)$ no necesariamente es el mismo que el de $\mathcal{C}_2$.

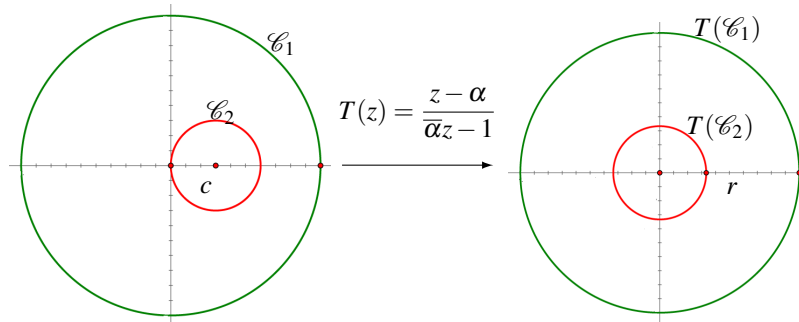


Figura 8.21: T transforma circunferencias no concéntricas en circunferencias concéntricas

La cartografía estudia el problema de transferir las distancias medidas sobre la superficie de la Tierra, la cual es una superficie con curvatura en un mapa, el cual resulta ser una superficie plana. Los métodos que se utilizan para realizar este trabajo se denominan proyecciones. Algunas

proyecciones son tales que, los ángulos y consecuentemente las formas, son tan cercanas a la realidad como sea posible.

Históricamente, la proyección desarrollada en 1569 por Gerhardus Mercator, es una proyección cilíndrica conforme.

Este sistema ha sido muy utilizado para la navegación por su sencillez de manejo. Los navíos en alta mar al dirigirse de un punto a otro no siguen una línea recta, sino que describen una línea denominada línea loxodrómica, que corta a los meridianos con el mismo ángulo, es decir mantiene el rumbo constante. Al representar esta línea loxodrómica en una proyección de Mercator, esta se transforma en una línea recta que une los puntos de origen y destino, cortando a todos los meridianos con el mismo ángulo.

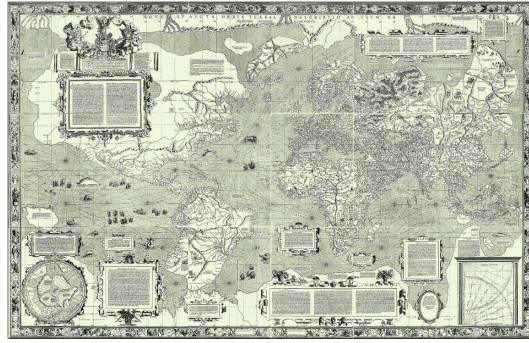


Figura 8.22: Proyección de Mercator, 1569. Imagen tomada de Wikipedia.org

Gauss confirmó este hecho en su trabajo “*Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.*” (K. F. Gauss, 1894, pg. 55-81) que podemos traducir al español como “*Una solución general al problema de transformar partes de una superficie en otra superficie de manera que la imagen y las partes transformadas sea similares a pequeña escala*”. En esencia este resultado nos habla de la existencia de coordenadas isotermas en el caso analítico. Cabe recalcar que este estudio precede y es en parte motivado por el trabajo de Gauss en el que se desarrolla la noción de curvatura de una superficie. Otro hecho importante es la conexión que hay entre las coordenadas isotermas y las funciones holomorfas en una variable compleja, por ejemplo, la proyección de Mercator básicamente está dada como $z \mapsto \log z$, la cual es holomorfa. El aspecto global de esta teoría lo constituyen las superficies de Riemann.

La relación entre lo local y lo global es uno de los principales objetivos de la geometría conforme: a saber, poder entender la geometría diferencial desde un punto de vista clásico, es decir, separar los aspectos analíticos de los topológicos para entenderlos de la mejor forma posible, y relacionarlos con las nociones primitivas de la geometría tales como ángulo, distancia, área, líneas rectas (geodésicas), etcétera.

El “teorema de la aplicación de Riemann” nos dice que si Ω es un subconjunto abierto y simplemente conexo contenido propiamente en el plano complejo $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$; entonces existe una única aplicación conforme y biyectiva f que transforma el conjunto Ω en el disco unitario con centro en el origen, tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0)$ es un número real positivo.

Este teorema, es ampliamente utilizado para reducir el estudio de un problema en una región complicada a una región más simple.

Muchos problemas que plantea la Física se resuelven buscando soluciones de la ecuación de Laplace, véase el capítulo 9:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Esta ecuación tiene solución, pero no es única; sin embargo, cuando se establecen condiciones iniciales o condiciones de contorno, se estudia bajo qué condiciones dicha solución sí es única.

El problema de hallar una función armónica en un dominio específico que satisfaga sobre su contorno condiciones previamente establecidas es muy importante en matemática aplicada. Si se conocen los valores de la función sobre la frontera el problema se denomina como un problema de contorno de primera especie, o problema de Dirichlet. Si se conocen los valores de la derivada normal a la función sobre la frontera, se dice que es un problema de contorno de segunda especie, o problema de Neumann.

Problema de Dirichlet: Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces en un dominio Ω que satisfaga la ecuación de Laplace en todo punto de dicho dominio, es decir, tal que $u(x, y)$ sea armónica, cuyos valores en todo punto de la frontera de Ω están especificados. La solución de este problema está determinada en forma única.

Problema de Neumann: Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces en un dominio Ω que verifique la ecuación de Laplace en todo punto de dicho dominio, suponiendo que se conoce la derivada direccional de la función u en la dirección del vector normal a la curva que define la frontera de Ω .

Los dominios más frecuentes son simplemente conexos, y como una función armónica en un dominio simplemente conexo tiene siempre asociada una armónica conjugada, en ocasiones la solución de un problema de contorno para tales dominios es la parte real o imaginaria de una función $\mathbb{C}$ -diferenciable. El éxito de este procedimiento depende de la simplicidad del problema. Un problema de Dirichlet se transforma mediante una aplicación conforme en otro problema de Dirichlet, y un problema de Neumann se transforma en un problema de Neumann.

Las condiciones de contorno mencionadas pueden quedar inalteradas bajo cambios de variables asociados a una aplicación conforme. La técnica básica consiste en transformar un problema de contorno dado en el plano xy en otro más sencillo en el plano uv , resolverlo, y escribir la solución del problema original en términos de la solución obtenida para el más sencillo.

Se pueden utilizar las transformaciones conformes para resolver problemas relativos a la ecuación de Laplace en dos variables independientes, lo que permitirá comentar aplicaciones sobre conducción térmica, potencial electrostático o flujo de fluidos.

Por ejemplo, las aplicaciones conformes han sido utilizadas para estudiar problemas de fluidos en dos dimensiones. La idea, que se encuentra detrás del análisis del alerón por medio de transformaciones conformes, la cual consiste en relacionar el flujo de un campo alrededor de una región conocida con el campo del flujo de un alerón.

La figura conocida más usada es el círculo, así el problema consiste en encontrar una función holomorfa que relacione cada punto del disco con un punto correspondiente del alerón. Por ejemplo, Joukowski notó que la aplicación $z \mapsto z + 1/z$ transforma el círculo unitario en una especie de ala. Tomando el origen en diversos puntos del disco se pueden producir distintos tipos de alerones. Véase, por ejemplo, los artículos:

Benson, J. Thomas. Interactive Educational Tool for Classical Airfoil Theory, NASA Lewis Research Center, Cleveland Ohio, 1996. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/FoilTheory.pdf>.

8.7 El teorema de la aplicación de Riemann

Riemann enunció, alrededor del año 1860, el teorema de la aplicación abierta en su disertación *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Collected Works*⁶, páginas 3-45, para lo que actualmente conocemos como superficies de Riemann compactas con frontera, siendo dicho teorema más general que la versión usual que enunciamos en la presente sección. Él basa su demostración en el principio variacional de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, aunque según observó Weierstrass, Riemann no justifica su principio, siendo Hilbert quien, en 1904, da la justificación del mismo en su artículo *Über das Dirichletsche Prinzip. Math. Annalen 59 (1904), 161-186. Collected Works, vol. 3, pp. 15-37.*

⁶La disertación de Riemann puede conseguirse en la dirección <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/Grund.pdf>.

La versión que a continuación enunciamos es un caso especial del teorema de la aplicación abierta de Riemann, la cual fue demostrada por Osgood en 1900.

Teorema 8.7.1 — Teorema de la aplicación abierta de Riemann. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto, simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y si $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces existe una aplicación conforme y biyectiva $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$. Aún más, para cada $z_0 \in \Omega$ fijo, podemos encontrar una f tal que $f(z_0) = 0$. Tal aplicación está determinada en forma única salvo rotaciones, es decir, multiplicación por $e^{i\theta}$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$, y entonces f está determinada en forma única bajo la condición adicional $f'(z_0) > 0$.

Para demostrar el teorema de Riemann 8.7.1, en primer lugar necesitaremos demostrar la existencia de funciones holomorfas inyectivas que transformen el conjunto Ω en $\mathbb{D}$ y que lleven el punto z_0 en el origen. Además, la familia de éstas aplicaciones es normal, en el sentido de que dada una sucesión en la familia, existe una subsucesión que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω . En segundo lugar, si consideramos la derivada $f'(z_0)$, la cual tiene módulo acotado, elegimos una sucesión $\{f_n\}$ en la familia tal que $|f'_n(z_0)|$ converge hacia el supremo de todos los valores de $|f'(z)|$ para toda f en la familia. Entonces se demuestra que hay un elemento f en la familia tal que $|f'(z_0)|$ es igual a este supremo, el cual además es máximo, y ésta función f es precisamente el isomorfismo buscado de Ω en $\mathbb{D}$. La última parte del teorema se reduce a la aplicación del lema de Schwarz.

Al estudiar las transformaciones de Möbius vimos que la transformación $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ es una aplicación conforme y biyectiva del semiplano superior $\mathbb{H}_+$ en $\mathbb{D}$, mientras que $S(z) = z^2$ es una aplicación conforme y biyectiva del primer cuadrante $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \arg z < \pi/2\}$, en el semiplano superior $\mathbb{H}_+$, por lo que $T \circ S(z) = \frac{z^2-i}{z^2+i}$ es una transformación conforme del primer cuadrante $\mathcal{C}$ en el disco unitario $\mathbb{D}$.

A continuación veremos cómo son los automorfismos conformes de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_\infty$ en sí mismos.

Ejemplo 53

1. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es inyectiva entonces existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = az + b$, para cada $z \in \mathbb{C}$.

Ya que, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, y hay una infinidad de coeficientes $a_n \neq 0$ entonces la función $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0, como consecuencia del teorema de Casorati-Weierstrass 7.2.5 la imagen bajo f de $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}$ es denso en $\mathbb{C}$. Por otro lado, el teorema de la función abierta 5.4.3 nos dice que $f(B(0,1))$ es abierto, de donde

$$f(B(0,1)) \cap f(\mathbb{C} \setminus \overline{B(0,1)}) \neq \emptyset$$

lo cual contradice la inyectividad de la función f .

Por ende, solamente un número finito de los coeficientes a_n son no nulos, es decir, f es un polinomio. Si el grado de f fuera mayor que 1 entonces f' sería un polinomio no constante, y como consecuencia del teorema de la función inversa 4.3.10 f tendría un cero z_0 en torno a la cual no sería inyectiva. Luego entonces la función f es un polinomio de grado 1. Recordamos que los polinomios de grado 1 no solamente son funciones inyectivas en $\mathbb{C}$, de hecho son funciones biyectivas.

2. Las funciones inyectivas en $\mathbb{C}_\infty$ son las transformaciones de Möbius. Si $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función tal que $f(\infty) = z \in \mathbb{C}_\infty$, entonces existe una transformación de Möbius $T: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que $T(z) = \infty$. Por lo que bastará mostrar que $g = f \circ T$ es una transformación de Möbius. Como g es composición de funciones meromorfas e inyectivas, g es meromorfa e inyectiva, además, por construcción $g(\infty) = \infty$, en particular, g no tiene polos en $\mathbb{C}$, luego entonces su restricción a $\mathbb{C}$ es una función entera e inyectiva. Por el inciso anterior g es un polinomio de grado 1, y en particular es una transformación de Möbius, de donde $f = g \circ T^{-1}$ es una transformación de Möbius.

Las transformaciones de Möbius también son las únicas transformaciones conformes entre anillos:

Teorema 8.7.2 Consideremos en $\mathbb{C}$ dos anillos $\text{an}(z_1; r_1, R_1)$ y $\text{an}(z_2; r_2, R_2)$ con $0 < r_k < R_k < \infty$ para $k = 1, 2$. Entonces existe una transformación conforme entre ellos si, y solamente si, $R_1/r_1 = R_2/r_2$, y en tal caso cualquier transformación conforme entre ellos es una transformación de Möbius.

Demostración. Considerando las traslaciones $t(z) = z - z_k$, podemos restringirnos al caso $z_1 = z_2 = 0$ y aplicando las homotecias $h(z) = z/r_k$ con $k = 1, 2$, que son transformaciones de Möbius, podemos suponer que $r_1 = r_2 = 1$. Por lo que el teorema se reduce a demostrar que $\text{an}(z_1; r_1, R_1)$ y $\text{an}(z_2; r_2, R_2)$ son conformemente equivalentes si, y sólo si, $R_1 = R_2$ y, en tal caso, cualquiera de ellas es una transformación de Möbius.

Supongamos que $f : \text{an}(0; 1, R_1) \rightarrow \text{an}(0; 1, R_2)$ es una transformación conforme, entonces $f^{-1}(\overline{B(0, \sqrt{R_2})})$ es la imagen inversa bajo una función continua de un conjunto compacto, y en particular, es un subconjunto compacto de $\text{an}(0; 1, R_1)$, luego entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{an}(0; 1, 1 + \varepsilon) \cap f^{-1}(\overline{B(0, \sqrt{R_2})}) = \text{an}(0; R_1 - \varepsilon, R_2) \cap \overline{B(0, \sqrt{R_2})} = \emptyset.$$

Entonces $V = f(\text{an}(0; 1, 1 + \varepsilon))$ es un subconjunto conexo de $\text{an}(0; 1, R_2)$ que no corta a la bola cerrada $\overline{B(0, \sqrt{R_2})}$, de donde $V \subset \text{an}(0; 1, \sqrt{R_2})$ o bien $V \subset \text{an}(0; \sqrt{R_2}, R_2)$.

En el segundo caso podemos sustituir la función f por su composición con la transformación $z \mapsto R_2/z$, la cual deja invariante al anillo $\text{an}(0; 1, R_2)$ y así se cumple $V \subset \text{an}(0; 1, r)$, y si esta nueva f es una transformación de Möbius, entonces f también será una transformación de Möbius.

Luego entonces, $W = f(\text{an}(0; R_1 - \varepsilon, R_1)) \subset \text{an}(0; r, R_2)$, pues si $W \subset \text{an}(0; 1, r)$, entonces una sucesión en $\text{an}(0; 1, R_2)$ que convergiera a R_2 se correspondería con una sucesión en $\text{an}(0; R_1 - \varepsilon, R_1)$, por lo que debería tener puntos de acumulación en el anillo $\text{an}(0; 1, R_1)$, lo cual es imposible.

Así pues, si $\{z_n\}$ es una sucesión contenida en $\text{an}(0; 1, R_1)$, entonces $1 < |z_n| < 1 + \varepsilon$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$, de donde la sucesión $\{f(z_n)\}$ está contenida en $V = f(\text{an}(0; 1, 1 + \varepsilon))$ y no tiene puntos de acumulación en $\text{an}(0; 1, R_2)$, luego sus puntos de acumulación están en la frontera de $\text{an}(0; 1, R_2)$, pero como está contenida en $\text{an}(0; 1, r)$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = 1$.

De manera análoga podemos ver que, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = R_1 \quad \text{entonces} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = R_2.$$

Sea $\alpha = \frac{\log R_2}{\log R_1}$ y definimos $u(z) = \log |f(z)| - \alpha \log |z|$.

Como consecuencia de lo anterior, $u(z)$ tiende a 0 en la frontera de $\text{an}(0; 1, R_1)$. Ahora bien, como $u(z)$ es una función armónica, entonces $u(z)$ idénticamente nula.

Así pues, $\log |f(z)| = \alpha \log |z|$ para todo $z \in \text{an}(0; 1, R_1)$, es decir, $|f(z)| = |z|^\alpha$.

Podemos expresar $\text{an}(0; 1, R_1) = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, donde $\mathcal{U}_j$ es abierto simplemente conexo para $j = 1, 2$. En cada uno de los conjuntos $\mathcal{U}_j$ existe una rama uniforme de logaritmo y, por lo tanto, está definida la función holomorfa $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, que cumple $|z^\alpha| = \exp(\alpha \text{Re}(\log z)) = e^{\alpha \log |z|} = |z|^\alpha$.

Así pues, la función holomorfa $g(z) = \frac{f(z)}{z^\alpha}$ tiene módulo constante igual a 1, y como consecuencia del teorema del módulo máximo para funciones holomorfas 5.4.4, la función $g(z)$ es una función constante, es decir $f(z) = cz^\alpha$. Derivando obtenemos $f'(z) = cz^\alpha(\alpha/z)$ y de aquí $f'(z)/f(z) = \alpha/z$, lo cual es válido para cada uno de los abiertos $\mathcal{U}_j$ por separado, luego también en todo $\text{an}(0; 1, R_1)$.

Sea γ una circunferencia con centro $z_0 = 0$ y recorrida una vez en levógiro contenida en $\text{an}(0; 1, R_1)$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \alpha \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta} = \alpha \cdot n(\gamma, 0) = \alpha,$$

y por otra parte en la demostración del principio del argumento 7.4.2 vimos que esta integral es $n(\gamma \circ f, 0)$, en particular $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ahora podemos afirmar que $f(z) = cz^\alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $1 < |z| < R_1$, y como α es un número natural la función z^α está definida en todo $A = \text{an}(z_1; r_1, R_1)$. La inyectividad de f implica que $\alpha = 1$ y por lo tanto f es una transformación de Möbius y $R_1 = R_2$. ■

8.7.1 Familias de funciones continuas

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto no vacío, denotaremos $\mathcal{C}(\Omega)$ el espacio de todas las funciones continuas $\mathbb{C}$ -valuadas definidas en Ω , y por $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{D})$ el subconjunto de funciones continuas cuya imagen está contenida en la bola unitaria $\mathbb{D}$.

Definición 8.7.1 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia de funciones holomorfas, se dice que $\mathcal{F}$ es una *familia normal* si toda sucesión de funciones de la familia tiene una subsucesión que converge uniformemente para cada subconjunto compacto de Ω , aunque no necesariamente a un elemento de $\mathcal{F}$.

A las familias normales también se les denomina relativamente compactas. La palabra *relativamente compacto* se adapta a las nociones generales de espacios métricos, recordamos que $S \subset \mathbb{C}$ es relativamente compacto si su cerradura en un conjunto compacto, o equivalentemente, si toda sucesión en S tienen una subsucesión convergente. La subsucesión convergente no necesariamente converge a un punto en S , por definición.

Definición 8.7.2 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$, es una familia de funciones continuas, se dice que $\mathcal{F}$ es una *familia puntualmente acotada* si para cada $z \in \Omega$ existe un número real $M(z)$ tal que $|f(z)| \leq M$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Esto es, la familia $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada si para cada $z \in \Omega$ el conjunto

$$\{f(z) ; f \in \mathcal{F}\}$$

tiene cerradura compacta.

Definición 8.7.3 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$, es una familia de funciones holomorfas, se dice que $\mathcal{F}$ es una *familia uniformemente acotada sobre conjuntos compactos en Ω* si para cada conjunto compacto $\mathcal{K} \subset \Omega$ existe un número positivo $B(\mathcal{K})$ tal que

$$|f(z)| \leq B(\mathcal{K}) \text{ para cada } f \in \mathcal{F}, z \in \mathcal{K}.$$

Definición 8.7.4 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$, es una familia de funciones continuas, diremos que $\mathcal{F}$ es una *familia equicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in \Omega$ y $|z - w| < \delta$, se tiene que $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

En particular, si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia de funciones continuas, y $\mathcal{K} \subset \Omega$ es un conjunto compacto, se dice que $\mathcal{F}$ es equicontinua sobre $\mathcal{K}$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, z' \in \mathcal{K}$ y $|z - z'| < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \text{ para cada } f \in \mathcal{F}.$$

El teorema de Ascoli para análisis real afirma que una familia equicontinua de funciones continuas sobre un conjunto compacto es normal (relativamente compacto), véase por ejemplo (Munkres, 2000, pg. 278, Theorem 45.4), (Dugundgi, 1978, pg. 276, Theorem 6.4). (Rudin, 1986, pg. 245, Theorem 11.28, Arzela-Ascoli).

Teorema 8.7.3 — Teorema de Ascoli. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$, es una familia uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos en Ω . Entonces $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua sobre cada conjunto compacto y es normal.

Demostración. Primero demostraremos que, si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, entonces es equicontinua sobre cada conjunto compacto.

Sea $\mathcal{K} \subset \Omega$ un conjunto compacto, como consecuencia del lema 7.6.2, página 216, existe una sucesión $\{\mathcal{K}_n\}$ de subconjuntos compactos de Ω tales que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$; además $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$; y $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}^\circ$.

Si $z \in \mathcal{K}$, en particular $z \in \mathcal{K}_n^\circ$, de donde existe $\delta_n \in \mathbb{R}$ con $0 < \delta_n < 1$ tal que $B(z, \delta_n) \subset \mathcal{K}_n^\circ$.

Supongamos que $z, z' \in \mathcal{K}$ son tales que $|z - z'| < \delta_n/2$, ya que

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z'} = \frac{z - z'}{(\zeta - z)(\zeta - z')},$$

si γ es la circunferencia con centro en z y radio δ_n , como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{y} \quad f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta,$$

de donde

$$f(z) - f(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta = \frac{z - z'}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta.$$

Si ζ está en la traza de γ , entonces $|\zeta - z| = \delta_n$, finalmente como $|z - z'| < \delta_n/2$ entonces $|\zeta - z'| > \delta_n/2$, de donde

$$\frac{1}{|\zeta - z||\zeta - z'|} < \frac{2}{\delta_n^2},$$

por otra parte, como $\mathcal{F}$ es una familia uniformemente acotada sobre subconjuntos compactos en Ω , existe $B(\mathcal{K}_{n+1}) > 0$ tal que $|f(z)| \leq B(\mathcal{K}_{n+1})$ para cada $f \in \mathcal{F}$, $z \in \mathcal{K}_{n+1}$, y como consecuencia de la proposición 5.1.6 página 118 tenemos:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &= \frac{|z - z'|}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z')} \right| \leq \frac{|z - z'|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z'|} \\ &< \frac{|z - z'|}{2\pi} \frac{2}{\delta_n^2} B(\mathcal{K}_{n+1}) 2\pi \delta_n = \frac{2}{\delta_n} |z - z'| B(\mathcal{K}_{n+1}). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Por lo que, dada $\varepsilon > 0$, si $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_n}{2}, \frac{\varepsilon \delta_n}{2B(\mathcal{K}_{n+1})} \right\}$, y $z, z' \in \mathcal{K}$ son tales que $|z - z'| < \delta$ como consecuencia de la ecuación 8.7 se tiene que $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Lo cual demuestra la equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$.

Para demostrar que la familia $\mathcal{F}$ es normal, utilizaremos que ya se demostró la equicontinuidad.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones con $f_n \in \mathcal{F}$, siguiendo la demostración clásica de Ascoli, demostraremos que existe una subsucesión de $\{f_n\}$ la cual converge uniformemente en $\mathcal{K}$.

Sea $\{z_j\}$ un subconjunto denso numerable de $\mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ es compacto y cada $f_n \in \mathcal{F}$ es continua, la sucesión $\{f_n(z_j)\}$ es acotada para cada j , y como toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, existe una subsucesión $\{f_{n,1}\} \subset \{f_n\}$ tal que la sucesión $\{f_{n,1}(z_1)\}$ es convergente. Como la sucesión $\{f_{n,1}(z_1)\}$ es acotada, existe una subsucesión $\{f_{n,2}\} \subset \{f_{n,1}\}$ tal que $\{f_{n,2}(z_2)\}$ es convergente. Procediendo de manera análoga, obtenemos una familia de subsucesiones $\{f_{n,j}\}$ de $\{f_n\}$ tales que las sucesiones

$$\{f_{n,j}(z_1)\}, \{f_{n,j}(z_2)\}, \dots, \{f_{n,j}(z_j)\}, \dots$$

convergen.

