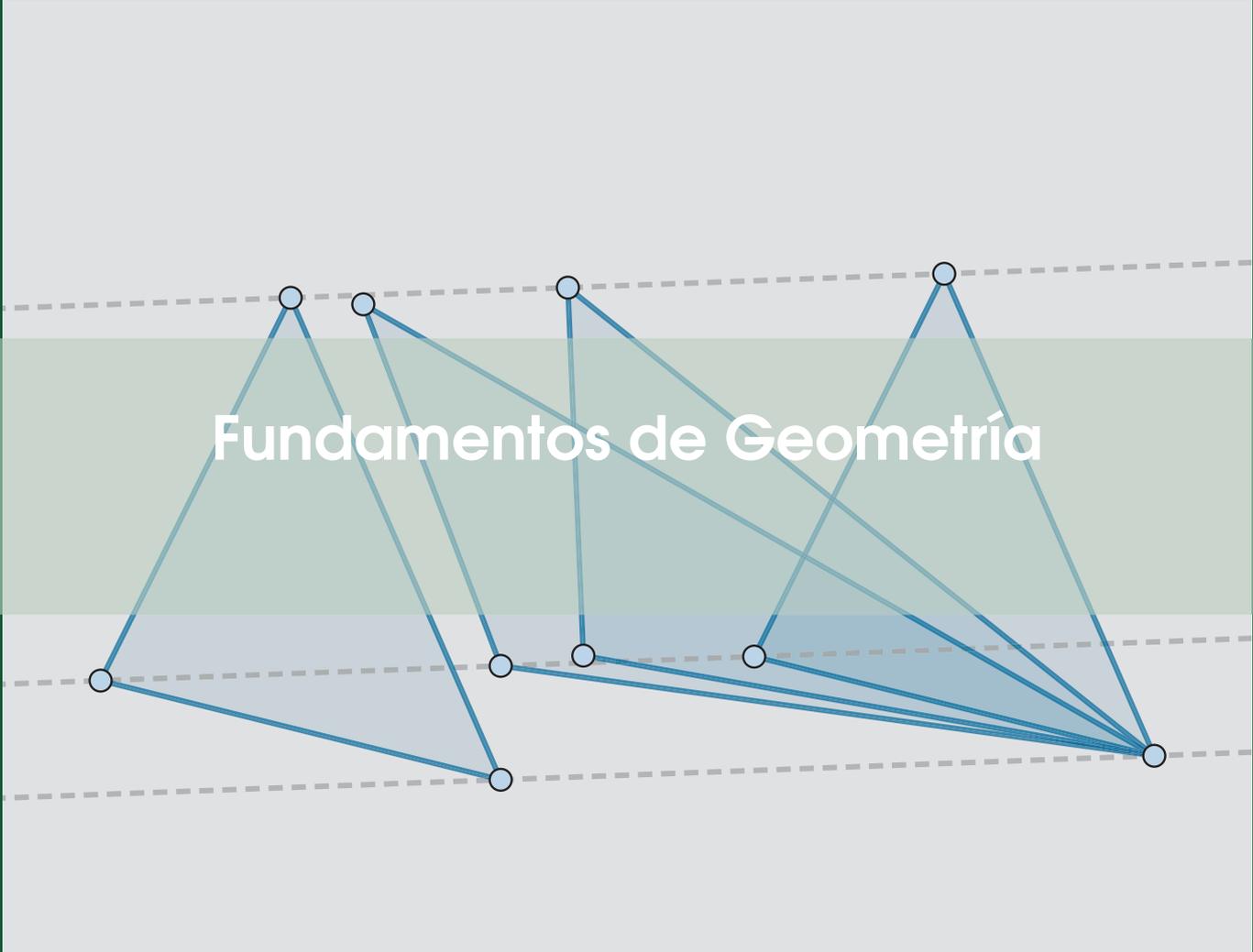




UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Colección CBI

Libro de texto



Fundamentos de Geometría

Gabriel López Garza

Fundamentos de Geometría

Gabriel López Garza

Libro de texto



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Rector General

Dra. Norma Rondero López

Secretaria General

Dra. Verónica Medina Bañuelos

Rector de la Unidad Iztapalapa

Dr. Juan José Ambriz García

Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Mtro. Federico Bañuelos Bárcena

Coordinador de Extensión Universitaria

Lic. Adrián Felipe Valencia Llamas

Jefe de la Sección de Producción Editorial

Fundamentos de Geometría

Primera edición: 2022

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX, México

ISBN Colección: 978-607-477-998-1

ISBN Volumen: 978-607-28-2577-2

Impreso en México / Printed in Mexico

ΑΓΕΩΜΕΤΡΕΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

“IGNORANTES DE LA GEOMETRÍA ABSTÉNGASE DE ENTRAR”. ESCRITO EN EL PÓRTICO DE LA ACADEMIA DE PLATÓN.

UN GRAN EVENTO EN MI VIDA A LA EDAD DE ONCE FUE COMENZAR CON EUCLIDES, EL CUAL ERA ENTONCES UN LIBRO DE TEXTO DE GEOMETRÍA ACEPTADO. ENCONTRÉ UNA GRAN DELICIA EN EL LIBRO CUANDO PUDE SUPERAR MI DECEPCIÓN AL DARME CUENTA QUE COMENZABA CON AXIOMAS, LOS CUALES TENÍAN QUE SER ACEPTADOS SIN DEMOSTRACIÓN.

BERTRAND RUSSELL, MY MENTAL DEVELOPMENT.

CUANDO ALGUIEN QUE HABÍA EMPEZADO A LEER GEOMETRÍA CON EUCLIDES, AL HABER APRENDIDO EL PRIMER TEOREMA LE PREGUNTÓ, “PERO QUÉ VENTAJA TENDRÉ AL APRENDER ESTAS COSAS?” EUCLIDES LLAMÓ A SU ESCLAVO Y DIJO “DALE TRES CENTAVOS, YA QUE NECESITA TENER UNA GANANCIA DE LO QUE APRENDE”.

STOBAEUS, EXTRACTOS II. 31. 114. ED. WACHMUTH II. 228. 25-29.

Índice general

<i>Introducción a los conceptos básicos</i>	19
<i>El camino más corto al Teorema de Pitágoras</i>	39
<i>Tres teoremas sobre la circunferencia</i>	73
<i>Teoremas de Menelao y Ceva</i>	83
<i>Construcción del plano cartesiano y Trigonometría</i>	91
<i>Los números complejos y el plano cartesiano</i>	133
<i>Geometría hiperbólica</i>	179
<i>Otras geometrías</i>	195
<i>Otras axiomáticas de la geometría euclidiana</i>	225
<i>Apéndice: Campo, Espacio Vectorial</i>	237
<i>Bibliografía</i>	239

Índice alfabético 241

Índice de figuras

1.	Puntos	19	
2.	Rectas	20	
3.	Ángulos	20	
4.	Contraejemplo.	22	
5.	Teorema IX (Transversal)	23	
6.	Conjetura del ángulo rectilíneo.	25	
7.	Correspondencia biunívoca entre triángulos	26	
8.	Marcas de correspondencia	26	
9.	Superposición	27	
10.	Construcción con regla y compás de rectas perpendiculares	28	
11.	Ángulos rectos	31	
12.	Ángulos obtusos	32	
13.	Figura correspondiente al problema 7.	33	
14.	Ejercicios básicos de congruencia de triángulos.	34	
15.	Medida de un segmento	39	
16.	Ángulo	40	
17.	Correspondencia Biúnivoca	40	
18.	Semirecta	41	
19.	Medida de ángulos	42	
20.	Adición de ángulos	42	
21.	Ángulo rectilíneo	42	
22.	Par lineal	42	
23.	Postulado IV [LAL] de triángulos semejantes.	43	
24.	Teorema I (AA)	44	
25.	Demostración Teorema II (Tales)	44	
26.	Demostración Teorema III (LLL)	45	
27.	Demostración Teorema III conclusión	45	
28.	Demostración Teorema IV (Suma de \angle s internos)	45	
29.	Demostración Teorema V (Bisector perpendicular)	46	
30.	Demostración Teorema VI (Perpendicular por un punto)	47	
31.	Demostración Teorema VI, conclusión	47	
32.	Teorema de Pitágoras	47	

33. Demostración del Teorema de Pitágoras.	48
34. Recíproco del Teorema de Pitágoras	49
35. Teorema VIII (Paralelas)	49
36. Demostración Teorema VIII	49
37. Demostración Teorema VIII, conclusión	49
38. Lema I (Ángulo exterior a un triángulo)	50
39. Lema II (Ángulos opuestos por el vértice)	50
40. Teorema X (Congruencia de ángulos alternos internos)	51
41. Recíproco de congruencia de ángulos alternos internos	51
42. Corolario I (Postulado V de Euclides)	52
43. Ángulo exterior a un triángulo	52
44. Ángulo exterior mayor que ángulos remotos	53
45. Demostración lema DT I	53
46. desigualdad del triángulo demostración	54
47. Alternativa para suma de ángulos internos	55
48. No hay teorema LLA	56
49. Triángulo rectángulo	57
50. Triángulo rectángulo	57
51. Cubo y el teorema de Pitágoras	57
52. Gap en el recíproco del teorema de Pitágoras	58
53. Teorema (Existencia de rectángulos)	58
54. Corolario IV (Proporcionalidad en triángulos)	58
55. Teorema Euclides I.1	59
56. Teorema Euclides I.5	60
57. No hay teorema LLA	62
58. Correspondencia que preserva la orientación	64
59. Correspondencia que no preserva la orientación	64
60. 20 Contraejemplo de LLA	65
61. Demostración Tabular del Teorema I (AA)	65
62. Demostración Tabular del Teorema II (Tales)	65
63. Demostración Tabular del Teorema III (LLL)	66
64. Demostración Tabular del Teorema IV (Suma de \angle s internos)	67
65. Demostración Tabular del Teorema V (Bisector perpendicular)	67
66. Demostración Teorema VI, conclusión	68
67. Demostración Tabular del Teorema VI (Perpendicular por un punto)	68
68. Demostración Teorema VI, conclusión	68
69. Solución del problema 7	68
70. Teorema Euclides I.5	69
71. Recíproco del Teorema de Pitágoras	70
72. Cuadrilátero con diagonales perpendiculares	71
73. Solución al problema 24	71
74. Circunferencia	73

75. Secantes, tangentes	73
76. Teorema I-C (Tangentes son perpendiculares al radio)	73
77. Teorema I-C recíproco	74
78. Teorema II-C (Tangentes concurrentes son congruentes)	74
79. Ángulos centrales e inscritos	74
80. Teorema III-C (Ángulo inscrito es mitad del ángulo central)	75
81. Ángulo inscrito es mitad del ángulo central, caso ii)	75
82. Ángulo inscrito es mitad del ángulo central, caso ii)	75
83. Corolario (Ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto).	76
84. Circunferencia por los tres vértices del triángulo	78
85. Circunferencia tangente a los tres lados de un triángulo	78
86. Teorema I-C tabular (Tangentes son perpendiculares al radio)	79
87. Teorema I-C recíproco	79
88. Teorema II-C (Tangentes concurrentes son congruentes)	79
89. Paralelogramo inscrito	80
90. Círculo inscrito	80
91. Intersección de circunferencias	81
92. Altura y círculo inscrito	81
93. Cuerdas congruentes y ángulos centrales	82
94. Teorema de Menelao	83
95. Demostración del Teorema de Menelao i	83
96. Demostración del Teorema de Menelao ii	83
97. Demostración del Teorema de Menelao iii	83
98. Teorema de Menelao	84
99. Teorema de Ceva sin signo	84
100. Demostración del Teorema de Ceva i	84
101. Demostración del Teorema de Ceva ii	84
102. Demostración del Teorema de Ceva iii	85
103. Demostración del Teorema de Ceva iii	85
104. Demostración del recíproco del Teorema de Ceva	85
105. Mediana	87
106. Bisectriz	88
107. Circuncentro	88
108. Ortocentro	88
109. Circuncentro	89
110. Mediana	90
111. Sistema rectangular	92
112. Sistema de coordenadas cartesiano	92
113. Sistema no rectangular	93
114. Fórmula de Distancia entre dos puntos	93
115. Ecuación de la Circunferencia	94
116. Teorema Euclides I.1 revisado	95

117. Rectas que se intersecan en \mathbb{R}^2	96
118. Circunferencias que se intersecan en \mathbb{R}^2	97
119. ¿Circunferencia y recta sin puntos comunes?	98
120. Circunferencia sin puntos racionales	99
121. Longitud de arco	100
122. Cuerdas	101
123. Descripción de los arcos orientados, positivos y negativos.	102
124. Definición de seno y coseno	103
125. Grafica de seno	104
126. Grafica de coseno	104
127. Identidades de paridad de las funciones seno y coseno.	105
128. Diferencia de ángulos y arcos de circunferencia.	107
129. Triángulos rectángulos en la circunferencia unitaria	111
130. Resolución Triángulos rectángulos	111
131. Demostración para el caso $m(\text{hipotenusa}) = m(AC) > 1$.	111
132. Demostración para el caso $m(\text{hipotenusa}) = m(AC) < 1$.	111
133. Triángulo del ejemplo	112
134. Ley de senos	113
135. Segunda parte de la demostración de la Ley de senos, caso ángulo C agudo.	113
136. Ley de senos	113
137. Ley de senos	113
138. Contraejemplo de la ley de senos	114
139. Ejemplo de la ley de senos con dos soluciones	114
140. Seno no es inyectiva	115
141. Demostración de la ley de cosenos	115
142. Gráfica de arc sen	116
143. Gráfica de arc sen	117
144. Gráfica de la tangente	117
145. Gráfica de la arctan	117
146. Solución de triángulo oblicuo	118
147. Coordenadas polares	120
148. Coordenadas polares.	120
149. Coordenadas cartesianas de $P = (1, 2\pi/3)$.	121
150. Coordenadas polares de $P = (1, 1)$.	121
151. Circunferencia $r = 3$ en coordenadas polares	122
152. Gráfica de $r = 1 - \cos \theta$	123
153. Sector circular	128
154. Gráfica de la espiral $r = \theta$.	131
155. Gráfica de $r^2 = \sin(2\theta)$.	131
156. Graficas de $r = \sin 2\theta$ y $r = \sin 3\theta$.	132
157. Gráfica de $r = \cos \theta$, en coordenadas polares.	132
158. Representaciones polar y cartesiana de un número complejo z.	135

159. Producto en S^1 136
 160. La notación clásica o histórica de un número complejo. 137
 161. Conjugado de un número complejo 138
 162. Inverso multiplicativo de un número complejo 138
 163. Raíces cúbicas de la unidad 143
 164. Gráfica de $y = x^2 + 1$. 144
 165. Los ceros de una cúbica 145
 166. Gráfica de las funciones hiperbólicas 151
 167. Gráfica de la la parte real de $\cos z$ 152
 168. Gráfica de la la parte imaginaria de $\cos z$ 152
 169. Gráfica del módulo de $\cos z$ 153
 170. Transformación $z \rightarrow az$ 154
 171. Transformación $z \rightarrow z + b$ 154
 172. Familias de circunferencias 157
 173. Imágenes bajo fraccionales 158
 174. Familia de rectas paralelas 159
 175. Familia de circunferencias imagen bajo $1/z$ 159
 176. El triángulo de la izquierda se transforma en el triángulo de la derecha bajo la transformación

$$f(z) = 2(1+i)\frac{z}{z+i}.$$

162

177. Hipérbolas equiláteras $x^2 - y^2 = c$ y $xy = c$ en el plano xy . 167
 178. Conjunto de Mandelbrot 167
 179. Acercamiento al Conjunto de Mandelbrot 168
 180. Rectas hiperbólicas 179
 181. Postulado hiperbólico de paralelas 180
 182. Paralelas hiperbólicas 180
 183. Triángulo hiperbólico 180
 184. Medida de un segmento hiperbólico 181
 185. Triángulos hiperbólicos congruentes 182
 186. Medida de ángulos en el modelo de Poincaré 184
 187. Suma de los ángulos internos de un triángulo hiperbólico 185
 188. Se construye un \mathbb{H} -cuadrilátero congruente a un cuadrilátero dado con el vértice A , en el centro de la circunferencia unitaria y dos lados sobre radios ortogonales. Si los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son rectos, el $\angle D$ no puede ser recto. 187
 189. No existen rectángulos hiperbólicos 187
 190. Axioma hiperbólico 188
 191. Circunferencias ortogonales 192
 192. Movimientos válidos 196
 193. Reflexión en \mathbb{C} 197

194. Triángulos hiperbólicos congruentes II	198
195. Proporciones con signo	199
196. Coordenadas baricéntricas en un triángulo	201
197. Segmentos paralelos y vectores libres	202
198. Vectores en geometría Afín	203
199. Suma de vectores en geometría Afín	203
200. Multiplicación por un escalar en geometría Afín	204
201. Plano \mathcal{A}	205
202. Teorema de Menelao en geometría afín	206
203. Triángulos en perspectiva	206
204. Teorema de Desargues	207
205. Demostración del T. Desargues (i)	207
206. Demostración del T. Desargues (ii)	207
207. Demostración del T. Desargues (iii)	207
208. Demostración del T. Desargues (iv)	208
209. Teorema recíproco de Desargues	208
210. Teorema recíproco de Desargues	208
211. Teorema de Pasch	209
212. Las traslaciones son afines	211
213. Las dilataciones son afines	211
214. Teorema de Ceva en geometría afín	216
215. Todos los triángulos son \mathcal{A} -congruentes	219
216. Teorema de Menelao con signo	222
217. Axioma IV de Tarski	227
218. Axioma V de Tarski	227
219. Lados definidos por una recta	228
220. Axioma de Congruencia H-C ₄	229
221. Geometría de cuatro puntos	231
222. Independencia del Axioma 1	232
223. Axioma de Pasch	234

Índice de cuadros

1. Ternas pitagóricas de la tableta Plimpton, aprox. 1800 a. C. 29
2. Tabla correspondiente al Ejemplo 3 122
3. Tabla correspondiente a la lemniscata $r^2 = \sin(2\theta)$. 131

*Con agradecimiento a Edward R. Tufte y
Donald E. Knuth, cuyo trabajo desinteresado
permite hacer bellos y desinteresados libros
en L^AT_EX*

Introducción

Este libro está pensado como una introducción a la geometría plana euclidiana para estudiantes universitarios o pre-universitarios con una fuerte vocación por el estudio de las Matemáticas. El contenido del libro *Fundamentos de geometría* abarca el contenido completo de la Unidad de Enseñanza y Aprendizaje del mismo nombre de la Licenciatura en Matemáticas de la UAM Iztapalapa. Además, contiene otros temas tales como: una introducción a la geometría afín, los teoremas de Menelao y Ceva en dos enfoques distintos: dentro de la geometría euclidiana, mediante la semejanza de triángulos y una segunda presentación dentro del contexto de la geometría afín. También se estudia el modelo de Poincaré para la geometría hiperbólica, se construye el plano cartesiano a partir de la geometría euclidiana y, al final del libro, se introducen los conceptos de consistencia, independencia y completitud de axiomas y se compara la axiomática de Birkhoff con la de Tarski y con la de Hilbert a un nivel elemental.

Justificación y relevancia

Después de más de dos mil años de existencia de los *Elementos de Euclides* ¿otro libro de geometría? Estudiar geometría el día de hoy a nivel universitario y, por añadidura en la UAM, plantea varias dificultades y cuestionamientos didácticos. Primero, ¿cuál es el nivel previo de conocimientos de geometría sintética de los estudiantes de la UAM? Segundo, a partir de estos conocimientos previos ¿cuáles son los conceptos y métodos que todo estudiante de matemáticas debe manejar con fluidez durante su carrera y su vida como matemático? Tercero, ¿cómo desarrollar todo lo considerado anteriormente en once semanas que dura un curso de la UAM? Con respecto a los conocimientos previos puedo afirmar, a partir de mi experiencia como profesor, que la mayoría de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas tiene conocimientos previos casi nulos en los métodos de la geometría axiomática. Desafortunadamente, el razonamiento deductivo y los sistemas axiomáticos fueron expulsados de la enseñanza preuniversitaria, aunque fueron parte esencial de la enseñanza de las matemáticas a nivel me-

dio en las generaciones anteriores a los años 80. De esta manera, al enfrentar el curso de geometría en la universidad, los estudiantes tienen dificultades aún para distinguir entre las hipótesis y la tesis de un teorema, para no hablar de los métodos de demostración de la geometría. Así que los conocimientos previos de los estudiantes, según he constatado en mi práctica docente, están basados en la resolución de triángulos, uso básico de las funciones seno y coseno, así como ciertas aplicaciones del teorema de Pitágoras, aunque la mayoría de los estudiantes son incapaces de enunciar correctamente el famoso teorema. En cuanto a los temas relevantes de geometría euclidiana, tomando en cuenta los conocimientos previos y el programa oficial de la UAM, se han escogido como imprescindibles para un matemático los teoremas de congruencia y semejanza de triángulos, tres teoremas básicos de la circunferencia y el teorema de Pitágoras, entre otros. Referente a las aplicaciones de la teoría de semejanza de triángulos, primero se construye la trigonometría sobre el círculo unitario para, a partir de este saber, construir los números complejos que, a su vez, serán aplicados en el estudio del modelo del disco de Poincaré de la geometría hiperbólica. Finalmente, dada la problemática planteada, ¿cómo se puede trabajar todo el contenido del curso en once semanas? La propuesta de este libro es estudiar el sistema axiomático de Birkhoff¹, que es uno de los aproximamientos más breves a todos los temas requeridos de geometría plana, con un mínimo de axiomas y con el mínimo de prerrequisitos, sin abandonar la formalidad necesaria en un curso de geometría universitario. Si bien la axiomática de Birkhoff ha sido incorporada en varios libros de texto, como el de Moise², no existen libros en español que presenten dicha axiomática. Además, la versión de este libro es lo más cercana posible al artículo original de Birkhoff, pero presentada con ejemplos y ejercicios adecuados al nivel de nuestros estudiantes. Otra novedad en nuestro enfoque es el uso de regla y compás virtual, lo cual se aplica desde el primer capítulo del libro mediante el programa *GeoGebra*, el cual no es un programa comercial, sino de uso libre y gratuito, con código abierto y con instrucciones, ayudas y comandos en español.

Los ejemplos de demostraciones matemáticas en varias partes del libro se presentan como problemas, con la finalidad de que el lector enfrente primero las dificultades que implican las construcciones geométricas de las demostraciones y el acto mismo de construir demostraciones, pero al final del capítulo, se dan las soluciones completas de estos problemas. El lector principiante jamás aprenderá a demostrar teoremas si no emprende por sí mismo tal actividad, pero podrá tener una guía para corregir o corroborar sus propias soluciones con los ejemplos resueltos incluidos en cada capítulo.

Al final del libro se presenta un acercamiento a los sistemas axio-

¹ George B. Birkhoff. *A set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor*. *Annals of Mathematics, Second Series*. Vol. 33, No. 2 (Apr. 1932), pp. 329-345

² Edwin E. Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Addison-Wesley, 1974

máticos de Tarski y de Hilbert, sin los cuales ningún acercamiento a la geometría contemporánea estaría completo, aunque este tema no está incluido en el temario oficial, se puede incluir como un tema de discusión para terminar el curso.

Introducción a los conceptos básicos

Siguiendo la sana práctica constructivista comenzaremos este libro suponiendo que el lector *no es* una página en blanco, sino que tiene saberes previos de los objetos estudiados en la geometría plana: puntos, rectas, semirrectas, ángulos, triángulos, etcétera. Con estos saberes construiremos una primera aproximación a la geometría estableciendo claramente cuáles conceptos y saberes mantendremos así, como ya sabidos, y cuáles conceptos redefiniremos. Posteriormente, a partir del segundo capítulo, trataremos la geometría de una forma totalmente diferente a nuestra primera aproximación, centrándonos mayormente en el enfoque abstracto por excelencia del método axiomático deductivo de la geometría, el cual ha perdurado por milenios, desde los babilonios, pasando por la luminosa cultura griega antigua, hasta nuestros días. Nuestro plan de trabajo en esta primera aproximación es el siguiente:

- Preliminarmente aceptaremos ciertos términos como conocidos.
- Estudiaremos la circularidad en las definiciones y posteriormente, estableceremos cuáles serán los conceptos primitivos y los definibles en una lista inicial.
- Estudiaremos el concepto de conjetura en matemáticas, estableceremos algunas conjeturas empíricamente.
- Estudiaremos el método deductivo en geometría de manera preliminar, usando las conjeturas a las que se haya llegado, para preparar la formulación de una axiomática formal que se desarrollará en los siguientes capítulos.

Objetos básicos en la geometría

Los más elementales objetos en la geometría son los *puntos*. En la Figura 1 se muestran varias representaciones de estos objetos. Obviamente, el lector debe distinguir entre una *representación de un punto* y la idea abstracta de este objeto en la cual los puntos no tienen dimensiones. En nuestro enfoque, los puntos serán denotados con letras

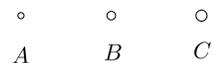


Figura 1: A, B, C , son representaciones de puntos, en el concepto abstracto de "punto" debe entenderse que tales objetos *no tienen dimensiones* al contrario de las representaciones de las figuras.

mayúsculas A, B, C , etcétera y sus representaciones podrán tener diferentes tamaños y colores para enfatizarlos cuando sea conveniente.

Los segundos objetos más usados en la geometría son las *rectas*. Aceptaremos por el momento, que el lector “reconoce” una recta intuitivamente. Las rectas las denotaremos con letras caligráficas ℓ, m, n . A veces las rectas se representan con dos flechas en los extremos (sobre todo en los ejercicios) indicando con ello que el objeto representado se prolonga sin límites, ejemplo de esto es la recta ℓ en la Figura 2.

En tercer lugar, aparecen los *segmentos*. Los segmentos están definidos por dos puntos llamados extremos del segmento P, Q y todos los puntos de una recta que están entre los extremos. Al segmento formado por todos los puntos entre P y Q lo denotamos con PQ . No debe confundirse un segmento con su longitud, la cual denotaremos $m(PQ)$ (medida de PQ) y estudiaremos en el próximo capítulo.

En cuarto lugar, supondremos que el lector conoce lo que es un *ángulo*. Hay tres figuras asociadas a un ángulo las cuales se muestran en la Figura 3. Una de estas figuras es el objeto que consta de los tres puntos A, O, B . Al punto O situado “entre” A y B se le llama *vértice* del ángulo $\angle AOB$. El segundo objeto al que también se le llama ángulo está formado por dos segmentos $O'C$ y $O'D$, los segmentos tienen como punto común el vértice O' , a este ángulo también se le denota con $\angle CO'D$. El tercer objeto al que también llamamos ángulo y que se denota $\angle mO''\ell$, está formado por dos semirrectas ℓ y m con origen común (o vértice) en el punto O'' . Observe que las semirrectas terminan en una flecha para indicar que se extienden indefinidamente en la dirección indicada, esta notación se usará frecuentemente en los ejercicios.

Nota. Bajo ninguna circunstancia se debe confundir el *objeto geométrico* llamado ángulo, representado en la Figura 3, con su *medida*, (lo cual es un *número*). De la *medida* supondremos por el momento que el lector sabe asignar una medida en grados a un ángulo (aquí aparecen los babilonios mencionados al principio) usando un transportador. Distinguiremos las medidas de los ángulos de los ángulos mismos, por ejemplo, con el símbolo $m\angle AOB$, denotamos la medida del ángulo $\angle AOB$. Las medidas en *radianes* las trataremos formalmente hasta el próximo capítulo.

Definiciones y conceptos primitivos

El lector observará que, por ejemplo, se podría partir de alguna de los tres objetos geométricos asociados con un ángulo en la Figura 3 y se podrían describir las otras dos en términos de tal objeto. Por ejemplo, se podría definir ángulo como una figura formada por tres “puntos” diferentes, tales que uno de ellos está “entre” los otros dos y a partir

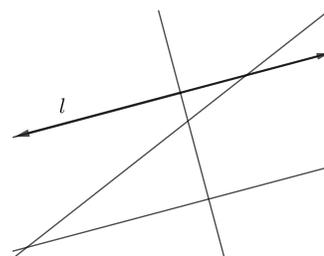


Figura 2: Las representaciones de las rectas tampoco deben confundirse con el concepto abstracto, por ejemplo, que las representaciones tengan anchura, no significa que las rectas la tengan.

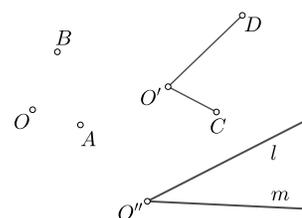


Figura 3: Tres figuras geométricas diferentes a las que se les suele llamar ángulos.

de esta definición incluir las otras dos figuras (¿cómo?). Se han puesto entre comillas las palabras *puntos* y *entre* para destacar que quizá nuestra definición no estaría completa si no se entiende lo que significan estas palabras con anterioridad. Claramente al tratar de definir *punto* aparecerán palabras que serán muy probablemente más difíciles de definir que el objeto mismo a definir. Por ejemplo, si se define punto como un objeto sin dimensiones, seguramente quien lo haga así, tendrá dificultad para definir “dimensión”. Pero lo peor que puede ocurrir en una definición es lo que se conoce como *circularidad*. Por circularidad entenderemos lo que ocurre al tratar de definir un concepto donde aparecen palabras que al tratar de definir las a la vez, se llega a fin de cuentas a la primera palabra con la que se comenzó.

Para evitar la circularidad y con ello la *autoreferencia*, y para evitar que al tratar de definir un concepto simple, aparezcan términos mucho más complejos que lo que se desea definir, en geometría (y también en muchas ramas del saber humano) se aceptan conceptos indefinidos a los cuales se les denomina *conceptos primitivos*.

En nuestro enfoque de geometría aceptaremos *sin definir* los siguientes términos:

- i) Punto.
- ii) Recta.
- iii) Plano.
- iv) Conjunto.

También aceptaremos sin definir la relación “estar en”. Por ejemplo, cuando decimos que un punto *está* en una recta o cuando decimos que un objeto *está* en un conjunto. Consideramos equivalentes las relaciones “estar en un conjunto” y “pertenecer a un conjunto”.

Implicación lógica

La *implicación lógica* “ \implies ” significa, en el más rudimentario sentido, que si los asertos o afirmaciones P y Q están relacionadas de tal forma que se cumple que

$$P \implies Q,$$

con ello queremos decir que cuando P es verdadero (o simplemente, se cumple), no existe la posibilidad de que Q sea falso (o que Q no se cumpla). Pero en un sentido más sutil, una implicación involucra dos proposiciones, asertos o afirmaciones de manera que uno se deriva a partir de otro. A veces, una proposición se deriva de otra de una manera elegante y nada obvia, y a veces, de manera muy directa, pero siempre a partir de los postulados o de teoremas, lemas, etcétera, aceptados dentro de un sistema axiomático.

Ejemplo de definición circular:

Círculo: figura en forma de rueda



Rueda: figura en forma de círculo



Círculo: figura en forma de círculo

El lector deberá desarrollar la habilidad (si todavía no la tiene) de traducir las afirmaciones matemáticas en forma de implicación o condicional lógica siempre que sea necesario.

Ejemplo. Escriba en forma de implicación la afirmación *Todos los triángulos son isósceles*³.

Solución. Primero tenemos que interpretar la afirmación en forma de implicación por lo cual debe reescribirse como:

“Si X es un triángulo entonces X es isósceles”, lo cual es equivalente a “si X es triángulo $\implies X$ es isósceles”. Evidentemente tal implicación es falsa universalmente y con este ejemplo queremos evidenciar que no por que algo este escrito en forma de condicional necesariamente es verdadero, lo que debería ser obvio. Un ejemplo que hace evidente que una implicación es falsa se llama *contraejemplo*. En la figura 4 se muestra el contraejemplo de un triángulo que no es isósceles.

Equivalencias de implicaciones en español

Existen muchas formas de escribir en español una implicación que en lógica sólo tiene la forma $P \implies Q$. Como una guía para el principiante mostramos algunas oraciones que son equivalentes desde el punto de vista lógico. También debemos advertir que desde el punto

Equivalencias de “si X es triángulo $\implies X$ es isósceles”

1. Si X es triángulo entonces es isósceles.
 2. Si X es triángulo, es isósceles.
 3. X es isósceles si X es triángulo.
 4. X es triángulo implica X es isósceles.
-

de vista de la lógica, son equivalentes $P \implies Q$ y $\neg Q \implies \neg P$, donde $\neg Q$ denota la negación de Q . De esta forma a nuestra tabla debemos agregar: (5) si X no es isósceles entonces X no es triángulo. La implicación $\neg Q \implies \neg P$ se llama *contrapositiva* de $P \implies Q$ y suele aparecer en muchas circunstancias técnicas.

Si y solo si. La expresión “si y solo si” significa una doble implicación. Es decir, por la expresión P si y solo si Q entenderemos $P \implies Q$ y $Q \implies P$, en símbolos,

$$P \iff Q.$$

Cuando dos términos están relacionados en una doble implicación lógica se suele decir que son *equivalentes lógicos* o que son *términos equivalentes*.

Definiciones

Partiendo de los conceptos primitivos, se construyen conceptos derivados, por ejemplo, partiendo de “rectas”, se define el concepto de

³ El lector interesado encontrará una demostración deliberadamente falaz de esta afirmación en el libro *Geometría Plana* de René Benítez, *op. cit.*

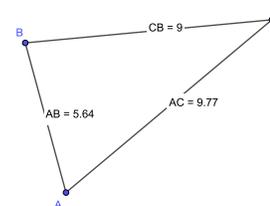


Figura 4: Se muestra un triángulo que *no es isósceles*, lo cual es un *contraejemplo* de la proposición “si X es triángulo $\implies X$ es isósceles”.

recta *transversal*.

Definición [Transversales]. Cualquier recta t que corta a un par de rectas ℓ , m , simultáneamente en puntos diferentes, se llama *transversal*.

De especial interés son las transversales a rectas paralelas, las cuales estudiaremos más adelante. En las transversales, a partir de una figura se pueden indicar ciertos ángulos sin dar la definición precisa (el lector que así lo desee intentará dar una definición en los ejercicios).

Ángulos en transversales. En la Figura 5, ciertos pares de ángulos formados por transversales tienen los siguientes nombres:

1. a y c , d y b , h y f , e y g , se llaman *opuestos por el vértice*.
2. a , b , h , g , se llaman *internos*.
3. d , e , c , f , se llaman *externos*.
4. a y g , h y b , se llaman *alternos internos*.
5. d y f , c y e , se llaman *alternos externos*.
6. a y e , d y h , c y g , b y f se llaman *correspondientes*.
7. a y h , b y g , se llaman *colaterales internos*.
8. d y e , c y f , se llaman *colaterales externos*.

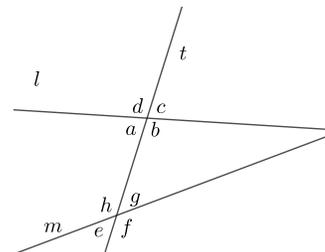


Figura 5: La recta t es transversal a las rectas ℓ , m .

Formalización y definiciones

Cuando se procede de manera formal en matemáticas las definiciones suelen escribirse en forma de un bicondicional, por ejemplo: Cualquier recta t que corta a un par de rectas ℓ , m , se llama transversal *si y solo si* corta a las rectas simultáneamente en puntos diferentes.

Con ello se entiende que:

- (i) Si t corta simultáneamente a ℓ , m en puntos diferentes entonces se llama transversal.
- (ii) Si t es transversal entonces corta simultáneamente a ℓ , m en dos puntos diferentes.

Nota. El lector de matemáticas encontrará en su vida muchas definiciones las cuales *no estarán escritas en forma de bicondicional*. Normalmente, las definiciones aparecerán en la forma (i) o en la forma (ii). Sin embargo, para el principiante será una buena práctica escribir siempre que sea posible las definiciones en forma de bicondicional, es decir, con un “si y solo si” $\stackrel{def}{\iff}$. Lo que denota el símbolo, en primer lugar es, por supuesto, una doble implicación, es decir, entenderemos que $P \implies Q$ y $Q \implies P$, pero estas implicaciones no son consecuencia de

otras proposiciones, sino que simplemente indican que así se ha definido un término o un objeto. Así cuando en una definición se tenga una doble implicación lo denotaremos con el símbolo $\stackrel{def}{\iff}$. También algunas veces estableceremos igualdades por definición y en tal caso, escribiremos análogamente el símbolo $\stackrel{def}{=}$, para evitar ambigüedades⁴.

Todo en geometría es condicional

Después del largo paréntesis de los rudimentos de lógica elemental, tenemos que decir a los lectores que no estén informados que *toda afirmación en geometría es condicional*. Es decir, toda proposición que no sea axioma o postulado en geometría, es implicada por algo. Dado este hecho, si no se aceptaran términos sin definir, al desarrollar la teoría nos veríamos en una situación similar a la que enfrentamos con las definiciones. Para evitar el problemas de circularidad en la fundamentación es que se deben aceptar sin argumentación en la base de la construcción de la geometría algunas proposiciones que sustenten todo el edificio conceptual, llamadas *Postulados o Axiomas*. Esta realidad que inquietaba al gran filósofo y matemático Bertrand Russell cuando era niño⁵, no debe inquietar a ningún lector moderno. Si bien los postulados guardan algún parecido con el carácter de los términos sin definir en la definiciones, también tienen un aspecto fundamental que los diferencia. Los postulados son los generadores en cierto sentido de todas las proposiciones de un sistema axiomático. Imagine el lector que con unas cuantas palabras, digamos cinco, pudieran construirse todas las palabras de un idioma ¿podría ser esto posible? Sin embargo con solo algunos postulados, por ejemplo cinco en la axiomática que estudiaremos, podremos derivar todas las proposiciones de la geometría euclidiana. Si bien la geometría que desarrollaremos no tiene en ningún sentido el carácter de verdad pura y absoluta, en las infinitas aplicaciones que tiene, alcanza un grado de precisión que es inobjetable e insoslayable para el que desea conocer las ciencias que requieren de las matemáticas para su entendimiento.

Aproximación histórica posible, pero indemostrable

Pero si lo antes mencionado no convence al lector de lo apropiado del método axiomático, haremos ahora una primera aproximación, en cierto sentido complementaria, a la geometría que no sea axiomática deductiva, sino inductiva que fue como casi seguramente este saber se desarrolló a lo largo de la historia. Para concretar, ubiquémonos en el tiempo de los babilonios hace unos 4500 años. La geometría de esos pueblos, patente en su arquitectura, artes y escritos, es la producida

⁴ Ejemplo del uso del símbolo $\stackrel{def}{\iff}$ para definir:

\triangle es isósceles $\stackrel{def}{\iff}$ tiene dos lados iguales.

⁵ Un gran evento en mi vida a la edad de once fue comenzar con Euclides, el cual era entonces un libro de texto de Geometría aceptado. Encontré una gran delicia en el libro cuando pude superar mi decepción al darme cuenta que comenzaba con axiomas, los cuales tenían que ser aceptados sin demostración. Bertrand Russell

por cuerdas materiales, cuerdas de las armas llamadas “arcos” y de las plomadas de la construcción. Con las cuerdas, tenían una buena representación de segmentos de líneas rectas y podían trazar circunferencias. Se sabe que los babilonios⁶, como perennes observadores de los astros, habían dividido la circunferencia⁷ en 360° . Podemos especular que después de numerosas observaciones los astrónomos pudieron notar que existe una recta que pasa por el centro de una circunferencia⁸ y que la divide en dos partes iguales. Esta observación la establecemos como nuestra primera conjetura:

Conjetura “babilónica” [Ángulo rectilíneo]. La medida en grados de un ángulo situado sobre una recta con vértice en el centro de una circunferencia y extremos en la circunferencia es $180^\circ = \frac{360^\circ}{2}$.

Llamaremos, de esta forma, *conjetura*, a toda afirmación que está fundamentada en hechos empíricos: observaciones, mediciones, etcétera y que no forma parte del conjunto de axiomas de ningún sistema.

Razonamiento deductivo, una primera aproximación

Antes de describir lo que entenderemos por una demostración formal en nuestro enfoque de la geometría, usaremos conjeturas para ilustrar la manera de proceder con el razonamiento deductivo en las demostraciones. Aceptando como verdadera la conjetura del ángulo rectilíneo, se puede deducir la siguiente proposición.

Proposición de ángulos opuestos por el vértice

Proposición. Si $\angle 1$ y $\angle 3$ son opuestos por el vértice entonces $m\angle 1 = m\angle 3$.

Argumentación intuitiva para la conjetura “ángulos opuestos por el vértice”	
Afirmaciones	Razones
1. $\angle 1$ y $\angle 3$ son opuestos por el vértice	1. Hipótesis.
2. $\angle 1$ y $\angle 2$ tienen un lado en una misma recta.	2. Por (1).
3. $\angle 2$ y $\angle 3$ tienen un lado en una misma recta.	3. Por (1).
4. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$	4. De (2) y la Conjetura babilónica del ángulo rectilíneo.
5. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$	5. De (3) y la Conjetura babilónica del ángulo rectilíneo.
6. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$	6. La relación de igualdad es transitiva y usando (4) y (5).
7. $m\angle 1 = m\angle 3$	5. Cancelación en (6) de $m\angle 2$.

Esta proposición que aparece en muchos manuales de geometría como el primer teorema⁹, explica muy bien lo que entendemos por razonamiento deductivo.

⁶ Ivor Thomas. *Greek Mathematical Works*. Loeb Classical Works

⁷ Sin embargo, la primera mención en un texto griego de la división del círculo del zodiaco en 360° se encuentra en un texto de Hipsicles que sobrevivió hasta nuestro días y que fue escrito aprox. 120 a. C. (vea el libro de Thomas *op. cit.*).

⁸ Proclo afirmaba que Tales fue el primero en “demostrar” esta proposición (Euclides ni siquiera lo demuestra, sino que lo establece como definición), pero esto saber está implícito en los círculos seccionados que pueden ser vistos en monumentos y vasijas egipcias de la décimo octava dinastía muy anterior a Tales de acuerdo con Cantor (vea las referencias en el interior del libro de Thomas *op. cit.*).

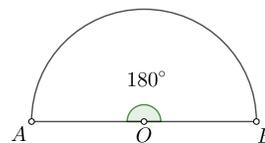
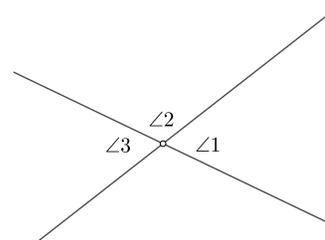


Figura 6: Conjetura: Ángulo con vértice en O en el centro de una circunferencia y extremos A y B sobre la circunferencia mide 180° .



Observe que al aparecer conjeturas en las razones, lo mostrado en las tablas no puede considerarse como una *demostración formal*. En las demostraciones formales solo aparecen postulados, teoremas, etcétera como razones válidas y *nunca conjeturas*.

⁹ George Wentworth y David Smith. *Geometría Plana y del espacio*. Editorial Porrúa, 1984

Recapitulando: Si se considera verdadera la conjetura babilónica, por medio de proposiciones elementales de suma de ángulos se llega mediante la implicación lógica a que todos ángulos que sean entre sí opuestos por el vértice, tienen medidas iguales.

Nota: La forma de presentar la argumentación de la proposición anterior se llama "forma tabular" o argumentación "en forma de tabla". Esta presentación es un recurso didáctico indispensable para organizar una argumentación y se utilizará extensamente a lo largo del texto.

Correspondencias entre figuras

Denotaremos la correspondencia entre dos objetos A, B mediante el símbolo

$$A \leftrightarrow B,$$

significando con ello, que al objeto A le corresponde el objeto B y recíprocamente. A tal correspondencia le llamaremos *correspondencia biunívoca* entre los objetos.

Correspondencia entre triángulos. Dados dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, los vértices se pueden poner en la correspondencia $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ y $C \leftrightarrow F$, lo que también determina la correspondencia de lados $AB \leftrightarrow DE$, $BC \leftrightarrow EF$ y $CA \leftrightarrow FD$ y la correspondencia de ángulos $\angle A \leftrightarrow \angle D$, $\angle B \leftrightarrow \angle E$ y $\angle C \leftrightarrow \angle F$. Todas estas correspondencias las denotaremos con $ABC \leftrightarrow DEF$, es decir:

$$ABC \leftrightarrow DEF \stackrel{def}{\iff} \begin{cases} A \leftrightarrow D, & B \leftrightarrow E, & C \leftrightarrow F \\ AB \leftrightarrow DE, & BC \leftrightarrow EF, & CA \leftrightarrow FD \\ \angle A \leftrightarrow \angle D, & \angle B \leftrightarrow \angle E, & \angle C \leftrightarrow \angle F \end{cases}$$

Resumiendo, con el símbolo $ABC \leftrightarrow DEF$ denotamos la correspondencia de cada uno de los tres puntos A, B, C con D, E, F , respectivamente, de cada uno de los lados AB, BC y CA con DE, EF y FD , respectivamente y de los ángulos $\angle A, \angle B, \angle C$ con $\angle D, \angle E$ y $\angle F$, respectivamente. A lados y ángulos en correspondencia se les indica en las figuras con las marcas homólogas que se muestran en la Figura 8.

Método empírico de superposición

Otra forma de generar conjeturas y argumentaciones intuitivas (que no será válida a partir del próximo capítulo) es el método de superposición de figuras geométricas¹⁰. Tal método es extensamente usado en libros didácticos contemporáneos de enseñanza preuniversitaria como por ejemplo en el libro de Serra¹¹. Utilizaremos la superposición para argumentar intuitivamente si es plausible o no el *Teorema de Tales* y la *Conjetura LAL*, los cuales presentamos a continuación.

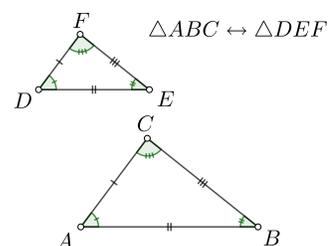


Figura 7: Los lados y ángulos marcados están en correspondencia biunívoca en la correspondencia $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$.

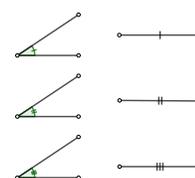


Figura 8: Se muestran las marcas de correspondencia más usadas entre figuras.

¹⁰ En muchos enfoques didácticos contemporáneos se superponen triángulos y otras figuras empleando papel transparente para obtener descubrimientos de propiedades geométricas.

¹¹ Michel Serra. *Discovering Geometry, An Investigative Approach*. Key Curriculum Press, 2008

Teorema de Tales

Un teorema atribuido a Tales por Proclo (vea el libro de Thomas *op. cit.* y referencias al interior), se puede formular de la siguiente manera.

Proposición [Tales]. En todo triángulo a lados de medida igual se oponen ángulos de medida igual.

Argumentación empírica. Suponga que se puede superponer el triángulo $\triangle ABC$ sobre sí mismo de tal forma que el punto A que de sobre B y viceversa, se tendría que el $\angle A$ caería exactamente sobre $\angle B$, es decir, $\angle A \cong \angle B$, lo que se lee ¹²: el ángulo A es congruente con el ángulo B .

Argumentación empírica del Teorema de Tales que no consideraremos válida	
Afirmaciones	Razones
1. $AC \cong BC$	1. Hipótesis.
2. $\angle C \cong \angle C$	2. La congruencia es reflexiva.
3. El triángulo $\triangle ABC$ se superpone sobre sí mismo al invertirlo.	3. Método empírico.
4. $\angle A \leftrightarrow \angle B$.	por (1) y (2) coincide consigo mismo.
5. $m\angle A = m\angle B$	4. Por (3).
	5. Por (4), dado que los ángulos quedan superpuestos exactamente.

Conjetura LAL

Conjetura LAL. ¹³ Si dos triángulos tienen en correspondencia dos lados iguales y el ángulo formado por los dos lados en correspondencia en cada triángulo iguales, tendrán el tercer lado igual entre sí y serán los ángulos restantes en correspondencia iguales.

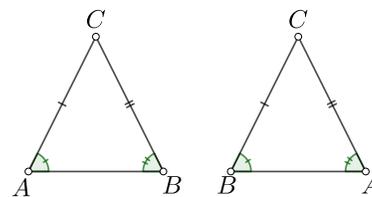
Argumentación empírica. Para dar alguna evidencia en favor de esta proposición¹⁴ superponga el lado AC sobre DF y el lado BC sobre el EF de forma que el $\angle C$ coincida con el $\angle F$. Por lo tanto, el lado AB caerá sobre el lado DE y los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ caerán sobre $\angle D$ y $\angle E$, respectivamente.

Argumentación empírica de la conjetura LAL, <i>tampoco</i> la consideraremos válida	
Afirmaciones	Razones
1. $m(AC) = m(DF)$, $m(BC) = m(EF)$ y $m\angle C = m\angle F$.	1. Hipótesis.
2. Se superpone $\triangle ABC$ sobre $\triangle DEF$.	2. Método empírico.
3. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.	3. El lado AB caerá sobre el lado DE y los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ caerán sobre $\angle D$ y $\angle E$ respectivamente.

Método empírico de construcción con regla y compás

Hasta ahora hemos visto que cierta evidencia empírica de las proposiciones geométricas fue dada históricamente al manipular objetos (físicamente o mentalmente) como por ejemplo:

¹² En este capítulo introductorio el símbolo de congruencia \cong denota solo que las figuras en la relación de congruencia podrían superponerse una encima de otra, de tal manera que coincidieran exactamente, no se dice como esto es posible, *se supone que existe la posibilidad*.



¹³ Este es el Teorema I.4 en *Los Elementos* de Euclides. El acrónimo LAL significa Lado-Ángulo-Lado.

¹⁴ Esta es la idea de la demostración en los *Elementos* de Euclides.

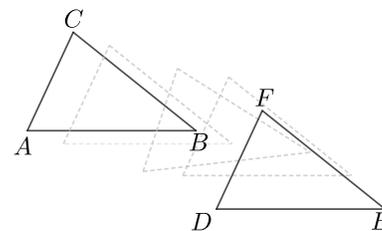


Figura 9: Se superponen los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ para ver que son congruentes. Este método *no* se considera válido en la geometría sin coordenadas.

- Al tomar mediciones, como en la conjetura del ángulo rectilíneo.
- Al superponer figuras geométricas, como en el teorema de Tales y la conjetura LAL.

Una tercera manera empírica de obtener información geométrica está dada por la posibilidad de realizar construcciones con regla y compás.

Proposición [Construcción de perpendicular]. Dada una recta y un punto sobre la recta se puede construir una y sólo una perpendicular a la recta que pase por el punto.

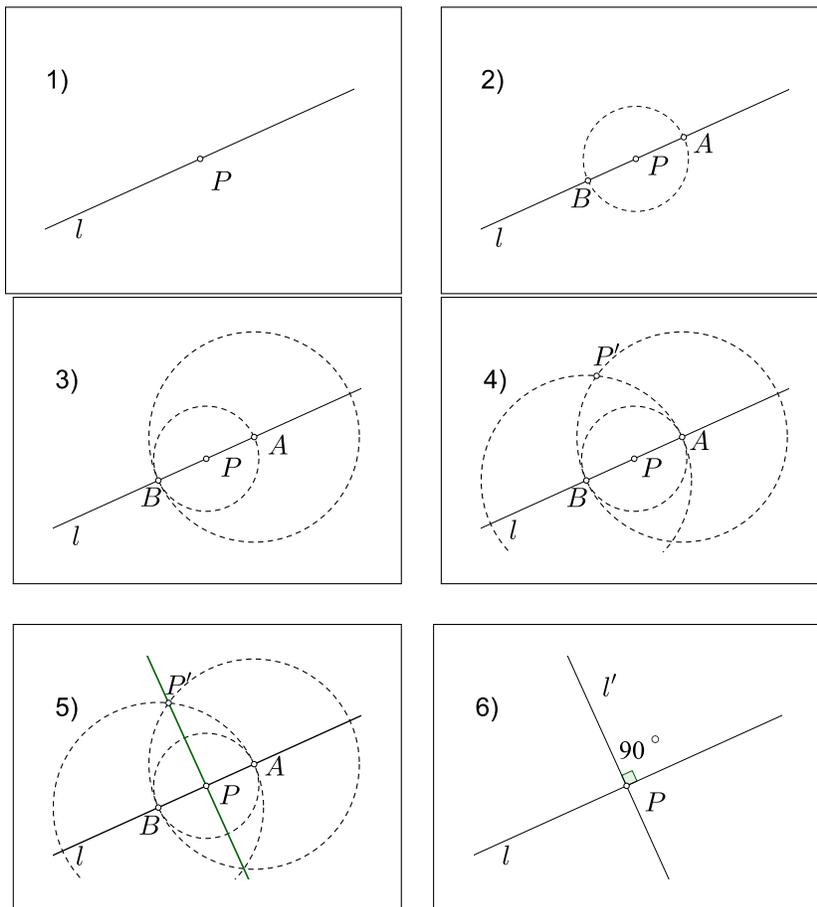


Figura 10: Construcción con regla y compás de rectas perpendiculares. 1) Recta ℓ y un punto P dados. 2) Construya una circunferencia con centro en P y sean A y B las intersecciones de la circunferencia con la recta ℓ . 3) Con centro en A y radio $m(AB)$ construya otro círculo. 4) Repita (3) con centro en B . 5) Sea P' cualquiera de las intersecciones de las circunferencias con centros en A y B . 6) Por P y P' pasa la recta perpendicular a ℓ , llamada ℓ' .

Construcción. Sean una recta ℓ y un punto P , dados. Construya una circunferencia con centro en P y sean A y B las intersecciones de la circunferencia con la recta ℓ . Con centro en A y radio $m(AB)$ construya otro círculo. Repita el paso anterior con centro en B . Sea P' cualquiera de las intersecciones de las circunferencias con centros en A y B . Por P y P' pasa la recta perpendicular a ℓ , llamada ℓ' .

Argumentación empírica de la construcción con regla y compás, <i>tampoco la consideraremos válida.</i>	
Afirmaciones	Razones
1. P está sobre ℓ .	1. Hipótesis.
2. $m(PA) = m(PB)$.	2. Las circunferencias con centros en A y en B tienen el mismo radio.
3. $\triangle APP' \cong \triangle BPP'$.	3. Por (2), además $m(PB) = m(PA)$ y $m(PP') = m(PP')$.
4. $m\angle BPP' = m\angle APP'$.	4. En los triángulos congruentes por (3) son ángulos en correspondencia.
5. $m\angle BPP' + m\angle APP' = 180^\circ$.	5. Por la conjetura del ángulo lineal.
6. $2m\angle APP' = 180^\circ$.	6. Dado que por (4) miden lo mismo $\angle BPP'$ y $\angle APP'$.
7. $m\angle APP' = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.	7. De (6) dividiendo por 2.

Teorema de Pitágoras

Para finalizar este capítulo debemos mencionar que incluso el Teorema de Pitágoras debe ser incluido en la lista de saberes descubiertos empíricamente. Este hecho lo evidencia la existencia de la tableta Plimpton¹⁵ donde aparecen ejemplos ternas pitagóricas (¿debemos llamarlas babilónicas?), es decir, números naturales a, b, c , tales que $a^2 + b^2 = c^2$, los cuales se muestran en la siguiente tabla, note que las cantidades están escritas en el sistema posicional sexagesimal de los babilonios.

a	b	c
2,0 (= 120)	1,59 (= 119)	2,49 (= 169)
57,36 (= 3456)	56,7 (= 3367)	3,12,1 (= 11521)
1,20,0 (= 75600)	1,16,41 (= 4601)	1,50,49 (= 3949)

El lector debe observar que esta tabla muestra un conocimiento muy superior a un mero balbuceo con números. Quien no esté familiarizado con el sistema base sesenta de los babilonios observe que, por ejemplo, $2,0 = (2 \times 60) + (0 \times 1)$; $1,59 = (1 \times 60) + (59 \times 1)$; y $2,49 = (2 \times 60) + (49 \times 1)$. No olvide el lector elevar al cuadro estos números en base sesenta, para que se dé cuenta de los conocimientos que requiere para operar tal sistema posicional.

Argumentaciones válidas

Se ha mencionado someramente en este capítulo que no serán consideradas válidas, las argumentaciones tomando mediciones ni la superposición (real o imaginada), de figuras geométricas ni las construcciones con regla y compás. Tampoco se considerará válida ninguna conjetura vista hasta el momento. Cabe preguntar, ¿cuáles argumentaciones serán válidas? En el siguiente capítulo solo serán válidas aquellas argumentaciones que apelen a los axiomas o postulados, las definiciones y los teoremas que se demuestren con la axiomática de Birkhoff incluyendo los lemas y corolarios, las cuales serán introducidas en el

¹⁵ O. Neugebauer and A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (American Oriental Series 29, New Haven, 1945) pp. 38-41.

Cuadro 1: Ternas pitagóricas de la tableta Plimpton, aprox. 1800 a. C.

momento apropiado. Se supondrá que el lector está familiarizado con las propiedades de campo de \mathbb{R} (las propiedades de los números reales las cuales pueden consultarse al final de este libro), así que todas las propiedades que se deducen de las propiedades de campo y orden de los números reales también serán consideradas válidas. Sin embargo, una vez definido el plano cartesiano en capítulos posteriores, los movimientos de figuras se considerarán válidos una vez que se defina el grupo de isometrías en cada geometría donde se utilice tal grupo.

Finalmente, ninguna definición de objetos geométricos tratada en este capítulo (incluyendo los ejercicios de este capítulo), debe ser considerada como una *definición definitiva*. Solo las definiciones dadas a partir de la axiomática de Birkhoff, las cuales serán introducidas en el siguiente capítulo, deberán ser utilizadas en las demostraciones futuras.

Ejercicios con definiciones

Al comenzar el estudio de la geometría es conveniente que el lector haya tenido la experiencia (y se haya equivocado y haya corregido, como se hará en los ejercicios) de formular ciertas definiciones básicas. Para comenzar con ese ejercicio proponemos seguir los siguientes pasos para crear una definición (por ejemplo de cuadrado):

- Clasifique el término a definir. ¿Qué es? (“Un cuadrado es una figura de 4 lados...”).
- Diferencie el término a definir. ¿En qué se diferencia de los demás de esa clase? (“...de todas las figuras de 4 lados el cuadrado se diferencia en que tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos”).
- Pruebe su definición buscando un contraejemplo.

Para comenzar con un ejercicio de definiciones se recomienda al lector que trate de definir *ángulos opuestos por el vértice* a partir de la Figura 5.

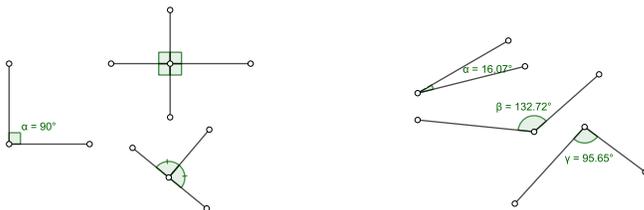
1. Utilice la Figura 5 para definir ángulos: opuestos por el vértice, alternos internos, alternos externos, correspondientes.
2. Euclides en los *Elementos*¹⁶ da las siguientes definiciones:

D.I.1 Punto es aquello que ya no tienen partes.

D.I.2 Línea es longitud sin anchura.

Analice las definiciones anteriores y muestre que o bien se llega a circularidad o que bien se llega a conceptos más complejos que los términos a definir si se intenta establecer la definición de *partes* en D.I.1 o *latitud y longitud* en D.I.2.

3. En la Figura 11 se muestran ángulos rectos y ángulos que no son rectos. Considere que ya se ha definido el concepto de ángulo y defina *ángulo recto* a partir de lo que se ve en las figuras.



4. Defina ángulo agudo y ángulo obtuso a partir de las figuras.

¹⁶ Euclides con traducción de J. D. García Bacca. *Elementos de Geometría*. Universidad Nacional Autónoma de México, 1992

Figura 11: A la izquierda, en la figura, se muestran ángulos que son rectos; a la derecha, se muestran ángulos que no son rectos. A partir de las figuras intente definir *ángulo recto*.

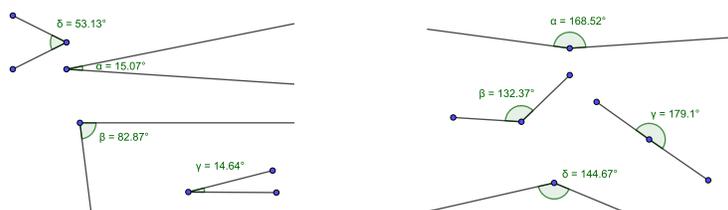


Figura 12: A la izquierda se muestran ángulos agudos y a la derecha se muestran ángulos que son obtusos. Intente definir *ángulo agudo* y *ángulo obtuso* tomando en cuenta la Figura.

Ejercicios de paralelas

En esta parte se trata de dar ciertos argumentos para concluir que ciertos ángulos formados por paralelas y una transversal tienen las mismas medidas. Se deben *suponer como verdaderas* las afirmaciones de que ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo y, otras afirmaciones que por el momento *solamente tienen el carácter de conjeturas*. Se trata de una primera aproximación al razonamiento deductivo, por lo que se esperan argumentaciones perfectibles.

5. Para esta sección daremos alternativas para un estudio deductivo de las medidas (positivas) de ángulos formados por paralelas cortadas por una transversal:

Primera versión provisional de la geometría de las paralelas

Conjetura 1. Ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida positiva.

Conjetura 2 Ángulos alternos internos tienen la misma medida positiva.

- a) Suponiendo válidas las conjeturas 1 y 2, demuestre que ángulos correspondientes tienen la misma medida positiva.
- b) Suponiendo válidas las conjeturas 1 y 2 demuestre que ángulos alternos externos tienen la misma medida positiva.
- c) Suponiendo válidas las conjeturas 1 y 2, demuestre que ángulos colaterales internos son suplementarios.

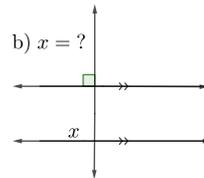
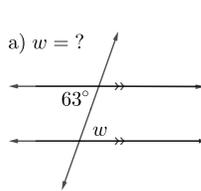
Segunda versión provisional de la geometría de las paralelas

Conjetura 1. Ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida positiva.

conjetura 2'. Ángulos correspondientes tienen la misma medida positiva.

- d) Suponiendo válidas las conjeturas 1 y 2', demuestre que ángulos alternos internos tienen la misma medida positiva.

- e) Suponiendo válidas las conjeturas 1 y 2', demuestre que ángulos alternos externos tiene la misma medida positiva.
- f) Suponiendo válidas las conjeturas 1 y 2', demuestre que ángulos colaterales internos son suplementarios.
6. Resuelva los siguientes ejercicios. Argumente todas sus afirmaciones mediante la primera o segunda versión provisional de la geometría de las paralelas.



7. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo. ¿Cuánto mide y ?
8. La recta m es paralela a n ¿cuánto mide $\angle z$?

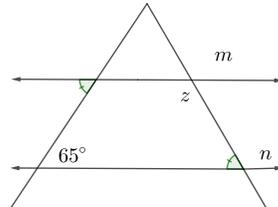
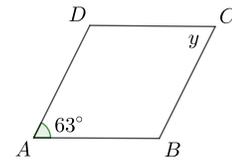


Figura 13: Figura correspondiente al problema 7.

Ejercicios básicos de triángulos

Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre ellos tal que tienen medidas iguales de los lados y de los ángulos en correspondencia. Es decir, para verificar que dos triángulos son congruentes se deben comparar tres medidas de sus lados y tres medidas de sus ángulos en correspondencia. Una primera conjetura que sirve como un atajo para no tomar tantas mediciones es la siguiente:

Conjetura LAL para triángulos congruentes. Dos triángulos son congruentes si y solo si la medida en un triángulo de dos lados y el

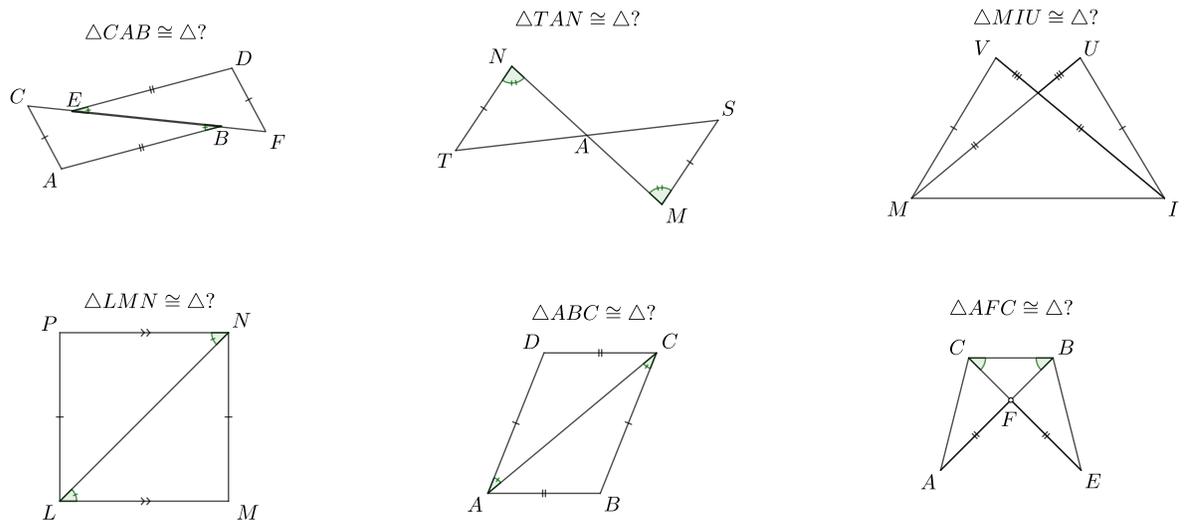


Figura 14: Ejercicios básicos de congruencia de triángulos.

ángulo comprendido entre los lados es igual a la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, del otro triángulo. La palabra LAL es acrónimo de “lado ángulo lado”. Utilice la conjetura LAL para resolver el ejercicio 9.

9. Para la figura 14 diga cuáles triángulos son congruentes. Establezca sus observaciones como una proposición y demuéstrela formalmente usando tablas. Si no puede afirmarse nada de las figuras, indíquelo claramente y argumente.

Ejercicios básicos de construcciones con regla y compás

10. Realice las construcciones que se piden y trate de realizar una argumentación intuitiva que justifique su construcción.
- Dados tres segmentos ¿es posible siempre construir un triángulo con ellos? ¿para cuáles triángulos es posible? Para aquellos triángulos que sea posible, constrúyalos usando regla y compás.
 - Divida un segmento dado en dos partes iguales.
 - Dado un ángulo, construya un segmento tal que divida al ángulo en dos ángulos congruentes.

Solución completa de ejercicios seleccionados

Solución del ejercicio 5a. Etiquete cualquiera de los ángulos alternos internos del sistema de paralelas, con los símbolos $\angle 1$ y $\angle 2$, respectivamente. Considere uno el ángulo opuesto por el vértice a $\angle 1$, observe que debe ser un ángulo correspondiente con el ángulo $\angle 2$. Llame a este ángulo $\angle 3$. Use los dos axiomas 1 y 2 para argumentar que la medida positiva de los ángulos $\angle 2$ y $\angle 3$ son iguales. Recuerde que debe usar las reglas de la aritmética básica en la demostración.

Regla y compás

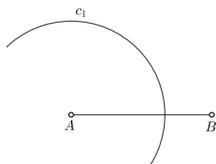
Primero, antes de pasar a las soluciones de los problemas de construcción con regla y compás introduciremos como trabajar con la regla y compás de *GeoGebra*. La herramienta *compás* se encuentra al dar click sobre el ícono de la circunferencia, el cual es el sexto ícono al contar de izquierda a derecha. La herramienta compás permite dibujar una circunferencia dado un segmento de longitud cualquiera y colocarla en el plano donde se desee. Los segmentos se generan con el tercer ícono de izquierda a derecha. Requeriremos tam-



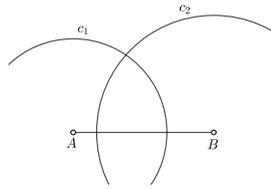
bién determinar las intersecciones de segmentos y circunferencias, esto se obtiene en el menú *punto*, el cual es el segundo ícono. Finalmente, si solo requerimos quedarnos con los puntos de intersección, las figuras se pueden borrar (ocultar) desplegando el menú del último ícono, donde aparece la opción *Mostrar/ocultar objeto*.

Solución del problema 10a. Un triángulo no degenerado se obtiene solo si la suma de las longitudes de los lados menores es mayor que la longitud del lado mayor. Sea AB el segmento mayor y CD EF , los otros dos segmentos tales que $m(AB) < m(CD) + m(EF)$, donde m denota la medida de los segmentos. La construcción se realiza como sigue.

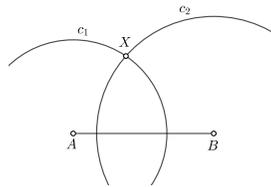
- i) Con centro en el punto A construya una circunferencia c_1 de radio $m(CD)$.



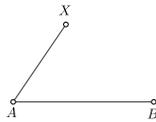
- ii) Con centro en el punto B construya una circunferencia c_2 de radio $m(EF)$.



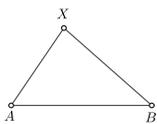
iii) Encuentre el punto X de intersección de las circunferencias dibujadas en (i) y (ii) y después oculte tales circunferencias.



iv) Borrados los círculos, dibuje el segmento AX , el cual mide lo mismo que CD , ¿por qué?



v) Dibuje el segmento BX , el cual mide lo mismo que EF , ¿por qué?



vi) El triángulo $\triangle ABX$ es el triángulo buscado.

El camino más corto al Teorema de Pitágoras

En este capítulo estudiaremos la axiomática de Birkhoff¹⁷, la cual, desde mi punto de vista, nos lleva lo más pronto posible a los resultados fundamentales de la geometría euclidiana, entre ellos al teorema de Pitágoras. Para ilustrar este punto, mientras en nuestro enfoque el famoso Teorema es el séptimo, en los *Elementos* de Euclides es el Teorema 47, lo cual no quiere decir que se requieren las 46 proposiciones anteriores para demostrar el teorema, pero sí muchas de ellas. Otra cosa que hay que mencionar es que no seguiremos al pie de la letra la formulación de Birkhoff, sino que se ha agregado un quinto postulado, el cual no considera el citado autor. También hay que mencionar que no usamos arcos ni segmentos dirigidos, sino sólo medidas de segmentos y de arcos las cuales son estrictamente no negativas. Además, sirva de advertencia que en el trabajo de Birkhoff, nuestro 5° postulado se deduce del Postulado LAL, el cual será nuestro postulado IV¹⁸, aplicado a un triángulo degenerado, pero los triángulos degenerados no se usan en nuestra versión. El lector avezado, al recordar lo ocurrido al 5° postulado de Euclides a lo largo de la historia, notará la ironía de que nuestro 5° postulado pueda ser demostrado dentro de otra axiomática, pero todo sea por una conveniencia meramente didáctica en la versión que presento a continuación.

Los postulados, teoremas y definiciones de este capítulo serán las definitivas en este enfoque y serán las que se utilicen en todas las demostraciones a partir de este momento.

Conceptos y relaciones indefinidos

Los conceptos indefinidos o primitivos son:

- Puntos*, denotados con mayúsculas A, B, C, \dots
- Ciertos conjuntos de puntos llamados *líneas rectas* (o simplemente *rectas*), denotados con caligráficas minúsculas, ℓ, m, n , etcétera.

Las relaciones indefinidas son:

- Distancia entre dos puntos cualquiera* A, B denotada por $d(A, B)$, lo cual es un número real no negativo: $d(A, B) \geq 0$.

¹⁷ George B. Birkhoff. *A set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor*. *Annals of Mathematics*, Second Series. Vol. 33, No. 2 (Apr. 1932), pp. 329-345

¹⁸ La conjetura LAL del capítulo introductorio pasará a ser un postulado en la axiomática de Birkhoff.

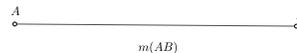


Figura 15: Al segmento AB se le asigna una medida denotada $m(AB)$.

- d) *Medida del ángulo* formado por tres puntos no colineales A, O, B tales que $A \neq O$, $B \neq O$, denotada por $m\angle AOB$ lo cual es un número real no negativo menor igual que π .

Postulado de la medida en una recta

Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}]. Los puntos A, B, \dots de cualquier recta pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los números reales, de tal forma que si x_A es el número real correspondiente al punto A y x_B es el número correspondiente a B se tiene $|x_B - x_A| = d(A, B)$ para todos los puntos A, B .

Definición [Estar entre puntos]. En una recta dada, un punto B está entre A y C , para $A \neq C$, lo cual se denota $A - B - C$ si y solo si $x_A < x_B < x_C$ o bien $x_A > x_B > x_C$.

