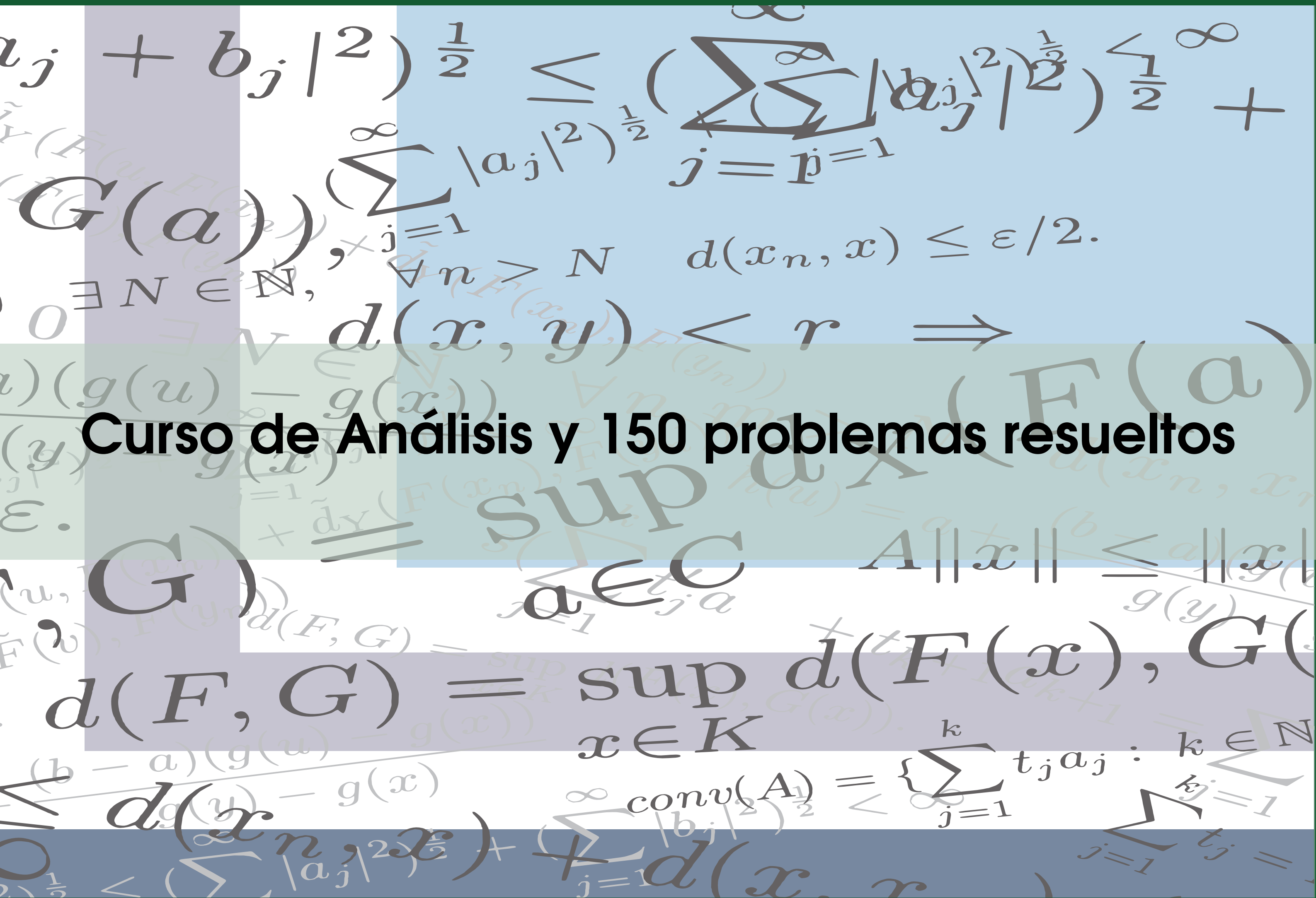
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa
Casa abierta al tiempo

Colección CBI

Libro de texto



Curso de Análisis y 150 problemas resueltos

Antoni Wawrzyñczyk Wilkiewicz

Curso de Análisis y 150 problemas resueltos

Antoni Wawrzyñczyk Wilkiewicz

Libro de texto

Curso de Análisis y 150 problemas resueltos
Primera edición: 2022

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C. P. 09340, CDMX, México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-2644-1

Impreso en México / Printed in Mexico

Introducción

La presente obra es un libro de texto, el cual está dirigido a los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas. Por lo cual su propósito es ayudar a los estudiantes de matemáticas a introducirse al estudio del análisis matemático que indudablemente es una de las áreas más importantes de esta ciencia.

A pesar de que existen muchos libros de texto sobre este tema en todos los idiomas del mundo, considero que es necesario escribir este material, pues creo que cada universidad debe elaborar libros de texto y problemarios adecuados a sus programas de estudios, tomando en cuenta las características de los estudiantes que ingresan a sus programas de estudio.

Es necesario tener ciertos años de experiencia para conocer las dificultades que afrontan nuestros estudiantes y los tipos de "trampas", en las cuales suelen caer en los primeros años de sus estudios.

Por lo tanto aunque se mostrara la teoría de forma clara, lógica y consistente, no lo haría un texto satisfactorio. El siguiente requisito por cumplir sería que incluyera una selección cuidadosa de ejemplos, contraejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios para resolver.