Entonces la subsucesión diagonal $\{f_{n,n}\}$ de $\{f_n\}$ es tal que $\{f_{n,n}(z_j)\}$ converge para toda j .

A continuación se demostrará que la subsucesión diagonal $\{f_{n,n}\}$ es uniformemente convergente sobre $\mathcal{K}$.

Como $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua sobre $\mathcal{K}$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z, z' \in \mathcal{K}$ y $|z - z'| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z')| < \varepsilon/3$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Como $\{z_j\}$ es un conjunto denso en $\mathcal{K}$, entonces $\{B(z_j, \delta)\}$ constituyen una cubierta abierta de $\mathcal{K}$, por lo que existe k tal que $\mathcal{K} \subset B(z_1, \delta) \cup \dots \cup B(z_k, \delta)$.

Como $\{f_{n,n}(z_j)\}$ converge para toda j , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|f_{n,n}(z_j) - f_{m,m}(z_j)| < \varepsilon/3 \text{ para } j = 1, 2, \dots, k.$$

Si $z \in \mathcal{K}$, como $\{B(z_j, \delta); j = 1, \dots, k\}$ constituyen una cubierta abierta de $\mathcal{K}$, existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $z \in B(z_i, \delta)$, de donde

$$\begin{aligned} |f_{n,n}(z) - f_{m,m}(z)| &\leq |f_{n,n}(z) - f_{n,n}(z_i)| + |f_{n,n}(z_i) - f_{m,m}(z_i)| + |f_{m,m}(z_i) - f_{m,m}(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual se ha construido una subsucesión $\{f_{n,n}\}$ de $\{f_n\}$ la cual converge uniformemente sobre $\mathcal{K}$. ■

8.7.2 La demostración del teorema de Riemann

Si Ω es un subconjunto simplemente conexo contenido propiamente en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$ para demostrar el teorema de Riemann se considera la familia

$$\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}; f \text{ es holomorfa, inyectiva, y } f(z_0) = 0\},$$

y se demuestra que $\mathcal{F}$ es una familia no vacía y uniformemente acotada, de donde existirá un elemento $f_1 \in \mathcal{F}$ tal que

$$|f'_1(z_0)| = \max\{|f'(z_0)|; f \in \mathcal{F}\},$$

el elemento f_1 es una aplicación conforme y biyectiva con $f_1(z_0) = 0$, y como los únicos automorfismos de $\mathbb{D}$ que dejan fijo el origen son las rotaciones, es posible elegir $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta} f_1(z)$ satisface adicionalmente $f'(z_0) > 0$, lo cual determina, en forma única, la función buscada.

Como $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, existe $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, de donde la función holomorfa $h(z) = z - w_0$ no se anula en Ω . Como Ω es simplemente conexo, como consecuencia del corolario 6.1.5, página 154, existe una función holomorfa $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi^2(z) = z - w_0$, para cada $z \in \Omega$. Si $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ en particular

$$z_1 - w_0 = \varphi^2(z_1) = \varphi^2(z_2) = z_2 - w_0,$$

de donde $z_1 = z_2$, es decir, φ es una función inyectiva.

Luego entonces, para cada $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $B(\varphi(z_0), r) \subset \varphi(\Omega)$. En particular, podemos elegir r tal que $0 < r < |\varphi(z_0)|$.

Además, $\varphi(\Omega) \cap B(-\varphi(z_0), r) = \emptyset$, ya que, si existiera $z \in \Omega$ tal que $\varphi(z) \in B(-\varphi(z_0), r)$, entonces

$$|\varphi(z) - (-\varphi(z_0))| < r,$$

es decir $|\varphi(z_0) - \varphi(z)| < r$.

Consecuentemente, $-\varphi(z) \in B(\varphi(z_0), r) \subset \varphi(\Omega)$ de donde $-\varphi(z) = \varphi(z_1)$ para algún $z_1 \in \Omega$.

Como $z_1 - w_0 = \varphi^2(z_1) = (-\varphi(z))^2 = z - w_0$, entonces $z = z_1$, y por lo tanto $\varphi(z) = -\varphi(z)$.

Se sigue de lo anterior que $z - w_0 = \varphi(z) = 0$, y por lo tanto $w_0 = z \in \Omega$, lo cual es una contradicción, pues $w_0 \notin \Omega$.

En particular, para cada $z \in \Omega$ se tiene que $\varphi(z) - \varphi(z_0) \neq 0$. Esto permite definir la función holomorfa e inyectiva

$$\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

como

$$\psi(z) = \frac{r}{\varphi(z) - \varphi(z_0)}.$$

Aún más, como $|\varphi(z) - \varphi(z_0)| > r$ para cada $z \in \Omega$, se sigue que

$$|\psi(z)| = \left| \frac{r}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} \right| < \frac{r}{|\varphi(z) - \varphi(z_0)|} < 1,$$

por lo que la imagen de ψ está contenida en $\mathbb{D}$, es decir, la familia $\mathcal{F}$ es no vacía.

Como consecuencia del teorema 8.7.3 de Ascoli la familia $\mathcal{F}$ es normal.

Sea $\mu = \sup\{|f'(z_0)| \in \mathbb{R}; f \in \mathcal{F}\}$. Como los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones holomorfas e inyectivas, sus derivadas no se anulan en Ω , por lo que $\mu > 0$. Por definición de μ existe una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n| = \mu$.

Como la familia $\mathcal{F}$ es normal, existe una subsucesión $\{f_{n_m}\}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función f .

Como consecuencia del teorema 5.3.1 de convergencia de Weierstrass, página 128 $\lim_{n_m} f'_{n_m} = f'$ uniformemente en subconjuntos compactos de Ω .

Por lo tanto

$$|f'(z_0)| = \lim_{n_m \rightarrow \infty} |f'_{n_m}| = \mu.$$

Y como $\mu > 0$, se sigue que f no es una función constante. Además, como $f_{n_m}(\Omega) \subset \mathbb{D}$, implica $f(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}$, y como f es holomorfa no constante, como consecuencia del teorema de la función abierta, 5.4.3 página 143, el conjunto $f(\Omega)$ es abierto, de donde $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Aún más, como consecuencia del teorema 7.4.6, página 192 la función f es inyectiva.

Por otra parte, como consecuencia del lema 8.3.1, página 8.3.1, la transformación de Möbius $\phi_w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $\phi_w(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$ es un automorfismo holomorfo en $\mathbb{D}$, en particular, si $w = f(z_0)$ la composición

$$\phi_{f(z_0)} \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$$

dada por

$$(\phi_{f(z_0)} \circ f)(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)}$$

también es un elemento de $\mathcal{F}$, y claramente $(\phi_{f(z_0)} \circ f)(z_0) = 0$.

Supongamos la función $f \in \mathcal{F}$ es tal que

$$f = \max\{|g'(z_0)|; g \in \mathcal{F} \text{ con } g(z_0) = 0\}$$

y que $f(\Omega) \subsetneq \mathbb{D}$ y sea $w \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$. Entonces la composición $\phi_w \circ f$ dada por

$$(\phi_w \circ f)(z) = \frac{f(z) - w}{1 - \bar{w} f(z)} \tag{8.8}$$

es holomorfa, inyectiva y no se anula en Ω . Como Ω es simplemente conexo, aplicando nuevamente el corolario 6.1.5, página 154 existe una función holomorfa e inyectiva $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\psi^2(z) = \frac{f(z) - w}{2 - \bar{w} f(z)} \tag{8.9}$$

que no se anula en Ω . Defínase $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ como $h(z) = \phi_{\psi(z_0)} \circ \psi$, esto es,

$$h(z) = \frac{g(z) - g(z_0)}{1 - \overline{\psi(z_0)} \psi(z)}, \tag{8.10}$$

y además $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Es claro que $h(z_0) = 0$, y h es inyectiva, por lo que $h \in \mathcal{F}$.

Como consecuencia de la regla de la cadena

$$h'(z_0) = (\phi_{\psi(z_0)} \circ \psi)'(z_0) = \phi'_{\psi(z_0)}(\psi(z_0)) \cdot \psi'(z_0) = \frac{\psi'(z_0)}{1 - |\psi(z_0)|^2}. \quad (8.11)$$

Como $f(z_0) = 0$, se sigue de la ecuación 8.9 que $|\psi(z_0)|^2 = |w|$. Por otra parte, derivando en z_0 ambos lados de la ecuación 8.9 y ya que $f(z_0) = 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned} 2\psi(z_0)\psi'(z_0) &= \frac{(1 - \bar{w}f(z_0))f'(z_0) + (f(z_0) - w)\bar{w}f'(z_0)}{(1 - \bar{w}f(z_0))^2} \\ &= f'(z_0)(1 - w\bar{w}) = f'(z_0)(1 - |w|^2), \end{aligned}$$

de donde

$$\psi'(z_0) = \frac{f'(z_0)(1 - |w|^2)}{2\psi(z_0)},$$

que al sustituir en la ecuación 8.11 se obtiene

$$\begin{aligned} |h'(z_0)| &= \left| \frac{\psi'(z_0)}{1 - |\psi(z_0)|^2} \right| = \left| \frac{\psi'(z_0)}{1 - |w|} \right| \\ &= \left| \frac{f'(z_0)(1 - |w|^2)}{2\psi(z_0)(1 - |w|)} \right| = \frac{|f'(z_0)|(1 + |w|)}{2|g(z_0)|} \\ &= \frac{|f'(z_0)|(1 + |w|)}{2\sqrt{|w|}} > |f'(z_0)|, \end{aligned}$$

y ya que $f \in \mathcal{F}$ y $h(z_0) = 0$, la desigualdad anterior contradice el hecho de que f maximiza el valor absoluto de la derivada de funciones en $\mathcal{F}$ que se anulan en z_0 .

Por lo que no es posible que exista $w \in \mathbb{D} \setminus f(\Omega)$, consecuentemente $f(\Omega) = \mathbb{D}$. Como se esperaba demostrar.

Corolario 8.7.1 Solamente hay dos clases de equivalencia conforme de regiones simplemente conexas en $\mathbb{C}$, la clase que consta sólo de $\mathbb{C}$ y la clase que consta de las regiones simplemente conexas contenidas propiamente en $\mathbb{C}$.

8.8 Ejercicios

1. Diga cuáles subconjuntos de $\mathbb{S}^2$ corresponden, respectivamente a los ejes real e imaginario al identificar el plano extendido con $\mathbb{S}^2$ bajo la proyección estereográfica.
 2. Muestre que, bajo la proyección estereográfica, líneas en $\mathbb{C}$ corresponden a círculos que pasan por N .
 3. Obtenga la imagen del primer cuadrante bajo la aplicación $T(z) = z^3$.
 4. Determine la región del plano en la cual se transforma la región limitada por las rectas $x = 1$, $y = 1$ y $x + y = 1$ bajo la transformación $f(z) = z^2$.
 5. Sea $\mathcal{T}$ el triángulo en el plano con vértices ι , $1 - \iota$, $1 + \iota$. Determine la imagen $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ bajo las transformaciones:
 - a) $T(z) = 3z + 4 - 2\iota$.
 - b) $T(z) = \iota z + 2 - \iota$.
 - c) $T(z) = 5e^{\frac{\pi i}{3}} z - 2 + 4\iota$.
- Compare las formas geométricas de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.

6. Considere la función $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u(x, y) = 2x^2 + y^2$ y $v(x, y) = y^2/x$. Muestre que las curvas $u = \text{constante}$ y $v = \text{constante}$ se intersectan ortogonalmente, pero f no es $\mathbb{C}$ -diferenciable.
7. Para cada una de las siguientes aplicaciones, determine el máximo subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ donde la aplicación sea conforme:
 - a) $f_1(z) = z + \frac{1}{z}$
 - b) $f_2(z) = z^3 + z^2$
 - c) $f_3(z) = \frac{z}{1+z}$
 - d) $f_4(z) = \bar{z}$
 - e) $f_5(z) = \sin z \cos z$
8. Demuestre que si $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, $\mathbb{C}$ -diferenciable, y con inversa $\mathbb{C}$ -diferenciable, entonces f es conforme.
9. Encuentre una aplicación conforme del conjunto $A = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \arg z < \pi/2, 0 < |z| < 1\}$ en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
10. Sea $g(z) = z - iz + i$. Determine la imagen bajo g de
 - a) El eje real.
 - b) El círculo con centro en 0 y radio 2.
 - c) El círculo con centro en 0 y radio 1.
 - d) El eje imaginario.
11. Encuentre una aplicación de Möbius T que satisfaga $T(z_k) = w_k$ para $k = 1, 2, 3$, si
 - a) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = 1, w_1 = 0; w_2 = -i, w_3 = \infty$.
 - b) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = 1, w_1 = -i, w_2 = 0, w_3 = \infty$.
 - c) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = 1, w_1 = -3, w_2 = -1, w_3 = 0$.
12. Encuentre una aplicación de Möbius T que transforme el disco unitario $\mathbb{D}$ sobre sí mismo, y que satisfaga $T(1/4) = 1/3$.
13. Muestre que $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ transforma biyectivamente el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ sobre el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = 0, \text{ y } \operatorname{Im} z < -1/4\}$.
14. Muestre que $T(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right)$ con $0 < \operatorname{Im} \lambda$ transforma el semiplano superior sobre el disco unitario $\mathbb{D}$.
15. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius, encuentre condiciones necesarias y suficientes para que $T(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$, donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.
16. Considere una aplicación de Möbius de la forma

$$T(z) = a \left(\frac{z-b}{z-d} \right).$$

Demuestre que circunferencias que pasan por los puntos b y d se transforman en líneas que pasan por el origen.

17. Las circunferencias con ecuación $\left| \frac{z-b}{z-d} \right| = \frac{r}{|a|}$, denominados los círculos de Apolonio, se transforman bajo T en las circunferencias con centro 0 y radio r . (Ahlfors, 1979, pg.84-88)
18. Si una aplicación de Möbius transforma un par de círculos concéntricos en otro par de círculos concéntricos, demuestre que la razón entre sus radios debe ser la misma.
19. Si un círculo está contenido en el interior de otro, y son tangentes en un punto z_0 . Sea Ω la región comprendida entre los dos círculos. Demuestre que existe una transformación conforme de Ω en el disco unitario $\mathbb{D}$.
20. Determine si es posible encontrar una transformación conforme del disco unitario $\mathbb{D}$ sobre $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$.
21. Encuentre una aplicación que envíe las circunferencias $|z| = 1$ y $|z - (1/4)| = 1/4$ en circunferencias concéntricas. ¿Hay alguna relación entre las razones de sus radios?
22. Si T es una aplicación de Möbius, $T \neq Id$, muestre que una aplicación de Möbius S conmuta con T si S y T tienen los mismos puntos fijos.

23. Si $SL_2(\mathbb{C})$ es el subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ que consta de todas las matrices con determinante 1, muestre que la imagen de $SL_2(\mathbb{C})$ bajo el homomorfismo $\psi : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}$, descrito en la página 228 es Möb . ¿Cuál es el núcleo de ψ en $SL_2(\mathbb{C})$?
24. Considere dos circunferencias secantes $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$ y una cadena $\{\mathcal{C}_k\}$ de circunferencias tangentes entre sí y a $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$. Demuestre que los puntos de tangencia están todos ellos sobre una misma circunferencia la cual pasa por los puntos de intersección de $\mathcal{C}_0$ y $\mathcal{C}_1$.
25. Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ tres circunferencias tangentes dos a dos. Demuestre que existen dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ que son tangentes a $\mathcal{C}_k$ para $k = 1, 2, 3$.
26. Encuentre todos los subgrupos abelianos del grupo de las transformaciones de Möbius.
27. Demuestre que el grupo de las transformaciones de Möbius es un grupo simple. *Recuerde que:* Si $(G, \cdot)$ es un grupo, y $N \trianglelefteq G$ es un subgrupo de G , entonces N es un *subgrupo normal* de G , y se denota $N \triangleleft G$, si para cada $g \in G$ se tiene $gNg^{-1} = N$. Se dice que un grupo G es *simple*, si sus únicos subgrupos normales son el grupo trivial y el mismo.
28. La curvatura κ de una circunferencia se define como el recíproco de su radio, esto es, si $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$ entonces $\kappa = \frac{1}{r}$. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una aplicación de Möbius con $ad - bc = 1$, demuestre que T transforma la recta real en una circunferencia de curvatura

$$\kappa = \left| 2c^2 \operatorname{Im} \left(\frac{d}{c} \right) \right|.$$

29. Demuestre que una aplicación de Möbius de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \quad \text{con} \quad |a| > |b|$$

puede re-escribirse en la forma

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1} \quad \text{con} \quad |\alpha| < 1.$$

- a) Muestre que esta familia de transformaciones forma un grupo bajo la composición de funciones.
- b) Dé una interpretación geométrica del hecho de que estas transformaciones constituyen un grupo.
30. Demuestre que el conjunto de aplicaciones de Möbius de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} \quad \text{con} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

forma un grupo bajo la composición de funciones. Interprete geométricamente el hecho de que esta familia sea un grupo.

31. Demuestre el teorema 8.3.7 dado en la página 233.

32. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius, y sea $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su matriz asociada en $GL(2, \mathbb{C})$. Demuestre que:

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $[T]$ si, y únicamente si, $z = \frac{z_1}{z_2}$ es un punto fijo de $T(z)$.

33. Como consecuencia del teorema 8.7.1 de la aplicación abierta de Riemann enuncie y demuestre el teorema de Riemann para regiones simplemente conexas $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$.
34. Para cada $n \in \mathbb{N}$, encuentre una transformación conforme del sector angular $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \arg z < \pi/n\}$ sobre el disco unitario $\mathbb{D}$.
35. Encuentre la transformación conforme f dada por el teorema 8.7.1 de Riemann de la banda $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ en el disco unitario $\mathbb{D}$ que satisface $f(i/2) = 0$ y $f'(i/2) > 0$.
36. Demuestre que la transformación $f(z) = e^{(\pi i \sqrt{z/p})}$ transforma el interior de la parábola $y^2 = 4p(p-x)$ en el semiplano superior $\mathbb{H}_+$, mientras que $h(z) = i(\sqrt{z} - \sqrt{p})$ transforma el exterior de dicha parábola en el semiplano superior $\mathbb{H}_+$.⁷

⁷La parábola $y^2 = 4p(p-x)$ divide a $\mathbb{C}$ en dos regiones, llamaremos el interior de la parábola a la región que contiene al foco de la parábola.



9. Funciones armónicas. Problema de Dirichlet.

Como mencionamos en las secciones 4.6 y 8.6 las funciones armónicas de dos variables reales aparecen frecuentemente en la física como funciones potenciales de campos planos de vectores. Así por ejemplo, si una placa metálica plana ocupa la región Ω y su distribución de temperatura permanece estacionaria, entonces la función $t = u(x, y)$ que da la temperatura t del punto $(x, y) \in \Omega$ es una función armónica. Esta función armónica es una función potencial del campo vectorial $Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ que describe el flujo de calor. Pueden consultarse los libros de Churchill (J. W. Brown, 2004, Cap. 10) y Dimon Kellogg (1954) para una gran y variada cantidad de ejemplos.

Recordamos que en la definición 4.6.2 vimos que, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, conexo y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$, entonces u es una función armónica en Ω si

$$\Delta u(z) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (z) = 0 \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

A lo largo del presente capítulo estudiamos algunas propiedades fundamentales de las funciones armónicas y las caracterizaremos localmente como la parte real de una función holomorfa. En el teorema 9.1.5, págs 266, se presenta una caracterización de los conjuntos simplemente conexos en términos de funciones armónicas y holomorfas. Además presentamos la definición de núcleo de Poisson y la representación de funciones armónicas vía el núcleo de Poisson.

9.1 Funciones armónicas

Dada una función armónica definida en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, por medio de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, conocemos las derivadas parciales de su conjugada armónica v . Cuando la conjugada armónica v de la función u exista, el cálculo de las funciones potenciales de la forma diferencial $-u_y dx + u_x dy$ nos lleva, al menos en casos sencillos, a expresiones explícitas para la función v . Un “método analítico” para tratar el problema, es el denominado método de *Milne-Thomson*, véase por ejemplo Needham Needham (2002). Aunque precise ciertas condiciones restrictivas, este método proporciona directamente funciones holomorfas f con parte real prefijada u .

Su justificación se basa en los siguientes resultados: toda función holomorfa es $\mathbb{C}$ -diferenciable y recíprocamente, además dos funciones holomorfas definidas en un abierto conexo Ω son iguales si, y solamente si, coinciden en un conjunto de puntos de Ω que tenga al menos un punto de acumulación en Ω , véase el teorema 5.3.3, página 132.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo que corte al eje real, con lo cual la intersección de Ω con $\mathbb{R}$ contendrá al menos un segmento abierto.

Dada entonces una función u armónica en Ω , notemos que la función definida en Ω como

$$f_1(x+iy) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$$

es holomorfa en Ω .

Supongamos que sabemos encontrar una función g holomorfa en Ω tal que

$$g'(x) = f_1(x) = u_x(x, 0) - iu_y(x, 0) \text{ para todo } x \in \Omega \cap \mathbb{R};$$

como consecuencia del principio de continuación analítica, teorema 5.3.2, 129, se tiene que $g'(z) = f_1(z)$, y la parte real de g difiere de u en una constante real, es decir, $\operatorname{Re} g = u + c$ para alguna $c \in \mathbb{R}$.

La función $f = g + c$, para una constante real adecuada c tiene como parte real la función armónica u .

El método de Milne-Thompson puede programarse en programas de análisis numérico como Maple, Mathlab, Mathematica, Scilav, Octave, wxMaxima entre otros. Pero tanto si se usa este método sigue siendo necesario verificar los resultados obtenidos y valorar el alcance de los procedimientos empleados, muy especialmente debido a que los programas de cálculo simbólico, en general, no tienen en cuenta el dominio de las funciones que intervienen, manipulando tan solo funciones dadas por fórmulas, por decirlo de alguna manera.

El método de Milne-Thompson.

El método de Milne-Thompson puede esquematizarse como sigue, dada una función armónica $u(x, y)$ definida en un abierto Ω que intersecte al eje real en un abierto no vacío:

1. Calcúlese $u_x(x, y)$, la derivada parcial de u respecto de x ;
2. Calcúlese ahora $u_y(x, y)$ la derivada parcial de u respecto de y ;
3. En $u_x(x, y)$, la derivada parcial de u con respecto a x , sustitúyase $y = 0$ para calcular $u_x(x, 0)$;
4. En $u_y(x, y)$, la derivada parcial de u con respecto a y , sustitúyase $y = 0$ para calcular $u_y(x, 0)$;
5. Sustitúyase x por $z = x + iy \cong (x, y)$ en la expresión $u_x(x, 0) - iu_y(x, 0)$ para obtener la función $f_1(z)$;
6. Intégrese la función $f_1(z)$ con respecto a la variable z , es decir, obtenéngase una primitiva $g(z)$ de la función $f_1(z)$;
7. Calcúlese $f(z) = g(z) - \operatorname{Re} g(x_0) + u(x_0, 0)$ para cualquier $x_0 \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Entonces $f(z) + ic$, con $c \in \mathbb{R}$, es una función holomorfa con parte real u para cada c .
8. Si se busca una función armónica conjugada de u , determine la parte imaginaria de $f(z)$.

Ejemplo 54

A continuación aplicaremos el método de Milne-Thompson para la función $u(x, y) = e^x \cos y$.