Nota. Evidentemente una regla marcada está incluida en el Postulado I. El lector debe tomar en cuenta que la regla marcada fue excluida de la geometría de Euclides de manera paradójica ya que la palabra geometría incluye el concepto de *medida*. La siguiente proposición es inmediata del Postulado I.

Propiedades básicas de la distancia entre puntos. La distancia entre dos puntos satisface las siguientes propiedades:

1. $d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.
2. Dados tres puntos distintos en una recta, B está entre A y C , es decir, $A - B - C$, si y solo si

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

3. Si se establece una numeración diferente para una recta ℓ , entonces para todos los puntos A de la recta, si x'_A corresponde al punto A en el segundo sistema, entonces se tiene que existe d tal que o bien $x'_A = x_A + d$ o bien $x'_A = -x_A + d$.

Ejercicio. El lector debe verificar que las propiedades mencionadas se siguen inmediatamente del Postulado I (Rectas en correspondencia con \mathbb{R}).

Nota. Observe que (3) simplemente dice que la numeración en la escala está determinada por el punto de origen marcado con 0 y la dirección que se tome como positiva. Por otra parte, tanto el origen como la dirección son totalmente arbitrarios.

Definición [Segmento]. El segmento AC se define como el conjunto de todos los puntos P que están entre A y C , es decir, se consideran todos los puntos P que satisfacen $x_A \leq x_P \leq x_C$, o bien $x_A \geq x_P \geq x_C$. Los puntos A y C se llaman extremos del segmento.

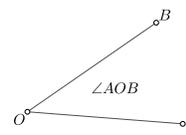


Figura 16: Ángulo $\angle AOB$.



Figura 17: Correspondencia biunívoca entre \mathbb{R} y una recta cualquiera

Definición [Medida de un segmento]. Dado un segmento AB se define la *medida del segmento* $m(AB)$, por la relación

$$m(AB) = d(A, B).$$

Definición [Congruencia de segmentos]. Dos segmentos AB, CD son *congruentes*, lo cual se denota $AB \cong CD$ si y solo si $m(AB) = m(CD)$.

Definición [Triángulo]. Dados tres puntos distintos A, B y C , los tres segmentos AB, BC y CA se dice que forman un triángulo $\triangle ABC$ con *lados* AB, BC, CA y *vértices* A, B, C . En general los puntos que forman un triángulo no son colineales, en el caso en el que los puntos estén sobre la misma recta, a la figura formada por estos puntos se le llama *triángulo degenerado*.

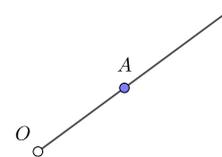


Figura 18: Semirrecta o rayo.

Postulado de la recta que pasa por dos puntos

Postulado II [Dos puntos definen una recta]. Una y solo una recta ℓ contiene dos puntos dados distintos P, Q .

Como consecuencia inmediata del Postulado II, dadas dos rectas distintas ℓ, m ocurre que o bien tienen sólo un punto en común o no tienen ningún punto en común. En el primer caso se dice que se *intersecan* en el punto común; en el segundo caso se dice que las rectas son *paralelas*. Toda recta se considera *paralela a sí misma*. A las rectas paralelas se les representa con el símbolo \parallel .

Nota. Recíprocamente, el Postulado II (Dos puntos definen una recta) garantiza que por cada dos puntos distintos pasa una y sólo una recta. Sobre este hecho dependen todas las construcciones geométricas de la geometría euclidiana.

Definición [Semirrecta]. Dados dos puntos O y A en la recta ℓ definida por ellos. Si al punto O se le pone en correspondencia con el número 0 y al punto A le corresponde un número $x_A > 0$ entonces la *semirrecta* o *rayo*, denotada por \overrightarrow{OA} es el conjunto de todos los puntos P tales que $x_P \geq 0$. Al punto O se le llama extremo u origen de la semirrecta o rayo.

Postulado de la medida de ángulos

Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}]. Los ángulos formados por las semirrectas ℓ, m con origen común O pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los números reales entre 0 y π . Recíprocamente, para cada número real a entre 0 y π puede construirse un ángulo α con $m\angle\alpha = a$ y vértice O , en cualquier punto del plano.

Nota. Si bien el Postulado I puede verse como la posibilidad de medir segmentos con una regla marcada de tamaño arbitrario, el Postulado III debe verse como la posibilidad de medir ángulos con un transpor-

tador marcado con números de cero a π (radianes). Nuestro transportador es realmente la semicircunferencia de radio uno a la cual se le ha puesto la longitud de arco correspondiente en radianes en cada punto de ella. El origen O del ángulo se coloca en el centro de la semicircunferencia y los puntos A y B corresponden a la intersección de la circunferencia con los rayos respectivos, los números reales correspondientes sobre la semicircunferencia se denotan por a_A y a_B . Si bien la correspondencia que establece el Postulado II es solo entre los ángulos y el intervalo $[0, \pi]$, la correspondencia entre los ángulos y \mathbb{R} se define de manera coherente sobre la circunferencia al introducir el concepto de arco orientado a partir de dicho postulado. Estudiaremos el concepto de arco orientado en el capítulo dedicado a la trigonometría.

Propiedades básicas de medidas de ángulos. Al ángulo formado por rayos ℓ , m con origen común O se le denota $\angle \ell Om$. Los siguientes hechos son inmediatos:

1. $0 \leq m(\angle \ell Om) \leq \pi$.
2. $m(\angle \ell Om) = 0$ si y solo si $\ell = m$.
3. Si ℓ , m , n son tres semirrectas con origen común O , entonces

$$m(\angle \ell Om) + m(\angle m On) = m(\angle \ell On).$$

Ejercicio. Compruebe las propiedades (1) a (3) de los ángulos.

Definición [Ángulos congruentes]. Dos ángulos $\angle AOB$ y $\angle CPD$ son congruentes, lo cual se denota $\angle AOB \cong \angle CPD$, si y solo si $m(\angle AOB) = m(\angle CPD)$.

Definición [Ángulo recto]. Dos semirrectas ℓ , m con origen común O , se dice que forman un *ángulo recto* si $m(\angle \ell Om) = \pi/2$.

Definición [Ángulo rectilíneo]. Dos semirrectas ℓ , n con origen común O , forman un *ángulo rectilíneo* si y solo si

$$m\angle \ell On = \pi.$$

Nota. El lector tenderá a pensar que un ángulo rectilíneo está contenido siempre en una recta y que esto es obvio, sin embargo este hecho es algo que en algunos enfoques de la geometría debe establecerse como postulado.

Definición [Ángulos suplementarios]. Dos ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se llaman *suplementarios* si y solo si $m\angle A + m\angle B = \pi$.

Definición [Ángulos complementarios]. Dos ángulos $\angle A$ y $\angle B$ se llaman *complementarios* si y solo si $m\angle A + m\angle B = \pi/2$.

Definición [Ángulos adyacentes]. Dos ángulos son *adyacentes* si y solo si tienen un vértice y un rayo común.

Definición [Par lineal]. Los ángulos $\angle AOC$ y $\angle BOC$ forman un *par lineal* si y solo si son adyacentes y $A - O - B$, es decir, O está entre A y B .

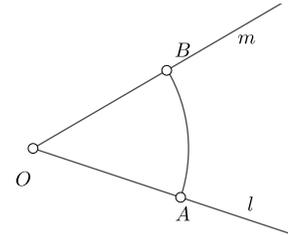


Figura 19: Al ángulo AOB le corresponden sobre la semicircunferencia puntos a_B y a_A tales que mediante ellos se puede asignar una medida al ángulo en el intervalo $[0, \pi]$.

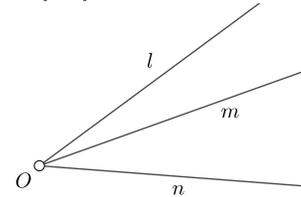


Figura 20: La medida de ángulos es aditiva, de acuerdo a la propiedad 3.

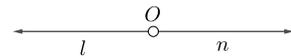


Figura 21: Las semirrectas ℓ , n con origen común O , forman un ángulo rectilíneo si y solo si $m\angle \ell On = \pi$.

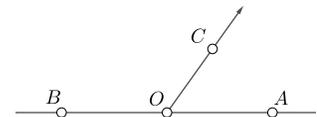


Figura 22: Ángulos $\angle COA$ y $\angle COB$ forman un *par lineal*.

Nota. Se establece como convención que dos rectas, dos segmentos o dos rayos que forman un ángulo con medida cero, son una y la misma recta o segmento o rayo. También convenimos en que toda recta forma un ángulo con medida cero con ella misma y se extiende esta convención para segmentos y rayos.

Postulado de semejanza de triángulos

Postulado IV [LAL]. Si en dos triángulos $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ y para alguna constante $k > 0$, se tiene (re-etiquetando los vértices si es necesario) $m(AB) = km(A'B')$, $m(AC) = km(A'C')$ y además $m(\angle BAC) = m(\angle B'A'C')$, entonces se tiene $m(BC) = km(B'C')$, también $m(\angle CBA) = m(\angle C'B'A')$ y $m(\angle ACB) = m(\angle A'C'B')$. A la constante k , se le llama *constante de proporcionalidad*.

Nota. Este postulado se conoce como LAL en los textos clásicos de geometría. El acrónimo LAL significa Lado-Ángulo-Lado, es decir, dos triángulos serán semejantes (o congruentes) si tienen proporcionales (o congruentes) dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Es importante el orden en el que están escritas las letras ya que *LAL indica que el ángulo congruente debe estar entre los lados*.

Definición [Triángulos semejantes]. Dos triángulos son *semejantes* si existe una correspondencia entre sus lados tal que los triángulos tienen lados correspondientes proporcionales y sus tres ángulos en correspondencia congruentes.

Definición [Triángulos congruentes]. Dos triángulos son *congruentes* si existe una correspondencia entre sus lados tal que lados en correspondencia son congruentes y también ángulos en correspondencia son congruentes entre sí. Obviamente, dos triángulos semejantes son congruentes si la constante de proporcionalidad es $k = 1$.

Observación. Resumiendo, por definición, para que dos triángulos sean semejantes se requiere que se cumplan seis propiedades: tres proporcionalidades de lados de los triángulos y tres congruencias de ángulos. De esta forma, el postulado LAL es un atajo para verificar semejanza, ya que solo se requiere verificar tres propiedades: semejanza de dos lados y congruencia del ángulo comprendido entre tales lados.

Nota. La noción de semejanza puede ser extendida a todo tipo de polígonos de manera natural con la constante de proporcionalidad k que representa el que una figura pueda ser agrandada o reducida dependiendo si k es mayor o menor que uno.

Con los postulados I a IV pueden demostrarse una serie de teoremas que caracterizan la geometría euclidiana plana y que aparecen en los textos elementales. El lector debe notar que varios resultados que aparecen como postulados en otros enfoques, aquí aparecen como

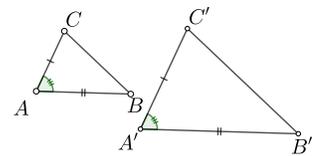


Figura 23: Postulado IV [LAL] de triángulos semejantes.

teoremas. Un ejemplo de ello es el Postulado V que se establece ahora.

Postulado de ángulo rectilíneo

Postulado V [Ángulo rectilíneo]. El ángulo $\angle AOB$ es un ángulo rectilíneo si y solo si existe una recta ℓ que contiene a las semirectas \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} con el punto O como origen común de ambos semirrayos.

Teoremas de triángulos

Ahora pueden demostrarse los teoremas más comunes de triángulos.

Teorema I [AA]¹⁹. Si dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en una correspondencia biunívoca tal que tienen dos ángulos en correspondencia congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Demostración. Supongamos por ejemplo que $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$. Defina $k = \frac{m(A'B')}{m(AB)}$ y sea C'' un punto en la semirecta $A'C'$ tal que $\frac{m(A'C'')}{m(AC)} = k$. Claramente por el Postulado IV [LAL], $\triangle A'B'C''$ es semejante a $\triangle ABC$ con ángulos en correspondencia con medidas iguales. De esta forma,

$$\angle A'B'C'' \cong \angle ABC \cong \angle A'B'C'.$$

Por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con R], $B'C'$ debe estar en la misma semirecta que $B'C''$. Por lo tanto C'' debe coincidir con C' por el Postulado II (Dos puntos definen una recta), ya que C'' está en la línea $B'C'$ y también en $A'C'$. Se concluye que $\triangle A'B'C'$ es semejante a $\triangle ABC$, como se propuso. \square

Teorema II [Tales]. Si $m(AC) = m(BC)$ en el triángulo $\triangle ABC$, entonces $\angle A \cong \angle B$.

Demostración. Compare los triángulos $\triangle CAB$ con $\triangle CBA$. Observe que por hipótesis $m(AC) = m(BC)$, así también $m(BC) = m(AC)$. Claramente $m\angle ACB = m\angle BCA$. Por el Postulado IV [LAL], los triángulos son congruentes y se concluye que $m\angle A = m\angle B$. \square

Los triángulos con dos lados iguales del teorema anterior tienen un nombre especial.

Definición [Triángulos Isósceles]. Los triángulos con dos lados congruentes se llaman *isósceles*.

Teorema III [LLL]. Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.

Demostración. Construya el $\triangle A'B'C''$ semejante al $\triangle ABC$ de tal manera que $\angle C''A'B'$ y $\angle C'A'B'$ sean adyacentes (Figura 26) con lado común $A'B'$ y vértice común A' de tal manera que $m(A'C') = m(A'C'')$

¹⁹ AA es el acrónimo de Ángulo-Ángulo lo cual es una buena referencia para recordar de lo que trata este teorema.

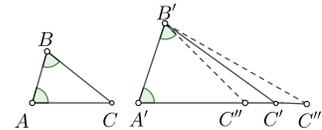


Figura 24: Triángulos semejantes del Teorema I.

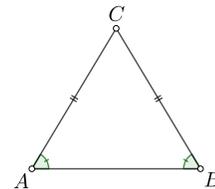


Figura 25: Triángulo isósceles del Teorema II.

y $m(B'C') = m(B'C'')$. El lector debe ser capaz de justificar esta construcción con los postulados I y III y se deja como ejercicio.

Basta demostrar que $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A'B'C''$ son semejantes. Por construcción, los lados en correspondencia de los triángulos $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A'B'C''$ tienen medidas iguales. Por el Teorema II (Tales), aplicado a los triángulos isósceles $\triangle C'A'C''$ (triángulo azul claro en la Figura 27) y $\triangle C'B'C''$ (triángulo azul oscuro en la Figura 27) tenemos

$$\angle A'C''C' \cong \angle A'C'C'',$$

$$\angle C'C''B' \cong \angle C''C'B'$$

Sumando las medidas de los ángulos tenemos

$$\angle A'C'B' \cong \angle A'C''B'.$$

De esta manera, por el Postulado LAL, $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A'B'C''$ son semejantes. Por lo tanto por transitividad de la relación de congruencia $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes. \square

Ángulos internos de un triángulo

Ahora estudiaremos uno de los teoremas que caracteriza a la geometría euclidiana, el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo²⁰. Pero antes de estudiar este teorema, requerimos una definición previa.

Definición. El punto medio D de un segmento rectilíneo AB es un punto de dicho segmento que satisface $A - D - B$ y $m(AD) = m(DB)$. Observe que tal punto existe por el Postulado I (Rectas en correspondencia con \mathbb{R}).

Teorema IV [Suma de ángulos internos]. En todo triángulo $\triangle ABC$, la suma de las medidas de los ángulos internos es π , es decir,

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = \pi.$$

Demostración. Dado el triángulo $\triangle ABC$, sean K, L, M , los puntos medios (¿por qué existen?) de los lados BC, CA, AB respectivamente. Notamos que por el Postulado IV [LAL], $\triangle AML, \triangle MBK, \triangle LKC$ son semejantes a $\triangle ABC$ con $k = 1/2$ y medidas de ángulos en correspondencia iguales. Se tiene que $m(LM) = 1/2m(BC)$, $m(MK) = 1/2m(CA)$, $m(KL) = 1/2m(AB)$. Así el $\triangle KLM$ es congruente con cada uno de los triángulos pequeños por el Teorema III (LLL). Sean $m\angle A = \alpha$, $m\angle B = \beta$ y $m\angle C = \gamma$. Tenemos por la semejanza de triángulos $m\angle MKL = \alpha$, $m\angle KLM = \beta$ y $m\angle LMK = \gamma$. Ahora, notamos que el ángulo $m\angle AMB$ es la suma:

$$m\angle AMB = \alpha + \beta + \gamma$$

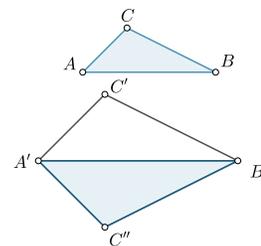


Figura 26: Construcciones en la demostración del Teorema III.

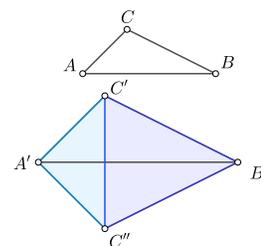


Figura 27: Triángulos isósceles en la demostración del Teorema III.

²⁰ Decimos que este teorema caracteriza a la geometría euclidiana ya que en otras geometrías como la elíptica o la hiperbólica no se cumple la igualdad.

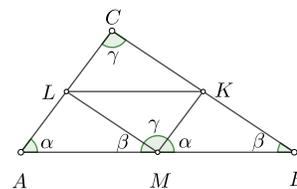


Figura 28: Triángulo ABC de la demostración del Teorema IV.

dado que todos los triángulos pequeños son semejantes y por otra parte,

$$m\angle AMB = \pi$$

por el Postulado V (Ángulo rectilíneo), ya que $\angle AMB$ es par lineal formado, por ejemplo, por $\angle AMK$ y $\angle BMK$. Se concluye que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = \pi$. \square

La propiedad del bisector perpendicular

Definición [Rectas perpendiculares] Rectas no paralelas se llaman *perpendiculares* si y solo si el ángulo que forman dos rayos en rectas distintas con origen en el punto de intersección es recto.

Nota. El lector debe demostrar que en rectas perpendiculares los cuatro ángulos formados con rayos en rectas distintas y origen en el punto de intersección miden lo mismo mediante el postulado V y las propiedades básicas de medidas ángulos y se deja como ejercicio.

Definición [Equidistar]. Los puntos A, B *equidistan* de un punto P si y solo si $d(A, P) = d(B, P)$.

Definición [Bisector perpendicular]. El *bisector perpendicular* a un segmento rectilíneo AB es la recta que pasa por el punto medio D de AB perpendicular al segmento (para denotar que las rectas ℓ y m son perpendiculares, se escribe $\ell \perp m$).

El bisector perpendicular tiene la siguiente propiedad importante.

Teorema V [Bisector perpendicular]. Todos los puntos que equidistan de dos puntos distintos A y B yacen en el bisector perpendicular²¹ del segmento AB .

Demostración. Sean A, B y un punto P , dados tales que $m(AP) = m(BP)$. Sea M el punto medio de AB . Una el punto P con M .

Los dos triángulos $\triangle AMP$ y $\triangle BMP$ son congruentes por el Teorema III (LLL) dado que

$$m(AP) = m(BP), \quad m(AM) = m(BM), \quad m(MP) = m(MP).$$

De esta forma, $\angle MPB \cong \angle MPA$. También $\angle BMP \cong \angle AMP$. Dado que $m\angle AMB = \pi$, por ser ángulo rectilíneo (Postulado V (ángulo rectilíneo)) y puesto que

$$m\angle AMB = m\angle AMP + m\angle PMB = 2m\angle AMP,$$

podemos concluir que $\pi = 2m\angle AMP$, es decir, $m\angle AMP = \pi/2$. Por lo tanto P está en el bisector perpendicular de AB .

Mas aún, supongamos que P es cualquier punto en el bisector perpendicular de AB . Entonces en los triángulos $\triangle AMP, \triangle BMP$,

$$\angle AMP \cong \angle BMP, \quad m(AM) = m(MB), \quad m(MP) = m(MP).$$

²¹ Al bisector perpendicular también se le llama *mediatriz* del segmento.

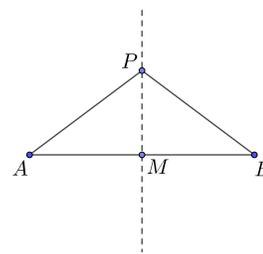


Figura 29: En la figura $MP \perp AB$.

Por lo tanto, por el Postulado IV [LAL], los triángulos son congruentes y de acuerdo con esto $m(AP) = m(BP)$, con lo que concluye la demostración. \square

Existencia de una perpendicular única por un punto a una recta

El siguiente teorema muy importante, es equivalente al Postulado V de Euclides y diferencia nuestro enfoque de la presentación clásica.

Teorema VI [Perpendicular por un punto]. Existe una y sólo una recta perpendicular a una recta dada ℓ que pasa por un punto dado P .

Demostración. Si el punto P está sobre ℓ , se sigue del Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}].

Si P no está en ℓ , sean A, B dos puntos distintos sobre dicha recta. Construya un $\triangle AP'B$, congruente con $\triangle APB$ con P' distinto de P , como en la Figura 30.

Para este fin, construya el rayo $\overrightarrow{AP'}$ de tal forma que $\angle P'AB \cong \angle PAB$ y $m(AP) = m(AP')$ (mediante los postulados I y III). Como A y B están cada uno de ellos a la misma distancia de P y P' , entonces están en el bisector perpendicular del segmento PP' . Así PP' y AB son perpendiculares y de esta forma se ha demostrado la existencia de al menos una perpendicular. Si hubiera otra perpendicular (ver Figura 66) a AB que pasara por P , sean PM y PM' las perpendiculares en cuestión con M y M' en ℓ .

Por el Teorema IV de la suma de los ángulos internos de un triángulo tendríamos que

$$\pi = m\angle MM'P + m\angle M'PM + m\angle PMM'$$

o bien

$$\pi = \frac{\pi}{2} + m\angle M'PM + \frac{\pi}{2}$$

y por lo tanto

$$m\angle M'PM = 0.$$

De esta forma $M'P$ y MP estarían en la misma recta, contrario a nuestra suposición. \square

El Teorema de Pitágoras

Uno de los teoremas más importantes de la geometría euclidiana es sin duda el teorema de Pitágoras que ahora presentamos y demostramos usando la axiomática estudiada en este texto.

Teorema VII [Pitágoras]. En todo triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $m\angle ACB = \frac{\pi}{2}$,

$$m(AB)^2 = m(AC)^2 + m(CB)^2.$$

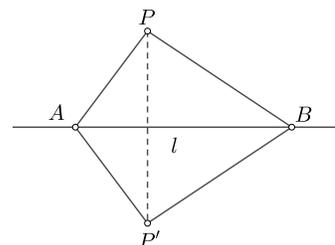


Figura 30: Perpendicular a ℓ por P .

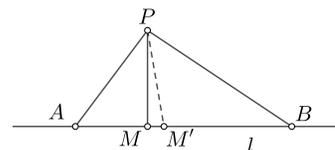


Figura 31: Suponga que existe una segunda perpendicular PM' a ℓ por P .

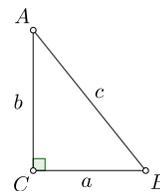


Figura 32: Triángulo rectángulo del Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.

Demostración. Sea $m(AB) = c$, $m(CB) = a$ y $m(AC) = b$ se desea demostrar que $c^2 = a^2 + b^2$.

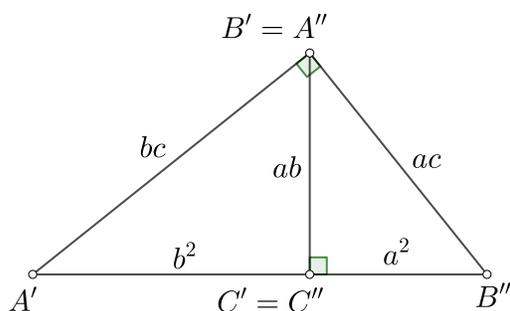


Figura 33: Demostración del teorema de Pitágoras. Se construyen dos triángulos semejantes al $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A''B''C''$ con proporciones $K = a$ y $k = b$ y se colocan como se muestra en la figura.

Se se construye un triángulo semejante al triángulo $\triangle ABC$ con una constante de proporcionalidad $k = b$ con lo que se obtiene un nuevo triángulo $\triangle A'C'B'$ con lados de medidas ab , b^2 , bc semejante al primero por el Teorema III [LLL], con $\angle A'C'B'$ obtenido (ver Figura 33) congruente con $\angle ACB$. De igual forma se obtiene un triángulo semejante $\triangle A''B''C''$ con $k = a$ y lados de medida a^2 , ab , ac respectivamente y ángulo $\angle A''C''B''$ recto. Se colocan estos triángulos como en la Figura 33, de tal manera que los segmentos $B'C'$ y $A''C''$ coincidan. Se obtiene así que

$$m\angle A'C'B'' = m\angle A'C'B' + m\angle B'C'B'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

así, C' está en la línea $A'B''$ entre A' y B'' , por el Postulado V [Ángulo rectilíneo]. Más aún, como por la propiedad aditiva de los ángulos y el Teorema IV de la suma de los ángulos internos de un triángulo,

$$\begin{aligned} m\angle B''B'A' &= m\angle B''B'C' + m\angle C'B'A' \\ &= m\angle BAC + m\angle CBA = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Se sigue que el $\triangle A'B''B'$ es semejante a $\triangle ABC$ con factor de escala $k = c$ y que los lados tienen longitud ac , bc . Por lo tanto, el tercer lado debe tener longitud c^2 . Pero además $m(A'B'') = m(AC') + m(C''B'')$, es decir, $c^2 = a^2 + b^2$, como se desea demostrar. \square

El recíproco del teorema de Pitágoras

El recíproco del teorema de Pitágoras también se cumple, como demostramos a continuación siguiendo la manera clásica de Euclides en el Teorema I.48 (*op. cit.*).

Teorema VII' [Recíproco del teorema de Pitágoras]. Si en un triángulo el cuadrado de la longitud de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces el ángulo comprendido por los lados más cortos del triángulo es recto.

Demostración. Sea el triángulo $\triangle ABC$, tal que $m(BC) = a$, $m(CA) = b$ y $m(AB) = c$ y $a^2 + b^2 = c^2$. Construya la perpendicular a CB y fije el punto $A' \neq A$ sobre la perpendicular tal que $m(CA) = m(CA')$. Entonces el triángulo $\triangle CBA'$ es rectángulo por construcción, y $m(BA') = c$, dado que por hipótesis $a^2 + b^2 = c^2$ y BA' , es el lado más largo de un triángulo rectángulo. Es decir, si $m(BA') = c'$, por el teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c'^2$, así que $c' = c$. Por el Teorema III [LLL], tenemos que $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$ y por lo tanto, el ángulo formado por BC y CA es recto. \square

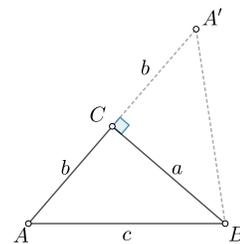


Figura 34: Si en un triángulo se cumple $a^2 + b^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo, siendo c la medida de la hipotenusa de tal triángulo.

Paralelas

La propiedad fundamental de las rectas paralelas queda establecida en el siguiente teorema, el cual es equivalente al quinto postulado de Euclides el cual se presentará más adelante.

Teorema VIII [Paralelas]. Existe una y solo una paralela a una recta ℓ dada que pasa por un punto P dado.

Demostración. Si el punto P está en la recta, el teorema se cumple dado que toda recta es paralela a sí misma, por definición.

Si P no está en ℓ , considere la única perpendicular PD a ℓ , donde D es la intersección de la perpendicular con ℓ , y construya la recta $m \perp PD$ que pasa por P (la cual existe por el Teorema VI).

La recta m no puede intersectar ℓ dado que, de otra forma, habría dos perpendiculares a PD distintas (ya que pasaría una por P y otra por D) que pasarían por el punto de intersección de las rectas ℓ y m contradiciendo el Teorema VI [Perpendicular de un punto a una recta]. Se concluye que m es paralela a ℓ (en símbolos $m \parallel \ell$).

Para demostrar que m es la única paralela a ℓ que pasa por P procedemos por contradicción. Suponga que existe otra paralela n a ℓ que pasa por P (Figura 36).

Sea Q distinto de P en n y desde Q construya la perpendicular a PD y sea R la intersección de esta perpendicular y PD (Figura 37). Considere segmento DS en ℓ tal que

$$\frac{m(SD)}{m(PD)} = \frac{m(QR)}{m(PR)}$$

observe que $m\angle QRP = m\angle SDP = \frac{\pi}{2}$. El $\triangle PDS$ es así, semejante al $\triangle PRQ$ con ángulos en correspondencia congruentes, por el Postulado IV [LAL]. De esta manera la semirecta PS coincide con PQ ya que el ángulo $\angle DPS \cong \angle RPQ$ y los ángulos tienen el mismo vértice. Por lo

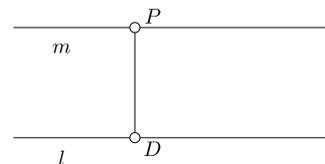


Figura 35: Por el punto P exterior a ℓ se construye la perpendicular PD . La recta m es perpendicular a su vez a PD y pasa por P .

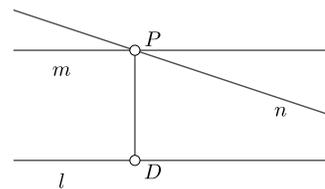


Figura 36: Suponga que existe otra paralela n a ℓ que pasa por P

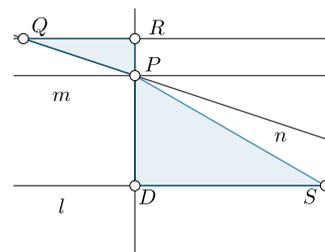


Figura 37: Considere segmento DS en ℓ tal que $\frac{m(DS)}{m(PD)} = \frac{m(QR)}{m(PR)}$, entonces el $\triangle PDS$ es así, semejante al $\triangle PRQ$, lo cual lleva a una contradicción.

tanto, la recta n no es paralela a ℓ dado que corta a ℓ en S , lo que contradice nuestra hipótesis. \square

Corolario I [Paralelismo es relación transitiva]. Si ℓ , m y n son tres rectas tales que $\ell \parallel m$ y $m \parallel n$ entonces $\ell \parallel n$.

Demostración. Si ℓ interseca a n se tendrían dos paralelas a m desde tal punto de intersección lo cual contradice el teorema VIII [Paralelas].

\square

Resultados básicos

Lema I [Par lineal]. Si dos ángulos forman un par lineal entonces son suplementarios.

Demostración. Sean A, B, C, O que forman un par lineal como en la Figura 22. Dado que por definición de par lineal $A - O - B$, los puntos A, O, B están en una misma recta y así, $m\angle AOB = \pi$ por el Postulado V [Ángulo rectilíneo]. Por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}], $m\angle AOB = m\angle AOC + m\angle BOC$. Se concluye que $m\angle AOC + m\angle BOC = \pi$, por lo que por definición los ángulos $\angle AOC$ y $\angle BOC$ son suplementarios como afirma el lema. \square

Ahora podemos demostrar algunos de los teoremas clásicos de triángulos.

Definición [Ángulo exterior a un triángulo]. Se define un ángulo exterior a un triángulo como cualquier ángulo que forma un par lineal con alguno de los ángulos internos de un triángulo.

Teorema IX [Medida del ángulo exterior]. Dado cualquier ángulo interior $\angle\alpha$ en un triángulo, el ángulo exterior a este mide la suma de las medidas de los otros dos ángulos interiores al triángulo.

Demostración. Sean β y γ los ángulos interiores del triángulo distintos de α . Sea δ el ángulo exterior a α . Dado que por definición el ángulo exterior δ forma un par lineal con el ángulo α se tiene

$$m\angle\alpha + m\angle\delta = \pi$$

por el Lema I [Par lineal]. Por otra parte, por el Teorema IV de la suma de los ángulos internos de un triángulo,

$$m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\gamma = \pi.$$

Por transitividad y cancelando $m\angle\alpha$ en la primera igualdad tenemos entonces

$$\begin{aligned} m\angle\alpha + m\angle\delta &= m\angle\alpha + m\angle\beta + m\angle\gamma \\ m\angle\delta &= m\angle\beta + m\angle\gamma. \end{aligned}$$

Que es lo que se desea demostrar. \square

Lema II [Ángulos opuestos por el vértice]. Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

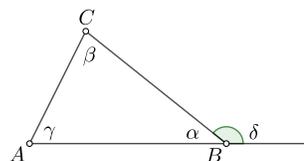


Figura 38: Ángulo exterior a un triángulo, en este caso, el ángulo exterior forma un par lineal con el ángulo B que es interior al triángulo.

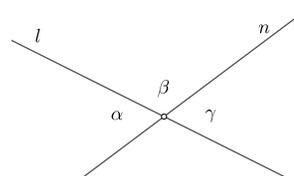


Figura 39: Los ángulos α y γ son opuestos por el vértice.

Demostración. Sean ℓ y n dos rectas que se intersecan en un solo punto. Sean los ángulos α , β y γ formados por ℓ y n , de tal forma que α y γ son opuestos por el vértice y β es adyacente a ambos ángulos. Notamos que α y β forman un par lineal y que también β y γ forman par lineal. Tenemos así por el Lema I de par lineal

$$m\angle\alpha + m\angle\beta = m\angle\beta + m\angle\gamma = \pi$$

así $m\angle\alpha = m\angle\gamma$, lo cual se obtiene de restar $m\angle\beta$ en las primeras dos igualdades. Se concluye que los ángulos en cuestión son congruentes como se desea demostrar. \square

Teorema X [Alternos internos congruentes implica paralelismo]. Un par de rectas cortadas por una transversal son paralelas si y solo si ángulos alternos internos son congruentes.

Demostración. Supongamos que las rectas ℓ y m son paralelas, y son cortadas por la transversal t . Queremos demostrar que ángulos alternos internos son congruentes. Sean Q, P los puntos de intersección de t con ℓ y m , respectivamente. Si t es perpendicular a ℓ y m no hay nada por demostrar. Supongamos que t no es perpendicular a ℓ y m . Sea O un punto del segmento PQ con $P-O-Q$ y distinto de P y de Q . Sean M, N los puntos de intersección de la perpendicular a las paralelas que pasa por O . Los triángulos $\triangle OQN$ y $\triangle OPM$ son semejantes. Efectivamente, $\angle PMO \cong \angle QNO$, por ser rectos; $\angle MOP \cong \angle NOQ$, por ser opuestos por el vértice; se concluye que $\angle OPM \cong \angle OQN$, por el Teorema I [AA], con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Supongamos ahora que en dos rectas ℓ, m , cortadas por una transversal t , se forman ángulos alternos internos congruentes. Supongamos, contrariamente a lo que se desea demostrar, que las rectas no son paralelas y sea S el punto de intersección. Sean P y Q como antes, los puntos de intersección de t con ℓ y m , respectivamente. Considere el triángulo $\triangle PQS$. Dada la hipótesis podemos suponer que $\angle SQP$ es congruente con el ángulo externo a $\angle SPQ$, llámese $\angle\alpha$. De esta forma, por el Teorema IX (Medida del ángulo exterior)

$$m\angle\alpha = m\angle SQP + m\angle PSQ$$

y por hipótesis $m\angle\alpha = m\angle SQP$. Al restar ambas desigualdades se tiene

$$m\angle PSQ = 0.$$

Se concluye que o bien m y n son la misma recta por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}], o bien las rectas son paralelas, lo que contradice en ambos casos nuestras hipótesis de que las rectas se intersecan y son transversales a t (y por lo tanto no pueden

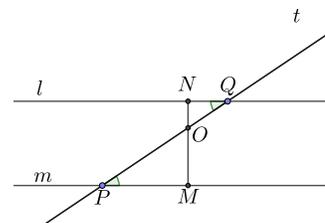


Figura 40: La recta t es transversal a las paralelas ℓ, m .

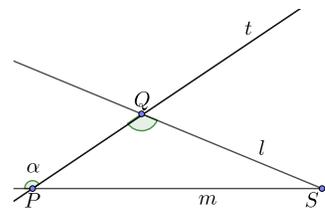


Figura 41: Demostración del recíproco por contradicción: la recta t es transversal a ℓ, m y $\angle\alpha \cong \angle SQP$.

ser la misma recta, ni ser paralelas). Por el principio de contradicción concluimos que las rectas son paralelas. \square

Con la teoría construida hasta ahora podemos demostrar dentro de la axiomática de Birkhoff un corolario equivalente al quinto postulado de Euclides²².

Corolario II [Postulado V de Euclides] En un par de rectas cortadas por una transversal los ángulos colaterales internos suman π si y solo si las rectas son paralelas.

Demostración. Rectas cortadas por una transversal son paralelas si y solo si tienen ángulos alternos internos congruentes, por el Teorema X [Ángulos internos congruentes]. Sean α , β , γ ángulos internos formados por las paralelas con la transversal consideradas. Suponga que α y γ son alternos internos entre sí y que β es adyacente a α . Entonces β y γ son colaterales internos, $m\angle\alpha = m\angle\gamma$ y $m\angle\alpha + m\angle\beta = \pi$ (por ser par lineal). Tenemos así

$$m\angle\gamma + m\angle\beta = \pi.$$

La última igualdad demuestra que rectas paralelas tienen colaterales internos suplementarios ya que β y γ son colaterales internos arbitrarios. La demostración de que dos rectas cortadas por una transversal con colaterales internos suplementarios implica que las rectas son paralelas, se deja como ejercicio. \square

Nota. Aquí una aclaración para el lector que no es experto en lógica. El hecho de que nuestro Corolario I sea equivalente al quinto postulado de Euclides es consecuencia de la equivalencia lógica

$$P \iff Q \equiv \neg Q \iff \neg P.$$

Es decir, de nuestro Corolario II se sigue inmediatamente que, si dos rectas cortadas por una transversal tienen ángulos colaterales internos que no suman π , entonces las rectas *no son paralelas*. Además, tendrán que intersectarse del lado que la suma de los colaterales internos sea menor que π , ya que de otro modo se violaría el Teorema IV [Suma de los ángulos internos].

Desigualdades geométricas

Dos desigualdades que se refieren al triángulo contenidas en el Corolario III y en el teorema Teorema XII siguientes son esenciales para tener una comprensión completa de la geometría elemental. En particular, la desigualdad del triángulo (Teorema XII) que en geometría analítica requiere la desigualdad de Schwarz, se demuestra aquí con técnicas más elementales.

²² El quinto postulado de Euclides en traducción de García Bacca *op. cit.* a la letra dice, *Postúlese que, si una recta incidente sobre dos rectas, hace ángulos internos y de la misma parte menores que dos rectos, prolongadas esas dos rectas al infinito coincidirán por la parte en que estén los ángulos menores que dos rectos.*

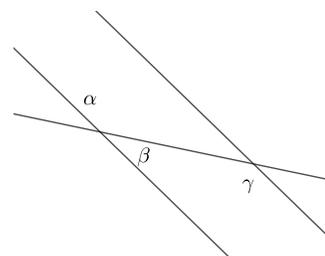


Figura 42: Los ángulos β y γ son colaterales internos.

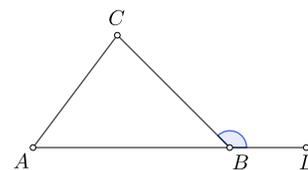


Figura 43: El ángulo $\angle DBC$ es exterior al triángulo $\triangle ABC$.

Se sigue de la definición de ángulo exterior a un triángulo que dado un $\triangle ABC$, si D es un punto sobre AB tal que $A - B - D$, el ángulo $\angle DBC$ es un ángulo exterior al triángulo. Los ángulos $\angle A$ y $\angle C$, interiores al triángulo, se llaman *ángulos remotos* a los ángulos exteriores al ángulo interior $\angle B$. Observe que todo triángulo no degenerado tiene seis ángulos exteriores.

Corolario III [Ángulos exteriores mayores que ángulos remotos]. Todo ángulo exterior a un triángulo es mayor que los ángulos remotos a este.

Demostración. Los ángulos $\angle DBC$ y $\angle D'BA$ son exteriores al triángulo $\triangle ABC$. Por definición $\angle DBC$ y $\angle B$ forman un par lineal, al igual que $\angle D'BA$ y $\angle B$.

Así $m\angle DBC + m\angle B = \pi$, además como $m\angle A + m\angle B + m\angle C = \pi$ por el Teorema IV [Suma de los ángulos internos] tenemos

$$m\angle DBC = m\angle A + m\angle C.$$

En todo caso, se tiene además que $m\angle A + m\angle C > m\angle A$ y $m\angle A + m\angle C > m\angle C$, dado que las medidas de ángulos en triángulos no degenerados son mayores que cero. Por lo tanto $m\angle DBC > m\angle A$ y $m\angle DBC > m\angle C$. Las desigualdades $m\angle D'BC > m\angle A$ y $m\angle D'BC > m\angle C$, se demuestran de manera similar. \square

Nota. Claramente el Corolario III se deduce fácilmente del Teorema IX, se recomienda realizar tal demostración como ejercicio.

Una de las desigualdades más importantes en geometría es la desigualdad del triángulo, la cual establecemos y demostramos enseguida de un par de lemas.

Lema [DT I]. Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a ellos no son congruentes, siendo el ángulo mayor opuesto al lado mayor.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $m(AB) > m(AC)$. Se desea demostrar que $m\angle C > m\angle B$.

Sea D , un punto sobre el rayo \overrightarrow{AC} tal que $m(AD) = m(AB)$. Por el Teorema II [Tales], $\angle D \cong \angle ABD$. Como $A - C - D$ obtenemos que $m\angle ABC < m\angle ABD$, por las propiedades básicas de las medidas de ángulos. Por lo tanto

$$m\angle ABC < m\angle D. \quad (1)$$

Como $\angle ACB$ es exterior al $\triangle BCD$, tenemos

$$m\angle D < m\angle ACB. \quad (2)$$

Considerando (1) y (2) se tiene $m\angle ABC < m\angle ACB$, por lo tanto en el triángulo $\triangle ABC$, se tiene $m\angle B < m\angle C$, como se desea demostrar. \square

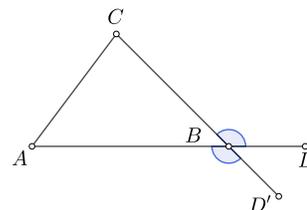


Figura 44: Los ángulos $\angle DBC$ y $\angle D'BA$ son exteriores al triángulo $\triangle ABC$, y forman un par lineal con $\angle B$, cada uno de ellos.

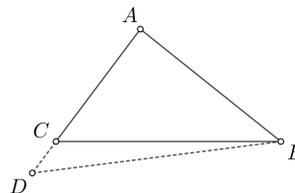


Figura 45: En el triángulo $\triangle ACB$, $m(AB) > m(AC)$.

Lema [DT II]. Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos no son congruentes, siendo el lado mayor opuesto al ángulo mayor.

Demostración. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $m\angle B < m\angle C$. Se desea demostrar que $m(AC) < m(AB)$. Si $AC \cong AB$, entonces por el Teorema II [Tales] se cumple que $\angle B \cong \angle C$, lo cual es falso, por hipótesis. Por otra parte, si $m(AC) > m(AB)$, por el Lema [DT I], $m\angle B > m\angle C$, lo cual también es falso. La única posibilidad que queda, por el Axioma I de los Números Reales (ver el Apéndice), es $m(AC) < m(AB)$, como se desea demostrar. \square

Teorema XI [Desigualdad del triángulo]. Dados tres puntos no colineales cualquiera A, B, C , se tiene que $m(AC) + m(BC) > m(AB)$.

Demostración. Construya el triángulo $\triangle ABC$. Sea D sobre CB tal que $B - C - D$ y $CD \cong CA$. Entonces

$$m(BD) = m(BC) + m(CD). \quad (3)$$

Por otra parte por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}], $m\angle DAC < m\angle DAB$. Como $\triangle DAC$ es isósceles con $m(CD) = m(CA)$, se sigue que $m\angle D = m\angle DAC$, por el Teorema II [Tales], y por lo tanto

$$m\angle D > m\angle DAB. \quad (4)$$

Al aplicar el Lema [TD II] al triángulo $\triangle ADB$, obtenemos que $m(BD) > m(AB)$. Dadas (3) y (4) se obtiene que

$$m(AC) + m(BC) > m(AB)$$

como se desea demostrar. \square

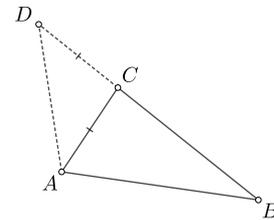


Figura 46: En todo triángulo $m(AC) + m(BC) > m(AB)$.

Problemas y ejercicios de paralelas y triángulos

El lector que haya comprendido el contenido de lo estudiado hasta aquí debe ser capaz de demostrar las proposiciones que no se hayan demostrado y se dejen como ejercicio.

Ejercicios de resultados básicos de paralelas con transversales

1. Escriba las definiciones formales de los ángulos introducidos en la Definición de ángulos en transversales.

Los siguientes teoremas y sus recíprocos se demuestran a partir del Lema II y del teorema X.

2. **Proposición [Ángulos formados por transversales].** Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces:

- a) Ángulos alternos externos son congruentes.
- b) Ángulos correspondientes son congruentes.
- c) Ángulos colaterales internos son suplementarios.
- d) Ángulos colaterales externos son suplementarios.

3. Escriba y demuestre el recíproco de cada una de las proposiciones del problema anterior.

4. **Proposición [Equivalencia entre pares de ángulos].** Si un par de rectas son cortadas por una transversal, se cumplen las siguientes equivalencias:

- a) Ángulos alternos internos son congruentes si y solo si ángulos alternos externos son congruentes.
- b) Ángulos alternos externos son congruentes si y solo si ángulos correspondientes son congruentes.
- c) Ángulos correspondientes son congruentes si y solo si colaterales internos son suplementarios.
- d) Ángulos colaterales internos son suplementarios si y solo si colaterales externos son suplementarios.

5. Dado un triángulo cualquiera construya una paralela a uno de los lados. Use la Figura 47 y el teorema de congruencia de ángulos alternos internos para dar una demostración diferente de que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman π . Demuestre primero que existe una y solo una paralela que pasa por un punto dado que este fuera de una recta dada.

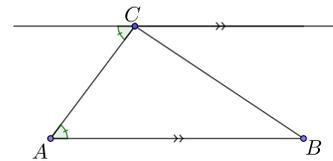


Figura 47: En C del $\triangle ABC$ construya la paralela a AB .

Ejercicios de resultados básicos de semejanza de triángulos

6. Dado un triángulo $\triangle ABC$ construya un triángulo semejante $\triangle A'B'C'$ tal que $m(AC) = km(A'C')$, $m(BC) = km(B'C')$ y $m(AB) = m(A'B')$ usando solo los postulados I, III y IV.
7. Demuestre que en rectas perpendiculares los cuatro ángulos formados con rayos en rectas distintas y origen en el punto de intersección miden lo mismo
8. El primer resultado básico para triángulos, además de los teoremas que hemos demostrado hasta el momento, es que *no hay ningún teorema [LLA] de semejanza ni de congruencia de triángulos.*

Contraejemplo. En la Figura 48 se muestran los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OPR$ que tienen dos lados congruentes $OP \cong OP$ y $OQ \cong OR$ (son isósceles) lo cual es evidente ya que están inscritos en una circunferencia. Ambos triángulos tienen el mismo ángulo α , pero en $\triangle OPR$ este *no está comprendido entre los lados congruentes*. Claramente los triángulos *no son semejantes*. Con ello el lector debe darse cuenta que el orden de las letras en los acrónimos ($AAL \neq ALA$) es relevante.

Construya otros contraejemplos donde los triángulos no sean isósceles si esto es posible.

9. Se define triángulo *equiángulo* como un triángulo con sus tres ángulos internos iguales. Demuestre que todo triángulo equiángulo es equilátero.
10. Demuestre las siguientes proposiciones, no olvide hacer los diagramas correspondientes.
 - a) **Proposición [ALA].** Si en un par de triángulos se tienen dos ángulos en correspondencia congruentes y un lado común a los dos ángulos en correspondencia proporcional, los triángulos son congruentes.
 - b) **Proposición [LLL congruencia].** Si un par de triángulos tienen tres lados en correspondencia congruentes, entonces los triángulos son congruentes.
 - c) ¿Qué se entendería por una proposición [AAL]? Enúnciela y demuéstrala si es que no encuentra contraejemplos.

Triángulos rectángulos

11. En la Figura 49 se muestra un triángulo rectángulo, el lado c se llama hipotenusa, los lados a, b se llaman respectivamente, catetos

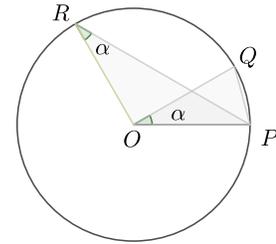


Figura 48: Se muestran dos triángulos con dos lados y un ángulo congruente que no son semejantes.

opuesto y adyacente al ángulo α . Defina: triángulo rectángulo, hipotenusa, cateto opuesto y cateto adyacente.

12. Demuestre los siguiente teoremas que se refieren a a triángulos rectángulos.

a) **Teorema HC.** Dos triángulos rectángulos son semejantes si la hipotenusa y un cateto de uno son respectivamente proporcionales con la hipotenusa y un cateto del otro.

b) **Teorema LA.** Dos triángulos rectángulos son semejantes si un lado es proporcional a un lado del otro y si tienen ángulo congruente además del ángulo del recto.

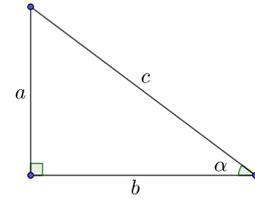


Figura 49: Triángulo rectángulo.

Ejercicios del teorema de Pitágoras

13. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en un ángulo recto, la suma de los cuadrados de los lados opuestos es igual a la de los cuadrados de los otros dos.

14. **Proposición [Hipotenusa-cateto].** Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes a la hipotenusa y un cateto de otro triángulo, los triángulos son congruentes.

15. **Proposición [Área independiente de la base].** Defina los conceptos: base y altura de un triángulo. Demuestre que en todo triángulo, el producto de la base y la altura correspondiente es independiente de la forma en la que se escoge la base.

Sugerencia. Reenuncie la proposición de la siguiente manera: Dado un triángulo $\triangle ABC$, sea $m(AD)$ la altura de A a BC , y sea $m(BE)$ la altura de B a AC . Entonces $m(AD)m(BC) = m(BE)m(AC)$.

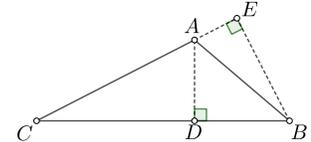
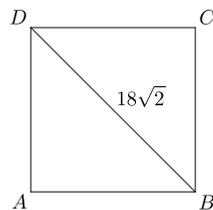


Figura 50: Figura correspondiente al problema 15.

16. Defina perímetro de un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado $ABCD$?



17. El sólido de la Figura 51 es un cubo ¿cuánto mide d ?

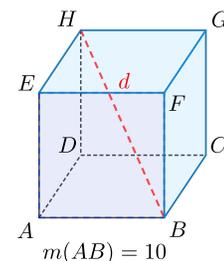


Figura 51: Cubo con diagonal d .

Demostración alternativa de teorema recíproco del teorema de Pitágoras

18. **Teorema VII' [Recíproco del teorema de Pitágoras].** Todo triángulo tal que existe un etiquetado a, b, c , de las longitudes de los lados, de tal forma que se cumple $a^2 + b^2 = c^2$ es rectángulo, siendo c la longitud de la hipotenusa.

Sugerencia: Si los ángulos que forman los catetos con la hipotenusa son agudos, baje la perpendicular del ángulo opuesto a la hipotenusa y use postulado LAL para demostrarlo.

19. La demostración anterior del recíproco del teorema de Pitágoras tiene un hueco como se indicó. Para construir h en el interior del triángulo se debe garantizar que los ángulos A y B sean agudos. Demuestre que un triángulo tal que $a^2 + b^2 = c^2$, siendo $\angle A$ opuesto al lado de longitud a , $\angle B$ opuesto al lado de longitud b y $\angle C$ opuesto al lado de longitud c , no puede ocurrir que $m\angle A \geq \pi/2$ ni $m\angle B \geq \pi/2$.

Sugerencia: Primero suponga que $m\angle A = \pi/2$ y use el teorema de Pitágoras para llegar a una contradicción. Suponga que $m\angle A > \pi/2$ y construya un triángulo como el de la Figura 52 para llegar a una contradicción.

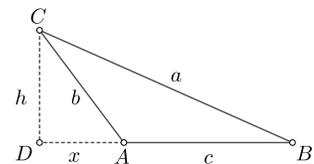


Figura 52: En el triángulo de la figura no puede ocurrir $a^2 + b^2 = c^2$.

Rectángulos

20. Defina rectángulo y partiendo de su definición demuestre el siguiente Teorema:

Teorema XII [Existencia de rectángulos]. Sean ℓ_1 y ℓ_2 paralelas distintas, y m_1, m_2 , paralelas entre sí, distintas y perpendiculares a las dos primeras líneas. Las rectas se intersecan en cuatro puntos distintos, sean P, Q, R, S tales puntos. Entonces los pares de lados opuestos del paralelogramo $PQRS$ son congruentes entre sí y los ángulos internos miden $\pi/2$, es decir, *el paralelogramo es un rectángulo*.

Sugerencia: Trace una transversal apropiada. La demostración más simple usa la Proposición [ALA] (ver problema el 10a) y también debe usar teoremas de ángulos cortados por una transversal.

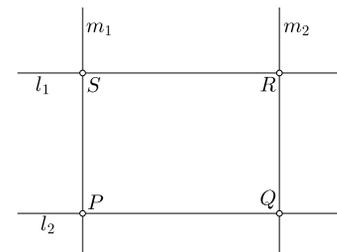


Figura 53: $\ell_1 \parallel \ell_2, m_1 \parallel m_2$ y $\ell_1 \perp m_2$, determinan un rectángulo.

21. Demuestre en forma tabular el siguiente corolario cuya idea de la demostración se incluye.

Corolario IV [Proporcionalidad]. Toda recta que corta a un triángulo, paralela a uno de los lados del triángulo, determina segmentos proporcionales.

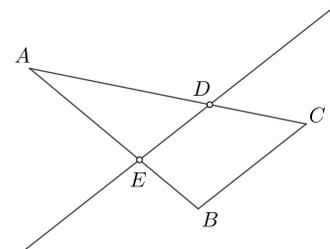


Figura 54: La recta que pasa por E y D es paralela a BC y así, los lados AE, AB están en la misma proporción que AD y AC .

Idea de la Demostración. La demostración es inmediata del Teorema I [AA], aplicado a los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$, con constante de proporcionalidad $r = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$. \square

22. Con el Teorema V [Bisector Perpendicular] podemos dividir un segmento en dos partes iguales. Además, con el Corolario III, podemos dividir un segmento en cualquier número entero de partes. A continuación se muestra la construcción, como ejemplo, para dividir un segmento en tres partes iguales. Haga una demostración que justifique cada paso de la construcción siguiente y bosqueje un dibujo que corresponda a la construcción.
- Dado un segmento AB que se desea dividir, construya un rayo que no contenga el segmento AB , con origen en A o en B , que forme un ángulo agudo con AB (¿cuál postulado garantiza esta construcción?).
 - Partiendo de A , por ejemplo, marque tres unidades (¿cuál postulado garantiza que esto es posible?). Sean X_1, X_2 y X_3 los puntos correspondientes a los números 1, 2, y 3 sobre el rayo.
 - Construya un segmento que pase por B y el punto marcado con el número 3, es decir, con X_3 (puede el lector garantizar dentro de nuestra axiomática esta construcción?).
 - Construya las paralelas a BX_3 que pasan por X_1 y X_2 ¿por qué existen estas paralelas?).
 - Sean X'_1 y X'_2 los puntos donde las paralelas respectivas intersecan AB . Entonces los segmentos $AX'_1, X'_1X'_2$ y $X'_2X'_3$ son congruentes (¿por qué razón?). Así el segmento AB ha quedado dividido en tres partes iguales.

Visitando a Euclides

Muchos ejercicios interesantes pueden hacerse demostrando dentro de nuestra axiomática las proposiciones de Euclides, a continuación se proponen ejercicios de este tipo. Note que usaremos nuestra notación y nuestras definiciones, no las de Euclides.

23. Demuestre con los postulados y teoremas, que hemos establecido dentro de la axiomática de Birkhoff, los siguientes teoremas y corolarios *en forma tabular*.
- Teorema Euclides I.1.** Dado un segmento es posible construir sobre este un triángulo equilátero.

Idea de Euclides de la demostración. Sea AB el segmento dado. Con centro en A construya una circunferencia de radio AB . Con centro en B construya una circunferencia con el mismo radio que la

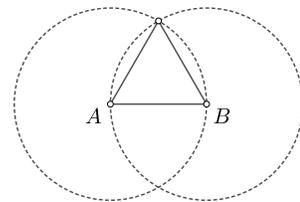


Figura 55: El segmento AB está dado, se construye un triángulo equilátero sobre este.

anterior. Sea C cualquier punto de intersección de las circunferencias. El triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.

Nota. Sin embargo este argumento *no es válido dentro de la axiomática de Euclides* dado que nunca se demuestra que las circunferencias tienen un punto común y esto tampoco está en los postulados ni en los axiomas. Por lo tanto la argumentación de Euclides *no es válida*.

- b) **Corolario del Teorema Euclides I.1.** En todo triángulo equilátero cada ángulo interno mide $\pi/3$.

Observe que este Corolario no está en el libro de Euclides ya que requiere el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, lo cual no está demostrado en estos primeros teoremas del famoso libro, sino posteriormente.

- c) **Teorema Euclides I.2** En un punto dado es posible construir un segmento igual a otro segmento dado.
- d) **Teorema Euclides I.3** Dados dos segmentos desiguales se puede restar la longitud del mayor del menor.

Nota. El Teorema de Euclides I.4 es nuestro Postulado IV [LAL] y por ello no lo incluimos en esta lista.

- e) **Teorema Euclides I.5** En los triángulos isósceles los ángulos de la base son congruentes entre sí. Si se prolongan las dos rectas iguales, los ángulos debajo de la base serán también iguales.

Idea de la demostración de Euclides. El lector debe notar que la primera parte de este Teorema es nuestro Teorema II [Tales]. Para la segunda parte considere la Figura 56. La hipótesis del teorema es que $AB \cong AG$ lo que se demuestra en la primera parte es que $\angle ABG \cong \angle AGB$. Lo que se desea demostrar es que si se prolongan AB hasta AZ y AG hasta AH con $AZ \cong AH$, entonces $\angle GBD \cong \angle BGE$. La idea de Euclides es demostrar que $\triangle BHG \cong \triangle GZB$. Use la idea de Euclides para demostrar la segunda parte del teorema.

Dé una demostración alternativa de que $\angle GBD \cong \angle BGE$ en el Teorema de Euclides I.5 mediante el Teorema IX.

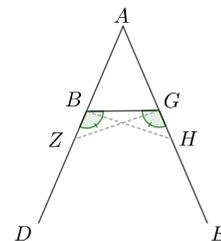


Figura 56: Famosa figura del Teorema Euclides I.5 que ha sido identificada con un puente por generaciones y que le dio el malicioso nombre de "Pons Asinorum", es decir, el puente de los burros.

Ejercicios de desigualdades

24. La bisectriz de un ángulo es un rayo o segmento que divide un ángulo dado en dos ángulos congruentes. Considere el triángulo $\triangle ABC$, sea M el punto de intersección de la bisectriz al ángulo $\angle C$ con el segmento AB . Suponga que $CM \cong MB$. Demuestre que $CB > CM$.

25. Use el Lema [DTI] o Lema [DTII] para demostrar que el segmento de menor longitud desde un punto a una recta es el segmento perpendicular.

Ejercicios de primer acercamiento a la geometría

Primera actividad para el capítulo. Lo primero que se recomienda es reescribir en una lista los postulados I a V con los nombres que les hemos dado. También debe reescribir los enunciados de los teoremas que vayan surgiendo. Se recomienda reescribir las demostraciones en forma tabular abreviada, procurando no copiarlas, sino que el lector debe hacerlas por sí mismo. Esta actividad ayuda a comprender los teoremas y las demostraciones, así como a memorizar los postulados, definiciones, etcétera.

Después puede proceder a hacer las demostraciones incluidas en los siguientes ejercicios

1. Haga el ejercicio de la página 42.
2. Resuelva el ejercicio de la página 44.
3. El primer resultado básico, además de los teoremas que hemos demostrado hasta el momento, es que *no hay ningún teorema [LLA] de semejanza ni de congruencia de triángulos.*

Contraejemplo. En la Figura 57 se muestran los triángulos $\triangle OPQ$ y $\triangle OPR$ que tienen dos lados congruentes $OP \cong OP$ y $OQ \cong OR$ (son isósceles) lo cual es evidente ya que están inscritos en una circunferencia. Ambos triángulos tienen el mismo ángulo α , pero en $\triangle OPR$ este *no está comprendido entre los lados congruentes*. Claramente los triángulos *no son semejantes*. Con ello el lector debe darse cuenta que el orden de las letras en los acrónimos ($AAL \neq ALA$) es relevante.

Construya otros contraejemplos donde los triángulos no sean isósceles, si esto es posible²³.

4. Demuestre que en rectas perpendiculares los cuatro ángulos formados con rayos en rectas distintas y origen en el punto de intersección miden lo mismo.
5. Demuestre que si dos rectas cortadas por una transversal tienen ángulos colaterales internos suplementarios, entonces las rectas son paralelas.
6. Demuestre que por un punto fuera de una recta existe una única paralela a la recta dada.
7. Demuestre que todo paralelogramo tiene lados opuestos de la misma medida.
8. Defina distancia entre rectas. Demuestre que rectas paralelas son equidistantes.

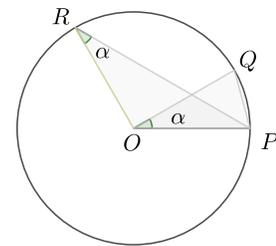


Figura 57: Se muestran dos triángulos con dos lados y un ángulo congruente que *no son semejantes*.

²³ Aquí se desea hacer énfasis en que el Postulado IV [LAL] indica que para que dos triángulos sean semejantes, basta que dos lados sean proporcionales y el ángulo comprendido *entre los lados* deben ser congruentes en ambos triángulos.

Solución completa de ejercicios seleccionados

Ejercicio: Propiedades básicas de la distancia entre puntos.

Demostración (1). Por demostrar: $d(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$. Sean $x_A, x_B \in \mathbb{R}$ los números en correspondencia con los puntos A y B , es decir, $A \leftrightarrow x_A$ y $B \leftrightarrow x_B$.

Demostración (1) \implies	
Afirmaciones	Razones
1. $d(A, B) = 0$.	1. Hipótesis.
2. $ x_A - x_B = 0$.	2. De (1), por definición, aplicando el Postulado I.
3. $x_A - x_B = 0$.	3. De (2) por las propiedades del valor absoluto en \mathbb{R} .
4. $x_A = x_B$.	4. De (3) propiedades de \mathbb{R} .
5. $A = B$	5. Por (4) dada la correspondencia $A \leftrightarrow x_A$ y $B \leftrightarrow x_B$.

Demostración (1) \impliedby	
Afirmaciones	Razones
1. $A = B$.	1. Hipótesis.
2. $x_A = x_B$	2. De (1) dada la correspondencia $A \leftrightarrow x_A$ y $B \leftrightarrow x_B$.
3. $d(A, B) = x_A - x_B = 0$	3. De (2) aplicando el Postulado I.

Para el ejercicio (2) se requiere la siguiente definición:

Definición [Estar entre puntos]. Un punto B está entre A y C , para $A \neq C$, lo cual se denota $A - B - C$, si y solo si $x_A \leq x_B \leq x_C$ o bien $x_A \geq x_B \geq x_C$.

Demostración (2). Por demostrar: $A - B - C$, si y solo si $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$. Sean A, B, C , tres puntos sobre una recta tales que $A - B - C$. Sean $x_A, x_B, x_C \in \mathbb{R}$, los números reales en correspondencia con A, B, C , respectivamente.

Demostración (2) \implies	
Afirmaciones	Razones
1. $A - B - C$	1. Hipótesis.
2. Si $x_A \leq x_B \leq x_C$	2. De (1), aplicando la definición de $A - B - C$.
3. $[x_A, x_C] = [x_A, x_B] \cup [x_B, x_C]$	3. De (2), a cada segmento le corresponde un intervalo en \mathbb{R} . (al segmento AB le corresponde el intervalo $[x_A, x_B]$)
4. $ x_A - x_C = x_A - x_B + x_B - x_C $	4. De (3), dado que la longitud de los intervalos es aditiva.
5. $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$	5. De (4), aplicando el Postulado I

Nota. Observe que en (2) dice "Si $x_A \leq x_B \leq x_C$ ", ya que también existe la posibilidad de que $x_A \geq x_B \geq x_C$, pero en tal caso la demostración sigue igual, al escribir el intervalo $[x_C, x_A] = [x_C, x_B] \cup [x_B, x_A]$, etcétera. La demostración "(2) \impliedby ", se obtiene de la Demostración "(2) \implies ", empezando en (5) y terminando en (1), invirtiendo la argumentación, y se deja como ejercicio.

Demostración (3). Por demostrar: Si se establece una numeración diferente para una recta ℓ , entonces para todos los puntos A de la recta, si x'_A corresponde al punto A en el segundo sistema, entonces se tiene que existe d tal que o bien $x'_A = x_A + d$ o bien $x'_A = -x_A + d$.

Sea ℓ una recta tal que se le ha asignado al punto A , el número real x_A . Supongamos que se le asigna una numeración diferente a la recta, de tal forma que al punto A , le corresponde el número x'_A , en el nuevo sistema. Si la reasignación preserva la orientación de la numeración (Figura 58), es decir, si los números positivos quedan del mismo lado del cero en ambos sistemas de numeración, sea $m = |x'_A - x_A|$. Tenemos así, dos casos:

$$x'_A = x_A + m, \text{ si } x'_A - x_A > 0 \quad (5)$$

$$x'_A = x_A - m, \text{ si } x'_A - x_A < 0 \quad (6)$$

Definimos $d = m$ en la primera ecuación y $d = -m$ en la segunda y se obtiene lo que se desea demostrar en el caso de que se preserve la orientación. En el caso en el que la reasignación tenga la orientación contraria (Figura 59), es decir, que los números positivos estén en lados distintos del cero, entonces multiplicando x_A por -1 se obtienen la misma orientación con lo que se regresa al caso ya estudiado y así se obtiene $x'_A = -x_A + d$, que es lo que se desea demostrar.

Nota. Las demostraciones de existencia son un poco más sutiles que las que hemos estudiado hasta el momento. En la demostración anterior, se desea demostrar la existencia de un número d que satisfaga la tesis de la proposición y se logra midiendo el desplazamiento relativo de las dos escalas que es lo que significa el número m .

Construcción para el Teorema III [LLL]

Ejercicio: Dado un triángulo $\triangle ABC$ construya un triángulo semejante $\triangle A'B'C'$ tal que $m(AC) = km(A'C')$, $m(BC) = km(B'C')$ y $m(AB) = km(A'B')$ usando solo los postulados I, III y IV.

Demostración. Tome un ángulo cualquiera del triángulo $\triangle ABC$ digamos el $\angle A$. Por el Postulado III puede construirse un ángulo con medida $m(\angle A)$ con vértice en cualquier punto que se desee, sea A' tal punto y sean AM y AN dos rayos sobre el ángulo construido. Por el postulado I, sobre el rayo AM construya un segmento con medida $m(A'C')$. De manera similar construya un segmento sobre el rayo AN con medida $m(A'B')$. Una los extremos de los segmentos y etiquételos con las letras A' , B' y C' . El triángulo $\triangle A'B'C'$ es semejante al $\triangle ABC$ por el Postulado IV [LAL].

Ejercicio: En rectas perpendiculares los cuatro ángulos formados con rayos en rectas distintas y origen en el punto de intersección miden lo mismo.

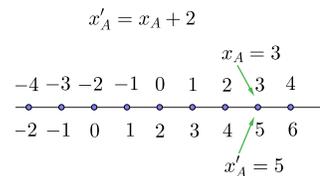


Figura 58: Se muestra un ejemplo de dos correspondencias donde se conserva la orientación de la numeración.

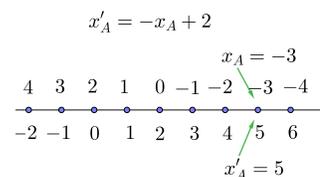


Figura 59: Se muestra un ejemplo de dos correspondencias donde no se conserva la orientación de la numeración.

Demostración. Ángulos adyacentes en rectas que se intersecan forman un par lineal con medida π . Si uno de los ángulos en este par de rectas adyacentes mide $\pi/2$ en consecuencia el otro mide $\pi/2$. Repita este argumento con los otros dos ángulos formados con rectas que se intersecan.

No existe teorema LLA

Ejercicio: Dé un contraejemplo que muestre que la siguiente proposición es falsa: Si dos triángulos tienen en dos lados congruentes y el ángulo no comprendido entre dichos lados congruente entonces los triángulos son congruentes.

Contraejemplo. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$ en la Figura 60, tienen los lados AC y AC' congruentes y un lado común AB , también comparten el ángulo $\angle B$ así que satisfacen la hipótesis de la proposición, pero no son congruentes.

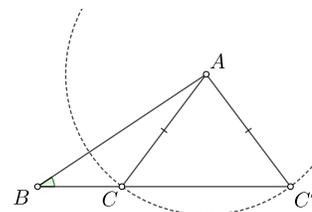


Figura 60: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$ tienen dos lados congruentes y un ángulo congruente, pero los triángulos no son congruentes.

Ejemplos de demostraciones en forma tabular

Ejercicio: Demuestre en forma tabular los teoremas I a VI.

Demostración del Teorema I [AA]. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ con $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$. Sea $k = \frac{m(A'B')}{m(AB)}$ y sea C'' , un punto en la semirecta $A'C'$ tal que $\frac{m(A'C'')}{m(AC)} = k$. Se desea demostrar que el triángulo $\triangle ABC$ es semejante al triángulo $\triangle A'B'C'$, lo cual se denota como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Demostración del Teorema I [AA]	
Afirmaciones	Razones
1. $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$.	1. Hipótesis.
2. $\triangle A'B'C'' \sim \triangle ABC$.	2. Postulado IV [LAL], dado que $\frac{m(A'C'')}{m(AC)} = k$, $k = \frac{m(A'B')}{m(AB)}$ y (1).
3. $\angle A'B'C'' \cong \angle ABC \cong \angle A'B'C'$.	3. De (2), los ángulos en correspondencia son congruentes.
4. $B'C' \in \overrightarrow{B'C''}$.	4. De (3) y el Postulado III.
5. $C'' = C'$.	5. Por (4) y el Postulado II.
6. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.	6. De (5) y la transitividad de la relación \cong .

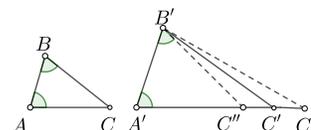


Figura 61: Triángulos semejantes de la demostración del Teorema I.

Demostración del Teorema II [Tales]. Sea $\triangle ABC$ con $m(AC) = m(BC)$. Se desea demostrar que $\angle A \cong \angle B$.

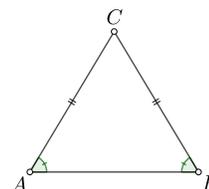


Figura 62: Triángulo isósceles de la demostración del Teorema II.

Demostración del Teorema II [Tales]	
Afirmaciones	Razones
1. $m(AC) = m(BC)$ y $m(BC) = m(AC)$.	1. Hipótesis.
2. $m\angle ACB = m\angle BCA$.	2. Reflexividad de la medida de ángulos.
3. $\triangle ACB \cong \triangle BCA$	3. De (1) y (2) con el Postulado IV [LAL].
4. $m\angle A = m\angle B$.	4. De (3) y la correspondencia $ACB \leftrightarrow BCA$.

Demostración del Teorema III [LLL]. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ triángulos con lados proporcionales con constante de proporcionalidad k y en correspondencia dada por $ABC \leftrightarrow A'B'C'$. Construya el $\triangle A'B'C''$ semejante al $\triangle ABC$ con la misma k , dada anteriormente como constante de proporcionalidad, de tal manera que $\angle C''A'B'$ y $\angle C'A'B'$ sean adyacentes (Figura 63) con lado común $A'B'$. Se desea demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, para ello basta demostrar que $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A'B'C''$ son semejantes.

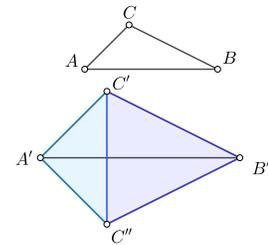


Figura 63: Construcciones en la demostración del Teorema III.