Es claro que $u_{xx} = e^x \cos y$ y $u_{yy} = -e^x \cos y$ de donde $\Delta u = 0$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es decir, u es una función armónica en $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

1. $u_x(x, y) = e^x \cos y$,
2. $u_y(x, y) = -e^x \sin y$,
3. $u_x(x, 0) = e^x$,
4. $u_y(x, 0) = 0$,
5. $f_1(z) = e^z - i0$,
6. $g(z) = \int e^z dz = e^z$,
7. $f(z) = g(z) - \operatorname{Re} e^0 + e^0 \cos 0 = g(z)$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$,
8. $f(z) = e^z + c$, $c \in \mathbb{R}$,
9. $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} e^{x+iy} = e^x \sin y$.
10. Por lo tanto $f(z) = e^z$ es una función holomorfa con $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$.

Para una función armónica definida en $\Omega \subset \mathbb{C}$, en la sección 4.6, ecuación 4.6, página 103, establecimos la diferencial conjugada de u ,

$$*du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

a continuación mostraremos que ésta forma es cerrada, es decir, $d(*du) = 0$.

Proposición 9.1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, entonces la forma diferencial

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

es cerrada en Ω .

Demostración. Como $*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$, por definición

$$\begin{aligned} d(*du) &= d\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy \wedge dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dx \wedge dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \wedge dy \\ &= \Delta u(x, y)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Y como $u = u(x, y)$ es una función armónica $\Delta u = 0$, luego entonces $d(*du) = 0$, consecuentemente $*du$ es una forma cerrada. ■

A continuación mostraremos algunas consecuencias de éste resultado.

Proposición 9.1.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Para una función armónica $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ los siguientes enunciados son equivalentes:

1. La forma diferencial $*du = -u_y dx + u_x dy$ es exacta en Ω .
2. Existe una función armónica $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = u + iv$ es holomorfa en Ω . (Esto es, existe una función armónica conjugada de u en Ω).

Cuando se cumplen estas condiciones, cada primitiva v de la forma diferencial $*du$ es una función armónica conjugada de u en Ω .

Demostración. Supongamos que la forma diferencial $*du = u_y dx + u_x dy$ es exacta en Ω . Si existe una función diferenciable $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $dv = *du$ entonces $F = u + iv$ es diferenciable en Ω y su diferencial es

$$dF(z) = du(z) + idv(z) = du(z) + i * du(z) = f(z)dz$$

donde $f(z) = u_x - iu_y$, es decir, las coordenadas complejas de la aplicación lineal $dF(z)$ respecto a la base $\{dz, d\bar{z}\}$ son $(f(z), 0)$, y esto significa que F es holomorfa en Ω . Por lo tanto v es una función armónica conjugada de u .

Recíprocamente, si v es una función armónica conjugada de u , con las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función holomorfa $f = u + iv$ se obtiene que

$$*du = -u_y dx + u_x dy = v_x dx + v_y dy = dv,$$

luego $*du = dv$ es exacta. ■

Observación 13 En las condiciones de la proposición anterior si Ω es conexo y la forma diferencial $*du$ es exacta, para conseguir una función armónica conjugada de u en Ω basta obtener una primitiva v de la forma diferencial $*du$. Según los resultados generales sobre integrales de línea esto se logra mediante la integral de línea $v(z) = \int_{\gamma_z} *du$ donde γ_z es una curva suave por partes en Ω con punto inicial $z_0 \in \Omega$ y punto final la variable $z \in \Omega$.

Corolario 9.1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in \Omega$ y supóngase que $r > 0$ es tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Si u es una función armónica en $B(z_0, r)$ entonces u posee una función armónica conjugada dada explícitamente por la fórmula

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y u_x(x, t) dt - \int_{x_0}^x u_y(s, y_0) ds$$

donde $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ y $y_0 = \operatorname{Im} z_0$.

Demostración. Como la forma $*du$ es cerrada, entonces $*du$ posee primitiva en $B(z_0, r)$, por ende, es exacta en $B(z_0, r)$. De acuerdo con la proposición anterior existe una función armónica $v : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = u + iv$ es holomorfa en $B(z_0, r)$. Según la observación anterior, la función armónica conjugada v se obtiene mediante la integral de línea de la forma $*du$ a lo largo de la trayectoria con punto inicial $z_0 = x_0 + iy_0$ y punto final $z = x + iy$, dada como la suma de la trayectoria que une los puntos $x_0 + iy_0$ con $x + iy_0$ y la trayectoria que une los puntos $x + iy_0$ con el punto $x + iy$. Escribiendo explícitamente esta integral se obtiene el resultado. ■

La independencia de la trayectoria queda demostrada por el siguiente resultado

Proposición 9.1.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Si u es armónica en Ω entonces

$$\int_{\gamma} *du = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0 \quad (9.1)$$

para todo ciclo γ homólogo a un punto en Ω .

Demostración. Como consecuencia del teorema de Cauchy, la integral de $f dz$ se anula a lo largo de cualquier ciclo homólogo a un punto en Ω . Por otra parte, la integral de la diferencial exacta du se anula a lo largo de todo ciclo cerrado. ■

Proposición 9.1.4 Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces u es infinitamente diferenciable.

Demostración. Si $z_0 = x_0 + iy_0$ es un punto fijo en Ω y δ es tal que $B(z_0, \delta) \subset \Omega$, como consecuencia del corolario 9.1.1 u tiene una función armónica conjugada v en $B(z_0, \delta)$. Es decir, $f = u + iv$ es analítica, y consecuentemente, infinitamente diferenciable en $B(z_0, \delta)$. Consecuentemente u es infinitamente diferenciable. ■

Teorema 9.1.5 — de caracterización de conjuntos simplemente conexos. Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo no vacío. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a) Ω es simplemente conexo.
- (b) $n(\gamma, a) = 0$ para cada curva cerrada rectificable γ en Ω y cada punto $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
- (c) $\mathbb{C}_{\infty} \setminus \Omega$ es conexo.
- (d) Para cada función holomorfa f en Ω , existe una sucesión de polinomios que converge a f en Ω .
- (e) Para cada función holomorfa f en Ω y cada curva cerrada rectificable γ en Ω , se tiene $\int_{\gamma} f = 0$.
- (f) Para toda $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.
- (g) Para cada función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $0 \notin f(\Omega)$ existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^g = f$.
- (h) Para cada función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $0 \notin f(\Omega)$ existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g^2 = f$.
- (i) Ω es homomorfo al disco unitario $\mathbb{D}$.
- (j) Toda función armónica $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ posee una función armónica conjugada.

Demostración. Demostraremos que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow \dots \Rightarrow (i) \Rightarrow (a)$ e $(i) \Rightarrow (j) \Rightarrow (g)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos que Ω es simplemente conexo. Si γ es una curva cerrada rectificable en Ω y a es un punto en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, entonces $(z - a)^{-1}$ es holomorfa en Ω , como consecuencia del teorema de Cauchy 6.3.1, página 157, se tiene que $n(\gamma, a) = 0$.

$b) \Rightarrow c)$: Supongamos que $n(\gamma, a) = 0$ para cada curva cerrada rectificable γ en Ω y cada punto $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ no es conexo, entonces existen dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{C}_\infty$ disjuntos, cerrados, no vacíos tales que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = A \cup B$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\infty \in B$. Luego entonces, A es un subconjunto cerrado y acotado en $\mathbb{C}$, y como consecuencia del teorema de Heine-Borel, $A \subset \mathbb{C}$ es compacto. Entonces $\Omega_1 = \Omega \cup A = \mathbb{C}_\infty \setminus B \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto, y $A \subset \Omega_1$. Como consecuencia de la proposición 7.6.1, página 213, existe un número finito de polígonos $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ en $\Omega_1 \setminus A = \Omega$ tales que para cada función holomorfa f en Ω_1 se tiene

$$f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in A$. En particular, si $f(z)$ es la función constante 1, entonces

$$1 = \sum_{k=1}^m n(\gamma_k, z)$$

para cada $z \in A$. Así, para cada $z \in A$, existe al menos un polígono γ_k en Ω tal que $n(\gamma_k, z) \neq 0$. Lo cual contradice $n(\gamma, a) = 0$ para cada punto $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Es consecuencia del segundo corolario del teorema de Runge, véase el corolario 7.6.2, página 218.

$(d) \Rightarrow (e)$: Sea γ una curva cerrada rectificable en Ω , y f una función holomorfa en Ω , y sea p_n una sucesión de polinomios tales que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ en Ω . Como los polinomios son funciones enteras y como Ω es simplemente conexo γ es homotópica a un punto, de donde $\int_\gamma p_n = 0$ para cada n , y como $\{p_n\}$ converge a f uniformemente sobre la traza de γ entonces

$$\int_\gamma f = \lim_n \int_\gamma p_n = 0.$$

$(e) \Rightarrow (f)$: Si $a \in \Omega$, como consecuencia del inciso (e) la función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $F(z) = \int_\gamma f$ donde γ es una curva rectificable del punto a al punto z . Como consecuencia del corolario 6.1.3, página 154, se tiene que $F' = f$.

$(f) \Rightarrow (g)$: Si $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \Omega$, entonces f'/f es holomorfa en Ω . Como consecuencia del inciso (f), existe una función F tal que $F' = f'/f$, como consecuencia del corolario 6.1.4, página 154, existe una función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para cada $z \in \Omega$.

$(g) \Rightarrow (h)$: Es consecuencia del corolario 6.1.5, página 154.

$(h) \Rightarrow (i)$: El resultado es consecuencia del teorema de la aplicación abierta de Riemann 8.7.1, página 254.

$(i) \Rightarrow (a)$: Sea $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un homeomorfismo, y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva cerrada en Ω , entonces la curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $\sigma(s) = h(\gamma(s))$ es una curva cerrada en $\mathbb{D}$. Como $\mathbb{D}$ es simplemente conexo, existe una función continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $H(s, 0) = \sigma(s)$ si $0 \leq s \leq 1$, $H(s, 1) = 0$ si $0 \leq s \leq 1$ y $H(0, t) = H(1, t)$ si $0 \leq t \leq 1$. Luego entonces, la función $\tilde{H} = h^{-1} \circ H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una función continua, y la curva γ es homotópica a un punto, es decir, Ω es simplemente conexo.

$(i) \Rightarrow (j)$: Como $\Omega \neq \mathbb{C}$, el teorema de la aplicación de Riemann, 8.7.1, página 254, implica que existe una función holomorfa $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la cual es inyectiva y $h(\Omega) = \mathbb{D}$. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, entonces $u_1 = u \circ h^{-1}$ es una función armónica sobre $\mathbb{D}$. Como consecuencia del corolario 9.1.1, página 266, existe una función conjugada armónica $v_1 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1 = u_1 + iv_1$ es holomorfa en $\mathbb{D}$. Si $f = f_1 \circ h$, entonces f es holomorfa en Ω y $u = \operatorname{Re} f$, en particular $v = \operatorname{Im} f = v_1 \circ h$ es una armónica conjugada de u , tenemos que el resultado buscado.

$(j) \Rightarrow (g)$: Supongamos que $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa nunca nula, y sean $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Si $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$U(x, y) = \log |f(x + iy)| = \log (u^2(x, y) + v^2(x, y)),$$

entonces U es armónica. Sea V una función armónica sobre Ω tal que $g = U + iV$ es holomorfa en Ω y sea $h(z) = \exp(g(z))$. Entonces h es holomorfa y nunca nula, además $\left| \frac{f(z)}{h(z)} \right| = 1$ para cada $z \in \Omega$. Luego entonces, existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$f(z) = ch(z) = c \exp(g(z)) = \exp(g(z) + c_1).$$

De donde $g(z) + c_1$ es una rama de $\log(f(z))$, como esperábamos demostrar. ■

Proposición 9.1.6 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y sean $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones armónicas. Si $u|_G = v|_G$ para algún abierto no vacío $G \subset \Omega$ entonces $u = v$.

Demostración. Bastará demostrar el resultado cuando $v = 0$. Consideremos el conjunto Ω_0 formado por los puntos $a \in \Omega$ para los que existe $r > 0$ tal que $u|_{B(a, r)}$ es idénticamente nula. Observemos en primer lugar que, por definición, Ω_0 es abierto en Ω y como $\emptyset \neq G \subset \Omega_0$ tenemos que $\Omega_0 \neq \emptyset$. Como Ω es conexo, para concluir que $\Omega_0 = \Omega$ basta ver que Ω_0 es la intersección de un cerrado en $\mathbb{C}$ con Ω_0 .

Dado $a \in \overline{\Omega_0} \cap \Omega$, existe una sucesión de números complejos $a_n \in \Omega_0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Sea $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset \Omega$; de acuerdo con la proposición 9.1.1, página 266, existe $f: B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\operatorname{Re} f = u|_{B(a, r)}$.

Como la sucesión a_n converge al punto a , existe $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que $B(a_n, \delta) \subset B(a, r)$ y $u|_{B(a_n, \delta)} \equiv 0$. Como $f(B(a_n, r))$ no es abierto usando el teorema de la función abierta 5.4.3, página 143, se tiene que f es constante.

Lo mismo le ocurre a su parte real $u|_{B(a, r)}$, que debe ser idénticamente nula debido a que $u(a_n) = 0$. Así queda demostrado que $a \in \Omega_0$ y con ello que $\overline{\Omega_0} \cap \Omega \subset \Omega_0$. ■

Hay una generalización importante de la ecuación 9.1 la cual se da para una pareja de funciones armónicas. Antes de ver esta generalización recordamos de cálculo que una forma diferencial $pdx + qdy$ es *localmente exacta* si, y solamente si,

$$\int_{\gamma} p dx + q dy = 0$$

para toda $\gamma = \partial R$ donde R es un rectángulo contenido en Ω .

Como consecuencia del teorema de Cauchy esta condición se cumple si $f(z) dz = p(z) dx + q(z) dy$ con f analítica en Ω .

Proposición 9.1.7 Si $pdx + qdy$ es localmente exacta en Ω , entonces

$$\int_{\gamma} p dx + q dy = 0$$

para cada ciclo γ homólogo a un punto en Ω .

Para una demostración de este resultado puede consultarse (Ahlfors, 1979, Teorema 16, pg. 144).

Proposición 9.1.8 Si u_1 y u_2 son armónicas en una región Ω , entonces

$$\int_{\gamma} u_1 * du_2 - u_2 * du_1 = 0 \tag{9.2}$$

para cualquier ciclo γ que sea homólogo a un punto en Ω .

Demostración. De acuerdo con la proposición 9.1.7 basta mostrar el resultado para $\gamma = \partial R$, donde R es un rectángulo contenido en Ω . En R , las funciones armónicas u_1 y u_2 tienen funciones conjugadas univaluadas v_1 y v_2 , y podemos escribir

$$u_1 * du_2 - u_2 * du_1 = u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = u_1 dv_2 + v_1 du_2 - d(u_2 v_1)$$

donde $d(u_2 v_1)$ es una diferencial exacta, y $u_1 dv_2 + v_1 du_2$ es la parte imaginaria de

$$(u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2).$$

La última diferencial puede escribirse como $F_1 f_2 dz$ donde $F_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas en R . Como consecuencia del teorema de Cauchy, la integral de $F_1 f_2 dz$ se anula, en particular, la integral de su parte imaginaria. ■

Si aplicamos la proposición 9.1.8 con $u_1 = \log r$ y u_2 igual a una función armónica u en $B(0, \rho)$, con $\Omega = B(0, \rho) \setminus \{0\}$, y γ el ciclo $C_1 - C_2$ donde C_i es la circunferencia de radio r_i con $0 < r_i < \rho$ recorrida en levógiro. Sobre una circunferencia $|z| = \rho$ tenemos $*du = \rho(\partial u / \partial r) d\theta$ así de la ecuación 9.2 se tiene

$$\log r_1 \int_{C_1} r_1 \frac{\partial u}{\partial r} d\theta - \int_{C_1} u d\theta = \log r_2 \int_{C_2} r_2 \frac{\partial u}{\partial r} d\theta - \int_{C_2} u d\theta.$$

En otras palabras, la expresión

$$\int_{|z|=r} u d\theta - \log r \int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta$$

es constante, y esto es cierto incluso si sólo se sabe que u es armónica en un anillo. Como consecuencia de la ecuación 9.1, página 9.1, tenemos nuevamente al considerar el ciclo $C_1 - C_2$ que

$$\int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta$$

es constante en el caso de un anillo y cero si u es armónica en todo el disco. Combinando estos resultados se tiene

Proposición 9.1.9 La media aritmética de una función armónica u sobre circunferencias concéntricas $|z| = r$ es una función lineal de $\log r$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} u d\theta = \alpha \log r + \beta \quad (9.3)$$

y si u es armónica en el disco $B(0, \rho)$, con $r < \rho$, entonces $\alpha = 0$ y la media aritmética es constante.

En el último caso $\beta = u(0)$. Por continuidad, y cambiando a un nuevo origen se tiene el siguiente resultado, que es el análogo de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 9.1.10 — El teorema del valor medio. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$; entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (9.4)$$

Demostración. Sea $R > 0$ tal que $\overline{B(z_0, R)} \subset B(z_0, R) \subset \Omega$; como $B(0, R)$ es un conjunto abierto simplemente conexo contenido propiamente en $\mathbb{C}$, existe f una función holomorfa en $B(0, R)$ tal que $u = \operatorname{Re} f$. Como consecuencia del principio de la media para funciones holomorfas, (véase 5.3.4) tenemos que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Tomando las partes reales en ambos lados de la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \operatorname{Re} f(z_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt. \end{aligned}$$

■

Definición 9.1.1 Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua; diremos que u tiene la *propiedad del valor medio* si cuando $\overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt.$$

Uno de los resultados que veremos posteriormente consistirá en mostrar que cualquier función continua definida en una región que satisface la propiedad del valor medio es una función armónica. Uno de los principales resultados que se usa para demostrar este hecho es el análogo del teorema del módulo máximo para funciones armónicas.

Teorema 9.1.11 — Principio del módulo máximo (primera versión). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y supóngase que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la propiedad del valor medio. Si existe un punto $z_0 \in \Omega$ tal que $u(z_0) \geq u(z)$ para todo $z \in \Omega$ entonces u es una función constante.

Demostración. Consideremos el conjunto A definido por

$$A = \{z \in \Omega; u(z) = u(z_0)\}.$$

Como u es una función continua, el conjunto A es cerrado en Ω .

Si $a \in A$ podemos elegir $r > 0$ tal que $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$. Supongamos que existe un punto $b \in B(a, r)$ tal que $u(b) \neq u(z_0)$; por hipótesis $u(b) < u(z_0)$. Por continuidad, $u(z) < u(z_0) = u(a)$ para toda z en una vecindad del punto b . Si $\rho = |a - b|$ y $b = a + \rho e^{i\beta}$, $0 \leq \beta < 2\pi$ entonces existe un intervalo $I \subsetneq [0, 2\pi]$ tal que $\beta \in I$ y $u(a + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$ para toda $\theta \in I$. Por la propiedad del valor medio 9.1.1 tenemos que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{it}) dt < u(a),$$

lo cual es una contradicción.

Consecuentemente $B(a, r) \subset A$, por lo que el conjunto A también es abierto, y por conexidad de Ω , tenemos que $A = \Omega$, es decir, la función u es constante. ■

Teorema 9.1.12 — Principio del módulo máximo (segunda versión). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y sean $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas y acotadas en Ω que tienen la propiedad del valor medio. Si para cada punto a en la frontera extendida de Ω , es decir, para cada punto de a en la frontera de Ω como subconjunto de $\mathbb{C}_\infty$ que denotaremos $a \in \partial_\infty \Omega$, se tiene que

$$\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq \liminf_{z \rightarrow a} v(z)$$

entonces $u(z) < v(z)$ para cada $z \in \Omega$ o bien $u = v$.

Demostración. Fijemos $a \in \partial_\infty \Omega$ y para cada $\delta > 0$ consideremos $\Omega_\delta := \Omega \cap B(a, \delta)$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} [\sup\{u(z); z \in \Omega_\delta\} - \inf\{v(z); z \in \Omega_\delta\}] \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} [\sup\{u(z); z \in \Omega_\delta\} + \sup\{-v(z); z \in \Omega_\delta\}] \\
&\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup\{u(z) - v(z); z \in \Omega_\delta\}.
\end{aligned}$$

De donde, $\limsup_{z \rightarrow a} [u(z) - v(z)] \leq 0$ para cada $a \in \partial_\infty \Omega$. Por lo cual, basta demostrar el teorema bajo la hipótesis $v(z) = 0$ para cada $z \in \Omega$.

Supongamos que para cada $a \in \partial_\infty \Omega$

$$\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq 0. \quad (9.5)$$

Por la primera versión del principio del módulo máximo bastará mostrar que $u(z) \leq 0$ para cada $z \in \Omega$. Supongamos que u satisface 9.5 y que existe un punto $b \in \Omega$ con $u(b) > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $u(b) > \varepsilon$ y sea $B = \{z \in \Omega; u(z) \geq \varepsilon\}$. Si $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces 9.5 implica que existe un $\delta = \delta(a)$ tal que $u(z) < \varepsilon$ para toda $z \in \Omega \cap B(a, \delta)$.

Como consecuencia del lema de la cubierta de Lebesgue, puede elegirse una δ independiente de a . Esto es, existe un $\delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $d(z, \partial_\infty \Omega) < \delta$ entonces $u(z) < \varepsilon$. Así,

$$B \subset \{z \in \Omega; d(z, \partial_\infty \Omega) \geq \delta\}.$$

Por tanto B es acotado en el plano, y como claramente B es cerrado, B es compacto. Si $B \neq \emptyset$, existiría un punto $z_0 \in B$ tal que $u(z_0) \geq u(z)$ para toda $z \in B$. Como $u(z) < \varepsilon$ para $z \in \Omega \setminus B$, esto significa que u alcanza su valor máximo en Ω . Por tanto u debe ser una función constante. Pero esta constante debe ser $u(z_0)$ la cual es positiva, lo cual contradice la ecuación 9.5. ■

Corolario 9.1.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo y acotado y supongamos que $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface el principio del valor medio en Ω . Si $w(z) = 0$ para toda $z \in \partial\Omega$ entonces $w(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$.

Demostración. Tomemos $v = 0$ y $w = u$ en el teorema 9.1.12. Así $w(z) < 0$ para toda z o bien $w(z) \equiv 0$. Ahora tomemos $w = v$ y $u = 0$, entonces $w(z) > 0$ para toda z o bien $w(z) \equiv 0$. Como ambos casos se satisfacen $w \equiv 0$. ■

El principio del máximo tiene la siguiente consecuencia:

Corolario 9.1.3 Si u es una función continua definida en un conjunto conexo, cerrado y acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$ y es armónica en el interior de Ω , entonces u está determinada unívocamente por sus valores en $\partial\Omega$.

Demostración. Una función armónica satisface el principio del módulo máximo, véase 5.4.4, esto implica que si dos funciones u y v son armónicas en una región Ω , continuas en $\overline{\Omega}$, y coinciden en $\partial\Omega$, entonces $u = v$. Lo anterior es consecuencia de que $u - v$ tiene máximo y mínimo igual a 0, por lo tanto $u = v$. ■

Observación 14

Para las funciones armónicas no es válido el principio de identidad similar al de las funciones holomorfas; por ejemplo, la función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y se anula sobre $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, pero no es idénticamente nula.

9.2 El núcleo de Poisson

Si $B(z_0, r) \subset \Omega$ y u es una función armónica en Ω , el teorema del valor medio determina el valor de la función armónica u en el punto z_0 , y nos basta con esto, pues usando una transformación de Möbius podemos enviar cualquier punto $z_1 \in B(z_0, r)$ en el punto z_0 , (véase el lema 5.4.4).

Para ser explícitos, supongamos que u es armónica en $B(0, R)$. La transformación de Möbius

$$z = S(\zeta) = \frac{R(R\zeta + z_0)}{R + \bar{z}_0\zeta}$$

mapea el disco unitario cerrado con centro en el origen y radio 1 en el disco cerrado con centro en el origen y radio R , además $S(0) = z_0$. La función $u(S(\zeta))$ es armónica en el disco unitario cerrado con centro en el origen y radio 1, y como consecuencia del teorema del valor medio tenemos

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} u(S(\zeta)) d\arg \zeta.$$

Como

$$\zeta = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

tenemos

$$\begin{aligned} d\arg \zeta &= -i \frac{d\zeta}{\zeta} = -i \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right) dz \\ &= \left(\frac{z}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0 z}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Sustituyendo $R^2 = z\bar{z}$, el coeficiente de $d\theta$ en la última expresión puede reescribirse como

$$\frac{z}{z - z_0} + \frac{\bar{z}_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2}$$

o equivalentemente, como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z + z_0}{z - z_0} + \frac{\bar{z} + \bar{z}_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z + z_0}{z - z_0} \right).$$

Así obtenemos las dos formas de la *fórmula de Poisson*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} u(z) d\theta \quad (9.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \operatorname{Re} \left(\frac{z + z_0}{z - z_0} \right) u(z) d\theta, \quad (9.7)$$

y en coordenadas polares

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - t) + r^2} u(Re^{i\theta}) d\theta. \quad (9.8)$$

Definición 9.2.1 Sea $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Definimos el núcleo de Poisson para $B(a, R)$, la bola abierta con centro en a y radio R , como la función

$$P_{a,R}(z, t) = \operatorname{Re} \left(\frac{R e^{it} + (z - a)}{R e^{it} - (z - a)} \right), \quad z \in B(a, R), t \in \mathbb{R}.$$

Si ϕ es una función definida sobre $\{z \in \mathbb{C}; |z - a| = R\}$, y si la función $t \mapsto \phi(a + R e^{it})$ es

integrable sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, se define la integral de Poisson de ϕ como la función

$$P_{a,R}(\phi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{a,r}(z, t) \phi(a + R e^{it}) dt.$$

Si $a = 0$ y $R = 1$, escribimos

$$P(z) = P_{0,1}(z, 0) = \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right), \quad \text{para } |z| < 1;$$

si $z = r e^{i\theta}$ ($r \geq 0$), escribiremos

$$\begin{aligned} P_r(\theta) = P(r e^{i\theta}) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 + r e^{i\theta}}{1 - r e^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1 - r^2}{|1 - r e^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Como consecuencia de la ecuación 9.9 es claro que $P_r(\theta)$ es una función no negativa, par y periódica de período 2π , es decir, $0 \leq P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi)$.

Para $|z| < 1$ se tiene que

$$\frac{1+z}{1-z} = (1+z) \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n,$$

de donde

$$P_r(\theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Además, si $z \in B(a, R)$ tenemos que $z = a + r e^{i\theta}$, por lo que

$$P_{a,R}(z, t) = P \left(\frac{r}{R} e^{i(\theta-t)} \right).$$

Lema 9.2.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, y supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces f y $\bar{f}$ son funciones armónicas en Ω ; en particular $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ también es armónica.

Demostración.

$$\Delta^c f = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0; \quad \Delta^c \bar{f} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \right) = 0.$$

■

Lema 9.2.2 El núcleo de Poisson satisface las siguientes propiedades:

1. Para $t \in \mathbb{R}$ fijo, el núcleo de Poisson $P_{a,R}(z, t)$ es una función armónica en $B(a, R)$.
2. $P_{a,R}(z, t) > 0$ y
3. Para $z \in B(a, R)$, $0 \leq r < R$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{a,R}(a + r e^{i\theta}, t) d\theta = 1.$$

Demostración. Para t fijo, es claro que la función

$$f_t(z) = \frac{R e^{it} + z - a}{R e^{it} - z + a}$$

es holomorfa en $B(a, R)$. Como consecuencia del lema anterior $\operatorname{Re}(f_t)$ es armónica en $B(a, R)$, luego entonces

$$P_{a,R}(z, t) = \operatorname{Re} \left(\frac{R e^{it} + (z - a)}{R e^{it} - (z - a)} \right) = \operatorname{Re} f_t(z)$$

es armónica en $B(a, R)$.

Supongamos $0 \leq r < R$, si $z = a + r e^{i\theta}$ y $\rho = r/R$, entonces

$$P_{a,R}(z, t) = P(\rho e^{i(\theta-t)}) = P_\rho(\theta - t).$$

Como $1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - t) \geq 1 + \rho^2 - 2\rho = (1 - \rho)^2 > 0$, tenemos que

$$P_{a,R}(z, t) = P_\rho(\theta - t) = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - t)} > 0.$$

Finalmente

$$\int_0^{2\pi} P_\rho(\theta - t) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{-int} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 2\pi.$$

■

Lema 9.2.3 Sea $0 < \delta < \pi/2$. Entonces, para $0 \leq \theta \leq 2\pi - \delta$ se tiene

$$0 < P_r(\theta) \leq \frac{1 - r^2}{1 - \cos^2 \delta} \quad \text{para } 0 \leq r < 1.$$

En particular, $\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\theta) = 0$ uniformemente para $\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$.

Demostración. Si $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$, entonces $\cos \theta \leq 0$, de donde $1 + r^2 - 2r \cos \theta \geq 1$. Si además $\delta \leq \theta \leq \pi/2$, tenemos que $0 \leq \cos \theta \leq \cos \delta$, así que

$$\begin{aligned} 1 + r^2 - 2r \cos \theta &\geq 1 + r^2 - 2r \cos \delta \\ &= 1 - \cos^2 \delta + (r - \cos \delta)^2 \geq 1 - \cos^2 \delta. \end{aligned}$$

Un argumento similar se aplica si $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi - \delta$.

■

Teorema 9.2.1 Sea ϕ una función continua y real valuada definida sobre la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Si $z = r e^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, considere la integral de Poisson de ϕ :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \phi(e^{it}) dt.$$

Entonces, u es armónica en $\mathbb{D}$ y $u(z) \rightarrow \phi(e^{it})$ cuando $z \rightarrow e^{it}$; además la convergencia es uniforme en t .

Demostración. Si $0 \leq r < 1$ y $z = r e^{i\theta}$, entonces

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \phi(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + r e^{i(\theta-t)}}{1 - r e^{i(\theta-t)}} \right) \phi(e^{it}) dt \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + r e^{i(\theta-t)}}{1 - r e^{i(\theta-t)}} \right) \phi(e^{it}) dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it} + r e^{i\theta}}{e^{it} - r e^{i\theta}} \right) \phi(e^{it}) dt \right). \end{aligned}$$

Definimos $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \phi(e^{it}) dt.$$

Como u es la parte real de g , basta demostrar que g es holomorfa en $\mathbb{D}$. Es decir, necesitamos mostrar que el siguiente límite existe:

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{g(z + \zeta) - g(z)}{\zeta}.$$

Como

$$\begin{aligned} & \frac{g(z + \zeta) - g(z)}{\zeta} \\ &= \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it} + (z + \zeta)}{e^{it} - (z + \zeta)} - \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) \phi(e^{it}) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{(e^{it} - (z + \zeta))(e^{it} - z)} \phi(e^{it}) dt \\ &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{(e^{it} - z)^2} \phi(e^{it}) dt. \end{aligned}$$

Como consecuencia del lema 9.2.2, página 273, si $0 \leq r < 1$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta = 1.$$

Luego entonces, dado $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo tenemos que

$$\begin{aligned} u(z) - \phi(e^{it_0}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \phi(e^{it}) dt - \phi(e^{it_0}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) (\phi(e^{it}) - \phi(e^{it_0})) dt. \end{aligned}$$

Como ϕ es continua en $\mathbb{S}^1$, dada $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que

$$|\phi(e^{it}) - \phi(e^{it_0})| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |e^{it} - e^{it_0}| < \delta.$$

Además, si $|e^{it} - e^{it_0}| \geq \delta$ y si e^{it_0} es suficientemente cercano a e^{it_0} , entonces $|e^{it(t-\theta)} - 1| \geq \delta/2$.

Como consecuencia de los lemas 9.2.2 y 9.2.3, existe una constante $C(\delta)$ que depende sólo de δ tal que

$$\begin{aligned} |u(z) - \phi(e^{it_0})| &\leq C(\delta)(1 - r^2) \int_0^{2\pi} |\phi(e^{it}) - \phi(e^{it_0})| dt \\ &\quad + \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) dt \\ &\leq (M + 2\pi|\phi(e^{it_0})|) C(\delta)(1 - r^2) + \varepsilon \end{aligned}$$

donde $M = \int_0^{2\pi} |\phi(e^{it})| dt$. Si r es suficientemente cercano a 1, este número es menor a 2ε . Por lo cual $u(z) \rightarrow \phi(e^{it})$ uniformemente en t cuando $z \rightarrow e^{it}$. ■

Por medio de un cambio de variable podemos reescribir este teorema como sigue:

Teorema 9.2.2 Sean $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ y ϕ una función continua sobre la circunferencia $\{z \in \mathbb{C}; |z - a| = R\}$. Entonces la función u sobre $\overline{B(a, R)}$ dada por

$$u(z) = \begin{cases} P_{a,R}(\phi)(z), & \text{si } z \in B(a, R) \\ \phi(z), & \text{si } |z - a| = R \end{cases},$$

es continua en $\overline{B(a, R)}$ y armónica en $B(a, R)$.

Como una consecuencia inmediata del teorema 9.2.1 tenemos:

Corolario 9.2.1 Si $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que es armónica en $\mathbb{D}$ entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt$$

para $0 \leq r < 1$ y toda θ . Además, u es la parte real de la función holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt.$$

Corolario 9.2.2 Sea $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, y supóngase que ϕ es una función continua y real valuada sobre $\{z \in \mathbb{C}; |z - a| = \rho\}$; entonces existe una única función continua $w : B(a, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que w es armónica en $B(a, \rho)$ y $w(z) = \phi(z)$ si $|z - a| = \rho$.

Demostración. Consideremos $f(e^{i\theta}) = \phi(a + \rho e^{i\theta})$; entonces f es continua en la frontera de la bola unitaria con centro en el origen, es decir, $\mathbb{S}^1$. Si $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que u es armónica en $\mathbb{D}$ y $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, entonces

$$w(z) = u\left(\frac{z - a}{\rho}\right)$$

es la función deseada sobre $\overline{B(a, \rho)}$ ■

Ahora es posible enunciar el recíproco del teorema del valor medio 9.1.10.

Teorema 9.2.3 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que satisface la propiedad del valor medio, entonces u es armónica.

Demostración. Para $a \in \Omega$ elegimos $\rho > 0$ tal que $\overline{B(a, \rho)} \subset \Omega$; bastará demostrar que u es armónica en $B(a, \rho)$. Como consecuencia del corolario 9.2.2 existe una función continua $w : \overline{B(a, \rho)} \rightarrow \mathbb{R}$ que es armónica en $B(a, \rho)$ y tal que $w(a + \rho e^{i\theta}) = u(a + \rho e^{i\theta})$ para toda θ . Como $u - w$ satisface la propiedad del valor medio y $(u - w)(z) = 0$ si $|z - a| = \rho$, luego por el corolario 9.1.2 tenemos que $u \equiv w$ en $B(a, \rho)$; en particular, u debe ser armónica. ■

La fórmula de Poisson 9.7 nos permite expresar una función armónica por medio de sus valores en una circunferencia, lo cual tiene como consecuencia el siguiente resultado:

Teorema 9.2.4 — Desigualdad de Harnack. Dada una función $u : \overline{B(a, R)} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, armónica en $B(a, R)$ y $u \geq 0$, entonces para $0 \leq r < R$ y toda θ se tiene que

$$\frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} u(0) \quad (9.10)$$

Demostración. Si $R > 0$ y $0 \leq r < R$, para $|z| < r$ podemos escribir la fórmula de Poisson 9.7 como

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} u(Re^{i\theta}) d\theta, \quad (9.11)$$

de donde

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{|Re^{i\theta}-z|^2} \leq \frac{R+r}{R-r}. \quad (9.12)$$

De la fórmula 9.11 obtenemos la siguiente estimación

$$|u(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R+r}{R-r} \int_0^{2\pi} |u(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Ya que $u(Re^{i\theta}) \geq 0$, podemos utilizar las desigualdades de 9.12 para obtener

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R-r}{R+r} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta \leq u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R+r}{R-r} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Como la media aritmética de $u(Re^{i\theta})$ es igual a $u(0)$ tenemos que

$$\frac{R-r}{R+r} u(0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r} u(0).$$

■

9.3 El principio de reflexión

Algunas funciones cumplen la condición $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ en ciertos dominios y otras no, por ejemplo, las funciones $f(z) = z + 1$ y $g(z) = z^2$ tienen esa propiedad cuando el dominio es todo el plano, pero no ocurre lo mismo para $h(z) = z + i$ o $k(z) = iz^2$. El teorema, conocido como el principio de reflexión, permite predecir cuándo $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

El principio de reflexión se basa sobre el hecho de que si $u(z)$ es una función armónica, entonces $u(\bar{z})$ también es armónica, y si $f(z)$ es una función holomorfa, entonces $\overline{f(\bar{z})}$ también es holomorfa. De manera más precisa, si $u(z)$ es armónica y $f(z)$ es holomorfa en un abierto conexo Ω , entonces $u(\bar{z})$ es armónica y $\overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa como función de z en el conjunto $\Omega^* = \{z \in \mathbb{C}; z \in \Omega\}$ que se obtiene reflejando Ω sobre el eje x ; esto es, $z \in \Omega^*$ si y únicamente si $\bar{z} \in \Omega$.

Teorema 9.3.1 — Principio de reflexión de Schwarz. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo tal que $\Omega = \Omega^*$. Si $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{H}_+$, $\Omega_0 = \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z = 0\}$, $\Omega_- = \{z \in \Omega; \operatorname{Im} z < 0\}$, y si $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

en todo punto $z \in \Omega$ si, y solamente si $f(x) \in \mathbb{R}$ para cada $x \in \Omega_0$.

Demostración. Supongamos que $\Omega^* = \Omega$; como Ω es conexo, éste debe intersectar el eje real a lo largo de, al menos, un intervalo abierto Ω_0 . Supongamos ahora que $f(z)$ es holomorfa en Ω y $f(z) \in \mathbb{R}$ si $z \in \mathbb{R}$. Como $h(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa y se anula a lo largo de un intervalo, como consecuencia del principio de identidad 5.3.1, $h(z)$ debe ser idénticamente nula, es decir $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ en Ω . Si $f = u + iv$ entonces $u(z) = u(\bar{z})$, $v(z) = -v(\bar{z})$.

Recíprocamente, si $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ y escribimos $f = u + iv$, entonces

$$u(\bar{z}) - iv(\bar{z}) = u(z) + iv(z).$$

En particular, si $(x, 0)$ es un punto en un segmento del eje real contenido en Ω , y si $z = x + iy \cong (x, y)$ entonces

$$u(x, 0) - iv(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0)$$

e igualando las partes imaginarias tenemos que $v(x, 0) = 0$. Por tanto, $f(x) \in \mathbb{R}$ en ese segmento. ■

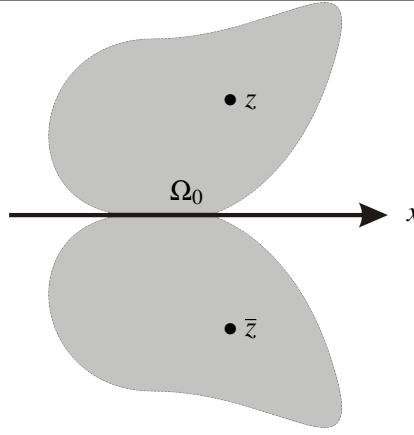


Figura 9.1: Ω es un conjunto abierto tal que $\Omega = \Omega^*$

Teorema 9.3.2 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, y supongamos que $\Omega = \Omega^*$. Supongamos que $v(x)$ es una función continua en $\Omega_+ \cup \Omega_0$, armónica en Ω_+ , y cero en Ω_0 . Entonces v tiene una extensión armónica a Ω la cual satisface la relación $v(\bar{z}) = -v(z)$. Bajo las mismas hipótesis, si v es la parte imaginaria de una función analítica $f(z)$ en Ω_+ , entonces $f(z)$ tiene una extensión analítica la cual satisface $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Demostración. Para demostrar este teorema, consideremos la función

$$V(z) = \begin{cases} v(z) & \text{si } z \in \Omega_+ \\ 0 & \text{si } z \in \Omega_0 \\ -v(\bar{z}) & \text{si } z \in (\Omega_+)^* \end{cases}$$

Debemos mostrar que $V(z)$ es una función armónica en Ω_0 . Para esto, sea $x_0 \in I$ y consideremos una bola $B(x_0, R)$ con centro en x_0 contenida en Ω , y denotemos por

$$P_{x_0, R}(V)(z)$$

la integral de Poisson con respecto a esta bola determinada por los valores frontera V . Entonces $V - P_{x_0, R}V$ es armónica en la semibola superior. Se anula sobre la semicircunferencia, y por el teorema 9.2.2, también sobre el diámetro, ya que V tiende a cero por definición y $P_{x_0, R}$ se anula por simetría. Como consecuencia de los principios del máximo y el mínimo $V = P_{x_0, R}$ en la semibola superior, el mismo argumento se utiliza para la parte inferior. Concluimos así que V es armónica en $B(x_0, R)$, y en particular, en x_0 .

Para la parte restante del teorema, consideremos nuevamente una bola con centro en $x_0 \in I$, extendamos la función v a toda la bola, entonces v tiene una función armónica conjugada $-u_0$ en la misma bola la cual podemos normalizar en forma tal que $u_0 = \operatorname{Re} f(z)$ en la mitad superior. Consideremos la función $U_0(z) = u_0(z) - u_0(\bar{z})$. Sobre el diámetro, que está contenido en $\mathbb{R}$, es claro que $\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0$ y además

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Consecuentemente la función analítica

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} - i \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

se anula sobre el eje real, y así, es idénticamente nula. Por lo cual U_0 es una función constante, y dicha constante es cero, consecuentemente $u_0(z) = u_0(\bar{z})$.

Ya que la construcción puede repetirse sobre bolas arbitrarias, u_0 deberá coincidir en aquellas que se traslapen, así puede extenderse a toda Ω . ■

9.4 El problema de Dirichlet

El problema de Dirichlet, quizá el más importante en la teoría de las funciones armónicas, consiste en lo siguiente:

Dado un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función continua ϕ sobre $\partial\Omega$, ¿existirá una función continua h definida sobre $\overline{\Omega}$, armónica en Ω , tal que $h|_{\partial\Omega} = \phi$?

Formalmente tenemos la siguiente definición:

Definición 9.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y acotado, y sea $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua real valuada sobre $\partial\Omega$. Diremos que *el problema de Dirichlet es soluble con valores frontera ϕ* si existe una función h continua sobre $\overline{\Omega}$ tal que $h|_{\Omega}$ es armónica y $h|_{\partial\Omega} = \phi$.

Si el problema de Dirichlet con valores frontera ϕ es soluble para toda función continua ϕ definida sobre $\partial\Omega$, diremos que el problema de Dirichlet es soluble sobre Ω , y diremos que Ω es una región de Dirichlet.

El teorema 9.2.1 nos dice que la integral de Poisson da una solución al problema de Dirichlet en la bola unitaria con centro en el origen y para una función ϕ continua definida en la frontera de la bola unitaria con centro en el origen. Pero el caso de regiones arbitrarias es mucho más difícil. Los abiertos simplemente conexos son regiones de Dirichlet (véase (Conway, 2010, Vol. I, Cap. X, Cor. 4.18, pg. 274)). Aunque aquí no demostraremos este resultado general, para ciertos abiertos simplemente conexos $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es posible demostrar que son regiones de Dirichlet y obtener explícitamente la solución del problema de Dirichlet a partir de la solución del problema en $\mathbb{D}$.

Según el teorema de la aplicación de Riemann 8.7.1 todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$. Cuando un abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ tiene la propiedad de que el isomorfismo conforme $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ se puede extender a un homeomorfismo $\hat{h} : \overline{\Omega_\infty} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ diremos que Ω tiene la *propiedad de extensión*.

En este caso la restricción de $\hat{h}$ a la frontera $\partial_\infty\Omega$ es un homeomorfismo entre las fronteras $\partial_\infty\Omega$ y $\partial\mathbb{D}$ luego, una condición necesaria para que Ω tenga la propiedad de extensión es que su frontera sea una curva cerrada simple sobre la esfera de Riemann (en el caso de un abierto acotado Ω , será una curva de Jordan en el plano, es decir, una curva cerrada homeomorfa a una circunferencia). Esto es, una condición necesaria para que un abierto acotado simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ tenga la propiedad de extensión es que su frontera sea una curva de Jordan. Esta condición necesaria también es suficiente. Aunque no demostramos aquí este resultado, la idea es la siguiente: en primer lugar se demuestra que si $\partial\Omega$ es una curva de Jordan entonces cada punto $a \in \partial\Omega$ es un *punto frontera simple*, lo cual significa que para cada sucesión $a_n \in \Omega$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ existe una función continua $\gamma : [0, 1) \rightarrow \Omega$ con $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = a$, y una sucesión estrictamente creciente $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$ tal que $\gamma(t_n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, véase (Rudin, 1986, Chap. 14)).

Después de lo antes mencionado, es fácil dar un ejemplo de un abierto simplemente conexo sin la propiedad de extensión: El conjunto $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq x < 1\}$ no tiene la propiedad de extensión, pues cada $x \in [0, 1)$ es un punto frontera que no es simple.

Proposición 9.4.1 Todo abierto simplemente conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad de extensión es una región de Dirichlet.

Demostración. Sea $h : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorfismo conforme que se extiende a un homeomorfismo $\hat{h} : \overline{\Omega_\infty} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$. La restricción h_0 de $\hat{h}$ a la frontera $\partial_\infty\Omega$ es un homeomorfismo entre las fronteras $h_0 : \partial_\infty\Omega \rightarrow \partial\mathbb{D}$, luego toda función continua $\hat{\phi} : \partial_\infty\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es de la forma $\hat{\phi} = \phi \circ h_0$ donde $\phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Sea $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la solución del problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$ dada por el teorema 9.2.1. La función continua $\hat{u} = u \circ h : \overline{\Omega_\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ coincide con $\hat{\phi}$ sobre la frontera $\partial_\infty\Omega$ y es armónica en Ω , luego entonces $\hat{u}$ es la solución del problema de Dirichlet en Ω con la condición de frontera $\hat{\phi}$. ■

Ejemplo 55 El problema de Dirichlet en el semiplano superior

Para solucionar el problema de Dirichlet en el semiplano superior consideremos la transformación de Möbius $T : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i}, \text{ entonces } T^{-1}(z) = \frac{iz+1}{-z+1}.$$

de donde

$$\hat{u}(z) = u(T(z)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + T(z)}{\zeta - T(z)} \phi(T^{-1}(\zeta)) \frac{d\zeta}{\zeta} \right)$$

Con el cambio de variable $t = T^{-1}(\zeta)$ la solución del problema de Dirichlet para la función continua $\phi : \partial\mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ será:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \phi(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (9.13)$$

9.5 Ejercicios

1. Sea $f(x, y) = \sum_{k,l=0}^n a_{k,l} x^k y^l$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f(x, y)$ es armónica si, y solamente si:
 - a) $k(k-1)a_{k,l-2} + l(l-1)a_{k-2,l} = 0$ para $2 \leq k, l \leq n$.
 - b) $a_{n-1,l} = a_{n,l} = 0$ para $2 \leq l \leq n$.
 - c) $a_{k,n-1} = a_{k,n} = 0$ para $2 \leq k \leq n$.
2. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y f es una función holomorfa nunca nula en Ω , demuestre que la función $u = \log |f|$ es una función armónica en Ω .
3. Utilice la expresión 9.1.1 para obtener una armónica conjugada de la función armónica $u(x, y) = x^3 - 3xy$. Escriba la función holomorfa resultante en términos de la variable compleja z .
4. La aplicación $f(z) = e^z$ transforma la franja horizontal $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ en el semiplano superior $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$. Por otra parte, la función $h(x, y) = x^2 - y^2$ es armónica en $\mathbb{H}_+$. Aplique esta información para demostrar que la función $H(x, y) = e^{2x} \cos 2y$ es armónica en Ω . Posteriormente, verifique el resultado directamente.
5. Demuestre que cualquier función armónica que depende solamente de la distancia r a un punto fijo $z_0 \in \mathbb{C}$ debe ser de la forma $a \ln r + b$ con a y b constantes.
6. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $z = x + iy$, es conforme en los puntos de una curva suave γ , y Γ la imagen bajo f de la curva γ . Si una función $h(x, y)$ satisface en los puntos de Γ alguna de las condiciones

$$h = h_0 \quad \text{o} \quad \frac{dh}{dn} = 0$$

donde h_0 es una constante real y dh/dn denota la derivada normal a Γ , demuestre que la función

$$H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$$

satisface en los puntos de γ la condición correspondiente

$$H = h_0 \quad \text{o} \quad \frac{dH}{dN} = 0,$$

donde dH/dN denota la derivada normal a γ .¹

¹Recuerde que $\frac{dh}{dN} = \operatorname{grad} h \cdot N$, donde $\operatorname{grad} h$ denota el gradiente de h en un punto (x, y) de Γ y N es un vector normal unitario a Γ en (x, y) .