Demostración del Teorema III [LLL]	
Afirmaciones	Razones
o. $\triangle A'B'C'' \sim \triangle ABC$.	o. Construcción hipotética posible por el postulado III.
1. $m(AC) = km(A'C') = km(A'C'')$, $m(AB) = km(A'B')$ y $m(BC) = km(B'C') = km(B'C'')$	1. Hipótesis y (o).
2. $\triangle C'A'C''$ y $\triangle C'B'C''$ son isósceles.	2. Por (1).
3. $\angle A'C''C' \cong \angle A'C'C''$ y $\angle C'C''B' \cong \angle C''C'B'$.	3. En (2) Teorema II [Tales].
4. $\angle A'C'B' \cong \angle A'C''B'$.	4. De (3) sumando la medida de ángulos adyacentes.
5. $\triangle A'B'C' \sim \triangle A'B'C''$.	5. Postulado IV [LAL] con (3) y (4).
6. $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.	6. De (5) y la transitividad de la relación " \sim ".

Demostración del Teorema IV [Suma de los ángulos internos]	
Afirmaciones	Razones
o. $m(LM) = 1/2m(BC)$, $m(MK) = 1/2m(CA)$, $m(KL) = 1/2m(AB)$.	o. Construcción hipotética posible por el Postulado I.
1. $\triangle AML$, $\triangle MBK$ y $\triangle LKC \sim \triangle ABC$.	1. En (o) con $k = 1/2$ por el Postulado IV [LAL].
2. $\triangle KLM \cong \triangle AML \cong \triangle MBK$.	2. Por el Teorema III (LLL).
3. $m\angle LMK = \gamma$.	3. Por (2) e igualdad de ángulos en correspondencia.
4. $m\angle AMB = \alpha + \beta + \gamma$.	4. Postulado III [LAL] y $\angle AMB = \angle \beta \cup \angle \gamma \cup \angle \alpha$
5. $m\angle AMB = \pi$.	5. Por el Postulado V (Ángulo rectilíneo).
6. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.	6. Por (4) y (5) y transitividad de la relación " $=$ ".

Demostración del Teorema IV [Suma de ángulos internos]. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera y sean $m\angle A = \alpha$, $m\angle B = \beta$ y $m\angle C = \gamma$. Sean K ,

L, M los puntos medios de los lados BC, CA, AB , respectivamente. Se desea demostrar que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Demostración del Teorema V [Bisector perpendicular]. Sean A, B y un punto P dados, tales que $m(AP) = m(BP)$. Sea M el punto medio de AB y construya el segmento que une P con M . Se desea demostrar que P está sobre el bisector perpendicular de AB , es decir que $PM \perp AB$ y recíprocamente.

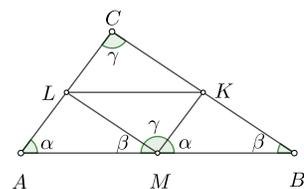


Figura 64: Triángulo ABC de la demostración del Teorema IV.

Demostración " \Rightarrow " del Teorema V [Bisector perpendicular]	
Afirmaciones	Razones
0. $m(AM) = m(BM)$.	0. Construcción hipotética posible por el Postulado I.
1. $m(AP) = m(BP)$.	1. Hipótesis: P equidista de A y B .
2. $\triangle AMP \cong \triangle BMP$.	2. Por el Teorema III (LLL) con (0), (1) y $m(MP) = m(MP)$.
3. $m\angle BMP = m\angle AMP$.	3. Por (2) e igualdad de ángulos en correspondencia.
4. $m\angle AMB = \pi$.	4. Postulado V [Ángulo rectilíneo]
5. $m\angle AMB = m\angle AMP + m\angle BMP$.	5. $\angle AMB = \angle AMP \cup \angle BMP$ y Postulado III.
6. $m\angle AMB = 2m\angle AMP$.	6. De (3) y (5)
7. $2m\angle AMP = \pi$.	7. De (6) y (4).
8. $\angle AMP = \frac{\pi}{2}$.	8. De (7).
9. $PM \perp AB$.	9. De (8) y (1).

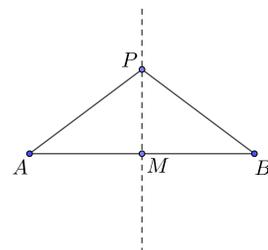


Figura 65: Demostración del Teorema V, observe que $MP \perp AB$.

Demostración " \Leftarrow " del Teorema V [Bisector perpendicular]	
Afirmaciones	Razones
1. $PM \perp AB$ y $m(AM) = m(BM)$.	1. Hipótesis: P está en bisector perpendicular.
2. $\triangle AMP \cong \triangle BMP$, $m(AM) = m(MB)$, $m(MP) = m(MP)$.	2. Por (1) y reflexividad de la relación " $=$ "
3. $\triangle AMP \cong \triangle BMP$.	3. Por (2) y el Postulado IV [LAL]
4. $m(AP) = m(BP)$.	4. De (3) AP y BP son lados en correspondencia.

Demostración del teorema VI [Perpendicular de un punto a una recta]. Si el punto P está sobre ℓ , se sigue del Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}].

Si P no está en ℓ , sean A, B dos puntos distintos sobre dicha recta. Construya un $\triangle AP'B$, congruente con $\triangle APB$ con P' distinto de P , como en la Figura 30. Para este fin, construya el rayo $\overrightarrow{AP'}$ de tal forma que $\angle P'AB \cong \angle PAB$ y $m(AP) = m(AP')$ (mediante los postulados I y III). Como A y B están cada uno de ellos a la misma distancia de P y P' , entonces están en el bisector perpendicular del segmento PP' . Así PP' y AB son perpendiculares y de esta forma se ha demostrado la existencia de al menos una perpendicular. Si hubiera otra perpendicular (ver Figura 66) a AB que pasara por P , sean PM y PM' las perpendiculares en cuestión con M y M' en ℓ . Por el Teorema IV de la suma de los ángulos internos de un triángulo tendríamos que

$$\pi = m\angle MM'P + m\angle M'PM + m\angle PMM'$$

o bien

$$\pi = \frac{\pi}{2} + m\angle M'PM + \frac{\pi}{2}$$

y por lo tanto

$$m\angle M'PM = 0.$$

De esta forma $M'P$ y MP estarían en la misma recta, contrario a nuestra suposición. \square

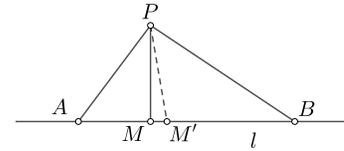


Figura 66: Suponga que existe una segunda perpendicular PM' a ℓ por P .

Demostración del Teorema VI (<i>Existencia</i>) [Perpendicular por un punto]	
Afirmaciones	Razones
-1. Si $P \in \ell$.	-1. Por Postulado III, no hay nada que demostrar.
o. Si $P \notin \ell$, $\triangle AP'B \cong \triangle APB$ y $P' \neq P$.	o. Construcción hipotética posible por los postulados I y III.
1. $m(AP) = m(BP)$ y $m(AP') = m(BP')$.	1. Por (o) e igualdad de lados en correspondencia.
2. $PP' \perp AB$.	2. Por (1) y el Teorema V. Se ha demostrado existencia de \perp .

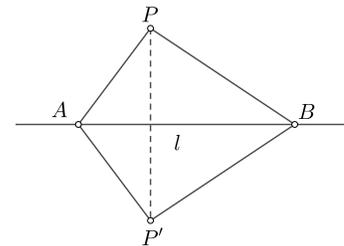


Figura 67: Demostración Tabular del Teorema VI. Perpendicular a ℓ por P .

Demostración del Teorema VI (<i>Unicidad</i>) [Perpendicular por un punto]	
Afirmaciones	Razones
o. PM y $PM' \perp AB$, $M, M' \in \ell$.	o. Construcción hipotética
1. $\pi = m\angle MM'P + m\angle M'PM + m\angle PMM'$	1. Teorema IV
2. $\pi = \frac{\pi}{2} + m\angle M'PM + \frac{\pi}{2}$	2. Por (1) y (o).
3. $m\angle M'PM = 0$.	3. De (2) simplificando.
4. $PM = PM'$ (!)	4. Contradicción por (3) y el Postulado III.
5. PM es única \perp a AB .	5. De (4), principio de contradicción.

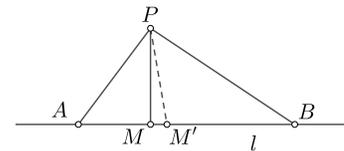


Figura 68: Suponga que existe una segunda perpendicular PM' a ℓ por P .

Solución del problema 7. Sean A, B, C, D los vértices de un paralelogramo cualquiera con $AB \parallel CD$ y $BC \parallel AD$. Se desea demostrar que $m(AB) = m(CD)$ y $m(BC) = m(AD)$. Construya la diagonal del paralelogramo AC como en la Figura 69. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$ son congruentes dado que tienen un lado común y ángulos congruentes por ser alternos internos. Se tiene que $m(AB) = m(CD)$ por ser AB y CD lados en correspondencia de triángulos congruentes. Similarmente $m(BC) = m(AD)$ y así queda demostrado lo que se desea.

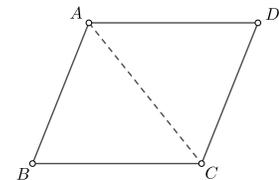


Figura 69: Lados opuestos de paralelogramos son congruentes.

Solución del problema 8. La distancia entre dos rectas paralelas se define como la distancia de cualquier punto de una recta a la otra recta. La distancia de un punto fuera de una recta a la recta se define como la medida del segmento del punto fuera de la recta al pie de la perpendicular que pasa por tal punto. Dados dos puntos distintos en una recta construya las perpendiculares que pasan por dichos puntos. Se obtiene un rectángulo y por la solución del problema 7 los segmentos que unen los puntos con los pies de las perpendiculares miden lo mismo. Así, rectas paralelas son equidistantes (¿por qué?).

Demostraciones de los Teoremas de Euclides

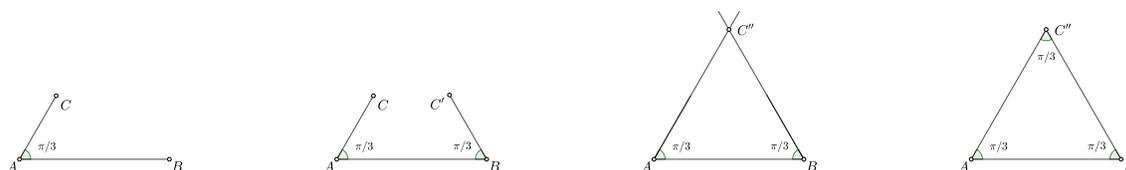
Mediante los postulados, teoremas, que hemos establecido dentro de la axiomática de Birkhoff y solo mediante tal axiomática deben demostrarse los siguientes teoremas y corolarios *en forma tabular*.

1. **Teorema Euclides I.1.** Dado un segmento es posible construir sobre este un triángulo equilátero.

Idea de la demostración. Sea AB el segmento dado. Construya la recta ℓ que pasa por A, B . Sea C un punto que no está en ℓ tal que $m\angle BAC = \pi/3$. Construya el rayo \overrightarrow{AC} . Sea C' un punto que no está en ℓ del mismo lado de la recta que el rayo \overrightarrow{AC} , tal que $m\angle ABC' = \pi/3$. Sea C'' la intersección de los rayos \overrightarrow{AC} y $\overrightarrow{BC'}$. El $\triangle ABC''$ es equilátero.

Nota. Que los rayos \overrightarrow{AC} y $\overrightarrow{BC'}$ se intersecan, se demuestra dentro de la axiomática de Birkhoff una vez que se han introducido coordenadas.

Demostración del Teorema Euclides I.1 [Existen los triángulos equiláteros]	
Afirmaciones	Razones
1. $\exists C$ tal que $m\angle BAC = \pi/3$.	1. Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}].
2. $\exists C'$ del mismo lado que C , tal que $m\angle ABC' = \pi/3$	2. Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}].
3. $\exists C''$ intersección de las rectas AC y BC' .	3. Las rectas AC y BC' no son paralelas por (1) y (2).
4. $m\angle AC''B = \pi/3$.	4. Por (1), (2) y el Teorema IV [Suma de los ángulos internos].
5. El $\triangle ABC''$ es equilátero.	5. Por el recíproco del teorema de Tales $m(AB) = m(AC'')$ y $m(AC'') = m(BC'')$, usando (1), (2) y (4).



Nota. El Teorema de Euclides I.4 es nuestro Postulado IV [LAL] y por ello no lo incluimos en esta lista.

2. **Teorema Euclides I.5** En los triángulos isósceles los ángulos de la base son congruentes entre sí, y, si se prolongan las dos rectas iguales los ángulos de debajo de la base serán también iguales.

Idea de la demostración de Euclides. El lector debe notar que la primera parte de este Teorema, es nuestro Teorema II [Tales]. Para la segunda parte, considere la Figura 70. La hipótesis del teorema es que $AB \cong AG$ lo que se demuestra en la primera parte es que $\angle ABG \cong \angle AGB$. Se desea demostrar es que si se prolongan AB

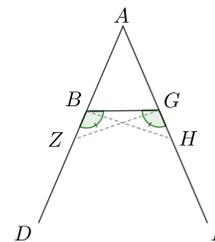


Figura 70: Famosa figura del Teorema Euclides I.5 que ha sido identificada con un puente por generaciones y que le dio el malicioso nombre de "Pons Asinorum", es decir, el puente de los burros.

hasta AZ y AG hasta AH con $AZ \cong AH$, entonces $\angle GBD \cong \angle BGE$. La idea de Euclides es demostrar que $\triangle BHG \cong \triangle GZB$. Use la idea de Euclides para demostrar la segunda parte del teorema..

Dé una demostración alternativa de que $\angle GBD \cong \angle BGE$ en el Teorema de Euclides I.5, mediante el Teorema IX.

3. Demostración del ejercicio 18.

Teorema VII' bis [Recíproco del teorema de Pitágoras]. Todo triángulo tal que existe un etiquetado a, b, c , de las longitudes de los lados, de tal forma que se cumple $a^2 + b^2 = c^2$, es rectángulo, siendo c la longitud de la hipotenusa.

Demostración. Sea el triángulo $\triangle ABC$, tal que $m(BC) = a$, $m(CA) = b$ y $m(AB) = c$ y $a^2 + b^2 = c^2$. Construya la perpendicular a AB que pasa por C y denote con D el punto donde la perpendicular corta²⁴ a AB . Sean $m(AD) = q$, $m(DB) = p$ y $m(DC) = h$, de esta forma $c = p + q$. Dado que los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ son rectángulos por construcción, tenemos las siguientes relaciones:

$$p^2 + h^2 = a^2 \quad (7)$$

$$q^2 + h^2 = b^2 \quad (8)$$

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2 + 2h^2, \quad (9)$$

donde (9) se obtiene sumando (7) y (8). Además como $c = p + q$ tenemos $c^2 = p^2 + q^2 + 2pq$ y como por hipótesis $a^2 + b^2 = c^2$, usando (9) se llega a

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + 2h^2 &= p^2 + q^2 + 2pq \\ h^2 &= pq \\ \frac{h}{q} &= \frac{p}{h}. \end{aligned}$$

Dada la relación $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$ concluimos que los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ son semejantes dado que son rectángulos por construcción y por el Postulado IV [LAL]. Se concluye que la semejanza está dada por la correspondencia $h \leftrightarrow p$, $q \leftrightarrow h$ y $a \leftrightarrow b$. Se tiene así que

$$\begin{aligned} \angle CAD &\cong \angle BCD \\ \angle DCA &\cong \angle DBC. \end{aligned}$$

Además, como $m\angle BCD + m\angle DBC + \pi/2 = \pi$ por el Teorema IV [Suma de los ángulos internos], entonces $m(\angle BCD) + m(\angle DBC) = \pi/2$. Por lo tanto $m\angle DCA + m\angle CAD = \pi/2$. \square

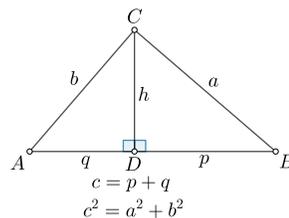


Figura 71: Si en un triángulo se cumple $a^2 + b^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo, siendo c la medida de la hipotenusa de tal triángulo.

²⁴ En los ejercicios se indica como se puede demostrar que no puede ocurrir que $m\angle A$ o $m\angle B$ sean mayores que $\pi/2$.

4. **Solución del ejercicio 13.** Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en un ángulo recto, la suma de los cuadrados de los lados opuestos es igual a la de los cuadrados de los otros dos. Sugerencia: recuerde que un cuadrilátero no tiene que ser necesariamente un paralelogramo. Sean los lados del cuadrilátero h_1, h_2, h_3, h_4 , tales lados, por construcción, son las hipotenusas de los triángulos rectángulos formados con las diagonales del cuadrilátero Figura 72. Se desea demostrar que $h_1^2 + h_3^2 = h_2^2 + h_4^2$. Use el teorema de Pitágoras.

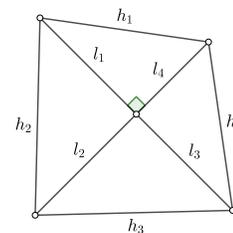


Figura 72: Cuadrilátero del ejercicio 13.

Solución de los ejercicios de desigualdades

1. **Demostración del ejercicio 24:** La bisectriz de un ángulo es un rayo o segmento que divide un ángulo dado en dos ángulos congruentes. Considere el triángulo $\triangle ABC$, sea M el punto de intersección de la bisectriz al ángulo $\angle C$ con el segmento AB . Suponga que $CM \cong MB$. Muestre que $CB > CM$.

Idea de la demostración: Debe demostrar que $m\angle MCB < m\angle CMB$ (¿por qué?). Sea $\alpha = m\angle CMB$, $\beta = m\angle MBC = m\angle MCB$, $\gamma = m\angle CAB$. Note que $m\angle MBC = m\angle MCB$ por el Teorema II [Tales]. Dado que $\gamma + 3\beta = \pi$ y $\alpha + 2\beta = \pi$ (justifique), se sigue que $\alpha = \beta + \gamma$, de donde se sigue lo que se desea demostrar.

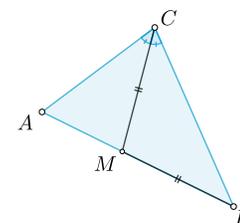


Figura 73: En el triángulo $\triangle ABC$, CM es bisectriz del ángulo C y $CM \cong MB$. Muestre que $m(CM) < m(CB)$.

2. **Solución del ejercicio 25.** Sea ℓ una recta y P un punto fuera de ésta. Sea Q el punto sobre ℓ con PQ perpendicular a ℓ . Sea R cualquier otro punto distinto de Q sobre ℓ . Se desea demostrar que $m(PQ) < m(PR)$. Efectivamente, dado que $m\angle PQR = \pi/2$, el ángulo exterior a este ángulo del $\triangle PQR$ también mide $\pi/2$ (justifique). Entonces la suma de las medidas de los ángulos no rectos $\angle QPR$ y $\angle QRP$ es $\pi/2$. Así $m\angle QPR > m\angle QRP$ (¿por qué?). Se concluye que $m(PQ) < m(PR)$ (justifique), para cualquiera que sea el punto R sobre ℓ con $R \neq Q$.

Tres teoremas sobre la circunferencia

Los teoremas que estudiaremos aquí son básicos en las matemáticas superiores y en la mayoría de los textos de Cálculo suelen ser citados como sabidos. Pues bien, estimado lector, este es el momento en que tales teoremas pueden ser aprendidos y demostrados. Pero antes debemos comenzar con algunos conceptos elementales.

Definición [Circunferencia]. Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia constante, llamada *radio*, de un punto fijo llamado *centro de la circunferencia*.

Nota. En algunos textos a la circunferencia se le suele llamar “círculo” y tal palabra se usa como sinónimo. Aquí mantendremos la tradición de llamar círculo al disco limitado por la circunferencia.

Definición [Segmentos relevantes de la circunferencia]. Se llama *cuerda* a cualquier segmento cuyos extremos están sobre una circunferencia. Se llama *diámetro de la circunferencia* a una cuerda que contiene al centro de la circunferencia. Se llama *secante a la circunferencia* a una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos. Se llama *tangente a la circunferencia* a una recta que toca a la circunferencia en un sólo punto, llamado *punto de tangencia*.

Con las definiciones dadas ahora podemos enunciar y demostrar los teoremas con mayores aplicaciones de la circunferencia.

Teorema I-C [Tangentes son perpendiculares al radio]. Si una recta es tangente a una circunferencia entonces es perpendicular a un radio. Recíprocamente, si una recta perpendicular a un radio pasa por el punto de intersección del radio con la circunferencia, tal recta es tangente a la circunferencia.

Demostración. Primero demostramos que toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que contiene al punto de tangencia. Sea ℓ una recta tangente a una circunferencia dada con centro en el punto C y sea T el punto de tangencia. Supongamos contrariamente a lo que se desea demostrar, que la recta ℓ no es perpendicular al radio CT . Por el Teorema VI [Perpendicular por un punto] existe un punto U distinto de T tal que $CU \perp \ell$. Por el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}], existe un punto V en ℓ tal que $T - U - V$ y $m(TU) = m(UV)$.

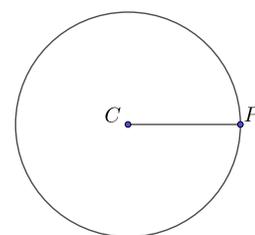


Figura 74: Circunferencia con centro en el punto C . El punto P es un punto cualquiera sobre la circunferencia el radio de la circunferencia está dado por $m(CP)$.

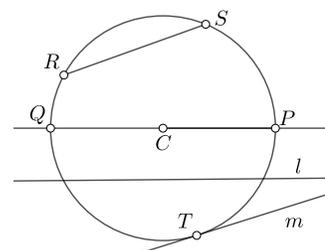


Figura 75: *Cuerda* es el segmento que pasa por R, S ; *diámetro*, es la cuerda PQ que pasa por el centro C ; *secante* es la recta ℓ que corta a la circunferencia en dos puntos; *tangente* es la recta m que toca a la circunferencia sólo en T .

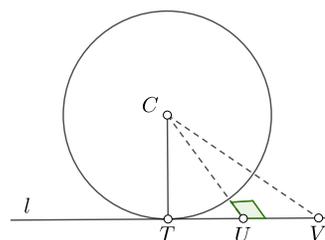


Figura 76: Si CT no es \perp a ℓ . Construya la \perp a ℓ que pasa por C .

Dado que $CU \perp \ell$ (hipótesis, principio de contradicción), $\angle CUT \cong \angle CUV$ por Lema I [Par lineal]. Dada esta congruencia de ángulos, además de que por construcción $TU \cong UV$ y que $CU \cong CU$ concluimos que $\triangle CTU \cong \triangle CUV$, por el Postulado IV [LAL]. Así $CT \cong CV$, por ser lados en correspondencia de triángulos congruentes. Por lo tanto V debe estar en la circunferencia por definición ya que $m(CV)$ es igual al radio. Pero dado que T es distinto de V y V está sobre la circunferencia la recta ℓ no puede ser tangente, sino secante, lo cual contradice nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, $\ell \perp CT$.

Supongamos ahora que una recta ℓ es perpendicular a un radio en el punto P , donde el radio corta a la circunferencia. Se desea demostrar que la recta ℓ es tangente a la circunferencia. En efecto, si A es cualquier otro punto sobre ℓ y si $m(CP) = m(CA)$, es decir, si A pertenece también a la circunferencia, entonces el $\triangle CPA$ es isósceles. Pero entonces tendríamos un triángulo con dos ángulos rectos, ya que lados congruentes se oponen ángulos congruentes, por el Teorema II [Tales], lo que contradice el Teorema IV de la suma de los ángulos internos de un triángulo, es decir $P = A$. Concluimos que ℓ toca a la circunferencia en un sólo punto y por lo tanto, es tangente a la circunferencia por definición. \square

Teorema II-C [Tangentes concurrentes son congruentes]. Si dos tangentes a una misma circunferencia se intersecan en un punto, entonces los segmentos de las tangentes que tienen por extremos el punto de intersección y el punto de tangencia son congruentes. Además, el rayo que tiene como origen el punto de intersección y que pasa por el centro de la circunferencia forma con las tangentes ángulos congruentes.

Demostración. Sea P el punto de intersección de las tangentes. Sean AP , BP tangentes a la circunferencia cuyo centro está es C . Entonces, de los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle PCB$ sabemos que: son rectángulos por el Teorema I-C, que además $m(AC) = m(BC)$ por ser radios de la circunferencia y que $m(CP) = m(CP)$. Así, por el Teorema VII [Pitágoras], concluimos que $m(AP) = m(PB)$.

Para la segunda parte por el Teorema III [LLL], los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle PCB$ son congruentes y por lo tanto $\angle CPA \cong \angle CPB$ por ser ángulos en correspondencia. \square

Para el tercer teorema importante de circunferencias necesitamos algunas definiciones más.

Definición [Ángulos centrales e inscritos]. Dados dos puntos distintos A y B sobre una circunferencia con centro en C , se llama *ángulo central* al ángulo $\angle ACB$, es decir, al ángulo con vértice en el centro de la circunferencia. Se llama *ángulo inscrito* al ángulo $\angle ADB$, donde el vértice D , es un punto sobre la circunferencia distinto de A y B .

Teorema III-C [Ángulo inscrito es mitad del ángulo central]. Todo ángulo inscrito mide la mitad del ángulo central con los mismos extre-

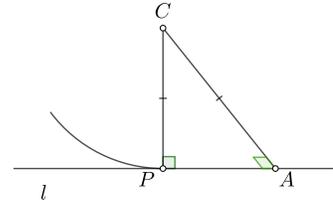


Figura 77: Si ℓ es $\perp CP$. Sea A tal que $m(CP) = m(CA)$. Entonces $\triangle CPA$ ¡es isósceles!

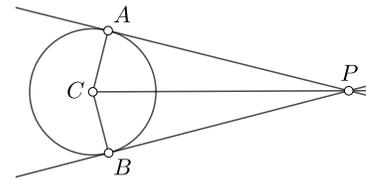


Figura 78: Si AP y BP son tangentes a la circunferencia y se cortan en P , entonces $AP \cong BP$.

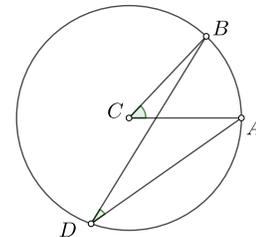


Figura 79: El ángulo $\angle ACB$ es un ángulo central, el ángulo $\angle ADB$ es inscrito.

mos.

Demostración. Se tienen tres casos distintos, estudiaremos cada uno separadamente.

i) El ángulo $\angle ADB$ es inscrito y C está sobre este mismo ángulo, siendo C vértice de $\angle ACB$.

Tenemos que

$$m\angle ACB = m\angle CDA + m\angle CAD,$$

por ser $\angle ACB$ exterior al $\triangle ADC$ y el Lema I [Ángulo exterior a un triángulo]. Dado que $CB \cong CD$, el triángulo $\triangle ADC$ es isósceles y $m\angle CDA = m\angle CAD$, por el Teorema II [Tales]. Tenemos así que

$$\begin{aligned} m\angle ACB &= m\angle CDA + m\angle CAD \\ &= 2m\angle CDA. \end{aligned}$$

Se concluye que $m\angle ADB = \frac{m\angle ACB}{2}$, como se desea demostrar.

ii) El ángulo $\angle ADB$ es inscrito y C está en el interior de este mismo ángulo, siendo C vértice de $\angle ACB$.

Construya el diámetro DE que pasa por D y por el centro de la circunferencia C . De esta forma, $m\angle BDA = m\angle BDE + m\angle ADE$. Al mismo tiempo $m\angle BDE = 1/2m\angle BCE$ y $m\angle ADE = 1/2m\angle ACE$, ambos por el caso anterior. Así

$$\begin{aligned} m\angle BDA &= m\angle BDE + m\angle ADE \\ &= \frac{1}{2}m\angle BCE + \frac{1}{2}m\angle ACE \\ &= \frac{1}{2}m\angle BCA, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por una de las consecuencias del Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}].

iii) El ángulo $\angle ADB$ es inscrito y C está en el exterior de este mismo ángulo, siendo C vértice de $\angle ACB$.

Construya el segmento DE con el diámetro de la circunferencia que pasa por D y C . Tenemos $m\angle BDA = m\angle EDA - m\angle EDB$, por la aditividad de las medidas de los ángulos (lo cual es consecuencia inmediata del Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}]). Por otra parte, $m\angle EDB = 1/2m\angle ECB$ y $m\angle EDA = 1/2m\angle ECA$, por el inciso i) de este mismo teorema. Entonces,

$$m\angle BDA = \frac{1}{2}(m\angle ECA - m\angle ECB).$$

Por otra parte como consecuencia del Postulado III (correspondencia biyectiva entre los ángulos y arcos), $m\angle BCA = m\angle ECA - m\angle ECB$.

Por lo tanto,

$$m\angle BDA = \frac{1}{2}m\angle BCA$$

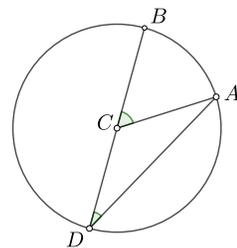


Figura 80: Caso i) el ángulo $\angle ACB$ es un ángulo central, y C está sobre el ángulo $\angle ADB$ inscrito.

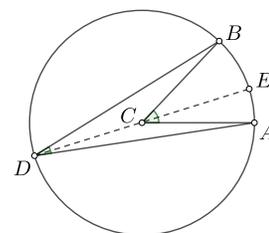


Figura 81: Caso ii) el ángulo $\angle ACB$ es un ángulo central, y C está en el interior del ángulo $\angle ADB$ inscrito.

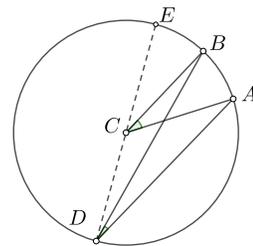


Figura 82: Caso iii) el ángulo $\angle ACB$ es un ángulo central, y C está en el exterior del ángulo $\angle ADB$ inscrito.

como se desea demostrar, con lo cual concluye la demostración de los tres casos posibles. \square

Corolario I-C [Ángulo inscrito en una semicircunferencia]. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Demostración. Sea AB el diámetro de una circunferencia cualquiera con centro en el punto C . Sobre la circunferencia, sea D distinto de A y B . Se afirma que $m\angle ADB = \pi/2$. Efectivamente, $m\angle ACB = \pi$ por el Postulado V (Ángulo rectilíneo), ya que forman un ángulo rectilíneo. Por el Teorema II-C (Ángulo inscrito es mitad del ángulo central) se concluye $m\angle ADB = 1/2m\angle ACB = \pi/2$. \square

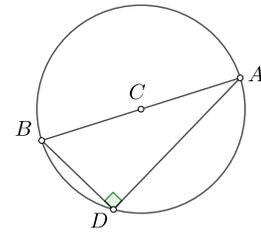


Figura 83: El $\angle BDA$ al estar inscrito en una semicircunferencia mide $\pi/2$.

Ejercicios sobre circunferencias

Los ejercicios de esta sección sirven de apoyo para comprender mejor los teoremas y corolarios del capítulo. Antes de emprender la solución de los ejercicios recuerde que

- No porque dos segmentos parezcan congruentes se pueden suponer congruentes, **si no se especifica explícitamente, ya sea con marcas o como hipótesis**, no se pueden suponer congruentes.
 - No porque dos rectas parezcan congruentes se pueden suponer congruentes, **si no se especifica explícitamente, ya sea con marcas o como hipótesis**, no se pueden suponer congruentes.
1. Con los resultados de este capítulo se pueden demostrar una serie de proposiciones de variada utilidad. Pero antes defina *círculos congruentes*. Busque la definición en libros de texto, sitios *web*, etcétera y compare con su definición.
 2. Demuestre formalmente las siguientes proposiciones haciendo uso de las definiciones del ejercicio anterior:
 - a) En un círculo o en círculos congruentes dos cuerdas son congruentes si y solo si equidistan del centro.
 - b) El segmento perpendicular desde el centro de la circunferencia a una cuerda biseca la cuerda y recíprocamente, el segmento que une el centro de una circunferencia con el punto medio de una cuerda es perpendicular a esta.
 - c) Por tres puntos distintos puede trazarse una circunferencia y una sola.
 - d) Si dos círculos son tangentes, la línea que une los centros pasa por el punto de contacto.
 3. Escriba en forma tabular las demostraciones de los teoremas I a III de la circunferencia.

Problemas sobre circunferencias

4. Los siguientes problemas de construcción son clásicos en el estudio de la geometría. Debe proponer la construcción y demostrar formalmente sus afirmaciones. También, debe usar triángulos de varios tipos distintos a los mostrados en las figuras para verificar los teoremas.

- a) Dado un triángulo cualquiera existe una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

Sugerencia: El $\triangle ABC$ tiene puntos medios de los lados AB , BC , CA , en los puntos m_2 , m_3 y m_1 respectivamente. Se construyen las perpendiculares que pasan por estos puntos, puede demostrarse que se intersectan en un punto O que es el centro de una circunferencia que pasa por A , B , C . (ver Figura 84). No olvide usar el teorema del bisector perpendicular.

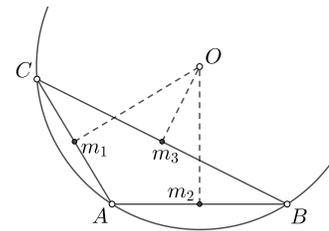


Figura 84: Vea la sugerencia del problema 4a.

- b) Dado un triángulo cualquiera, existe una circunferencia interior al triángulo tangente a los tres lados del triángulo.

Sugerencia: Note que la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo que biseca y por lo tanto se intersectan en un punto O . El $\triangle ABC$ tiene por bisectrices de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ (por ejemplo) las rectas m_1 y m_2 , respectivamente, las rectas se intersectan en un punto O .

Con centro en O existe una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo. Para demostrarlo baje desde O las perpendiculares a cada uno de los lados y demuestre que son congruentes (ver Figura 85). No olvide usar el teorema del bisector perpendicular.

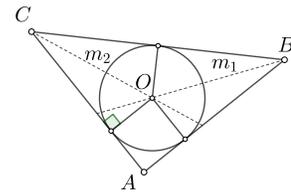


Figura 85: Vea la sugerencia del problema 4b.

5. Considere una circunferencia con centro en P y sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia. Demuestre que $\angle APB \cong \angle BPC \cong \angle CPA$.
6. Demuestre que todo paralelogramo inscrito en una circunferencia es un rectángulo.

Sugerencia: Use el Corolario II [Postulado V de Euclides].
7. Demuestre que el diámetro de una circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide la suma de la longitud de los catetos menos la longitud de la hipotenusa.
8. Dadas dos circunferencias que se intersectan, si por uno de los puntos de intersección se trazan diámetros a cada una de ellas, la recta que une los extremos de tales diámetros pasa por el otro punto de intersección.
9. La altura de un triángulo equilátero es tres veces el radio de la circunferencia inscrita.
10. En una circunferencia, secantes congruentes son subtendidas por ángulos centrales congruentes y recíprocamente, ángulos centrales congruentes determinan secantes congruentes.
11. Dada una circunferencia cualquiera, localice el centro de la misma.

Solución de los ejercicios seleccionados de la circunferencia

Demostración tabular "⇒" del Teorema I-C. Sea ℓ una recta tangente a una circunferencia dada con centro en el punto C y sea T el punto de tangencia. Supongamos por contradicción, que la recta ℓ no es perpendicular al radio CT . Entonces, por el Teorema VI, existe U tal que $CU \perp \ell$. Construya V tal que $TU \cong UV$ y $CU \cong CV$. Se desea demostrar que $\ell \perp CP$.

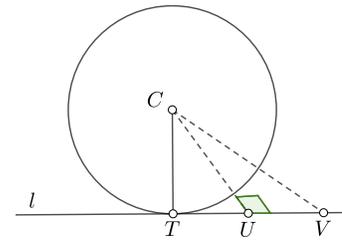


Figura 86: Si CT no es \perp a ℓ . Construya la \perp a ℓ que pasa por C .

Demostración \Rightarrow del Teorema I-C [Tangentes son perpendiculares al radio]	
Afirmaciones	Razones
-1. ℓ no es \perp a CT .	-1 Hipótesis, principio de contradicción.
0. $\exists U$ tal que $TU \cong UV$, $CU \cong CV$ y $CU \perp \ell$.	0. Construcción hipotética por (-1) y Teorema VI.
1. ℓ es tangente a la circunferencia.	1. Hipótesis.
2. $\exists V$ en ℓ tal que $T - U - V$.	2. De (0) por el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}]
y $m(TU) = m(UV)$.	
3. $\angle CUT \cong \angle CUV$.	3. Lema I [Par lineal] y (2).
4. $\triangle CTU \cong \triangle CUV$.	4. De (3), (0) y el Postulado IV [LAL].
5. $CT \cong CV$.	5. De (4).
6. ℓ no es tangente, (!) con la hipótesis (1).	6. De (0), $T \neq V$ y de (4), V está sobre la circunferencia y sobre ℓ .
7. $\ell \perp CT$.	7. De (6) por el principio de contradicción.

Demostración tabular "⇐" del Teorema I-C. Supongamos que $\ell \perp CT$. Sea A en ℓ tal que $m(CP) = m(CA)$. Se desea demostrar que $A = P$, es decir, ℓ es tangente a la circunferencia.

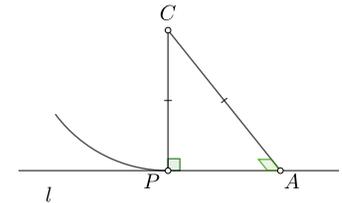


Figura 87: Si ℓ es \perp CP . Sea A tal que $m(CP) = m(CA)$, es decir A está sobre la circunferencia. Entonces $\triangle CPA$ ¡es isósceles!

Demostración \Leftarrow del Teorema I-C [Tangentes son perpendiculares al radio]	
Afirmaciones	Razones
1. $\ell \perp CT$.	1. Hipótesis.
2. $A = P$.	2. Si $A \neq P$ entonces $\triangle ACP$ es isósceles ya que $m(CP) = m(CA)$, así por el Postulado IV [ALA] y la demostración anterior $\triangle ACP$ tiene dos ángulos interiores rectos (!), contradice el teorema IV.
3. ℓ es tangente a la circunferencia.	3. De (2) y la definición de tangente.

Demostración tabular del Teorema II-C. Sean AP y BP tangentes a la circunferencia con centro en C . Se desea demostrar que $m(AP) = m(BP)$ y $m\angle APC = m\angle BPC$.

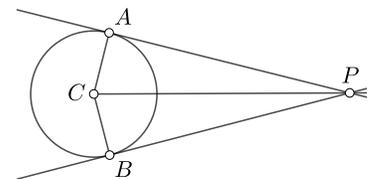


Figura 88: Si AP y BP son tangentes a la circunferencia y se cortan en P , entonces $AP \cong BP$.

Problema 6. Demuestre que todo paralelogramo inscrito en una circunferencia es un rectángulo.

Demostración del Teorema II-C [Tangentes concurrentes son congruentes]	
Afirmaciones	Razones
1. AP, BP son tangentes a la circunferencia.	1. Hipótesis.
2. $\triangle APV, \triangle BPC$ son rectángulos.	2. Por (1) y Teorema 1-C.
3. $m(AC) = m(BC)$.	3. Por construcción son radios de la circunferencia.
4. $m(AP) = m(PB)$.	4. Teorema de Pitágoras VII, con (2), (3) y $m(CP) = m(CP)$.
5. $\triangle PAC \cong \triangle PCB$.	5. Por el Teorema III [LLL] con (2), (3) y (4).
6. $\angle CPA \cong \angle CPB$.	6. De (5) y la correspondencia $APC \leftrightarrow BPC$.

Solución. Considere una circunferencia cualquiera con centro en O y radio r como en la Figura 89. Construya un paralelogramo con vértices A, B, C, D sobre la circunferencia. Dado que es un paralelogramo tiene lados opuesto de la misma medida (¿por qué?). Supongamos que $m(DA) = m(BC)$. Se concluye que $\triangle AOD \cong \triangle COB$ dado que A, B, C, D son puntos sobre la circunferencia y la medida del centro O a cada uno de ellos es r . Por lo tanto $m\angle OAD = m\angle ODA = m\angle OBC = m\angle BCO$. Con el mismo razonamiento se concluye que $m\angle OAB = m\angle OBA = m\angle OCD = m\angle ODC$. Por lo tanto, $m\angle DAB = m\angle ABC$ los cuales son colaterales internos (formados con las paralelas AD y BC con la transversal AB) y por lo tanto sus medidas suman π , por el Corolario II [Postulado V de Euclides]. Así

$$m\angle DAB + m\angle ABC = 2m\angle DAB = \pi.$$

Es decir, $m\angle DAB = m\angle ABC = \pi/2$. De la misma manera se concluye que $m\angle BCD = m\angle ADC = \pi/2$ y por lo tanto el paralelogramo es rectángulo. \square

Problema 7. Demuestre que el diámetro de una circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide la suma de la longitud de los catetos menos la longitud de la hipotenusa.

Solución del problema 7. Demuestre que el diámetro de una circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo mide la suma de la longitud de los catetos menos la longitud de la hipotenusa.

Solución. Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con hipotenusa AB y catetos BC y CD . Sea O el centro de la circunferencia inscrita de radio r , la cual existe por el problema 4b. Denotamos la longitud de la hipotenusa por h y $h = h_1 + h_2$, donde se ha definido $h_1 = m(AP)$ y $h_2 = m(PB)$. Sea $m(CA) = c_1 + c'_1$, donde $c_1 = m(RA)$ y $c'_1 = m(CR)$, por último, sea $m(BC) = c_2 + c'_2$, donde $c_2 = m(QC)$ y $c'_2 = m(BQ)$. Note que todas estas medidas están justificadas por el Postulado I

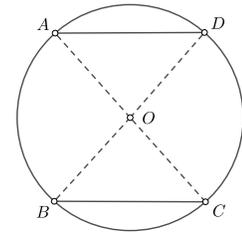


Figura 89: Paralelogramo inscrito es rectángulo

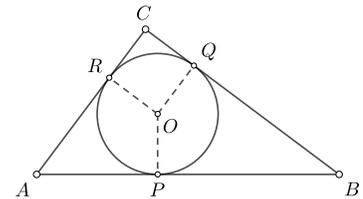


Figura 90: Diámetro igual a suma de longitudes de cateto menos la longitud de la hipotenusa.

[Rectas en correspondencia con \mathbb{R}]. Por el Teorema II-C tenemos:

$$h_1 = c_1 \quad (10)$$

$$h_2 = c'_2 \quad (11)$$

$$c_2 = c'_1. \quad (12)$$

Por construcción, O equidista de P, Q y R ; además $QO \parallel CR$ y $RO \parallel QC$, de donde se concluye que $r = m(CQ) = c_2$ y $r = m(CR) = c'_1$. Así dado que el diámetro de la circunferencia mide $2r$ tenemos

$$\begin{aligned} 2r &= c'_1 + c_2 \\ &= c'_1 + c_1 + c_2 + c'_2 - (c_1 + c'_2) \\ &= c'_1 + c_1 + c_2 + c'_2 - (h_1 + h_2), \end{aligned} \quad (13)$$

donde $c_1 + c'_2 = h_1 + h_2$ por (10) y (11) y $2r = c'_1 + c_2$ por (12). Con (13) se obtiene

$$2r = m(CA) + m(BC) - m(AB)$$

Que es lo que se desea demostrar. \square

Solución del problema 8. Dadas dos circunferencias que se intersecan, si por uno de los puntos de intersección se trazan diámetros a cada una de ellas, la recta que une los extremos de tales diámetros pasa por el otro punto de intersección.

Solución. Sean O, O' los centros de dos circunferencias que se intersecan y sean P y P' los puntos de intersección como en la Figura 91. Construya un diámetro a una de ellas que pase por OP y también construya el diámetro de la otra circunferencia que pase por OP' . Sean A y B los extremos de tales diámetros distintos de P . Se desea demostrar que A, P' y B son colineales. En efecto, dado que el $\angle PP'A$ está inscrito en una semicircunferencia, por ser AP un diámetro, tenemos $m\angle PP'A = \pi/2$ por el Teorema II-C [Ángulo inscrito es mitad del ángulo central]. Similarmente $m\angle PP'B = \pi/2$. Por lo tanto $P'A \perp PP'$ y $P'B \perp PP'$ dado que por el punto P' pasa una y solo una perpendicular a PP' , por el Teorema VI [Perpendicular por un punto], se concluye que A, P' y B son colineales. \square

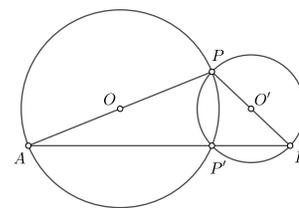


Figura 91: Figura del problema 8

Solución del problema 9. La altura de un triángulo equilátero es tres veces el radio de la circunferencia inscrita.

Solución. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero. Construya la altura CD con pie de la perpendicular en AB como en la Figura 92. Construya la perpendicular a CA que pasa por el centro de la circunferencia O y llámese P al pie de la perpendicular. Sea P la intersección de la altura CD con la circunferencia en el punto interior del triángulo. Los ángulos $\angle ACD$ y $\angle DCB$ son congruentes (argumente) y tienen medida $\pi/6$ (puesto que el triángulo es equilátero y cada ángulo mide $\pi/3$). Dado que el ángulo $\angle CPO$ es recto por construcción y $m\angle ACP' = \pi/6$,

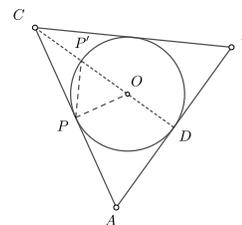


Figura 92: Figura del problema 9

dado que $\angle ACP' \cong \angle ACD$. Entonces como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es π se tiene que $m\angle POC = \pi - \pi/6 - \pi/2 = \pi/3$. Por otra parte, puesto que $OP \cong OP'$, por ser ambos radios de la circunferencia, entonces $m\angle OPP' = m\angle OP'P$ (por ser ángulos opuestos a lados congruentes en un triángulo). Entonces

$$\begin{aligned}\pi &= m\angle POP' + m\angle OPP' + m\angle OP'P \\ &= \pi/3 + 2m\angle OPP',\end{aligned}$$

de donde $m\angle OPP' = 1/2(\pi - \pi/3) = \pi/3$. Y así $m\angle OP'P = \pi/3$ y por lo tanto el triángulo $\triangle OP'P$ es equilátero dado que sus tres ángulos miden $\pi/3$ (a ángulos congruentes se oponen lados congruentes), es decir $PP' \cong OP$ es decir PP' mide lo mismo que el radio de la circunferencia.

Finalmente, el triángulo $\triangle PP'C$ es isósceles con $P'C \cong OP$, es decir $P'C$ mide también lo mismo que un radio. Efectivamente, $m\angle CPP' = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6 = m\angle P'CP$ y por el teorema de Tales $m(P'C) = m(PP')$. Se concluye que la altura del triángulo CD mide $m(OD) + m(OP') + m(P'C) = 3m(OP)$ como se desea mostrar. \square

Solución del problema 10 En una circunferencia o en circunferencias congruentes, secantes congruentes son subtendidas por ángulos centrales congruentes y recíprocamente, ángulos centrales congruentes determinan secantes congruentes.

Solución. En una circunferencia con centro en O , sean dos cuerdas congruentes AB y CD como en la Figura 93. Los triángulos $\triangle ABO$ y $\triangle CDO$ son congruentes, por tener tres lados en correspondencia congruentes. Por lo tanto $\angle BOA \cong \angle DOC$, por ser ángulos en correspondencia de triángulos congruentes.

Por otra parte dados dos ángulos centrales congruentes $\angle BOA \cong \angle DOC$ puesto que las intersecciones de tales ángulos con la circunferencia forman triángulos con dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre tales lados congruente (por hipótesis), se sigue del Postulado IV [LAL] que los triángulos son congruentes y por lo tanto las cuerdas determinadas por los ángulos son congruentes por ser lados en correspondencia de triángulos congruentes. \square

Solución del problema 11. Dada la circunferencia, construya una secante cualquiera. Por el punto medio de la secante construya la recta perpendicular. Encuentre el punto medio del segmento de la perpendicular dentro de la circunferencia. Tal punto medio es el centro de la circunferencia. Justifique cada paso.

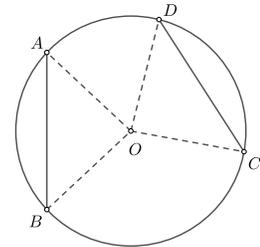


Figura 93: Figura del problema 10

Teoremas de Menelao y Ceva

Los teoremas que veremos en este capítulo son el primer paso a la geometría proyectiva y constituyen una aplicación notable de los teoremas de semejanza.

De aquí en adelante, la semejanza de los triángulos, por ejemplo, $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ será denotada

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Llamaremos al punto de intersección de una recta con una perpendicular *pie de la perpendicular*.

Teorema [Menelao sin signo²⁵]. Una recta interseca los tres lados AB , BC y CA de un triángulo $\triangle ABC$, o sus prolongaciones, en los puntos C' , A' y B' respectivamente, si y solo si

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(A'B)}{m(A'C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} = 1.$$

Demostración. Sea P el pie de la perpendicular bajada de B a la recta $C'B'$ y sea Q el pie de la perpendicular bajada de A a la misma recta. Así, dado que los triángulos formados son rectángulos con un par de ángulos opuestos por el vértice tenemos (ver Figura 95),

$$\begin{aligned} \triangle PBC' &\sim \triangle QAC', \\ \frac{m(AC')}{m(BC')} &= \frac{m(AQ)}{m(BP)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Similarmente, sea R el pie de la perpendicular bajada de C a la recta $B'A'$ (ver Figura 96), entonces dado que los triángulos son rectángulos y, además, tienen un ángulo común,

$$\begin{aligned} \triangle BA'P &\sim \triangle CA'R, \\ \frac{m(A'B)}{m(A'C)} &= \frac{m(BP)}{m(CR)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, también tenemos que (ver Figura 97)

$$\begin{aligned} \triangle AQB' &\sim \triangle CRB', \\ \frac{m(CB')}{m(AB')} &= \frac{m(CR)}{m(AQ)}. \end{aligned} \quad (16)$$

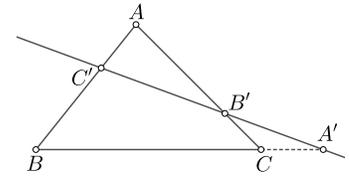


Figura 94: Teorema de Menelao.

²⁵ Los teoremas con signo se demuestran en el capítulo de geometría afín.

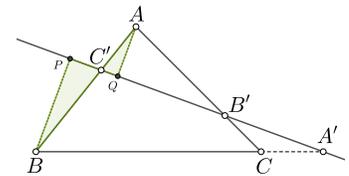


Figura 95: Se tiene $\triangle PBC' \sim \triangle QAC'$.

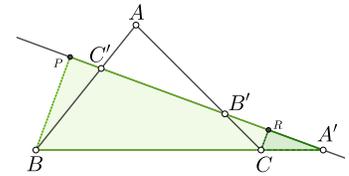


Figura 96: Ahora $\triangle BA'P \sim \triangle CA'R$.

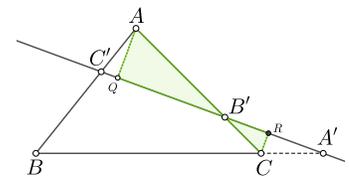


Figura 97: Además, $\triangle AQB' \sim \triangle CRB'$

Al multiplicar las cantidades del lado derecho de (14), (15), (16) e igualarlas con la multiplicación de las cantidades del lado izquierdo de las mismas ecuaciones se obtiene la igualdad a 1, mediante la cancelación de todas las cantidades del lado derecho, que es lo que afirma la primera parte del teorema de Menelao sin signo²⁶.

Para demostrar el recíproco, supongamos en el $\triangle ABC$ se tienen los puntos C' , A' y B' , en los lados o prolongaciones de los lados AB , BC y CA tales que se cumple

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(A'B)}{m(A'C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} = 1.$$

Se desea demostrar que los puntos C' , A' y B' son colineales. Se considera la recta que pasa por $C'B'$, sea A'' la intersección de tal recta con BC o la prolongación de BC . Entonces por el teorema de Menelao

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(A''B)}{m(A''C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} = 1 \tag{17}$$

Al igualar las dos ecuaciones anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(A''B)}{m(A''C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} &= \frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(A'B)}{m(A'C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} \\ \frac{m(A''B)}{m(A''C)} &= \frac{m(A'B)}{m(A'C)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Con la ecuación (18) se demuestra fácilmente que $A' = A''$ mediante el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}] y la demostración se deja como ejercicio. \square

Teorema [Ceva sin signo]. Considere las tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo $\triangle ABC$, pero que no coinciden con ninguno de los lados del triángulo. Sean A' , B' , y C' las intersecciones de tales rectas con los lados opuestos a los lados respectivos. Entonces las rectas concurren en un punto O , si y solo si

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(BA')}{m(A'C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} = 1. \tag{19}$$

Demostración. Se traza una recta paralela a uno de los lados, por ejemplo a BC , y se prolongan los lados CC' y BB' hasta cortar la paralela en los puntos C'' y B'' , respectivamente.

Considere los triángulos $\triangle C''OA$ y $\triangle COA'$, los cuales son semejantes ya que con vértice en O tienen un ángulo opuesto por el vértice, además, dado que BC es paralela a $B''C''$, tenemos $\angle OAC'' \cong \angle OA'C$. Obtenemos así que

$$\frac{m(OA')}{m(A'C)} = \frac{m(OA)}{m(AC'')} \tag{20}$$

²⁶ En este capítulo no usamos proporciones con signo, por lo que no aparecen cantidades negativas. El teorema de Menelao con signo se estudia más adelante.

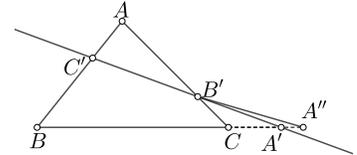


Figura 98: Recíproco del teorema de Menelao. Sea A'' tal que se cumple (17).

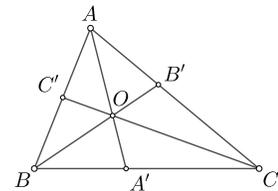


Figura 99: Las rectas AA' , BB' , CC' se cortan en un punto O , si y solo si se cumple (19).

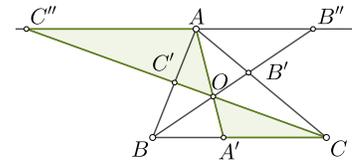


Figura 100: Se tiene, $\triangle C''OA \sim \triangle COA'$, por construcción.

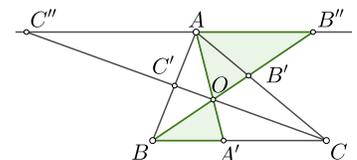


Figura 101: También se tiene, $\triangle OBA' \sim \triangle OB''A$, por construcción.

Por otra parte, si consideramos los triángulos $\triangle OBA'$ y $\triangle OB''A$, que también son semejantes (Figura 101), tenemos

$$\frac{m(BA')}{m(A'O)} = \frac{m(B''A)}{m(AO)}. \quad (21)$$

Además, $\triangle AB'B'' \sim \triangle BCB'$ (Figura 102) y, finalmente, $\triangle C''C'A \sim \triangle CC'B$ (Figura 103), por lo que se tiene

$$\frac{m(CB')}{m(AB')} = \frac{m(BC)}{m(AB'')} \quad (22)$$

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} = \frac{m(AC'')}{m(BC)}. \quad (23)$$

Al multiplicar todos los lados derechos de (20), (21), (22) y (23), entre sí, y respectivamente todos los lados izquierdos entre sí, obtenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{m(OA')}{m(A'C)} \cdot \frac{m(BA')}{m(A'O)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} \cdot \frac{m(AC')}{m(BC')} = \\ &= \frac{m(OA)}{m(AC'')} \cdot \frac{m(B''A)}{m(AO)} \cdot \frac{m(BC)}{m(AB'')} \cdot \frac{m(AC'')}{m(BC)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Cancelando los inversos

$$\frac{m(BA')}{m(A'C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} \cdot \frac{m(AC')}{m(BC')} = 1. \quad (25)$$

Reordenando términos se llega de (25) a (19).

Para demostrar el recíproco, supongamos que A' , B' y C' son tres puntos en los lados BC , CA y AB respectivamente que satisfacen (19). Sea O la intersección de BB' y CC' . Por AO construya una recta y sea A'' la intersección de tal recta con BC (Figura 104).

Dado que

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(BA'')}{m(A''C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} = 1$$

y puesto que A' , B' , C' , satisfacen la parte del teorema que ya demostramos

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(BA'')}{m(A''C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')} = \frac{m(AC')}{m(BC')} \cdot \frac{m(BA')}{m(A'C)} \cdot \frac{m(CB')}{m(AB')}$$

Simplificando,

$$\frac{m(BA'')}{m(A''C)} = \frac{m(BA')}{m(A'C)}. \quad (26)$$

De la ecuación (26) se sigue fácilmente que $A' = A''$ mediante el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}] y la demostración se deja como ejercicio. \square

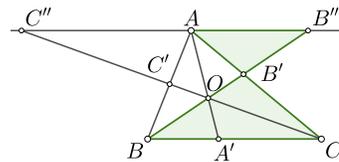


Figura 102: También, $\triangle CB'B \sim \triangle AB'B''$.

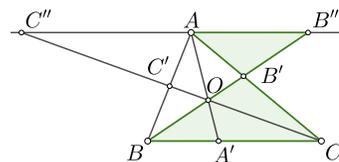


Figura 103: Además, $\triangle C''C'A \sim \triangle CC'B$.

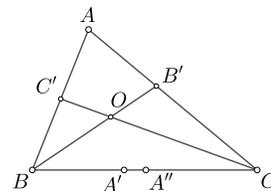


Figura 104: A' , B' y C' son tres puntos en los lados BC , CA y AB respectivamente que satisfacen (19). Sea O la intersección de BB' y CC' . Por AO construya una recta y sea A'' la intersección de tal recta con BC .

Conclusión

Los teoremas de Ceva y Menelao demostrados en este capítulo son, junto con la trigonometría, el *non plus ultra* de las aplicaciones de triángulos semejantes. Sin embargo, versiones más refinadas de estos teoremas se verán en capítulos posteriores, donde se nombran como teoremas de Menelao y Ceva *con signo*.

Problemas y ejercicios de los teoremas de Menelao y Ceva

1. En la demostración " \implies " del Teorema de Menelao se afirma que

$$\triangle PBC' \sim \triangle QAC',$$

dado que tienen un par de ángulos opuestos por el vértice (ver Figura 95). Dé las razones de esta argumentación citando exactamente los teoremas o postulados que se utilizan. También se afirma que

$$\frac{m(AC')}{m(BC')} = \frac{m(AQ)}{m(BP)}.$$

Dé la razón de esta afirmación.

2. En la demostración " \impliedby " del Teorema de Menelao (ver Figura 98) se afirma que $\triangle CA'B' \cong \triangle CA''B'$ (Teorema III [LLL]) y por lo tanto A' es el mismo punto que A'' . Dé las razones de esta afirmación.
3. Reescriba la demostración del Teorema de Menelao tomando en cuenta las observaciones de los ejercicios 1 y 2.
4. En la demostración del Teorema de Ceva (ver Figura 100) se afirma que $\triangle C''OA \sim \triangle COA'$, por construcción. Justifique esta afirmación y dé las razones exactas.
5. En la última parte de la demostración del Teorema de Ceva se afirma que los triángulos $\triangle AA'C$ y $\triangle AA''C$ (Figura 104) serían congruentes con el ángulo común $\angle C$ y por lo tanto A' es el mismo A'' . De las razones para que esta argumentación sea válida.
6. Considere los ejercicios 4 y 5, para reescribir la demostración del Teorema de Ceva en forma de tabla.

7. En la Figura 105 se muestran los segmentos M_1C y M_2B los cuales se llaman *medias* de un triángulo $\triangle ABC$. Use las marcas en los segmentos para definir *mediana de un triángulo*.
8. Mediante la definición que obtenga en el ejercicio 7 use el Teorema de Ceva o Menelao (el que se aplique mejor) para demostrar que las tres medianas de un triángulo son concurrentes²⁷. No olvide que su demostración debe estar en cada paso justificada con razones.

Sugerencia. No olvide apoyarse en un dibujo que contenga las *tres medianas*.

9. En la Figura 106, las rectas que pasan por los puntos B , B_2 y C , B_1 , respectivamente, son *bisectrices* de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$. Use que $\angle ACB_1 \cong \angle B_1CB$ y $\angle ABB_2 \cong \angle B_2BC$, para definir *bisectriz*. Note que los segmentos AB_1 y B_1B **no son congruentes** en general.

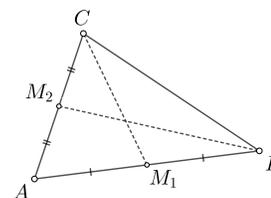


Figura 105: Los segmentos M_1C y M_2B son medianas del triángulo $\triangle ABC$.

²⁷ Las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado *baricentro*.

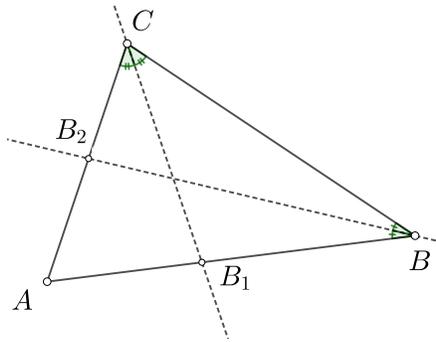


Figura 106: Las rectas que pasan por los puntos B_2 y C_1 son bisectrices de los ángulos del triángulo $\triangle ABC$.

10. Use la definición que obtuvo en el ejercicio 9, también teoremas de triángulos semejantes para demostrar que las tres bisectrices de un triángulo son concurrentes²⁸. La demostración debe estar en forma de tabla.

Sugerencia. No olvide apoyarse en un dibujo que contenga las tres bisectrices.

11. En la Figura 107 se muestran dos mediatrices del $\triangle ABC$. Las mediatrices son las rectas que cortan perpendicularmente los segmentos AB y AC . Defina *mediatriz*.
12. Use la definición que obtenga en el ejercicio 11 para demostrar que las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes²⁹.

Sugerencia. ¿Se pueden usar los teoremas vistos en este capítulo para demostrar la proposición anterior? Recuerde el teorema del bisector perpendicular.

²⁸ Las bisectrices de un triángulo concurren en un punto llamado *incentro*.

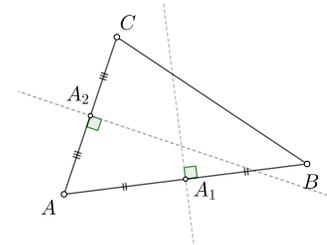


Figura 107: Las rectas que cortan perpendicularmente los segmentos AB y AC son mediatrices de los lados del triángulo $\triangle ABC$.

²⁹ Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto llamado *circuncentro*.

13. En la Figura 108 los segmentos H_1B y H_2C son alturas del triángulo $\triangle ABC$. En general se le llama altura a la *longitud del segmento del mismo nombre*.

- a) Defina *altura de un triángulo*.
- b) Demuestre que las rectas que contienen a las tres alturas de un triángulo concurren en un punto. A dicho punto de concurrencia se le llama *ortocentro* del triángulo.

14. Se define la *base de un triángulo isósceles* como el lado no congruente con los otros lados del triángulo. Demuestre que la altura sobre la base de un triángulo isósceles es mediana y bisectriz de dicho triángulo.

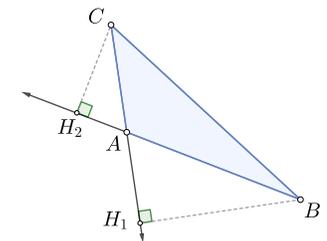


Figura 108: Alturas de un triángulo.

15. Demuestre que existe una circunferencia con centro O , en el circuncentro de un triángulo que pasa por los tres vértices del mismo (Figura 109).

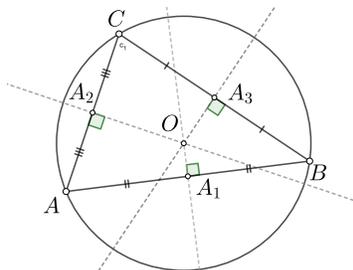


Figura 109: Existe una circunferencia con centro en el circuncentro de un triángulo que pasa por los tres vértices del triángulo.

16. Demuestre que de la relación (18) se sigue que $A' = A''$ en el teorema de Menelao
17. Demuestre que si en un segmento se cumple la relación (26) entonces $A' = A''$ y con ello queda demostrado el recíproco del teorema de Ceva.

Respuestas a los problemas seleccionados del capítulo "Teoremas de Menelao y Ceva"

Ejercicio 7. Se define *mediana* de un triángulo como el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto al vértice.

Ejercicio 8. Con la notación de la Figura 110, se tiene $m(CM_2) = m(M_2A)$, $m(AM_1) = m(M_1B)$ y $m(BM_3) = m(M_3C)$, de donde se cumple la ecuación (19).

Ejercicio 16. Por el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}] podemos poner a los puntos B y C en correspondencia con los números 0 y l , respectivamente, y también con A' y A'' , los números x y y . Entonces la ecuación (18) se puede escribir como:

$$\frac{y}{y-l} = \frac{x}{x-l'}$$

de donde $y(x-l) = x(y-l)$ y así $yl = xl$ y como $l \neq 0$ (ya que $B \neq C$), se concluye $x = y$ y por ello, $A' = A''$ como se desea demostrar. \square

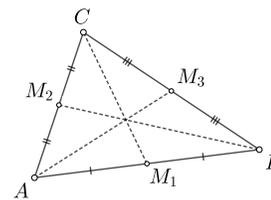


Figura 110: Los segmentos M_1C y M_2B son *medianaes* del triángulo $\triangle ABC$.

Construcción del plano cartesiano y Trigonometría

Con todos los resultados de geometría obtenidos hasta ahora tenemos una buena fundamentación para construir el plano cartesiano que es donde se desarrolla la geometría analítica plana. A tal labor dedicaremos parte de este capítulo.

Entre estos resultados que tenemos esta la existencia de una perpendicular a una recta dada dada por el Teorema VI, la existencia de paralelas dada por el Teorema VIII y el teorema de Pitágoras, además usaremos el Postulado I de correspondencia entre las rectas y \mathbb{R} . Para construir la trigonometría usaremos todos los teoremas de semejanza de triángulos, en particular los teoremas relativos a triángulos rectángulos.

Aquí cabe una advertencia para el lector con conocimientos de teoría de conjuntos. Nuestra aproximación no parte de la definición conjuntista de producto cartesiano, sino al revés. De nuestra construcción puramente geométrica es posible definir el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, que es el espacio natural de la geometría plana desde el punto de vista del álgebra y la teoría de conjuntos.

Comenzamos con una definición, siguiendo a Birkhoff³⁰.

Definición [Sistema de paralelas]. Una colección de rectas paralelas a una recta dada ℓ , y por lo tanto paralelas entre sí, se llama *sistema de paralelas* y queda determinado por cualquiera de las líneas de la colección. Una y sólo una de las rectas del sistema pasa por cada punto dado del plano. Cada recta que no esté en este sistema se llama *transversal al sistema*.

Nota. Por supuesto, cada transversal a un sistema de paralelas interseca cada una de las rectas del sistema (¡ demuéstrelo si lo requiere!). Además, una recta perpendicular a una recta de un sistema de paralelas es claramente perpendicular a cada línea del sistema y cada par de rectas perpendiculares a un sistema, son paralelas entre sí.

Red rectangular

Establecida la definición de sistemas de paralelas obtenemos una *red rectangular* formada por un par de sistemas mutuamente perpendi-

³⁰ George B. Birkhoff. *A set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor*. *Annals of Mathematics*, Second Series. Vol. 33, No. 2 (Apr. 1932), pp. 329-345

culares en el cual, una y sólo una recta de cada sistema pasa por cada punto del plano. Por supuesto, cada red está determinada de manera única.

A partir del Teorema XII [Existencia de rectángulos], se puede dar una *dirección positiva* sobre las rectas de un sistema de paralelas, digamos, aquel obtenido asignando (por el Postulado I trasladando la numeración si fuera necesario) el mismo número x_R al punto R de ℓ a todos los puntos en correspondencia S sobre la intersección con cualquier otra recta m del sistema, es decir estableceremos $x_S = x_R$, como se muestra en la Figura 111. Establecido el sistema de rectas con una orientación, diremos que el sistema está orientado y nos referiremos a este como *sistema orientado*.

En esta etapa todos los teoremas concernientes a sistemas de paralelas pueden ser demostrados, por ejemplo, el hecho de que toda transversal dirigida interseca a un sistema de rectas paralelas en el mismo ángulo (definiendo ángulo entre rectas como el *ángulo agudo* formado por ellas). Todos los teoremas de paralelas se deducen de manera fácil a partir de este momento y se dejarán como ejercicio.

Coordenadas rectangulares

Se escogen una recta de un sistema de paralelas orientado que llamaremos x y otra recta de un sistema orientado perpendicular al primero que llamaremos y . Con ello, podemos definir las coordenadas rectangulares, con la siguiente construcción.

Sean ℓ y m un par de rectas perpendiculares de un par de sistemas de paralelas orientados perpendiculares entre sí. Se denota con O al punto de intersección de las rectas ℓ y m , al que llamaremos *origen de coordenadas*. A partir de las propiedades básicas de la distancia entre puntos se establece un sistema de numeración tal que en O los números correspondientes en cada recta sean 0, en cada una de ellas³¹. A cada punto P del plano se le asigna un par de números (x, y) , llamado *coordenadas rectangulares* de P (o simplemente coordenadas de P), determinadas por la perpendicular única p_x a ℓ y la perpendicular única p_y a m que pasan por P , donde x es el número asignado a la intersección de p_x y ℓ , y el número y está dado por la intersección de p_y y m .

Definición. [Coordenadas rectangulares]. El par (x, y) se llama coordenadas del punto P en el sistema determinado por las rectas ℓ y m , donde x, y , son los únicos números asignados a la intersección de las perpendiculares únicas $p_x \perp \ell$ y $p_y \perp m$, que pasan por P , respectivamente. A la recta ℓ , se le llama *eje x* o *eje de las abscisas*, y a la recta m , *eje y* o *eje de las ordenadas*. Dada la correspondencia biunívoca de todos los puntos P del plano $P \leftrightarrow (x, y)$, escribiremos $P = (x, y)$ para cada

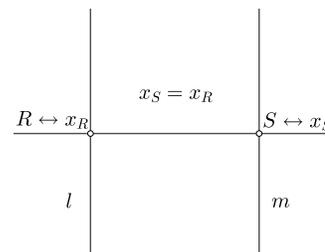


Figura 111: El número real x_R correspondiente al punto R se le asigna a todos los puntos sobre una perpendicular al sistema de paralelas representado por m por ejemplo, al punto S sobre m , le corresponde el número $x_S = x_R$.

³¹ Esto es posible, por la propiedad (3), de las propiedades básicas de la distancia entre puntos.

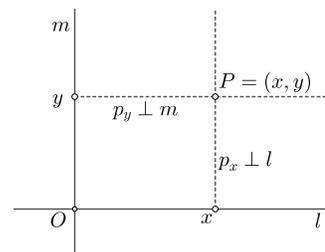


Figura 112: A cada punto P del plano se le asigna un par de números (x, y) , llamado *coordenadas rectangulares* de P determinadas por la perpendicular única p_x a ℓ y la perpendicular única p_y a m que pasan por P , donde x es el número asignado a la intersección de p_x y ℓ , y el número y está dado por la intersección de p_y y m .

punto del plano euclidiano.

Notas. Cabe hacer las siguientes precisiones:

- Claramente cada punto sobre el eje x tiene coordenadas de la forma $(x, 0)$ y cada punto sobre el eje y tiene coordenadas de la forma $(0, y)$. Al punto O le corresponde el par $(0, 0)$.
- La elección de las rectas ℓ y m de los sistemas de paralelas, así como lo sistemas de paralelas son totalmente arbitrarios, lo que permite hacer un cambio de selección de ejes a conveniencia discrecionalmente.
- La correspondencia biunívoca $P \leftrightarrow (x, y)$, atribuida a René Descartes, es el motivo por el cual al plano euclidiano con coordenadas se le llama plano cartesiano en honor al filósofo y matemático.
- Para los lectores avezados: La construcción del plano a partir del concepto de producto cartesiano ha constituido un ejemplo clásico de deslizamiento metacognitivo en la teoría de situaciones didácticas y con ello una distorsión en la enseñanza. Veamos, se define el *producto cartesiano* como el conjunto

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

donde $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, así se deduce $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$. Pero el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ¡no tiene geometría rectangular en absoluto! Para usar ejes rectangulares además del producto cartesiano se requiere introducirlos fuera del contexto de la teoría de conjuntos y aceptar la existencia de perpendiculares o introducir tal existencia como axioma. El caso extremo que evidencia el uso erróneo del producto cartesiano al usarlo solo como conjunto, se evidencia cuando el par de números (r, θ) denota un radio y un ángulo. Claramente el par (r, θ) está en \mathbb{R}^2 , aunque la interpretación geométrica de este par es radicalmente distinta a la de (x, y) .