7. Encuentre una función armónica en el semiplano superior $\mathbb{H}_+$ que sobre el eje x tome los valores

$$\phi(x) = \begin{cases} t_0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$ es una constante.

8. Si $a > 1$ es una constante real, resuelva el problema $\Delta u = 0$ en $\mathbb{H}_+$ si

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} u(x, y) = \phi(x) = \begin{cases} t_0 & \text{si } x < -a \\ t_1 & \text{si } -a < x < a \\ t_2 & \text{si } a < x \end{cases}$$

donde t_0 , t_1 y t_2 son constantes reales.

9. Encuentre una función armónica en $\mathbb{D}$ que toma los valores prescritos por

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$



10. Funciones especiales

A lo largo del presente capítulo introduciremos las nociones de producto infinito de números complejos y producto infinito de funciones holomorfas. Asimismo presentamos una introducción al estudio de algunas propiedades elementales de las funciones gamma, theta y zeta.

10.1 Productos infinitos

Los productos infinitos aparecen por primera vez en 1579 en el trabajo de F. Vieta *Opera*, p. 400, *Leyden*, 1646; en donde presenta la siguiente expresión para π :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots,$$

y en 1655 J. Wallis descubre que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \cdots,$$

resultado que aparece en *Arithmetica infinitorum*, *Opera* 1, p. 468, sin embargo L. Euler es el primero que trabaja los productos infinitos de manera sistemática Euler (1796), y es gracias al trabajo de Weierstrass que los productos infinitos logran encontrado su lugar permanente un análisis alrededor de 1854.

En la presente sección primeramente consideraremos productos infinitos de números complejos, así como los resultados fundamentales de su teoría de convergencia y veremos cómo se relaciona su estudio con el estudio de las series de potencias. Posteriormente aplicaremos los resultados obtenidos para estudiar productos infinitos de funciones holomorfas. Para un estudio detallado sobre éste tema pueden consultarse los libros Remmert (1998) y Knopp (1974).

Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos, el producto infinito de los a_j se entiende como el límite de un producto finito, donde dicho límite se hace en el índice superior del producto

$$\prod_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n a_k.$$

es decir, que al igual que las series se entienden como límites de sumas parciales, un producto infinito se entiende como límite de productos parciales.

Definición 10.1.1 Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos, denotaremos $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ al producto infinito de los números a_j . Diremos que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ es *convergente* si $a_j \neq 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y la sucesión $\{p_n\}$ tiene un límite $p \neq 0$, donde $p_n = \prod_{j=1}^n a_j$ es el n -ésimo producto parcial de los factores a_j . En éste caso denotaremos $p = \prod_{j=1}^{\infty} a_j$ al producto infinito de los números a_j , esto es:

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Finalmente, diremos que un producto infinito es *divergente* si no es convergente.

Ejemplo 56

1. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ converge, ya que

$$\begin{aligned} p_n &= \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdots \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n \cdot n} \cdot \frac{n \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{de donde } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

2. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ diverge, esto es:

$$p_n = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^j}{j+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

$$\text{de donde } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ así el producto infinito diverge a cero.}$$

3. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ diverge, ya que

$$p_n = \prod_{j=1}^n \frac{j+1}{j} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = n+1$$

$$\text{de donde } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty, \text{ por lo que el producto diverge a infinito.}$$

Proposición 10.1.1 Si $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos, $a_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, una condición necesaria para que el producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ converja es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1. \quad (10.1)$$

Demostración. Supongamos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos, tales que $a_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \neq 0$, donde $p_n = \prod_{j=1}^n a_j$ es el n -ésimo producto parcial de los números a_j . Como $a_n = \frac{p_{n+1}}{p_n}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n+1} a_j}{\prod_{j=1}^n a_j} \right) = \frac{p}{p} = 1.$$

■

Por otra parte, podemos observar que, si $a_n = a$ es la sucesión constante con $|a| < 1$, entonces $p_n = \prod_{j=1}^n a_n = \prod_{j=1}^n a = a^n$, de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, aunque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$.

Como la exponencial de una suma es el producto de las exponenciales de los términos involucrados, es posible discutir la convergencia del producto infinito $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$, cuando el cero no está involucrado, por medio de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$.

Si $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, en particular, para n suficientemente grande se satisface que $\operatorname{Re} a_n > 0$. Sin perder generalidad, en los enunciados que realizaremos a continuación podremos suponer $\operatorname{Re} a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 10.1.2 Supongamos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos tales que $\operatorname{Re} a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ converge a un número distinto de cero cuando, y solamente cuando, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$ converge.

Demostración. Supongamos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$ converge a s . Si $s_n = \sum_{j=1}^n \log a_j$ denota la n -ésima suma parcial, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp s_n = \exp s$.

Pero $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{j=1}^{\infty} a_j$, consecuentemente $\prod_{j=1}^{\infty} a_j$ converge a $\exp s \neq 0$.

Recíprocamente, si $p_n = \prod_{j=1}^n a_j$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq 0$, entonces $p = re^{i\theta}$, con $0 < r$ y $-\pi < \theta < \pi$.

Ya que $\operatorname{Re} a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, en la rama principal de logaritmo

$$\log p_n = \ln |p_n| + i\theta_n, \quad \text{con } \theta - \pi < \theta_n < \theta + \pi.$$

Si $s_n = \sum_{j=1}^n \log a_j$, entonces $\exp s_n = \prod_{j=1}^n a_j = p_n$. Por lo tanto $s_n = \log p_n + 2\pi i k_n$ con $k_n \in \mathbb{Z}$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_{n-1} = \log a_n = 0$.

Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log p_n - \log p_{n-1}) = 0$, luego entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n - k_{n-1}) = 0$. Como $k_n \in \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que existen $N \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $k_m = k$ para cada $m \geq N$.

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \log p + 2\pi i k$, es decir, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$ converge. ■

Definición 10.1.2 Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos distintos de cero. Diremos que el producto infinito $\prod_{j=1}^n a_n$ converge absolutamente si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ y la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \log a_j$ converge absolutamente, esto es, $\sum_{j=1}^{\infty} |\log a_j|$ converge.

Bajo esta condición de convergencia absoluta, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, existen $b_n \in \mathbb{C}$ tales que $a_n = 1 - b_n$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ y, por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - b_n)$$

converge, de donde, la sucesión de sumas parciales

$$s_n = \sum_{j=1}^n \log(1 - b_j)$$

tienen un límite.

Consideremos ahora la expansión en serie de potencias de la función $\log(1 + z)$ alrededor del punto $z_0 = 0$.

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad (10.2)$$

la cual tiene radio de convergencia $r = 1$. Si $|z| < 1$ se sigue que

$$\left| 1 - \frac{\log(1 + z)}{z} \right| = \left| \frac{z}{2} - \frac{z^2}{3} + \dots \right| \leq \frac{1}{2} (|z| + |z|^2 + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

En particular, si $|z| < \frac{1}{2}$, se sigue que

$$\left| 1 - \frac{\log(1 + z)}{z} \right| \leq \frac{1}{2},$$

lo cual implica

$$\frac{|z|}{2} \leq |\log(1 + z)| \leq \frac{3|z|}{2}. \quad (10.3)$$

Lema 10.1.1 Sea $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos, con $b_n \neq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Suponga además que $\sum |b_n|$ converge. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$ converge absolutamente.

Demostración. Como $\sum |b_n|$ converge, en particular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0,$$

consecuentemente existe N tal que $|b_n| < \frac{1}{2}$ si $n \geq N$. Luego entonces $\log(1 - b_n)$ está bien definido por la serie 10.2 en una vecindad de $z_0 = 0$.

Como consecuencia de 10.3 tenemos que

$$|\log(1 - b_n)| \leq \frac{3}{2} |b_n|.$$

Por la convergencia de la serie $\sum |b_n|$ y el criterio de comparación 3.4.7, página 3.4.7 la serie $\sum |\log(1 - b_n)|$ converge, por la definición de convergencia absoluta 10.1.2 página 286 tenemos que $\prod_{j=1}^n (1 - b_j)$ converge absolutamente ■

Ejemplo 57

Consideremos la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right\}$, es claro que ésta sucesión no converge absolutamente, pues

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty.$$

Pero

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 \pm \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

como consecuencia del criterio de la p -serie, proposición 3.4.8, página 38, sabemos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$ es convergente, y por lema 10.1.1 tenemos que $\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$ converge.

Este lema reduce el estudio de la convergencia de un producto infinito al estudio de la convergencia de una serie. Como una aplicación de lo anterior podremos considerar el producto infinito de funciones acotadas, y determinar la convergencia del producto.

Definición 10.1.3 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathbb{C}$ -valuadas definidas sobre un conjunto X . El producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 - f_j(z)) \tag{10.4}$$

1. *Converge puntualmente* en X si para cada $z \in X$ se tiene que la sucesión de números complejos

$$p_n(z) = \prod_{j=1}^n (1 - f_j(z))$$

converge, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 - f_j(z))$ existe y es distinto de cero.

2. *Converge uniformemente* en X si la sucesión de productos parciales

$$p_n(z) = \prod_{j=1}^n (1 - f_j(z)) \tag{10.5}$$

converge uniformemente en X a una función $p(z)$ que es distinta de cero para cada $z \in X$.

Lema 10.1.2 Sean X un conjunto, $f, f_1, f_2, \dots$ funciones $\mathbb{C}$ -valuadas definidas en X tales que la sucesión $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ para $x \in X$. Si existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re} f(x) < C$ para toda $x \in X$, entonces $\exp f_n(x)$ converge uniformemente al valor $\exp f(x)$ para cada $x \in X$.

Demostración. Como la función exponencial es continua en $\mathbb{C}$, en particular, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|e^z - 1| < \varepsilon e^{-C}$, si $|z| < \delta$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ para toda $x \in X$, si $n \geq N$. De donde

$$\varepsilon e^{-C} > |e^z - 1| = |\exp(f_n(x) - f(x)) - 1| = \left| \frac{\exp f_n(x)}{\exp f(x)} - 1 \right|$$

así, para cada $x \in X$, si $n \geq N$

$$|\exp f_n(x) - \exp f(x)| < \varepsilon e^{-C} |\exp f(x)| \leq \varepsilon.$$

■

Lema 10.1.3 Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo no vacío, $\mathcal{K}$ un subconjunto compacto de Ω , y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathbb{C}$ -valuadas continuas definidas en Ω , donde cada f_n no es idénticamente nula.

Supongamos que la serie $\sum f_n(z)$ converge uniforme y absolutamente para cada $z \in \mathcal{K}$, entonces $f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ converge uniforme y absolutamente para cada $z \in \mathcal{K}$.

Además, si z_0 es un cero de f , existe un entero N tal que $f_n(z) = -1$ para algún n con $1 \leq n \leq N$.

Demostración. Si $\mathcal{K} \subset \Omega$ es compacto, como $\sum f_n(z)$ converge uniformemente para cada $z \in \mathcal{K}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z)| < \frac{1}{2}$ para toda $z \in \mathcal{K}$ y $n > N$. Lo anterior implica $\operatorname{Re}(1 + f_n(z)) > 0$. Como consecuencia de la desigualdad 10.3 se sigue que

$$|\log(1 + f_n(z))| \leq \frac{3}{2} |f_n(z)| \quad \text{para cada } n > N \text{ y } z \in \mathcal{K}.$$

Consecuentemente

$$g(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \log(1 + f_n(z))$$

converge uniformemente para cada $z \in \mathcal{K}$. Ya que $g(z)$ es una función continua en el compacto $\mathcal{K}$, en particular es acotada, por ende, existe una constante C tal que $\operatorname{Re} g(z) < C$ para cada $z \in \mathcal{K}$. Aplicando el lema 10.1.2 se sigue que

$$\exp g(z) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

converge uniformemente para cada $z \in \mathcal{K}$.

Luego entonces

$$f(z) = \prod_{j=1}^N (1 + f_j(z)) \cdot \exp g(z)$$

y como $\exp g(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathcal{K}$, se sigue que $f(z) = 0$ si, y solamente si, $1 + f_n(z) = 0$ para algún n , con $1 \leq n \leq N$. ■

Teorema 10.1.3 Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, conexo no vacío, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas no idénticamente nulas definidas en Ω . Si $\sum (f_n(z) - 1)$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de Ω , entonces $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ converge a una función holomorfa en Ω . Si z_0 es un cero de f , entonces z_0 solamente es un cero de un número finito de f_n , y la multiplicidad del cero de f en z_0 es igual a la suma de las multiplicidades de los ceros de las funciones f_n en el punto z_0 .

Demostración. Como $\sum (f_n(z) - 1)$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de Ω , por el lema anterior tenemos que $f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ converge uniforme y absolutamente sobre subconjuntos compactos de Ω . Como cada f_j es holomorfa, entonces el producto infinito converge a una función holomorfa en Ω .

Por otra parte, si $f(z_0) = 0$, podemos elegir $r > 0$ tal que $\overline{B(0, r)} \subset \Omega$. Por hipótesis $\sum (f_n(z) - 1)$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{B(0, r)}$.

Como consecuencia del lema 10.1.3 existe un entero N , y una función $g(z)$ que no se anula en $\overline{B(0, r)}$ tal que

$$f(z) = \left(\prod_{j=1}^N f_j(z) \right) \cdot g(z).$$

por lo que $f_n(z_0) = 0$ para alguna n con $1 \leq n \leq N$. ■

Ejemplo 58

Consideremos la sucesión de funciones

$$\{f_n(z)\} = \left\{ z, -z, \frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, \frac{z}{3}, -\frac{z}{3}, \dots \right\},$$

y K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Nótese que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} |f_n(z)|$ es divergente para cada $z \neq 0$, pues

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_n(z)| = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|}{j} = 2|z| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j},$$

sin embargo, como $\mathcal{K}$ es compacto, y las funciones f_n son continuas, si definimos el número $C_{\mathcal{K}}$ como $C_{\mathcal{K}} = \max\{|z|^2; z \in \mathcal{K}\}$, tenemos que $\frac{|z|^2}{j^2} \leq \frac{C_{\mathcal{K}}}{j^2}$, de donde la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{j^2}$$

converge uniformemente sobre $\mathcal{K}$. Y como consecuencia del teorema 10.1.3 y el criterio M — de Weierstrass, proposición 3.6.3 página 47, tenemos que

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + f_j(z)) = (1+z) \cdot (1-z) \cdot \left(1 + \frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cdots = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right)$$

converge uniformemente sobre $\mathcal{K}$.

10.2 Funciones holomorfas con ceros predeterminados

El objetivo de la presente sección es construir una función holomorfa cuyos ceros estén en un conjunto discreto previamente determinado, para esto estudiaremos primeramente las funciones elementales, introducidas por Weierstrass y utilizaremos el teorema 10.1.3 para construir la función holomorfa deseada.

Definición 10.2.1 Se definen los factores elementales como las funciones

$$E_0(z) = 1 - z,$$

y para $p \in \mathbb{N}$

$$E_p(z) = (1 - z) \exp \left(\sum_{n=1}^p \frac{z^n}{n} \right).$$

Nótese que para cada entero no negativo p , se tiene que $E_p(0) = 1$, y $E_p(z) = 0$ si, y solamente si $z = 1$. Además, $z = 1$ es un cero simple de la función $E_p(z)$.

Como consecuencia de lo anterior tenemos que la función $E_p \left(\frac{z}{a} \right)$ tiene un cero simple únicamente en $z = a$.

Lema 10.2.1 Si $|z| < 1$, entonces $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ para todo entero no negativo p .

Demostración. Es claro que, si $p = 0$ $|1 - E_0(z)| = |z|$ por lo que la propiedad se cumple en este caso. Si $p \in \mathbb{N}$, consideremos la expansión en serie de potencias de E_p alrededor de $z_0 = 0$,

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Derivando con respecto a z tenemos

$$E_p'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} = -z^p \exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right).$$

Comparando ambas expresiones obtenemos $a_j = 0$ para $j = 1, \dots, p$; además, como todos los coeficientes en la expansión de $\exp\left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k}\right)$ son positivos, tenemos que $a_k \leq 0$ para $k \geq p+1$. De donde, $|a_k| = -a_k$ para $k \geq p+1$; así

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k,$$

es decir,

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = - \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1.$$

Luego entonces, si $|z| \leq 1$,

$$|E_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1},$$

así, $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$ siempre que $|z| \leq 1$. ■

Teorema 10.2.1 — de los factores elementales. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, y $a_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si $\{p_n\}$ es cualquier sucesión de números enteros no negativos tales que para todo número real positivo r se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{1+p_n} < \infty, \quad (10.6)$$

entonces el producto infinito

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

define una función entera. La función $f(z)$ tiene ceros únicamente en los puntos a_n . Si z_0 aparece en la sucesión $\{a_n\}$ exactamente m veces, entonces f tiene un cero en $z = z_0$ de multiplicidad m . Finalmente, si $p_n = n - 1$ entonces la condición dada en la ecuación 10.6 siempre se satisface.

Demostración. Primero veremos que la condición 10.6 se satisface para $p_n = n - 1$, para lo cual debemos probar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^n.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{r}{|a_n|} \right)^n \right)^{1/n} = 0$ y como consecuencia del criterio de la raíz, proposición 3.4.10, página 40 se tiene la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^n.$$

Supongamos ahora que la sucesión de enteros no negativos $\{p_n\}$ satisfacen la condición 10.6. Como consecuencia del lema 10.2.1, si $|z| \leq r \leq |a_n|$, entonces

$$\left| 1 - E_p \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{1+p_n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$, para $0 < r$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \geq r$ siempre que $n \geq N$.

Consecuentemente $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{1+p_n}$, y como consecuencia del criterio de comparación, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right)$$

converge en el compacto $\overline{B(0, r)}$.

Luego entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \right)$ converge absolutamente a una función entera.

Como consecuencia del teorema 10.1.3 el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$ converge a una función entera. ■

Teorema 10.2.2 — de factorización de Weierstrass. Sea f una función entera, supongamos que f tiene un cero de multiplicidad m en $z_0 = 0$ y sean $\{a_n\}$ los otros ceros de f repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Entonces existe una función entera g y una sucesión de enteros $\{p_n\}$ tales que

$$f(z) = z^m (\exp g(z)) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right).$$

Demostración. Como consecuencia del teorema 10.2.1 existe una sucesión de enteros $\{p_n\}$ tales que la función

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)$$

tiene los mismos ceros que f con las mismas multiplicidades. Por lo que la función $f(z)/h(z)$ tiene singularidades removibles en $0, a_1, a_2, \dots$. Por lo tanto $f(z)/h(z)$ es una función entera y, no tiene ceros. Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, existe una función entera $g(z)$ tal que $\frac{f(z)}{h(z)} = \exp(g(z))$, De aquí se deduce que

$$f(z) = (\exp g(z)) h(z) = (\exp g(z)) z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right).$$

■

Ejemplo 59

La función $\text{sen}(\pi z)$ es una función entera con ceros simples en los puntos $a_n = n$ con $n \in \mathbb{Z}$, ya que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{n^2}$ converge en la bola cerrada $\overline{B(0, r)}$ para cada $0 < r < \infty$, como consecuencia del teorema 10.2.1 la función

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

es entera, y solamente tiene ceros simples en los números enteros.

Luego entonces, por el teorema de factorización de Weierstrass 10.2.2, existe una función entera $g(z)$ tal que

$$\text{sen}(\pi z) = \exp(g(z)) f(z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

Derivando obtenemos

$$\pi \cos(\pi z) = \left(g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2 - z^2}\right) \text{sen}(\pi z),$$

o equivalentemente

$$\pi \cot(\pi z) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2 - z^2} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

siempre que $\text{sen}(\pi z) \neq 0$.

Además

$$g''(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{\text{sen}(\pi z)}.$$

Esto nos dice que $g''(z)$ es una función entera, periódica, de periodo 1, y como consecuencia del teorema de Liouville 5.3.9, página 138, $g''(z)$ es constante.

Y como $|\text{sen}(\pi z)\pi z|^2 = \text{sen}^2(\pi \text{Re } z) + \sinh^2(\pi \text{Im } z)$ se sigue que para $0 \leq \text{Re } z \leq 1$ y $|\text{Im } z| \geq 1$, $g''(z)$ converge uniformemente a cero cuando $\text{Im } z \rightarrow \infty$, entonces

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{\text{sen}(\pi z)}.$$

Como $g''(z) = 0$, entonces $g'(z)$ debe ser constante, y ya que $g'(z) = -g'(-z)$, la constante debe ser cero. Obtenemos así la identidad

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Finalmente, como $g'(z) = 0$, entonces $e^{g(z)} = c$ es constante, de donde

$$\text{sen}(\pi z) = c z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

Ya que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi \text{sen}(\pi z)}{\pi z} = \pi$, se sigue que $c = \pi$, es decir,

$$\text{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (10.7)$$

Como consecuencia de ésta fórmula, para $z = 1/2$ obtenemos la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \quad (10.8)$$

Aún más, ya que $\sinh(z) = -i \operatorname{sen}(iz)$ se sigue de la identidad 10.7 que

$$\sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (10.9)$$

Corolario 10.2.1 Si f es una función meromorfa definida en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces existen dos funciones holomorfas g y h en Ω tales que $f = g/h$.

10.3 La función gamma de Euler

En 1814 Adrian María Legendre propuso llamar función Gamma, y representarla con la letra correspondiente Γ , a una función que había sido introducida por primera vez en una carta que escribió Leonard Euler a Christian Goldbach en el año 1729. Esta función fue descrita inicialmente en forma infinitesimal, como el límite de la expresión discreta:

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s}{s(1+s/2) \cdots (1+s/n)},$$

cuando $s > 0$ que fue utilizada posteriormente por Euler para obtener la representación integral, de segundo tipo:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad \text{si } s > 0.$$

Posteriormente se obtuvieron otras expresiones integrales para ésta función.

En la presente sección presentamos una introducción al estudio de ésta función y sus propiedades, una de las cuales es que es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, que evaluada en un entero positivo n coincide con $(n-1)!$.

Definición 10.3.1 Para $z \in \mathbb{C}$ se define la función

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Ya que $\{-n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números distintos de cero, que satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} |-n| = \infty$, y por el criterio de la p -serie, página 38, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ como consecuencia del teorema de los factores elementales 10.2.1, página 290 el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(-\frac{z}{n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

converge a una función entera $G(z)$ con ceros simples en cada entero negativo.