Geometría Analítica

En el plano cartesiano con coordenadas rectangulares tenemos para los puntos $P_1 = (x_1, 0)$ y $P_2 = (x_2, 0)$ sobre el eje x que $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ de acuerdo con el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}]. Similarmente para puntos $P_1 = (0, y_1)$ y $P_2 = (0, y_2)$, sobre el eje y , $d(P_1, P_2) = |y_1 - y_2|$.

Con esta información, se sigue directamente del Teorema de Pitágoras la fórmula para la distancia entre dos puntos cualquiera $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}.$$

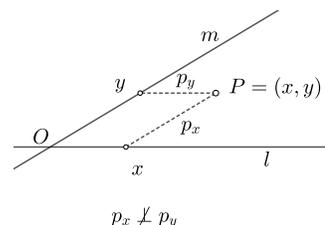


Figura 113: Es posible asignar a cada punto P del plano un par de números (x, y) aún cuando los ejes no son perpendiculares $\ell \not\perp m$, por lo que se requiere introducir geometría al conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, no basta el conjunto solamente.

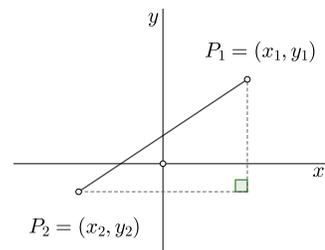


Figura 114: La fórmula de distancia entre dos puntos se sigue directamente del teorema de Pitágoras en sistema rectangular de coordenadas.

Claramente, dado que $|x| = \sqrt{x^2}$ se obtiene la fórmula estándar

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Conocida la fórmula de distancia entre dos puntos, puede encontrarse la ecuación que satisfacen todos los puntos de una circunferencia. Por ejemplo, para una circunferencia \mathcal{C} de radio r , con centro en $O = (0, 0)$, se tiene, de acuerdo con la definición de circunferencia

$$\mathcal{C} = \{P = (x, y) : d(O, P) = r\}$$

así

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ x^2 + y^2 &= r^2.\end{aligned}$$

La última ecuación se conoce como ecuación de la circunferencia con radio r y centro en el origen de coordenadas. Llegamos de esta manera a la *esencia de la geometría analítica plana*, esencia que puede ser descrita como el establecimiento de correspondencias entre conjuntos de puntos que satisfacen ciertas ecuaciones y las curvas descritas dentro la axiomática de la geometría sintética. En el ejemplo de la circunferencia \mathcal{C} , se tiene la correspondencia

$$\text{Puntos que equidistan de un punto dado} \leftrightarrow \mathcal{C}.$$

La existencia de puntos que equidistan de un punto dado, está garantizada por el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}] mientras que la ecuación de la circunferencia solo es posible en un sistema de coordenadas cartesiano. Debe observarse que toda curva descrita en la geometría sintética le corresponde un conjunto de puntos que satisface una ecuación o sistema de ecuaciones. La evolución de las matemáticas a partir de esta concepción del plano euclidiano fue colosal y la discusión detallada de este tema constituye el objeto de estudio de la Geometría Analítica. El lector interesado puede ver, por ejemplo, el libro de mi autoría³².

De particular interés para nuestro estudio es la circunferencia de radio uno y centro en el origen de coordenadas denotada S^1 :

$$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

llamada *circunferencia unitaria*.

Intersección de rectas y circunferencias en el plano euclidiano

El problema principal de el sistema de axiomas de Euclides es que no puede deducirse de los postulados de esa teoría que dos objetos

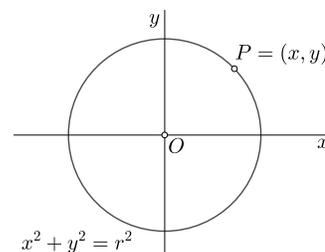


Figura 115: La esencia de la geometría analítica es poner curvas en correspondencia con ecuaciones. En este caso, con $\mathcal{C} = \{P = (x, y) : d(O, P) = r\}$ se tiene la correspondencia $\mathcal{C} \leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$.

³² Gabriel López Garza. *Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de TIC*. Textos CBI, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, 2021

que se crucen tengan un punto en común. Este problema no podía ni siquiera formularse en la época de Euclides, dado que no se conocían a profundidad las propiedades fundamentales de los números reales, propiedades que en la axiomática de Birkhoff están incorporadas en los Postulados I y III.

El problema real es un problema de *continuidad* ¿podrían cruzarse dos rectas no paralelas sin tener puntos en común? La respuesta es que si solo existieran los números racionales, sin los irracionales, algunas curvas se atravesarían sin cortarse. Pero recalamos que esto podría ocurrir si no se acepta la existencia de los números irracionales o, mejor, si *no se acepta el Axioma del Supremo de los Números Reales*.

Por ejemplo, la famosa demostración del Teorema Euclides I.1 que se trabajó en la sección de ejercicios. La argumentación tiene un defecto *un hueco (o gap)* ya que nada garantiza en el sistema de Euclides que las circunferencias tengan un punto en común, a pesar de que evidentemente se cruzan. En la axiomática de Euclides, dos curvas podrían cruzarse sin tener puntos en común. Recordemos lo que este teorema afirma: con un segmento dado se puede construir un triángulo equilátero sobre este.

La idea de Euclides se puede formular como sigue: si se tiene un segmento AB dado, con centro en A se construye una circunferencia de radio AB . Posteriormente, con centro en B se construye una circunferencia con el mismo radio que la anterior. Si es C cualquier punto de intersección de las circunferencias. El triángulo $\triangle ABC$ sería equilátero. El problema es que en el sistema de Euclides ¡nada implica que tal punto C exista! Sin embargo, en el plano cartesiano si podemos garantizar la existencia de C , como veremos. Primero partiendo del plano cartesiano introducimos las siguientes proposiciones.

Proposición [Ecuaciones de Rectas en \mathbb{R}^2]. En el plano cartesiano rectangular \mathbb{R}^2 , una recta es el conjunto de todos los puntos (x, y) para los cuales existen números A, B y C , con al menos uno de los coeficientes A, B , distinto de cero tales que

$$Ax + By + C = 0.$$

Demostración. Los puntos que satisfacen la ecuación deben cumplir con el Postulado II [Dos puntos definen una recta] de Birkhoff. Sean $P = (x_0, y_0)$ y $Q = (x_1, y_1)$ dos puntos distintos que están en la recta $Ax + By + C = 0$. Supongamos para comenzar que $A, B \neq 0$, entonces se debe tener,

$$Ax_0 + By_0 = -C$$

$$Ax_1 + By_1 = -C$$

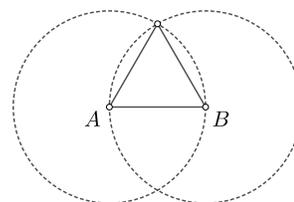


Figura 116: El segmento AB está dado, se construye un triángulo equilátero sobre este auxiliándose con dos circunferencias. A pesar de que las circunferencias se cruzan, el sistema de Euclides *no garantiza* que tengan puntos en común. Se requiere para ello el Axioma del supremo de \mathbb{R} o algún postulado equivalente.

Y al restar ambas ecuaciones

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = 0.$$

Supongamos que P y Q satisfacen otra ecuación $A'x + B'y + C' = 0$ y que no existe k tal que $A' = kA$, $B' = kB$ y $C' = kC$, es decir los dos puntos satisfacen dos ecuaciones distintas. Definimos $\alpha = x_0 - x_1$ y $\beta = y_0 - y_1$, entonces se debe tener

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B &= 0 \\ \alpha A' + \beta B' &= 0.\end{aligned}$$

Pero entonces se debe tener $AB' - A'B = 0$, ya que si $AB' - A'B \neq 0$, por la regla de Kramer, tendríamos $\alpha = x_0 - x_1 = 0$ y $\beta = y_0 - y_1 = 0$, lo que no es posible por hipótesis. De esta forma

$$\begin{aligned}AB' - A'B = 0 &\Leftrightarrow AB' = A'B \\ &\Leftrightarrow B' = \frac{A'}{A}B = kB,\end{aligned}$$

donde $k = A'/A$, lo cual es una contradicción con nuestra suposición de que las rectas son distintas ya que tendríamos $A' = kA$, $B' = kB$ y entonces

$$-kC = kAx_0 + kB y_0 = A'x_0 + B'y_0 = -C'$$

lo cual es una contradicción. Los casos en los que $A = 0$ o $B = 0$ se dejan como ejercicio.

Por otra parte, consideramos el caso $x_1 - x_0 \neq 0$. Se define $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.

Entonces todos los puntos (x, y) , tales que $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$, satisfacen una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde $A = -m$, $B = 1$ y $C = mx_0 - y_0$, y por lo tanto están en una recta. El caso $x_1 - x_0 = 0$ se deja como ejercicio. \square

El número m en la demostración anterior se llama pendiente de una recta. Se puede demostrar (y se debe hacer en un curso de geometría analítica) que dos rectas distintas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. Dos rectas no paralelas deben tener un punto en común, es decir, si se tienen dos rectas distintas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ que no son paralelas, existe un único $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, que satisface ambas ecuaciones. En efecto el sistema

$$\begin{aligned}y = m_1x + b_1 &\Leftrightarrow y - m_1x = b_1 \\ y = m_2x + b_2 &\Leftrightarrow y - m_2x = b_2.\end{aligned}$$

Tiene solución única, por la regla de Kramer, dado que el determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & -m_1 \\ 1 & -m_2 \end{vmatrix} = m_1 - m_2 \neq 0.$$

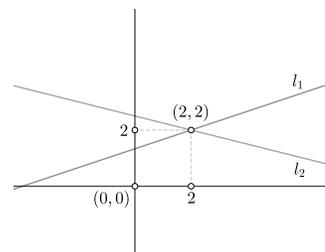


Figura 117: Dos rectas distintas no paralelas cualquiera l_1, l_2 en \mathbb{R}^2 , necesariamente tienen un punto $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ en común.

Por lo tanto existe un único $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ que satisface ambas ecuaciones. \square

Nota. Entonces según el resultado anterior, claramente dos rectas distintas no paralelas en el plano \mathbb{R}^2 no pueden atravesarse sin tener un punto en común, lo cual *no puede deducirse en el sistema axiomático de Euclides* salvo en algunos casos y por este motivo, por ejemplo, tuvo que ser incluido el axioma de Pasch en el siglo XIX en la axiomática de Euclides.

Esta sección tiene solo un carácter ilustrativo por lo que no trataremos todas las posibilidades de intersecciones entre circunferencias y rectas, ni circunferencias con circunferencias. Sin embargo podemos demostrar que las circunferencias de la demostración del Teorema Euclides I.1 tienen dos puntos en común, como ejemplo de las posibilidades del sistema cartesiano.

Lema [Circunferencias de Euclides se cortan en \mathbb{R}^2]. Dada una circunferencia cualquiera, si se traza otra circunferencia con centro situado sobre un punto de la primera circunferencia y con radio igual al de la primera, las circunferencias se cortan en dos puntos de \mathbb{R}^2 .

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que la primera circunferencia tiene ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y la segunda $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Ambas circunferencias cumplen con las hipótesis de la proposición (¿por qué?). Tenemos así el sistema

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\(x - r)^2 + y^2 &= r^2.\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\x^2 + y^2 - 2xr + r^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Al restar ambas ecuaciones se tiene que

$$2xr = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{r}{2}.$$

Al sustituir este valor de x en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ se llega a

$$\frac{r^2}{4} + y^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{3}{4}r^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}r.$$

Se tienen así las intersecciones $(r/2, \sqrt{3}/2r)$ y $(r/2, -\sqrt{3}/2r)$ para toda $r > 0$ en \mathbb{R} . \square

¿Podrían atravesarse las curvas sin tener puntos comunes?

Desde el punto de vista práctico, usando circunferencias que se obtienen con los trazos de un compás, resulta “evidente” que no es po-

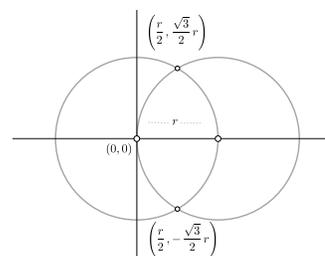


Figura 118: Dos circunferencias como las de la demostración del Teorema I.1 Euclides en \mathbb{R}^2 , se cortan en dos puntos.

sible que dos curvas se atravesen sin tener puntos en común. Basta dibujar las curvas para “ver” que tienen un punto en común, pero *esto es solo el error típico de confundir la representación de un objeto con el objeto mismo*. Habrían de pasar más de veinte siglos, hasta la formalización de los números reales, para que se revelara que no hay nada evidente, que la existencia de puntos comunes no se deduce de los postulados ni axiomas de Euclides y que esto no es en absoluto un problema trivial. Tampoco es trivial el axioma del supremo de \mathbb{R} y sus consecuencias, con lo que subsana este hueco en la teoría. El axioma del supremo, entre otras cosas, garantiza la existencia de los números irracionales en \mathbb{R} y con ello las curvas en \mathbb{R}^2 no pueden atravesarse sin tener puntos en común. Mostraremos con un ejemplo que si no existieran los números irracionales, una recta podría atravesar la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ ¡sin tocarla! El ejemplo que presentaré a continuación, es mi versión del presentado en el libro de Havil ³³.

Contraejemplo. Si no existieran los números irracionales, la recta $y = x$ atravesaría la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, pero no tendrían puntos en común.

Claramente al sustituir $y = x$ en la ecuación de la circunferencia tenemos

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 &= 3 \\2x^2 &= 3 \\x &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

De aquí tenemos que $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ y los puntos de intersección serían $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Ambos puntos son irracionales y por lo tanto la recta y la circunferencia *no tendrían puntos en común*, si no existieran los irracionales. \square

Finalmente, el hecho de que $\sqrt{3/2}$ es irracional es consecuencia del teorema tomado del libro de Niven ³⁴:

Teorema [Irracionales elementales]. Si un número real x satisface una ecuación de la forma

$$x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad n > 1,$$

con coeficientes números enteros, entonces o bien x es un número entero o bien es un número irracional.

Demostración. Supongamos que $x = \frac{a}{b}$, con 1 como máximo común divisor de a y b . Se debe tener entonces

$$a^n = -b(c_1a^{n-1} + c_2a^{n-2}b + \dots + c_nb^{n-1}).$$

³³ Julian Havil. *The Irrationals. A Story of the Numbers You Can't Count On*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2012

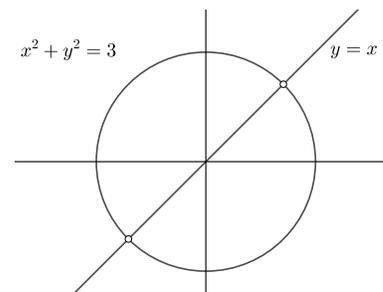


Figura 119: Si el lector no cree en la existencia de los números irracionales, entonces la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ y la recta $y = x$, se atravesan, pero no tienen puntos comunes.

³⁴ Ivan Niven. *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America, 1956

Se denota $(a, b) = 1$ cuando el máximo común divisor de a y b es 1.

Si $b > 1$, entonces todo divisor primo p de b debe dividir a^n por el teorema fundamental de la aritmética. Pero esto contradice la condición $(a, b) = 1$, así $b = 1$, lo que establece que x si es racional es un entero. \square

Con el teorema anterior, dado que $\sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2$ y dado que $\sqrt{6}$ satisface la ecuación $x^2 - 6 = 0$, se concluye que $x = \sqrt{6}$ es irracional puesto que x no es entero. Por lo tanto $\sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2$ es irracional.

La circunferencia $x^2 + y^2 = 3$ no existe

Si el lector quedo atrapado con el título amarillista de esta sección, habrá cumplido su objetivo de llamar la atención. Pero ahora, debemos decir más honestamente que la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$, *no existiría si no existieran los números irracionales*, como se muestra en la proposición siguiente, pero antes de estudiar este tema se requiere una definición.

Definición [Punto racional]. Un punto racional en \mathbb{R}^2 es un punto cuyas coordenadas son racionales, es decir sus coordenadas son de la forma $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ con $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $q, s \neq 0$.

Con la anterior definición podemos establecer el sorprendente lema siguiente.

Proposición [Circunferencia sin puntos racionales]. La circunferencia

$$x^2 + y^2 = 3$$

no tiene puntos racionales.

Demostración. Supongamos que un punto racional $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} + \frac{r^2}{s^2} = 3 &\Leftrightarrow p^2s^2 + q^2r^2 = 3q^2s^2 \\ &\Leftrightarrow (ps)^2 + (qr)^2 = 3(qs)^2. \end{aligned}$$

Se concluye la existencia de enteros $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que

$$a^2 + b^2 = 3c^2, \tag{27}$$

lo cual *no es posible*, como veremos.

Dado que la suma de dos números pares es par y la suma de dos impares también es par, debe ocurrir en (27) que a^2 o bien b^2 sea impar, Supongamos $a = 2m$ y que $b = 2n + 1$ (suponemos que a es par y que b es impar ya que al elevarlos al cuadrado cada uno es respectivamente

Teorema fundamental de la aritmética. Todo entero positivo excepto 1 puede ser escrito como producto de factores primos de manera única exceptuando el orden de los factores.

No hay que olvidar que el Postulado III de Euclides garantiza la existencia de la circunferencia de radio 3.

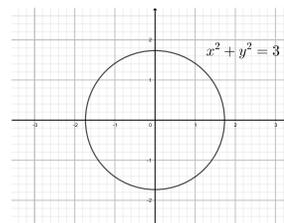


Figura 120: Si el lector no cree en la existencia de los números irracionales no tiene derecho a graficar la circunferencia de la figura, ya que ¡no tendría puntos!

par e impar). Tenemos así

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4(m^2 + n^2 + n) + 1 \\ &= 4N + 1 \\ &= 3c^2, \end{aligned}$$

donde $N \in \mathbb{N}$. Entonces c puede escribirse en una de las siguientes formas

$$c = 4M, 4M + 1, 4M + 2, 4M + 3,$$

es decir, si se divide c por 4 debe dejar residuo 0 o 1 o 2 o 3, por lo que al elevar cada caso al cuadrado respectivamente da las posibilidades

$$c^2 = 4N, 4N + 1, 4N, 4N + 1.$$

El lector debe verificar que las formas anteriores son las únicas posibles y que por lo tanto se tienen los siguientes casos respectivos al multiplicar por 3:

$$3c^2 = 4N', 4N' + 3, 4N', 4N' + 3.$$

Pero se debería tener también $3c^2 = 4N' + 1 = 2S + 1$ para algún S . Es decir, se debe tener la posibilidad de que $3c^2$ sea impar, con lo que se tiene una contradicción. \square

Como lo comenta Havil (*op. cit.* p. 80) el teorema de Fermat, *suma de dos cuadrados*, da lugar a la existencia de infinitas circunferencias problemáticas, por lo que no sólo existe el ejemplo que mostramos.

Longitud de arco

Consideraremos ahora la posibilidad de aproximar la longitud de arco de la circunferencia unitaria. Tenemos ciertos elementos para realizarlo. Por el Teorema de Euclides I.1 (primer teorema del libro uno de los *Elementos* que puede verse y demostrarse en los ejercicios del capítulo “El camino más corto al teorema de Pitágoras”) podemos construir un triángulo equilátero por medio de dos circunferencias del mismo radio. Sea este radio $r = 1$, es decir, consideremos la circunferencia unitaria. Con el teorema de Tales podemos ver que los ángulos de un triángulo equilátero miden todos lo mismo (demuéstrello) y por lo tanto miden $\pi/3$ (por el Teorema IV, también debe poder demostrarlo). Esto nos indica que podemos inscribir un hexágono regular en la circunferencia con longitud de cada lado el radio de la circunferencia, en esta caso $r = 1$. Denotamos la longitud de la semicircunferencia unitaria por π (por el momento es sólo una notación). Entonces dado que la mitad del perímetro del hexágono queda inscrito en la semicircunferencia, podemos concluir que $3 < \pi$.

Teorema Suma de cuadrados de Fermat. Un entero positivo n , puede ser escrito como la suma de dos cuadrados si y solo si cada uno de sus factores primos de la forma $4k + 3$ ocurre como una potencia impar.

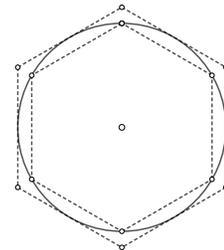


Figura 121: Hexágonos inscritos y circunscritos en la circunferencia unitaria dan un primera aproximación a la constante π .

Ahora, con el Teorema V [Bisector perpendicular] se puede bisectar cualquier lado del hexágono inscrito. Después, se puede encontrar con el Teorema VI [Perpendicular a una recta] la tangente a la circunferencia construyendo la perpendicular al bisector perpendicular (la cual es tangente a la circunferencia por el Teorema I-C). repitiendo el procedimiento anterior en cada lado del hexágono inscrito se construye un hexágono circunscrito que se muestra en la figura 121.

En realidad, para calcular las aproximaciones a π necesitamos sólo la mitad de las cuerdas y con ello introducimos triángulos rectángulos. En la figura 122 podemos ver la construcción requerida. El ángulo $\pi/3$ del hexágono se reduce a la mitad, es decir a $\pi/6$. Tenemos también los triángulos semejantes $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$. Además $m(OC) = m(OB) = 1$ por ser radios de la circunferencia y $m(AB) = 1/2$ ya que es la mitad de un lado del hexágono el cual mide 1, por el Teorema I.1, de los *Elementos* de Euclides. Por el Teorema de Pitágoras

$$m(OA) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por la semejanza de triángulos

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{m(AB)}{m(OA)} = \frac{m(CD)}{m(OC)} = m(CD).$$

Concluimos así que la longitud de un lado del hexágono circunscrito es de $2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$. Por lo tanto $\pi < 2\sqrt{3}$ (¿por qué?). Por lo tanto $3 < \pi < 3.4641$. El lector que no debe estar muy impresionado con este cálculo ³⁵, le podemos decir que, por supuesto, esto se puede mejorar rápidamente, conociendo las longitudes de las cuerdas de otros polígonos regulares. A esta actividad de calcular tamaños de cuerdas le dedicó algún tiempo Ptolomeo en el siglo II, al ser capaz de calcular primero la longitud de un lado de un decágono regular y posteriormente calcular la longitud de cuerdas equivalente a una tabla de senos para cada ángulo hasta 90° , en intervalos de un cuarto de grado. Claramente, el lector avezado habrá notado que

$$m(AB) = \sin(\pi/6)$$

$$m(CD) = \tan(\pi/6).$$

Por lo tanto, la medida de la cuerda que es el lado de un hexágono inscrito es $2 \cdot \sin(\pi/6)$ y la medida del lado del hexágono circunscrito es $2 \cdot \tan(\pi/6)$. Si construimos la figura geométrica de doce lados mediante la división de los lados del hexágono a la mitad se tiene una mejor estimación de π y prosiguiendo este método de división de lados se obtiene cada vez una mejor aproximación. A este método de aproximación, se le llama *método de exhaustión* y fue inventado

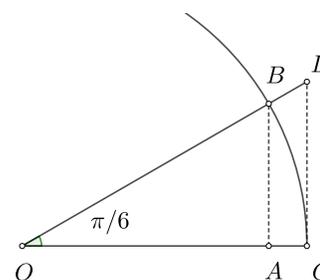


Figura 122: Para la medida de la longitud de un lado del hexágono circunscrito utilizamos triángulos semejantes.

³⁵ Para el lector impaciente damos las mil primeras cifras de pi: $\pi=3.14159265358979323846264338327$
 950288419716939937510582097494459230781
 6406286208998628034825342117067982148086
 513282306647093844609550582231
 7253594081284811174502841027019
 385211055596446229489549303819644288109
 756659334461284756482337867831652712019
 0914564856692346034861045432664
 82133936072602491412737245870066
 06315588174881520920962829254091715364
 367892590360011330530548820466521
 3841469519415116094330572703657595919
 53092186117381932611793105118548
 07446237996274956735188575272489122793
 818301194912983367336244065664308
 6021394946395224737190702179860943702
 7705392171762931767523846748184676694
 051320005681271452635608277857713
 427577896091736371787214684409012
 2495343014654958537105079227968925892
 354201995611212902196086403441815981
 3629774771309960518707211349999998
 37297804995105973173281609631859502
 44594553469083026425223082533446850
 352619311881710100031378387528865875
 3320838142061717766914730359825349
 04287554687311595628638823537875937
 51957781857780532171226806613001927
 876611195909216420199...

por Eudoxo. Para darnos una idea de las posibilidades del método de exhaustión usamos el cálculo de Ptolomeo para una cuerda de medio grado la cual equivale a la construcción de una figura de 720 lados, con lo que obtenemos $3.14155 < \pi < 3.14167$, lo cual es una sustancial mejora.

Puede demostrarse, por ejemplo por medio de las herramientas del cálculo diferencial, que π es una constante universal que aparece en el cálculo del perímetro \mathcal{P} de cualquier circunferencia de radio r y que $\mathcal{P} = 2\pi r$, y que además, el área \mathcal{A} de cualquier círculo está dada por $\mathcal{A} = \pi r^2$. Además, debemos mencionar que el número π es un número irracional, es decir, no es cociente de números enteros³⁶. Como consecuencia de no ser racional el desarrollo decimal de $\pi=3.1415926\dots$, no termina nunca, ni es periódico.

Trigonometría analítica

La idea central de la trigonometría es que, conocido un triángulo, pueden saberse las medidas de otro semejante sin medirlas directamente (como hicimos para el cálculo de la longitud del lado del hexágono circunscrito a la circunferencia unitaria), lo cual tiene infinitas aplicaciones en las ciencias y la ingeniería. El caso más simple de semejanza ocurre con los triángulos rectángulos como consecuencia del Teorema [AA]. Tal teorema es el sustento de toda la trigonometría en la antigüedad, sin embargo la generalización que se alcanza en la matemática moderna, no requiere de triángulos rectángulos como veremos a continuación.

Medida en radianes

Ahora estableceremos una correspondencia entre puntos de la circunferencia unitaria y la longitud correspondiente a partir del punto $(1,0)$ desde el cual comenzamos a medir (lo cual puede hacerse por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}]). Denotamos por θ las longitudes de arco de circunferencia. Se establece que las longitudes positivas $\theta > 0$, se miden a partir de $(1,0)$ en sentido contrario de las manecillas del reloj y que las longitudes negativas se miden a partir de $(1,0)$ al moverse en el sentido de las manecillas del reloj.

Al partir del punto $I = (1,0)$, cuando se llega al punto $J = (0,1)$ se habrá recorrido un cuarto de circunferencia con lo que a J le corresponde la longitud $\pi/2$. Al llegar al punto $(-1,0)$ habremos recorrido media circunferencia, por lo que a este punto le corresponde la longitud π (véase la figura 123). De esta misma manera al llegar al punto $(0,-1)$ habremos recorrido una circunferencia de $3/2\pi$. Al llegar al punto $(1,0)$ otra vez habremos recorrido una circunferencia completa

³⁶ El número π es todavía más complicado que los irracionales como $\sqrt{2}$, ya que además es un número trascendente. El lector interesado en este tema puede consultar el libro de Ivan Niven citado en la bibliografía.

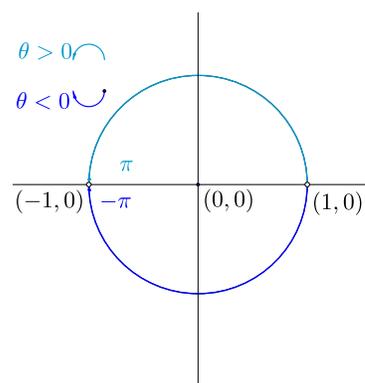


Figura 123: Descripción de los arcos orientados, positivos y negativos.

de longitud 2π . A los números reales puestos en correspondencia con el arco de la circunferencia unitaria se les llama *radianes*, por lo que al recorrer la circunferencia completa se habrán recorrido 2π radianes.

Si a partir de $(1,0)$ nos movemos en el sentido de las manecillas del reloj al llegar a $(-1,0)$ habremos recorrido una distancia de $-\pi$. De esta manera moviéndonos en el sentido de las manecillas del reloj al punto $(-1,0)$ le corresponde $-\pi$, etcétera. En general para cualquier número real θ , positivo, negativo o cero le corresponde un punto sobre la circunferencia unitaria. Si se piensa la longitud θ como un segmento o una cuerda, debe pensarse que al enrollar la cuerda sobre la circunferencia unitaria se encuentra el punto de coordenadas (x,y) al cual le corresponde a θ .

Las funciones trigonométricas

Definiremos ahora las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria. De esta forma, podremos extenderlas para todos los valores reales $\theta \in \mathbb{R}$, mientras que cuando se definen sólo para triángulos rectángulos, los valores que pueden tomar los ángulos se encuentran restringidos a $0 < \theta < \pi/2$.

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera, sea (x,y) el punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ al que le corresponde el arco de circunferencia θ . Se definen las funciones trigonométricas por medio de la fórmulas

$$\operatorname{sen} \theta \stackrel{\text{def}}{=} y \quad (28)$$

$$\operatorname{cos} \theta \stackrel{\text{def}}{=} x \quad (29)$$

$$\operatorname{tan} \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \quad (30)$$

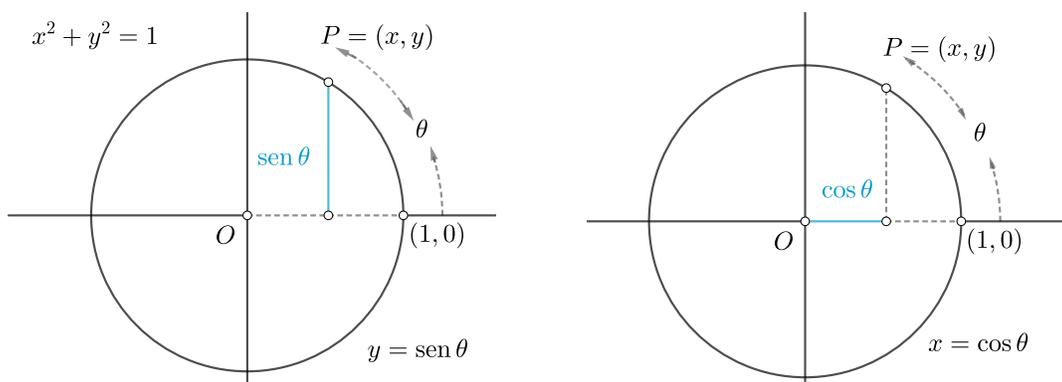


Figura 124: Definición de seno y coseno sobre el círculo unitario.

Gráfica de las funciones trigonométricas

En la Figura 125, podemos observar las semicuerdas asociadas a $\text{sen } \theta$. Del lado izquierdo sobre la circunferencia, partiendo del punto $(1, 0)$, tenemos $\theta = 0$ y por lo tanto $\text{sen } 0 = 0$.

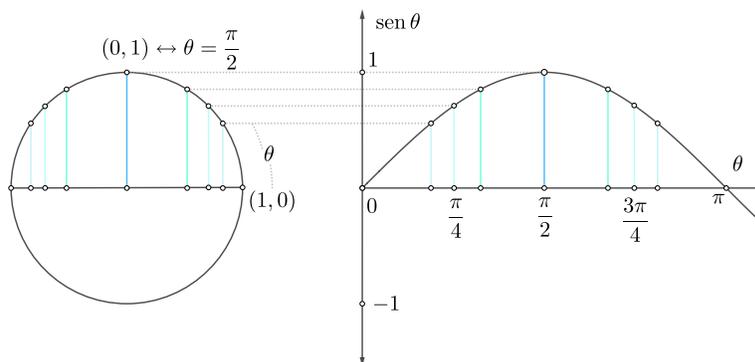


Figura 125: Gráfica de la función seno y su correspondencia con la circunferencia unitaria.

Si aumentamos θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, observamos que $\text{sen } \theta$ crece hasta llegar al máximo que es el radio de la circunferencia $r = 1$, lo cual ocurre en $\theta = \pi/2$. Por lo tanto $\text{sen } \pi/2 = 1$.

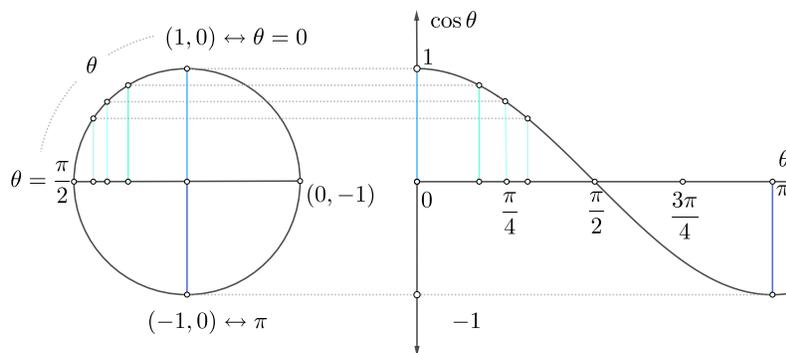


Figura 126: Gráfica de la función coseno y su correspondencia con la circunferencia unitaria. Observe que la circunferencia está rotada, de manera que el punto $(1, 0)$ está en la parte superior de la circunferencia a diferencia de la circunferencia de la figura anterior.

Para el coseno en la Figura 126, notamos que la circunferencia está rotada de tal forma que $(1, 0)$ aparece en la parte superior de la cir-

cunferencia, de manera diferente a la función seno. En este caso, para $\theta = 0$, tenemos $\cos 0 = 1$, lo que corresponde al radio de la circunferencia unitaria. Para el valor $\theta = \pi/2$, tenemos $\cos \pi/2 = 0$.

Periodicidad de las funciones trigonométricas

En la forma en que hemos construido las funciones trigonométricas, puede verse que después de recorrer una vuelta completa sobre la circunferencia, las funciones vuelven a tomar los mismos valores. De esta forma, para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad (31)$$

$$\text{sen}(\theta + 2\pi) = \text{sen } \theta. \quad (32)$$

Debido a esta propiedad se dice que *las funciones trigonométricas son periódicas* de periodo 2π . Al número 2π se le conoce como *periodo* de las funciones seno y coseno.

Funciones impares y pares

Podemos ver mediante un argumento geométrico simple sobre la circunferencia unitaria que para las funciones seno y coseno se cumple que

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta \quad (33)$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta. \quad (34)$$

Efectivamente en la siguiente figura puede observarse que $\text{sen}(-\theta)$ está por debajo del eje x y por lo tanto es negativo y de magnitud igual al $\text{sen } \theta$. Por otra parte se tiene que $\cos \theta$ y $\cos(-\theta)$ están del mismo lado del eje y y por lo tanto son ambos positivos y de la misma longitud.

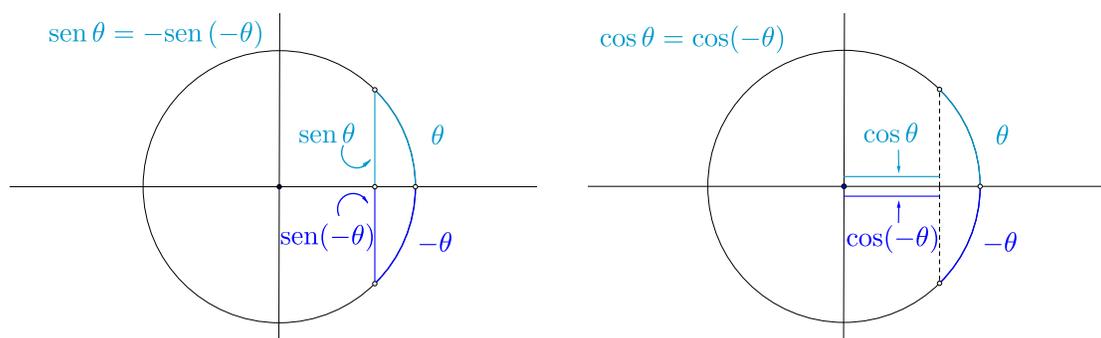


Figura 127: Identidades de paridad de las funciones seno y coseno.

Como $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen } \theta$ se dice que *la función seno es impar* y como $\cos(-\theta) = \cos \theta$ se dice que *la función coseno es par*. Las identidades

(33) y (34) se conocen como identidades de paridad de las funciones seno y coseno respectivamente y estas implican que

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta,$$

como puede fácilmente verificar el lector, lo cual quiere decir que la función tangente es impar.

Recíprocas de las funciones trigonométricas

Los inversos multiplicativos de las funciones trigonométricas definen las funciones, cosecante, secante y cotangente, respectivamente:

$$\begin{aligned} \csc \theta &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \\ \sec \theta &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \\ \cot \theta &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

Identidades trigonométricas

Al definir las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ se tiene que para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{cos} \theta$ y $y = \operatorname{sen} \theta$, de donde es inmediato³⁷ que

$$\operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1, \quad \text{para todo } \theta \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Nota. La notación $\operatorname{cos}^2 \theta$, recordamos, quiere decir que se eleva al cuadrado el coseno, es decir,

$$\operatorname{cos}^2 \theta = (\operatorname{cos} \theta)^2.$$

La notación $\operatorname{cos} \theta^2$ quiere decir que θ se eleva al cuadrado y después se toma el coseno. *Estas notaciones no deben confundirse por ningún motivo.*

El siguiente lema se deduce fácilmente de la identidad (35).

Lema I-T [Tangente al cuadrado]. Para los valores de θ , donde están definidas las funciones tangente y cotangente respectivamente, se cumplen las identidades

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad (36)$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta. \quad (37)$$

Demostración. Para $\theta \neq \pm(2n+1)\pi/2$ se sabe que $\operatorname{cos} \theta \neq 0$. Dividiendo ambos lados de la identidad (35) por $\operatorname{cos} \theta$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta} &= \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta} \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta, \end{aligned}$$

³⁷ La fórmula $\operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ es una expresión equivalente al teorema de Pitágoras para $\theta \neq m\pi/2$, $m \in \mathbb{Z}$.

Identidad de la tangente al cuadrado

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta.$$

donde la segunda identidad se obtiene de la definición de las recíprocas de las funciones trigonométricas. La segunda parte se deja como ejercicio. \square

Fórmulas de suma y diferencia de ángulos

La fórmula de distancia entre puntos es suficiente para demostrar las identidades trigonométricas para suma y diferencia de ángulos, las cuales aparecerán con frecuencia a lo largo de este libro. Primero demostramos la identidad para el coseno de una diferencia de ángulos.

Lema II-T [Coseno de diferencia de ángulos]. Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple la identidad

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \text{sen } u \text{sen } v. \quad (38)$$

Coseno de diferencia de ángulos

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \text{sen } u \text{sen } v.$$

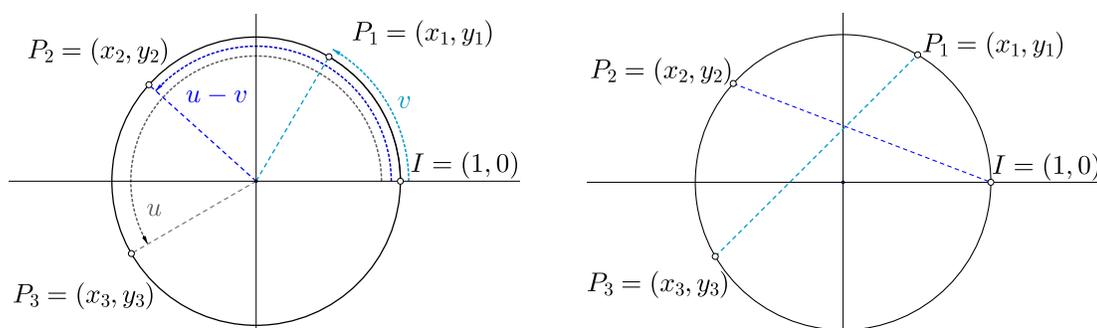


Figura 128: Diferencia de ángulos y arcos de circunferencia.

Demostración. Consideramos el caso $0 < v < u < 2\pi$. Denotamos con $I = (1, 0)$ el punto sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el cual se encuentra en la intersección con el semieje positivo x . Sea $P_1 = (x_1, y_1)$ el punto correspondiente al arco v , sea $P_3 = (x_3, y_3)$ el punto correspondiente al arco u y sea $P_2 = (x_2, y_2)$ el arco correspondiente a $u - v$. Por construcción, el arco IP_2 es igual al arco P_1P_3 , por lo tanto también se tiene que los segmentos IP_2 y P_1P_3 tienen la misma longitud (vea la sección de problemas sobre circunferencias), lo cual implica que

$$\sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

Al elevar al cuadrado y simplificar se tiene

$$\begin{aligned} x_2^2 - 2x_2 + 1 + y_2^2 &= x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_3 + y_1^2 \\ (x_2^2 + y_2^2) + 1 - 2x_2 &= (x_3^2 + y_3^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_3 - 2y_1y_3 \\ 1 + 1 - 2x_2 &= 1 + 1 - 2x_3x_1 - 2y_3y_1 \\ x_2 &= x_3x_1 + y_3y_1. \end{aligned}$$

Dado que estamos sobre la circunferencia unitaria $x_2 = \cos(u - v)$, $x_3 = \cos u$, $x_1 = \cos v$, $y_3 = \text{sen } u$ y $y_1 = \text{sen } v$, de donde se obtiene la identidad que se desea demostrar³⁸. \square

³⁸ La demostración fue tomada del libro de Cynthia Young, *Trigonometry*. Hoboken, N. J.: Wiley, 2007.

Cofunciones

Corolario I.1-T [Cofunciones]. Para toda $v \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\cos(v - \pi/2) = \operatorname{sen} v \quad (39)$$

$$\operatorname{sen}(v - \pi/2) = -\cos v. \quad (40)$$

Demostración. Aplicamos la fórmula (38) para obtener

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} v.$$

Ahora, dado que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ se obtiene

$$\cos(\pi/2 - v) = \operatorname{sen} v. \quad (41)$$

Finalmente, dado que la función coseno es par se tiene

$$\cos(\pi/2 - v) = \cos(-(v - \pi/2)) = \cos(v - \pi/2).$$

Para demostrar que $\operatorname{sen}(v - \pi/2) = -\cos v$, ponga $\operatorname{sen}(v - \pi/2) = \cos((v - \pi/2) - \pi/2)$, etcétera. \square

Nota. La identidad $\cos(v - \pi/2) = \operatorname{sen} v$ implica que las gráficas de las funciones coseno y seno son idénticas, si desplazamos el coseno $\pi/2$ unidades a la derecha. La función obtenida desplazando a una función conocida cierto número de unidades se le llama *co-función*, de donde proviene la palabra “coseno”.

A partir de aquí *el lector debe ser capaz de escribir las demostraciones por sí mismo* en forma detallada, en caso de dudas puede ver las demostraciones en la parte de la solución de ejercicios.

Corolario I.2-T [Coseno de suma de ángulos]. Para toda $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v. \quad (42)$$

Demostración. Escriba $u + v = u - (-v)$, use la fórmula (38) y las fórmulas de paridad de funciones trigonométricas. \square

Corolario I.3-T [Seno de suma de ángulos]. Para toda $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u, \quad (43)$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} v \cos u. \quad (44)$$

Demostración. Para demostrar (43), use la expresión

$$\operatorname{sen}(u + v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right)$$

y desarrolle usando los corolarios anteriores. Para demostrar (44), escriba $u - v = u + (-v)$ y recuerde la paridad de las funciones seno y coseno. \square

Identidad de cofunciones

$$\cos(v - \pi/2) = \operatorname{sen} v,$$

$$\operatorname{sen}(v - \pi/2) = -\cos v.$$

Coseno de la suma de ángulos

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

Seno de la suma de ángulos

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u.$$

$$\operatorname{sen}(u - v) = \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} v \cos u.$$

Corolario I.4-T [Tangente de diferencia de ángulos]. Para toda $u, v \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} \quad (45)$$

Demostración. Escriba $\tan(u - v) = \frac{\sen(u - v)}{\cos(u - v)}$ y desarrolle aplicando los corolarios anteriores. \square

Fórmulas del ángulo doble

Las fórmulas del ángulo doble son muy útiles para simplificar muchos cálculos.

Corolario I.5-T [Ángulo doble]. Para toda $u \in \mathbb{R}$ se cumplen las identidades:

$$\sen 2u = 2 \sen u \cos u, \quad (46)$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sen^2 u. \quad (47)$$

$$= 2 \cos^2 u - 1 \quad (48)$$

$$= 1 - 2 \sen^2 u. \quad (49)$$

Demostración. Escriba $2u = u + u$ en las fórmulas para coseno y seno de suma de ángulos y obtenga las identidades (46) y (47) partiendo del Lema II-T. \square

Algunas integrales del Cálculo pueden simplificarse con las fórmulas del siguiente corolario.

Corolario I.6-T [Reducción de potencias]. Para toda $u \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\sen^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}; \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}; \quad \tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}.$$

Demostración. Use del Corolario I.5-T y las fórmulas (48) y (49). \square

Corolario I.7-T [Fórmulas del ángulo mitad]. Para toda $u \in \mathbb{R}$ se cumplen las fórmulas

$$\sen \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \quad (50)$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}, \quad (51)$$

donde los signos “ \pm ” de $\sen u/2$ y $\cos u/2$, dependen del cuadrante en que se encuentra $u/2$.

Demostración. En las fórmulas del Corolario I.6-T ponga $u = v/2$ y despeje. \square

Tangente de la diferencia de ángulos

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v}$$

Fórmulas del ángulo doble:

$$\sen 2u = 2 \sen u \cos u,$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sen^2 u.$$

Fórmulas de reducción de potencias:

$$\sen^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\tan^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u}$$

Fórmulas del ángulo mitad

$$\sen \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}}$$

$$\cos \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}.$$

Fórmulas: suma a producto y viceversa

Finalmente, cuando el lector trabaje con las series de Fourier las siguientes identidades serán imprescindibles.

Corolario I.8-T [Fórmulas producto \rightarrow suma]. Para toda $u, v \in \mathbb{R}$ se cumplen las fórmulas:

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} \left(\cos(u - v) - \cos(u + v) \right) \quad (52)$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} \left(\cos(u - v) + \cos(u + v) \right) \quad (53)$$

$$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v) \right) \quad (54)$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v) \right) \quad (55)$$

Demostración. Es inmediata de las fórmulas de seno y coseno de sumas y diferencias de ángulos y se deja como ejercicio. \square

Corolario I.9-T [Fórmulas suma \rightarrow producto] Para toda $u, v \in \mathbb{R}$ se cumplen las fórmulas:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right) \quad (56)$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \quad (57)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right) \quad (58)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{x + y}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x - y}{2} \right) \quad (59)$$

Demostración. Considere $x = u + v$ y $y = u - v$. Resuelva el sistema para u y v , después sustituya en las fórmula del Corolario I.8-T. \square

Resolución de Triángulos

La *resolución de triángulos* es una de las aplicaciones más extensamente usadas de la trigonometría. Básicamente tal resolución consiste en encontrar todas las medidas de los lados y de los ángulos de un triángulo dado, conociendo un mínimo de datos. Usualmente se conocen dos lados y un ángulo, dos ángulos y un lado, pero hay que advertir que existen casos ambiguos. La resolución de triángulos rectángulos es la más sencilla dado el teorema de Pitágoras, la Proposición [Hipotenusa-cateto], el Teorema I [AA] y los valores de las funciones seno y coseno para valores en $[0, \pi/2]$, que se supondrán conocidos, dados en tablas o con el uso de calculadoras. Para resolver triángulos que no son rectángulos, requeriremos dos resultados más: la ley de

senos y la ley de cosenos. De estas leyes mayormente es de lo que se trata esta sección.

Resolución de triángulos rectángulos

La trigonometría plana se basa en el hecho de que *todo triángulo rectángulo es semejante a un triángulo rectángulo con hipotenusa de medida uno*, como el triángulo $\triangle OQP$ mostrado en la Figura 129. El triángulo $\triangle OQP$ para el cual el ángulo $\angle POQ$, opuesto al ángulo recto, tiene medida θ correspondiente al arco de la circunferencia unitaria asociado al punto $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ e hipotenusa igual al radio de la circunferencia (dado que $x^2 + y^2 = 1$ para todo punto sobre la circunferencia unitaria).

Para los casos en los que los triángulos que se desea resolver sean rectángulos, en los que se conoce un lado y un ángulo además del ángulo recto, la resolución se basa en la siguiente proposición, en la cual se establece la correspondencia entre triángulos rectángulos y los triángulos definidos por semicuerdas dentro de la circunferencia unitaria, como el mostrado en la Figura 129.

Proposición [Resolución de triángulos rectángulos]. Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con $m(AB) = c$, $m(BC) = a$, $m(CA) = b$ donde la hipotenusa es AC y el ángulo A , con medida α , es opuesto a BC , se cumple que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \quad (60)$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad (61)$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}. \quad (62)$$

Demostración. Si $b = 1$ la demostración es inmediata de la definición de las funciones trigonométricas, ya que se trata de un triángulo como el de la Figura 129.

Si $b \neq 1$, construya sobre la hipotenusa AC un segmento AC' de longitud $m(AC') = 1$ (prolongando si fuera necesario) como en la Figura 131 (Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}]). Desde C' baje la perpendicular a AB (o a su prolongación si fuera necesario) y sea B' la intersección de la perpendicular con AB (Teorema VI [Perpendicular de un punto a una recta]).

Tenemos $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ por el Teorema I [AA]. De esta forma, dado que $m(AC') = 1$, tenemos por semejanza de triángulos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1} = \frac{a}{b'}$$

con lo que queda demostrada la igualdad (60). Las igualdades (61) y (62) se siguen inmediatamente de la semejanza de los triángulos. \square

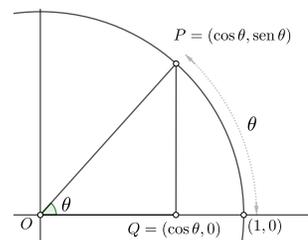


Figura 129: El triángulo $\triangle OQP$ es rectángulo. El arco θ es la medida del ángulo opuesto a QP . Todo triángulo rectángulo es semejante a un triángulo como $\triangle OQP$, esto constituye el sustento teórico de la trigonometría plana.

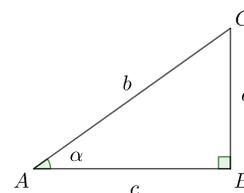


Figura 130: Resolución de triángulos rectángulos.

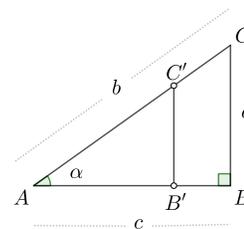


Figura 131: Demostración para el caso $m(\text{hipotenusa}) = m(AC) > 1$.

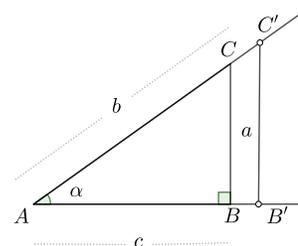


Figura 132: Demostración para el caso $m(\text{hipotenusa}) = m(AC) < 1$.

Nota. Dentro de la axiomática de Birkhoff, lo que se ha hecho en la demostración anterior al construir un triángulo de hipotenusa con medida 1, es colocar una circunferencia unitaria con centro en A y medir así el arco α sobre la circunferencia unitaria y proceder a calcular el seno de α , el cual se supone ya conocido o conocible. *Esto constituye la razón de ser de la trigonometría y la resolución de triángulos.* Desde los babilonios hasta Ptolomeo e Hiparco en la antigüedad, se conocen tablas de cuerdas asociadas a ángulos.

Ejemplo de resolución de un triángulo rectángulo

Ejemplo. Se conoce que un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo mide 34° y que el cateto adyacente mide 20 metros. Resuelva el triángulo.

Solución. Se conoce la medida de un ángulo y el cateto adyacente de un triángulo rectángulo, se pide calcular la medida del otro ángulo agudo, y la medida del cateto opuesto y de la hipotenusa del triángulo. Sea β el ángulo agudo desconocido. Por el Teorema IV [Suma de los ángulos internos] tenemos $34^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ$, y así $\beta = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$.

Para el cálculo de la hipotenusa y el cateto opuesto se usa primero la igualdad (62) para resolver para a ,

$$\begin{aligned} a &= c \tan \alpha \\ a &\approx 20 \cdot 0.67 = 13.4 \end{aligned}$$

Para el cálculo de b se puede usar el Teorema de Pitágoras o bien la igualdad (61) dado que

$$\begin{aligned} b &= \frac{c}{\cos \alpha} \\ b &\approx \frac{20}{0.82} = 24.1 \end{aligned}$$

Nota. Los demás casos de resolución de triángulos rectángulos son equivalentes al ejemplo anterior donde las únicas variantes son: a) Se conoce el cateto opuesto y el ángulo agudo que define al cateto y b) se conoce la hipotenusa y cualquiera de los ángulos agudos del triángulo. El lector interesado podrá encontrar decenas de ejemplos en los libros de educación preuniversitaria, por ejemplo en el libro de Cynthia Young³⁹.

Ley de senos

La ley de los senos puede usarse para resolver triángulos que no son rectángulos, llamados *triángulos oblicuos*. Los casos que se pueden resolver son los siguientes, donde se conocen:

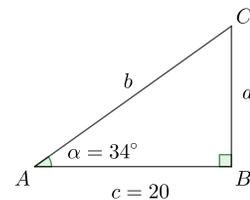


Figura 133: Triángulo del ejemplo

³⁹ Cynthia Young. *Trigonometry*. Hoboken, N. J.: Wiley, 2007

- Dos ángulos y cualquier lado (AAL) y (ALA).
- Dos lados y un ángulo opuesto a alguno de esos lados (LLA).

Lema III-T [Ley de senos]. Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ con lados de medidas $m(AB) = c$, $m(BC) = a$, $m(CA) = b$, se cumple que

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}. \quad (63)$$

Demostración. Consideramos el caso en el que los ángulos A y C son agudos. Sea h la altura del triángulo mostrado en la Figura 134, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \text{sen } A &= \frac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \text{sen } A \\ \text{sen } B &= \frac{h}{a} \Leftrightarrow h = a \text{sen } B \\ b \text{sen } A &= a \text{sen } B. \end{aligned}$$

Para la igualdad que falta se puede hacer la construcción mostrada en la Figura 135, suponiendo que C también es agudo.

$$\begin{aligned} \text{sen } A &= \frac{h_1}{c} \Leftrightarrow h_1 = c \text{sen } A \\ \text{sen } C &= \frac{h_1}{a} \Leftrightarrow h_1 = a \text{sen } C \\ c \text{sen } A &= a \text{sen } C. \end{aligned}$$

Se concluye que se cumple (63) para el caso de dos ángulos agudos

Para el caso en el que el ángulo A es obtuso como el caso en la Figura 136. Primero procedemos con los ángulos agudos que como en el caso anterior da

$$\begin{aligned} \text{sen } B &= \frac{h_2}{c} \Leftrightarrow h_2 = c \text{sen } B \\ \text{sen } C &= \frac{h_2}{b} \Leftrightarrow h_2 = b \text{sen } C \\ c \text{sen } B &= b \text{sen } C. \end{aligned}$$

Finalmente para la igualdad que falta considere la figura 137.

Tenemos que $\text{sen } B = \frac{h}{a}$, además $\text{sen}(\pi - A) = \frac{h}{b}$. Pero

$$\begin{aligned} \text{sen}(\pi - A) &= \text{sen } \pi \cos A - \text{sen } A \cos \pi \\ &= \text{sen } A. \end{aligned}$$

Por lo tanto $b \text{sen } A = a \text{sen } B$ y así se cumple (63), también. \square

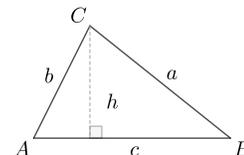


Figura 134: Ley de senos, caso ángulo A agudo.

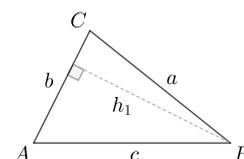


Figura 135: Segunda parte de la demostración de la Ley de senos, caso ángulo C agudo.

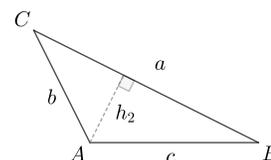


Figura 136: Ley de senos, caso ángulo A obtuso.

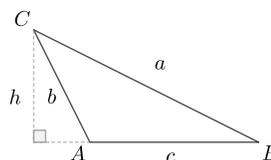


Figura 137: Ley de senos, caso ángulo A obtuso.

Aplicaciones de la ley de senos

Múltiples aplicaciones en la ciencia y en la ingeniería de la ley de senos no son sino una sustitución directa de datos en las fórmulas (63). Esto se cumple en los casos AAL y ALA, de los cuales el lector encontrará algunos ejercicios en la sección dedicada a problemas. Sin embargo *hay que tener cuidado del caso LLA*⁴⁰ el cual puede tener dos soluciones o incluso ninguna.

Ejemplo sin solución, caso LLA. Demuestre mediante la ley de senos que no existe triángulo con medidas de los lados $a = 1$, $b = 2$ y ángulo A , opuesto al lado a , con medida $A = 4\pi/9$.

Solución. Aplicando directamente las fórmulas (63) tendríamos que si existiera un triángulo (ver Figura 138) que satisficiera los datos tendríamos $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}$, de donde la sustitución directa de los datos del problema da

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = 2 \text{ sen } 4\pi/9 \approx 1.96, (!)$$

lo que contradice que $|\text{sen } \alpha| \leq 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo con dos soluciones, caso LLA. Encuentre todos los triángulos con $a = 4.5$, $b = 9$ y $A = \pi/9$.

Solución. La fórmula (63) da

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = 2 \text{ sen } \pi/9 \approx 0.6840.$$

En la Figura 139, se muestra que existen dos soluciones del ángulo B para $a = 4.5$, $b = 9$ y $A = \pi/9$.

Es decir, ¡existen dos valores distintos de B para los cuales $\text{sen } B = 0.6840$! La razón de esto, es que la función seno no es inyectiva en todo su dominio. La recta horizontal por 0.684, corta la gráfica de la función seno en dos puntos, los cuales son soluciones de la ecuación $\text{sen } B = 0.684$, lo cual se muestra en la Figura 140.

Nota. A pesar de los dos ejemplos anteriores cabe hacer notar que el caso LLA, *sí puede tener solución única*, como el lector podrá descubrir en los ejercicios del capítulo.

Ley de cosenos

La ley de cosenos se utiliza mayormente para resolver triángulos oblicuos en los siguientes casos:

- Se conocen los tres lados de un triángulo y se desea conocer los ángulos internos (LLL).

⁴⁰ Hay que recordar que no existe teorema de semejanza de triángulos LLA, lo que está detrás del caso ambiguo LLA para la ley de senos.

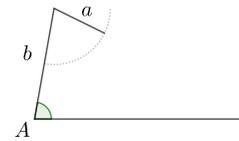


Figura 138: La ley de senos *no puede aplicarse ciegamente* para el caso LLA. Se muestra que no es posible construir un triángulo con lados $a = 1$, $b = 2$ y ángulo con medida $A = 4\pi/9$.

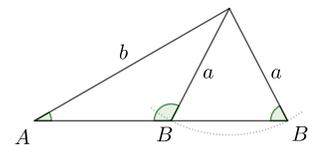


Figura 139: Para el caso LLA, pueden existir dos soluciones, por ejemplo con $a = 4.5$, $b = 9$ y $A = \pi/9$.

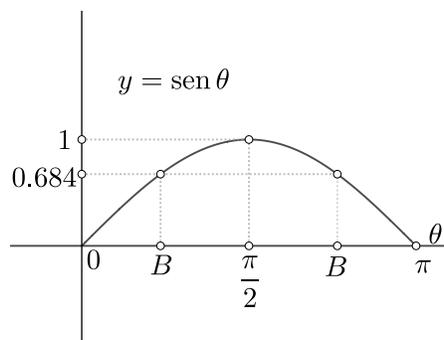


Figura 140: Se muestran dos valores distintos de B para los cuales $\text{sen } B = 0.684$.

- Se conocen dos lados y el ángulo incluido [LAL] y se desea conocer los otros dos ángulos y el lado faltante.

Establezcamos la ley de cosenos en el siguiente lema.

Lema IV-T [Ley de cosenos]. Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ con lados de medidas $m(AB) = c$, $m(BC) = a$, $m(CA) = b$, se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad (64)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \quad (65)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (66)$$

Demostración. Consideramos el caso en el que el triángulo tiene tres ángulos agudos. Colocamos los ejes coordenados de tal forma que $A = (0,0)$, $B = (c,0)$ y $C = (x,y)$. Por construcción y por las ecuaciones (60) y (61), $x = b \cos A$ y $y = b \text{sen } A$. Dado que a es la distancia de B a C tenemos

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\ a^2 &= (b \cos A - c)^2 + b^2 \text{sen}^2 A \\ &= b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \text{sen}^2 A \\ &= b^2 (\cos^2 A + \text{sen}^2 A) - 2bc \cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \end{aligned}$$

con lo que hemos obtenido⁴¹ la ecuación (64). Para demostrar las otras ecuaciones del Lema, se realiza una construcción similar colocando el origen de coordenadas (lo cual es posible por el Postulado I) en los vértices C y B respectivamente. El caso del ángulo obtuso se deja como ejercicio⁴². \square

Aplicaciones de la ley de cosenos

Las aplicaciones consisten generalmente en sustituir los datos en las ecuaciones (64), (65) y (64). Debemos notar que cuando se requieren las

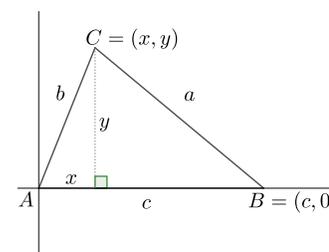


Figura 141: Para el caso de tres ángulos agudos, sitúe el origen de coordenadas en el vértice A .

⁴¹ El lector debe poder reconocer que se ha usado la identidad pitagórica $\cos^2 A + \text{sen}^2 A = 1$ en la demostración.

⁴² La demostración fue tomada del libro de Cynthia Young (*op. cit.*).

fórmulas para calcular los ángulos, por ejemplo en el caso (LLL), las fórmulas de la Ley de cosenos se presentan en la forma equivalente:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (67)$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (68)$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (69)$$

Con las fórmulas (67), (68) y (69) debe usarse la función inversa del coseno para calcular la medida de los ángulos A , B y C , respectivamente. Con la ley de senos también, notará el lector, debe usarse la función inversa del seno para calcular los valores de los ángulos. Por los motivos anteriores en este momento es oportuno hablar de las funciones inversas.

Funciones trigonométricas inversas

En los cursos elementales la enseñanza de las funciones trigonométricas inversas se reduce a mostrar a los estudiantes como usar la calculadora. Se les muestra el uso de las teclas $\boxed{\text{sen}^{-1}}$ y $\boxed{\text{cos}^{-1}}$, según sea el caso, lo cual quizá es lo apropiado en ese nivel. Un problema surge cuando, como en el ejemplo de la ley de senos, se desea calcular el número B para el cual $\text{sen } B = 0.684$ para el cual la calculadora sólo da el número $\text{sen}^{-1}(0.684) = 0.753232$, es decir, la calculadora no “sabe” que hay dos valores diferentes de B para los cuales el seno da el resultado 0.684.

Las funciones inversas están definidas propiamente en los intervalos en los que las rectas horizontales cortan la gráfica de la función en un punto solamente. En la Figura 140, vemos que eso *no ocurre para la función seno* en el intervalo $[0, \pi]$. Un intervalo más apropiado para definir la inversa de la función seno es donde el seno crece, que es el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Para la función coseno un intervalo apropiado para definir la inversa es donde la función coseno decrece, por ejemplo $[0, \pi]$, por lo que la función inversa del coseno si da información para ángulos mayores de $\pi/2$, es decir, la función inversa del coseno, como veremos, *si da información para la resolución de triángulos con ángulo obtuso* para los cuales la función coseno es negativa.

Definición [Funciones inversas de seno y coseno]. La función inversa del coseno, denotada “arc cos”, es la única función definida en $[-1, 1]$ tal que

$$\text{arc cos}(\cos \alpha) = \alpha, \text{ para toda } \alpha \in [0, \pi].$$

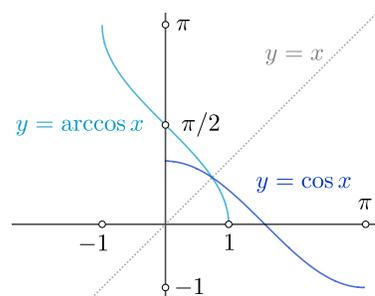


Figura 142: Gráfica de la función $y = \text{arc cos } x$.

Recíprocamente,

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ para toda } x \in [-1, 1].$$

La función inversa del seno, “arc sen”, es la única función definida en $[-1, 1]$, tal que

$$\arcsen(\sen \alpha) = \alpha, \text{ para toda } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Recíprocamente, para toda $x \in [-1, 1]$,

$$\sen(\arcsen x) = x.$$

Para toda $x \in [-1, 1]$ tenemos que $-\pi/2 \leq \arcsen x \leq \pi/2$.

Nota. Observe que para toda $x \in [-1, 1]$, tenemos que $0 \leq \arccos x \leq \pi$, así, la imagen de la función arc cos es el dominio de la función coseno donde esta tiene inversa y recíprocamente el dominio de arc cos es la imagen de la función coseno, es decir, el intervalo $[-1, 1]$. Similarmente ocurre para la la función seno ya que $-\pi/2 \leq \arcsen x \leq \pi/2$, como puede apreciarse en las gráficas.

Note también que las inversas son entre sí simétricas respecto a la recta $y = x$, como puede verse en Figura 142 y Figura 143. Las funciones $\arccos \alpha$ y $\arcsen \alpha$, suelen nombrarse *arco cuyo coseno es alfa* y *arco cuyo seno es alfa*, respectivamente y de manera muy apropiada, ya que un arco de la circunferencia unitaria es precisamente lo que determinan.

Tangente inversa

Esta sección no estaría completa sin la función inversa de la tangente, la cual se presenta enseguida, pero antes debemos estudiar la gráfica de la función tangente.

Gráfica de la función tangente. La función tangente que definimos como $\tan x = \frac{\sen x}{\cos x}$, tiene la particularidad de no estar definida para los valores de x donde $\cos x = 0$. De esta forma la $\tan x$ no está definida para $x = \pm(2k + 1)\pi/2$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$

Las gráficas de las rectas verticales $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ (representadas como rectas punteadas en la Figura 144) son asíntotas para la función tangente, es decir la tangente se aproxima a ellas tanto como se quiera, pero nunca las toca. Claramente cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la tangente en infinitos puntos, por ello, para definir la inversa debemos restringir la tangente a un intervalo solamente. El intervalo escogido es $(-\pi/2, \pi/2)$. La tangente definida en el intervalo anterior se llama *rama principal de la tangente* y para esta rama es que se define la tangente inversa, llamada *arcotangente*,

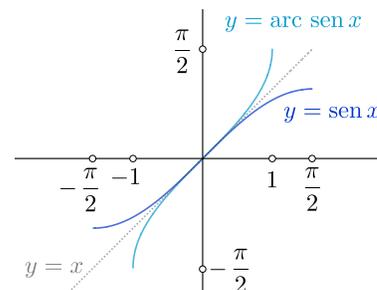


Figura 143: Gráfica de la función $y = \arcsen x$.

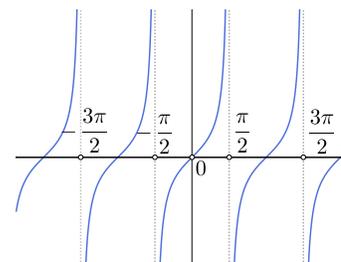


Figura 144: Gráfica de la función $y = \tan x$.

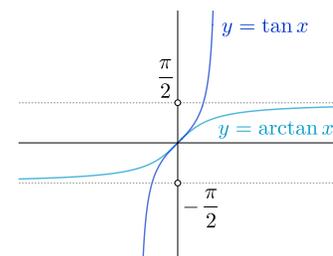


Figura 145: Gráfica de la función $y = \arctan x$.

Definición [Función inversa de la tangente]. La función inversa de la tangente, denotada “ \arctan ” es la única función definida en todo \mathbb{R} tal que

$$\arctan(\tan \alpha) = \alpha, \text{ para toda } \alpha \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Recíprocamente, para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$\tan(\arctan x) = x.$$

Para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $-\pi/2 \leq \arctan x \leq \pi/2$.

Nota. Observe que la gráfica de la función arcotangente tiene dos asíntotas horizontales, una en $y = -\pi/2$ y otra en $y = \pi/2$. Curiosamente \arctan , es un ejemplo de una función creciente con dominio en todo \mathbb{R} que está acotada.

Ejemplo de solución de triángulos oblicuos: ley de cosenos

Resolviendo un triángulo (LLL). Dado el triángulo con lados $a = 9.47$, $b = 6.12$ y $c = 14$, calcule la medida de los ángulos internos del triángulo.

Solución. Se calcula el ángulo opuesto C al lado más largo c por medio de la ley de cosenos:

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= -0.59 \\ C &= \arccos(-0.59) \approx 2.2. \end{aligned}$$

El lector puede notar que dado que $\cos C < 0$, el ángulo C es necesariamente obtuso, es decir, debe medir más que $\pi/2 \approx 1.57$, como efectivamente ocurre. También el lector debió haber observado como se usó la relación “ $\arccos(\cos C) = C$ ”, para calcular C . Por otra parte, los dos ángulos que faltan pueden calcularse usando la ley de cosenos, pero la ley de senos también puede usarse una vez conocido C y requiere menos operaciones. Los cálculos que faltan se dejan como ejercicio.

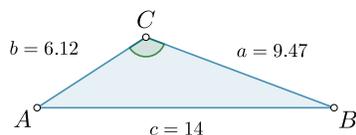


Figura 146: Triángulo del ejemplo: *Resolviendo un triángulo (LLL).*

Cálculo de funciones trigonométricas y series de Taylor

Hemos mencionado repetidas veces que en la antigüedad el cálculo de las funciones trigonométricas se basó en las tablas de semicuerdas de las que un ejemplar que pervivió hasta nuestros días es *el Almagesto* con las tablas de Ptolomeo quien calculó semicuerdas desde cero hasta 90° , con incrementos de un cuarto de grado. Hubo que esperar hasta la época de Newton para mejorar las tablas de Ptolomeo sustancialmente. En la actualidad el cálculo de senos y cosenos se realiza mediante las fórmulas de Taylor (quien fuera discípulo de Newton), las cuales se demuestran en cualquier curso decente de Cálculo Diferencial e Integral. Las fórmulas de Taylor más relevantes y que utilizaremos formalmente (es decir, sin demostrar) en otros capítulos de este libro se presentan en el siguiente teorema.

Teorema [Fórmulas de Taylor]. Para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes fórmulas

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (70)$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (71)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad (72)$$

donde el símbolo $n!$ es el factorial de n , el cual se define como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n,$$

y, por otra parte, $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Para la arcotangente se tiene la siguiente serie la cual se cumple para $|x| \leq 1$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (73)$$

Para el lector novicio mencionamos que los puntos suspensivos al final de las fórmulas de las series, significan que las sumas son infinitas. Obviamente las computadoras *no pueden realizar sumas infinitas* por lo que para calcular las funciones trigonométricas y otras funciones se tienen que truncar las series de Taylor en algún lugar, lo que acarrea un error de aproximación que generalmente es muy pequeño.

Finalmente, en este capítulo se vio una aproximación histórica al cálculo de π . Ahora, dado que $\operatorname{sen} \pi/4 = \operatorname{cos} \pi/4$, se tiene que $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, y así $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$. Por lo tanto⁴³,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

Fórmulas de Taylor para $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

⁴³ Esta fórmula da aproximaciones que requieren muchos cálculos para determinar unos cuantos dígitos exactos, así que no es la mejor que se puede obtener para π , sin embargo no deja de ser notable.

Coordenadas Polares

Como una última aplicación básica de la trigonometría, introducimos las coordenadas polares. La forma más sencilla de empezar con las coordenadas polares, desde mi punto de vista, es hacer notar que dado que en la circunferencia de radio $r = 1$, con centro en $(0,0)$, cualquier punto $P = (x,y)$, sobre la circunferencia tiene coordenadas $x = \cos \theta$, $y = \operatorname{sen} \theta$. Entonces para una circunferencia de radio arbitrario $0 < r \neq 1$, digamos $x^2 + y^2 = r^2$ se debe tener

$$x = r \cos \theta, y = r \operatorname{sen} \theta,$$

dadas las identidades (60) y (61) que surgen en la solución de triángulos rectángulos.