Si $h(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi z)$, afirmamos que

$$h(z) = zG(z)G(-z).$$

Por definición es claro que

$$\begin{aligned} G(z)G(-z) &= \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right] \cdot \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \end{aligned}$$

que, como vimos en el ejemplo 10.1 converge y, como consecuencia de la ecuación 10.7 se sigue que

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Luego entonces

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{d \log h(z)}{dz} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2} = \pi \cot(\pi z).$$

La función $G(z-1)$ es entera y tiene ceros simples en cada entero no positivo, y no tiene otros ceros y, como consecuencia del teorema de factorización de Weierstrass 10.2.2, existe una función entera $g(z)$ tal que

$$G(z-1) = z e^{g(z)} G(z) \quad (10.10)$$

Para determinar la función $g(z)$ derivamos la ecuación 10.10, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$$

Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

implica que

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - 1 = 0.$$

Luego entonces, la función $g(z)$ es una constante, llamada *la constante de Euler*, que denotaremos con la letra γ . Si en la ecuación 10.10 tomamos $z = 1$, obtenemos $1 = G(0) = e^{\gamma} G(1)$, de donde

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}},$$

así

$$e^{-\gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) e^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}.$$

De donde

$$-\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(1+n) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right],$$

y como $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n+1) - \log n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, tenemos que, el valor de la constante de Euler γ está dada por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log n \right].$$

Si definimos $H(z) = e^{\gamma z} G(z)$ se sigue que

$$H(z-1) = e^{\gamma(z-1)} G(z-1) = e^{\gamma z} z G(z) = z H(z).$$

Definición 10.3.2 Se define la función *gamma de Euler* como

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)}$$

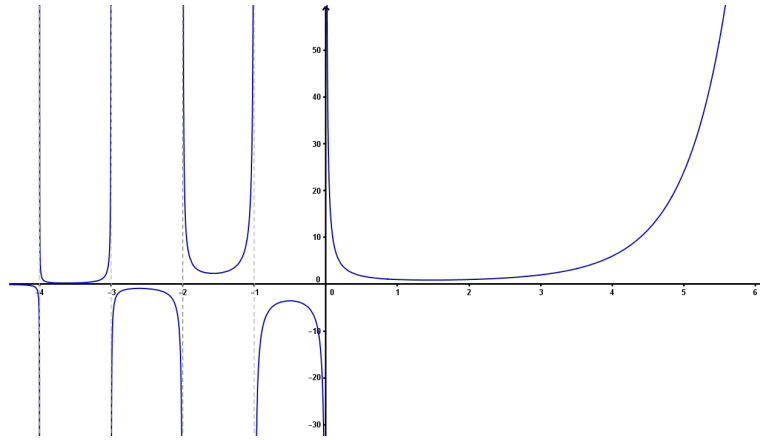


Figura 10.1: Gráfica de $\Gamma(x)$ para $x \in (-4, 6)$

Como consecuencia de lo visto anteriormente, la función Γ de Euler es meromorfa en $\mathbb{C}$, y tiene polos simples en los enteros no positivos. Además, la función Γ no tiene ceros.

Ya que, $H(z) = e^{\gamma z} G(z) = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$, entonces

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}} \quad (10.11)$$

Proposición 10.3.1 — La fórmula de Euler. Para cada número $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ se tiene

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)} \quad (10.12)$$

Demostración. Como consecuencia de 10.11 tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}} \\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}} \\ &= \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{z}{m}}}{z+m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z} m!}{z(z+1) \cdots (z+m)} \exp\left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right)\right). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} &e^{-\gamma z} \exp\left(z \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right)\right) = \\ &= m^z \exp\left(z \left(-\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \log m\right)\right) \end{aligned}$$

y $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \log n \right]$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^z \exp \left(z \left(-\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \log m \right) \right)}{z(z+1) \cdots (z+m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^z}{z(z+1) \cdots (z+m)} \end{aligned}$$

como deseábamos demostrar. ■

Aún más, ya que

$$n^z = \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^z$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{(z+1)(z+2) \cdots (z+m)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{z+1} \right) \left(\frac{2}{z+2} \right) \cdots \left(\frac{m}{z+m} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{1} \right)^{-1} \left(1 + \frac{z}{2} \right)^{-1} \cdots \left(1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de la demostración de la fórmula de Euler tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! m^z}{z(z+1) \cdots (z+m)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{z(z+1) \cdots (z+m)} m^z \\ &= \frac{1}{z} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{1}{m} \right)^z \right) \\ &= \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^z, \end{aligned}$$

es decir,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^z. \quad (10.13)$$

Proposición 10.3.2 La función Γ satisface la ecuación funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (10.14)$$

Demostración. Como $H(z-1) = zH(z)$, tenemos que

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)H(z+1)} = \frac{1}{H(z)} = z\Gamma(z),$$

como esperábamos demostrar ■

Corolario 10.3.1 Para cada entero positivo n se tiene que

$$\Gamma(z+n) = z(z+1) \cdots (z+n-1)\Gamma(z). \quad (10.15)$$

Proposición 10.3.3 La función Γ satisface la siguiente ecuación

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \quad (10.16)$$

Demostración. Como vimos al principio de la presente sección

$$h(z) = zG(z)G(-z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{1}{zH(z)} \cdot \frac{1}{(1-z)H(1-z)} = \frac{1}{ze^{\gamma z}G(z)} \cdot \frac{1}{(1-z)e^{\gamma(1-z)}G(1-z)} \\ &= \frac{1}{z(1-z)e^{\gamma}G(z)G(1-z)} = \frac{1}{(1-z)G(z-1) \cdot G(1-z)} \\ &= h(1-z) \\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi(1-z))} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \end{aligned}$$

es decir, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$. ■

Proposición 10.3.4 — La función factorial y la función gamma. Para cada entero positivo n se tiene que

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (10.17)$$

Demostración. La demostración se hace por inducción, pimeramente notamos que

$$\Gamma(1) = e^{-\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}},$$

pero $e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}$, implica que $\Gamma(1) = 1 = 0!$.

Como consecuencia de la ecuación 10.14, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, por lo que $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = (2-1)!$. Aplicando la hipótesis de inducción $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$, como era de esperar. ■

Ya que la función Γ es holomorfa en el semiplano derecho, (meromorfa en $\mathbb{C}$), y coincide con la función factorial en los enteros positivos, se considera a la función Γ como una extensión de la función factorial al semiplano derecho complejo.

Como consecuencia de la ecuación 10.16, cuando $z = 1/2$ tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

lo cual implica que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

y aplicando nuevamente la ecuación 10.14 podemos ver que

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

y como consecuencia de la ecuación 10.15

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \prod_{k=1}^n (2k-1).\end{aligned}$$

Proposición 10.3.5 Para cada entero no negativo n se satisface la siguiente identidad:

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Demostración. Como consecuencia del teorema de extensión de Riemann 7.1.1, página 168, se tiene que $\text{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z)$, y como consecuencia del corolario 10.3.1 se sigue que

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)},$$

de donde

$$\begin{aligned}\text{Res}(\Gamma, -n) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.\end{aligned}$$

■

Proposición 10.3.6 La función Γ satisface

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Demostración. Como consecuencia de la ecuación 10.11 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dz} \log(\Gamma(z)) \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{d}{dz} \log \left(\frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{d}{dz} \left(\log(e^{-\gamma z}) - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}} \right) \right) \right] \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{d}{dz} \left(-\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\log \left(1 + \frac{z}{n} \right) + \log e^{\frac{z}{n}} \right) \right) \right] \\ &= \frac{d}{dz} \left[-\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.\end{aligned}$$

En particular tenemos

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right). \quad (10.18)$$

■

Proposición 10.3.7 — Fórmula de duplicación de Legendre. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, entonces

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Demostración. Por la proposición 10.3.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2} + n\right)^2} \\ &= 4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2k)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2z+1+2n} \right] \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+n)^2} \\ &= 2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right). \end{aligned}$$

Integrando esta igualdad con respecto a la variable z obtenemos que existe una constante $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{\Gamma'\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} = a + 2 \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)},$$

o, equivalentemente

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(2z) = \frac{d}{dz} \log \left(\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \right) - a.$$

Y, volviendo integrar en una rama apropiada de logaritmo

$$\log \Gamma(2z) = \log \left(\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \right) - az - b$$

o equivalentemente

$$\Gamma(2z) e^{az+b} = \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Si sustituimos $z = \frac{1}{2}$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\Gamma(1) e^{\frac{1}{2}a+b} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \sqrt{\pi}$$

por lo que $\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \log \pi$. Por otra parte, si en la misma ecuación sustituimos $z = 1$ tenemos

$$\Gamma(2) e^{a+b} = \Gamma(1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

es decir, $a + b = \frac{1}{2} \log \pi - \log 2$.

Resolviendo el sistema tenemos que $a = -2 \log 2$ y $b = \frac{1}{2} \log \pi + \log 2$, por lo que

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$



Proposición 10.3.8 — Fórmula de Gauss. Si z es un número complejo con $\operatorname{Re} z > 0$, entonces

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt$$

Demostración. Ya que

$$\log z = \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-zt}) \frac{dt}{t} \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0,$$

como consecuencia de la fórmula 10.18, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\log N - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\log N - \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\infty e^{-(z+n)t} dt \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[e^{-t} - e^{-Nt} - t e^{-zt} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-nt} \right] \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt + \int_0^\infty e^{-Nt} \left(\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \right] \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right) dt, \end{aligned}$$

como esperábamos demostrar. ■

Como consecuencia de la fórmula de Gauss tenemos

Corolario 10.3.2

$$\gamma = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt. \quad (10.19)$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt. \quad (10.20)$$

Se sigue de la definición de la función Γ que, $\Gamma(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Por otra parte, la proposición 10.3.6 la segunda derivada de $\log \Gamma(x)$ es positiva para cada $x > 0$. Consecuentemente, la función Γ es logaritmo convexa si $x > 0$. Esto, junto con el hecho que $\Gamma(1) = 1$ permite dar otra caracterización de la función $\Gamma(z)$.

Teorema 10.3.9 — de Bohr-Mollerup. Sea f una función definida en el conjunto de los números reales positivos, y tal que $f(x) > 0$ para toda $x \in (0, \infty)$. Si f satisface las siguientes propiedades

1. $\log f(x)$ es una función convexa.
2. $f(x+1) = xf(x)$ para toda $x \in (0, \infty)$.
3. $f(1) = 1$.

entonces $f(x) = \Gamma(x)$ para cada $x \in (0, \infty)$.

Demostración. Ya que $f(x+1) = xf(x)$, y $f(1) = 1$, para cada entero no negativo n , se satisface la siguiente relación:

$$f(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1) f(x). \quad (10.21)$$

En particular, $f(m) = (m-1)!$ para cada entero positivo m .

Como consecuencia de la ecuación 10.21, bastará ver que $f(x) = \Gamma(x)$ para $0 < x \leq 1$.

Para cada entero $n \geq 2$, se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{(n-1) - n} &\leq \frac{\log f(x+n) - \log f(n)}{(x+n) - n} \\ &\leq \frac{\log f(n+1) - \log f(n)}{(n+1) - n}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} -\log(n-2)! + \log(n-1)! &\leq \frac{\log f(x+n) - \log(n-1)!}{x} \\ &\leq \log n! - \log(n-1)! \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} x(-\log(n-2)! + \log(n-1)!) &\leq \log f(x+n) - \log(n-1)! \\ &\leq x(\log n! - \log(n-1)!), \end{aligned}$$

es decir,

$$x \log(n-1) \leq \log f(x+n) - \log(n-1)! \leq x \log n.$$

Sumando $\log(n-1)!$ en cada lado de las desigualdades anteriores, y aplicando la función exponencial obtenemos

$$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!.$$

Aplicando la relación 10.21 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n)} &\leq f(x) \\ &\leq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)(x+n)} \cdot \frac{x+n}{n}. \end{aligned}$$

Ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+n}{n} = 1$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1) \cdots (x+n)},$$

es decir $f(x) = \Gamma(x)$ si $x \in (0, 1]$. Como consecuencia de las ecuaciones funcionales 10.21 y 10.14 tenemos que $f(x) = \Gamma(x)$ para cada $x \in (0, \infty)$. ■

10.3.1 Forma integral de la función Γ

Como mencionamos anteriormente, si s es un número real positivo, la integral $\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$ converge a $\Gamma(s)$.

Esta integral debe interpretarse como una suma, a saber:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-t} t^{s-1} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-t} t^{s-1} dt. \quad (10.22)$$

Por otra parte, la expresión

$$V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (10.23)$$

converge solamente cuando $\operatorname{Re} z > 0$, ya que su derivada está dada por

$$V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln t dt$$

la cual converge solamente cuando $\operatorname{Re} z > 0$.

Por ende, la expresión dada en la ecuación anterior 10.23 no puede utilizarse cuando $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Proposición 10.3.10 La función $\mathcal{G}(s) = V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, coincide con la función $\Gamma(s)$ para cada número real positivo s .

Demostración. Si $\mathcal{G}(s) = V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$, aplicando integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(s+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s dt \\ &= -t^s e^{-t} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \\ &= s\mathcal{G}(s).\end{aligned}$$

Consecuentemente $\mathcal{G}(s+1) = s\mathcal{G}(s)$.

Además, es claro que $\mathcal{G}(1) = V.P. \int_0^\infty e^{-t} dt = e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$, y aplicando inducción tenemos $\mathcal{G}(n+1) = n!$.

Finalmente, si $1 < p < \infty$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y ya que la función $\mathcal{G}$ es Riemann-integrable, aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\mathcal{G}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \mathcal{G}(x)^{1/p} \mathcal{G}(y)^{1/q},$$

aplicando la función logaritmo en ambos lados de la desigualdad

$$\log \mathcal{G}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \log \mathcal{G}(x) + \frac{1}{q} \log \mathcal{G}(y)$$

por lo que $\log \mathcal{G}$ es una función convexa en $(0, \infty)$.

Como consecuencia del teorema de Bhor y Mollerup 10.3.9, página 300, tenemos que $\mathcal{G}(s) = \Gamma(s)$ para cada número real positivo s , como esperábamos demostrar. ■

A continuación mostraremos que podemos extender la función $\mathcal{G}(s)$ a los números complejos cuya parte real sea positiva definida.

Teorema 10.3.11 — La fórmula integral de Euler. La función Γ satisface la siguiente propiedad

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (10.24)$$

siempre que $\operatorname{Re} z > 0$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{Re} z > 0$, como $e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$, por lo que

$$\begin{aligned}V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt &= V.P. \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.\end{aligned}$$

Si $\tau = \frac{t}{n}$, entonces $dt = n d\tau$, además, para $t = 0$ tenemos $\tau = 0$, mientras que, si $t = n$ tenemos que $\tau = 1$. Consecuentemente

$$V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau \quad (10.25)$$

Aplicando integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau &= \frac{1}{z} (1-\tau)^n \tau^z \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n}{z} \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau.\end{aligned}$$

Iterando el proceso anterior obtenemos

$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación 10.25 tenemos que, si $\operatorname{Re} z > 0$, entonces

$$V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)}{(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Como consecuencia de la fórmula de Euler, proposición 10.3.1, si $\operatorname{Re} z > 0$ obtenemos

$$\Gamma(z) = V.P. \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

como era de esperar. ■

Usando la representación integral de la función $\Gamma(z)$ 10.24, el hecho de que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y el cambio de variable $t = x^2$ tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx, \quad (10.26)$$

lo cual nos proporciona otra forma de calcular la integral gaussiana.

Finalmente, demostraremos que la integral

$$\frac{1}{2i \sin \pi z} V.P. \int_C e^t t^{z-1} dt \quad (10.27)$$

proporciona una representación integral de la función $\Gamma(z)$, denominada la *representación integral de Hankel*, que es válida para todo número $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, donde C es la trayectoria que se muestra en la figura 10.2, lo cual proporciona una extensión analítica de la ecuación 10.24. Cuando $\operatorname{Re} z > 0$, como consecuencia de la regla de L'Hôpital, la ecuación de Hankel puede extenderse analíticamente al semiplano derecho.

Cuando z es cero, o un entero negativo, la integral en la ecuación de Hankel 10.27 es finita, pero el denominador se anula a primer orden, por lo que la expresión tiene polos simple.

Puesto que $e^t t^{z-1}$ es una función holomorfa en z , la representación de Hankel 10.27 es holomorfa si $\sin \pi z \neq 0$.

Proposición 10.3.12 La integral 10.27 proporciona una extensión analítica de la representación integral 10.24 de la función $\Gamma(z)$ que es válida para todo número $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea

$$J(z) = V.P. \int_{-\infty}^0 e^t t^{z-1} dt = \int_C e^t t^{z-1} dt$$

Supongamos que $0 < \varepsilon < 1/4$, si definimos la curva $\gamma_1(x) = xe^{i\pi} + i\varepsilon \sin((1-\varepsilon)\pi)$ para $\varepsilon \leq x \leq \infty$, la semirecta por encima del corte; $\gamma_2(x) = xe^{-i\pi} - i\varepsilon \sin((1-\varepsilon)\pi)$ para $\varepsilon \leq x \leq \infty$, la semirecta por debajo del corte; y $\gamma_3(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$, para $-(1-\varepsilon)\pi < \theta < (1-\varepsilon)\pi$, el arco de circunferencia alrededor del origen, entonces:

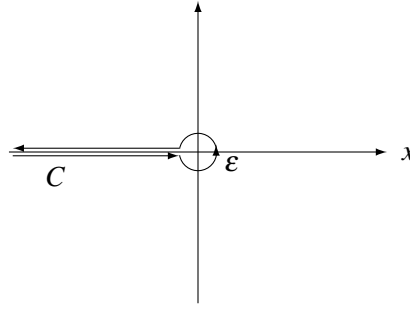


Figura 10.2: La trayectoria C para la expresión de Hankel. Los argumentos inicial y final para t son $-\pi$ y π respectivamente.

$$\int_C e^t t^{z-1} dt = \int_{\gamma_1} e^t t^{z-1} dt + \int_{\gamma_2} e^t t^{z-1} dt + \int_{\gamma_3} e^t t^{z-1} dt = J_1(z) + J_2(z) + J_3(z).$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos que

$$J_1(z) \rightarrow (e^{i\pi})^z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx$$

$$J_2(z) \rightarrow (e^{-i\pi})^z \int_\infty^0 e^{-x} x^{z-1} dx$$

$$J_3(z) = \int_{-\pi}^\pi e^{\varepsilon e^{i\theta}} (\varepsilon e^{i\theta})^{z-1} d(\varepsilon e^{i\theta}).$$

Como la última integral es proporcional a ε^z y $\operatorname{Re} z > 0$ entonces $J_3(z) \rightarrow 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} J(z) &= (e^{i\pi})^z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx + -e^{-i\pi})^z \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \\ &= ((e^{i\pi})^z - (e^{-i\pi})^z) \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx \\ &= 2i \sin \pi z \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right) \end{aligned}$$

Como esperabamos demostrar. ■

De la representación de Hankel 10.27 podemos notar que $\Gamma(z)$ tiene puntos singulares removibles, o polos simples, si z es un entero, pues son los puntos donde se anula la función $\sin \pi z$, y no hay otro punto singular porque el integrando en la representación de Hankel es una función entera.

Si z es un entero positivo, el integrando de $J(z)$ no tiene singularidad en el origen. Tampoco hay singularidades en el contorno de Hankel, ni puntos rama. La función $J(z)$ se anula a primer orden si z es un entero positivo. Como consecuencia, de lo anterior, los enteros positivos son singularidades removibles en la expresión de Hankel.

Si z es un entero no positivo, la rama que se introduce para calcular t^{z-1} no es totalmente necesaria, y podemos reducirla a una pequeña circunferencia alrededor del origen. Por ende, si $z = -m \leq 0$ es un entero entonces

$$J(-m) = \int_{|t|=1} e^t t^{-m-1} dt = \frac{2\pi i}{m!}.$$

Y tenemos que

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -m) = \lim_{z \rightarrow -m} \left(\frac{z+m}{2i \sin \pi z} H(z) \right) = \frac{2\pi i}{m!} \lim_{z \rightarrow -m} \left(\frac{z+m}{2i \sin \pi z} \right) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Es decir, la función $\Gamma(z)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, cuyas únicas singularidades son polos simples, las cuales se encuentran en los enteros no positivos.

Corolario 10.3.3 La función $\Gamma(z)$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}$, cuyas únicas singularidades son polos simples, las cuales se encuentran en los enteros no positivos.

10.4 La función theta y su ecuación funcional

La primer función, considerada como una función theta, se debe a Leonhard Euler (1707-1783), quien introdujo la función

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n z}$$

en el primer volumen, capítulo 16, de *Introductio in analysin infinitorum, concerning the partition of numbers* publicado en 1748, Euler obtuvo propiedades de productos infinitos similares, cuyas series asociadas habían sido investigadas previamente por Jacob Bernoulli (1654-1705). Las funciones de theta también aparecen en *La theorie analytique de la chaleur* de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

En ésta ocasión estudiaremos solamente una función theta, aquella que nos permite establecer la ecuación funcional de la función zeta, y que presentamos en la siguiente definición:

Definición 10.4.1 Si $s > 0$ se define la función theta como

$$\vartheta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} \quad (10.28)$$

Ya que $\vartheta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$, para mostrar que $\theta(s)$ es convergente si $s > 0$,

bastará demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}$ es convergente di $s > 0$.

Como $\pi n^2 s \leq 1 + \pi n^2 s \leq e^{\pi n^2 s}$, entonces

$$0 < e^{-\pi n^2 s} \leq \frac{1}{1 + \pi n^2 s} \leq \frac{1}{\pi n^2 s}, \quad \text{si } 0 < s.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \pi n^2 s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2 s} = \frac{1}{\pi s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, se sigue que $\vartheta(s)$ converge si $s > 0$.

Aún más, si $z = s + it$, y $s, t \in \mathbb{R}$, $s > 0$ como $e^{\pi n^2 z} = e^{\pi n^2 s} e^{i\pi n^2 t}$, y $|e^{\pi n^2 z}| = e^{\pi n^2 s}$ se sigue que la función $\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 z}$ converge absolutamente si $\text{Re } z > 0$.

A continuación estudiaremos el efecto de la transformada de Fourier sobre algunas clases de funciones especiales.

Teorema 10.4.1 Si existen números reales positivos a , y A tales que f es holomorfa en la banda horizontal

$$W_{-a,a} = \{z \in \mathbb{C}; |\text{Im } z| < a\}$$

y además $|f(z)| \leq \frac{A}{1 + \text{Re}^2 z}$, para toda $z \in W_{-a,a}$, entonces existe $B > 0$ tal que la transformada de Fourier $F(\xi)$ de $f(x)$ satisface

$$|F(\xi)| \leq B e^{-2\pi b |\xi|}$$

para cada $0 \leq b < a$.

Demostración. Si $b = 0$, como $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$, con $\xi \in \mathbb{R}$, debemos mostrar que $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq B$, es decir, $F(\xi)$ es una función acotada.

Ya que $\xi \in \mathbb{R}$, se sigue que $|f(\xi)| \leq \frac{A}{1+\xi^2}$ para algún $A > 0$ y $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$, de donde

$$|F(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1+x^2} dx$$

como consecuencia del corolario 7.5.1, página 198, se sigue que $|F(\xi)|$ es acotada.

Supongamos ahora que $0 < b < a$, y $0 < \xi$, dada la función holomorfa $g(z) = f(z)e^{-2\pi i z \xi}$ en la banda $W_{-a,a}$, consideremos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ descrita en la figura ??

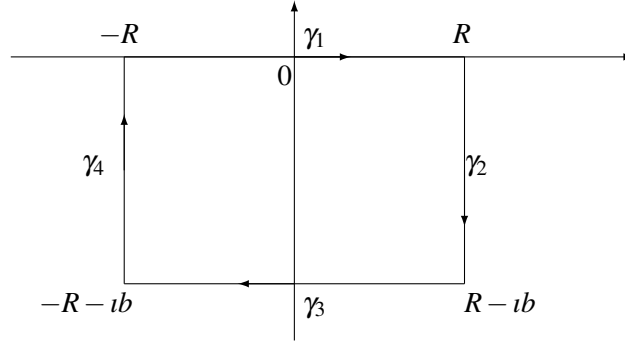


Figura 10.3: Trayectoria para el estudio del comportamiento de la transformada de Fourier

Como consecuencia del teorema de Cauchy 5.1.9, página 120

$$0 = \int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} g(z) dz.$$

Pero

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} g(z) dz \right| &\leq \int_0^b \left| f(-R-ibt) e^{-2\pi i (-R-ut)\xi} \right| dt \\ &\leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^{-2\pi t \xi} dt \\ &\leq \frac{A}{R^2} \int_0^b e^{-2\pi b t \xi} dt \\ &= \frac{A}{R^2} \left| \frac{e^{-2\pi t \xi}}{-2\pi \xi} \right|_0^b \\ &= \frac{A}{2\pi \xi R^2} |1 - e^{-2\pi b \xi}| \end{aligned}$$

Por lo que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} g(z) dz = 0$ y, de manera análoga se concluye que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} g(z) dz = 0$.