Cada punto del plano está sobre una circunferencia con centro en el origen de coordenadas. Por lo tanto, en coordenadas polares un punto queda especificado por su distancia r al origen O , llamado *polo*, y por el ángulo θ que forma con el semieje positivo x , llamado *eje polar*. Representaremos en coordenadas polares un punto P con un par de números $P = (r, \theta)$, como se muestra en la Figura 148.

Mediremos el ángulo polar como lo hicimos en coordenadas cartesianas. Es decir, para los arcos positivos, se parte del eje polar en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, los ángulos negativos se miden a partir del eje polar en la dirección en las que se mueven las manecillas del reloj. Los ángulos los mediremos siempre en radianes, por supuesto.

Conversión de coordenadas polares a cartesianas

Dado un punto en coordenadas polares $P = (r, \theta)$ sabemos que r representa la distancia del origen al punto, por lo que si se conocen las coordenadas cartesianas del punto, es decir, si $P = (x, y)$ en coordenadas cartesianas, se obtienen fácilmente las coordenadas polares.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (74)$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (75)$$

Recíprocamente, conociendo las coordenadas polares (r, θ) , obtenemos las coordenadas rectangulares del punto $P = (x, y)$.

$$x = r \cos \theta, \quad (76)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta. \quad (77)$$

Nota. Es muy importante recordar que debe comprobarse que al convertir coordenadas, el punto quede en el cuadrante correcto y medir

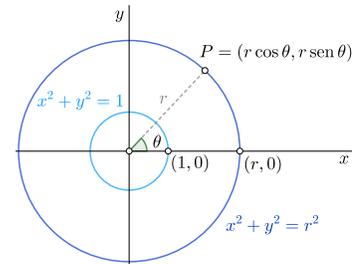


Figura 147: Cada punto $P = (x, y)$ en el plano puede representarse como $P = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

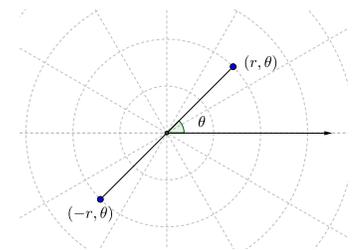


Figura 148: Coordenadas polares.

los ángulos con el signo adecuado, con el fin de obtener coordenadas correctas.

Ejemplo 1. Encuentre las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares son $P = (1, 2\pi/3)$.

Solución. Usamos las fórmulas (76), (77) con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta = 1 \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\y &= r \operatorname{sen} \theta = 1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

La solución está ilustrada en la Figura 149.

Ejemplo 2. Encuentre las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas son $P = (1, 1)$.

Solución. Dado que las coordenadas cartesianas de P son $x = 1, y = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\ \theta &= \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Por lo que las coordenadas polares del punto son

$$P = (\sqrt{2}, \pi/4).$$

Curvas en coordenadas polares

El lector que se haya familiarizado con la localización de puntos en coordenadas polares puede comenzar sin dificultad el estudio de las curvas en coordenadas polares. Las curvas más simples en coordenadas polares se obtienen poniendo una de las coordenadas ya sea r o θ constantes. Al igual que en coordenadas cartesianas si una variable no aparece en la ecuación se sobreentiende que tal variable toma todos los valores posibles sobre \mathbb{R} .

Como ejemplo, tomamos una circunferencia en coordenadas cartesianas con centro en el origen de coordenadas y radio r_0 . En este caso la ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 = r_0^2$. Con las ecuaciones de transformación (76) y (77), tenemos:

$$r_0^2 = x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2 = r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta),$$

o simplemente

$$r = r_0$$

Llegamos así a nuestra primera proposición, para líneas en coordenadas polares.

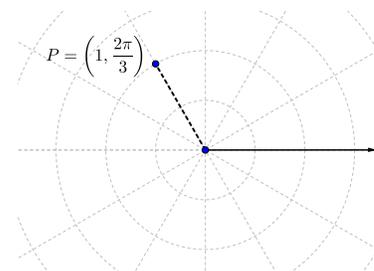


Figura 149: Coordenadas cartesianas de $P = (1, 2\pi/3)$.

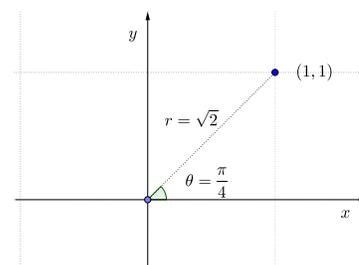


Figura 150: Coordenadas polares de $P = (1, 1)$.

Proposición. En coordenadas polares la curva $r(\theta) = r_0$, donde $r_0 > 0$ es una constante, corresponde la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio r_0 .

Remarcamos aquí que dado que la variable θ no aparece en la ecuación $r = r_0$ se considera que θ toma todos los valores posibles. Es decir cada circunferencia \mathcal{C} con centro en el polo $(0,0)$ y radio r_0 en coordenadas polares es el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta) : r = r_0, -\infty < \theta < \infty\}.$$

Observe que en realidad para describir la circunferencia basta tomar $\theta \in [0, 2\pi)$, y así simplemente

$$\mathcal{C} = \{(r, \theta) : r = r_0, \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

De manera similar, si escribimos θ igual a constante, digamos

$$\theta = c$$

se obtiene la ecuación de una recta que pasa por el polo y que forma un ángulo c con el eje polar. Llegamos así a la siguiente proposición.

Proposición. Toda semirecta ℓ que pasa por el polo $O = (0,0)$, tiene representación $\theta(r) = c$, donde c es una constante. Tal semirecta es el conjunto

$$\ell = \{(r, \theta) : \theta = c, 0 \leq r\}.$$

La cardioide

Una curva más interesante está dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Dibuje la gráfica de la curva con ecuación polar

$$r = 1 - \cos \theta,$$

la cual corresponde a una curva llamada *cardioide*.

Solución. Podemos calcular algunos puntos y a partir de ellos trataremos de obtener la gráfica. Algunos valores de r se han calculado para los ángulos mostrados en la tabla 2.

θ	$\cos \theta$	$1 - \cos \theta$	r
0	1	0	0
$\pi/6$.086	.134	.134
$\pi/3$.5	.5	.5
$\pi/2$	0	1	1
$2\pi/3$	-.5	1.5	1.5
$5\pi/6$	-.866	1.866	1.866
π	-1	2	2

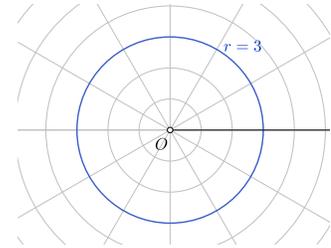


Figura 151: Circunferencia $r = 3$ en coordenadas polares. El punto O es el polo y la semirecta $\theta = 0$ es el eje polar.

Cuadro 2: Tabla correspondiente al Ejemplo 3

Dado que el coseno es una función par, es decir, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, se obtienen los mismos valores de r para ángulos negativos. Esto quiere decir que la gráfica de r es simétrica respecto al eje polar, como se muestra en la figura 152.

También debemos notar que la curva es una figura cerrada dado que $r = 1 - \cos \theta$ es periódica de periodo 2π . Es decir $r(0) = r(2\pi) = 0$. Toda curva en coordenadas polares donde r es función de θ es cerrada si y solo si es periódica.

Finalmente, como ningún número de ejemplos podrá sustituir lo que el lector haga con sus propias manos, le sugerimos pasar a la sección de problemas y ejercicios de coordenadas polares.

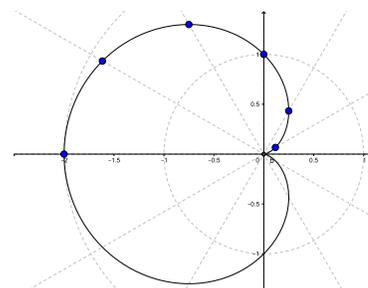


Figura 152: Gráfica de $r = 1 - \cos \theta$ que corresponde a la cardioides del ejercicio

Ejercicios de Construcción del Plano cartesiano

1. Escriba la demostración del Teorema [Irracionales elementales] y de la Proposición [Circunferencia sin puntos racionales] en forma tabular.
2. Demuestre que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ son irracionales. Construya un triángulo rectángulo con catetos de longitud $\sqrt{2}$ y 1 y muestre que el teorema de Pitágoras garantiza la existencia de $\sqrt{3}$ y por lo tanto la existencia de un triángulo con hipotenusa $\sqrt{6}$.

Ejercicios de Trigonometría

Nivel elemental

3. Para que el lector se familiarice con las funciones trigonométricas y sus recíprocas se recomienda el siguiente ejercicio. Al parámetro $\theta = 0$ le corresponde el punto $(x, y) = (1, 0)$, a $\theta = \pi/6$, le corresponde el punto $(x, y) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ encuentre los valores de las funciones seno, coseno y tangente de estos ángulos, por medio de las definiciones (28) y (29).
4. Compruebe que la función cosecante es impar, la función secante par y la función cotangente impar, mediante las identidades de paridad (33) y (34).
5. El siguiente ejercicio ayudara a memorizar las identidades de esta sección.
 - a) Demuestre la identidad (37).
 - b) Si se sabe que $\cos \theta = 0.8$, encuentre los valores de todas las demás funciones trigonométricas en θ por medio de identidades.
 - c) Si se sabe que θ es un ángulo agudo tal que $\tan \theta = 4$, calcule el valor de todas las demás funciones trigonométricas en ese ángulo.
 - d) Verifique los resultados de los problemas 5a y 5b por medio de una calculadora, no olvide usar el *modo radianes*.
6. En la enseñanza elemental se miden ángulos con grados, lo cual corresponde a la división de la circunferencia en 360° . Sin embargo, esta medida no es conveniente en matemáticas superiores por varias razones. En el siguiente ejercicio se mencionan algunas de ellas.
Al estudiar ángulos es decir, un par de segmentos de recta unidos en uno de sus extremos, la abertura entre ellos se puede medir en grados, por medio de un transportador o en radianes usando el círculo unitario. Algunas comparaciones son importantes.
 - a) ¿Conoce medidas negativas en grados? ¿Conoce medidas en grados mayores de 360° ? ¿Conoce medidas en valores irracionales de grados, por ejemplo $\sqrt{2}^\circ$, es esto posible?
 - b) ¿Cuál es la relación entre grados y los radianes, es decir, las unidades en términos de la longitud de arco de la circunferencia unitaria? Es decir, ¿cuántos radianes corresponden a 360° ?
 - c) Las funciones seno, coseno, etcétera se definen sobre triángulos, ¿tiene sentido hablar del $\sin(500^\circ)$? Argumente por qué para triángulos rectángulos los valores que pueden tomar los ángulos para las funciones seno y coseno se encuentran restringidos a $0 < \theta < \pi/2$.
7. Utilizando la identidad del Teorema de Pitágoras (35) y otras identidades, calcule los valores que faltan en la siguiente tabla

Función	$\theta = \pi/4$	$\theta = \pi/6$	$\theta = \pi/6$	$\theta = -\pi/4$	$\theta = -\pi/3$	$\theta = -\pi/6$
$\text{sen } \theta$	$\sqrt{2}/2$					
$\text{cos } \theta$		$\sqrt{3}/2$				
$\text{tan } \theta$			$\sqrt{3}$			
$\text{sec } \theta$						
$\text{csc } \theta$						
$\text{cot } \theta$						

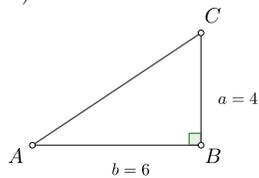
8. Utilice la tabla anterior y la fórmula para suma de ángulos para encontrar

- El valor de $\cos(75^\circ) = \cos(30^\circ + 45^\circ)$.
- El valor de $\text{sen } \pi/12$, si $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$.

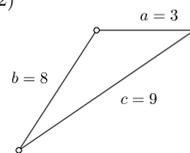
Resolución de triángulos

9. Resuelva los triángulos siguientes.

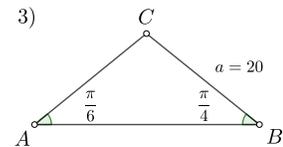
1)



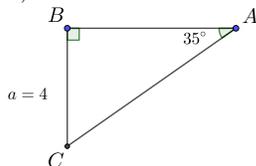
2)



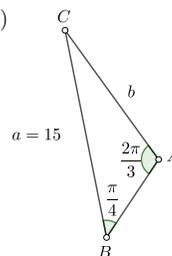
3)



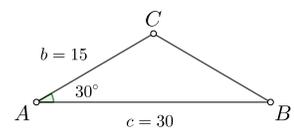
4)



5)



6)



10. Encuentre un valor de b para el cual un triángulo ABC con $a = 35$ y $A = 36^\circ$ tiene

- una solución,
- dos soluciones,
- ninguna solución.

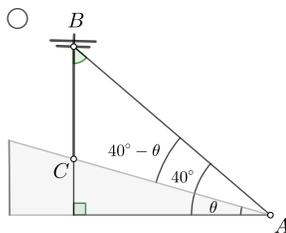
Nivel medio

11. Evalúe $\cos(9\pi/2)$ utilizando la periodicidad de la función coseno.
12. Al arco $\theta = 5\pi/4$ le corresponde el punto $(x, y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ sobre la circunferencia unitaria. Encuentre $\sin 5\pi/4$, $\cos 5\pi/4$ y $\tan 5\pi/4$.
13. Demuestre la identidad $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$.
14. Escriba $\sin 3x$ en términos de $\sin x$.
15. Encuentre una fórmula para $\tan(u + v)$ y para $\tan 2u$.
16. *Aplicación al Cálculo.* Verifique que

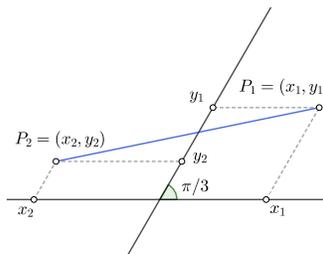
$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h}.$$

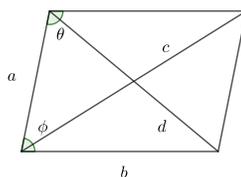
17. *Simplificación de expresiones.* Mediante las fórmulas del capítulo, simplifique las expresiones siguientes.
 - a) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} - \tan x$, b) $\tan y \sec^2 y - \tan y$, c) $\frac{\cos x \csc x}{\tan x}$, d) $\frac{\cos^4 a - \sin^4 a}{\cos^2 a}$.

Sugerencia. Factorice, use las funciones recíprocas, cuando se requiera escriba la tangente como seno entre coseno, etcétera.
18. Un poste de 4 m proyecta una sombra de 6 m directamente sobre la pendiente de un terreno inclinado, cuando el sol se encuentra a un ángulo de elevación de 40° . Encuentre θ , el ángulo de elevación del terreno.



19. Por alguna razón, a alguien se le ocurrió establecer unos ejes de coordenadas oblicuos que forman un ángulo de $\pi/3$. Encuentre la fórmula para la distancia entre dos puntos cualquiera en este sistema de coordenadas.





20. En la figura superior se muestra un paralelogramo. Resuélvalo, si se sabe que

- a) $a = 4, b = 6$ y $\theta = \pi/6$.
- b) $a = 10, b = 14$ y $c = 20$.
- c) $a = 15, b = 25$ y $\phi = 2\pi/3$.

Sugerencia. Qué significa resolver un paralelogramo: debe conocer a, b, c, d, θ y ϕ .

Nivel universitario

La trigonometría no se aprende sino comprobando por uno mismo las identidades trigonométricas. A este fin se dedican los siguientes ejercicios. Debe hacer sus demostraciones en forma tabular.

- 21. Demuestre los Corolarios I.2-T, I.3-T y I.4-T.
- 22. Use los corolarios I.2-T y I.3-T en los siguientes ejercicios.
 - a) Encuentre la fórmula para $\sen(u - v)$ y demuéstrela.
 - b) Demuestre mediante identidades trigonométricas que las funciones seno y coseno son periódicas, es decir, cumplen las identidades
 - c) Demuestre la fórmula de cofunción para seno: $\sen(\pi/2 - v) = -\cos v$.
Sugerencia: $\sen(\pi/2 - v) = \sen(-(v - \pi/2)) = -\sen(v - \pi/2) = \cos v$, por lo cual se cumple la fórmula en cuestión. Cubra los detalles.
- 23. Demuestre el Corolario I.5-T [Ángulo doble]
- 24. Demuestre el Corolario I.6-T [Reducción de potencias].
- 25. Demuestre que $\sen^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$.
Sugerencia: Escriba $\sen^4 x = (\sen^2 x)^2$ y después use las fórmulas de reducción de potencias del Corolario I.6-T.
- 26. Demuestre el Corolario I.7-T [Fórmulas del ángulo mitad].
- 27. Compruebe que todas las soluciones de la ecuación $2\cos^2(x/2) + \sen^2 x - 2 = 0$ son soluciones de la ecuación $\cos x(\cos x - 1) = 0$ y encuentre tales soluciones en el intervalo $[0, 3\pi]$.
Sugerencia: Use el Corolario I.7-T.
- 28. Demuestre el Corolario I.8-T [Fórmulas suma \rightarrow producto].
- 29. Demuestre el Corolario I.9-T [Fórmulas suma \rightarrow producto].

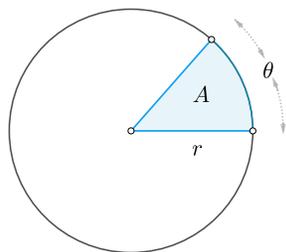


Figura 153: El área A , en color azul es el área de un sector circular.

30. Suponiendo verdadera la fórmula para el área de un círculo $A = \pi r^2$, calcule el área del sector circular de la Figura 153.

Sugerencia: Sea A el área del sector circular, entonces A dividida por el área total de la circunferencia es igual a la medida del arco del sector circular θ dividido por la longitud de la circunferencia (justifique), de aquí despeje A para obtener $A = 1/2 r^2 \theta$.

Ejercicios de coordenadas polares

Estudiaremos ahora algunas de las curvas clásicas en coordenadas polares cuyas gráficas en coordenadas cartesianas, sin ayuda de una computadora, son difíciles de visualizar. Sin embargo, como se verá, en coordenadas polares no resultan tan complicadas.

31. Dibuje las gráficas en coordenadas polares de las siguientes curvas

- Espiral, $r = \theta$.
- Lemniscata, $r^2 = \sin 2\theta$.
- Rosa de cuatro hojas, $r = \sin 2\theta$.

32. Conocida la gráfica de $r^2 = \sin 2\theta$, ¿cómo es la gráfica de $r^2 = \sin 3\theta$ y la gráfica de $r = \sin 3\theta$?

33. ¿Qué puede decirse de $r^2 = \sin(n\theta)$ y $r = \sin(n\theta)$?

34. A partir de la gráfica de la lemniscata, ¿qué puede afirmarse de la gráfica de $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ dando diferentes valores de a ? Obtenga las gráficas para $a = 2, -1/2, 3$.

35. ¿Cómo es la gráfica de $r^2 = \cos(2\theta)$? Antes de dibujarla intente enumerar las diferencias de la curva con $\sin 2\theta$ y la curva con $\cos 2\theta$, después proceda a dibujar la gráfica.

Una vez que el lector ha realizado algunas gráficas en coordenadas polares es pertinente que trate de generalizar las nociones de simetría de las curvas en general, a partir de sus experiencias particulares.

36. El siguiente ejercicio es una guía para deducir patrones de simetría para curvas en coordenadas polares.

- ¿La gráfica que se obtiene para $r = \cos \theta$ es la misma que para $r = \cos(-\theta)$? ¿Por qué? Dibuje la gráfica. ¿Qué puede decirse de cualquier curva la cual se obtiene la misma gráfica para θ que para $-\theta$? ¿Qué sucede si se cambia r por $-r$ y al mismo tiempo se sustituye θ por $\pi - \theta$ en la curva $r^2 = \cos(2\theta)$?
- ¿Qué sucede en la curva $r = \sin \theta$ si se sustituye θ por $\pi - \theta$? ¿Qué sucede en la misma curva si se sustituye θ por $-\theta$ y al mismo tiempo r por $-r$? Argumente sus afirmaciones. Dibuje las gráficas correspondientes.
- ¿Qué sucede en la curva $r^2 = \sin(2\theta)$ si se sustituye r por $-r$? ¿Qué sucede si se sustituye θ por $\pi + \theta$?
- Generalice los resultados de los puntos anteriores a curvas en general. Escriba sus conjeturas.

Soluciones de los ejercicios seleccionados

1. *Solución del ejercicio 6.* El inciso 6a debe discutirse grupalmente. A la medida de 2π radianes le corresponden 360° .
2. *Solución del ejercicio 6c.* La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° por lo que *no tiene sentido hablar de funciones trigonométricas para ángulos mayores de este valor para ningún triángulo.*
3. *Solución del ejercicio 11.* Dado que $9\pi/2 = 4\pi + \pi/2$ se tiene

$$\cos(9\pi/2) = \cos(4\pi + \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0.$$

Claramente, en general se tiene que $\cos(\theta + 2m\pi) = \cos \theta$ para cualquier entero m .

4. *Solución del ejercicio 12.* De acuerdo con la definición, se tiene $\cos 5\pi/4 = x = -\sqrt{2}/2$, $\sin 5\pi/4 = y = -\sqrt{2}/2$ y, finalmente, $\tan 5\pi/4 = y/x = -\sqrt{2}/2 / (-\sqrt{2}/2) = 1$.
5. *Demostración Corolario I.2-T.* La fórmula para $\cos(u + v)$ puede derivarse de la fórmula (38) si escribimos $u + v = u - (-v)$ y se utilizan las fórmulas de paridad de las funciones trigonométricas (33) y (34):
Solución. Como se indica en el ejercicio tenemos dada la fórmula (38) y dado que la función seno es impar y coseno par,

$$\begin{aligned}\cos(u + v) &= \cos(u - (-v)) \\ &= \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v.\end{aligned}$$

Con lo cual hemos obtenido la fórmula (42). □

6. *Solución del ejercicio 14.* Tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3x &= \operatorname{sen}(2x + x) \\ &= \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x \\ &= 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) + (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x \\ &= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x,\end{aligned}$$

donde la última línea de las igualdades anteriores se obtiene después de simplificar y cancelar términos semejantes. □

7. *Demostración Corolario I.1-T.* Muestre que se cumple la fórmula

$$\operatorname{sen}(v - \pi/2) = -\cos(v)$$

Solución. Dada la primera fórmula del corolario

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(v - \pi/2) &= \cos(u - \pi/2 - \pi/2) = \cos(u - \pi) \\ &= \cos u \cos \pi + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} \pi \\ &= -\cos u,\end{aligned}$$

dado que $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$. □

8. *Demostración Corolarios I.3-T y I.4-T.* El objetivo de este ejercicio es obtener la fórmula para suma y diferencia de ángulos de las funciones seno y tangente. Procederemos paso a paso.

Solución. De la fórmula (41) se sigue fácilmente que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u+v) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u+v)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\cos v + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\operatorname{sen} v \\ &= \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v.\end{aligned}$$

Para la fórmula de $\operatorname{sen}(u-v)$ usamos la fórmula de suma de ángulos como sigue

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(u-v) &= \operatorname{sen}(u+(-v)) \\ &= \operatorname{sen} u \cos(-v) + \cos u \operatorname{sen}(-v) \\ &= \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v,\end{aligned}$$

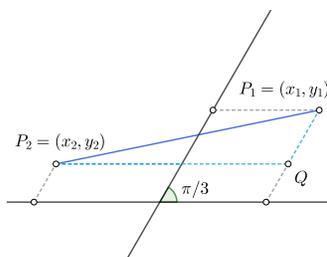
dado que $\cos(-v) = \cos v$ y $\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$.

Para la fórmula de la tangente tenemos

$$\begin{aligned}\tan(u-v) &= \frac{\operatorname{sen}(u-v)}{\cos(u-v)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v}}{\frac{\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\cos u \cos v}} \\ &= \frac{\operatorname{tan} u - \operatorname{tan} v}{1 + \operatorname{tan} u \operatorname{tan} v}.\end{aligned}$$

Verifique los detalles de esta deducción. □

9. *Solución del ejercicio 29.* El sistema $x = u + v$, $y = u - v$ puede resolverse para u y v como $u = (x + y)/2$, $v = (x - y)/2$.
10. *Solución del ejercicio 19.* Considere el triángulo $\triangle P_1P_2Q$, mostrado en la figura, y utilice la ley de los cosenos.



Solución del ejercicio 31.

31a Debemos insistir que las unidades de los ángulos aquí empleadas son *radianes* y que el uso de grados no tiene sentido, ya que la ecuación $r = \theta$ requiere unidades de longitud en ambos lados de la igualdad

para ser coherente. La gráfica simplemente representa el hecho de que r crece sin límite conforme la variable angular θ lo hace también. Se recomienda al lector principiante que realice una tabla para esta gráfica de r versus θ y que la trace sobre papel polar antes de utilizar computadoras. La gráfica correspondiente a esta espiral se encuentra en la figura 154.

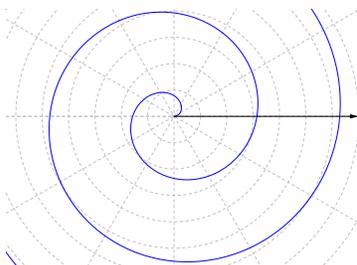


Figura 154: Gráfica de la espiral $r = \theta$.

31b Observamos que dado que $\text{sen}(2\theta)$ es negativo si $\theta \in (\pi/2, \pi)$ y $\theta \in (3/2\pi, 2\pi)$ y dado que $r^2 \geq 0$, no puede haber gráfica en tales intervalos. Es decir sólo puede haber gráfica para $\theta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3/2\pi]$.

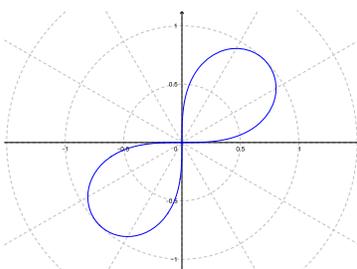


Figura 155: Gráfica de $r^2 = \text{sen}(2\theta)$.

Una tabla con algunos valores pertinentes se muestra en el Cuadro 3.

θ	$\text{sen}(2\theta)$	r^2
0	0	0
$\pi/6$.860	0.75
$\pi/4$	1	1
$\pi/3$.860	.75
$\pi/2$	0	0

Cuadro 3: Tabla correspondiente a la lemniscata $r^2 = \text{sen}(2\theta)$.

31c Finalmente, para la rosa de cuatro pétalos se puede usar el mismo Cuadro 3 salvo que ahora r puede ser negativo (a diferencia de r^2). Intente algunos trazos sobre papel polar.

11. Solución del ejercicio 36.

a) Dado que la función coseno es una función par, se tiene $\cos\theta = \cos(-\theta)$ por lo que la gráfica de $r = \cos\theta$ es simétrica respecto al eje polar como se muestra en la Figura 157.

b) Dado que

$$\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\pi \cos(\theta) - \text{sen}\theta \cos\pi = \text{sen}\theta,$$

la gráfica de $r = \text{sen}\theta$ es simétrica respecto al eje $\theta = \pi/2$. Como la función seno es impar se tiene $\text{sen}\theta = -\text{sen}(-\theta)$ por lo $r = \text{sen}\theta$, no cambia si se sustituye θ por $-\theta$ y al mismo tiempo r por $-r$. Por lo tanto la gráfica es simétrica respecto al eje $\theta = \pi/2$. ¡Dibuje la gráfica!

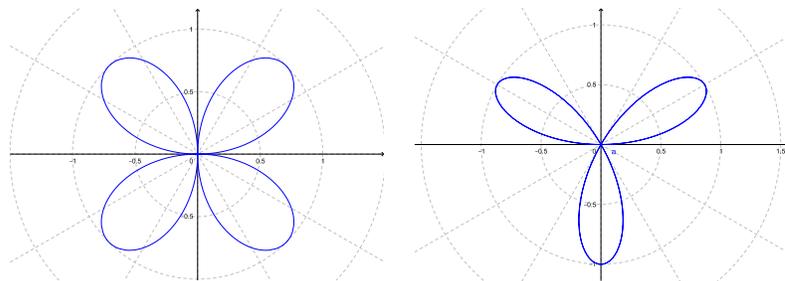


Figura 156: Gráficas de $r = \text{sen } 2\theta$ y $r = \text{sen } 3\theta$.

- c) La curva $r^2 = \text{sen}(2\theta)$ no cambia si se sustituye r por $-r$. Tampoco cambia si se sustituye θ por $\pi + \theta$. La curva es en este caso simétrica respecto al polo $(0,0)$.

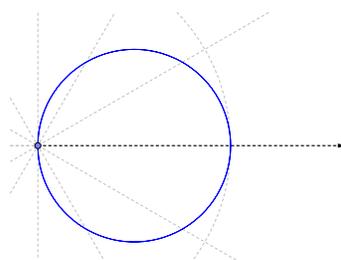


Figura 157: Gráfica de $r = \cos \theta$, en coordenadas polares.

Los números complejos y el plano cartesiano

Al plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ se le pueden asignar dos estructuras algebraicas. Una es la de espacio vectorial sobre \mathbb{R} y otra es la de campo. El plano \mathbb{R}^2 visto como espacio vectorial es el tema de un curso universitario de geometría analítica. El ejemplo de campo más familiar para el lector, casi seguramente, es el de los números reales \mathbb{R} . Un campo es un conjunto donde se han definido dos operaciones, las cuales satisfacen todas las propiedades algebraicas de las operaciones suma y producto en \mathbb{R} . Nos interesa ahora ver a los pares (x, y) como números, para este fin se definen las operaciones suma y producto de la manera siguiente:

Definición [Suma y producto en \mathbb{C}]. Para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, se definen las operaciones suma y producto mediante las fórmulas⁴⁴

$$(a, b) + (c, d) \stackrel{def}{=} (a + c, b + d), \quad (78)$$

$$(a, b)(c, d) \stackrel{def}{=} (ac - bd, ad + bc). \quad (79)$$

Denotaremos con \mathbb{C} el conjunto \mathbb{R}^2 con las dos operaciones suma y producto.

Con la definición anterior, el lector puede verificar por sí mismo que la suma y producto son conmutativas y asociativas:

(P 1) Para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b),$$

$$(a, b)(c, d) = (c, d)(a, b)$$

es decir, *las operaciones suma y producto son conmutativas.*

(P 2) Para todo $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ y $(a_3, b_3) \in \mathbb{C}$, se cumple

$$\left((a_1, b_1) + (a_2, b_2) \right) + (a_3, b_3) = (a_1, b_1) + \left((a_2, b_2) + (a_3, b_3) \right)$$

$$\left((a_1, b_1)(a_2, b_2) \right) (a_3, b_3) = (a_1, b_1) \left((a_2, b_2)(a_3, b_3) \right).$$

El lector también debe verificar que existen algunos elementos en \mathbb{C} con propiedad de neutros.

⁴⁴ Para denotar la multiplicación no es conveniente usar los símbolos \times y \cdot , los cuales tienen significado especial en los espacios vectoriales.

(P 3) El elemento $\bar{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0) \in \mathbb{C}$ satisface que para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$

$$(a, b) + \bar{0} = (a, b).$$

(P 4) El elemento $\mathbb{1} \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0) \in \mathbb{C}$ satisface para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{1}(a, b) = (a, b)$$

También se puede verificar que existen elementos inversos.

(P 5) Sea $z = (a, b)$, entonces el elemento $-z \stackrel{\text{def}}{=} (-a, -b) \in \mathbb{C}$ satisface

$$z + (-z) = \bar{0}.$$

(P 6) Si $z = (a, b) \neq \bar{0}$ entonces existe $z^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$, tal que

$$zz^{-1} = \mathbb{1}.$$

Finalmente, se puede verificar que en \mathbb{C} se cumple la propiedad distributiva.

(P 7) Para todo $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ y $(a_3, b_3) \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\left((a_1, b_1) + (a_2, b_2) \right) (a_3, b_3) = (a_1, b_1)(a_3, b_3) + (a_2, b_2)(a_3, b_3).$$

Es indispensable que el lector verifique por sí mismo las propiedades (P 4) y (P 6), al menos.

Definición [Campo]. Un conjunto \mathbb{K} , donde se han definido dos operaciones \oplus, \otimes que satisfacen las propiedades (P 1) a (P 7), se llama *Campo*. Un campo suele denotarse con una terna $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$.

El número i

Ahora definimos el famoso número complejo i y seguidamente su propiedad más importante.

Definición [El número i]. El número complejo i se define mediante la fórmula $i \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)$.

Lema. Se cumple que $i^2 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1)(0, 1) = -\mathbb{1}$.

Demostración. Por las definiciones de i y de producto en \mathbb{C} se tiene

$$\begin{aligned} (0, 1)(0, 1) &= ((0 \cdot 0) - (1 \cdot 1), (0 \cdot 1) + (1 \cdot 0)) \\ &= (-1, 0) \\ &= -\mathbb{1}, \end{aligned}$$

La propiedad más importante del número i es $i^2 = -\mathbb{1}$, o bien

$$i = \sqrt{-1}$$

como suele escribirse.

así $i^2 = -1$, como se desea demostrar. \square

Ahora es pertinente hacer algunas definiciones básicas.

Definición [Conjugado complejo]. Para todo número $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ de define

i) el *conjugado* de z , como el número $\bar{z} = (a, -b)$,

ii) el *módulo* de z , como el número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Con la definición anterior se llega al siguiente lema muy importante para el cálculo de inversos multiplicativos.

Lema [Inverso de un número complejo]. Para todo $z \neq \bar{0}$ se tiene que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Demostración. Sea $z = (a, b) \neq (0, 0)$. Dado que $|z|^2 = a^2 + b^2$ y dado que por definición $\bar{z} = (a, -b)$, el lema se sigue inmediatamente. \square

Representación geométrica de los números complejos

Hemos identificado \mathbb{C} con el producto cartesiano \mathbb{R}^2 . Al dotar al plano cartesiano con un par de ejes perpendiculares, tenemos inmediatamente toda la geometría del plano euclidiano heredada por el plano complejo. Así, a cada $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ le corresponde un punto en el plano euclidiano, el módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es la distancia del punto al origen de coordenadas $(0, 0)$. Entonces, si denotamos $r = |z|$, tenemos por las identidades (76), (77),

$$z = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta). \quad (80)$$

Dada la representación polar (80), podemos dar un sentido geométrico a la multiplicación de números complejos.

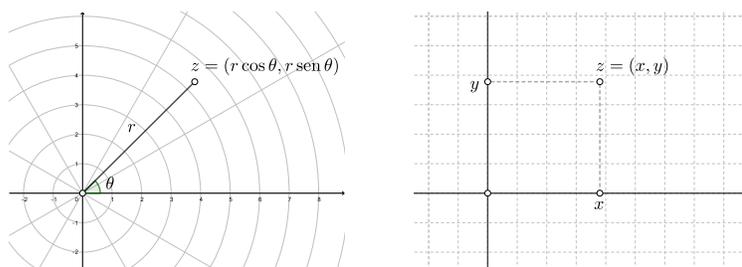


Figura 158: Representaciones polar y cartesiana de un número complejo z .

Representación geométrica de la multiplicación de números complejos

Comenzamos multiplicando dos números complejos z_1, z_2 que estén sobre la circunferencia unitaria con representación polar $z_1 = (\cos \theta_1, \text{sen } \theta_1)$ y $z_2 = (\cos \theta_2, \text{sen } \theta_2)$. Tenemos entonces que su producto es, por definición,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\cos \theta_1, \text{sen } \theta_1)(\cos \theta_2, \text{sen } \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2, \cos \theta_1 \text{sen } \theta_2 + \cos \theta_2 \text{sen } \theta_1) \\ &= (\cos(\theta_1 + \theta_2), \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

donde la última ecuación se cumple por los Corolarios I.2-T y I.3-T (seno y coseno de suma de ángulos). Hemos obtenido que si denotamos por $z_3 = z_1 z_2$ el número z_3 es un punto que se encuentra sobre la circunferencia unitaria rotado un ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

Comprendido el significado del producto de números sobre la circunferencia unitaria, es fácil ver que para dos números complejos cualesquiera $z_1 = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \text{sen } \theta_1)$ y $(r_2 \cos \theta_2, r_2 \text{sen } \theta_2)$, se tiene la fórmula general del producto de números complejos.

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), r_1 r_2 \text{sen } (\theta_1 + \theta_2)). \quad (81)$$

La demostración de la fórmula general (81) se deja como ejercicio.

Fórmula de De Moivre

Un caso particular de la fórmula (81) es cuando $z_1 = z_2 = z$, de donde obtenemos

$$z^2 = (r^2 \cos 2\theta, r^2 \text{sen } 2\theta).$$

Para una potencia cualquiera $n \in \mathbb{N}$, se tiene la famosa fórmula de De Moivre.

Teorema [Fórmula de De Moivre]. Para toda $n \in \mathbb{N}$ y todo $z = (r \cos \theta, \text{sen } \theta) \in \mathbb{C}$ se tiene

$$z^n = (r^n \cos n\theta, r^n \text{sen } n\theta). \quad (82)$$

Demostración. La demostración se hace por inducción aplicando repetidas veces la fórmula (81) y se deja como ejercicio. \square

Representación $a + bi$ de números en \mathbb{C}

Teniendo la representación geométrica de los números complejos y la identificación de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , podemos pasar a la representación clásica (o histórica) de los números complejos.

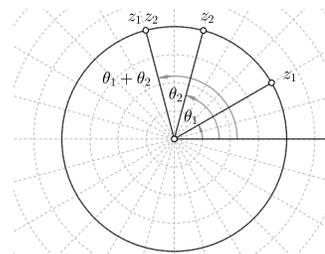


Figura 159: Producto de dos números complejos sobre la circunferencia unitaria $z_1 z_2 = z_3$.

Fórmula de De Moivre

$$z^n = (r^n \cos n\theta, r^n \text{sen } n\theta).$$

Dado un vector $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, se define el producto por un escalar (número real) $\alpha \in \mathbb{R}$ como $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2)$. Similarmente, en \mathbb{C} definimos el producto de un número real α por un número complejo $z = (x, y)$ como

$$\alpha z = (\alpha x, \alpha y).$$

Recordando que se tienen los dos números complejos $\mathbb{1} = (1, 0)$ y $i = (0, 1)$ se obtiene para toda $z = (x, y)$ en \mathbb{C} :

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x\mathbb{1} + yi$$

o bien simplemente

$$z = x + yi, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (83)$$

Al número x se le llama *parte real* de z y al número y , *parte imaginaria* de z . La parte real e imaginaria de un número complejo z se denotan respectivamente $\operatorname{re}(z)$ e $\operatorname{im}(z)$.

También para la representación polar $z = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, se tiene

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (84)$$

Nota. Al lector que ha tenido paciencia para llegar hasta aquí tenemos que confesar que *abandonamos desde este momento la notación $z = (x, y)$ y para siempre*. Pero no así las notaciones (83) ni (84). La principal finalidad de la notación que ahora abandonamos (además de identificar \mathbb{C} con \mathbb{R}^2) fue evitar que alguien piense que los números complejos tienen algo de *imaginario*. Se le llamó *imaginario* al número i por razones históricas, ya que cuando apareció por primera vez no se conocía ningún número tal que al elevarlo al cuadrado fuera negativo.

Operaciones con la notación clásica

La primera ventaja de la notación histórica sobre la de pares ordenados es que no hay que recordar la fórmula del producto sino simplemente hay que operar los números como siempre ha hecho el lector con los números reales, aplicando las leyes distributivas, asociativas y etcétera, pero recordando siempre que $i^2 = -1$.

Ejemplo. Obtenga el producto de $1 + i$ con $2 - 3i$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} (1 + i)(2 - 3i) &= 1 \cdot (2 - 3i) + i \cdot (2 - 3i) \\ &= 2 - 3i + i \cdot 2 + i \cdot (-3i) \\ &= 2 - 3i + 2i - 3i^2, \quad (\text{pero } i^2 = -1), \\ &= (2 + 3) + (-3i + 2i) \\ &= 5 - i, \end{aligned}$$

Notación: $z = (x, y) = x + yi = x + iy$ o bien,

$$z = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

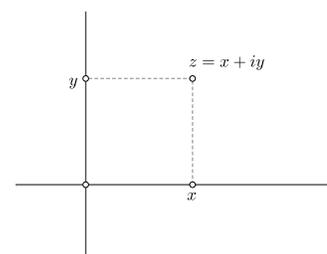


Figura 160: La notación clásica o histórica de un número complejo.

El lector debe ser capaz de justificar cada paso de la multiplicación anterior mencionando la propiedad o propiedades de campo de los números que se utilizaron y deberá hacerlo de esa manera siempre en los ejercicios.

Ahora debemos ejercitarnos en la aritmética de los números complejos, el primer paso es traducir las definiciones de pares ordenados a la notación clásica.

Ejercicio. Escriba los pares para el conjugado, el inverso multiplicativo y el cuadrado de un número complejo en la forma $z = a + bi$ y dibuje la representación gráfica del conjugado y del inverso.

Solución. Si $z = a + bi$ entonces su conjugado \bar{z} es

$$\bar{z} = a - bi$$

y su representación geométrica se presenta en la Figura 161.

Para el inverso z^{-1} , de z tenemos que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

por lo tanto, para $z = a + bi$, se tiene

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} z^2 &= (a + bi)(a + bi) \\ &= a^2 + abi + b^2i^2 + bia \\ &= a^2 - b^2 + 2abi. \end{aligned}$$

Ejemplo. Dado un número complejo $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$, escriba la fórmula de De Moivre en la forma $a + bi$. Determine la parte real imaginaria de z^n .

Solución. La fórmula de De Moivre se escribe directamente

$$z^n = r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{re}(z^n) = r^n \cos n\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{im}(z^n) = r^n \sin n\theta.$$

No olvide que *la parte imaginaria es solamente el número real* que multiplica a i .

Las siguientes proposiciones son muy importantes para la aritmética en \mathbb{C} y sus demostraciones son un mero cálculo, pero es muy importante que el lector las realice por sí mismo para familiarizarse con las propiedades de los números complejos.

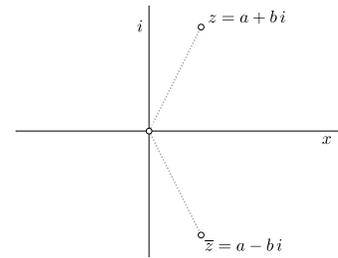


Figura 161: El conjugado de un número complejo $z = a + bi$, está dado por $\bar{z} = a - bi$. Geométricamente \bar{z} está dado por punto simétrico a z respecto al eje real x .

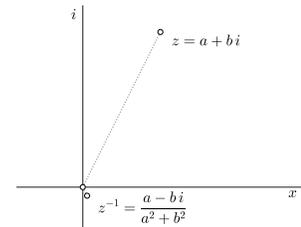


Figura 162: El inverso multiplicativo de un número complejo $z = a + bi$ está dado por $z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$. Si el módulo de z es mayor que uno, el módulo del inverso es cercano al cero y recíprocamente. El inverso de un número de módulo uno está, por supuesto, sobre la circunferencia unitaria.

Proposición I [Propiedades del módulo complejo]. Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple:

- i) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- ii) $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$.
- iii) $|z^n| = |z|^n$.
- iv) $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. □

Proposición II [Propiedades del conjugado complejo]. Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple:

- i) $\overline{\bar{z}} = z$.
- ii) $\bar{z} = z \Leftrightarrow \text{im}(z) = 0$.
- iii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
- v) $\text{re}(z) = \text{re}(\bar{z}) = 1/2(z + \bar{z})$.
- vi) $\text{im}(z) = -\text{im}(\bar{z}) = i/2(z - \bar{z})$.

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. □

Propiedad básica del módulo de un número complejo:

$$|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z}$$

Imposibilidad de extender el orden de \mathbb{R} a \mathbb{C}

El orden en \mathbb{R} es algo más que poder comparar dos números reales con la relación “mayor que”, se requiere también que el conjunto de números positivos sea cerrado bajo la multiplicación y suma. El orden en \mathbb{R} se establece por medio del siguiente axioma.

Axioma I [Orden en \mathbb{R}]. El conjunto de números reales \mathbb{R} contiene un subconjunto \mathbf{P} llamado *conjunto de números positivos* con las siguientes propiedades:

- i) Si a y $b \in \mathbf{P}$, entonces $a + b \in \mathbf{P}$ y $ab \in \mathbf{P}$.
- ii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta: $a \in \mathbf{P}$, o bien $-a \in \mathbf{P}$, o bien $a = 0$.

Con el conjunto \mathbf{P} se pueden definir los signos $>$, $<$, \leq , etcétera.

Definición [Mayor que]. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a > b$ significa que $a - b \in \mathbf{P}$; $a < b$ significa que $b > a$; $a \geq b$ significa que $a > b$ o bien que $a = b$.

En el siguiente Teorema se muestra que no es posible extender el conjunto \mathbf{P} a todo \mathbf{C} .

Proposición [El orden de \mathbb{R} no se extiende a \mathbf{C}]. Existen elementos de \mathbf{C} que no satisfacen (i) ni la ley de tricotomía (ii) del Axioma I.

Demostración. Supongamos que el conjunto $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}$ puede ser extendido a \mathbf{C} , de tal manera que se cumplan las propiedades (i) y (ii) del Axioma I, para toda $a, b \in \mathbf{C}$. Demostraremos que ni i , ni $-i$, pueden estar en \mathbf{P} . Efectivamente, si $i \in \mathbf{P}$, entonces $i \cdot i \in \mathbf{P}$, pero $i \cdot i = i^2 = -1 \notin \mathbf{P}$. Por otra parte si $-i \in \mathbf{P}$, también se debería tener $(-i)(-i) \in \mathbf{P}$, pero $(-i)(-i) = i^2 = -1 \notin \mathbf{P}$. Finalmente como $i \neq 0$, no puede existir un conjunto $\mathbf{P} \subset \mathbf{C}$, tal que para todo $a \in \mathbf{C}$, o $a \in \mathbf{P}$, o bien $-a \in \mathbf{P}$, o bien $a = 0$ y que al mismo tiempo se cumpla para \mathbf{P} la propiedad (i) del Axioma I. \square

Nota. Con la proposición anterior el lector *debe expulsar de su mente para siempre la posibilidad de escribir* $z_1 \leq z_2$, si z_1 y z_2 tienen parte imaginaria distinta de cero.

No obstante el teorema anterior, los números reales $\operatorname{re} z$, $\operatorname{im} z$ y $|z|$ formados a partir de un número complejo si pueden ordenarse (dado que son números reales) y de hecho, se cumplen las siguientes propiedades básicas.

Proposición III [Desigualdad del triángulo y otras desigualdades]. Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\text{i) } \operatorname{re} z \leq |\operatorname{re} z| \leq |z|.$$

$$\text{ii) } \operatorname{im} z \leq |\operatorname{im} z| \leq |z|.$$

$$\text{iii) } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \text{ en general, } \left| \sum_{n=1}^N z_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |z_n|, \text{ llamada desigualdad del triángulo.}$$

$$\text{iv) } |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Demostración. (i) Sean $x = \operatorname{re} z$ y $y = \operatorname{im} z$. Si $x \geq 0$, entonces $x = |x|$; si $x < 0$, entonces $x < |x|$, ya que $|x| \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Se concluye que $\operatorname{re} z \leq |\operatorname{re} z|$. La demostración de que $\operatorname{im} z \leq |\operatorname{im} z|$ es similar. La segunda parte de la desigualdad se sigue de $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y por lo tanto,

$$|z|^2 \geq |x|^2 \text{ y } |z|^2 \geq |y|^2.$$

Consecuentemente, $|\operatorname{re} z| \leq |z|$ y $|\operatorname{im} z| \leq |z|$.

(iii) Tenemos por (iv) de la Proposición I y dado (iii) de la Proposición III,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2),$$

Dos números complejos z_1, z_2 , no pueden en general ser comparados entre sí de tal forma que pueda afirmarse que se cumple una de las tres posibilidades:

$$z_1 < z_2, \text{ o } z_1 > z_2, \text{ o } z_1 = z_2$$

y que al mismo tiempo se mantenga la cerradura bajo suma y producto del conjunto \mathbf{P} de números reales mayores que cero.

además,

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \quad (85)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{re}(z_1\bar{z}_2) \quad (86)$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \quad (87)$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2. \quad (88)$$

El lector no debe tener dificultad en verificar que (85) es simplemente la aplicación de la propiedad distributiva de \mathbb{C} ; (86) es la propiedad (iv) de la Proposición I, junto con las propiedades (v) y (vi) de la Proposición II; y (87) es por (i) de la Proposición III. Podemos concluir que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ de donde se sigue la primera parte de (iii) de la Proposición III.

La propiedad (iv) se deja como ejercicio. \square

Teorema de De Moivre para exponente racional

Con argumentos geométricos hemos podido constatar que si $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

esta fórmula se puede generalizar inmediatamente para $n < 0$.

Proposición IV [Fórmula de De Moivre para exponentes negativos].

Para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)$.

Demostración. De hecho se tiene

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n} \quad (89)$$

$$= \frac{1}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \quad (90)$$

$$= \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta \quad (91)$$

$$= \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta). \quad (92)$$

El lector debe justificar (89), (90), (91) y (92), como ejercicio. \square

Pasamos al cálculo de raíces de números complejos, esta fórmula es muy importante en la solución de ecuaciones y en las famosas construcciones de Gauss relacionadas con la posibilidad de construir polígonos con regla y compás.

Definición [Raíz n-ésima]. Un número complejo w tal que $w = z^n$, para cierto $z \in \mathbb{C}$ dado, se llama *raíz n-ésima* de z . Se denota $w^{1/n} = z$ a una raíz de z .

Para el cálculo de las raíces comenzamos con números complejos sobre la circunferencia unitaria y de ahí se parte a las raíces en general.

Fórmula de De Moivre para exponentes negativos

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)$$

Proposición V [Raíces de números complejos]. Sea $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ dado, entonces todas las raíces n -ésimas de z para $n \in \mathbb{N}$ están dadas por la fórmula

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{1/n} = \cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (93)$$

Nota. Obviamente $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ es lo que se dice con $k \in \mathbb{Z}$, pero en realidad solamente hay n raíces distintas dadas por $\theta/n, \theta/n + 2\pi/n, \dots, \theta/n + (n-1)2\pi/n$, dada la periodicidad de las funciones seno y coseno.

Demostración. Supongamos que $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{1/n} = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$, entonces

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta &= (\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)^n \\ &= \cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi. \end{aligned}$$

Dado que dos números complejos z_1 y z_2 son iguales si y solo si $\operatorname{re} z_1 = \operatorname{re} z_2$ y $\operatorname{im} z_1 = \operatorname{im} z_2$, tenemos que $\cos \theta = \cos n\phi$ y al tomar cosenos inversos llegamos a $n\phi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De donde se sigue la fórmula (93). □

Raíces enésimas de la unidad

Muy importantes en el álgebra son las raíces de la unidad, las cuales podemos calcular fácilmente con la fórmula (93). Procedemos a realizar el cálculo de algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo. Encuentre las raíces cuadrada y cúbica de 1 en \mathbb{C} .

Solución. Debemos resolver las ecuaciones $x^2 = 1$ y $x^3 = 1$ en \mathbb{C} . Claramente $x^2 = 1$ si y solo si $x^2 - 1 = 0$ si y solo si $x = 1$ o $x = -1$, pero deseamos calcular estos números usando la fórmula (93). Escribimos $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ por lo que $\phi = 0/2, 0/2 + 2\pi/2$. Por lo tanto, se tienen las raíces cuadradas de 1 dadas por $z_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$ y $z_2 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$.

Para el cálculo de las raíces cúbicas de 1 primero resolvemos la ecuación $x^3 - 1 = 0$. De esta forma se tiene que

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

de donde $x = 1$ o $x^2 + x + 1 = 0$, pero

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Solo hay n raíces distintas dadas por:

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$$

o bien, $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Deseamos calcular estos números complejos mediante la fórmula (93). Tenemos que las raíces están dadas por $\phi = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$, así las tres raíces de 1 son

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1, \\ z_2 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \\ z_3 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

En general hemos obtenido que la ecuación $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$, $n \geq 2$, tiene soluciones dadas por la raíz n -ésima de la unidad, dado que

$$\begin{aligned} x^n - 1 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0, \end{aligned}$$

como el lector puede comprobar simplemente desarrollando el producto $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, lo que también da lugar a la fórmula,

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1, \quad \text{si } x \neq 1.$$

El procedimiento para calcular las raíces n -ésimas de la unidad nos da la forma de construir un polígono de n lados⁴⁵, lo que inspiró a Gauss para encontrar un método para decidir cuales polígonos pueden construirse usando solamente regla sin marcas y compás. Gauss descubrió que podía construirse el polígono de 17 lados y otros más, construcciones que no tenían precedente en la historia. La estatua de bronce de Gauss en Gotinga, erigida después de su muerte, tiene la forma de un 17-ágono, honrando su logro. Pero más aún, este descubrimiento impulsó a Gauss a estudiar matemáticas a la edad de 19 años en lugar de filología, para la cual se cuenta que también tenía extraordinarios dotes. Quien desee conocer más del método de Gauss puede consultar el libro de Bold⁴⁶.

Aplicaciones

La teoría de variable compleja es de interés en sí misma desde el punto de vista de la investigación contemporánea. Tiene a la vez múltiples aplicaciones dentro de la misma matemática y en otras ciencias. Aquí veremos algunos ejemplos que pueden considerarse como aplicaciones.

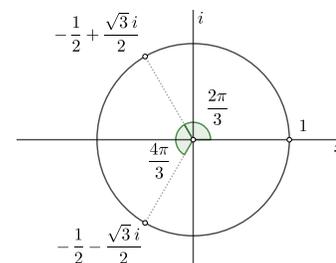


Figura 163: Las raíces cúbicas de 1 están dadas por $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$ y $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

⁴⁵ Los griegos sabían dividir la circunferencia en n partes iguales, cuando $n = 2^h, 3, 5$, o cualquier múltiplo de estos números.

⁴⁶ Benjamin Bold. *Famous problems in Geometry and how to solve them*. Dover Publications, Inc. New York, 1969

Solución de ecuaciones y factorización

La primera aparición del número i ocurrió en la solución de ecuaciones cúbicas durante el Renacimiento. Por ahora, estudiaremos como aparece i en la ecuación de segundo grado.

Solución de ecuaciones de segundo grado. Es conocida la solución de toda ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, la cual está dada por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se tienen los siguientes casos de acuerdo al signo del discriminante $b^2 - 4ac$.

1. $b^2 - 4ac = 0$ se tiene una raíz doble $x = \frac{-b}{2a}$ y se obtiene la factorización:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2.$$

2. $b^2 - 4ac > 0$ se tienen dos raíces en \mathbb{R} , $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Se obtiene la factorización:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

3. $b^2 - 4ac < 0$ se tienen dos raíces en \mathbb{C} , $z = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$ y $\bar{z} = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$. Se obtiene la factorización en \mathbb{C} :

$$ax^2 + bx + c = a(x - z)(x - \bar{z}).$$

El lector, antes de este curso, debe haber tenido múltiples experiencias resolviendo ecuaciones de segundo grado con soluciones en \mathbb{R} . Sin embargo, el caso (3) anterior pudo haberse soslayado dada la presencia de las raíces complejas. Por ello es relevante en este momento ejemplificar los casos más relevantes de ecuaciones cuadráticas donde aparecen números complejos.

Ejemplo. Encuentre la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y factorice.

Solución. Aquí no es necesario usar la fórmula cuadrática, aunque puede usarse:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i. \end{aligned}$$

Se obtiene así la factorización

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

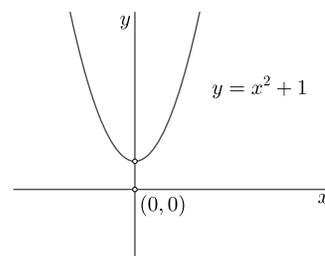


Figura 164: Se muestra la gráfica de la función $y = x^2 + 1$, la cual no corta al eje x debido a que la ecuación $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución en \mathbb{R} , sino en \mathbb{C} .

Es oportuno recordar que la gráfica de la función $y = x^2 + 1$ no corta al eje x , dado que la ecuación $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución en \mathbb{R} , sino en \mathbb{C} .

Ejemplo. De hecho ya hemos resuelto la ecuación $x^n - 1 = 0$ la cual tiene como solución las raíces n -ésimas de la unidad y puede factorizarse como

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - w_1)(x - w_2) \cdots (x - w_{n-1}),$$

donde w_1, \dots, w_{n-1} son las raíces de la ecuación

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0,$$

llamada *ecuación ciclotómica*.

Ejemplo. Solo para completar se incluye un ejemplo donde se puede usar la fórmula cuadrática, muchos más ejemplos se encuentran en la sección de ejercicios. Resuelva la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución. Para $x^2 + x + 1 = 0$ se tiene mediante la fórmula cuadrática que

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Teorema fundamental del álgebra

En general, las intersecciones de la gráfica de un polinomio con el eje x indica el número de raíces reales del polinomio. En la Figura 165 se muestra la gráfica de una cúbica. La gráfica inferior corresponde a $y = (x + 1)(x + 2)(x - 1)$, la cual tiene tres raíces reales: $x = -2, -1, 1$. La gráfica intermedia también tiene tres raíces reales, pero una de ellas es una raíz doble. Finalmente la gráfica superior corresponde a $y = (x + 1)(x + 2)(x - 1) + 4$ la cual solo tiene una raíz real, como puede observarse en la figura.

Para un polinomio de grado $n \geq 2$, se tiene el teorema fundamental que enunciamos sin demostración ya que las técnicas para demostrarlo exceden los objetivos de este libro. El lector interesado, puede encontrar la información pertinente en cualquier texto de Análisis Complejo.

Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio de grado n ,

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

con coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, puede ser factorizado como el producto de exactamente n factores,

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n),$$

donde $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, son raíces de la ecuación $p(x) = 0$.

Ecuación ciclotómica

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

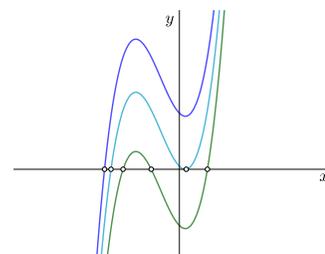


Figura 165: Una cúbica puede tener tres raíces reales (con la posibilidad de una raíz repetida) o una raíz real y dos complejas.

Teorema fundamental del álgebra

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x - z_1) \cdots (x - z_n)$$

con $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Nota. Dado que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, no hay que olvidar que los z_1, \dots, z_n , pueden ser reales, tampoco hay que olvidar que en la factorización de $p(x)$ puede haber raíces repetidas. El lector debe notar que el teorema fundamental del Álgebra garantiza la existencia de las raíces, pero no indica como encontrarlas. Para cerrar, solo mencionaré que existe fórmula para calcular raíces de polinomios con grado n con $2 \leq n \leq 4$. Para grado mayor que o igual a cinco no existe fórmula general para resolver la ecuación con radicales.

Aplicaciones para series de Fourier

En múltiples aplicaciones se requiere poder expresar potencias de senos y cosenos en términos de senos y cosenos de ángulos múltiples y al revés. Mostraremos con ejemplos como hacerlo.

Ejemplo. Expresar $\cos 3\theta$ y $\sin 3\theta$ como polinomios en $\cos \theta$ y $\sin \theta$, respectivamente.

Solución. Sea $z_1 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$. Dado que $\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3$ y dado que

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta + 3i^2 \cos \theta \sin^2 \theta + i^3 \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} z_2. \end{aligned}$$

Como dos números complejos z_1 y z_2 son iguales si y solo si $\operatorname{re} z_1 = \operatorname{re} z_2$ e $\operatorname{im} z_1 = \operatorname{im} z_2$, igualando la parte real de z_2 con la parte real de z_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta. \end{aligned}$$

Igualando parte imaginaria con parte imaginaria se llega a

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \\ &= 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta \\ &= -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta. \end{aligned}$$

Ejemplo. Expresar $\cos^3 \theta$ en términos de funciones trigonométricas de ángulos múltiples.

Solución. Una forma de ver la fórmula de De Moivre es poner $z = \cos \theta + i \sin \theta$ y de esta forma

Expresiones útiles de la fórmula de De Moivre

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \quad \sin n\theta = \frac{i}{2}(z^{-n} - z^n)$$

$$z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta, \quad z^{-n} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta \quad (94)$$

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \quad \operatorname{sen} n\theta = \frac{i}{2}(z^{-n} - z^n) \quad (95)$$

Donde la primera ecuación en (95) se obtiene sumando las ecuaciones en (94) y la segunda ecuación se obtiene restándolas.

Para expresar $\cos^3 \theta$ como se desea, se usa la fórmula (95), primero desarrollando las potencias:

$$\begin{aligned} 2^3 \cos^3 \theta &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 \\ &= z^3 + 3z^2 \frac{1}{z} + 3z \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \\ &= \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \cos 3\theta + 3 \cos \theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto⁴⁷

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{8} \cos 3\theta + \frac{3}{8} \cos \theta.$$

Fórmula de Euler

Suponiendo sin justificación⁴⁸ que las reglas para sumas infinitas de número reales se cumplen para los complejos podemos obtener algunas fórmulas que son indispensables en las matemáticas contemporáneas. Pero no hay que olvidar que estas fórmulas son demostradas los cursos serios de cálculo diferencial, por ejemplo en el libro de Michel Spivak⁴⁹.

Recordamos las fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \end{aligned}$$

las cuales son válidas para toda $x \in \mathbb{R}$, pero si las suponemos válidas para $x = i\theta \in \mathbb{C}$, dado que $i^{2n} = (-1)^n$ y $i^{2n+1} = (-1)^n i$, obtenemos,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right) \\ &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \end{aligned} \quad (96)$$

⁴⁷ El lector con conocimientos de series de Fourier reconocerá los coeficientes en la solución de este ejercicio que se han encontrado sin necesidad de ninguna integración.

⁴⁸ Suponer algo sin justificación es una buena manera de inventar matemáticas y probablemente así creó Euler la fórmula que da nombre a esta sección, solo hay que cerciorarse posteriormente que las fórmulas sean válidas.

⁴⁹ Michel Spivak. *Calculus*. Reverte, 2018

De donde se obtiene una representación más para los números complejos dada la forma polar $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$,

$$z = r e^{i\theta}.$$

Poniendo $\theta = \pi$ en la fórmula (96) se obtiene la sorprendente relación

$$e^{i\pi} = -1$$

la cual es posiblemente una de las fórmulas más espectaculares de la matemática, ya que se relacionan las constantes π , i y la constante de Euler, e , en una forma por demás simple.

Funciones trascendentes de variable compleja

Es posible demostrar⁵⁰ que las series de Taylor para seno, coseno y la exponencial se cumplen para todo valor de $z \in \mathbb{C}$, lo cual da lugar a las fórmulas

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (97)$$

$$\operatorname{cos} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (98)$$

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad (99)$$

Dado que la la fórmula para los exponentes debe ser válida, al poner $z = x + iy$ se debe tener

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y), \end{aligned}$$

lo cual nos permite definir la exponencial de números complejos mediante la fórmula

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

Propiedad multiplicativa de la exponencial

La propiedad fundamental de la función exponencial en \mathbb{R} es $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, propiedad que se extiende a \mathbb{C} , lo cual se expresa en el siguiente teorema. Recuerde que las demostraciones rigurosas requieren que

Fórmula de Euler

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

⁵⁰ Lars V. Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Dover Publications, Inc. New York, 1966

Definición de e^z

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

hayan demostrado previamente las fórmulas (97), (98) y (99) lo cual sobrepasa los objetivos de este libro, por lo que *esta parte debe considerarse solo como una exposición divulgativa solamente.*

Teorema [Propiedad multiplicativa de la función exponencial]. Para toda $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Demostración. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ elementos de \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

El lector debe poder justificar cada paso de la demostración anterior y se deja como ejercicio. \square

Otras expresiones para $\cos z$ y demás funciones trigonométricas

Además de las series (98) y (97) hay otras formas de expresar estas funciones trigonométricas en términos de la exponencial utilizando (99) dado que

$$\begin{aligned} \cos z + i \operatorname{sen} z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\ &= e^{iz}. \end{aligned}$$

De la misma manera puede verse que también se tiene $\cos z - i \operatorname{sen} z = e^{-iz}$. A partir de estas fórmulas se obtiene (ver ejercicios)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad (100)$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad (101)$$

Con las identidades (100) y (101) se definen las demás funciones trigonométricas de variable compleja

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \quad (102)$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad (103)$$

$$\operatorname{csc} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad (104)$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad (105)$$

Otras expresiones para $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Propiedades de las funciones trigonométricas complejas

Muchas propiedades de las funciones trigonométricas son heredadas por las funciones de variable compleja. Algunas no, por ejemplo $|\cos z| > 1$ para ciertos valores de z , pero $|\cos x| \leq 1$, si $x \in \mathbb{R}$. Pero la periodicidad y las fórmulas del ángulo doble, así como la identidad pitagórica se extienden a todo \mathbb{C} .

Teorema [Propiedades de las funciones trascendentes en \mathbb{C}]. Para toda $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumplen las siguientes identidades:

- i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
- ii) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$.
- iii) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

Demostración. (i) Basta sustituir las identidades (100) y (101) para obtener:

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) - \frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}) \\ &= 1.\end{aligned}$$

El lector debe argumentar cada paso de la demostración anterior.

(ii) Sustituimos (100) y (101) en el producto $2 \sin z_1 \cos z_2$ con lo que se tiene

$$\begin{aligned}2 \sin z_1 \cos z_2 &= \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{iz_1} e^{iz_2} + e^{iz_1} e^{-iz_2} - e^{-iz_1} e^{iz_2} - e^{-iz_1} e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) + \frac{1}{2i}(e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}) \\ &= \sin(z_1 + z_2) + \sin(z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Ahora como $\sin(-z) = -\sin z$ (demuéstrelo como ejercicio), entonces

$$2 \sin z_2 \cos z_1 = \sin(z_1 + z_2) - \sin(z_1 - z_2)$$

Al sumar $2 \sin z_1 \cos z_2$ con $2 \sin z_2 \cos z_1$ y simplificando se llega a lo que se desea demostrar.

La propiedad (iii) es inmediata de (ii). \square

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas tienen en variable compleja una sorprendente proximidad con las funciones trigonométricas. Sorprendente dado que en variable real la exponencial y las hiperbólicas no son periódicas en absoluto. El misterio queda aclarado con la variable compleja,

La identidad pitagórica también se cumple en \mathbb{C}

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$$

donde la exponencial se vuelve periódica y donde las trigonométricas dejan de ser acotadas. Daremos ahora es una introducción elemental a las funciones hiperbólicas en \mathbb{C} . Recordamos algunas de las propiedades de las funciones hiperbólicas para comenzar.

Empezamos observando que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ puede parametrizarse mediante las fórmulas:

$$x = \cosh t \quad (106)$$

$$y = \sinh t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (107)$$

donde $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ y $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Es un ejercicio simple de álgebra verificar que

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Por tal identidad es que se aprecia una primera proximidad entre las funciones trigonométricas definidas sobre la circunferencia unitaria y las funciones hiperbólicas sobre la hipérbola equilátera.

Las funciones hiperbólicas, como las trigonométricas, pueden extenderse al plano complejo, como se establece en la siguiente definición.

Definición. Para toda $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\sinh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (108)$$

$$\cosh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (109)$$

$$\tanh z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sinh z}{\cosh z}. \quad (110)$$

Nota. Las funciones $\operatorname{sech} z$, $\operatorname{cosech} z$ y $\operatorname{coth} z$, se definen de manera similar a como se hace con las funciones trigonométricas y se deja como ejercicio.

Enunciamos las propiedades básicas de las funciones hiperbólicas complejas en el siguiente lema.

Lema [Propiedades de las funciones hiperbólicas]. Para toda $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $\cosh z = \cosh(-z)$ y $\sinh(-z) = -\sinh z$.
- ii) $\cosh z + \sinh z = e^z$ y $\cosh z - \sinh z = e^{-z}$.
- iii) $\cos iz = \cosh z$ y $\sin iz = i \sinh z$.
- iv) $\sinh iz = i \sin z$ y $\cosh iz = \cos z$.
- v) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ y $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$.
- vi) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$.

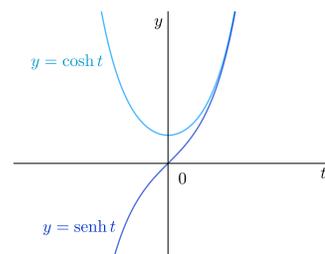


Figura 166: Aquí se muestran las gráficas de las funciones hiperbólicas \sinh y \cosh en \mathbb{R}^2 . Observe que no son acotadas a diferencia de sus contrapartes \sin y \cos .

$$\text{vii) } \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.$$

Demostración. (iv) Por demostrar: $\cos iz = \cosh z$. Se sigue inmediatamente de las definiciones de \cos y \cosh , efectivamente

$$\begin{aligned} \cos iz &= \frac{1}{2}(e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-z} + e^z) \\ &= \cosh z. \end{aligned}$$

Las demás demostraciones de estas propiedades son un ejercicio instructivo y elemental de operaciones con números complejos que el lector debe verificar por sí mismo y se han incluido en la sección de ejercicios. \square

Nota. El lector debe notar que a pesar de que las funciones hiperbólicas parecen ser extremadamente diferentes de las trigonométricas en \mathbb{R} , al definir las en \mathbb{C} , resultan ser muy semejantes. Lo cual está dado por las propiedades (iii) y (iv) del lema anterior. Observe, por ejemplo, que la identidad

$$\cos z = \cosh iz$$

nos indica que para obtener el coseno hiperbólico a partir del coseno ¡basta rotar al argumento $\pi/2$!

Las funciones de variable compleja pueden escribirse como

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde u, v son funciones de variable real, cuyas gráficas de hecho son superficies en \mathbb{R}^3 . Como un ejemplo, estudiaremos como son: la parte real, la parte imaginaria y el módulo de la función $\cos z$.

Ejercicio. Encuentre la parte real, imaginaria y el módulo de la función $f(z) = \cos z$.

Solución. Escribimos $z = x + iy$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) \\ &= \cos x \cos iy - \sen x \sen iy \\ &= \cos x \cosh y - i \sen x \sinh y, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usaron las propiedades (iii) y (iv) del lema anterior. Tenemos de esta manera,

$$\operatorname{re}(\cos z) = u(x, y) = \cos x \cosh y, \quad (111)$$

$$\operatorname{im}(\cos z) = v(x, y) = -\sen x \sinh y. \quad (112)$$

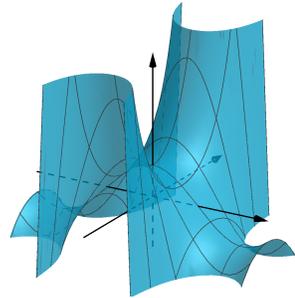


Figura 167: Gráfica de la parte real de la función $\cos z$.

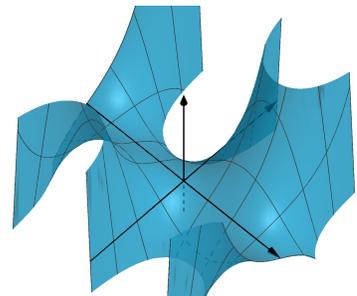


Figura 168: Gráfica de la parte imaginaria de la función $\cos z$.

Ahora para el módulo, tenemos mediante las fórmulas (111) y (112)

$$\begin{aligned}
 |\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\
 &= \cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x) \operatorname{senh}^2 y \\
 &= \cos^2 x (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y \\
 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \\
 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\cosh 2y - 1}{2} \\
 &= \frac{\cos 2x + \cosh 2y}{2}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{\cos 2x + \cosh 2y}{2}}.$$

La gráfica de la Figura 169 muestra que el módulo de $\cos z$, a diferencia del coseno real, *no está acotado* en el intervalo $[-1, 1]$.

Las fórmulas para $\cosh 2z$ y $\operatorname{senh} 2z$, usadas en el ejemplo anterior, se dejan como ejercicio.

Transformaciones de \mathbb{C} en \mathbb{C}

La representación gráfica de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} nos lleva al plano cartesiano \mathbb{R}^2 , dado que la gráfica de una función f de \mathbb{R} en \mathbb{R} es el conjunto $\{(x, f(x)) : x \in \operatorname{dom} f\} \subset \mathbb{R}^2$. Para las funciones con valores en los complejos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, al identificar \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , observamos que la gráfica de tales funciones es imposible de visualizar debido a que es un subconjunto de \mathbb{R}^4 . La gráfica de f es el conjunto $\{(x, y, u(x, y), v(x, y)) : (x, y) \in \operatorname{dom} f\} \subset \mathbb{R}^4$, donde $\operatorname{re} f(z) = u(x, y)$ e $\operatorname{im} f(z) = v(x, y)$ con $z = x + iy$. Una técnica que se utiliza para visualizar como una función transforma el plano en el mismo plano para las funciones complejas consiste en observar como actúa la función sobre conjuntos de puntos como rectas, circunferencias y etcétera. Es decir, se trata de visualizar *cuando es posible* la imagen de curvas bajo las transformaciones definidas por una función f . Estudiaremos estas transformaciones para las funciones más simples, los casos más complicados pueden estudiarse en los libros de variable compleja o de análisis complejo.