Consecuentemente $\int_{\gamma_1} g(z) dz + \int_{\gamma_3} g(z) dz = 0$.

Por lo que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = F(\xi)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\gamma_3} g(z) dz &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x-ib) e^{-2\pi i (x-ib)\xi} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x-ib) e^{-2\pi i (x-ib)\xi} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier $F(\xi)$ de $f(x)$ también satisface la ecuación

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - ib) e^{-2\pi i(x-ib)\xi} dx. \quad (10.29)$$

Lo anterior nos permite dar la siguiente estimación para el crecimiento de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} |F(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - ib) e^{-2\pi i(x-ib)\xi}| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1+x^2} e^{-2\pi b\xi} dx \\ &\leq B e^{-2\pi b\xi} \end{aligned}$$

para alguna constante $B > 0$.

De manera similar se demuestra el caso en que $\xi < 0$, solamente que ahora la trayectoria se dibuja sobre el eje real. ■

Teorema 10.4.2 — La fórmula de la suma de Poisson. Si existen números reales positivos a , y A tales que f es holomorfa en la banda horizontal $W_{-a,a} = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| < a\}$ y además $|f(z)| \leq \frac{A}{1 + \operatorname{Re}^2 z}$, para toda $z \in W_{-a,a}$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)$$

Demostración. Elijamos b con $0 < b < a$. La función $\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1}$ tiene polos simples en cada entero n y

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1}, n\right) = \frac{1}{2\pi i}.$$

Como f es holomorfa si $|\operatorname{Im} z| < a$, se sigue que la función $\frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}$ tiene, a lo más, polos simples en los enteros todos n y además $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}, n\right) = \frac{f(n)}{2\pi i}$.

Si γ_N es la trayectoria que se describe en la siguiente figura:

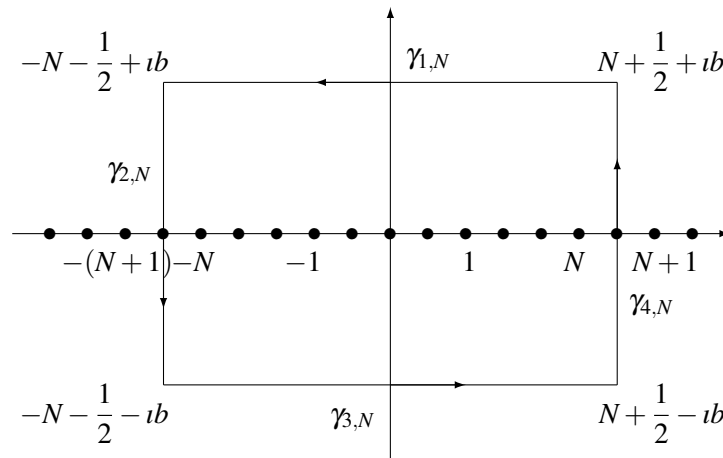


Figura 10.4: Trayectoria γ_N de la fórmula de la suma de Poisson

Como consecuencia del teorema del residuo 7.4.1, página 185

$$\sum_{n=-N}^N f(n) = 2\pi i \sum_{n=-N}^N \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1}, n\right) = \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz.$$

Como $|f(z)| \leq \frac{A}{1 + \operatorname{Re}^2 z}$, en particular $|f(n)| \leq \frac{A}{1 + n^2}$, de donde

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{1 + n^2} \\ &\leq A \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2} \right) \leq A \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Como consecuencia del criterio de la p -serie tenemos que $\sum \frac{A}{n^2}$ converge, y por el criterio M de Weierstrass, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge uniformemente.

A continuación procederemos a dar una estimación del módulo de las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} I_{2,N} &= \int_{\gamma_{2,N}} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \\ I_{4,N} &= \int_{\gamma_{4,N}} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \end{aligned}$$

donde $\gamma_{2,N}(t) = -N - \frac{1}{2} - it$, $\gamma_{4,N}(t) = N + \frac{1}{2} + it$, si $-b \leq t \leq b$.

Como $e^{2\pi iz} - 1 \neq 0$ cuando $z = \gamma_{j,N}(t)$, para $j = 2, 4$ y el intervalo $[-b, b] \subset \mathbb{R}$ es un compacto sean

$$\delta_{j,N} = \min\{|e^{2\pi i\gamma_{j,N}(t)} - 1|; -b \leq t \leq b\} \quad j = 2, 4.$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|e^{2\pi i\gamma_{j,N}(t)} - 1|} \leq \frac{1}{\delta_{j,N}} \quad j = 2, 4.$$

Consecuentemente, para $j = 2, 4$ se tiene

$$\left| \int_{\gamma_{j,N}} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz \right| \leq \frac{A}{\delta_{j,N} N^2} \int_{-b}^b dt = \frac{2Ab}{\delta_{j,N} N^2}$$

Así,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{j,N}} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz = 0, \quad j = 2, 4.$$

es decir, en el límite, las integrales sobre las rectas verticales tienden a cero.

Por lo que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz - \int_{\gamma_3} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz$$

donde γ_1 y γ_3 son traslaciones del eje real por $\pm ib$ respectivamente.

Si $|w| > 1$, sabemos que

$$\frac{1}{w - 1} = w^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n}$$

Por lo que, sobre γ_1 , donde $|e^{2\pi iz}| > 1$ tenemos

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz}.$$

Por otra parte, si $|w| < 1$, entonces $\frac{1}{w-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n$, así, sobre la curva γ_3 tenemos

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz}.$$

Ya que γ_1 y γ_3 son traslaciones por $\pm ib$ del eje real, como consecuencia de la ecuación 10.29, página 307, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= \int_{\gamma_1} f(z) \left(e^{-2\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi inz} \right) dz + \int_{\gamma_3} f(z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz} \right) dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_1} f(z) e^{-2\pi i(n+1)z} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_3} f(z) e^{2\pi inz} dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i(n+1)x} dx + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi inx} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F(n+1) + \sum_{n=0}^{\infty} F(-n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n). \end{aligned}$$

Como esperábamos demostrar. ■

Ejemplo 60

1. Si consideramos la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$, demostraremos que f es su propia transformada de Fourier, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi \xi^2} = F(\xi).$$

Si $\xi = 0$, como consecuencia de la ecuación 10.26, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\pi}x)^2} \sqrt{\pi} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = F(0).$$

Supongamos ahora que $\xi > 0$, y consideremos la función entera $f(z) = e^{-\pi z^2}$, si γ es la curva que se describe en la siguiente figura, recorrida una vez en levógiro.

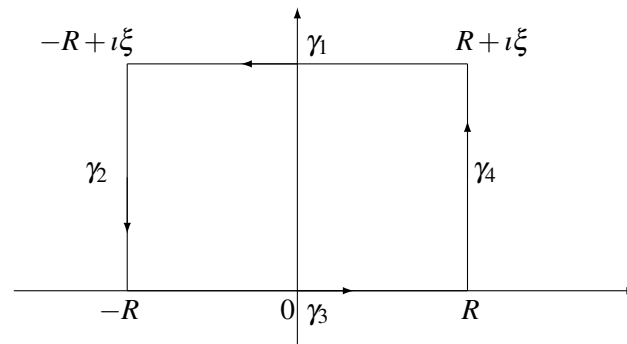


Figura 10.5: $f(z) = e^{-\pi z^2}$ es su propia transformada de Fourier

Como consecuencia del teorema de Cauchy, página 120

$$\int_{\gamma} e^{-\pi z^2} dz = 0.$$

La integral sobre γ_3 es $\int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx$, la cual converge a 1 cuando $R \rightarrow \infty$. Por otra parte,

$$\int_{\gamma_2} e^{-\pi z^2} dz = \int_0^\xi e^{-\pi(R+iy)^2} i dy$$

Como ξ es fijo, y

$$\int_0^\xi |e^{-\pi(R^2-y^2+2iRy)} i| dy \leq \int_0^\xi e^{-\pi(R^2-y^2)} dy \leq e^{-\pi R^2} \int_0^\xi e^{\pi y^2} dy = C e^{-\pi R^2}$$

tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{-\pi z^2} dz = 0.$$

De manera análoga se demuestra que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} e^{-\pi z^2} dz = 0.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} e^{-\pi z^2} dz &= - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx \\ &= -e^{\pi\xi^2} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $R \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1} e^{-\pi z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-\pi z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-\pi z^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-\pi z^2} dz \\ &= -e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx + 0 + 1 + 0, \end{aligned}$$

de donde

$$e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = 1,$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-\pi\xi^2}.$$

Si $\xi < 0$, se procede de manera análoga, considerando la curva simétrica a γ con respecto al eje x .

De lo anterior se concluye que, si $\xi \in \mathbb{R}$ y $f(x) = e^{-\pi x^2}$ entonces

$$F(\xi) = e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

por lo que, $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es su propia transformada de Fourier.

2. Para valores fijos $\xi > 0$ y $a \in \mathbb{R}$, el cambio de variable $x \mapsto \xi^{1/2}(x+a)$ en la integral anterior demuestra que la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-\pi\xi(x+a)^2}$ es $F(\xi) = x^{-1/2} e^{-\pi\xi^2/x} e^{2\pi i a \xi}$.

Aplicando la fórmula de la suma de Poisson a la pareja $f(x) = e^{\pi\xi(x+a)^2}$ y $F(\xi) = x^{-1/2} e^{-\pi\xi^2/x} e^{2\pi i a \xi}$ se obtiene la relación

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\xi(n+a)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi^{-1/2} e^{-\pi n^2/\xi} e^{2\pi i n a}. \quad (10.30)$$

Esta identidad tiene notables consecuencias, en el caso especial en que $a = 0$, esta es la ley de transformación de una versión de la función theta, en particular, de la ecuación 10.30 se obtiene

Corolario 10.4.1 — Ecuación funcional theta. Si $t > 0$, entonces

$$\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right). \quad (10.31)$$

Esta ecuación es la clave que permite obtener la ecuación funcional de la función zeta de Riemann, y por ende, determinar su continuación analítica.

10.5 La función zeta de Riemann

Riemann toma como punto de partida la fórmula

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} \quad (10.32)$$

de Euler, donde n corre sobre todos los enteros positivos, y p sobre todos los números primos. Esta fórmula actualmente se conoce como la *fórmula del producto de Euler*, y se obtiene al expandir cada uno de los factores del producto de la derecha como:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{(p^2)^s} + \frac{1}{(p^3)^s} + \cdots$$

y observar que su producto es entonces una suma de términos de la forma

$$\frac{1}{(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r})},$$

donde $p_1, p_2, \dots, p_r$ son primos distintos, y $n_1, n_2, \dots, n_r$ son números enteros positivos. Aplicando ahora el teorema fundamental de la aritmética Euler concluyó que la suma de estos términos es, simplemente $\sum_n \frac{1}{n^s}$, para cualesquier valor entero s .

Dirichlet, basandose en éste resultado, demuestra rigurosamente que la fórmula 10.32 es válida para todo número real $s > 1$. Posteriormente Riemann, quien fuera discípulo de Dirichlet extiende dicha expresión a variable compleja, y demuestra que la serie converge en el semiplano $\text{Re } s > 1$, pero en 1859 Riemann va mucho más allá de esto, y en sus estudios sobre los números primos demuestra las propiedades más sobresalientes de la función $\zeta(z)$, tanto en su relación con los números primos como con la función $\Gamma(z)$, véase Riemann (1998).

En el año 1900, David Hilbert pronunció una conferencia durante la celebración del Congreso Internacional de Matemáticas en París, donde enunció, lo que desde su punto de vista, debían ser considerados los 23 problemas matemáticos aún no resueltos más importantes del momento, y en los que la comunidad matemática debería volcar todos sus esfuerzos, de ahí su famosa frase: “Debemos saber, y sabremos”. El problema número 8 trataba precisamente la hipótesis de Riemann, que dice lo siguiente:

Todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann, definida como continuación analítica de la forma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{Re}(s) > 1$$

están en la franja crítica vertical, formada por los números complejos s tales que $\text{Re}(s) = 1/2$, esto es, en mitad de la franja crítica.

En la presente sección presentaremos algunas propiedades fundamentales de la función zeta de Riemann, su relación con la función Γ y los números primos.

Definición 10.5.1 Se define la función *zeta de Riemann* como

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{si } \text{Re } z > 1. \quad (10.33)$$

Si $\text{Re } z > 1$, entonces $|n^{-z}| = |e^{-z \log n}| = n^{-\text{Re } z}$, por lo que, si $\text{Re } z > 1 + \delta > 1$, entonces $|\sum n^{-z}| \leq \sum n^{-(1+\delta)}$, la cual converge por el criterio de la p -serie 3.4.8. Como consecuencia del criterio de convergencia normal de series, la función $\zeta(z)$ es holomorfa si $\text{Re } z > 1$.

Aún más, como consecuencia del teorema de convergencia analítica, tenemos que

$$\zeta'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \log n.$$

Proposición 10.5.1 Si $\operatorname{Re} z > 1$, entonces

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right) \quad (10.34)$$

Demostración. Siguiendo la idea de Riemann tenemos que:

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} \dots,$$

así

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots, \quad (10.35)$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} \dots, \quad (10.36)$$

$$\left(1 - \frac{1}{5^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = 1 + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z} \dots, \quad (10.37)$$

la suma en la ecuación 10.35 corre sobre todos los enteros positivos impares; la suma en la ecuación 10.36 corre sobre todos los enteros positivos que son primos relativos con 2 y 3; la suma en la ecuación 10.37 corre sobre todos los enteros positivos primos relativos con 2, 3 y 5.

Luego entonces

$$\left(1 - \frac{1}{p_N^z}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \zeta(z) = \sum_n \frac{1}{n^z}$$

donde la suma corre sobre todos los enteros n que son primos relativos con los números primos $2, 3, \dots, p_N$. El primer término en la suma es 1, y el siguiente $\frac{1}{p_{N+1}^z}$.

Iterando el proceso anterior se obtiene

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) \zeta(z) = 1, \quad \operatorname{Re} z > 1$$

donde el producto corre sobre todos los números primos p .

Por lo tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_n^z}\right) = 1.$$

Como consecuencia del teorema 10.1.3, página 288, y la convergencia del producto $\prod_p \left(1 - \frac{1}{n^s}\right)$, tenemos que el producto $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ converge si $\operatorname{Re} s > 1$, y es no nulo.

Así

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

o equivalentemente

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

converge si $\operatorname{Re} s > 1$.

En particular, la función $\zeta(s)$ es una función holomorfa si $\operatorname{Re} z > 1$. ■

Ya que

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

reemplazando t por $n\tau$ en la integral anterior obtenemos

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt,$$

de donde, si $\operatorname{Re} z > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}\Gamma(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-n\tau} d\tau \\ &= \int_1^{\infty} t^{z-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Por otra parte, como $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, se tiene que

$$\zeta(z)\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1-z) \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Así

$$\zeta(z) = \frac{(\sin \pi z)\Gamma(1-z)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Obtener la continuación analítica de la función $\zeta(z)$ a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ es más sutil que en el caso de la función $\Gamma(z)$, siguiendo la idea de Riemann, presentaremos la relación que tienen estas funciones con la función theta, véase 10.28 página 305, la cual está definida como $\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$. Y como vimos en la ecuación 10.31, página 310 la función theta satisface la

ecuación funcional $\vartheta(t) = t^{-1/2} \vartheta\left(\frac{1}{t}\right)$ si $t > 0$.

Tal relación implica, por un lado,

$$\vartheta(t) \leq Ct^{-1/2} \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

y como $e^{-\pi n^2 t} \leq e^{-\pi n t}$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n t} \leq Ce^{-\pi t}, \quad \text{si } t \geq 1,$$

de donde

$$|\vartheta(t) - 1| \leq Ce^{-\pi t}$$

para alguna $C > 0$, y toda $t \geq 1$.

Lo anterior nos permite demostrar el siguiente resultado:

Teorema 10.5.2 Si $\operatorname{Re} z > 1$, entonces

$$\pi^{-z/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} (\vartheta(u) - 1) du \quad (10.38)$$

Demostración. Si $\operatorname{Re} z > 1$, como consecuencia de la expresión integral de $\Gamma(z)$, dada por la ecuación 10.24 tenemos que

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{z}{2}-1} e^{-t} dt$$

reemplazando t por $\pi n^2 u$ obtenemos

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \pi^{\frac{z}{2}} n^z \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du,$$

de donde

$$\pi^{-z/2} n^{-z} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du,$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} \pi^{-z/2} \zeta(z) \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-z/2} n^{-z} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} (\vartheta(u) - 1) du. \end{aligned}$$

Como esperábamos demostrar. ■

A continuación estudiaremos la *función xi*, que es una modificación de la función zeta, pero cuyo estudio es más simple pues tiene más relaciones de simetría.

Definición 10.5.2 Si $\operatorname{Re} z > 1$, definimos la *función xi* como

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z). \quad (10.39)$$

Teorema 10.5.3 La función $\xi(z)$ es holomorfa si $\operatorname{Re} z > 1$, y puede prolongarse analíticamente a $\mathbb{C}$ como una función meromorfa que solamente tiene polos simples en $z = 0$ y $z = 1$.

Además $\xi(z) = \xi(1-z)$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Demostración. Sea

$$\psi(u) = \frac{\vartheta(u) - 1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 / u}, \quad u > 0. \quad (10.40)$$

Como consecuencia de la ecuación funcional de theta 10.31, página 310

$$\vartheta(u) = u^{-1/2} \vartheta\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{si } u > 0.$$

se sigue de 10.40 que

$$\psi(u) = u^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}. \quad (10.41)$$

Por el teorema 10.5.2, se sigue que

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) &= \int_0^\infty u^{\frac{z}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 u^{\frac{z}{2}-1} \psi(u) du + \int_1^\infty u^{\frac{z}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \int_0^1 u^{\frac{z}{2}-1} \left(u^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right) du + \int_1^\infty u^{\frac{z}{2}-1} \psi(u) du \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \int_1^\infty \left(u^{\frac{s-1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du, \end{aligned}$$

siempre que $\operatorname{Re} z > 1$. Consecuentemente

$$\xi(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} + \int_1^\infty \left(u^{-\frac{z-1}{2}} + u^{\frac{z}{2}-1} \right) \psi(u) du.$$

Como la función $\psi(z)$ tiene decaimiento exponencial cuando $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$, la integral $I(z) = \int_1^\infty \left(u^{\frac{s-1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \psi(u) du$, define una función entera, y por lo tanto $\xi(z)$ admite una continuación analítica a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples en $z = 0$ y $z = 1$.

Además, es claro que la integral permanece invariante si se reemplaza z por $1-z$, así como para la suma de los términos $\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$. Por lo tanto $\xi(z) = \xi(1-z)$. ■

Teorema 10.5.4 — Extensión analítica de ζ . La función $\zeta(z)$ admite una continuación analítica a una función meromorfa, cuya única singularidad es un polo simple en $z = 1$.

Demostración. Por definición, la función meromorfa $\xi(z)$ está dada como

$$\xi(z) = \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z),$$

lo cual implica que

$$\zeta(z) = \pi^{\frac{z}{2}} \frac{\xi(z)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)},$$

Como $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ es una función meromorfa con polos simples en $0, -2, -4, \dots$, por lo tanto el polo simple de $\xi(z)$ en el origen se cancela con el cero correspondiente de $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}$.

Luego entonces la única singularidad de $\zeta(z)$ es un polo simple en $z = 1$. ■

Además, como consecuencia del teorema del producto 10.1.3, página 288, tenemos que $\zeta(z)$ no se anula si $\operatorname{Re} z > 1$. Finalmente, si escribimos la relación $\xi(z) = \xi(1-z)$ en la forma

$$\pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z) = \pi^{-\frac{1-z}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \zeta(1-z)$$

tenemos que

$$\zeta(z) = \pi^{\frac{z}{2}-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)} \zeta(1-z).$$

De lo anterior podemos concluir que, si $\operatorname{Re} z < 0$

1. $\zeta(1-z)$ no tiene ceros, pues $\operatorname{Re}(1-z) > 1$.
2. $\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)$ no se anula.
3. $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}$ se anula en $z = -2n$, con n un entero positivo.

Por lo tanto, los únicos ceros de $\zeta(z)$ en $\operatorname{Re} z > 0$ corresponden a los enteros negativos pares.

Corolario 10.5.1 Los únicos ceros de la función zeta fuera de la banda $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$ son los enteros negativos pares.

Definición 10.5.3 La *banda crítica* para la función zeta es $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

Como consecuencia de la ecuación funcional de ζ y el hecho de que la función zeta no tiene ceros en la recta $\operatorname{Re} z = 0$ implica que la función zeta no tiene ceros en la recta $\operatorname{Re} z = 1$.

En 1915 Hardy demostró que hay una infinidad de ceros de la función $\zeta(z)$ tales que $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, siendo el primer resultado concreto sobre la conjetura de Riemann.

En el año 2004 Xavier Gourdon verificó la conjetura de Riemann numéricamente para los primeros diez trillones de ceros no triviales de la función zeta.

Hasta el 2005, el intento más serio para explorar numéricamente los ceros de la función zeta, es el *ZetaGrid*, un proyecto de computación distribuida con la capacidad de verificar billones de ceros por día. El proyecto finalizó en diciembre de 2005, y ninguno de los ceros encontrados proporciona un contraejemplo de la hipótesis de Riemann.

Para adentrarse en el estudio de la función zeta pueden consultarse el libro de Edwards (1974), así como el artículo de Riemann (1998).

La disertación de Riemann *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gröse*, puede consultarse en Riemann (1998).

10.6 Ejercicios

1. Demuestre que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.
2. Demuestre que $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$.
3. Demuestre que $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^3+1}\right) = \frac{2}{3}$.
4. Demuestre que, si $|z| < 1$ entonces $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2n})$ converge absolutamente a $\frac{1}{1-z}$.
5. Demuestre que $\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$.

6. Demuestre que $\Gamma(m) = 2 \int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx$, para cada $m > 0$.
7. Si $m \in \mathbb{N}$ demuestre que, $\Gamma(z) - \frac{(-1)^m}{m!(z+m)}$ es holomorfa si $|z+m| < 1$.
8. Aplique la prolongación analítica de la función gamma para demostrar que $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.
9. Demuestre que, si $a, b > 0$ entonces

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+a+b)}{(n+a)(n+b)} = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

10. Use que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ para demostrar que

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}}$$

siempre que $t \in \mathbb{R}$.

11. Se define la *función beta* como

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt.$$

- a) Demuestre que $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Sugerencia: $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-t-s} dt ds$, y haga los cambios de variable $s = ur, t = u(1-r)$.

- b) Demuestre que $B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}} du$.

12. Demuestre que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{\cosh \pi x}$ es $F(\xi) = \frac{1}{\cosh \pi \xi}$. Deduzca que, si $\xi > 0$, y $a > 0$, la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{e^{-2\pi i a x}}{\cosh(\pi x/\xi)}$ es $F(\xi) = \frac{x}{\cosh(\pi(\xi + a)x)}$, y por la fórmula de la suma de Poisson se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i a n}}{\cosh(\pi n/\xi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{\cosh(\pi(n+a)\xi)}.$$

13. Demuestre que, si $s \in \mathbb{R}$ o $\operatorname{Re} s = 1/2$, entonces $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$ es un número real.