Funciones de la forma $f(z) = az$

Para las funciones $f(z) = az$, $a \neq 0$, notamos que $|f(z)| = |a||z|$. Por lo que la función contrae el plano si $|a| < 1$, lo expande si $|a| > 1$ y no cambia el tamaño si $|a| = 1$, este tipo de contracción o expansión se llama *homotecia*. Además, dado que al multiplicar por a , todo el plano complejo rota un ángulo dado por el argumento de a , la

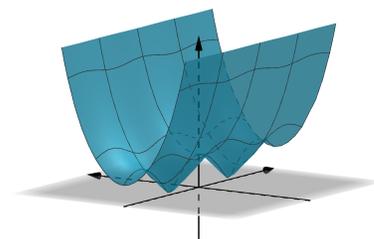


Figura 169: Gráfica del módulo de la función $\cos z$.

transformación dada por az queda determinada. Por lo tanto bajo esta transformación circunferencias se transforman en circunferencias.

Ejemplo. Determine el efecto de la transformación $f(z) = iz$ en todo el plano \mathbb{C} .

Solución. Dado que $|i| = 1$, la función no contrae ni expande el plano complejo, pero dado que $\arg i = \pi/2$, el plano completo rota un cuarto de circunferencia.

Ejemplo. ¿Cómo se transforma el plano complejo mediante la función $f(z) = 3z$?

Solución. En este caso $|3| = 3$, por lo que el plano completo se expande tres unidades, pero como $\arg 3 = 0$, el plano no rota.

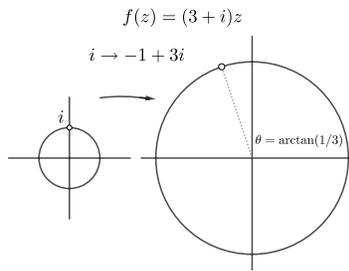


Figura 170: La función $f(z) = (3+i)z$, por ejemplo, expande la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en $\sqrt{10}$ unidades. Se muestra un ejemplo con el número i el cual se transforma en $-1 + 3i$, con lo que se evidencia la rotación del plano en un ángulo de $\theta = \arctan 1/3$.

Ejemplo. Estudie como la función $f(z) = (3+i)z$, transforma el plano complejo.

Solución. Ahora, tenemos que $|3+i| = \sqrt{10}$ y $\arg(3+i) = \arctan(1/3)$. El plano se expande $\sqrt{10}$ unidades y rota en un ángulo $\theta = \arctan(1/3)$.

Funciones de la forma $f(z) = az + b$

Comenzamos por estudiar la función más simple $f(z) = z + b$, la cual representa una traslación de todo el plano complejo por el número b .

Ejemplo. Determine la imagen de la circunferencia $|z| = 1$ dada por la función $f(z) = z + 1 + i$.

Solución. Si $z = x + iy$, entonces $f(z) = x + 1 + i(y + 1)$, por lo que la circunferencia $|z| = 1$ se transforma en la circunferencia $|f(z) - b| = 1$, donde $b = 1 + i$, la cual es una circunferencia de radio uno, con centro en $b = 1 + i$.

Al componer las funciones $f(z) = az$ con $g(z) = z + b$ se obtiene

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = f(z) + b = az + b,$$

la cual es una rotación y homotecia, seguida de una traslación. Por lo

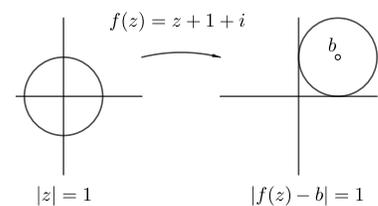


Figura 171: La función $f(z) = z + 1 + i$, traslada todo el plano al sumar a cada punto z el número complejo b .

tanto, también bajo esta transformación circunferencias se transforman en circunferencias.

Funciones de la forma $h(z) = \frac{1}{az + b}$

Sabemos ya que la función $j(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ invierte puntos respecto al eje real e invierte el módulo de z al valor $1/|z|$. Por estas razones, a esta transformación se le llama apropiadamente *inversión*. La función $h(z)$ se obtiene mediante la composición las funciones g y f del ejemplo anterior con $j(z)$ de la siguiente manera

$$h(z) = (j \circ g \circ f)(z) = j(az + b) = \frac{1}{az + b}.$$

Otras cosas que se pueden observar de esta función es que cuando $|z| \rightarrow \infty$, $h(z) \rightarrow 0$ y además cuando $z \rightarrow -b/a$ entonces $h(z) \rightarrow \infty$.

Nota. Mientras en \mathbb{R} el signo ∞ no representa un número real, en \mathbb{C} puede asignarse a ∞ un punto sobre la esfera unitaria de \mathbb{R}^3 , la cual puede ponerse en correspondencia con cada punto del plano complejo, lo que se conoce como compactificación de \mathbb{C} , de tal forma que ∞ , si bien no es un número (ya que no tiene inversos), se le puede dar un tratamiento más concreto que como mero símbolo, de tal forma que es usual escribir $h(\infty) = 0$ y $h(-b/a) = \infty$, omitiendo el signo " \rightarrow ", sin causar mayor revuelo.

Una propiedad importante de la función h es que que en general, tiene dos puntos fijos donde "punto fijo" se define como sigue.

Definición [Punto fijo]. Un *punto fijo* de una función f es un número $z^* \in \text{dom } f$ tal que $f(z^*) = z^*$.

Punto fijo. $f(z^*) = z^*$

Ejemplo. Con la definición de *punto fijo* en mente observamos que la función $f(z) = az$, si $a \neq 1$, solo tiene como punto fijo al origen de coordenadas, en efecto al resolver la ecuación

$$\begin{aligned} f(z) &= az = z \\ a &= 1, \quad \text{si } z \neq 0. \end{aligned}$$

y como $f(0) = 0$, el único punto fijo es $z^* = 0$, si $a \neq 1$.

La función $f(z) = 1/z$ tiene dos puntos fijos: $z^* = \pm 1$, dado que $f(z) = 1/z = z$, implica que $z^2 = 1$, de donde $z = \pm 1$. Este patrón se repite para la funciones que envuelven inversiones, por ejemplo para la función h tenemos

$$\begin{aligned} z = h(z) = \frac{1}{az + b} &\Leftrightarrow az^2 + bz - 1 = 0, \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}. \end{aligned}$$

Así hay dos puntos fijos distintos si $b^2 + 4a \neq 0$, en otro caso los puntos fijos se funden en uno.

Funciones fraccionales lineales $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$

La función $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, se llama *fraccional lineal* y también es llamada *transformación de Möbius*. Manteniendo la discusión de los ejemplos anteriores podemos ver que los puntos fijos de la función f pueden calcularse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} z = \frac{az + b}{cz + d} &\Leftrightarrow z(cz + d) = az + b, \\ &\Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0, \\ &\Leftrightarrow z = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos dos puntos fijos si $(d - a)^2 + 4bc \neq 0$.

Ejemplo. Encuentre los puntos fijos de $h(z) = \frac{z + 1}{z - 1}$.

Solución. Se debe resolver la ecuación $z = h(z)$, así

$$\begin{aligned} z = \frac{z + 1}{z - 1} &\Leftrightarrow z^2 - 2z - 1 = 0, \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Funciones inversas de las fraccionales

Otro tema que se debe considerar es el de las inversas de las funciones fraccionales lineales, ya que forman un grupo que es muy importante en el modelo de geometría hiperbólica de Poincaré. Haremos una discusión heurística donde paso a paso iremos descubriendo los requerimientos para la existencia de una función inversa.

Existencia de inversas. Condición necesaria y suficiente para la existencia de la inversa de una función racional lineal:

$$ad - bc \neq 0$$

Proposición [Inversa de fraccional]. Las funciones de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

poseen inversa si y solo si $ad - bc \neq 0$.

Demostración. Primero, para la existencia de una inversa se requiere que la función sea inyectiva. Una función es inyectiva si $f(z_1) = f(z_2)$, implica que $z_1 = z_2$. Partiendo de la hipótesis $f(z_1) = f(z_2)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} &\Leftrightarrow (az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d) \\ &\Leftrightarrow acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_2z_1 + adz_2 + bcz_1 + bd \\ &\Leftrightarrow (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $ad - bc \neq 0$ es una condición necesaria y suficiente para que $z_1 = z_2$ y por lo tanto para la existencia de la inversa de la función racional lineal.

Una vez garantizada la existencia de la inversa procedemos a calcularla. Recordamos que la inversa de $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ satisface la relación $f(f^{-1}(z)) = z$, lo que poniendo $v = f^{-1}(z)$, lleva a $z = \frac{av + b}{cv + d}$. Ahora resolvemos para v , para encontrar la expresión algebraica de la inversa.

$$\begin{aligned} z = \frac{av + b}{cv + d} &\Leftrightarrow cvz + dz = av + b \\ &\Leftrightarrow v(cz - a) = -dz + b \\ &\Leftrightarrow v = -\frac{dz - b}{cz - a} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(z) = -\frac{dz - b}{cz - a}. \end{aligned}$$

Ejemplo. Determine si las funciones siguientes poseen una inversa, de ser así, encuéntrela.

1. $h(z) = \frac{2z - 1}{4z - 2}$.

2. $g(z) = \frac{2z - 1}{3z - 2}$.

Solución. (a) Para $h(z)$, tenemos $a = 2$, $b = -1$, $c = 4$, $d = -2$, por lo que $ad - bc = 2(-2) - (-1)4 = 0$, por lo que h no posee inversa. De hecho el lector debe verificar por sí mismo que si $z \neq 1/2$, la función es constante $h(z) = 1/2$. Esta situación se generaliza ya que las fraccionales lineales que no son inyectivas, son constantes.

(b) La función g tiene inversa dado que $ad - bc = 2(-2) - 3(-1) = -1 \neq 0$. Se recomienda *no usar fórmulas*, sino repetir el procedimiento desarrollado arriba para encontrar inversas.

$$\begin{aligned} z = \frac{2v - 1}{3v - 2} &\Leftrightarrow (3v - 2)z = 2v - 1 \\ &\Leftrightarrow v(3z - 2) = 2z - 1 \\ &\Leftrightarrow v = \frac{2z - 1}{3z - 2}. \end{aligned}$$

Poniendo $v = g^{-1}(z)$, se llega a la fórmula para la inversa de g . \square

Imágenes de rectas y circunferencias bajo racionales lineales

Esta parte la desarrollaremos primero con algunos ejemplos, para después pasar a la teoría general.

Fórmula para la inversa

$$f^{-1}(z) = -\frac{dz - b}{cz - a}$$

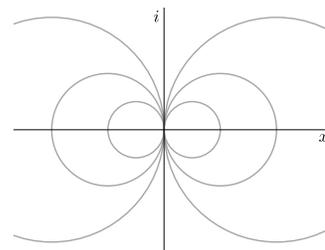


Figura 172: Gráfica de la familia de circunferencias $\left|z - \frac{a}{2}\right|^2 = \frac{a^2}{4}$.

Ejemplo. Dada la función $f(z) = \frac{1}{z}$, halle las imágenes de las curvas siguientes:

1. La familia de circunferencias $x^2 + y^2 = ax$, $a \in \mathbb{R}$.
2. El haz de rectas paralelas $y = x + b$, $b \in \mathbb{R}$.

Solución. (1) Ponemos $w = f(z)$. Completando cuadrados se obtiene la fórmula

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

la cual representa una familia de circunferencias con centro sobre el eje real en el punto $(a/2, 0)$ y radio $a/2$. Al representar esta circunferencia con números complejos se obtiene,

$$\begin{aligned} \left|z - \frac{a}{2}\right|^2 = \frac{a^2}{4} &\Leftrightarrow \left(z - \frac{a}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{w} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{\bar{w}} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}, \quad z = \frac{1}{w}, \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4w\bar{w}}(2 - aw)(2 - a\bar{w}) = \frac{a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow a^2 w\bar{w} = 4 - 2aw - 2a\bar{w} + a^2 w\bar{w} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{re} w = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Debe notarse que $\operatorname{re} w = \text{constante}$, representa rectas paralelas al eje imaginario, por lo que la imagen de la familia de circunferencias dadas es una familia de rectas paralelas al eje i , pero sin incluirlo. El lector debe cubrir los detalles del desarrollo anterior como ejercicio.

(2) La familia de rectas $y = x + b$ puede escribirse como

$$\operatorname{im} z = \operatorname{re} z + b.$$

Recordando las identidades, $\operatorname{re} z = (z + \bar{z})/2$ e $\operatorname{im} z = (z - \bar{z})/2i$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{z + \bar{z}}{2} + b &\Leftrightarrow z - \bar{z} = i(z + \bar{z}) + 2bi \\ &\Leftrightarrow (1 - i)z - (1 + i)\bar{z} = 2bi \\ &\Leftrightarrow (1 - i)\frac{1}{w} - (1 + i)\frac{1}{\bar{w}} = 2bi \\ &\Leftrightarrow \bar{w}(1 - i) - w(1 + i) = 2biw\bar{w} \\ &\Leftrightarrow -\frac{i + 1}{2}\bar{w} - \frac{-i + 1}{2}w = b|w|^2. \end{aligned}$$

Poniendo $w = u + iv$, se llega a

$$\begin{aligned} b(u^2 + v^2) &= -\frac{1+i}{2}(u+iv) - \frac{1-i}{2}(u-iv) \\ &= -u + v. \end{aligned}$$

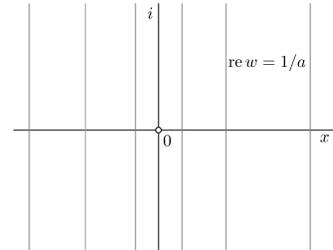


Figura 173: Imagen de la familia de circunferencias de la Figura 172 es la familia de rectas $\operatorname{re} w = \frac{1}{a}$.

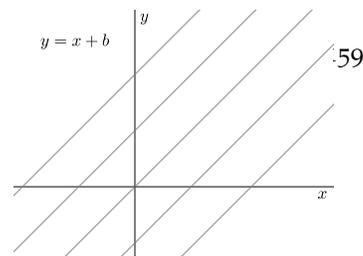


Figura 174: Representación de la familia de rectas paralelas $y = x + b$

Así la imagen de la familia de rectas $y = x + b$, se convierte en la familia de circunferencias $u^2 + v^2 = 1/b(-u + v)$ en el plano u, v bajo la transformación $f(z) = \frac{1}{z}$.

La teoría general indica que bajo la transformación $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, rectas se transforman en rectas o circunferencias y circunferencias se transforman en rectas o circunferencias. Desarrollamos esta parte de la teoría primero recordando algunos hechos de geometría analítica.

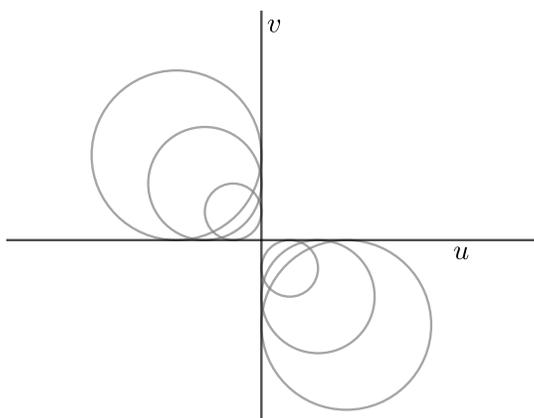


Figura 175: Representación de la familia de circunferencias $\left(u + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2}$, las cuales son la imagen de las rectas $y = x + b$, bajo la función $f(z) = \frac{1}{z}$.

Recordamos que la ecuación de la circunferencia en \mathbb{R}^2 tiene la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la demostración elemental de este hecho se puede consultar, por ejemplo, en el libro de López Garza⁵¹ (Teorema 3.1 p. 40.) Si escribimos la ecuación

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0, \quad (113)$$

se tiene una circunferencia si $A \neq 0$ y $D^2 + E^2 - 4AF > 0$ o la ecuación de una recta si $A = 0$ y, o bien E , o bien F , o ambos son distintos de cero. Con notación de números complejos $z = x + iy$, la ecuación (113) se puede escribir como $Az\bar{z} + D\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + E\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + F = 0$ o equivalentemente como

$$Az\bar{z} + \frac{D - iE}{2}z + \frac{D + iE}{2}\bar{z} + F = 0,$$

o equivalentemente

$$Az\bar{z} + D'z + \overline{D'}\bar{z} + F = 0, \quad (114)$$

donde $D' = \frac{D - iE}{2}$. De esta forma se tiene una circunferencia si $D'\overline{D'} - AF > 0$, etcétera. Podemos ahora enunciar el siguiente teorema:

⁵¹ Gabriel López Garza. *Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de TIC*. Textos CBI, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, 2021

Lema [Imagen de círculos o rectas bajo inversión]. La función $w = \frac{1}{z}$ transforma círculos o rectas en círculos o rectas.

Demostración. Se sustituye en la ecuación (114), $z = 1/w$ y $\bar{z} = 1/\bar{w}$, con lo cual se tiene

$$A \frac{1}{w\bar{w}} + D' \frac{1}{w} + \overline{D'} \frac{1}{\bar{w}} + F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + D'\bar{w} + \overline{D'}w + Fw\bar{w} = 0.$$

La ecuación $A + D'\bar{w} + \overline{D'}w + Fw\bar{w} = 0$ tiene la forma (114), por lo tanto, escribiendo $w = u + iv$, representa una recta o una circunferencia en el plano complejo u, v . \square

Para la transformación racional lineal general de la forma $w = \frac{az + b}{cz + d}$, con $ad - b \neq 0$, $c \neq 0$, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema [Imagen de círculos o rectas bajo racionales lineales]. La función $w = \frac{az + b}{cz + d}$, con $ad - bc \neq 0$ y $c \neq 0$, transforma círculos o rectas en círculos o rectas.

Demostración. Podemos escribir $w = \frac{az + b}{cz + d}$, como $w = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$. Efectivamente, si $c \neq 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}, \end{aligned}$$

donde $\frac{a}{c} = \alpha$, $\frac{b}{c} = \beta$ y $\frac{d}{c} = \delta$.

Ahora observamos que

$$\frac{\alpha z + \beta}{z + \delta} = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta}{z + \delta}$$

por lo que si definimos $f(z) = z + \delta$, $g(z) = \frac{\beta - \alpha\delta}{z}$ y $h(z) = \alpha + z$, tenemos que

$$w = (h \circ g \circ f)(z) = h(g(f(z))) = h(g(z + \delta)) = h\left(\frac{\beta - \alpha\delta}{z + \delta}\right) = \alpha + \frac{\beta - \alpha\delta}{z + \delta}$$

y como f, g, h transforman circunferencias o rectas en circunferencias o rectas, el teorema queda demostrado. \square

Nota. El anterior teorema es muy importante en el modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica.

Determinación de una función racional lineal

Vimos que una transformación de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es inyectiva si y solo si $ad - bc \neq 0$, ahora veremos que si $c \neq 0$, esta transformación

La función $w = \frac{az + b}{cz + d}$, con $ad - bc \neq 0$ y $c \neq 0$, transforma círculos o rectas en círculos o rectas

queda determinada por sus valores en $0, 1, \infty$. Sea $f(0) = \frac{\beta}{\delta}$, $f(1) = \frac{\alpha + \beta}{1 + \delta}$, $f(\infty) = \frac{\alpha + \frac{\beta}{\infty}}{1 + \frac{\delta}{\infty}} = \alpha$. Entonces $\beta = f(0)\delta$ y

$$\begin{aligned}(1 + \delta)f(1) &= f(\infty) + f(0)\delta \\ \delta &= \frac{f(\infty) - f(1)}{f(1) - f(0)}.\end{aligned}$$

Siendo f inyectiva, si $ad - bc \neq 0$ se tiene $f(1) - f(0) \neq 0$ y, así δ queda perfectamente definido y, por lo tanto, queda definido β . Tenemos de así:

$$\alpha = f(\infty) \quad (115)$$

$$\beta = f(0) \frac{f(\infty) - f(1)}{f(1) - f(0)} \quad (116)$$

$$\delta = \frac{f(\infty) - f(1)}{f(1) - f(0)}. \quad (117)$$

Con lo que hemos demostrado el lema:

Lema [Tres puntos determinan racionales lineales]. La transformación $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$ y $c \neq 0$, queda determinada de manera única por los valores $f(0)$, $f(1)$, $f(\infty)$ dados por las fórmulas (115), (116), (117).

Ejemplo. Una transformación fraccional lineal toma los valores $f(0) = i$, $f(1) = 1$ y $f(\infty) = 0$, determine los coeficientes α, β, δ .

Solución. Podemos escribir directamente $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$ y sustituir los valores dados:

$$\begin{aligned}0 &= f(\infty) = \alpha \\ i &= f(0) = \frac{\beta}{\delta} \\ 1 &= f(1) = \frac{\beta}{1 + \delta}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $1 + \delta = i\delta$, de donde $\delta = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1-i}{2}$ y $\beta = i \frac{-1-i}{2} = \frac{1-i}{2}$,

$$f(z) = \frac{\frac{1-i}{2}}{z + \frac{-1-i}{2}} = \frac{1-i}{2z-1-i}.$$

Se recomienda verificar que los valores sean correctos. Debemos tener $f(0) = i$, y

$$\begin{aligned}f(0) &= \frac{1-i}{-1-i} \\ &= -(1-i) \frac{1-i}{2} \\ &= -\frac{1-2i+i^2}{2} = i.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1-i}{2-1-i} \\ &= \frac{1-i}{1-i} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Una transformación racional lineal también queda determinada con tres puntos *finitos* como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Halle una función racional lineal que transforma un triángulo con vértices en $0, 1, i$ en otro triángulo con vértices en $0, 2, 1+i$.

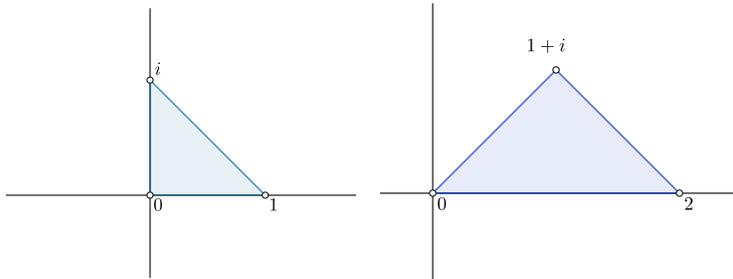


Figura 176: El triángulo de la izquierda se transforma en el triángulo de la derecha bajo la transformación

$$f(z) = 2(1+i) \frac{z}{z+i}.$$

Solución. Suponemos $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$. Pondremos también $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ y $f(i) = 1+i$, entonces $\beta/\delta = 0$, y se concluye $\beta = 0$. Debemos tener además:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\delta} = 2$$

y

$$f(i) = 1+i \Leftrightarrow \frac{\alpha i}{i+\delta} = 1+i.$$

Así se obtiene el sistema,

$$\begin{aligned} \alpha - 2\delta &= 2 \\ \alpha i - (1+i)\delta &= -1+i. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1+i & -1-i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ i & -1-i \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-1+i} = 2+2i \\ \delta &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ i & -1+i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ i & -1-i \end{vmatrix}} = \frac{-1-i}{-1+i} = i. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(z) = 2(1+i)\frac{z}{z+i}.$$

Nota. El ejemplo dice “Halle *una* transformación” y no “Halle *la* transformación” ya que hay varias, en los ejercicios se pide encontrar otra.

El ejemplo anterior es un caso particular incluido en la proposición siguiente.

Proposición [Determinación de una racional lineal]. Tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1, z_2, z_3 \neq -\delta$, determinan de manera única a una transformación fraccional lineal de la forma

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}.$$

Demostración. Dada la transformación $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$, para tres puntos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \frac{\alpha z_1 + \beta}{z_1 + \delta} \\ f(z_2) &= \frac{\alpha z_2 + \beta}{z_2 + \delta} \\ f(z_3) &= \frac{\alpha z_3 + \beta}{z_3 + \delta}. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} z_1\alpha + \beta - f(z_1)\delta &= f(z_1)z_1 \\ z_2\alpha + \beta - f(z_2)\delta &= f(z_2)z_2 \\ z_3\alpha + \beta - f(z_3)\delta &= f(z_3)z_3. \end{aligned}$$

Resolvemos para β en la primera ecuación para obtener $\beta = -z_1\alpha + f(z_1)\delta + f(z_1)z_1$ y sustituimos en las demás ecuaciones, obteniendo así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} (z_2 - z_1)\alpha + (f(z_1) - f(z_2))\delta &= f(z_2)z_2 - f(z_1)z_1 \\ (z_3 - z_1)\alpha + (f(z_1) - f(z_3))\delta &= f(z_3)z_3 - f(z_1)z_1. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución única si el determinante del sistema es diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & f(z_1) - f(z_2) \\ z_3 - z_1 & f(z_1) - f(z_3) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (118)$$

Pero si el determinante fuera cero tendríamos:

$$(f(z_1) - f(z_3))(z_2 - z_1) - (f(z_1) - f(z_2))(z_3 - z_1) = 0.$$

O bien

$$\frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_2) - f(z_1)} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (119)$$

Por otra parte,

$$\frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_2) - f(z_1)} = \frac{\frac{(\alpha\delta - \beta)(z_3 - z_1)}{(z_3 + \delta)(z_1 + \delta)}}{\frac{(\alpha\delta - \beta)(z_2 - z_1)}{(z_2 + \delta)(z_1 + \delta)}} \quad (120)$$

Al igualar (119) y (120) y simplificando, se obtiene que $\frac{z_2 + \delta}{z_3 + \delta} = 1$ y así

$$\begin{aligned} \frac{z_2 + \delta}{z_3 + \delta} = 1 &\Leftrightarrow z_2 + \delta = z_3 + \delta \\ &\Leftrightarrow z_2 = z_3. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción ya que $z_2 \neq z_3$ por hipótesis. Por lo tanto se cumple (118) y existen únicas α, β, δ para la transformación f , determinados por z_1, z_2, z_3 . \square

Nota. El lector debe notar que el Lema [Tres puntos determinan racionales lineales], es un corolario de la Proposición anterior, sin embargo se consideró más didáctico proceder de la forma como hicimos, con ejemplos y no de manera más formal, sino para finalizar la exposición de este tema.

Al cumplirse (118), los coeficientes dados por la regla de Kramer son:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} f(z_2)z_2 - f(z_1)z_1 & f(z_1) - f(z_2) \\ f(z_3)z_3 - f(z_1)z_1 & f(z_1) - f(z_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & f(z_1) - f(z_2) \\ z_3 - z_1 & f(z_1) - f(z_3) \end{vmatrix}} \quad (121)$$

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & f(z_2)z_2 - f(z_1)z_1 \\ z_3 - z_1 & f(z_3)z_3 - f(z_1)z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_2 - z_1 & f(z_1) - f(z_2) \\ z_3 - z_1 & f(z_1) - f(z_3) \end{vmatrix}} \quad (122)$$

Sin embargo quizá la fórmula de Kramer *no es el método más eficiente* para resolver este tipo de problemas.

Razón doble bajo racionales lineales se conserva

Dados cuatro números complejos a, b, c, d , la razón doble denotada (a, b, c, d) , se define como

$$(a, b, c, d) \stackrel{def}{=} \frac{\frac{c-a}{c-b}}{\frac{d-a}{d-b}}. \quad (123)$$

La razón doble es un invariante en geometría proyectiva y también resulta ser invariante bajo funciones racionales lineales, por lo cual existe una sutil conexión entre la geometría proyectiva y la variable compleja. Más aún, el hecho de que la razón doble sea invariante permite definir una métrica en el modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica, lo cual se explicará en el capítulo dedicado a otras geometrías. Por lo mencionado anteriormente, el teorema siguiente es importante

Teorema [Invarianza de la razón doble bajo racionales lineales]. Dada una transformación racional lineal arbitraria $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ac - bd \neq 0$, la razón doble de cualesquiera puntos distintos se conserva, es decir, si $w_i = g(z_i)$ para $i = 1, \dots, 4$,

$$(w_1, w_3, w_4, w_2) = (z_1, z_3, z_4, z_2).$$

Demostración. Para establecer la invarianza de la razón doble bajo transformaciones lineales, primero haremos algunas observaciones. Dada la función $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + \delta}$, supongamos que se quieren encontrar los números z_1, z_2, z_3 , para los cuales $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ y $f(z_3) = \infty$. Entonces deberíamos tener

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\alpha z_1 + \beta}{z_1 + \delta} \Leftrightarrow z_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ 1 &= \frac{\alpha z_2 + \beta}{z_2 + \delta} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\beta - \delta}{1 - \alpha} \\ \infty &= \frac{\alpha z_3 + \beta}{z_3 + \delta} \Leftrightarrow z_3 = -\delta. \end{aligned}$$

Obtendríamos así

$$f(z) = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Pero además de $z_2 = \frac{\beta - \delta}{1 - \alpha}$, tenemos

$$z_2 - \alpha z_2 = \beta - \delta = -\alpha z_1 + z_3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3} \\ &= \frac{\frac{z - z_1}{z - z_3}}{\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}} \\ &= (z_1, z_3, z, z_2). \end{aligned} \tag{124}$$

Dada $g(z)$ la transformación racional lineal tal que $g(z_1) = w_1$, $g(z_2) = w_2$ y $g(z_3) = w_3$, donde $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$. Debido a (124), obtenemos que

la función

$$h(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{w-w_1}{w-w_3}}{\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}}$$

hace corresponder w_1, w_2, w_3 con $0, 1, \infty$, respectivamente. Por lo tanto $(h \circ g)(z) = f(z)$ y así

$$\frac{\frac{w-w_1}{w-w_3}}{\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}} = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_3}}{\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}}.$$

De donde

$$(w_1, w_3, w, w_2) = (z_1, z_3, z, z_2).$$

Sustituyendo z_4 y $w_4 = g(z_4)$ se llega a la identidad que se quería demostrar. \square

La transformación $f(z) = z^2$ y los fractales

Hemos visto que la transformación racional (también llamada transformación *homográfica*) $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc \neq 0$ y $c \neq 0$, transforma biyectivamente el plano complejo en sí mismo. Se requieren herramientas más sofisticadas, que no estudiaremos, para demostrar que *es la única transformación* (incluyendo el caso $c = 0$) de \mathbb{C} en \mathbb{C} que lo hace biunívocamente. Enseguida, veremos algunos ejemplos más de transformaciones en los números complejos.

La función $f(z) = z^2$ transforma el plano en dos copias del mismo plano complejo ya que, por la fórmula de De Moivre, si $z = r \cos \theta + i \sin \theta$, cuando $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \infty$, se habrá cubierto todo el plano complejo, por lo que al variar θ de 0 a 2π , se habrá cubierto el plano complejo dos veces.

Por otra parte, al utilizar la representación cartesiana $z = x + iy$, tenemos

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Notamos que $x^2 - y^2 = u$ y $2xy = v$ son hipérbolas que se cortan ortogonalmente, de modo que las hipérbolas dadas en el plano xy son transformadas en las rectas paralelas a los ejes en el plano uv , donde $f(z) = z^2 = u + iv$.

Pero lo más interesante de la función $f(z) = z^2$ ocurre al iterarla para obtener los famosos fractales. La siguiente exposición se basa en el artículo de Devaney⁵² cuyo texto completo en inglés puede verse en el sitio de la revista <https://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set>.

Primero observamos lo que significa iterar. Si componemos la función $f(z) = z^2$, consigo misma obtenemos $(f \circ f)(z) = f(f(z)) =$

⁵² Robert L. Devaney. *Unveiling the Mandelbrot set*. Plus Magazine, Cambridge University, September 1, 2006

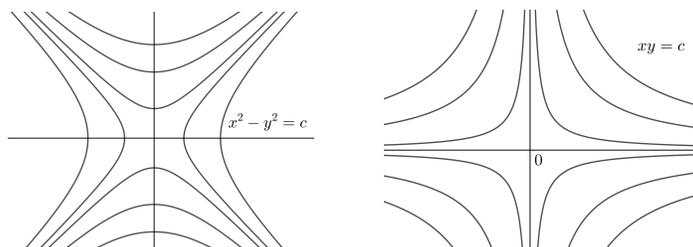


Figura 177: Hipérbolas equiláteras $x^2 - y^2 = c$ y $xy = c$ en el plano xy .

$(f(z))^2 = (z^2)^2 = z^4$. La repetición de este proceso puede realizarse indefinidamente. Denotaremos con f^n el proceso de componer una función consigo misma n veces, por ejemplo $f^3 = f \circ f \circ f$, $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$, etcétera. Un proceso de iteración que lleva a un comportamiento más impredecible ocurre con la función $f(z) = z^2 + c$, donde c es una constante arbitraria. Observamos que

$$(f^2)(z) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2z^2c + c^2 + c.$$

Repetimos este proceso con $z_0 = 0$. Obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 &= f(0) = c \\ z_2 &= f(z_0) = (f^2)(0) = c^2 + c \\ z_3 &= f(z_1) = (f^3)(0) = (c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + 2c \end{aligned}$$

La lista de números z_0, z_1, \dots , generada bajo esta iteración se llama *órbita* de z_0 bajo la iteración de f . La siguiente tabla contiene ejemplos:

c	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
$c = 1$					
$z_0 = 0$	1	2	5	26	677
$c = 0$					
$z_0 = 0$	0	0	0	0	0
$c = -1$					
$z_0 = 0$	-1	0	-1	0	-1
$c = -1.1$					
$z_0 = 0$	-1.1	.11	-1.0879	.083526	-1.09302
$c = -1.9$					
$z_0 = 0$	-1.9	1.71	1.0241	-0.8512	-1.1754
$c = i$					
$z_0 = 0$	i	0	$-1 + i$	$-i$	$-1 + i$
$c = 2i$					
$z_0 = 0$	$2i$	$-4 + 2i$	$12 - 14i$	$-52 - 334i$	$-108852 + 34738i$

El lector debe notar que mientras para algunos valores de c , la sucesión tiende a estacionarse, por ejemplo con $c = 0$, $c = -1$, $c = i$, con

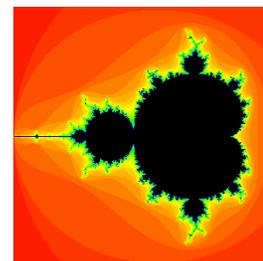


Figura 178: El conjunto de Mandelbrot esta formado por los puntos en color negro de la figura.

otros valores la sucesión se aleja del origen de coordenadas, por ejemplo con $c = 1$ y con $c = 2i$. Con estas observaciones podemos definir el *conjunto de Mandelbrot*.

Definición [Conjunto de Mandelbrot]. El conjunto de Mandelbrot consiste en aquellos valores $c \in \mathbb{C}$, para los cuales la órbita de 0 bajo $f(z) = z^2 + c$ no escapa a infinito.

De acuerdo a la definición, los puntos $c = 0$, $c = -1$, $c = i$, pertenecen al conjunto de Mandelbrot, mientras que $c = 1$ y $c = 2i$, no. El conjunto lleva el nombre del computólogo y matemático Benoit Mandelbrot quien descubrió este objeto en 1980. En <https://plus.maths.org/content/os/issue9/features/mandelbrot/index> el lector encontrará como hacer un programa sencillo para generar el conjunto de Mandelbrot.

La frontera del conjunto de Mandelbrot es un ejemplo de lo que se denomina *fractal* y es uno de los objetos más complejos de las matemáticas. En Internet pueden encontrarse una colección de videos de acercamientos a la frontera, en la Figura 179 se muestra un acercamiento de una parte al azar.

La más elemental definición de fractal se refiere a un objeto autosimilar sin importar la escala a la que se observe. Pero lo más importante y novedoso del descubrimiento es que a la frontera del conjunto de Mandelbrot se le puede asignar una dimensión mayor que uno y menor que dos, de allí la palabra fractal que tiene que ver con la dimensión fraccional de un objeto. Con la existencia de los fractales se trasciende a la geometría griega para siempre y desde su aparición se han encontrado aplicaciones en todas las ramas de la ingeniería, la física y la biología. En la biología la tendencia a tener estructura fractal, por ejemplo del sistema circulatorio y de muchos otros sistemas, a dado lugar a una revolución en el modelado matemático y con ello su estudio ha adquirido una importancia inobjetable en el avance de la ciencia.

Funciones logaritmo, Log y log

La discusión elemental de la funciones de variable compleja debe incluir el estudio de la función logaritmo, función inversa de la exponencial. En \mathbb{C} el logaritmo aparece también en la definición de las inversas de las funciones trigonométricas y con ello, parte de su importancia.

Definición [Logaritmo de números complejos]. Sean $z, \zeta \in \mathbb{C}$ con $z = e^{\zeta}$. Se define $\text{Log } z$, el *logaritmo natural* de z , como

$$\text{Log } z \stackrel{\text{def}}{=} \zeta.$$



Figura 179: Cambiando de escala, la frontera del conjunto de Mandelbrot muestra su complejidad fractal.

Nota. La función $\text{Log } z$ es multivaluada, es decir, dado z existen múltiples valores para ζ , de hecho infinitos.

Cálculo de logaritmos

Sea $\zeta = \tau + \eta i$ y $z = re^{i\theta}$, con $-\pi < \theta \leq \pi$, tenemos que

$$\begin{aligned} z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) &= e^{\zeta} \\ &= e^{\tau + i\eta} \\ &= e^{\tau}(\cos \eta + i \operatorname{sen} \eta) \end{aligned}$$

De donde se concluye que

$$\begin{aligned} r = e^{\tau} &\Leftrightarrow \tau = \log r, \quad r > 0 \\ \tan \theta = \tan \eta &\Leftrightarrow \eta = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y finalmente para $z = x + iy$, con $|z| \neq 0$,

$$\text{Log } z = \log r + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r = |z|, \quad z \neq 0, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}. \quad (125)$$

También se define una función univaluada para $-\pi < \theta \leq \pi$, llamada valor principal de $\text{Log } z$, denotada con “l” minúscula, $\log z$. Pero antes se requiere la definición del argumento de números complejos.

Definición [Argumento de un número complejo]. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, no siendo ambos cero, y $z = x + iy$ cualquier valor de θ tal que $\cos \theta = x/r$ y $\operatorname{sen} \theta = y/r$, donde $r = |z|$, se llama *argumento* de z , lo que se denota como

$$\theta = \operatorname{Arg} z \quad (\text{con “A” mayúscula}),$$

El valor único de θ tal que $-\pi < \theta \leq \pi$ se llama *valor principal del argumento* y se denota por

$$\theta = \operatorname{arg} z \quad (\text{con “a” minúscula}).$$

Con la definición anterior a la mano definimos el valor principal del logaritmo.

Definición [Valor principal del logaritmo]. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Se define el *valor principal*, $\log z$, de la función $\text{Log } z$ como

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{arg} z, \quad (126)$$

de donde se concluye que

$$\text{Log } z = \log z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nota. Observe que el logaritmo de números complejos *no está definido* solo para $z = 0$.

Valor principal del logaritmo

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{arg} z$$

Ejemplo. Calcule el logaritmo complejo de: a) $z = -1$, b) $z = i$ y c) $z = 1 + i$.

Solución. Calcularemos solo el valor principal del logaritmo.

a) Para $z = -1$, $|z| = 1$ y $\arg z = \pi$ por lo que

$$\log(-1) = \log|-1| + \pi i = \pi i.$$

b) $\log i = \log|i| + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i.$

c) $\log(1+i) = \log|1+i| + \frac{\pi}{4}i = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}i = \frac{1}{2}\left(\log 2 + \frac{\pi}{2}i\right).$

Si bien la función $\text{Log } z$ podría parecer artificial al principio, para esta función es para la cual se cumple la ley de adición y sustracción de logaritmos como se presenta en la siguiente proposición.

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$$

Proposición [Logaritmo de producto de números]. Dados dos números complejos distintos de cero $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 \quad (127)$$

$$\text{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Log } z_1 - \text{Log } z_2 \quad (128)$$

Demostración. Sean $z_1 = r_1 \cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1$ y $z_2 = r_2 \cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2$. Entonces $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2))$ y así,

$$\begin{aligned} \text{Log}(z_1 z_2) &= \log(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi), \\ &= \log r_1 + \log r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \text{Log } z_1 &= \log r_1 + i(\theta_1 + 2k_1\pi) \\ \text{Log } z_2 &= \log r_2 + i(\theta_2 + 2k_2\pi). \end{aligned}$$

Y al sumar se tiene

$$\begin{aligned} \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 &= \log r_1 + i(\theta_1 + 2k_1\pi) + \log r_2 + i(\theta_2 + 2k_2\pi) \\ &= \log r_1 + \log r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2(k_1 + k_2)\pi). \end{aligned}$$

Al tener $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, se tiene la identidad que se desea demostrar. La identidad para cociente de números se deja como ejercicio. \square

Con las herramientas que tenemos hasta ahora, podemos demostrar la ley de las potencias para $\text{Log } z$.

$$\text{Log } z^p = p \text{Log } z, \quad p \in \mathbb{Q}.$$

Proposición [Logaritmo de potencia de números]. Si $z \neq 0$ es un número complejo y $p \in \mathbb{Q}$ se cumple

$$\text{Log } z^p = p \text{Log } z. \quad (129)$$

Demostración. La demostración se deja como ejercicio. \square

Potencia compleja de números complejos

El último tema a discutir en este capítulo es como se debe elevar un número complejo a una potencia compleja, para lo cual se tiene la siguiente definición.

Definición [Exponente general]. Si $z, \zeta \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$ se define

$$z^\zeta \stackrel{\text{def}}{=} e^{\zeta \text{Log} z} = \exp(\zeta \text{Log} z). \quad (130)$$

Definición de exponencial

$$z^\zeta = e^{\zeta \text{Log} z}$$

Nota. Al ser la función $\text{Log} z$ multivaluada, la exponencial resulta multivaluada.

Ejemplo. Calcule: a) i^i y b) $i^{\sqrt{2}}$.

Solución. a) Por la definición (130), $i^i = e^{i \text{Log} i}$. Ya hemos calculado $\text{log} i = \frac{\pi}{2}i$, así, $\text{Log} i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$. Por lo tanto

$$i^i = \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i^2\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Note que i^i ¡está en \mathbb{R} !

b) Por definición, $i^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \text{Log} i)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} i^{\sqrt{2}} &= \exp\left(\sqrt{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i\right) \\ &= \cos \sqrt{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \text{sen} \sqrt{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ejercicios de números complejos

- Demuestre las propiedades (P 4) y (P 6).
- Se define $\mathbb{Q} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ y se definen en \mathbb{Q} las operaciones $(a, b) + (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (ad + bc, bd)$, $(a, b) \times (c, d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac, bd)$. Demuestre que
 - Si $(a, b) \neq (0, 0)$ existe $(a, b)^{-1}$ tal que $(a, b) \times (a, b)^{-1} = (1, 1)$.
Sugerencia. Encuentre una expresión exacta para el inverso y cuando la halle, muestre que efectivamente es inverso.
 - $(\mathbb{Q}, +, \times)$ es campo y es indistinguible de los números racionales conocidos de todos. **Indicación:** Indistinguible significa que existe un isomorfismo entre ambos campos.
- Demuestre la fórmula general del producto de números complejos (81).
- Demuestre por inducción la fórmula de De Moivre (82).

Aritmética en \mathbb{C}

- Si $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = i$, realice las siguientes operaciones:

- $z_1 z_2 z_3$,
- $z_1^{-1} z_2$,
- z_3^3 ,
- z_2^{-2} ,
- $z_3^{-1} z_2$.

- Simplifique las expresiones siguientes

a) $(7 + i)(4 - i)$.

Solución: $29 - 3i$.

b) $\frac{7 + i}{4 - i}$.

Solución: $(27 + 11i)/17$.

c) $\left(\frac{1 + 2i}{2 + i}\right)^3$.

Solución: $(-44 + 117i)/125$.

Propiedades del conjugado complejo

- Demuestre las siguientes proposiciones.

- a) **Proposición I [Propiedades del conjugado complejo].** Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple:

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow \text{im}(z) = 0$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
- $\text{re}(z) = \text{re}(\bar{z}) = 1/2(z + \bar{z})$.
- $\text{im}(z) = -\text{im}(\bar{z}) = i/2(z - \bar{z})$.

- b) **Proposición II [Propiedades del módulo complejo]** Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple:

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

- ii) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.
 iii) $|z^n| = |z|^n$.
 iv) $|z|^2 = |\bar{z}|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$.
8. Demuestre que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ implica $|z|^2 \geq |x|^2$ y $|z|^2 \geq |y|^2$.
9. Demuestre $|\sum_{n=1}^N z_n| \leq \sum_{n=1}^N |z_n|$ por inducción sobre N .
10. Demuestre que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se cumple que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
11. Demuestre que $|z| = 4$, si $|z + 16| = 4|z + 1|$.
12. Argumente por qué se cumplen (89), (90), (91) y (92).

Argumento de un número complejo

13. Demuestre que
- a) $\text{Arg } z = \arg z + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.
 b) $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$, si $z_1, z_2 \neq 0$.

Fórmula de De Moivre

14. Calcule las raíces quintas y sextas de la unidad, grafique estas soluciones y construya el polígono correspondiente a estas raíces.
15. Encuentre una fórmula para $z^{m/n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $z = r(\cos \theta + i \sen \theta)$.

Grupos y fórmula de De Moivre

Definición [Grupo]. Un grupo es un conjunto G donde se ha definido una operación $\circ : G \times G \rightarrow G$ tal que para todo $a, b, c \in G$ se tiene que:

- i) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
 ii) Existe $\mathbb{1} \in G$ tal que $\mathbb{1} \circ a = a \circ \mathbb{1} = a$.
 iii) Existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \mathbb{1}$
16. Demuestre que las raíces n -ésimas de la unidad forman un grupo con la operación \circ , definida como el producto de números complejos.
17. Demuestre que \mathbb{Z} con la operación suma es un grupo.

Raíces y factorización de polinomios

18. Resuelva las siguientes ecuaciones y factorice el polinomio:

- a) $z^6 + 22z^3 + 125 = 0$. Solución: $1 \pm 2i, \sqrt{3} - 1/2 \pm (1 + 1/2\sqrt{3})i, -(\sqrt{3} + 1/2) \pm (1 - 1/2\sqrt{3})i$.
 b) $x^{10} + 6ix^5 - 12 = 0$.
 c) $x^2 + x + 5 = 0$.
 d) $z^2 + iz + 1 + i = 0$.
 e) $(2 + i)z^2 + (1 - i)z + i = 0$.
 f) $x^3 + 1 = 0$.
 g) $x^n + 1 = 0$.

Sugerencia: Calcule las raíces cúbicas de -1 .

Sugerencia: Resuelva primero el ejercicio anterior.

Aplicaciones a series de Fourier

19. Demuestre las fórmulas $\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$, $\operatorname{sen} n\theta = \frac{i}{2}(z^{-n} - z^n)$ a partir de las relaciones $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$, y $z^{-n} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$.
20. Expresar $\cos 5\theta$ y $\operatorname{sen} 5\theta$ como polinomios en $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$, respectivamente.
21. Expresar $\operatorname{sen}^3 \theta$ y $\cos^2 \theta \operatorname{sen}^3 \theta$ en términos de funciones trigonométricas de ángulos múltiplos.

Funciones trascendentes

22. Argumente cada paso de la demostración del Teorema [Propiedad multiplicativa de la función exponencial].
23. Dadas las fórmulas $\cos z - i \operatorname{sen} z = e^{-iz}$ y $\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz}$, demuestre las fórmulas (100), (101).
Sugerencia. Sume las dos ecuaciones, simplifique, etcétera, así obtendrá la primera ecuación.
24. Argumente cada paso de las demostraciones del Teorema [Propiedades de las funciones trascendentes en \mathbb{C}].
25. Sustituyendo directamente las identidades (100) y (101) en las funciones seno y coseno, demuestre las siguientes propiedades
- a) $\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = \cos 2z$.
- b) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$
Sugerencia: Proceda como en la demostración de $\operatorname{sen}(z_1 + z_2)$.

Funciones hiperbólicas

26. Defina las funciones $\operatorname{sech} z$, $\operatorname{cosech} z$ y $\operatorname{coth} z$, para toda $z \in \mathbb{C}$.
27. Compruebe que se cumple la identidad $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ y $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh 2z$.
28. Verifique que la función $\cosh z$ es par y la función $\operatorname{senh} z$ es impar.
29. Demuestre todas las propiedades del Lema [Propiedades de las funciones hiperbólicas] que no haya demostrado.
30. Demuestre las fórmulas $\cosh^2 x = (\cosh 2x + 1)/2$ y $\operatorname{senh}^2 x = (\cosh 2x - 1)/2$.
31. Encuentre la parte real, la parte imaginaria y el módulo de las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\tan z$ y gráfíquelas como funciones de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, usando un programa computacional.

Funciones racionales lineales

32. Encuentre los puntos fijos de las siguientes funciones y compruebe sus resultados.
- a) $f(z) = 3z + i$.
- b) $g(z) = \frac{(2+i)z+1}{(2-i)z-1}$.
- c) $g(z) = \frac{iz+1}{2z-1}$.
33. Calcule las inversas de las siguientes funciones. Compruebe sus resultados.
- a) $f(z) = \frac{iz+2}{z-i}$.

$$b) g(z) = \frac{4z + 5}{6z - 1}.$$

$$c) h(z) = \frac{(2+i)z - 3 + i}{(1+i)z - 1 - i}.$$

34. Halle las imágenes bajo $h(z) = 1/z$, de las curvas siguientes:

a) La familia de circunferencias $x^2 + y^2 = by$.

Solución: $v = 1/b$.

b) El haz de rectas $y = kx$

Solución: $v = -ku$.

35. Determine los coeficientes α, β, δ , de la transformación racional lineal que:

a) toma los valores $f(0) = 0, f(1) = i$ y $f(\infty) = 1$,

b) toma los valores $f(0) = 1, f(1) = 1 + i$ y $f(\infty) = 0$,

c) toma los valores $f(0) = 2 - i, f(1) = 1 + i$ y $f(\infty) = 3 + 2i$,

d) toma los valores $f(0) = 1 + i, f(1) = 0$ y $f(i) = 2$.

Solución: $f(z) = (1+i)(1-z)$.

36. Las transformaciones racionales lineales pueden ponerse en correspondencia con matrices de 2×2 :

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Escriba la matriz de la transformación inversa y compruebe que la matriz de T por la matriz de T^{-1} , es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Dada la transformación $S(z) = \frac{ez + f}{gz + h}$, encuentre la transformación $T \circ S$. Compruebe que la matriz de la composición es igual al producto de matrices de cada una de las transformaciones.

Sugerencia. El producto de matrices esta definido como

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a,b) \cdot (e,g) & (a,b) \cdot (f,h) \\ (c,d) \cdot (e,g) & (c,d) \cdot (f,h) \end{pmatrix},$$

donde $(a,b) \cdot (e,g) = ae + bg$, es el *producto punto* o *producto interior* en \mathbb{R}^2 .

37. Sean T_i transformaciones racionales lineales tales que

$$T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Demuestre las siguientes proposiciones:

a) $T = T_i \circ T_j$ es una transformación racional lineal con determinante $\Delta = \Delta_i \Delta_j$.

b) La composición de transformaciones es asociativa, $(T_3 \circ T_2) \circ T_1 = T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$.

c) Para toda transformación T_i , existe una inversa T_i^{-1} tal que $T_i \circ T_i^{-1} = T_i^{-1} \circ T_i = I$, donde $I(z) = z$ es la transformación identidad. ¿Cuál es el determinante de la inversa?

Sugerencia. No haga cálculos ¿cuál es el determinante de la matriz identidad?, ¿cuál es el determinante de un producto de matrices?

38. Encuentre ejemplos que muestren que la composición de transformaciones racionales lineales *no es conmutativa en general*.

Conjunto de Mandelbrot

39. Para $f(z) = z^2 + c$ con $z_0 = 0$, $z_1 = f(0) = c$, $z_2 = (f^2)(0) = c^2 + c$, encuentre z_4 y z_5 , ¿puede encontrar una fórmula para z_n ? Calcule z_i , $i = 1, \dots, 5$, para $c = -1 + i$, $c = 1,9$, $c = 1 + i$. Use calculadora o un programa computacional.
40. Encuentre el punto fijo de $f(z) = z^2 + c$. Ponga c en coordenadas polares y haga la gráfica de algunos puntos fijos dando valores a c arbitrarios. Use calculadora.

Funciones logaritmo, Log y log

41. Calcule el logaritmo de los números complejos a) $3 + 4i$, b) $-i$, c) $-1 + i$.
42. Demuestre la identidad $\text{Log} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Log} z_1 - \text{Log} z_2$.
43. Demuestre que si $z \neq 0$ es un número complejo y $p \in \mathbb{Q}$, se cumple

$$\text{Log} z^p = p \text{Log} z.$$

Sugerencia. Use la fórmula de De Moivre para z^p .

44. Calcule a) $(1 + i)^i$, b) i^{-i} , c) i^{1+i} .
45. Demuestre la fórmula de De Moivre para exponente α irracional: $z^\alpha = r^\alpha (\cos \alpha + i \text{sen} \alpha)$.

Sugerencia: Use la fórmula (130).

Solución de problemas seleccionados

1. Solución del problema 32c. Ponemos $\frac{iz + 1}{2z - 1} = z$, de donde

$$\begin{aligned}\frac{iz + 1}{2z - 1} &= z \\ iz + 1 &= z(2z - 1) \\ 2z^2 - (1 + i)z - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Se tiene una cuadrática en z la cual tiene solución

$$z = \frac{1 + i \pm \sqrt{(1 + i)^2 + 8}}{4} = \frac{1 + i \pm 2\sqrt{4 + 2i}}{4}.$$

El lector debe ser capaz de calcular la raíz cuadrada $\sqrt{4 + 2i}$ y escribir las soluciones como un número complejo de la forma $z = x \pm yi$.

2. Solución del problema 34. Completando cuadrados se tiene $x^2 + (y - b/2)^2 = b^2/4$, lo cual en términos de números complejos corresponde a la circunferencia

$$\left| z - \frac{bi}{2} \right|^2 = \frac{b^2}{4}, \quad \text{¿por qué?}$$

De aquí poniendo $w = 1/z$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{w} - \frac{ib}{2} \right) \left(\frac{1}{\bar{w}} + \frac{ib}{2} \right) &= \frac{b^2}{4} \\ (2 - ibw)(2 + ib\bar{w}) &= w\bar{w}b^2 \\ b^2w\bar{w} + 2ib(-w + \bar{w}) + 4 &= w\bar{w}b^2 \\ 2ib(-2i \cdot \operatorname{im} w) &= -4 \\ \operatorname{im} w &= \frac{1}{b}.\end{aligned}$$

Recuerde que poniendo $w = u + iv$, se tiene $-w + \bar{w} = -2iv = -2i \cdot \operatorname{im} w$, así la solución son las rectas

$$v = \frac{1}{b}.$$

Donde para $b \neq 0$, se trata de rectas paralelas a eje real en el plano u, v .

Geometría hiperbólica

Ningún libro de geometría universitaria está completo sin el estudio de otras geometrías. Históricamente la geometría hiperbólica aparece al tratar de demostrar que el Postulado V de Euclides no era postulado, sino teorema. Abreviando, el quinto postulado es un postulado y durante la trifulca de centurias se descubrieron nuevas geometrías. La historia de lo que he mencionado, un poco en broma por abreviar, es en realidad un recorrido fascinante del desarrollo de una idea. Al mirar de lejos, la forma en cómo evolucionó una teoría por más de dos milenios, desde Euclides hasta los grandes matemáticos del siglo XIX, se evidencia la manera tortuosa y compleja como se desarrolla el pensamiento humano en general. El lector interesado en la parte histórica de este tema puede consultar el libro de Greenberg⁵³.

Comenzaremos el estudio de la Geometría Hiperbólica con el modelo de Poincaré por dos motivos. El primero es que este libro está dedicado a quienes por primera vez enfrentan la geometría axiomática y que liberarse de las imágenes de la geometría euclidiana puede resultar oneroso, al menos que se presente primero un modelo, como haremos nosotros. La segunda razón es que quienes hayan cubierto el capítulo de los números complejos de este libro tendrán una fuerte herramienta para comprender, desde el punto de vista de las transformaciones, la esencia del modelo que veremos.

El modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica

El universo del modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica es el interior del disco unitario, $|z| < 1$, del plano complejo \mathbb{C} . Es decir, la circunferencia $|z| = 1$ no está incluida y se considera esta circunferencia el infinito de este universo. Los puntos de este plano son los puntos dentro del círculo que, como es costumbre, denotaremos con mayúsculas P, Q, \dots , también, denotaremos a las rectas con minúsculas y las llamaremos \mathcal{H} -rectas. Las \mathcal{H} -rectas son los diámetros de la circunferencia y los arcos de las circunferencias que cortan a $|z| = 1$ perpendicularmente, es decir, arcos cuyas tangentes en el punto de intersección con la circunferencia unitaria son perpendiculares a las

⁵³ Marvin J. Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean Geometries Development and History*. W. H. Freeman and Company, 1993

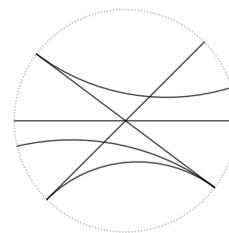


Figura 180: Las \mathcal{H} -rectas de la figura son las trayectorias que recorrería la luz en el universo hiperbólico plano de Poincaré.

En los ejercicios correspondientes a este capítulo indicaremos como construir con compás las \mathcal{H} -rectas.

tangentes de dicha circunferencia. *Nunca debe olvidarse que los puntos de $|z| = 1$ no pertenecen al universo.* Por artificial que pueda parecer al principio este universo hiperbólico, Poincaré mostró que si la luz obedecía cierta ley, la trayectoria que seguiría sería la de las \mathcal{H} -rectas. Para una aproximación histórica y que toca varios modelos hiperbólicos, el lector puede consultar el libro de Greenberg⁵⁴.

El lector debe liberarse de ciertos prejuicios. No porque nosotros veamos el universo hiperbólico como un círculo, es un círculo para los habitantes de ese universo. Y por poner sólo algunos ejemplos de prejuicios, enumeramos los siguientes:

- No por que un punto parezca el centro de la circunferencia, es el centro del universo hiperbólico. Todo punto del disco equidista del infinito que nosotros vemos como $|z| = 1$.
- De lo anterior debe deducirse que la forma de medir en el universo hiperbólico no es la forma como nosotros medimos, y podemos adelantar que encontraremos una fórmula que nos de la manera de medir en ese universo, desde una perspectiva de observador fuera de ese universo.
- No se cumplirán muchos teoremas de la geometría euclidiana. La suma de los ángulos de los triángulos *no miden π* , y los triángulos son semejantes si y sólo si son ¡congruentes!

Cabe preguntar entonces ¿qué es lo que si cumplen las \mathcal{H} -rectas? La respuesta es que satisfacen dentro del disco el Postulado II de Birkhoff (postulado que está en todas las axiomáticas de la geometría euclidiana), es decir, por dos puntos distintos pasa una y sólo una \mathcal{H} -recta.

El postulado de Euclides que no se cumple es el equivalente al postulado que dice que, por un punto que no está en una recta, existe solo una paralela que pasa por ese punto. Pero antes de pasar al nuevo postulado debemos tener una representación de cómo son las rectas paralelas en el modelo de Poincaré. La definición de paralelas en este modelo son rectas que no se cortan en el interior del círculo aunque podrían tener un punto común sobre $|z| = 1$. En la Figura 181 se muestran varias \mathcal{H} -rectas paralelas a la \mathcal{H} -recta l .

Al entender en el modelo de Poincaré lo que son las representaciones de paralelas, podemos ver que por un punto fuera de una recta pasan infinitas paralelas. En la Figura 182, se muestran dos paralelas m, n que pasan por P , paralelas a l . ¿Puede el lector visualizar por qué hay infinitas rectas paralelas a l que pasan por P ?

En la Figura 183 una representación de un triángulo en el modelo de Poincaré. Observe que la medida de los ángulos que nosotros percibimos puede ser definida por el ángulo entre los arcos de la circunferencia que lo forman. Se puede demostrar que la suma de los

⁵⁴ Marvin J. Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean Geometries Development and History*. W. H. Freeman and Company, 1993

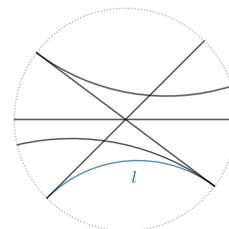


Figura 181: Todas las \mathcal{H} -rectas de la figura, son paralelas a la \mathcal{H} -recta l .

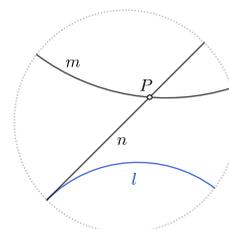


Figura 182: Por el punto P , pasan infinitas paralelas a l . En la figura se muestran dos m, n .

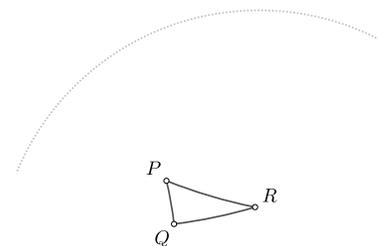


Figura 183: Se muestra un triángulo hiperbólico ordinario formado por tres \mathcal{H} -segmentos que unen los puntos P, Q y R .

ángulos internos de todo triángulo hiperbólico mide menos que π radianes.

Antes de pasar a la axiomática examinaremos un poco más el modelo de Poincaré. Lo primero que se debe hacer es determinar la forma en que mediremos los segmentos y cuál es el grupo de isometrías, es decir el grupo de transformaciones que preservan las medidas. Con estas dos acciones, de acuerdo al enfoque de Klein, quedará determinada completamente la geometría del modelo de Poincaré.

En el capítulo dedicado a los números complejos estudiamos con algún detalle las transformaciones racionales lineales, también llamadas *transformaciones de Möbius*. Un subgrupo de tales transformaciones, aquellas que transforman el disco unitario en sí mismo, forman el grupo de isometrías del modelo de Poincaré. Dado que las transformaciones racionales lineales dejan invariante la razón doble (también definida y estudiada en el capítulo citado), la forma de medir la longitud de segmentos estará definida en términos de esta razón, como veremos.

Medida de segmentos en el modelo de Poincaré

Dado un segmento AB se prolonga hasta encontrar las intersecciones con la circunferencia unitaria. Sean α, β tales intersecciones. Aquí es oportuno recordar que estos últimos puntos *no pertenecen* al espacio geométrico ya que $|z| = 1$ no pertenece al espacio. Se considerará la razón doble

$$(\alpha, \beta, B, A) = \frac{\frac{B-\alpha}{B-\beta}}{\frac{A-\alpha}{A-\beta}}.$$

Llegamos de esta manera a la siguiente definición.

Definición [Medida de un segmento hiperbólico]. Se define la longitud $m_{\mathbb{H}}(AB)$, del segmento AB , o lo que es lo mismo la distancia hiperbólica de A a B denotada $d_{\mathbb{H}}(A, B)$, mediante la fórmula

$$m_{\mathbb{H}}(AB) = d_{\mathbb{H}}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \log |(\alpha, \beta, B, A)|. \quad (131)$$

Nota. Observe que:

- Se toma el logaritmo del módulo de la razón doble, y para que la medida sea positiva, debemos tener $|(\alpha, \beta, B, A)| > 1$.
- La medida debe satisfacer ciertas propiedades, por ejemplo, ser aditiva, lo cual se cumple al tomar logaritmo como demostraremos.
- La invarianza de la medida bajo racionales lineales queda garantizada por el Teorema [Invarianza de la razón doble bajo racionales

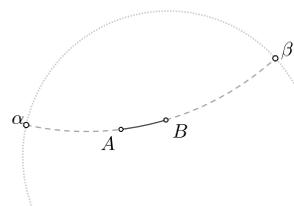


Figura 184: Para medir un segmento en el modelo de Poincaré se debe tomar la razón doble (α, β, B, A) , donde α y β están sobre la circunferencia $|z| = 1$ y A y B , son los extremos del segmento.

lineales]. Pero antes de demostrar esto, debemos determinar cuales transformaciones racionales lineales transforman la circunferencia unitaria en la circunferencia unitaria.

En la axiomática de Birkhoff es fundamental poder medir segmentos y ángulos. En la geometría hiperbólica mediremos los ángulos euclidianos con los ángulos formados por las tangentes de los arcos de circunferencia como se muestra en la Figura 186. También mediremos la longitud de los segmentos como se ha definido en (131), por este motivo, es pertinente formalizar lo que se entiende por una medida, como haremos a continuación.

Proposición. La función $m_{\mathbb{H}}$ definida en el disco $|z| < 1$, es una medida, es decir, satisface las siguientes propiedades:

- i) Para todo $A, B \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, se cumple que $m_{\mathbb{H}}(AB)$ es un número no negativo.
- ii) La medida se conserva bajo isometrías, en el caso de la geometría hiperbólica, segmentos transformados por las funciones de la forma

$$f(z) = \mu \frac{z - \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\mu| = 1, \quad (132)$$

se definen como congruentes.

- iii) La medida de un segmento debe ser aditiva, es decir, si $A - B - C$ entonces

$$m_{\mathbb{H}}(AC) = m_{\mathbb{H}}(AB) + m_{\mathbb{H}}(BC).$$

Demostración. (ii) Comenzamos por demostrar que todas las funciones de la forma (132) transforman el disco unitario en el disco unitario.

Sea $w = \mu \frac{z - \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}$, con $|\alpha| < 1$ y $|\mu| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} w = \mu \frac{z - \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1} &\Leftrightarrow w(1 - \bar{\alpha}z) = \mu z - \mu\alpha \\ &\Leftrightarrow w + \mu\alpha = (\mu + \bar{\alpha}w)z \\ &\Leftrightarrow z = \frac{w + \mu\alpha}{\mu + \bar{\alpha}w}. \end{aligned}$$

Ahora si $z\bar{z} = |z|^2 < 1$, es decir, si z está en el disco unitario, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{w + \mu\alpha}{\mu + \bar{\alpha}w} \right) \left(\frac{\bar{w} + \bar{\mu}\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \alpha\bar{w}} \right) = z\bar{z} < 1 &\Leftrightarrow (w + \mu\alpha)(\bar{w} + \bar{\mu}\bar{\alpha}) < (\mu + \bar{\alpha}w)(\bar{\mu} + \alpha\bar{w}) \\ &\Leftrightarrow (1 - |\alpha|^2)|w|^2 < 1 - |\alpha|^2 \\ &\Leftrightarrow |w| < 1, \end{aligned}$$

donde $\mu\bar{\mu} = |\mu|^2 = 1$ y $1 - |\alpha|^2 > 0$, por hipótesis. Así, si $|z| < 1$, se tiene $|w| < 1$, por lo que la función (132) transforma el interior del disco unitario en el interior del disco unitario.

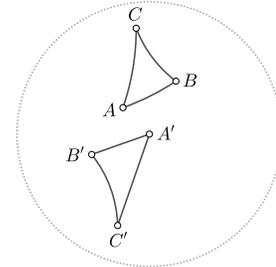


Figura 185: Se muestran dos triángulos hiperbólicos congruentes. En geometría hiperbólica dos triángulos son congruentes si existe una función de la forma (132) que transforma un triángulo en el otro.

Ahora veremos que las funciones que transforman el disco unitario en sí mismo son necesariamente de la forma (132). En efecto, sea

$$w = L(z) = \lambda \frac{z - \alpha}{z - \alpha^*},$$

cualquiera transformación racional lineal con $\alpha - \alpha^* \neq 0$. Entonces, esta transformación es inyectiva en el plano complejo, $L(\alpha) = 0$ y $L(\alpha^*) = \infty$. Así, si $|\alpha| < 1$, este punto es transformado en el centro de la circunferencia unitaria. Si garantizamos que $|z| = 1$ se transforme en $|w| = 1$ y α^* sea un punto exterior de la circunferencia unitaria, entonces L transformará el disco unitario en sí mismo, dada la continuidad de la función en el disco. Para garantizar que α^* esté fuera del disco unitario, basta poner

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{|\alpha|^2} = \frac{1}{\bar{\alpha}}.$$

En efecto, $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ es un vector unitario en la dirección de α y como $|\alpha| < 1$ entonces $1/|\alpha| > 1$, lo que garantiza que α^* esté fuera de la circunferencia unitaria. Ahora notamos que

$$\begin{aligned} w &= \lambda \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = -\bar{\alpha}\lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \\ &= \mu \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \end{aligned}$$

donde $\mu = -\bar{\alpha}\lambda$. Finalmente, para comprobar que $|z| = 1$ es transformado en $|w| = 1$ basta ver que, siguiendo un procedimiento similar al anterior:

$$w = \mu \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{w + \mu\alpha}{\mu + w\bar{\alpha}}$$

Por lo tanto, si $|z| = 1$ entonces $z\bar{z} = 1$ y

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{w + \mu\alpha}{\mu + w\bar{\alpha}} \right) \left(\frac{\bar{w} + \bar{\mu}\bar{\alpha}}{\bar{\mu} + \bar{w}\alpha} \right) \Leftrightarrow (w + \mu\alpha)(\bar{w} + \bar{\mu}\bar{\alpha}) = (\mu + w\bar{\alpha})(\bar{\mu} + \bar{w}\alpha) \\ &\Leftrightarrow |w|^2(1 - |\alpha|^2) = |\mu|^2(1 - |\alpha|^2) \\ |w| = 1 &\Leftrightarrow |\mu| = 1, \end{aligned}$$

donde $1 - |\alpha|^2 \neq 0$, por hipótesis. El lector debe comprobar por sí mismo los detalles del desarrollo anterior. Hemos demostrado así que toda transformación del círculo unitario en sí mismo es de la forma (132).

Por otra parte hemos demostrado en capítulo de números complejos que las transformaciones racionales lineales mantienen invariante la razón doble (α, β, B, A) y por lo tanto la razón doble es invariante bajo transformaciones de la forma (132). Por este motivo es coherente

El punto α^* es un punto simétrico respecto a la circunferencia $|z| = 1$, en un sentido preciso que se especificará en los ejercicios.

definir las isometrías del modelo de Poincaré en términos de transformaciones de la forma (132).

(i) Establecida la veracidad de (ii), podemos demostrar que $m_{\mathbb{H}}(AB)$ es un número no negativo. Efectivamente, por (ii) y dado que las transformaciones racionales lineales quedan determinadas por tres puntos (de acuerdo a lo visto en el capítulo donde se estudian los números complejos, existe una función L , tal que la \mathbb{H} -recta AB puede ser llevada sobre el diámetro $(-1, 1)$, de tal forma que $L(\alpha) = -1$, $L(A) = 0$, $L(B) = B' > 0$ y $L(\beta) = 1$. Dado que la razón doble se conserva, debemos tener

$$|(\alpha, \beta, B, A)| = |(-1, 1, B', 0)| = \left| \frac{\frac{B'+1}{B'-1}}{\frac{0+1}{0-1}} \right| > 1,$$

como se desea demostrar. También de aquí se concluye que $d_{\mathbb{H}}(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$.

(iii) Si $A - B - C$, se tiene

$$m_{\mathbb{H}}(AC) = \log |(\alpha, \beta, C, A)| = \log |(\alpha, \beta, B, A)| + \log |(\alpha, \beta, C, B)|,$$

dado que

$$(\alpha, \beta, B, A) = \frac{\frac{B-\alpha}{B-\beta}}{\frac{A-\alpha}{A-\beta}}, \quad (\alpha, \beta, C, B) = \frac{\frac{C-\alpha}{C-\beta}}{\frac{B-\alpha}{B-\beta}}$$

y así

$$(\alpha, \beta, C, A) = (\alpha, \beta, B, A)(\alpha, \beta, C, B) = \left(\frac{\frac{B-\alpha}{B-\beta}}{\frac{A-\alpha}{A-\beta}} \right) \left(\frac{\frac{C-\alpha}{C-\beta}}{\frac{B-\alpha}{B-\beta}} \right) = \frac{\frac{C-\alpha}{C-\beta}}{\frac{A-\alpha}{A-\beta}}.$$

Con lo cual se termina la demostración de la proposición. \square

Nota. Hay otras propiedades que no demostramos de las transformaciones racionales lineales y que son útiles en el modelo de Poincaré. Por ejemplo, si dos curvas forman un ángulo α , las imágenes de estas curvas bajo racionales lineales conservan el mismo ángulo. Este hecho se cumple en general para las funciones derivables de variable compleja en los puntos donde la derivada es distinta de cero y por tal motivo a tales transformaciones se les llama *conformes*. A pesar de que la demostración de este hecho no es difícil, requiere del uso de límites y por lo tanto no lo estudiamos aquí, el lector interesado puede consultar el libro de Ahlfors (op. cit) o el libro de Markushevich⁵⁵.

Medida de ángulos en geometría hiperbólica

Hay dos tipos de segmentos para quienes viven fuera del universo hiperbólico: los que están sobre diámetros y los que están sobre

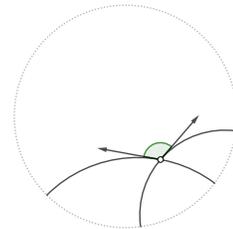


Figura 186: En el modelo de Poincaré se pueden medir los ángulos entre rectas como el ángulo entre las tangentes a las circunferencias, debido a que las transformaciones racionales lineales son conformes.

⁵⁵ Alekséi Markushevich. *Teoría de las funciones analíticas*. Editorial MIR Moscú, 1970

circunferencias ortogonales a la circunferencia unitaria. De esta forma hay tres tipos de ángulos: los formados solo por diámetros, los formados solo por circunferencias y los formados por diámetros y circunferencias. Mediremos los ángulos de la misma manera que en la geometría euclidiana, pero para los segmentos sobre circunferencias, utilizaremos las tangentes a las circunferencias en los puntos que se midan los ángulos como se muestra en la Figura 186.

Teorema de la suma de ángulos de triángulos hiperbólicos

Conocidas las propiedades de las transformaciones racionales lineales podemos demostrar dentro del modelo de Poincaré de la geometría hiperbólica un teorema fundamental, pero antes requerimos un lema.

Lema. Todo triángulo hiperbólico en el modelo de Poincaré con un vértice en 0 tiene dos lados y solo dos sobre radios de la circunferencia $|z| = 1$.

Demostración. Toda \mathcal{H} -recta que pasa por 0 es necesariamente un diámetro ya que si el punto $\alpha \neq 0$ está en la circunferencia unitaria, siempre existe un diámetro que pasa por α y 0, tal diámetro es la única \mathcal{H} -recta que pasa por 0 y α , ya que por dos puntos distintos, pasa una y solo una recta (ejercicio 1). Claramente un triángulo que tiene dos lados sobre diámetros no puede tener un tercer lado sobre un diámetro, ya que la recta que contuviera a ese lado tendría que pasar por 0, al ser diámetro, y por lo tanto los tres vértices del triángulo serían colineales, lo cual es una contradicción con nuestra definición de triángulo. \square

Teorema [Suma de ángulos de triángulos hiperbólicos] La suma de los ángulos internos de un \mathcal{H} -triángulo suman menos que π .

Demostración. Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, existe una transformación racional lineal de la forma (132) que lleva cualquier vértice que se desee al punto $A' = 0$ del disco unitario. Sea A tal vértice llevado al vértice A' (re-etiquetando los vértices si es necesario), y sea la correspondencia $ABC \leftrightarrow A'B'C'$. Por el lema anterior, el lado $A'B'$ está sobre un radio, al igual que $A'C'$ está sobre un radio diferente del primero. Ahora el lado $B'C'$ está sobre un arco de circunferencia que es cóncavo hacia el vértice A' del triángulo $\triangle A'B'C'$ (vea la Figura 187). Está concavidad opuesta al vértice A' ocurre siempre dado que la \mathcal{H} -recta formada por la circunferencia que pasa por B' y C' tiene centro en el punto simétrico a A' respecto a la circunferencia unitaria (vea el ejercicio 3 para la construcción de los segmentos sobre circunferencias). Puesto que los ángulos del triángulo euclidiano con vértices en A', B', C' suman π , los ángulos del \mathcal{H} -triángulo $\triangle A'B'C'$ suman menos que π . \square

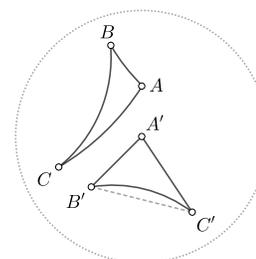


Figura 187: La suma de los ángulos internos de un \mathcal{H} -triángulo en el modelo de Poincaré miden menos que π . La demostración se hace trasladando uno de los vértices del triángulo al centro del círculo $|z| = 1$.

Nota. El lector debe hacer los ejercicios donde se dibujen triángulos hiperbólicos y donde encuentre fórmulas de las transformaciones racionales lineales para desarrollar intuición en la geometría hiperbólica. En la Figura 187, los triángulos mostrados son triángulos hiperbólicos reales y el triángulo $\triangle A'B'C'$ se obtuvo de $\triangle ABC$ mediante la transformación $f(z) = i \frac{z+A}{Az+i}$, donde $A = 0.4i$, $B = -0.25 + 0.72i$ y $C = -0.66 + 1.45i$, como puede comprobar el lector. En los ejercicios también se indica cómo pueden construirse los segmentos hiperbólicos con un compás.

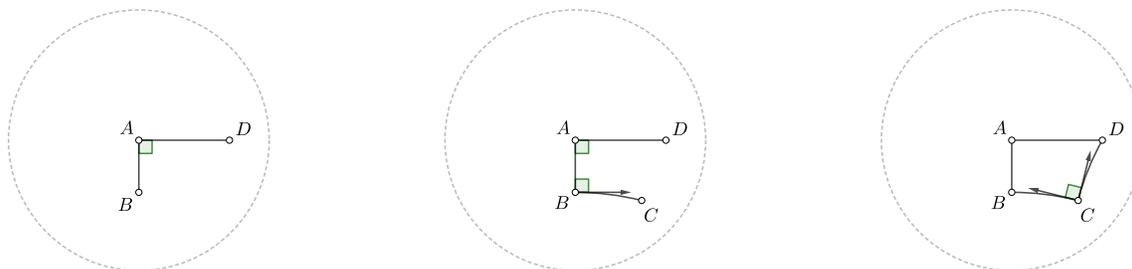
En geometría hiperbólica no hay rectángulos

Finalmente, antes de comenzar a revisar un sistema de axiomas de la geometría hiperbólica, podemos mencionar uno de los resultados que dieron fundamento a las teorías geométricas no euclidianas que se establece en el siguiente teorema. Para el lector que no tenga experiencia en este tema se recomienda hacer los ejercicios 2a a 2d, antes de estudiar la demostración del siguiente teorema.

Teorema [Inexistencia de rectángulos en geometría hiperbólica]. En geometría hiperbólica no existen rectángulos, si en un cuadrilátero se tienen tres ángulos rectos, necesariamente el cuarto ángulo mide menos que $\pi/2$.

Demostración. La idea de la demostración es construir paso a paso un cuadrilátero con tres ángulos rectos congruente con cualquier cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos y mostrar que es imposible que el cuarto ángulo sea recto. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con tres ángulos rectos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$. Construimos un cuadrilátero congruente con el dado (mediante una transformación racional lineal) que denotaremos con las mismas letras $ABCD$ de tal forma que A sea el vértice del cuadrilátero en el centro de circunferencia unitaria y sean B y D otros dos vértices del cuadrilátero ubicados sobre dos radios perpendiculares de la circunferencia unitaria. El segundo paso es construir el segundo segmento del cuadrilátero que forme ángulo recto con el radio que pasa por AB . Para este fin se requiere construir una circunferencia ortogonal a AB , la cual por las propiedades de la circunferencia vistas en el capítulo que trata de las propiedades de la circunferencia (el lector debe justificar cuál teorema garantiza esto), debe tener su centro sobre el rayo AB . Sea C el punto del cuadrilátero que está en correspondencia con el cuadrilátero inicial. Debemos construir el cuarto lado del cuadrilátero de tal forma que el $\angle C$ sea recto. Para este fin se construye la \mathcal{N} -recta (es decir, la circunferencia ortogonal al arco) BC , que pasa por C . El punto D está determinado por la intersección de esta última \mathcal{N} -recta con la \mathcal{N} -recta que pasa por AD . Se afirma que el $\angle D$ no es

recto. Efectivamente, dado que AD es un radio, la \mathcal{H} -recta ortogonal a AD debe tener necesariamente su centro en el rayo AD , lo cual es imposible si la \mathcal{H} -recta debe pasar por C . \square



Nota. El hecho de que el ángulo D no es recto puede demostrarse de manera analítica de la siguiente manera. Dado que el centro de la circunferencia H que pasa por CD está sobre el radio AD , debe tener la forma $H = x + 0i$, es decir, $\text{im } H = 0$. Por otra parte el punto C debe tener la forma $C = c_1 + c_2 i$, con $0 < c_1, c_2 < 1$ y $D = d_1 + 0i$. Con la fórmula obtenida en 2b (vea la sección de soluciones), el centro de la circunferencia que pasa por CD ortogonal a $|z| = 1$, es decir, la \mathcal{H} -recta que pasa por CD debe tener centro en un punto de la forma:

$$H = \frac{-d_1(1 + c_1^2 + c_2^2) + (c_1 + ic_2)(1 + d_1^2)}{-d_1 2 \text{im } C},$$

el cual no tiene parte imaginaria 0, dado que $c_2(1 + d_1) \neq 0$. \square

Axiomáticas de la geometría hiperbólica

Si recordamos cómo desarrollamos la geometría euclidiana con el sistema de axiomas de Birkhoff, recordaremos que obtuvimos la siguiente cadena de implicaciones:

- i) El Postulado LAL implica que la suma de los ángulos internos de todo triángulo suman π .
- ii) La suma de los ángulos internos de todo triángulo suma π implica la existencia de una perpendicular única a una recta por un punto dado.
- iii) La existencia de una perpendicular única a una recta por un punto dado implica la existencia de una paralela única a una recta por un punto dado que no esté en la recta.

Abreviadamente y con símbolos:

Postulado LAL \Rightarrow (Suma de \angle s internos de todo \triangle es π) \Rightarrow ($\exists \perp$ única) \Rightarrow ($\exists \parallel$ única.)

Figura 188: Se construye un \mathcal{H} -cuadrilátero congruente a un cuadrilátero dado con el vértice A , en el centro de la circunferencia unitaria y dos lados sobre radios ortogonales. Si los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son rectos, el $\angle D$ no puede ser recto.

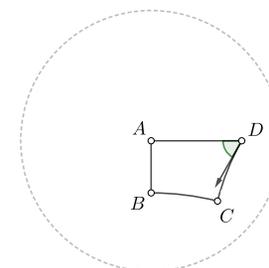


Figura 189: El ángulo $\angle D$, de un \mathcal{H} -cuadrilátero con tres ángulos rectos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, no puede ser recto en geometría hiperbólica.

Desde un punto de vista de lógica formal, la proposición $P \Rightarrow Q$ es equivalente a $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Por lo que si negamos la existencia de una paralela única a una recta dada por un punto fuera de la recta se obtiene la siguiente cadena de negaciones.

$(\exists \parallel \text{ única}) \Rightarrow (\exists \perp \text{ única}) \Rightarrow (\exists \triangle \text{ cuya suma de } \angle\text{s internos} \neq \pi) \Rightarrow \text{No se cumple Postulado LAL.}$

No surge ninguna contradicción al negar el quinto postulado o sus equivalencias y aceptar los otros postulados de una axiomática dada. Por ejemplo, en nuestro caso, aceptando los postulados I, II, III y V, con la negación de la existencia de paralelas únicas a una recta dada por un punto dado, no solo *no se obtienen contradicciones*, sino que se obtienen nuevas geometrías. Ahora bien hay dos formas de negar la existencia de paralelas.

- Por un punto exterior a una recta *pasa más de una paralela*.
- Por un punto exterior a una recta *no pasa ninguna paralela*.

Tomando estos puntos como postulados, se obtiene con el primer punto la geometría hiperbólica y con el segundo, una geometría elíptica. De acuerdo con lo anterior, se puede construir un sistema axiomático para la geometría hiperbólica, partiendo de los postulados I, II, III y V del Capítulo *El camino más corto al Teorema de Pitágoras*, sin suponer válido el Postulado IV. En lugar del postulado IV, se puede considerar válido el siguiente postulado.

Postulado hiperbólico. En la geometría hiperbólica existe al menos una recta ℓ y un punto P , no en ℓ , tal que al menos dos rectas distintas paralelas a ℓ pasan por P .

Los sistemas axiomáticos de geometría hiperbólica que siguen este camino generalmente demuestran primero el lema de inexistencia de rectángulos, para luego demostrar el teorema de la suma de ángulos internos como se enuncian a continuación.

Lema [Inexistencia de rectángulos]. En geometría hiperbólica no existen rectángulos.

Teorema I-GH. Si existe un triángulo cuya suma de ángulos internos es π , entonces existe un rectángulo. Si existe un rectángulo, entonces cada triángulo tiene suma de ángulos internos igual a π .

Combinando el Lema y el Teorema (anterior) se demuestra el siguiente resultado fundamental.

Teorema II-GH En geometría hiperbólica la suma de los ángulos internos de todo triángulo es menor que π .

Dado que en este libro hemos demostrado ambos resultados funda-

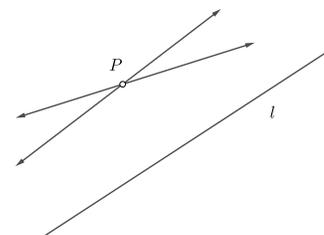


Figura 190: El Postulado hiperbólico supone la existencia de al menos dos paralelas que pasan por un punto P , fuera de una recta ℓ .

mentales en el modelo del disco de Poincaré, no volveremos a demostrarlos en el contexto puramente sintético. Muchos otros resultados interesantes pueden deducirse dentro de la geometría hiperbólica, por ejemplo:

- Triángulos semejantes son necesariamente congruentes.
- El área de los \mathbb{H} -triángulos depende de la suma de los ángulos internos del triángulo.
- El área de los \mathbb{H} -triángulos es finita sin importar que los vértices del triángulo estén en el infinito, es decir sobre $|z| = 1$.

Dado que nuestro enfoque es meramente introductorio no desarrollaremos más la teoría. El lector interesado en estos y muchos otros hechos fascinantes de la geometría hiperbólica, puede profundizar su saber en los libros citados o bien en el libro de Coxeter⁵⁶.

⁵⁶ Harold S. M. Coxeter. *Non-Euclidean Geometry, sixth edition*. The Mathematical Association of America, 1998

Ejercicios de geometría hiperbólica

- Demuestre que por dos puntos distintos en el interior del disco unitario pasa una y sólo una \mathcal{H} -recta.
- Para dibujar los segmentos hiperbólicos AB como los de los triángulos de la Figura 185, se debe construir una circunferencia ortogonal a $|z| = 1$ que pase por A y B . La construcción puede hacerse de la manera siguiente: Sean $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ y $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, con $|\alpha|, |\beta| < 1$. Se desea encontrar el centro a de la circunferencia \mathcal{C} que pasa por α y β ortogonal a $|z| = 1$.
 - Demuestre que si \mathcal{C} es ortogonal al disco unitario y tiene radio r entonces $|a| = 1 + r^2$.
 - Se tienen como incógnitas el centro a y el radio r de \mathcal{C} . Junto con el inciso (2a), use las ecuaciones $|\alpha - a| = r$ y $|\beta - a| = r$ para calcular a y r .
Sugerencia: ¿Por qué se cumplen las últimas relaciones? No olvide que es mejor trabajar con los módulos al cuadrado $z\bar{z} = |z|^2$, para resolver ecuaciones.
 - Haga un programa computacional que determine a y r para cualquiera α y β .
 - Haga un programa computacional donde la pueda calcularse transformación (132) para cualquier z y cualesquiera parámetros μ, α .
- Utilice los programas del ejercicio anterior para dibujar con *GeoGebra* los \mathcal{H} -triángulos con vértices en:
 - $A = .5 + .5i, B = 0.2 + .3i$ y $C = -.1 + .4i$.
 - $A = -.7 + .5i, B = 0.1 - .1i$ y $C = -.1 + .4i$.
 - Use el ejercicio (2c) para transformar los triángulos de los incisos anteriores en triángulos que lleven uno de los vértices al centro del círculo unitario.
- Con la experiencia adquirida en los ejercicios anteriores muestre con tres ejemplos que triángulos con un vértice en $(0, 0)$ tiene dos lados sobre los radios de la circunferencia $|z| = 1$.
- Demuestre que el centro de la circunferencia \mathcal{C} , ortogonal al disco unitario, es el simétrico α^* del punto α , respecto a la circunferencia unitaria en la transformación (132).
- Demuestre que se cumple $|z^*| \cdot |z| = 1$, con lo cual se determina la transformación de inversión para la circunferencia $|z| = 1$. Demuestre que en general $|z^* - a| \cdot |z - a| = r^2$ determina la transformación de inversión para la circunferencia $|z - a| = r$.
- Demuestre que las transformaciones de la forma (132) forman un grupo.

Axiomáticas de la geometría hiperbólica

Para el desarrollo teórico de otras axiomáticas se requiere antes de abordarlas conocer equivalencias al Postulado V de Euclides. Los siguientes ejercicios están dedicados a tal actividad. Para conveniencia del lector repetimos aquí el enunciado del Postulado V de Euclides:

Postulado V [Euclides]. Si dos rectas son cortadas por una transversal de tal manera que la suma de los ángulos colaterales internos de un lado de la transversal suman menos que dos ángulos rectos, entonces las rectas se intersecan del mismo lado en el que se encuentran dichos ángulos.

También se requiere el axioma de paralelismo de Hilbert:

Axioma de paralelismo [Hilbert]. Para cada recta ℓ en el plano y cada punto P no en ℓ , existe a lo más una recta m que pasa por P tal que m es paralela a ℓ .

8. Demuestre que el quinto postulado de Euclides y el axioma de paralelismo de Hilbert son equivalentes.
9. Demuestre que el axioma de paralelismo de Hilbert es equivalente a que si una recta corta a una de dos rectas paralelas, entonces también corta a la otra.
10. Demuestre que el axioma de paralelismo de Hilbert es equivalente a que si t es transversal a ℓ , m , $\ell \parallel m$, y $t \perp \ell$, entonces $t \perp m$.
11. Demuestre que el axioma de paralelismo de Hilbert es equivalente a que la suma los ángulos internos de todo triángulo es π .
12. Se define rectángulo como un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos internos miden cada uno $\pi/2$. Demuestre que si existe un triángulo cuya suma de ángulos es π , entonces existe un rectángulo, y si existe un rectángulo, entonces la suma de los ángulos internos de todo triángulo es π .
13. Se define el defecto δ de un triángulo como la diferencia entre π y la suma de los ángulos internos. Demuestre que si existe un triángulo con $\delta > 0$, entonces todos los triángulos tienen $\delta > 0$.

Soluciones de los ejercicios de geometría hiperbólica

1. *Solución del problema 1.* Es conocido que por un par de puntos distintos del plano pasan infinitas circunferencias. Lo que se afirma, sin embargo, es que por un par de puntos distintos en el interior de la circunferencia unitaria pasa una y solo una circunferencia ortogonal a ella, o bien, los puntos están sobre un diámetro de la circunferencia. Sean $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 i$ dos puntos en el interior de la circunferencia $|z| = 1$ y sea $|z - a| = r$ una circunferencia con centro en $a = a_1 + a_2 i$ y radio r , ortogonal a la circunferencia unitaria. Se desea demostrar que existen únicos a y r dados α y β .

Entonces dada la condición de ortogonalidad de las circunferencias se debe tener por el teorema de Pitágoras:

$$|a|^2 = 1 + r^2 \quad (133)$$

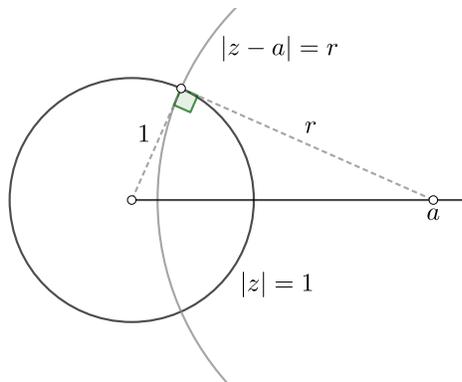


Figura 191: La circunferencia $|z| = 1$ y $|z - a| = r$ son ortogonales si y solo si $1 + r^2 = a^2$.

Tenemos

$$\begin{aligned} r^2 = |z - a|^2 &= (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) \\ &= |z|^2 + |a|^2 + a\bar{z} + \bar{a}z \end{aligned}$$

Al sustituir en la última ecuación la identidad (133), obtenemos

$$|z|^2 + 2\operatorname{re}(a\bar{z}) + 1 = 0 \quad (134)$$

Al sustituir en la ecuación (134) $z = \alpha$ y $z = \beta$, obtenemos un sistema lineal para a , el cual queda perfectamente determinado cuando los puntos no están sobre un diámetro de la circunferencia unitaria. Efectivamente, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 &= -\frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 1}{2} \\ \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 &= -\frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2) + 1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, como el determinante $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$, puesto que los puntos α y β no están sobre el mismo diámetro, el sistema tiene solución única para $a = a_1 + a_2 i$. \square

2. *Solución del problema 2a.* Esta parte ya se resolvió en el problema 1, vea la Figura 191.
3. *Solución del problema 2b.* Conocidos α y β , se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} a\bar{a} + \bar{a}\alpha &= 1 + |\alpha|^2 \\ a\bar{\beta} + \bar{a}\beta &= 1 + |\beta|^2, \end{aligned}$$

de donde, para puntos que no están sobre el mismo diámetro, se obtiene la solución

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} 1 + |\alpha|^2 & \alpha \\ 1 + |\beta|^2 & \beta \end{vmatrix}}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} = \frac{\beta + |\alpha|^2\beta - \alpha - \alpha|\beta|^2}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}} \\ r^2 &= 1 + |a|^2. \end{aligned}$$

4. *Solución del problema 2c.* Los programas computacionales permiten definir funciones, por ejemplo en *Máxima*, basta definir una función f como sigue:

$$f(\alpha_{-}, \beta_{-}) := \frac{\beta + |a|^2\beta - \alpha - \alpha|\beta|^2}{\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}},$$

solo debe tenerse cuidado en escribir los módulos y los conjugados de los números complejos con la sintaxis pertinente en cada programa.

5. *Solución del problema 7.* Se desea demostrar que el conjunto

$$GL = \left\{ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = \mu \frac{z + \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\mu| = 1 \right\}$$

con la operación $\circ : GL \times GL \rightarrow GL$, definida por $(f_1 \circ f_2)(z) = f_1(f_2(z))$, satisface las propiedades: i) La operación es cerrada en GL ; ii) La operación es asociativa; iii) existe $I \in GL$ tal que para toda $f \in GL$, $f \circ I = I \circ f = f$; iv) para toda $f \in GL$ existe $f^{-1} \in GL$ tal que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

En los problemas del capítulo de números complejos se demostró que para componer funciones racionales lineales basta multiplicar sus matrices asociadas y dado que toda transformación de la forma (132) tiene asociada una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \mu & -\mu\alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{pmatrix},$$

basta multiplicar tales matrices, para comprobar las propiedades de grupo. Para demostrar (i) debemos comprobar que al componer dos funciones de la forma (132), $f_1(z) = \mu_1 \frac{z - \alpha_1}{-\bar{\alpha}_1 z + 1}$, $f_2(z) = \mu_2 \frac{z - \alpha_2}{-\bar{\alpha}_2 z + 1}$, se obtiene una función de la misma forma. Para este fin multiplicamos las matrices asociadas, y así

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_1\alpha_1 \\ -\bar{\alpha}_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_2 & -\mu_2\alpha_2 \\ -\bar{\alpha}_2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mu_1\mu_2 + \mu_1\alpha_1\bar{\alpha}_2 & -\mu_1\mu_2\alpha_2 - \mu_1\alpha_1 \\ -\bar{\alpha}_1\mu_2 - \bar{\alpha}_2 & \mu_2\bar{\alpha}_1\alpha_2 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1\mu_2(1 + \bar{\mu}_2\bar{\alpha}_2\alpha_1) & -\mu_1\mu_2(\bar{\mu}_2\alpha_1 + \alpha_2) \\ -(\bar{\mu}_2\alpha_1 + \alpha_2) & 1 + \mu_2\alpha_2\bar{\alpha}_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(z) &= \frac{\mu_1 \mu_2 (1 + \bar{\mu}_2 \bar{\alpha}_2 \alpha_1) z - \mu_1 \mu_2 (\bar{\mu}_2 \alpha_1 + \alpha_2)}{- (\bar{\mu}_2 \alpha_1 + \alpha_2) z + (1 + \mu_2 \alpha_2 \bar{\alpha}_1)} \\ &= \frac{\gamma^2}{|\gamma|^2} \mu_1 \mu_2 \frac{z - \beta}{-\bar{\beta} z + 1},\end{aligned}\tag{135}$$

donde $\gamma = 1 + \bar{\mu}_2 \bar{\alpha}_2 \alpha_1$ y $\beta = \frac{1 + \bar{\mu}_2 \alpha_1 \bar{\alpha}_2}{\gamma}$. Dado que $\left| \frac{\gamma^2}{|\gamma|^2} \mu_1 \mu_2 \right| = 1$, la ecuación (135) tiene la forma (132), con lo que se ha demostrado la propiedad (i) de grupo.

La asociatividad de la operación "o", fue demostrada para las funciones racionales lineales en general en los ejercicios de *números complejos*. La función identidad $f(z) = z$ ciertamente tiene la forma (132), con $\alpha = \bar{\alpha} = 0$ y $\mu = 1$. Finalmente, la función cuya matriz asociada es

$$\frac{1}{\mu(1 - |\alpha|^2)} \begin{pmatrix} 1 & \mu\alpha \\ \bar{\alpha} & \mu \end{pmatrix},$$

corresponde a la inversa a una f de la forma (132), como el lector puede comprobar por sí mismo multiplicando las matrices. A partir de la matriz anterior la transformación inversa de f puede escribirse como

$$f^{-1}(z) = \frac{\frac{1}{\mu} z + \frac{1}{\mu} \frac{\alpha}{\bar{\mu}}}{\frac{\bar{\alpha}}{\mu} z + 1},$$

la cual, dado que $\left| \frac{1}{\mu} \right| = 1$, ciertamente tiene la forma (132). □

6. *Solución del problema 8.* Suponga verdadero el axioma de paralelismo de Hilbert. Sean ℓ y m un par de rectas cortadas por una transversal t , tal que las rectas forman con la transversal ángulos colaterales internos cuya suma de medidas es menor que π . Sea P el punto de intersección de m con t . Por el axioma de Hilbert existe una única paralela a ℓ que pasa por P y por lo tanto esta recta no puede ser m ya que rectas paralelas forman colaterales internos cuyas medidas suman π . Como ℓ y m no son paralelas, entonces se intersecan y lo hacen del lado que están los colaterales internos en cuestión ya que si no lo hicieran de tal lado se violaría el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo (demuéstrelo).
7. *Solución del problema 9.* Suponga verdadero el axioma de paralelismo de Hilbert. Sean ℓ y m cortadas por una transversal t y suponga que esta recta solo corta a m en el punto P . Entonces t sería paralela a ℓ con lo que se tiene una contradicción, ya que habría dos paralelas a ℓ que pasarían por el punto P .

Otras geometrías

Además de la geometría euclidiana y de la geometría hiperbólica existen otras geometrías. Estudiaremos de manera introductoria algunos temas relacionados con la geometría afín y con la geometría proyectiva. Nuestro acercamiento será a partir del concepto de grupo de transformaciones e invariantes bajo la acción de tales grupos. El enfoque de grupos, introducido por Klein⁵⁷, se considera como la versión moderna de la geometría y no emprenderemos la vía sintética. Quien desee introducirse al estudio axiomático deductivo puede hacerlo en los libros de Coxeter^{58,59}, por ejemplo.

El programa de Klein

El programa de Klein consiste en el uso de invariantes bajo grupos de transformaciones, semejante al que utilizamos al estudiar la geometría hiperbólica. Por ejemplo, estudiamos las transformaciones racionales lineales de la forma $f(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}$ sobre el disco $|z| < 1$, con $z \in \mathbb{C}$. A partir de estas transformaciones, se definieron dos \mathcal{H} -triángulos como congruentes si existe una transformación de la forma dada que lleve un \mathcal{H} -triángulo en otro. Aquellos lectores que realizaron los problemas correspondientes a grupos del capítulo anterior, no tendrán problema en la formalización que llevaremos a cabo. La idea básica de los grupos de transformaciones en geometría nace de la posibilidad de superponer una figura geométrica sobre otra e incorporar estos movimientos como una posibilidad válida en la argumentación. Por ejemplo, el famoso Teorema I.5 de los elementos de Euclides (*op. cit.*) en muchas cartillas de geometría es demostrado imaginando que se puede sacar el triángulo del plano, invertirlo y superponerlo sobre sí mismo, con lo que “de acuerdo a las viejas cartillas” demuestra que en un triángulo isósceles a lados iguales se oponen ángulos iguales. Este tipo de movimientos que seguramente fue la fuente empírica de muchos teoremas de congruencia, fue soslayado y considerado como no válido, hasta que pudo ser formalizado con la teoría de los grupos de transformaciones.

⁵⁷ Felix Klein. *Elementary Mathematics from an advanced standpoint Geometry*. Dover Publications Inc, 2004

⁵⁸ Harold S. M. Coxeter. *Projective Geometry, second edition*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1987

⁵⁹ Harold S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1969

Básicamente, en geometría euclidiana a partir de Klein, son considerados válidos los movimientos de traslación, rotación y reflexión, como el mostrado en la Figura 192, o un movimiento seguido de otro de los mencionados (composición de transformaciones).

Es fundamental que exista la posibilidad de revertir los movimientos, lo cual implica la existencia de transformaciones inversas. También es fundamental que se puedan hacer más de dos operaciones consecutivas, lo que implica la propiedad asociativa. Además, tomando como modelo los movimientos de la geometría euclidiana, lo más básico es que una vez realizado el movimiento, se conserven los ángulos y la longitud de los segmentos. Los conceptos fundamentales se definen a continuación.

Definición [Isometría]. Dada una transformación $T : V \rightarrow W$ donde V, W son espacios donde se ha definido la distancia entre puntos d_V, d_W , respectivamente en cada espacio, se dice que T es una *isometría* si y solo si para todo $v_1, v_2 \in V$, se tiene

$$d_V(v_1, v_2) = d_W(T(v_1), T(v_2)).$$

Nota. Consideraremos solamente transformaciones $T : V \rightarrow V$, es decir, transformaciones de un espacio en sí mismo, por lo que se omitirán los subíndices V, W en la notación.

Ejemplo. En \mathbb{C} , las rotaciones, traslaciones y reflexiones son isometrías. Efectivamente, la transformación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$T(z) = z + a, \quad a \neq 0,$$

es una traslación y se tiene, dado que $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$,

$$\begin{aligned} |T(z_1) - T(z_2)| &= |z_1 + a - (z_2 + a)| \\ &= |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Las rotaciones $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, al rededor del origen en un ángulo θ , son las transformaciones definidas por

$$R(z) = e^{i\theta} z$$

con lo que observamos que

$$\begin{aligned} |R(z_1) - R(z_2)| &= |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| \\ &= |e^{i\theta}| |z_1 - z_2| \\ &= |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Finalmente, las reflexiones $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, respecto a una recta l que pasa por el origen y que forma un ángulo ϕ con respecto al eje real, se definen mediante la fórmula:

$$S(z) = e^{2i\phi} \bar{z},$$

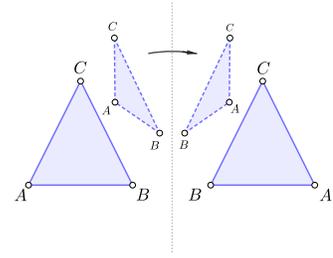


Figura 192: Si se piensa en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle BAC$ de la figura como triángulos de papel se puede superponer uno sobre otro al sacar uno del plano girándolo, con lo cual se obtiene una reflexión.

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |S(z_1) - S(z_2)| &= |e^{2i\phi}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)| \\ &= |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \\ &= |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que las traslaciones, rotaciones y reflexiones en \mathbb{C} son isometrías.

Notamos que cada una de las isometrías de \mathbb{C} tienen una inversa bajo composición de funciones:

a) La inversa de la traslación $T(z) = z + a$ es la función $T^{-1}(z) = z - a$. Efectivamente,

$$(T \circ T^{-1})(z) = T(z - a) = (z - a) + a = z.$$

b) La inversa de la rotación $R(z) = e^{i\theta}z$ es la rotación $R^{-1}(z) = e^{-i\theta}$. Claramente,

$$(R \circ R^{-1})(z) = R(e^{-i\theta}z) = e^{i\theta}(e^{-i\theta}z) = z.$$

c) La inversa de una reflexión es la reflexión misma dado que

$$\begin{aligned} (S \circ S)(z) &= S(e^{2\phi i}\bar{z}) = e^{2\phi i}e^{2\phi i}\bar{z} \\ &= e^{2\phi i}e^{-2\phi i}\bar{z} \\ &= z \end{aligned}$$

Con el ejemplo anterior queda motivada la siguiente definición de grupo, a la cual el lector diligente conoció probablemente desde los ejercicios de trigonometría.

Definición [Grupo]. Un grupo es un conjunto G donde se ha definido una operación $\circ : G \times G \rightarrow G$ tal que para todo $T, R, S \in G$, se tiene:

i) $T \circ (R \circ S) = (T \circ R) \circ S$.

ii) Existe $I \in G$ tal que para toda $T \in G$, $I \circ T = T \circ I = T$.

iii) Para toda $T \in G$, existe $T^{-1} \in G$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.

Nota. Para el grupo de isometrías de \mathbb{C} , tenemos que $I(z) = z$, llamada *transformación identidad*, o simplemente *identidad*, la cual satisface las propiedades de grupo y claramente, la operación \circ es la composición de transformaciones $(S \circ T)(z) \stackrel{def}{=} S(T(z))$. La propiedad de grupo (i) nos dice que la operación binaria \circ puede extenderse de dos a cualquier número de elementos sin dificultad y que en realidad, es válido

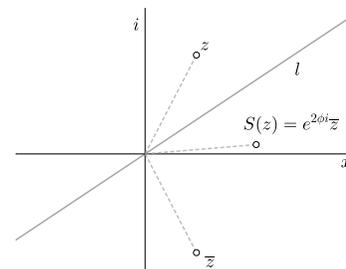


Figura 193: En \mathbb{C} la reflexión de un punto z , respecto a una recta l , la cual forma un ángulo ϕ con el eje real, se obtiene a partir del conjugado \bar{z} , al rotarlo un ángulo 2ϕ .

omitir los paréntesis al componer tres o más funciones. Debe observarse que la operación en un grupo *no requiere ser conmutativa*, en general la composición de transformaciones no conmuta.

Ejemplo [Isometrías en \mathbb{C}]. El conjunto de isometrías en \mathbb{C} forma un grupo. El grupo completo de isometrías en \mathbb{C} debe incluir la reflexión deslizada la cual es la composición de reflexión respecto a una recta seguida de una traslación.

Ejemplo [Isometrías en geometría hiperbólica]. Las transformaciones de la forma $f(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{-\bar{\alpha}z + 1}$ sobre el disco $|z| < 1$, con $z \in \mathbb{C}$ forman un grupo de isometrías con la distancia $d_{\mathbb{H}}$, definida entre puntos A, B , en el disco dada por

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \log |(\alpha, \beta, B, A)|,$$

donde (α, β, B, A) es la razón doble de los puntos A, B con los puntos sobre la circunferencia unitaria, estando A, B, α, β sobre una circunferencia ortogonal a $|z| = 1$, como se estudió en el capítulo dedicado a la geometría hiperbólica. La demostración de este hecho fascinante se dejó como ejercicio en el capítulo anterior y se recomienda al lector realizarlo, o al menos estudiar la solución dada al final del mismo capítulo.

Congruencia en general

Dado un grupo de transformaciones definido sobre un espacio dado, se definen conjuntos congruentes como aquellos para los cuales existe una transformación que lleva un conjunto en otro, más formalmente:

Definición [Conjuntos congruentes]. Dados dos conjuntos A, A' en un espacio V se dice que son congruentes si y solo si existe una transformación $T : V \rightarrow V$, la cual es elemento de un grupo de transformaciones tal que $T(A) = A'$, donde $T(A) = \{T(x), \forall x \in A\}$.

Nota. Observe la generalidad de la definición de congruencia. Si el grupo de transformaciones es un grupo de *isometrías*, la definición de congruencia coincide en el plano euclidiano con la idea de congruencia manejada desde tiempos de Euclides, es decir la idea de que una figura (o conjunto de puntos cualquiera) puede superponerse sobre otro de tal manera que coincidan exactamente. La idea de que dos triángulos hiperbólicos aparentemente distintos son congruentes dado que existe una transformación racional lineal que lleva uno a otro, probablemente chocó con la intuición del lector. Sin embargo, la posibilidad de llevar un triángulo hiperbólico o un polígono hiperbólico a otro más fácil

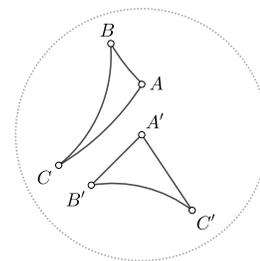


Figura 194: Dos triángulos hiperbólicos son congruentes si existe una transformación del grupo de isometrías del disco de Poincaré que lleva un triángulo a otro. En la figura se muestran un par de \mathbb{H} -triángulos congruentes.

de visualizar, es fundamental para demostrar hechos en el enfoque de Klein de la geometría, como veremos en la siguiente sección, aun cuando las transformaciones no sean isometrías.

Un primer acercamiento a la geometría afín

En la geometría afín nos interesan las transformaciones que llevan rectas en rectas y que conservan las proporciones entre segmentos y las incidencias de rectas. No son de interés los ángulos ni las distancias entre puntos. A pesar de lo simple que pueda parecer esta geometría los teoremas de Menelao y Ceva son teoremas básicos en esta teoría y serán fácilmente demostrados mediante las transformaciones afines.

Coordenadas baricéntricas de puntos colineales

Las coordenadas baricéntricas son fundamentales para el estudio de la geometría afín. Si A, B, C son puntos sobre una recta, dado el Postulado I de Birkhoff podemos establecer una correspondencia biunívoca entre \mathbb{R} y los puntos de tal recta. Sean x_A, x_B, x_C , los números reales dados por tal correspondencia. Se tiene el siguiente lema.

Lema [Coordenadas baricéntricas sobre una recta]. Si A, B, C , son tres puntos colineales distintos, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que $\alpha, \beta \neq 0, \alpha + \beta = 1$ y

$$x_C = \alpha x_A + \beta x_B. \quad (136)$$

Demostración. Poniendo $\alpha = \frac{x_C - x_B}{x_A - x_B}$ y $\beta = \frac{x_A - x_C}{x_A - x_B}$, se llega inmediatamente a (136). \square

Nota. El lector con conocimientos de sistemas de ecuaciones observará que α y β se calculan simplemente resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \alpha x_A + \beta x_B &= x_C \\ \alpha + \beta &= 1. \end{aligned}$$

Proporciones con signo

Lema [Proporciones con signo]. El signo del cociente $\frac{x_A - x_C}{x_B - x_C} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ determina si el punto C está en el interior del segmento o fuera de este. Si C está fuera de AB , el signo es negativo, si está en el interior de AB , el signo es positivo.

Demostración. Observe que si $x_A < x_C < x_B$, se tiene que

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = -\frac{x_A - x_C}{x_B - x_C} = -\frac{\beta}{\alpha} > 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{\beta}{\alpha} < 0.$$

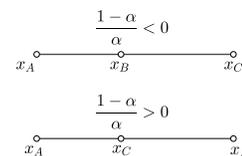


Figura 195: El signo de $(1 - \alpha)/\alpha$ determina si x_C está dentro o fuera del segmento (x_A, x_B) .

Por otra parte, si por ejemplo $x_A \leq x_B \leq x_C$,

$$\frac{x_A - x_C}{x_B - x_C} = \frac{\beta}{\alpha} > 0,$$

ya que $x_A - x_C < 0$ y $x_B - x_C < 0$.

También, si $x_C < x_A < x_B$,

$$\frac{x_A - x_C}{x_B - x_C} = \frac{\beta}{\alpha} > 0.$$

ya que $x_B - x_C > 0$ y $x_A - x_C > 0$. Con un argumento similar se puede verificar que el lema se cumple si $x_A > x_B$, el lector debe completar los detalles como ejercicio. \square

Resumiendo si A, B, C , son tres puntos distintos y x_A, x_B, x_C son los números correspondientes sobre la recta respectivos, el cociente de incrementos $\frac{x_B - x_C}{x_A - x_B}$ determina si $A - C - B$, o si $C - A - B$, o si $A - B - C$, es decir, determina si C está entre A y B , o fuera del segmento AB .

Coordenadas baricéntricas dados tres puntos no colineales

Por la sección anterior dados tres puntos colineales distintos con números asignados por el Postulado I de Birkhoff, x_A, x_B y x_C , podemos encontrar números α, β tales que $\alpha, \beta \neq 0$ y $\alpha + \beta = 1$ y $x_C = \alpha x_A + \beta x_B$. Este hecho puede ser usado para determinar coordenadas baricéntricas en una recta poniendo en correspondencia con el punto C sobre la recta AB las coordenadas $(\alpha, \beta)_{AB}$. Estas coordenadas pueden usarse para los mismos puntos A y B si consideramos que $x_A = 1x_A + 0x_B$ y $x_B = 0x_A + 1x_B$ así los puntos A, B, C tienen asignadas las coordenadas

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow (1, 0)_{AB} \\ B &\leftrightarrow (0, 1)_{AB} \\ C &\leftrightarrow (\alpha, \beta)_{AB}. \end{aligned}$$

Claramente al escoger el punto A como determinante de la primera coordenada es totalmente arbitrario y puede escogerse cualquiera de los otros puntos de la recta como referencia. El par de números $(\alpha, \beta)_{AB}$ se llaman *coordenadas baricéntricas* del punto C con respecto al marco AB .

Ejemplo. El punto medio de un segmento AB cualquiera tiene coordenadas $(1/2, 1/2)_{AB}$. Observe que ningún punto sobre la recta AB , tiene coordenadas $(0, 0)_{AB}$.

Las coordenadas baricéntricas se pueden generalizar para localizar cualquier punto en el plano dados tres puntos no colineales, como mostraremos a continuación.

Lema [Coordenadas baricéntricas de tres puntos no colineales]. Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un punto D en el plano que no esté sobre ninguno de los lados del triángulo, existen a, b tales que $a, b \neq 0$ y

$$x_D = ax_A + bx_B + (1 - a - b)x_C, \quad (137)$$

donde x_D es el número real que corresponde al punto D (por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}] sobre la recta que pasa por C y D). Se dice que x_D es una *combinación convexa* del marco A, B, C .

Demostración. Sea T el punto de intersección de la recta CD con la recta AB (el cual existe por el Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}], tomando el ángulo $\angle ACB$). Entonces por el Lema [Proporciones con signo], existe γ tal que

$$x_D = \gamma x_T + (1 - \gamma)x_C.$$

Además, dado que x_T está sobre el segmento AB por construcción, existe α tal que

$$x_T = \alpha x_A + (1 - \alpha)x_B.$$

Por lo tanto

$$x_D = \gamma\alpha x_A + \gamma(1 - \alpha)x_B + (1 - \gamma)x_C.$$

Sean $a = \gamma\alpha$ y $b = \gamma - \gamma\alpha$, entonces $\gamma = a + b$ y se obtiene (137). \square
Nota. Si se define $c = 1 - a - b$ en (137), se obtiene

$$x_D = ax_A + bx_B + cx_C, \text{ con } a + b + c = 1,$$

que es como normalmente se presentan las coordenadas baricéntricas de un triángulo.

Definición [Coordenadas baricéntricas]. Los coeficientes a, b, c determinados por la combinación convexa $x_D = ax_A + bx_B + cx_C$, se llaman *coordenadas baricéntricas* del punto D , respecto del triángulo $\triangle ABC$. Una vez que se fija un triángulo $\triangle ABC$, como referencia se escribe

$$D = aA + bB + cC, \quad a + b + c = 1,$$

y se dice que las coordenadas baricéntricas de D , son (a, b, c) respecto del triángulo $\triangle ABC$.

Ejemplo. Por ejemplo, para los vértices del triángulo de referencia, se tienen las coordenadas baricéntricas $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Para los lados del triángulo se tiene, por ejemplo, que los puntos en AB deben tener la forma $(a, b, 0)$. Note que ningún punto tiene coordenadas baricéntricas $(0, 0, 0)$. Note que el baricentro del triángulo tiene coordenadas $(1/3, 1/3, 1/3)$ y que la suma de las coordenadas baricéntricas siempre debe dar 1.

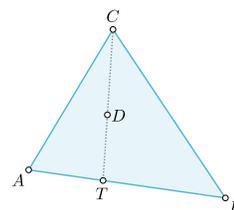


Figura 196: Los coeficientes a, b, c determinados por la combinación convexa $x_D = ax_A + bx_B + cx_C$ se llaman *coordenadas baricéntricas* del punto D respecto al triángulo $\triangle ABC$, y suele escribirse $D = (a, b, c)$.

Vectores en el plano \mathcal{A}

Los segmentos orientados o flechas que ahora estudiaremos, son llamados vectores por físicos e ingenieros, mientras que en matemáticas el concepto de vector es mucho más amplio. Un vector es un elemento de un espacio vectorial y no tiene por que tener una representación pictórica como flecha. Por ejemplo, en el espacio de funciones continuas de \mathbb{R} a \mathbb{R} , todas las funciones continuas son vectores, sin que tengan en absoluto asociada una representación de flecha. Por otra parte, las flechas son muy utilizadas en campos vectoriales para representar velocidades, fuerzas, etcétera. Los segmentos orientados o vectores libres están plenamente justificados y definidos, como veremos, en la geometría afín. Una vez definidos los vectores libres estos pueden ser incorporados en el plano \mathbb{R}^2 , lo que lleva, según mi experiencia, a alguna confusión entre los lectores inexpertos entre la noción de punto y vector. Espero que la siguiente presentación ayude a esclarecer las dudas que surgen al comienzo del estudio de la geometría analítica.

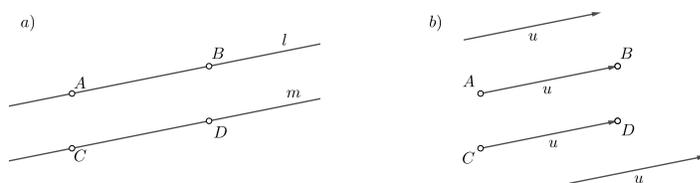


Figura 197: a) Los segmentos $A - P - B$ y $C - P - D$, son considerados distintos por el solo hecho de estar en rectas distintas. b) Contrariamente, los vectores representados con flechas son iguales si tienen la misma magnitud y dirección. En esta figura todos los vectores son el mismo vector u , a pesar de que tienen diferentes puntos iniciales y finales.

Segmentos orientados libres

La calificación de “libres” para los segmentos orientados que consideraremos vectores (y que puede demostrarse que son elementos de un espacio vectorial) corresponde a que en realidad estos objetos *no están fijos sobre ninguna recta en específico*. Dos vectores del tipo que consideraremos se consideran iguales si tienen la misma magnitud y dirección, aunque sean paralelos, es decir que dos vectores se consideran iguales aunque tengan puntos iniciales y finales distintos lo que no ocurre con los segmentos a los cuales se consideran distintos, por el solo hecho de tener puntos iniciales y finales distintos.

Nota. En algunos libros y *software* para distinguir entre vectores y puntos se usan diferentes notaciones, por ejemplo, en *GeoGebra* un vector siempre se denota con minúscula y se utiliza un vector columna para determinar sus coordenadas, mientras que los puntos se denotan con mayúsculas y se describen como matriz renglón. Sin embargo mu-

chos libros no distinguen con ninguna notación entre vectores y puntos, dada la correspondencia biunívoca que existe entre los segmentos orientados libres y los vectores de posición, como explicaremos más adelante.

En un plano \mathcal{A} , se fija por el momento un punto O , que será referencia para definir los segmentos orientados libres llamados también flechas o vectores. Veremos que en realidad no se requiere en absoluto este punto. Dado un punto cualquiera P del plano se construye el segmento orientado \overrightarrow{OP} con punto inicial O y punto final P lo cual se representa con una flecha que termina en P .

Al segmento \overrightarrow{OP} se le llama *vector de posición* de P respecto de O .

Definición [Vector en el plano \mathcal{A}]. Dados dos puntos cualquiera $P, Q \in \mathcal{A}$, se define el vector \overrightarrow{PQ} , lo cual se representa con una flecha que comienza en P y termina en Q , como el segmento orientado que va de P a Q . Denotamos $-\overrightarrow{PQ}$, al segmento orientado que va de Q a P . La longitud del vector \overrightarrow{PQ} , denotada $\|\overrightarrow{PQ}\|$, es la longitud del segmento \overline{PQ} . Todos los vectores con la misma magnitud y orientación se consideran equivalentes.

Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano \mathcal{A} y los vectores. A cada punto P del plano se le pone en correspondencia con su vector de posición respecto a O y recíprocamente para cada vector \overrightarrow{PQ} existe un único punto Q' tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ'}$. A los vectores o flechas del plano \mathcal{A} , se les denota con letras minúsculas en negritas o simplemente con letras minúsculas cuando no hay lugar a confusión, por ejemplo, $\mathbf{q} = \overrightarrow{PQ}$.

Definición [Suma de vectores].

Si $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$ entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{PR}. \quad (138)$$

El lector debe observar que la definición (138) corresponde al diagrama del paralelogramo de suma de fuerzas que se enseña en la educación media regularmente en los cursos de física y que se muestra en la Figura 199.

Nota. El lector no experimentado puede pensar que esta definición está limitada al caso en el que los vectores tienen un punto en común, lo cual no ocurre dado que siempre existe un vector equivalente a un vector dado que puede ponerse con punto inicial el punto final del vector al que se quiera sumar. Por ello es que llamamos a los vectores flechas definidos anteriormente, segmentos orientados libres.

Definición [Producto por un escalar en el plano \mathcal{A}]. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo vector \mathbf{r} en el plano \mathcal{A} , se define el producto por un escalar

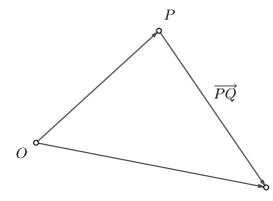


Figura 198: Se parte de un punto O , en el plano \mathcal{A} , y dado un punto cualquiera P , se construye un segmento orientado \overrightarrow{OP} , cuya orientación está representada por la flecha que va de O a P .

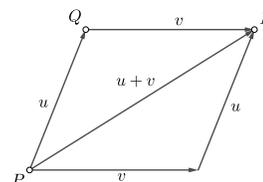


Figura 199: La suma de vectores se define mediante la relación (138). Observe que dado que los vectores son libres es posible visualizar que $u + v = v + u$, desde el punto de vista geométrico.

mediante la fórmula

$$\alpha \mathbf{p} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \overrightarrow{OP}. \quad (139)$$

Alternativamente, si $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, entonces

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha \overrightarrow{PQ},$$

es decir, el vector $\alpha \overrightarrow{PQ}$ tiene longitud $|\alpha| \|\overrightarrow{PQ}\|$ y la misma orientación que \overrightarrow{PQ} , si $\alpha > 0$ y la orientación contraria, si $\alpha < 0$. El vector cero

$$\vec{0} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \vec{u}, \quad 0 \in \mathbb{R},$$

definido para toda \vec{u} , tiene longitud cero y no tiene orientación alguna.

Si el lector ha comprendido el concepto de segmentos orientados libres no tendrá dificultad en asimilar la siguiente definición.

Definición [Vectores paralelos]. Dos vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{RS} en el plano \mathcal{A} se dicen *paralelos* si y solo si existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha \overrightarrow{RS}.$$

Nota. Un conjunto V donde se ha definido una operación $+$ tal que $(V, +)$ es grupo conmutativo respecto a esta operación y donde se ha definido además la multiplicación por un escalar donde el escalar es elemento de un campo \mathbb{K} se llama *espacio vectorial* si además se cumplen:

- Para todo $u \in V$, $1u = u$, donde $1 \in \mathbb{K}$ es el neutro multiplicativo de \mathbb{K} .
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u \in V$, $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.
- Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $u \in V$, $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
- Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u, v \in V$, $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Puede demostrarse, y el lector lo puede hacer como ejercicio, si así lo desea, que el conjunto de segmentos orientados libres o flechas definidas sobre el plano \mathcal{A} es efectivamente un espacio vectorial. Por ejemplo para el vector $\mathbf{0} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{PP}$, donde P es arbitrario en el plano afín y para todo $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, se tiene por definición que $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ que también está en el plano afín. Observe que el vector $\mathbf{0}$, se puede ubicar en cualquier punto del plano, dado que es un vector libre.

Definición [Punto que divide un segmento en una razón dada]. Se define el punto R que divide PQ en la razón n/m mediante la relación:

$$\overrightarrow{PR} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{n} \overrightarrow{RQ}. \quad (140)$$

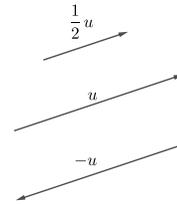


Figura 200: Se muestra el producto de $1/2 \mathbf{u}$ y $(-1)\mathbf{u}$.

Se denota

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}, \quad (141)$$

donde $\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$ se lee: la razón de PR con PQ es $\frac{m}{n}$.

Nota. El lector debe tener claro que no estamos dividiendo vectores.

El plano donde definiremos las transformaciones afines es \mathbb{R}^2 , con coordenadas baricéntricas, pero con estructura de espacio vectorial dada por los segmentos orientados libres. Dados tres puntos no colineales A, B, C en \mathbb{R}^2 , para cualquier punto P existen números $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a + b + c = 1$, tales que $P = aA + bB + cC$, los números a, b, c , se llaman *coordenadas baricéntricas* de P y suele denotarse $P = (a, b, c)$. Sin embargo la suma de puntos con coordenadas baricéntricas no da otro punto con coordenadas baricéntricas como lo demuestra el ejemplo $A = (1/2, 0, 1/2)$ y $B = (1/3, 1/3, 1/3)$ al sumar sus coordenadas se obtiene $(5/6, 1/3, 5/6)$ y $5/6 + 1/3 + 5/6 = 2 \neq 1$ por lo que el punto $(5/6, 1/3, 5/6)$ no pertenece al plano con coordenadas baricéntricas.

Definición [Plano \mathcal{A}]. El conjunto \mathcal{A} es el espacio \mathbb{R}^2 , provisto de coordenadas baricéntricas, al que se le añade la estructura de espacio vectorial por medio de la suma de segmentos orientados y producto por un escalar definidos en la sección anterior.

Nota. Es decir, las coordenadas baricéntricas por sí mismas no definen un espacio donde podamos sumar, restar y multiplicar por un escalar a los elementos del espacio. Se requiere además dotar al espacio de estructura de espacio vectorial para poder definir las transformaciones afines. Observe sin embargo que en nuestra versión, la estructura de espacio vectorial tiene un sentido más bien geométrico que algebraico, al ser los vectores segmentos orientados libres. Esta diferencia es primordial con el espacio vectorial \mathbb{R}^2 , donde las coordenadas de puntos coinciden con las coordenadas de los segmentos orientados o vectores de posición asociados (si no se indica ninguna diferencia de notación), lo que a veces confunde a los novicios en geometría. De esta forma cuando escribimos $P + Q$ para $P, Q \in \mathcal{A}$, entendemos que estamos sumando los vectores de posición de tales puntos y **nunca que sumamos sus coordenadas baricéntricas**.

Teorema de Menelao en geometría afín

Teorema [Menelao en geometría afín]. Si una recta interseca los tres lados AB, BC y CA de un triángulo $\triangle ABC$, o sus prolongaciones, en los puntos C', A' y B' , respectivamente, entonces

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1. \quad (142)$$

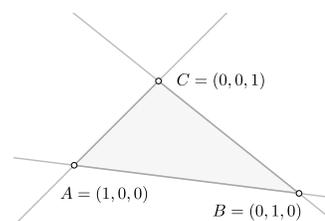


Figura 201: El plano \mathcal{A} , es \mathbb{R}^2 con las coordenadas baricéntricas dadas por un triángulo cualquiera a cuyos vértices se les asignan las coordenadas mostradas en la figura. Se debe recordar que para cualquier punto $P = (a, b, c) \in \mathcal{A}$, se debe tener $a + b + c = 1$, lo cual caracteriza al plano \mathcal{A} .

Nota. El lector no debe dejar de ver que en la anterior reformulación del teorema de Menelao, en la ecuación (142) no escribimos incrementos de segmentos, sino la notación de razones dada por (141), exclusiva de la geometría afín. El lector que revise el capítulo dedicado a las versiones elementales de los teoremas de Ceva y Menelao verá que son teoremas del tipo “ \Leftrightarrow ” y no solo como se presentan en capítulo actual, como implicaciones en una sola dirección. Sin embargo el lector debe ser capaz de formular y demostrar el recíproco del teorema anterior sin grandes dificultades.

Demostración. Podemos escribir,

$$B' = \alpha_1 A + \beta_1 C, \quad \alpha_1 + \beta_1 = 1, \quad \alpha_1, \beta_1 \neq 0 \quad (143)$$

$$A' = \alpha_2 B + \beta_2 C, \quad \alpha_2 + \beta_2 = 1, \quad \alpha_2, \beta_2 \neq 0. \quad (144)$$

Al multiplicar (143) por β_2 y (144) por β_1 y al restar las ecuaciones obtenidas se llega a

$$\beta_2 B' - \beta_1 A' = \alpha_1 \beta_2 A - \alpha_2 \beta_1 B. \quad (145)$$

La ecuación (145) determina un único punto en $A'B'$, que al mismo tiempo está en AB , el cual por definición es C' , y de esta forma

$$(\beta_2 - \beta_1)C' = \beta_2 B' - \beta_1 A'. \quad (146)$$

Note que $\beta_2 - \beta_1 \neq 0$, ya que de otra forma AB y $A'B'$ serían paralelos, lo que no ocurre por hipótesis. Entonces con las ecuaciones (145) y (146) obtenemos

$$(\beta_2 - \beta_1)C' = \alpha_1 \beta_2 A - \alpha_2 \beta_1 B,$$

de donde llegamos a

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{-\alpha_2 \beta_1} \quad (147)$$

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad (148)$$

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}. \quad (149)$$

Por lo tanto

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{-\alpha_2 \beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} = -1.$$

Que es lo que se desea demostrar. \square

Teorema de Desargues

El teorema de Menelao también implica el teorema de Desargues el cual es muy importante en la geometría proyectiva. El teorema requiere del concepto de *triángulos en perspectiva* del cual trata la siguiente definición.

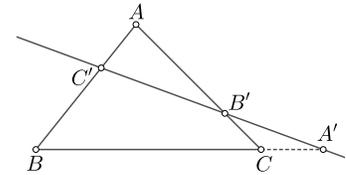


Figura 202: Teorema de Menelao.

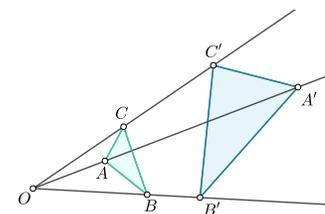


Figura 203: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva desde el centro de perspectiva O .

Definición [Triángulos en perspectiva]. Se dice que dos triángulos están en perspectiva si existe una correspondencia entre sus vértices de forma tal que las rectas que pasan por los vértices en correspondencia, son concurrentes. Al punto de concurrencia O en la Figura 203, se le llama *centro de perspectiva*.

Teorema [Desargues]. Si dos triángulos están en perspectiva los puntos de intersección de lados en correspondencia son colineales. La línea que contiene a tales puntos se llama *eje de perspectiva*.

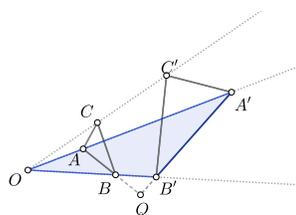
Demostración. Se considera el triángulo $\triangle OB'A'$. Los lados OB' , $B'A'$ y OA' del triángulo son cortados en B , Q y A , respectivamente, por lo que por el Teorema [Menelao en geometría afín], tenemos

$$\frac{\Delta(OB)}{\Delta(BB')} \cdot \frac{\Delta(B'Q)}{\Delta(QA')} \cdot \frac{\Delta(A'A)}{\Delta(AO)} = -1, \quad (150)$$

donde, para cualesquiera puntos M, N , se define

$$\Delta(MN) \stackrel{def}{=} x_N - x_M,$$

siendo x_N, x_M los números dados por la correspondencia de la recta que pasa por los puntos M, N , y \mathbb{R} dada por el Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}].



Similarmente, considerando el triángulo $\triangle OA'C'$, el cual es cortado por una recta en los lados OA' , $A'C'$ y $C'O$, en los puntos A , P y C , respectivamente.

Aplicando el Teorema de Menelao nuevamente se obtiene,

$$\frac{\Delta(OA)}{\Delta(AA')} \cdot \frac{\Delta(A'P)}{\Delta(PC')} \cdot \frac{\Delta(C'C)}{\Delta(CO)} = -1. \quad (151)$$

Finalmente, consideramos el triángulo $\triangle OB'C'$ el cual es cortado en los lados OB' , $B'C'$ y $C'O$ en los puntos B , R y C , respectivamente. Aplicando el Teorema de Menelao una vez más,

$$\frac{\Delta(OB)}{\Delta(BB')} \cdot \frac{\Delta(B'R)}{\Delta(RC')} \cdot \frac{\Delta(C'C)}{\Delta(CO)} = -1. \quad (152)$$

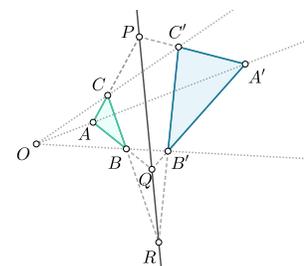


Figura 204: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ están en perspectiva y los puntos de intersección de lados en correspondencia son colineales.

Figura 205: Se considera el triángulo $\triangle = OB'A'$, el cual es cortado por una recta en A, B, Q .

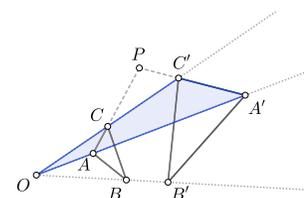


Figura 206: Se considera el triángulo $\triangle = OA'C'$, el cual es cortado por una recta en A, P, C .

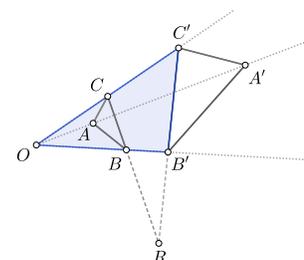


Figura 207: Se considera el triángulo $\triangle OB'C'$, el cual es cortado por una recta en B, R, C .

Al multiplicar (150) por (151),

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta(OB)}{\Delta(BB')} \cdot \frac{\Delta(B'Q)}{\Delta(QA')} \cdot \frac{\Delta(A'A)}{\Delta(AO)} \right) \left(\frac{\Delta(OA)}{\Delta(AA')} \cdot \frac{\Delta(A'P)}{\Delta(PC')} \cdot \frac{\Delta(C'C)}{\Delta(CO)} \right) = \\ & = \left(\frac{\Delta(OB)}{\Delta(BB')} \cdot \frac{\Delta(B'Q)}{\Delta(QA')} \right) \left(\frac{\Delta(A'P)}{\Delta(PC')} \cdot \frac{\Delta(C'C)}{\Delta(CO)} \right) = -1 \end{aligned} \quad (153)$$

Al dividir (153) por (152),

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{\Delta(OB)}{\Delta(BB')} \cdot \frac{\Delta(B'Q)}{\Delta(QA')} \right) \left(\frac{\Delta(A'P)}{\Delta(PC')} \cdot \frac{\Delta(C'C)}{\Delta(CO)} \right)}{\frac{\Delta(OB)}{\Delta(BB')} \cdot \frac{\Delta(B'R)}{\Delta(RC')} \cdot \frac{\Delta(C'C)}{\Delta(CO)}} = \frac{\Delta(B'Q)}{\Delta(QA')} \cdot \frac{\Delta(A'P)}{\Delta(PC')} \cdot \frac{\Delta(RC')}{\Delta(B'R)} \\ & = \frac{\Delta(B'Q)}{\Delta(QA')} \cdot \frac{\Delta(A'P)}{\Delta(PC')} \cdot \frac{\Delta(C'R)}{\Delta(RB')} = -1. \end{aligned} \quad (154)$$

La ecuación (154) nos indica que en el triángulo $\triangle A'B'C'$ los lados $A'B'$, $A'C'$ y $C'B'$ son cortados en Q , P y R , y que estos puntos son colineales, por la implicación “ \Leftarrow ” del Teorema de Menelao. \square

También se cumple el recíproco del Teorema de Desargues.

Teorema [Recíproco del Teorema de Desargues]. Si lados en correspondencia de dos triángulos se cortan en tres puntos colineales, entonces los triángulos están en perspectiva.

Demostración. Supongamos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ con la correspondencia $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ tienen lados en correspondencia que se cortan en tres puntos colineales (en realidad partimos de la misma gráfica de la Figura 209). Por otra parte, los triángulos $\triangle CC'P$ y $\triangle BQB'$ tienen como centro de perspectiva a R . Por lo tanto, por el Teorema de Desargues lados en correspondencia se cortan en tres puntos colineales. Los lados en correspondencia están dados por la correspondencia $CC'P \leftrightarrow BB'Q$ y los lados CC' y BB' concurren en O ; los lados $C'P$ y $B'Q$ concurren en A' ; los lados PC y QB concurren en A . El hecho de que el teorema de Desargues garantice que O , A y A' sean colineales significa que O es centro de perspectiva para los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$.

El lector interesado en saber más de la geometría proyectiva puede acercarse al libro de Coxeter⁶⁰.

Teorema de Pasch

El Teorema de Pasch es uno de los teoremas que no se pueden demostrar dentro de la axiomática de Euclides por lo que, para completar tal sistema, se debe anexar como axioma. De tal forma se le presenta muchas veces como *el Axioma de Pasch*. Sin embargo, dentro de la axiomática de Birkhoff sí es demostrable como veremos.

Procederemos a resolver el problema de intersección de rectas de una manera elegante mediante las coordenadas baricéntricas. La de-

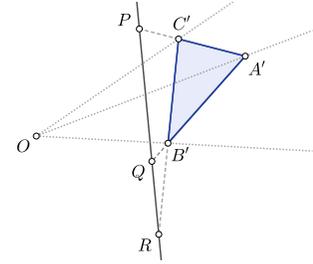


Figura 208: Al prolongar los lados del triángulo $\triangle A'B'C'$ estos son cortados en los puntos P , Q y R , de tal forma que se cumple la relación (154), por lo tanto los puntos son colineales.

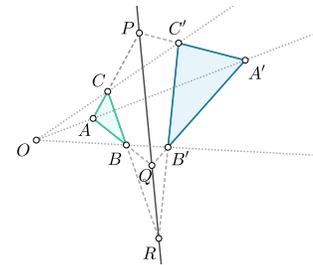


Figura 209: Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen lados en correspondencia que se cortan en tres puntos colineales, por lo tanto están en perspectiva.

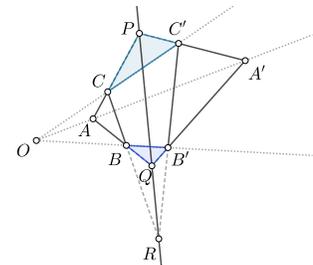


Figura 210: Figura de la demostración del recíproco del Teorema de Desargues.

⁶⁰ Harold S. M. Coxeter. *Projective Geometry, second edition.* Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1987

mostración que daremos, es una simplificación de mi autoría de la presentada en el artículo de Abeles⁶¹.

Teorema de Pasch. Si $\triangle ABC$ es un triángulo tal que $B - C - F$ y $C - E - A$, entonces existe un punto D en la recta FE tal que $A - D - B$.

Demostración. Como F está en la recta BC , entonces existe e tal que

$$x_F = ex_B + (1 - e)x_C \quad \text{y} \quad \frac{\Delta(BF)}{\Delta(FC)} = \frac{1 - e}{e} < 0. \quad (155)$$

También como $E \in CA$, entonces existe c tal que

$$x_E = cx_B + (1 - c)x_C \quad \text{y} \quad \frac{\Delta(CE)}{\Delta(EA)} = \frac{1 - c}{c} > 0. \quad (156)$$

Sea $P \in AB$ y $A - P - B$, entonces existe a tal que

$$x_P = ax_A + (1 - a)x_B \quad \text{y} \quad \frac{\Delta(AP)}{\Delta(PA)} = \frac{1 - a}{a} > 0. \quad (157)$$

Sea D en la recta FE y $D - E - F$, entonces existe t tal que

$$x_D = tx_E + (1 - t)x_F \quad \text{y} \quad \frac{\Delta(FD)}{\Delta(DE)} = \frac{1 - t}{t} < 0. \quad (158)$$

Al sustituir (155) y (156) en (158) se obtiene

$$x_D = t(1 - c)x_A + e(1 - t)x_B + [tc + (1 - t)(1 - e)]x_C. \quad (159)$$

Basta demostrar que existen números reales tales que $x_D = x_P$, con lo cual $D = P$. Al igualar (157) con (159) tenemos:

$$t(1 - c) = a, \quad (160)$$

$$e(1 - t) = 1 - a \quad \text{o} \quad e = \frac{1 - a}{1 - t}, \quad (161)$$

$$tc + (1 - t)(1 - e) = 0 \quad \text{o} \quad c = -\frac{(1 - t)(1 - e)}{t}. \quad (162)$$

Por el Teorema de Menelao, dadas las razones (155), (156), (157), los puntos P, E, F son colineales si y solo si

$$\frac{(1 - e)(1 - c)(1 - a)}{eca} = -1. \quad (163)$$

Pero usando (160), (160), (160) se tiene

$$aec = t(1 - c) \cdot \frac{1 - a}{1 - t} \cdot \frac{-(1 - t)(1 - e)}{t} = -(1 - c)(1 - a)(1 - e),$$

con lo cual termina la demostración. \square

⁶¹ Francine Abeles. *The affine Theorems of Pasch, Menelaus and Ceva.* Mathematics Magazine Vol. 45, No. 2 (Mar., 1972), pp. 78-82 Published By: Taylor & Francis, Ltd., 1972

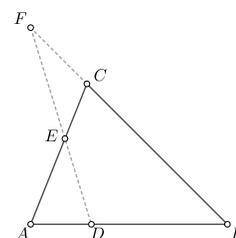


Figura 211: Teorema de Pasch: si $B - C - F$ y $C - E - A$, entonces existe D tal que $A - D - B$.

Transformaciones afines

Definición [Transformaciones Afines]. Una transformación $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se llama *transformación afín* si y solo si para todo $A, B \in \mathcal{A}$ y $\alpha + \beta = 1$, se tiene

$$T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B). \quad (164)$$

Nota. Lo que dice la ecuación (164) es que las transformaciones afines conservan la proporción ente puntos de un segmento, ya que si P está entre A y B , es decir, $A - P - B$ y $m(AP) = a$, $m(PB) = b$, entonces $\frac{m(PB)}{m(AP)} = \frac{b}{a}$, como demostraremos más adelante. Tenemos así que para las transformaciones afines T , se cumple $\frac{m(T(P)T(B))}{m(T(A)T(P))} = \frac{b}{a}$, por lo que las transformaciones afines conservan las razones en los segmentos rectilíneos en \mathcal{A} .

Ejemplo [Rotación en el plano Afín]. Para un punto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con coordenadas baricéntricas $P = (a, b, c)$, con $a + b + c = 1$, determinadas por el triángulo con vértices en A, B, C , la transformación T , que manda el punto A al B , el B al C y el C al A , es una transformación afín.

Vamos a representar esta transformación mediante la multiplicación de matrices

$$T(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

En coordenadas baricéntricas tenemos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$. Calculamos $T(A)$, por ejemplo:

$$T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B.$$

El lector debe comprobar por sí mismo que $T(B) = C$ y que $T(C) = A$. Ahora podemos comprobar que T es una transformación afín, es decir debemos comprobar $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$, si $\alpha + \beta = 1$. Pero la multiplicación de matrices permite ver fácilmente que (164) se

cumple. En efecto, si $A = (a, b, c)$ y $B = (a_1, b_1, c_1)$,

$$\begin{aligned} T(\alpha A + \beta B) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a_1 \\ \alpha b + \beta b_1 \\ \alpha c + \beta c_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha c + \beta c_1 \\ \alpha a + \beta a_1 \\ \alpha b + \beta b_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha T(A) + \beta T(B). \end{aligned}$$

Lo único que falta verificar es que $T(\alpha A + \beta B)$ da coordenadas bari-céntricas de un punto en \mathcal{A} , lo cual se cumple dado que la suma de las coordenadas del punto transformado es uno, ya que

$$\begin{aligned} (\alpha c + \beta c_1) + (\alpha a + \beta a_1) + (\alpha b + \beta b_1) &= \alpha(a + b + c) + \beta(a_1 + b_1 + c_1) \\ &= \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Consideramos ahora las traslaciones en el plano \mathcal{A} .