Bibliografía

- Ahlfors, L. V. (1979). *Complex analysis*. Mc.Graw-Hill Book Co, New York, USA.
- Carathéodory, C. (1964). *Theory of functions of a complex variable*, volume I. Chelsea Pub. Co., New York, 2nd. edición.
- Cinlar, E. (2010). *Probability and Stochastics*, volume GTM 261. Springer Science+Business Media.
- Conway, J. B. (2010). *Functions of one complex variable, I*. Springer, New York, USA.
- Dugundgi, J. (1978.). *Topology*. Allyn and Bacon Inc., Boston, USA.
- Edwards, H. M. (1974). *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York, USA.
- Euler, L. (1796). *Introductio in analysin infinitorum*. <http://www.17centurymaths.com/contents/euler/introductiontoanalysisvolone/ch16vol1.pdf>.
- J. P. Gilman, I. Kra, R. R. (2007). *Complex analysis. In the spirit of Lipman Bers*, volume 245. Graduate Texts in Mathematics, Springer.
- J. W. Brown, R. V. C. (2004). *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill Interamericana de España, España, 7a. edición.
- K. F. Gauss, A. Wangerin, J. L. L. (1894). *Ueber kartenprojection*. <https://archive.org/stream/ueberkartenproj00gausgoog#page/n3/mode/2up>.
- Kellog, O. D. (1954). *Foundations of potential theory*. Dover publications, Inc, New York, USA.
- Klein, F. (2006). *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX, introducción y edición de José Manuel Sánchez Ron; traducción de José Luis Arántegui*. Barcelona: Crítica, Barcelona, España.
- Knopp, K. (1974). *Theory and application of infinite series (trans, R.C. II. Young)*. Heffner Publishing Co., New York, USA.
- Knopp, K. (1996). *Analytic continuation and complete definition of analytic functions*, volume I. Dover, New York, USA.

- Krantz, S. G. (1999). *Holomorphic functions*. Birkhäuser, Boston, MA, USA.
- Marsden, J. y Hoffman, M. (1987). *Basic Complex analysis*. Freeman Co., New York, USA, 2nd edición.
- Munkres, J. (2000). *Topology*. Prentice Hall, Inc., New York, USA.
- Nahim, P. J. (2008). *Esto no es real, La historia de i* . Consejo Nacional para la Cultura y las Artes, México, D.F.
- Narasimhan, R. (1985). *Complex analysis in one variable*. Birkhäuser Inc., Boston, USA.
- Needham, T. (2002). *Visual complex analysis*. Clarendon Press, Oxford, Great Britain.
- R. E. Bradley, C. E. S. (2009). *Cauchy's cours d'analyse an annotated translation*. Springer Science+Business Media, New York, USA.
- Remmert, R. (1998). *Classical topics in complex function theory*, volume Graduate Texts in Mathematics, 172. Springer-Verlag, Inc., New York, USA.
- Riemann, B. (1998). Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen gröse. monatsberichte der berliner akademie, november 1859. transcribed by d. r. wilkins. preliminary version: December 1998 . on the number of prime numbers less than a given quantity. translated by david r. wilkins preliminary version: December 1998. <http://www.claymath.org/sites/default/files/zeta.pdf>.
- Roman, S. (2004). *Introduction to the Mathematics of Finance. From Risk Management to Options Pricing*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag is a part of Springer Science+Business Media, USA.
- Rudin, W. (1986). *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York, USA.
- Spiegel, M. R. (1971). *Variable Compleja*. McGraw-Hill interamericana de México, S.A de C.V., Impreso en Colombia.
- Vargas-Mendoza, J. A. (2006). *Álgebra Clásica*. Textos. Publicaciones electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, México, 2a edición.

A. Notación y terminología

SÍMBOLO	TERMINOLOGÍA	PÁGINA
$\emptyset$	El conjunto vacío	
$\mathbb{N}$	Los números enteros positivos	
$\mathbb{Z}$	Los números enteros	
$\mathbb{Q}$	Los números racionales	
$\mathbb{R}$	Los números reales	
$\mathbb{C}$	Los números complejos	1
$z = x + yi$	Un número complejo	1
i	El número complejo $i = \sqrt{-1}$	1
$\bar{z}$	El conjugado del número complejo z	5
$x = \operatorname{Re} z$	Parte real de $z = x + yi$	5
$y = \operatorname{Im} z$	Parte imaginaria de $z = x + yi$	5
$ z $	Módulo del número complejo z	6
$\arg z$	El argumento del número complejo z	10
$e^{i\theta}$	Fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$	11
$d(z, w)$	Distancia de z a w	26
(X, d)	Espacio métrico	26
$B(x, r)$	Bola abierta con centro en x y radio r	26
$\overline{B(x, r)}$	Bola cerrada con centro en x y radio r	26
(X, τ)	Espacio topológico	27
Ω°	Interior del conjunto Ω	29
$\overline{\Omega}$	Cerradura del conjunto Ω	29
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto Ω	29
$P = [z_1; \dots; z_k]$	Polígono con vértices $z_1, \dots, z_k$	31
$\operatorname{diam}(\Omega)$	Diámetro del conjunto Ω	33

SÍMBOLO	TERMINOLOGÍA	PÁGINA
$\{a_n\}$	Sucesión	34
$\sum a_n$	Serie	36
$\mathbb{C}_\infty$	El plano extendido	52
$\mathbb{S}^2$	La esfera en $\mathbb{R}^3$	52
$\chi(z_1, z_2)$	Distancia cordal en $\mathbb{C}_\infty$	56
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$	Derivada parcial con respecto a x_j	63
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Funciones k — derivables en Ω	63
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	Funciones ∞ — derivables en Ω ,	66
Df_{z_0}	Diferencial de f en z_0	65
$f'(z), \frac{df}{dz}$	Derivada de f c/r a z	66
$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$	Derivada parcial de f c/r a $\bar{z}$	69
$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$	Derivada parcial de f con respecto a $\bar{z}$	69
$\varphi_f(z)$	Función continua de Caratheodory	71
$\exp(z), e^z$	Función exponencial	81
$\log z$	Función logaritmo	85
$\operatorname{sen} z$	Función trigonométrica seno	89
$\operatorname{cos} z$	Función trigonométrica coseno	89
$\operatorname{senh} z$	Función seno hiperbólico	92
$\operatorname{cosh} z$	Función coseno hiperbólico	92
$\operatorname{arc} \operatorname{sen} z$	Función seno inversa	??
$\operatorname{arc} \operatorname{cos} z$	Función coseno inversa	??
Δu	Laplaciano de la función u	98
$\Delta^c u$	Laplaciano complejo de la función u	98
$v(\gamma; \mathcal{P})$	Variación acotada de γ c/r a $\mathcal{P}$	112
$v(\gamma)$	Variación total de γ	112
$\ell(\gamma)$	Longitud de arco de la curva γ	115
$\int_\gamma f$	Integral de línea de f a lo largo de γ	115
Z_f	Conjunto de ceros de f	132
$n(\gamma, z)$	Índice de γ con respecto a z	155
$\operatorname{an}(z; R_1, R_2)$	Anillo centro z , radios R_1, R_2	170
$\operatorname{Res}(f, z)$	Residuo de f en z	176
$\operatorname{ord}_z(f)$	Orden de f en el punto z	179
$\dot{\gamma}$	Derivada de γ c/r $t \in \mathbb{R}$	223
$S(\alpha, \beta)$	$S(\alpha, \beta) := \{z; \alpha < \arg(z) < \beta\}$	224
$GL(2, \mathbb{C})$	Matrices invertibles, 2×2 ,	230
$Möb$	Grupo trans. Möbius	230
$PSL(2, \mathbb{C})$	Grupo proyectivo lineal	231
$\operatorname{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$	Automorfismos conformes	231
$\operatorname{tr}(T)$	Traza transf. Möbius T	232
$\tau(T)$	Traza cuadrada trans. Möbius T	232
$(z_1, z_2; z_3, z_4)$	Razón cruzada de z_1, z_2, z_3 y z_4	234
$\mathbb{D}$	Disco unitario centro $(0, 0)$	236
$\mathbb{H}_+$	Semiplano superior	237
$J(z)$	Aplicación de Joukowski	241
$W_{a,b}$	$\{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Im} z < b\}$	??

SÍMBOLO	TERMINOLOGÍA	PÁGINA
$\mathcal{C}(\Omega)$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ es continua}\}$	256
$\mathcal{C}(\Omega)$	Funciones $\mathbb{C}$ –valuadas definidas en Ω	256
$\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{D})$	$f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tales que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$	256
$\mathcal{H}(\Omega)$	Funciones holomorfas en Ω	256
$*du$	Diferencial $*du$	265
$P_{a,R}(z, t)$	Núcleo de Poisson para $B(a, R)$	272
$P_{a,R}(\phi)(z)$	Integral de Poisson de ϕ	273
$\prod_{j=1}^{\infty} a_j$	Producto infinito de los números a_j	283
$\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$	Producto infinito de funciones f_j	287
$E_p(z)$	Funciones factores elementales	289
$\Gamma(z)$	Función Gamma de Euler $\Gamma(s)$	295
$\vartheta(s)$	Función theta	305
$\zeta(s)$	Función zeta de Riemann	311



Índice de figuras

2.1	El Diagrama de Wessel-Argand-Gauss	5
2.2	El conjugado de un número complejo	5
2.3	Representación geométrica de la suma de números complejos.	6
2.4	El módulo de un número complejo	7
2.5	El inverso de un número complejo	7
2.6	El argumento de un número complejo.	11
2.7	El producto de dos números complejos.	12
2.8	La transformación $\mathbb{R}$ -lineal ψ_w	13
2.9	Las raíces quintas de la unidad	14
2.10	Las raíces cuartas de $z = 5 + 12i$	15
2.11	Cuadrilátero $ABCD$	20
3.1	La bola con centro en el origen y radio uno con respecto a las métricas d , d_2 y d_3 .	26
3.2	Convergencia uniforme y no uniforme	45
3.3	La proyección estereográfica.	52
3.4	Propiedades de la proyección estereográfica.	54
3.5	La proyección estereográfica preserva ángulos.	54
3.6	Distancia cordal	55
4.1	Función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, que sólo se anula en $x_0 = 0$ y cuyas derivadas en $x_0 = 0$ siempre se anulan	64
4.2	Función de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que no admite serie de Taylor en $x_0 = 0$.	64
4.3	Representación geométrica de la fórmula de Euler	81
4.4	Geometría de la función exponencial	83
4.5	Imagen de un rectángulo bajo la función exponencial	83
4.6	Dominio e imagen de una rama del logaritmo	85
4.7	Representación del dominio de la función $f(x) = \sqrt{z^2 + 1}$	89
5.1	Curva suave por partes	111
5.2	Curva de Jordan	111
5.3	Porción del proceso de construcción de la curva de Koch	112
5.4	Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ entonces $v(\gamma, \mathcal{P}) \leq v(\gamma, \mathcal{P}')$.	113
5.5	Rectángulo cerrado en Ω	120

5.6	Rectángulos cerrados en Ω	121
5.7	$R_\varepsilon \rightarrow R$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$	123
5.8	El punto z_0 en el interior del rectángulo R	123
5.9	El teorema de Morera	126
6.1	Homotopía en X con puntos extremos fijos	149
6.2	$\gamma_0(t) = (1+t)t$ y $\gamma_1(t) = t+it^2$ son homotópicas con extremos fijos.	150
6.3	Las curvas $\gamma_0(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ y $\gamma_1(t) = 2 \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ son homotópicas como curvas cerradas.	151
6.4	A la izquierda mostramos un conjunto convexo, a la derecha, un conjunto no convexo	151
6.5	Subdivisión para la demostración del teorema de deformación	153
6.6	El índice de una curva γ en los puntos z_k	157
7.1	Representación del anillo $\text{an}(z_0; R_1, R_2)$	171
7.2	Ceros de $\cosh z$ en $B(0, 5)$	186
7.3	La gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{x^6+1}$, $x \in \mathbb{R}$	195
7.4	La curva Γ utilizada para evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1} dx$	196
7.5	La curva γ_r utilizada para evaluar $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	198
7.6	La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$, $x \in \mathbb{R}$	199
7.7	Curva γ usada para evaluar las integrales de Fourier	200
7.8	Gráfica de la función $\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}$ para $x \in \mathbb{R}$	202
7.9	Gráfica de la función $\frac{\cos x}{x^2+1}$	203
7.10	La gráfica de la función $\sin x^2$	205
7.11	La gráfica de la función $\cos x^2$	205
7.12	Curva γ usada para evaluar las integrales de Fresnel	206
7.13	La gráfica de la función e^{-x^2} , con $x \in \mathbb{R}$	208
7.14	Curva γ usada para evaluar la integral Gaussiana	209
7.15	Curva γ usada para evaluar la transformada de Mellin	211
7.16	Los segmentos orientados $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ son los lados de los polígonos buscados.	214
8.1	Ángulo $\theta = \arg(\dot{\gamma}_2(t_2)) - \arg(\dot{\gamma}_1(t_1))$ entre γ_1 y γ_2	224
8.2	Geometría de la función $f(z) = z^2$	224
8.3	La imagen de Ω bajo $g(z) = \sqrt{z}$	224
8.4	Geometría conforme de la función exponencial	226
8.5	Geometría de algunas aplicaciones conformes	227
8.6	C es conjugado armónico de D con respecto a A y B	236
8.7	z_0^* es simétrico de z_0 con respecto a ℓ	238
8.8	El punto z^* es el simétrico de z con respecto a $\mathcal{C}$	240
8.9	El punto z^* es el simétrico de z con respecto a $\mathcal{C}$	240
8.10	La imagen bajo $J(z)$ de una familia de rectas.	243
8.11	Componentes del perfil aerodinámico	244
8.12	Perfil de Joukowski	245
8.13	Círculo que pasa por -1 con radio a y ángulo β	245
8.14	Imagen de $\gamma(t) = ae^{it}$ bajo $J(z)$ para $a > 1$	246
8.15	Imagen de $\gamma(t) = iy_0 + ae^{it}$ bajo $J(z)$	247
8.16	Imagen de $\gamma(t) = x_0 + ae^{it}$ bajo $J(z)$	247
8.17	Imagen de $\gamma(t) = z_0 + ae^{it}$ bajo $J(z)$	248
8.18	Perfil de Joukowski $J(z) = z + b^2/z$	248
8.19	La función $\cos z$	249

8.20	Familia de circunferencias mutuamente tangentes	250
8.21	T transforma circunferencias no concéntricas en circunferencias concéntricas	251
8.22	Proyección de Mercator, 1569. Imagen tomada de Wikipedia.org . . .	252
9.1	Ω es un conjunto abierto tal que $\Omega = \Omega^*$	278
10.1	Gráfica de $\Gamma(x)$ para $x \in (-4, 6)$	295
10.2	La trayectoria C para la expresión de Hankel. Los argumentos inicial y final para t son $-\pi$ y π respectivamente.	304
10.3	Trayectoria para el estudio del comportamiento de la transformada de Fourier	306
10.4	Trayectoria γ_N de la fórmula de la suma de Poisson	307
10.5	$f(z) = e^{-\pi z^2}$ es su propia transformada de Fourier	309



Índice alfabético

Ángulo entre curvas, 223

Teorema

de Cauchy-Goursat para bolas , 134

Abel, Lema de, 48

Anillo con centro z_0 , 170

Aplicación

conforme, 225

de Joukowski, 241

dilatación, 231

fraccional lineal, 228

holomorfa, 192

homotecia, 231

inversión, 231

rotación, 231

traslación, 231

Argumento

valor principal, 10

Banda crítica de ζ , 316

Bernoulli

números de, 220

Bola

abierta, 26

cerrada, 26

Cauchy

valor principal de, 194

Cauchy-Riemann

Ecuaciones de, 69

Cero

de orden k , 180

de una función holomorfa, 138

simple, 180

en ∞ , 177

Componente conexa, 32

Conforme

aplicación, 223, 225

isomorfismo, 228

Conformemente equivalentes, 226

Conjunto

conexo, 30

abierto, 27

acotado, 33

cerrado, 28

cerradura de un, 29

compacto, 33

conexo, 30

convexo, 59, 151

de ceros Z_f , 132

de polos P_f , 187

denso, 29

diámetro de un, 33

disconexo, 30

frontera de un, 29

interior de un, 29

separación de un, 30

Constante de Euler, 294

Convergencia

puntual de funciones, 45

radio de, 49

uniforme de funciones, 45

Corte, 86

Criterio

- M de Weierstrass, 47
- de Cauchy, 36
- de Cauchy para convergencia uniforme
 - de funciones, 46
- de comparación, 38
- de la p -serie, 38
- de la raíz, 40
- de la raíz, series de potencias, 49
- de la razón, 39
- de la razón, series de potencias, 49
- Cubierta abierta, 32
- Curva, 110
 - cerrada, 110
 - cerrada simple, 110
 - de Jordan, 110
 - extremos de una, 110
 - interior de una, 157
 - inversa, 110
 - rectificable, 112
 - reparametrización, 111
 - simple, 110
 - soporte, 110
 - suave, 110
 - suave por partes, 110
 - suma de, 110
 - traza, 110
- Derivada
 - a la Carathéodory, 71
 - en infinito, 78
 - en un punto, 66
 - parcial, 63
 - parcial con respecto a $\bar{z}$, 69
 - parcial con respecto a z , 69
- Desigualdad
 - de Cauchy, 137
 - de Cauchy-Schwarz, 8
 - de la media, 136
 - del triángulo, 7
- Dextrógiro, 11
- Diagrama de Wessel-Argand-Gauss, 5
- Diferencial
 - conjugada, 103
 - localmente exacta, 99
- Dirichlet
 - región de, 279
 - solubilidad del problema, 279
- Distancia cordal, 56
- Ecuación de Laplace, 252
- Ecuación funcional
 - de Γ , 296
 - theta, 310
- Eje imaginario, 5
- Eje real, 5
- Esfera de Riemann, 53
- Espacio
 - métrico, 26
 - simplemente conexo, 150
- Espacio topológico, 27
- Espacio topológico
 - Hausdorff, 28
- Exponentes complejos, 87
- Fórmula
 - de Gauss para Gamma, 300
 - de D'Moivre, 13
 - de duplicación de Legendre, 299
 - de Euler, 79
 - de Euler para la función Γ , 295
 - de Poisson, 307
 - integral de Cauchy en una región anular, 171
 - integral de Cauchy para derivadas, 136, 158
- Factores elementales, 289
- Familia
 - equicontinua, 256
 - normal, 256
 - puntualmente acotada, 256
 - uniformemente acotada, 256
- Función
 - $\mathbb{C}$ -diferenciable, 66
 - $\mathbb{C}$ -valuada de variable compleja, 40
 - analítica, 75
 - armónica, 99, 263
 - armónica conjugada, 100
 - beta, 317
 - conforme en $\mathbb{C}_\infty$, 228
 - continua, 43
 - coseno, 89
 - de variación acotada, 112
 - entera, 66, 138
 - exponencial, 80, 81
 - extensión analítica de ζ , 315
 - extensión de la función factorial, 297
 - gamma de Euler, 295
 - hiperbólica, 92
 - holomorfa, 74
 - isogonal, 226
 - límite de una, 42
 - logaritmo, 84
 - meromorfa, 177
 - parte imaginaria de, 40
 - parte real de, 40
 - periódica, 82
 - preserva ángulos orientados, 228
 - primitiva de una, 128

- rama principal de logaritmo, 85
- representación de Hankel de Gamma, 303
- seno, 89
- theta, 305
- trigonométrica, 89
- uniformemente continua, 44
- variación total, 112
- xi, 314
- zeta, 311
- Función armónica
 - módulo máximo, 270
 - media aritmética, 269
 - teorema del valor medio, 269
- Grupo
 - normal, 262
 - simple, 262
- Harnack
 - desigualdad de, 276
- Homotopía
 - con extremos fijos, 149
 - entre curvas cerradas, 150
- Índice de una curva, 155
- Integral
 - de línea, 115, 118
- Integral impropia, 193
- Isomorfismo analítico, 192
- Límite
 - de una función, 42
- Límite , 34
 - al infinito, 56
 - en infinito, 56
 - inferior, 35
 - superior, 35
- Laplaciano, 98
- Laplaciano
 - complejo, 98
- Lazo, 110
- Lema
 - de Cauchy para circunferencias concéntricas, 171
- Levógiro, 11
- Localmente exacta, 268
- Logaritmo
 - rama de, 86
 - rama del, 85
- Longitud de arco, 115
- Möbius
 - grupo de transformaciones, 230
 - transformación de, 228
- transformaciones conjugadas, 232
- punto fijo , 231
- Métrica, 26
- Matriz Jacobiana, 65
- Milne-Thomson, 264
- Multiplicidad del cero, 133
- Número complejo
 - argumento, 10
 - campo, 2
 - conjugado de un, 5
 - definición, 1
 - forma polar, 11
 - igualdad, 2
 - inverso de un, 7
 - módulo, 6
 - parte imaginaria, 5
 - parte real, 5
 - producto, 2
 - producto de, 11
 - suma, 2
- Número de vueltas, 155
- Orden
 - de una función en un punto, 179
- ordenación, 19
- Parte
 - principal, 169
 - singular, 169
- Período, 82
- Plano extendido, 52
- Poisson
 - fórmula de, 272
 - integral de, 273
 - núcleo de, 272
- Polígono, 31
- Polinomio característico, 139
- Polo , 169
 - en ∞ , 177
 - orden de un, 169
 - simple, 180
- Principio
 - de continuación analítica, 129
 - de la identidad, 133
 - de la media, 136
 - del Argumento, 187
 - del máximo, 142
 - del módulo máximo , 270
- Principio de tricotomía, 19
- Producto infinito
 - de números complejos, 284
 - convergencia absoluta , 286
 - convergencia puntual, 287

- convergencia uniforme, 287
- Propiedad
 - de extensión, 279
 - del valor medio, 270
- Proyección estereográfica, 52
- Punto
 - de acumulación, 28, 29
 - de ramificación, 86
 - final de una curva, 110
 - frontera simple, 279
 - inicial de una curva, 110
 - interior, 27
 - límite, 28
- Raíz n -ésima, 88
- Radio de convergencia, 49
- Rama de logaritmo, 154
- Razón cruzada, 234
- Rectángulo
 - abierto, 119
 - cerrado, 119
 - vértices de un, 119
- Regla de L'Hôpital, 104
- Regla de la Cadena, 73
- Residuo, 176
 - cálculo de, 180–182
 - en ∞ , 177
- Schwarz
 - Lema de, 144
- Sentido
 - Dextrógiro, 11
 - Levógiro, 11
- Serie
 - armónica, 36
 - convergencia absoluta, 37
 - convergente, 36
 - de Laurent, 176
 - de Laurent en infinito, 175
 - de potencias, 47
 - de Taylor, 130
 - divergente, 36
 - geométrica, 37
 - divergente, 36
- Serie de funciones
 - convergencia, 46
 - convergencia uniforme, 46
- Simetría, 239
 - principio de, 241
- Singularidad
 - aislada, 167
 - esencial, 170
 - removible, 167
- Sucesión, 34
- convergente, 34
 - de Cauchy, 34
 - de números complejos, 34
- teo: $\mathbb{C}$ —diferenciable implica holomorfa, 124
- Teorema
 - Bhor-Mollerup, 300
 - caracterización simplemente conexos, 266
 - convergencia del producto infinito de funciones, 288
 - de Casorati-Weierstrass, 180
 - de Cauchy, 122
 - de Cauchy para rectángulos, 124
 - de Cauchy-Goursat, 120
 - de Cauchy-Goursat, versión homotópica, 153
 - de convergencia de Weierstrass, 128
 - de deformación, 152
 - de extensión de Riemann, 168
 - de factorización de Weierstrass, 291
 - de Frobenius, 19
 - de Green, 119
 - de Heine-Borel, 33
 - de Hurwitz, 191
 - de la adición, 81
 - de la aplicación abierta de Riemann, 254
 - de la curva de Jordan, 111
 - de la función abierta, 143, 160
 - de la función inversa, 73
 - de Laurent, 173
 - de Looman-Menchoff, 70
 - de los factores elementales, 290
 - de Morera, 125
 - de Picard, 180
 - de Riemann, demostración, 258
 - de Rouché, 188, 189
 - de Runge, 218
 - de Taylor, 130, 137
 - del módulo máximo, 143
 - del residuo, 185
 - del valor medio para funciones
 - armónicas, 269
 - fórmula integral de Cauchy, 157, 187
 - fórmula integral de Cauchy en anillos, 171
 - fórmula integral de Euler para Γ , 302
 - fundamental del álgebra, 138, 189
 - fundamental del cálculo, 118
 - Mittag-Leffler, 222
 - transformada de Fourier, 305
- Topología, 27
- Topología

base, 28	Traza cuadrada, 232
Transformada	Valor propio, 139
de Fourier, 200	Vecindad, 27
inversa de Fourier, 200	Vecindad
Trayectoria, 110	degenerada, 27