Teorema [Traslaciones son afines]. La transformación T , definida por

$$T(P) \stackrel{\text{def}}{=} P + A, \quad (165)$$

donde $A, P \in \mathcal{A}$, es una transformación afín.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y $A, P, Q \in \mathcal{A}$. Tenemos por (165)

$$\alpha T(P) = \alpha(P + A) = \alpha P + \alpha A \quad (166)$$

$$\beta T(Q) = \beta(Q + A) = \beta Q + \beta A. \quad (167)$$

Al sumar (166) y (167) dado que $\alpha + \beta = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha T(P) + \beta T(Q) &= \alpha P + \alpha A + \beta Q + \beta A \\ &= \alpha P + \beta Q + (\alpha + \beta)A \\ &= \alpha P + \beta Q + A \\ &= T(\alpha P + \beta Q). \end{aligned}$$

Por lo tanto la transformación definida en (165) es una transformación afín. \square

Multiplicar por un escalar magnifica o contrae segmentos por lo tanto, tiene sentido llamar a la transformación definida en el siguiente teorema de *dilatación*.

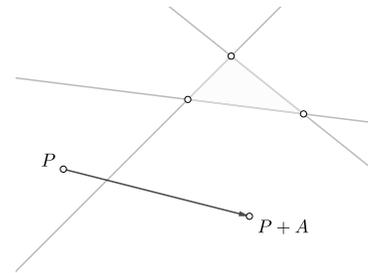


Figura 212: En el plano \mathcal{A} , la transformación $T(P) = P + A$, donde $A \in \mathcal{A}$ está dado y P es un punto cualquiera del plano, es una transformación afín.

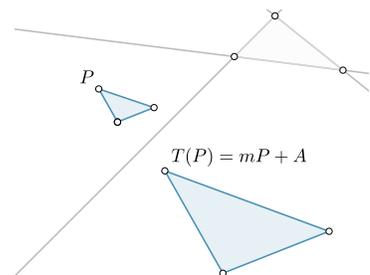


Figura 213: En el plano \mathcal{A} , la transformación $T(P) = mP + A$, donde $m \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A}$ está dado y P es un punto cualquiera del plano, es una transformación afín.

Teorema [Dilataciones son afines]. La transformación T , definida por

$$T(P) \stackrel{\text{def}}{=} mP + A, \quad (168)$$

donde $A, P \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{R}$, es una transformación afín.

Demostración. Dado que

$$\begin{aligned} \alpha T(P) + \beta T(Q) &= \alpha mP + \alpha A + \beta mQ + \beta A \\ &= m(\alpha P + \beta Q) + (\alpha + \beta)A \\ &= m(\alpha P + \beta Q) + A \\ &= T(\alpha P + \beta Q), \end{aligned}$$

puesto que $\alpha + \beta = 1$. Así, queda demostrado que la transformación definida en (168) es afín. \square

Las transformaciones lineales son muy importantes y surgen de manera natural en las transformaciones afines. La siguiente definición es para el plano \mathcal{A} , pero puede generalizarse más apropiadamente a espacios vectoriales arbitrarios.

Definición [Transformación lineal]. Una transformación $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ se llama *transformación lineal* si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:

i) Para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y $P \in \mathcal{A}$, se cumple

$$T(\alpha P) = \alpha T(P).$$

ii) Para toda $P, Q \in \mathcal{A}$, se cumple

$$T(P + Q) = T(P) + T(Q).$$

Con la definición anterior podremos caracterizar las transformaciones afines en términos de las lineales, pero antes requeriremos el lema siguiente.

Lema. Si T es afín y $T(0) = 0$ entonces T es lineal.

Demostración. (i) Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una transformación afín tal que $T(0) = 0$. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $P, Q \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha P) &= T(\alpha P + (1 - \alpha)0) \\ &= \alpha T(P) + (1 - \alpha)T(0) \\ &= \alpha T(P), \end{aligned}$$

dado que $T(0) = 0$.

(ii) Por otra parte, como

$$\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}(P + Q) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}T(0) + \frac{1}{2}T(P+Q) &= \frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}T(Q) \\ \frac{1}{2}T(P+Q) &= \frac{1}{2}T(P) + \frac{1}{2}T(Q).\end{aligned}$$

Por lo tanto $T(P+Q) = T(P) + T(Q)$. \square

Tenemos ahora el importante teorema que afirma que toda transformación afín es una transformación lineal seguida de una traslación.

Teorema [Transformaciones afines determinadas por lineales]. Sea $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, una transformación afín. Entonces existe una transformación lineal $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo $P \in \mathcal{A}$,

$$T(P) = L(P) + A,$$

para algún $A \in \mathcal{A}$. A la transformación L , se le llama *parte lineal de la transformación afín*.

Demostración. Sea $A \stackrel{\text{def}}{=} T(0)$ y defina

$$L(P) \stackrel{\text{def}}{=} T(P) - A. \tag{169}$$

demostraremos que L definida en (169) es lineal comprobando que L es afín y que $L(0) = 0$, con lo que, por el lema anterior, L será lineal. Para ver que L es afín, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Tenemos así, para toda $P, Q \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}L(\alpha P + \beta Q) &= T(\alpha P + \beta Q) - A \\ &= \alpha T(P) + \beta T(Q) - A \\ &= \alpha T(P) + \beta T(Q) - (\alpha + \beta)A \\ &= \alpha(T(P) - A) + \beta(T(Q) - A) \\ &= \alpha L(P) + \beta L(Q).\end{aligned}$$

Por lo tanto, L definida en (169) es afín y como, por definición, $L(0) = 0$ se concluye que L es lineal. \square

Inversa de una transformación afín

Para definir la inversa de una transformación afín se requiere la inversa de una transformación lineal, dado que solo serán invertibles aquellas transformaciones afines cuya parte lineal sea invertible. Para estudiar la inversa de una transformación lineal, primero se debe establecer el teorema fundamental que dice que toda transformación lineal de un espacio vectorial a otro tiene asociada una única matriz y

viceversa, toda matriz determina una transformación lineal. Establecido dicho resultado fundamental, se determina que una transformación lineal tiene inversa si y solo si la matriz asociada es invertible. Lo cual ocurre cuando la matriz es no singular y tiene por lo tanto determinante distinto de cero. No procederemos con este estudio por estar fuera de nuestros objetivos, pero los resultados mencionados pueden encontrarse en cualquier libro de Álgebra Lineal, por ejemplo en el libro de Hoffman y Kunze⁶².

⁶² Kenneth Hoffman y Ray Kunze. *Linear Algebra*. Pearson, 2015

Dicho lo anterior procederemos de manera formal sin demostrar los teoremas relativos a inversas de transformaciones lineales y solo para completar los resultados de este capítulo. Se tiene el siguiente lema.

Lema [Inversa de una transformación afín]. Sea $T(P) = L(P) + A$ una transformación afín con parte lineal L invertible, entonces existe la inversa de T , denotada T^{-1} , y

$$T^{-1}(Q) = L^{-1}(Q) - L^{-1}(A).$$

Demostración. Formalmente se tiene,

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(Q)) &= L(L^{-1}(Q) - L^{-1}(A)) + A \\ &= L(L^{-1}(Q)) - L(L^{-1}(A)) + A \\ &= Q - A + A = Q. \end{aligned}$$

Similarmente, el lector puede comprobar que $T^{-1}(T(P)) = P$. \square

Ejemplo. La transformación lineal T , definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

es invertible con

$$T^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & -b & 0 \\ -c & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

como el lector puede comprobar por sí mismo.

Teorema [Conservación de razones bajo transformaciones afines]. Si T es una transformación afín y el punto R divide \overline{PQ} en la razón n/m , entonces $T(R)$ divide $\overline{T(P)T(Q)}$ en la misma razón.

Demostración. Obsérvese que por definición,

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{PR} &= n\overrightarrow{RQ} \Leftrightarrow m(R - P) = n(Q - R) \\ &\Leftrightarrow (m + n)R = mP + nQ. \end{aligned} \quad (170)$$

Así la relación $(m+n)R = mP + nQ$ se conserva bajo transformaciones afines dado que tendríamos

$$R = \frac{m}{m+n}P + \frac{n}{m+n}Q, \quad \text{con} \quad \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1.$$

De esta forma, si T es una transformación afín, por definición,

$$\begin{aligned} T(R) &= \frac{m}{m+n}T(P) + \frac{n}{m+n}T(Q) \\ (m+n)T(R) &= mT(P) + nT(Q). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\overrightarrow{T(P)T(R)} = \frac{m}{n} \overrightarrow{T(R)T(Q)}$$

Así $T(R)$ divide $T(P)T(Q)$ en la razón n/m .

Nota. Se tiene por la relación (170) que $(m+n)\overrightarrow{OR} = m\overrightarrow{OP} + n\overrightarrow{OQ}$, pero la relación $(m+n)\overrightarrow{OR}$ no depende del punto O , como el lector puede demostrar como ejercicio.

Ecuaciones Afines

Ahora podemos generalizar la relación básica de combinaciones convexas de dos elementos en geometría afín a un número cualquiera de elementos con la siguiente definición.

Definición [Ecuación afín]. En el plano \mathcal{A} , una ecuación de la forma

$$m_1P_1 + \cdots + m_jP_j = n_1Q_1 + \cdots + n_kQ_k, \quad (171)$$

se llama *ecuación afín* si y solo si

$$m_1 + \cdots + m_j = n_1 + \cdots + n_k. \quad (172)$$

Tomando en cuenta la definición anterior se llega al siguiente teorema.

Teorema [Independencia del origen de las ecuaciones afines]. Una ecuación afín (171) es independiente del punto O , que se haya establecido como origen.

Demostración. Por una parte tenemos

$$m_1\overrightarrow{OP_1} + \cdots + m_j\overrightarrow{OP_j} = n_1\overrightarrow{OQ_1} + \cdots + n_k\overrightarrow{OQ_k}. \quad (173)$$

Sea O' un punto cualquiera del plano \mathcal{A} , dado que se cumple (172), tenemos

$$m_1\overrightarrow{O'O} + \cdots + m_j\overrightarrow{O'O} = n_1\overrightarrow{O'O} + \cdots + n_k\overrightarrow{O'O}. \quad (174)$$

Al sumar (173) con (174) llegamos a

$$m_1\overrightarrow{O'P_1} + \cdots + m_j\overrightarrow{O'P_j} = n_1\overrightarrow{O'Q_1} + \cdots + n_k\overrightarrow{O'Q_k}. \quad (175)$$

con lo que queda demostrado el teorema. \square

Ejemplo. En el plano \mathcal{A} , dado el teorema anterior, se tienen muchas ecuaciones equivalentes, por ejemplo $3P = 2Q_1 + Q_2$ es equivalente a la ecuación afín

$$3\overrightarrow{Q_1P} = 2\overrightarrow{Q_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$$

y también

$$\vec{0} = 3\overrightarrow{PP} = 2\overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{PQ_2}.$$

Ejemplo. Reconocemos ahora la combinación convexa $P = aA + bB + cC$, donde $a + b + c = 1$, como una ecuación afín, la cual tomando A como origen puede escribirse como

$$\overrightarrow{AP} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Con la caracterización dada por (175), podemos escribir un vector cualquiera en el plano \mathcal{A} , como combinación lineal de otros vectores del plano, generalizando la definición $\overrightarrow{BA} = 1A + (-1)B = A - B$.

Teorema de Ceva en geometría afín

Los teoremas de Menelao y Ceva pertenecen a la geometría afín y con los resultados obtenidos hasta ahora, en particular podemos demostrar fácilmente el teorema de Ceva dentro del contexto de las coordenadas baricéntricas.

Teorema [Ceva]. Considere las tres rectas que pasan por los vértices de un $\triangle ABC$, pero que no coinciden con ninguno de los lados del triángulo. Sean A' , B' , y C' las intersecciones de tales rectas con los lados opuestos a los lados respectivos. Si las rectas concurren en un punto O , entonces

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \quad (176)$$

Nota. El lector no debe dejar de ver que en la anterior reformulación del teorema de Ceva, en la ecuación (176) no escribimos medidas de segmentos, sino la notación de razones dada por (141), exclusiva de la geometría afín.

Demostración. Sea O un punto que no está sobre AB ni BC ni CA . Supongamos que AO interseca BC en A' , CO interseca AB en C' y BO interseca AC en B' . En las coordenadas baricéntricas determinadas por $\triangle ABC$ tenemos

$$O = aA + bB + cC, \quad a + b + c = 1.$$

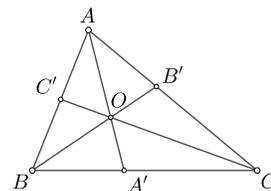


Figura 214: Las rectas AA' , BB' , CC' se cortan en un punto O , entonces se cumple (176).

Se afirma que $b + c \neq 0$ y $(b + c)A' = bB + cC$. Por contradicción, si $b + c = 0$, entonces $b = -c$ y $a = 1$, con lo que se obtiene

$$O = A' + b(B - C).$$

Es decir, $\overrightarrow{OA'}$ es paralelo a \overrightarrow{BC} , lo cual es una contradicción ya que OA' interseca BC en A' . Obtenemos así, dada la ecuación del lado derecho de la doble implicación en (170),

$$(b + c)A' = bB + cC \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{b}{c}, \quad (177)$$

es decir, la razón de BA' entre $A'C$ es b/c . Similarmente se obtiene

$$(a + c)B' = aA + cC \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{c}{a} \quad (178)$$

y también

$$(a + b)C' = aA + bB \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{a}{b}. \quad (179)$$

Con las ecuaciones (177), (178) y (179) llegamos a

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1,$$

con lo cual termina la demostración. \square

Grupo afín

Sabemos que las transformaciones afines son de la forma $L(P) + A$, donde $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, es una transformación lineal y $P, A \in \mathcal{A}$. Trabajaremos entonces con transformaciones afines $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, que actúen sobre vectores definidos en el plano afín de la forma

$$T(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) + \mathbf{a}, \quad (180)$$

donde $\mathbf{u} = P - Q$, $\mathbf{a} = R - S$, $P, Q, R, S \in \mathcal{A}$, dado que si $\mathbf{u} = P - Q \in \mathcal{A}$ y L es lineal, se tiene

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= T(P - Q) = L(P) - L(Q) + (R - S) \\ &= (L(P) + R) - (L(Q) + S) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

Resumiendo, la matriz asociada a la transformación L , además de ser lineal, debe mandar puntos del plano \mathcal{A} al mismo plano, es decir, la suma de los elementos de cada una de las columnas de L debe ser 1. Una vez que se han establecido los detalles finos de las transformaciones que se requieren y del espacio vectorial donde actúan, podemos determinar el grupo afín.

Proposición [Grupo Afín]. El conjunto de transformaciones de la forma (180) con parte lineal L , invertible, forman un grupo respecto a la composición de transformaciones lineales, al cual denotaremos GA .

Demostración. Debemos demostrar:

- i) Para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, y toda $T \in GA$, se cumple $T(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}$.
- ii) Para toda $T_1, T_2 \in GA$ y $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ se tiene $(T_1 \circ T_2)(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}$
- iii) Existe $I \in GA$ tal que para toda $T \in GA$, $T \circ I = I \circ T = T$.
- iv) Para toda $T \in GA$, existe una inversa $T^{-1} \in GA$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.
- v) La composición de transformaciones de la forma (180), es asociativa.

Demostración (i). Como $T(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) + \mathbf{a}$, si $\mathbf{u} = P - Q$,

$$T(\mathbf{u}) = L(P) - L(Q) + \mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{a} \in \mathcal{A},$$

dado que $L(P), L(Q) \in \mathcal{A}$, $\mathbf{v} \stackrel{def}{=} L(P) - L(Q)$, y los vectores en \mathcal{A} se definen con la diferencia afín de puntos en \mathcal{A} .

Demostración (ii). Sean $T_1(\mathbf{u}) = L_1(\mathbf{u}) + \mathbf{a}_1$, $T_2(\mathbf{u}) = L_2(\mathbf{u}) + \mathbf{a}_2$ y $L_2(\mathbf{u}) = v$. Tenemos

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(\mathbf{u}) &= T_1(T_2(\mathbf{u})) \\ &= L_1(T_2(\mathbf{u})) + \mathbf{a}_1 \\ &= L_1(\mathbf{v} + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_1 \\ &= L_1(\mathbf{v}) + L_1(\mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_1, \end{aligned}$$

pero por (i) $L_1(\mathbf{v}), L_1(\mathbf{a}_2) \in \mathcal{A}$ y dado que \mathcal{A} es espacio vectorial la suma de elementos del espacio está necesariamente en el mismo espacio.

Demostración (iii). La transformación I está dada por

$$I(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u, \quad u \in \mathcal{A}.$$

Efectivamente, I , es transformación afín dado que la suma de cada una de las columnas de la matriz asociada es 1 y, para la matriz M asociada a T , se tiene $MI = IM = M$.

Demostración (iv). Para toda $T(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}) + \mathbf{a}$, la inversa está dada por

$$T^{-1}(\mathbf{u}) \stackrel{def}{=} L^{-1}(\mathbf{u}) - L^{-1}(\mathbf{a}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (T \circ T^{-1})(\mathbf{u}) &= T(L^{-1}(\mathbf{u}) - L^{-1}(\mathbf{a})) \\ &= L(L^{-1}(\mathbf{u}) - L^{-1}(\mathbf{a})) + \mathbf{a} \\ &= u. \end{aligned}$$

Solo faltaría demostrar que $L^{-1}(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}$, para toda $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, lo cual se deja como ejercicio.

La demostración de (v) es un mero cálculo y también se deja como ejercicio. \square

Aplicaciones del grupo afín de transformaciones

La mayor ventaja de la geometría afín sobre otras geometrías cuando se trata de teoremas de incidencia y de razones se verá en las siguientes aplicaciones. De una manera similar a la que se usó en geometría hiperbólica cuando un triángulo arbitrario se llevó a un triángulo con dos lados sobre radios de la circunferencia unitaria. En geometría afín, a veces se puede transformar un triángulo arbitrario en uno equilateral donde puedan estudiarse más fácilmente ciertas propiedades. Para este fin demostramos el siguiente teorema.

Teorema [Todos los triángulos son \mathcal{A} -congruentes]. Se considera el plano \mathcal{A} , con coordenadas baricéntricas determinadas por el triángulo $\triangle ABC$. Sean A' , B' y C' tres puntos no colineales. Entonces existe una única transformación afín tal que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$. Así todos los triángulos son congruentes en geometría afín, por lo cual, se dice que todos los triángulos son \mathcal{A} -congruentes.

Demostración. Consideramos la matriz formada con las coordenadas baricéntricas de A' , B' , C' como columnas. Sean $A' = (a_1, b_1, c_1)$, $B' = (a_2, b_2, c_2)$ y $C' = (a_3, b_3, c_3)$, con $a_i + b_i + c_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, entonces la transformación T , del teorema, puede escribirse como,

$$T(P) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} P^T,$$

donde

$$P = (a, b, c), \quad P^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

El lector puede comprobar que efectivamente dado que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ y $C = (0, 0, 1)$, se cumple que $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ y $T(C) = C'$. Tenemos que demostrar que T es una transformación afín. Sean $P_1 = (u_1, v_1, w_1)$ y $P_2 = (u_2, v_2, w_2)$ elementos del plano \mathcal{A} y sean

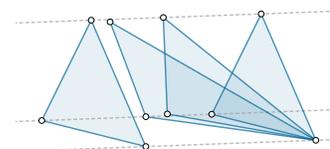


Figura 215: En el plano \mathcal{A} , siempre existe una transformación afín que lleva un triángulo cualquiera en otro triángulo cualquiera.

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + \beta = 1$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha P_1 + \beta P_2) &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 \\ \alpha w_1 + \beta w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + a_2(\alpha v_1 + \beta v_2) + a_3(\alpha w_1 + \beta w_2) \\ b_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + b_2(\alpha v_1 + \beta v_2) + b_3(\alpha w_1 + \beta w_2) \\ c_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + c_2(\alpha v_1 + \beta v_2) + c_3(\alpha w_1 + \beta w_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (181)$$

Primero demostramos que $T(\alpha P_1 + \beta P_2) \in \mathcal{A}$, es decir, debemos demostrar que la suma de las componentes del último vector es uno, por ejemplo, al sumar el primer sumando de cada renglón obtenemos,

$$\begin{aligned} a_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + b_1(\alpha u_1 + \beta u_2) + c_1(\alpha u_1 + \beta u_2) &= \alpha u_1(a_1 + b_1 + c_1) + \beta u_2(a_1 + b_1 + c_1) \\ &= \alpha u_1 + \beta u_2, \end{aligned} \quad (182)$$

similarmente, el segundo sumando da

$$\begin{aligned} a_2(\alpha v_1 + \beta v_2) + b_2(\alpha v_1 + \beta v_2) + c_2(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \alpha v_1(a_2 + b_2 + c_2) + \beta v_2(a_2 + b_2 + c_2) \\ &= \alpha v_1 + \beta v_2, \end{aligned} \quad (183)$$

y el tercer sumando da

$$\begin{aligned} a_3(\alpha w_1 + \beta w_2) + b_3(\alpha w_1 + \beta w_2) + c_3(\alpha w_1 + \beta w_2) &= \alpha w_1(a_3 + b_3 + c_3) + \beta w_2(a_3 + b_3 + c_3) \\ &= \alpha w_1 + \beta w_2. \end{aligned} \quad (184)$$

Al sumar (182), (183) y (184), se tiene

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \alpha v_1 + \beta v_2 + \alpha w_1 + \beta w_2 &= \alpha(u_1 + v_1 + w_1) + \beta(u_2 + v_2 + w_2) \\ &= \alpha + \beta \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $T(\alpha P_1 + \beta P_2) \in \mathcal{A}$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \alpha T(P_1) &= \alpha \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(a_1 u_1 + a_2 v_1 + a_3 w_1) \\ \alpha(b_1 u_1 + b_2 v_1 + b_3 w_1) \\ \alpha(c_1 u_1 + c_2 v_1 + c_3 w_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (185)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \beta T(P_2) &= \beta \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta(a_1 u_2 + a_2 v_2 + a_3 w_2) \\ \beta(b_1 u_2 + b_2 v_2 + b_3 w_2) \\ \beta(c_1 u_2 + c_2 v_2 + c_3 w_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (186)$$

Al sumar (185) y (186) se obtiene (181), de las propiedades conmutativa, asociativa, etcétera de los números reales.

La unicidad de la matriz formada por las coordenadas baricéntricas es consecuencia de la unicidad de las matrices asociadas a transformaciones lineales y remitimos al lector al libro de Hoffman y Kunz (*op. cit.*). \square

Con el teorema anterior se puede demostrar de una forma simple el teorema de las medianas de un triángulo, demostrándolo para un triángulo equilátero.

Teorema [Intersección de las medianas de un triángulo]. En todo triángulo las medianas se intersecan en un punto.

Nota. El teorema se demuestra fácilmente usando el recíproco del teorema de Ceva, pero usando el teorema anterior se puede demostrar en el contexto de la geometría afín usando un triángulo equilátero.

Demostración. Dado un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ use una transformación afín T , garantizada por el teorema anterior, para llevarlo a un triángulo equilátero $\triangle A'B'C'$. Claramente las medianas y los puntos medios de los lados de del triángulo $\triangle ABC$ son llevadas a las medianas y puntos medios del triángulo $\triangle A'B'C'$, dado que T es una transformación afín. Las medianas de un triángulo equilátero se intersecan, dado que la intersección de dos medianas está en el bisector perpendicular del lado perpendicular a la tercera mediana ya que esta misma es bisector perpendicular. \square

El ejemplo anterior muestra una de las aplicaciones más impresionantes del las aplicaciones de los grupos de isometrías en una geometría dada. La técnica puede resumirse así:

- Buscar entre todas las figuras equivalentes bajo un grupo de isometrías aquella que es más fácil de tratar, por ejemplo, un triángulo equilátero en el teorema anterior.
- Concluya que todas las figuras tienen la propiedad demostrada para la figura escogida, por ejemplo, todos los triángulos tienen la propiedad de que las medianas se cortan en un punto dado que los triángulos equiláteros tiene tal propiedad.

Recordamos al lector que la mencionada técnica también se utilizó destacadamente en los resultados principales de geometría hiperbólica, ya que mediante una traslación se llevan las figuras al centro de la circunferencia del modelo de Poincaré, donde “pueden verse” mejor las figuras en cuestión desde fuera del espacio hiperbólico.

Ejercicios de "Otras geometrías"

- Encuentre los puntos fijos, si existen, de las isometrías en \mathbb{C} . Recuerde que un punto fijo de una transformación T es un punto z^* , tal que $T(z^*) = z^*$.

Teorema de Menelao con signo

- Resuelva para α y β el sistema:

$$\begin{aligned}\alpha x_A + \beta x_B &= x_C \\ \alpha + \beta &= 1.\end{aligned}$$

- Demuestre el Lema [Proporciones con signo] para el caso en el que $x_A > x_B$.
- Demuestre el teorema de Menelao con signo usando proporciones con signo y teoremas de triángulos semejantes.

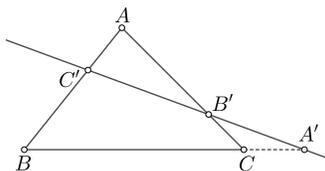


Figura 216: Teorema de Menelao con signo. Observe que el signo negativo expresa el hecho de que en este ejemplo A' está fuera de $C'B'$.

Transformaciones afines

- Compruebe que la transformación

$$T(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

es afín y que deja fijo el centroide $(1/3, 1/3, 1/3)$.

- Compruebe que la transformación lineal T , definida por

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

es invertible con

$$T^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d & -b & 0 \\ -c & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sugerencia. Basta demostrar que el producto de las matrices asociadas a las transformaciones da la matriz identidad I , de 3×3 .

7. Demuestre que el conjunto de segmentos orientados libres o flechas definidas sobre el plano \mathcal{A} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Sugerencia: Por ejemplo el vector $\mathbf{0} = \overrightarrow{PP}$, para cualquier P , en el plano afín y para todo $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$. se define $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$.

8. Demuestre que el conjunto de flechas o segmentos orientados y libres en \mathbb{R}^2 , definidos de manera equivalente a como se hizo con el plano \mathcal{A} , es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
9. Demuestre que la relación (170) no depende del punto que se elija como origen O .

Sugerencia. Demuestre que si O' es otro punto cualquiera entonces $(m+n)\overrightarrow{O'O} = m\overrightarrow{O'O} + n\overrightarrow{O'O}$ y que entonces, mediante sumas y restas apropiadas, se tiene que $(m+n)\overrightarrow{O'R} = m\overrightarrow{O'P} + n\overrightarrow{O'Q}$.

10. Demuestre que la ecuación (145) es una ecuación afín.
11. Demuestre que $L^{-1}(\mathbf{u}) \in V_{\mathcal{A}}$, para toda $\mathbf{u} \in V_{\mathcal{A}}$.
12. Demuestre que la composición de transformaciones de la forma (180) es asociativa.

Otras axiomáticas de la geometría euclidiana

En este libro partimos de la axiomática de Birkhoff (*op. cit*), principalmente por motivos didácticos relacionados con la brevedad con la que se llega a resultados fundamentales de la geometría euclidiana. Además, con la axiomática de Birkhoff, el plano estudiado en la geometría analítica queda perfectamente fundamentado desde la perspectiva de una axiomática de la geometría. Muchas otras axiomáticas existen en la actualidad y desde la antigüedad, la desarrollada por Euclides fue cuestionada, por ejemplo por Proclo, aduciendo la posible y nunca demostrada dependencia del Postulado V de los *Elementos* de los demás postulados. Desde la perspectiva moderna, hay algunos huecos en la teoría de Euclides, siendo el principal, desde mi punto de vista, la continuidad de los segmentos, rectas y demás curvas existentes en el plano euclidiano *la cual no se sigue en absoluto de los cinco postulados de Euclides*.

Hay dos posibilidades de incorporar la continuidad requerida de las líneas y superficies. Una es mediante el axioma de Arquímedes y las cortaduras de Dedekind, como hacen Tarski y Hilbert con sus respectivas axiomáticas. Otra posibilidad es como lo hace Birkhoff, estableciendo una correspondencia biunívoca entre \mathbb{R} y las rectas en el plano, con la alternativa de establecer directamente una correspondencia entre \mathbb{R}^2 y el plano euclidiano, como se hace en la geometría analítica. Para el lector inquieto con la duda de cuál axiomática es “mejor” está dedicado este capítulo. Podemos adelantar que las axiomáticas de Tarski, Hilbert y la Birkhoff son equivalentes, por lo menos para efectos de las demostraciones de los teoremas más importantes de la geometría euclidiana plana. En el libro de Greenberg⁶³ capítulo 3, se puede encontrar la demostración de los postulados I y III de Birkhoff a partir de la teoría de Hilbert y como veremos los otros postulados están incorporados en ambas teorías.

Parte de lo que veremos en este capítulo será como demostrar los postulados de Tarski y Hilbert partiendo de los de Birkhoff. Pero primero revisaremos los postulados o axiomas de Tarski, para pasar en seguida a estudiar los de Hilbert.

⁶³ Marvin J. Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean Geometries Development and History*. W. H. Freeman and Company, 1993

Postulados usados por Tarski

En el texto principal usaremos nuestra notación en lugar de la de Tarski, manteniendo en el margen derecho la formulación original de Tarski. La axiomática de Tarski se desarrolla considerando solo puntos, no rectas, es decir se considera “punto” como concepto primitivo⁶⁴. Además hay dos relaciones sin definir (primitivas): la congruencia \cong y “estar entre”, que denota con $B(abc)$, lo que nosotros denotamos por $a - b - c$, como siempre hemos hecho (solo que nosotros usamos mayúsculas para los puntos). A continuación presentamos los axiomas de Tarski, traduciendo al español la notación de la lógica como está escrita en el texto original⁶⁵. El lector debe tener en cuenta que en la axiomática de Tarski **no se representan los objetos con dibujos**, ya que se espera deducir todos los teoremas de la geometría con puras relaciones lógicas y que las relaciones que contienen los axiomas ocurren solo entre puntos y no en segmentos, sin embargo nuestra representación gráfica corresponde a la traducción de los postulados de Tarski a la Teoría de Birkhoff.

La actividad que haremos a continuación será demostrar algunos de los axiomas de Tarski para geometría plana, suponiendo verdaderos los postulados de Birkhoff.

Ejemplo. Demuestre mediante los postulados de Birkhoff del capítulo segundo de este libro que la relación de congruencia definida por Tarski es una relación de equivalencia.

Axioma I-TG. La congruencia es reflexiva, es decir, para todo A, B , $AB \cong BA$.

Demostración. En la axiomática de Birkhoff, si x_A, x_B son los números reales en correspondencia con los puntos A, B respectivamente, entonces

$$m(AB) = |x_A - x_B| = |x_B - x_A| = m(BA)$$

de donde se sigue la congruencia $AB \cong BA$. □

Axioma II-TG. La congruencia es transitiva. es decir, si $AB \cong PQ$ y $AB \cong RS$, entonces $PQ \cong RS$.

Demostración. La transitividad de la congruencia se sigue de la transitividad de la igualdad de medidas. Los detalles de la demostración se dejan como ejercicio. □

Axioma III-TG. Si $AB \cong CC$, entonces A es el mismo punto que B .

Demostración. Dado que para todo C , $m(CC) = 0$, por el postulado I de Birkhoff, y dado que $m(AB) = 0$ implica $A = B$, como consecuencia del mismo postulado. □

⁶⁴ En otras palabras las variables de primer orden que considera Tarski son solo los puntos, los cuales denota con minúsculas. Las equivalencias de símbolos son:

$$\equiv \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \cong$$

$$\text{Ent}(abc) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} a - b - c.$$

⁶⁵ Alfred Tarski y Steven Givant. *Tarski's System of Geometry*. The Bulletin of Symbolic Logic, Jun., 1999, Vol. 5, No. 2 (jun., 1999), pp. 175-214

Ax. 1-TG. $ab \equiv ba$.

Ax. 2-TG. $ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \Leftrightarrow pq \equiv rs$.

Ax. 3-TG. $ab \equiv cc \Leftrightarrow a = b$.

Ejemplo. Demuestre el axioma iv de Tarski partiendo de los postulados de Birkhoff.

Axioma IV-TG. Dado un segmento BC , para toda semirecta QA , existe X en la semirecta tal que QAX y $AX \cong BC$.

Demostración. Es inmediata del Postulado I de Birkhoff y los detalles se dejan como ejercicio. \square

Ejemplo. El lector con experiencia en la geometría debe reconocer que el quinto axioma de Tarski, enunciado a continuación, es equivalente al Postulado IV [LAL] de Birkhoff. Dé una demostración simple basada en el postulado IV de Birkhoff.

Axioma V-TG. Dados dos triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle A'C'D'$, y dados los puntos interiores B y B' de los lados AC y $A'C'$, respectivamente, si $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AD \cong A'D'$ y $BD \cong B'D'$ se concluye que $CD \cong C'D'$, es decir, $\triangle ACD \cong \triangle A'C'D'$.

Demostración. Por el Teorema III [LLL], tenemos que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ y por lo tanto $\angle A \cong \angle A'$. Ahora por las hipótesis concluimos que $AC \cong A'C'$ y $AD \cong A'D'$. Por lo tanto $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$, de donde $DC \cong D'C'$. \square

Ejemplo. Demuestre el sexto axioma de Tarski usando la axiomática de Birkhoff.

Axioma VI-TG. Para todo A, B si $A - B - A$, entonces $A = B$.

Demostración. Por definición $A - B - A$ si y sólo si $x_A \leq x_B \leq x_A$, es decir $x_A \leq x_B$ y $x_B \leq x_A$, por lo tanto $x_A = x_B$ y así $A = B$. \square

En la axiomática propuesta por Tarski en "Tarski's system of Geometry" (*op. cit*), el axioma 7 es un equivalente al axioma de Pasch y puede consultarse en la sección de ejercicios de este capítulo. Los axiomas 8 y 9 se refieren a la existencia de objetos de una y dos dimensiones en el espacio geométrico. Por otra parte, el axioma 10 se presenta en cuatro variantes, una de las cuales, el axioma 10.3 es equivalente a que la suma de los ángulos internos de un triángulo suma π , lo cual se deja como ejercicio. Los axiomas 11 a 20 están relacionados con la continuidad de los objetos implicados en el sistema de Tarski y son quizá los axiomas más técnicos y difíciles para quien comienza a estudiar geometría. En nuestro enfoque no continuaremos el estudio de la axiomática de Tarski dado que tal refinamiento técnico está fuera de los objetivos de este libro.

Postulados usados por Hilbert

Los axiomas o postulados con los que Hilbert⁶⁶ construyó su teoría están divididos en cinco grupos: relaciones de incidencia, relaciones

Ax. 4-TG. $\exists X (\text{Ent}(QAX) \wedge AX \equiv BC)$.

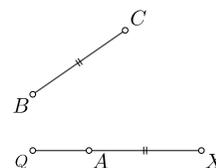


Figura 217: Nuestra representación gráfica del Axioma IV corresponde a la traducción de los postulados de Tarski a la Teoría de Birkhoff.

Ax. 5-TG.

$$[a \neq b \wedge \text{Ent}(abc) \wedge \text{Ent}(a'b'c') \\ \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \\ \wedge bd \equiv b'd'] \Rightarrow cd \equiv c'd'$$

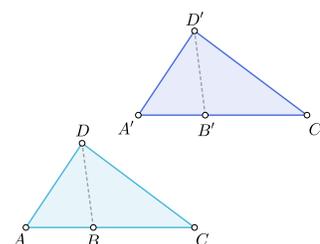


Figura 218: El Axioma V de Tarski es equivalente al Postulado IV de Birkhoff.

⁶⁶ David Hilbert. *Foundations of Geometry*. Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971

de orden, relaciones de congruencia, continuidad y paralelismo. Los *términos indefinidos* para la geometría plana son: puntos (denotados con mayúsculas como en nuestro enfoque) y rectas. Las relaciones indefinidas son “estar en”, “estar entre” y “ser congruente” y quedan determinadas por los axiomas enumerados más abajo. Puede ser un interesante ejercicio demostrar los axiomas de Hilbert partiendo de la axiomática de Birkhoff, lo cual, dejamos como ejercicio al final del capítulo. A continuación presentamos la traducción de los axiomas de Hilbert (*op. cit.*) a nuestro idioma.

Axiomas de Orden

Axioma H-O₁ [Orden I]. Si $A - B - C$, entonces A, B y C son tres puntos distintos que están en la misma recta y $C - B - A$.

Axioma H-O₂ [Orden II]. Dados dos puntos B y D existen puntos A, C, E sobre la recta BD , tales que $A - B - D$, $B - C - D$ y $B - D - E$

Axioma H-O₃ [Orden III]. Si A, B y C son tres puntos distintos que están sobre la misma recta, uno y solo uno de los puntos está entre los otros dos.

Definición [Lados definidos por una recta]. Sea ℓ cualquier recta y sean A y B puntos cualquiera que no están en ℓ . Si $A = B$, o si el segmento AB , no contiene puntos en ℓ , se dice que A y B están en *el mismo lado* de ℓ , mientras que si $A \neq B$ y el segmento AB interseca a la recta ℓ , se dice que A y B están en *lados distintos* de ℓ .

Nota. Esta definición, que en Hilbert (*op. cit.*, p. 8) se muestra con un diagrama similar al de la Figura 219, es inapropiada ya que sin los axiomas de continuidad no queda garantizada la intersección del segmento con la recta. Sin embargo en el contexto de la Teoría de Birkhoff se obtiene una definición menos dependiente de un diagrama, como el lector puede comprobar por sí mismo.

Axioma H-O₄ [Rectas separan el plano]. Para cada recta ℓ y para cualesquiera tres puntos que no están en ℓ se tiene que :

- i) Si A y B están en el mismo lado de ℓ y B, C están en el mismo lado de ℓ , entonces A y C están en el mismo lado de ℓ .
- ii) Si A y B están en lados opuestos de ℓ y B, C están en lados opuestos de ℓ , entonces A y C están en el mismo lado de ℓ .

Nota. El Axioma H-O₄ garantiza que se trata de la geometría sobre un plano euclidiano ya que lo establecido en el axioma no ocurre en el espacio de tres dimensiones. La definición de lado se requiere en el quinto postulado de los elementos de Euclides. Una consecuencia

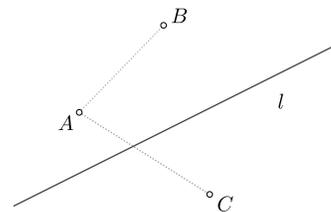


Figura 219: Los puntos A y B , están del mismo lado de la recta ℓ ya que el segmento AB no corta a la recta. En cambio los puntos A y C están en lados opuestos ya que el segmento AC corta a ℓ .

del postulado H4 es la proposición que afirma que toda recta separa el plano en dos semiplanos de forma que tales semiplanos no tienen puntos en común. Este resultado clásico es de la clase de la que todo mundo piensa que dice algo obvio, pero que, sin embargo, debe demostrarse o establecerse como axioma. Otro resultado de este tipo “obvio” es el Teorema de Pasch que afirma que si una recta corta un lado de un triángulo entonces también corta al menos otro lado. La demostración de estos hechos a partir de los postulados de Hilbert puede consultarse en el libro de Greenberg (*op. cit.*)

Axiomas de la relación de congruencia

Axioma de congruencia H-C1. Si A y B son dos puntos distintos y si A' es cualquier punto, entonces para cada rayo r , con origen en A' , existe un único punto B' , en r , tal que $B' \neq A'$ y $AB \cong A'B'$.

Axioma de congruencia H-C2. Si $AB \cong CD$ y $CD \cong EF$, entonces $CD \cong EF$. Además todo segmento es congruente consigo mismo.

Axioma de congruencia H-C3. Si $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, entonces $AC \cong A'C'$.

Axioma de congruencia H-C4. Dado cualquier $\angle BAC$ y dado cualquier rayo $A'B'$, con origen en A' , existe un único rayo $A'C'$, con este lado sobre la recta $A'B'$, tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.

Axioma de congruencia H-C5. Si $\angle A \cong \angle B$ y $\angle A \cong \angle C$, entonces $\angle B \cong \angle C$. Además todo ángulo es congruente consigo mismo.

Axioma de congruencia H-C6 [LAL]. Si dos lados de un triángulo y el ángulo formado por ellos son congruentes con dos lados y el ángulo formado por ellos de otro triángulo respectivamente, entonces los triángulos son congruentes.

Nota. Este axioma no se demuestra dentro de la teoría de Birkhoff ya que es exactamente el Postulado IV.

Axiomas de continuidad

En este grupo de axiomas Hilbert incluye dos axiomas de continuidad siendo uno de ellos el Axioma de Arquímedes. Sin embargo ambos axiomas de Hilbert son consecuencia del axioma de Dedekind como se demuestra en el libro de Greenberg (*op. cit.*)

Axioma de continuidad de Dedekind. Suponga que el subconjunto ℓ' de todos los puntos de una recta ℓ es la unión disjunta de dos conjuntos no vacíos D_1 y D_2 , es decir $\ell' = D_1 \cup D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, de tal manera que ningún punto de cada conjunto está entre dos puntos

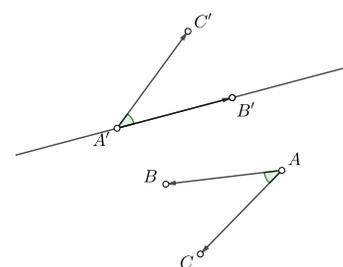


Figura 220: Figura correspondiente al Axioma H-C4.

del otro conjunto. Entonces existe un único punto O en ℓ tal que $\ell = D_1 \cup D_2 \cup \{O\}$.

Axioma de paralelismo

Sin este axioma se obtienen una gran cantidad de resultados que se nombran *geometría neutral*, sin embargo los más profundos resultados de la geometría euclidiana plana requieren el axioma siguiente o alguna de sus equivalencias.

Axioma de paralelismo. Para cada recta ℓ y cada punto P no en ℓ , existe a lo más una recta m que pasa por P tal que m es paralela a ℓ .

Axiomas de la relación de incidencia

Axioma H-I1. Para cualesquiera dos puntos A, B existe una recta que contiene cada uno de los puntos A y B .

Axioma H-I2. Para cualesquiera dos puntos A, B existe a lo más una recta que contienen cada uno de los puntos A y B .

Axioma H-I3. Existen al menos dos puntos en una recta. Existen al menos tres puntos que no están en una recta cualquiera.

Aquí termina la lista de axiomas de Hilbert, la cual hemos incluido para que el lector pueda tenerla completa, lo cual será de utilidad para los ejercicios y para comparar sistemas axiomáticos, tema que introduciremos en la siguiente sección.

Comparando axiomáticas

Después de revisar a lo largo de este libro varios sistemas axiomáticos de la geometría Euclidiana, una pregunta válida que posiblemente se haga el lector es, ¿hay algún sistema axiomático que sea “mejor”? Para responder a esta pregunta debemos decidir primero que se entendería por “mejor”. A continuación introduciremos definiciones precisas que nos permitan establecer maneras de comparar diferentes axiomáticas.

Definición [Consistencia, independencia y completitud de sistemas axiomáticos]. Un sistema axiomático se llama:

- i) *Consistente*, si no existen en el sistema un par de axiomas, un axioma y un teorema o un par de teoremas que se contradigan entre sí.
- ii) *Independiente*, si cada axioma del sistema no puede demostrarse a partir de los demás axiomas del sistema.
- iii) *Completo*, si cada afirmación que contenga términos indefinidos o definidos en el sistema puede demostrarse válida o no válida, en

otras palabras, no es posible añadir un axioma independiente al sistema.

Ejemplos. El sistema axiomático de Euclides *no es completo*, ya que por ejemplo, no puede demostrarse el axioma de Pasch dentro de la axiomática de Euclides y no forma parte de los postulados. Sin embargo el sistema de Euclides es independiente ya que ninguno de los cinco postulados puede demostrarse a partir de los otros⁶⁷.

El sistema axiomático de Tarski de geometría elemental es completo, como el lector puede constatar en su libro⁶⁸, donde por *elemental* se entiende una geometría que no hace uso de nociones de teoría de conjuntos, en particular, no hace uso de cuantificadores existenciales.

Para el lector que ha llegado hasta aquí debe ser claro que un sistema axiomático donde una afirmación y su negación pueden ser demostrados es absolutamente inservible, de aquí la necesidad de contar con algún método para determinar si un sistema axiomático es consistente. El método usual para mostrar la consistencia se basa en la existencia de un *modelo* del sistema axiomático. Un modelo se obtiene encontrando interpretaciones de los términos sin definir, de tal forma que los axiomas se convierten en afirmaciones verdaderas con las interpretaciones. El ejemplo más conocido de interpretación de la geometría euclidiana es la geometría analítica, donde como recordará el lector, la noción indefinida de punto tiene la interpretación de par ordenado de números reales.

Un ejemplo simple de como puede construirse un modelo para mostrar la consistencia de un sistema axiomático lo estudiaremos para la geometría de cuatro puntos en la siguiente sección.

Axiomas de la geometría de cuatro puntos

En la geometría de cuatro puntos, cuya única finalidad es puramente didáctica, se tienen los términos indefinidos: punto, recta y “estar en”. Los axiomas son los siguientes:

Axioma 1. Existen cuatro puntos y solo cuatro puntos.

Axioma 2. Dos puntos distintos están en una y solo una recta.

Axioma 3. Toda recta está en exactamente dos puntos.

Consistencia. Un modelo de la geometría de cuatro puntos es mostrado en la Figura 221, donde los puntos se interpretan como las pequeñas circunferencias numeradas del uno al cuatro y las rectas, se interpretan como los segmentos que unen las circunferencias y la relación “estar en” se interpreta de manera que dos puntos distintos están en extremos de un segmento y un segmento está en dos puntos extremos exactamente. En este modelo los axiomas 1 a 3 son proposiciones verdaderas, por lo que el modelo implica que la geometría de cuatro

⁶⁷ **Nota.** Hay que recordar aquí que en la época moderna se han vuelto sinónimos las palabras “axioma” y “postulado”, lo que no era así en la época de Euclides.

⁶⁸ Alfred Tarski. *A decision method for elementary Algebra and Geometry*. Rand Corporation, 1948

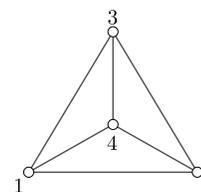


Figura 221: En la figura se muestra un modelo de la geometría de cuatro puntos.

puntos es consistente.

Independencia. La independencia de un axioma se muestra encontrando un modelo que incluya la negación de tal axioma. De tal forma que para demostrar que un sistema axiomático con n axiomas es independiente se deben construir n modelos donde cada modelo contiene la negación de uno de los axiomas del sistema.

Axioma 1'. Existen dos y solo dos puntos.

Un modelo válido se obtiene con el Axioma 1' y los Axiomas 2 y 3. El Axioma 1', como el lector puede constatar, es una negación del Axioma 1. El hecho de la existencia del modelo ilustrado en la Figura 222 muestra que el Axioma 1 es independiente de los Axiomas 2 y 3. La existencia de modelos de las negaciones de los axiomas 2 y 3 se dejan como ejercicio.

Nota. La larga historia de la demostración de que el quinto postulado de Euclides es independiente de los demás axiomas muestra que, en general, demostrar que un axioma o postulado es independiente de los demás no es nada trivial. El lector, después de haber estudiado el capítulo de geometría hiperbólica de este libro, debe saber además que no existe una verdad absoluta de ningún sistema axiomático.

Compleitud. Demostrar que un sistema es completo no es posible en general y el hecho de que exista la demostración de Tarski (*op. cit.*), de que la axiomática de la geometría elemental presentada por él sea completa, no carece de interés. El más famoso y trascendente resultado conocido en esta área del saber humano es el Teorema de Gödel⁶⁹ el cual afirma que cualquier sistema axiomático consistente que incluya los teoremas de teoría de números *no es completo*.

Para concluir este capítulo debemos informar al lector que *no hay resultado más incomprendido en la historia de las matemáticas que el teorema de Gödel*. De todas las cosas que *no demuestra* el famoso teorema debemos incluir:

1. El teorema de Gödel *no demuestra* que nunca seremos capaces de formular una teoría de la realidad física que sea final.
2. El teorema de Gödel *no demuestra* que los matemáticos no pueden capturar toda la verdad matemática en sus sistemas.
3. El teorema de Gödel *no demuestra* que las computadoras nunca podrán razonar como los humanos.
4. El teorema de Gödel *no está implícito* en el budismo Zen.

El lector interesado puede encontrar una discusión racional de estos y otros muchos temas relacionados con los teoremas de Gödel en el libro de Franzén⁷⁰. Por otra parte, una deliciosa introducción a los



Figura 222: Una negación del Axioma 1, consiste en afirmar que existen dos y solo dos puntos.

⁶⁹ Kurt Gödel. *Obras completas*. Alianza Editorial, 1981

⁷⁰ Torkel Franzén. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use And Abuse*. A. K. Peters, Ltd., 2005

teoremas de Gödel puede encontrarse el libro *Godel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* de Hofstadter y, finalmente, una introducción más directa a la demostración de los teoremas de Gödel puede estudiarse en el libro clásico *Godel's Proof* de Nagel y Newman.

Ejercicios de "Otras axiomáticas"

1. El siguiente axioma se conoce como el *Axioma de Pasch*. Una proposición equivalente fue demostrada dentro de la axiomática de Birkhoff en el capítulo dedicado a la geometría afín. Demuestre la equivalencia entre ambas proposiciones.

Axioma VII-TG. Si una recta interseca un triángulo en uno de sus lados y no pasa por ninguno de los vértices entonces interseca alguno de los otros dos lados.

2. Demuestre que el axioma 10₃ de Tarski, enunciado enseguida, es equivalente a que en todo triángulo la suma de los ángulos internos suma π .

Ax. 10₃ El segmento que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo mide la mitad de la longitud del tercer lado.

3. Del sistema de Hilbert demuestre, mediante los postulados de Birkhoff, los axiomas: Axioma H-O₁, Axioma H-O₁₂, Axioma H-O₃, H-C₁, H-C₂, H-C₃, H-C₄ y H-C₅.
4. Escriba los detalles de todas las demostraciones de los axiomas usados por Hilbert en forma tabular. ¿Por qué queda demostrado el axioma H-O₃? Justifique cuál técnica se usa, ya sea reducción al absurdo o contrapositiva en la demostración.
5. Demuestre que los axiomas 2 y 3 de la geometría de cuatro puntos son independientes y que, por lo tanto, el sistema axiomático de tal geometría es independiente por definición.
6. Demuestre que en la geometría de cuatro puntos existen seis y solo seis rectas.

Ax. 7-TG. $\text{Ent}(apc) \wedge \text{Ent}(bqc) \Rightarrow \exists x [\text{Ent}(bxp) \wedge \text{Ent}(qxa)]$.

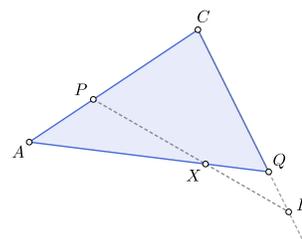


Figura 223: El Axioma VII de Tarski es una de las versiones del axioma de Pasch.

Solución de los problemas seleccionados

Axioma H-O1 [Orden I]. Si $A - B - C$, entonces A, B, C son tres puntos distintos que están en la misma recta y $C - B - A$.

Demostración. Dado que en la axiomática de Birkhoff, por definición $A - B - C$ si y solo si los números reales en correspondencia x_A, x_B y x_C satisfacen $x_A \leq x_B \leq x_C$ o $x_A \geq x_B \geq x_C$. La afirmación del Axioma H-O1 se sigue del Postulado I de Birkhoff. \square

Axioma H-O2 [Orden II]. Dados dos puntos B y D , existen puntos A, C, E sobre la recta BD , tales que $A - B - D, B - C - D$ y $B - D - E$

Demostración. Se sigue del Postulado I de Birkhoff dado que para cualquier número, digamos $x_B \in \mathbb{R}$ existe una cantidad infinita de números x con $x \leq x_B$. Se escoge cualquiera de ellos y se encuentra el punto en correspondencia con x y se le denota con A . Las demás partes se siguen de la misma forma. \square

Axioma H-O3 [Orden III]. Si A, B y C son tres puntos distintos que están sobre la misma recta, uno y solo uno de los puntos está entre los otros dos.

Demostración. Si, digamos, $A - B - C$ y $A - C - B$, entonces por definición $x_B \leq x_C$ y $x_C \leq x_B$, por lo tanto $x_B = x_C$. Por el Postulado I de Birkhoff $B = C$. \square

Axioma de congruencia H-C1. Si A y B son dos puntos distintos y si A' es cualquier punto, entonces para cada rayo r , con origen en A' , existe un único punto B' en r , tal que $B' \neq A'$ y $AB \cong A'B'$.

Demostración. Es inmediata del Postulado I de Birkhoff. \square

Axioma de congruencia H-C2. Si $AB \cong CD$ y $CD \cong EF$, entonces $CD \cong EF$. Además todo segmento es congruente consigo mismo.

Demostración. Partiendo de las hipótesis, por definición de congruencia en la axiomática de Birkhoff, tenemos $m(AB) = m(CD)$ y $m(CD) = m(EF)$ de donde, por la transitividad de la relación de igualdad en \mathbb{R} , se obtiene $m(CD) = m(EF)$ y por lo tanto $CD \cong EF$. \square

Axioma de congruencia H-C3. Si $A - B - C, A' - B' - C', AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, entonces $AC \cong A'C'$.

Demostración. Mediante el Postulado I de Birkhoff se tienen los números reales x_A, x_B, x_C y $x_{A'}, x_{B'}, x_{C'}$ tales que, por ejemplo, $x_A \leq x_B \leq x_C$ y $x_{A'} \leq x_{B'} \leq x_{C'}$. Además, por hipótesis $|x_A - x_B| = |x_{A'} - x_{B'}|$ y $|x_B - x_C| = |x_{B'} - x_{C'}|$. Por lo tanto, por las propiedades derivadas del Postulado I de Birkhoff

$$|x_A - x_C| = |x_A - x_B| + |x_B - x_C| = |x_{A'} - x_{B'}| + |x_{B'} - x_{C'}| = |x_{A'} - x_{C'}|,$$

de donde $AC \cong A'C'$. \square

Axioma de congruencia H-C4. Dado cualquier $\angle BAC$ y dado cualquier rayo $A'B'$, con origen en A' , existe un único rayo $A'C'$, con este lado sobre la recta $A'B'$, tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.

Demostración. Es inmediata del Postulado III de Birkhoff. \square

Axioma de congruencia H-C5. Si $\angle A \cong \angle B$ y $\angle A \cong \angle C$, entonces $\angle B \cong \angle C$. Además todo ángulo es congruente consigo mismo.

Demostración. Dadas las hipótesis tenemos por definición de congruencia que $m\angle A = m\angle B$ y $m\angle A = m\angle C$ y así por la transitividad de la igualdad en \mathbb{R} , se obtiene $m\angle B = m\angle C$ y por lo tanto, $\angle B \cong \angle C$. Es inmediato que todo ángulo es congruente consigo mismo ya que la igualdad en \mathbb{R} es reflexiva. \square

Apéndice: Campo, Espacio Vectorial

Preliminares de Números Reales

Como referencia se establecen las propiedades de campo de \mathbb{R} .

Propiedades de campo

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades

- i) $a + b = b + a$.
- ii) $ab = ba$.
- iii) $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- iv) $a(bc) = (ab)c$.
- v) $a(b + c) = ab + ac$.
- vi) Existe un elemento de \mathbb{R} denotado 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$ y un elemento de \mathbb{R} denotado 1 tal que $a1 = 1a = a$ para todo a en \mathbb{R} .
- vii) Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un elemento denotado por $-a$ tal que $a + (-a) = 0$. Para todo $a \neq 0$ en \mathbb{R} , existe un elemento denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a \left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

Axioma I [Orden en \mathbb{R}]. El conjunto de números reales \mathbb{R} contiene un subconjunto \mathbf{P} llamado *conjunto de números positivos* con las siguientes propiedades:

- i) Si a y $b \in \mathbf{P}$, entonces $a + b \in \mathbf{P}$ y $ab \in \mathbf{P}$.
- ii) Si $a \in \mathbb{R}$, entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta: $a \in \mathbf{P}$, o bien $-a \in \mathbf{P}$ o bien $a = 0$.

Con el conjunto \mathbf{P} se pueden definir los signos $>$, $<$, \leq , etcétera. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a > b$ significa que $a - b \in \mathbf{P}$; $a < b$ significa que $b > a$; $a \geq b$ significa que $a > b$ o bien que $a = b$.

Teorema [Propiedades de ordenamiento en \mathbb{R}]. Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Con las propiedades de orden podemos definir los intervalos de números reales como sigue.

Definición [Intervalos en \mathbb{R}]. Se definen los siguientes conjuntos de números, llamados *intervalos* de la manera siguiente:

- a) el intervalo abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- b) el intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
- c) los intervalos semiabiertos $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ y $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
- d) los intervalos semiinfinitos $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, $[-a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ y $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

Ejemplo. Sean $I_1 = (-1, 1)$, $I_2 = [-2, 3]$, $I_3 = (0, 5)$ intervalos de números reales. Encuentre los conjuntos $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cup I_2$, $I_2 \setminus I_3$.

Solución. Tenemos que $I_1 \cap I_2 = (-1, 1) \cap [-2, 3] = (-1, 1)$. Por otra parte $I_1 \cup I_2 = (-1, 1) \cup [-2, 3] = [-2, 3]$ (¿por qué?). Finalmente $I_2 \setminus I_3 = [-2, 3] \setminus (0, 5) = [-2, 0]$, compruébelo.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número real es utilizado extensamente a lo largo del libro con lo visto en este apéndice hasta ahora se puede definirlo formalmente.

Definición [Valor absoluto]. El *valor absoluto* $|a|$ de un número real a se define mediante las relaciones

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \quad (187)$$

Lema [Propiedades del valor absoluto]. Para todo número real a se cumple que $|a| = \sqrt{a^2}$.

Demostración. Sea a un número real cualquiera entonces $a^2 \geq 0$, así $\sqrt{a^2} \geq 0$. Así, si $a \geq 0$, $|a| = a = \sqrt{a^2} \geq 0$. Si $a < 0$, entonces como $\sqrt{a^2} \geq 0$ se tiene $\sqrt{a^2} = -a = |a|$. \square

Espacio Vectorial

Propiedades del espacio vectorial \mathbb{R}^2 . El conjunto \mathbb{R}^2 junto con la suma y el producto por un número real satisface las propiedades siguientes:

Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ y $r, s \in \mathbb{R}$.

- i) $u + v = v + u$.
- ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$.
- iii) Existe un elemento denotado por $\mathbf{0}$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^2$ se tiene $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u$.
- iv) Para todo $u \in \mathbb{R}^2$ existe un elemento denotado por $-u$ tal que $u + (-u) = \mathbf{0}$.
- v) $(r + s)u = ru + su$.
- vi) $r(u + v) = ru + rv$.
- vii) $(rs)u = r(su)$.
- viii) $1u = u$, donde $1 \in \mathbb{R}$ es el elemento neutro de \mathbb{R} .

Espacios vectoriales generales. Dado un conjunto V arbitrario y un campo \mathbb{K} donde se han definido las operaciones $+: V \times V \rightarrow V$ y $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, las cuales satisfacen las propiedades i) a viii) anteriores para todo $u, v, w \in V$ y todo $r, s \in \mathbb{K}$, la cuarteta $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ se denomina *espacio vectorial* V sobre el campo \mathbb{K} . Sin embargo, para un primer acercamiento no se requiere llegar al concepto más abstracto de espacio vectorial.

Bibliografía

Francine Abeles. *The affine Theorems of Pasch, Menelaus and Ceva*. Mathematics Magazine Vol. 45, No. 2 (Mar., 1972), pp. 78-82 Published By: Taylor & Francis, Ltd., 1972.

Lars V. Ahlfors. *Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Dover Publications, Inc. New York, 1966.

George B. Birkhoff. *A set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protactor*. Annals of Mathematics, Second Series. Vol. 33, No. 2 (Apr. 1932), pp. 329-345.

Benjamin Bold. *Famous problems in Geometry and how to solve them*. Dover Publications, Inc. New York, 1969.

Euclides con traducción de J. D. García Bacca. *Elementos de Geometría*. Universidad Nacional Autónoma de México, 1992.

Harold S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., 1969.

Harold S. M. Coxeter. *Projective Geometry, second edition*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1987.

Harold S. M. Coxeter. *Non-Euclidean Geometry, sixth edition*. The Mathematical Association of America, 1998.

Robert L. Devaney. *Unveiling the Mandelbrot set*. Plus Magazine, Cambridge University, September 1, 2006.

Torkel Franzén. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use And Abuse*. A. K. Peters, Ltd., 2005.

Gabriel López Garza. *Geometría Analítica a través de problemas, actividades y uso de TIC*. Textos CBI, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, 2021.

Kurt Gödel. *Obras completas*. Alianza Editorial, 1981.

- Marvin J. Greenberg. *Euclidean and non-Euclidean Geometries Development and History*. W. H. Freeman and Company, 1993.
- Julian Havil. *The irrationals. A Story of the Numbers You Can't Count On*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2012.
- David Hilbert. *Foundations of Geometry*. Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1971.
- Felix Klein. *Elementary Mathematics from an advanced standpoint Geometry*. Dover Publications Inc, 2004.
- Alekséi Markushevich. *Teoría de las funciones analíticas*. Editorial MIR Moscú, 1970.
- Edwin E. Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Addison-Wesley, 1974.
- Ivan Niven. *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America, 1956.
- Michel Serra. *Discovering Geometry, An Investigative Approach*. Key Curriculum Press, 2008.
- Michel Spivak. *Calculus*. Reverte, 2018.
- Alfred Tarski. *A decision method for elementary Algebra and Geometry*. Rand Corporation, 1948.
- Ivor Thomas. *Greek Mathematical Works*. Loeb Classical Works.
- George Wentworth y David Smith. *Geometría Plana y del espacio*. Editorial Porrúa, 1984.
- Kenneth Hoffman y Ray Kunze. *Linear Algebra*. Pearson, 2015.
- Alfred Tarski y Steven Givant. *Tarski's System of Geometry*. The Bulletin of Symbolic Logic, Jun., 1999, Vol. 5, No. 2 (jun., 1999), pp. 175-214.
- Cynthia Young. *Trigonometry*. Hoboken, N. J.: Wiley, 2007.

Índice alfabético

- ángulo, 22
- ángulo rectilíneo, 44
- ángulo recto, 44
- ángulos adyacentes, 44
- ángulos alternos internos, 25
- ángulos colaterales internos, 25
- ángulos complementarios, 44
- ángulos en transversales, 25
- ángulos suplementarios, 44
- ángulos remotos, 55
- órbita, 169

- aplicaciones para series de Fourier, 148
- Argumento de un número complejo, 171
- Axioma de continuidad de Dedekind, 231
- Axioma de paralelismo, 232
- Axioma de Pasch, 236
- Axioma I [Orden en \mathbb{R}], 141
- Axiomas de Hilbert de incidencia, 232
- Axiomas de Hilbert de Orden, 230
- Axiomas de Hilbert de congruencia, 231

- baricentro, 89
- base de un triángulo isósceles, 90
- bicondicional, 25
- bisector perpendicular, 48
- bisectriz, 89

- círculo, 75
- Cálculo de funciones trigonométricas, 121
- Campo, 136
- cardioide, 124
- centro de la circunferencia, 75
- centro de perspectiva, 209
- circularidad, 23

- circuncentro, 90
- circunferencia, 75
- circunferencia sin puntos racionales, 101
- circunferencia unitaria, 96
- combinación convexa, 203
- conceptos primitivos, 23
- conjetura, 27
- conjetura LAL, 28
- conjugado complejo, 137
- conjugado complejo, propiedades, 141, 174
- conjunto de Mandelbrot, 170
- conjuntos congruentes, 200
- constante de proporcionalidad, 45
- construcción de perpendicular, 30
- contraejemplo, 24
- Coordenadas baricéntricas, 203
- coordenadas baricéntricas, 203
- coordenadas polares, 122
- Coordenadas rectangulares, 94
- Corolario I [Paralelismo es relación transitiva], 52
- Corolario I-C [Ángulo inscrito en una semicircunferencia], 78
- Corolario I.1-T [Cofunciones], 110
- Corolario I.2-T [Coseno de suma de ángulos], 110
- Corolario I.3-T [Seno de suma de ángulos], 110
- Corolario I.4-T [Tangente de diferencia de ángulos], 111
- Corolario I.5-T [Ángulo doble], 111
- Corolario I.6-T [Reducción de potencias], 111
- Corolario I.7-T [Fórmulas del ángulo mitad], 111
- Corolario I.8-T [Fórmulas producto \rightarrow suma], 112

- Corolario I.9-T [Fórmulas suma \rightarrow producto], 112
- Corolario II [Postulado V de Euclides], 54
- Corolario III [Ángulos exteriores mayores que ángulos remotos], 55
- Corolario IV [Proporcionalidad], 60
- correspondencia biunívoca, 28
- correspondencia entre triángulos, 28
- coseno, 105
- coseno de suma de ángulos, 110
- cuerda, 75

- Definición [Consistencia, independencia y completitud de sistemas axiomáticos], 232
- Definición [Lados determinados por una recta], 230
- Definición [Triángulo], 43
- definición de rectas en \mathbb{R}^2 , 97
- demonstración tabular 1, 27
- desigualdad del triángulo, 142
- diámetro, 75
- dilatación, 213
- distancia entre puntos, 42

- ecuación afín, 217
- ecuación ciclotómica, 147
- eje de las abscisas, 94
- eje de las ordenadas, 94
- eje de perspectiva, 209
- eje polar, 122
- el número i , 136
- equiángulo, 58
- equidistar, 48
- Equivalencias lógicas en español, 24
- equivalentes lógicas, 24
- espacio vectorial, 206
- Estar entre puntos, 42, 65

- exponente general, 173
 extremos de un segmento, 22
- fórmula de De Moivre, 138
 fórmula de De Moivre para exponentes negativos, 143
 fórmula de Euler, 149
 fórmula para la distancia entre dos puntos, 95
 fórmulas de Taylor, 121
 forma tabular, 28
 fractales, 168
 Funciones inversas de seno y coseno, 118
- grupo, 175
 grupo afín, 219
- homotecia, 155
 hueco o gap en la argumentación, 97
- imagen de círculos o rectas bajo inversión, 162
 imagen de círculos o rectas bajo racionales lineales, 162
 impar, función, 107
 implicación lógica, 23
 incentro, 90
 intervalos en \mathbb{R} , definición], 240
 inversa de función fraccional lineal, 158
 inversa de la tangente, 120
 inversa de una transformación afín, 216
 inversión, 157
 irracionales elementales, 100
 isometría, 198
- Lema [Inexistencia de rectángulos], 190
 Lema I [Par lineal], 52
 Lema I-T [Tangente al cuadrado], 108
 Lema II-T [Coseno de diferencia de ángulos], 109
 Ley de senos, 114
 Ley de cosenos, 117
 Ley de senos, 115
 logaritmo de números complejos, 170
 logaritmo de potencia de números complejos, 172
 logaritmo de producto de números complejos, 172
- método de exhaustión, 103
 módulo complejo, propiedades, 141, 174
 mayor que, 141
 mediana de un triángulo, 89, 92
 mediatriz, 48
 medida de un segmento hiperbólico, 183
 modelo de un sistema axiomático, 233
- orden en \mathbb{R} , 141
 origen de coordenadas, 94
 ortocentro, 90
- par lineal, 44
 par, función, 107
 parte imaginaria, 139
 parte lineal de una transformación afín, 215
 parte real, 139
 periodo, 107
 perspectiva, 209
 pie de la perpendicular, 85
 plano \mathcal{A} , 207
 polo, 122
 Postulado hiperbólico, 190
 Postulado I [Rectas en correspondencia con \mathbb{R}], 42
 Postulado II [Dos puntos definen una recta], 43
 Postulado III [Ángulos en correspondencia con \mathbb{R}], 43
 Postulado IV [LAL], 45
 Postulado V [Ángulo rectilíneo], 46
 postulados, 26
 producto cartesiano, 95
 producto por un escalar en el plano \mathcal{A} , 205
- propiedades básicas de medidas de ángulos, 44
 propiedades de las funciones hiperbólicas, 153
 Propiedades de las funciones trascendentes en \mathbb{C} , 152
 propiedades del valor absoluto, 240
 Proporciones con signo, 201
 Proposición [Área independiente de la base], 59
 Proposición [ALA], 58
- Proposición [Grupo afín], 220
 Proposición [Hipotenusa-cateto], 59
 Proposición [Resolución de triángulos rectángulos], 113
 punto fijo, 157
 punto medio, 47
 punto racional, 101
 puntos, 21
- raíces enésimas de la unidad, 144
 raíz n-ésima, 143
 radianes, 105
 radio, 75
 razón doble, 166
 Recíproco del Teorema de Desargues, 210
 rectas, 22
 rectas paralelas, 43
 rectas paralelas, símbolo, 43
 rectas perpendiculares, 48
 red rectangular, 93
 resolución de triángulos, 112
 resolución triángulos rectángulos, 113
 rotación en el plano \mathcal{A} , 212
- secante, 75
 segmentos, 22
 seno, 105
 seno de suma de ángulos, 110
 si y solo si, 24
 sistema axiomático completo, 232
 sistema axiomático consistente, 232
 sistema axiomático independiente, 232
 sistema de paralelas, 93
 sistema orientado, 94
 suma de vectores en el plano \mathcal{A} , 205
 suma y producto en \mathbb{C} , 135
- términos equivalentes, 24
 tangente, 105
 tangente a una circunferencia, 75
 Tangente de diferencia de ángulos, 111
 Teorema [Ceva sin signo], 86
 Teorema [Conservación de razones bajo transformaciones afines], 216
 Teorema [Dilataciones son afines], 214
 Teorema [Independencia del origen de las ecuaciones afines], 217
 Teorema [Inexistencia de rectángulos en geometría hiperbólica], 188
 Teorema [Intersección de las medianas

- de un triángulo], 223
- Teorema [Invarianza de la razón doble bajo racionales lineales], 167
- Teorema [Menelao en geometría afín], 207
- Teorema [Menelao sin signo], 85
- Teorema [Suma de ángulos de triángulos hiperbólicos], 187
- Teorema [Todos los triángulos son \mathcal{A} -congruentes], 221
- Teorema [Transformaciones afines determinadas por lineales], 215
- Teorema [Traslaciones son afines], 213
- Teorema de Pasch, 211
- Teorema Euclides I.1, 61
- Teorema Euclides I.2., 62
- Teorema Euclides I.3., 62
- Teorema Euclides I.4, 62
- Teorema Euclides I.4., 71
- Teorema Euclides I.5., 62, 71
- Teorema fundamental del álgebra, 147
- Teorema HC para triángulos rectángulos, 59
- Teorema I [AA], 46
- Teorema I-C [Tangentes son perpendiculares al radio], 75
- Teorema I-GH, 190
- Teorema II [Tales], 46
- Teorema II-C [Tangentes concurrentes son congruentes], 76
- Teorema III [LLL], 46
- Teorema III-C [Ángulo inscrito es mitad del ángulo central], 76
- Teorema IV [Suma de ángulos internos], 47
- Teorema IX [Medida del ángulo exterior], 52
- Teorema LA para triángulos rectángulos, 59
- Teorema V [Bisector perpendicular], 48
- Teorema VI [Perpendicular por un punto], 49
- Teorema VII [Pitágoras], 49
- Teorema VII' [Recíproco del teorema de Pitágoras], 50
- Teorema VIII [Paralelas], 51
- Teorema X [Alternos internos congruentes implica paralelismo], 53
- Teorema XI [Desigualdad del triángulo], 56
- Teorema XII [Existencia de rectángulos], 60
- Ternas pitagóricas, 31
- transformación de Möbius, 158
- transformación homográfica, 168
- transformación identidad, 199
- transformación lineal, 214
- transformaciones afines, 212
- transformaciones conformes, 186
- transversales, 25
- triángulos congruentes, 45
- triángulos oblicuos, 114
- triángulos semejantes, 45
- valor absoluto, 240
- valor principal del logaritmo, 171
- vector de posición, 205
- vectores en el plano \mathcal{A} , 204
- vectores paralelos, 206