Muchos estudiantes creen que el conocimiento de las definiciones y de los teoremas es suficiente para aprobar el curso. Sin embargo es muy importante convencerlos que los teoremas que tienen que aprender no son una molestia más, sino una bendición que les permite aprovechar los conceptos introducidos para resolver problemas cada vez más concretos.

La conexión entre los conceptos introducidos y los teoremas se entiende mejor estudiando las demostraciones de los teoremas. Durante las clases debe hacerse hincapié de que las demostraciones son la mejor forma de entender para qué sirven los teoremas.

Resumiendo: el propósito de este texto es didáctico. Por lo que solo el lector podrá opinar si dicho propósito fue logrado.

En los cursos de cálculo se han estudiado los conceptos de conjunto abierto, cerrado, compacto, conexo como propiedades de subconjuntos del espacio euclidiano. Por lo tanto, las funciones y aplicaciones continuas que aparecen en estos cursos están definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y toman valores en $\mathbb{R}^k$.

El paso principal que se hace en el curso de Análisis I consiste en la introducción y manejo de los conceptos topológicos en espacios mucho más generales que $\mathbb{R}^n$, a saber, en los espacios métricos.

En particular el estudiante verá que las funciones y aplicaciones forman espacios en los cuales se puede introducir el concepto de distancia y por medio de ésta se pueden extender a dichos espacios las nociones de convergencia de sucesiones, de conjuntos abiertos y cerrados y otros conceptos conocidos de la geometría del espacio euclidiano, como lo son la compacidad o conexidad.

En el último capítulo se presentan las soluciones a los ejercicios y problemas propuestos en los capítulos anteriores. Con el simbolo ⧫ están marcados los problemas resueltos rigurosamente con todos los detalles. En caso de los demás ejercicios y problemas se presentan extensas sugerencias dejando al lector la tarea de efectuar los cálculos y completar las soluciones.

El manuscrito de este libro fue escrito originalmente en el idioma que se podría llamar "la lengua mexicana con fuerte acento polaco“. Estoy muy agradecido al Dr. Javier Carmona Lomelí quién se encargo de la tarea de traducir el producto al idioma castellano.

Índice general

1

Espacios Métricos

Muchos de los conceptos que forman parte de la rama de las matemáticas llamada topología surgieron como el resultado de tomar una propiedad importante de un espacio euclideano o de alguna clase de subconjumtos de este espacio y así considerar los espacios abstractos que poseen dicha propiedad. Dentro del desarrollo de este texto vamos a ver diversos ejemplos del funcionamiento de dicho esquema. Un primer ejemplo de esto es la introducción de los espacios métricos.

Consideremos un espacio euclidiano, en particular en el plano identificado con $\mathbb{R}^2$, en el cual se tiene definida la función distancia, cuya propiedad fundamental es la desigualdad del triángulo y esta constituye una de las leyes más importantes a la cual estamos sujetos en la vida real.

Así pues pensemos en todos los espacios a los cuales podemos dotarlos de una función distancia que satisfaga la desigualdad del triángulo, además de otras propiedades obvias de la distancia euclideana y a partir de ello observemos que objetos podemos definir y que otras propiedades se pueden deducir partiendo unicamente de estos datos.

A los espacios dotados de una función distancia, los llamaremos espacios métricos. La definición de un espacio métrico apareció por primera vez en la tesis doctoral escrita por el matemático frances M. Fréchet en el año 1906.

1.1. Definiciones básicas

A continuación se da la definicón formal de un Espacio Métrico.

Definición 1.1 *Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto no vacío y d es una función real definida sobre el producto cartesiano $X \times X$ y que satisface las siguientes condiciones:*

1° $d(x, y) \geq 0$,
2° $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$,
3° $d(x, y) = d(y, x)$,
4° *si* $x, y, z \in X$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

A la función d, la llamaremos métrica del espacio X.

Las propiedades anteriores son naturales si interpretamos a la afirmación $d(x, y) = c$ como "el punto x se encuentra a una distancia c del punto y". Por lo cual al valor $d(x, y)$ lo llamaremos la distancia entre x y y. Dicha función distancia no puede ser negativa (inciso 1°), es nula solo si nos quedamos en el mismo lugar (inciso 2°), es simétrica (inciso 3°) y satisface la desigualdad del triángulo (inciso 4°).
Para reconstruir las propiedades de la distancia en cualquier espacio basta con pensar en la relación entre los lados de un triángulo con vertices x, y, z en el plano euclidinao.

La siguiente proposición nos presenta una forma equivalente de reescribir la desigualdad del triángulo.

Proposición 1.2 *Para todos* x, y, $z \in X$

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(z, y).$$

Podríamos pensar que es sólo otra fórmula para sobrecargar la memoria, pero no lo es, si nuevamente pensamos en el mismo triángulo de vértices x, y, z.

Demostración. La desigualdad $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ implica que

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y).$$

Además, por la definición 1.1 tenemos que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y),$$

de donde $d(x, z) - d(x, y) \leq d(z, y)$ y así se obtiene el resultado deseado. ■

A la siguiente proposición se le conoce como la desigualdad del cuadrángulo.

Proposición 1.3 *Para* x, y, u, $v \in X$ *arbitrarios*

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v).$$

Demostración. Sugerencia: Antes de empezar la demostración dibuja un rectángulo con vértices x, y, u, v. Posteriormente aplica dos veces la desigualdad del triangulo para obtener

$$d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y) \leq d(x,u) + d(u,v) + d(y,v),$$

de donde

$$d(x,y) - d(u,v) \leq d(x,u) + d(y,v).$$

Luego intercambia los papeles de las parejas (x,y) y (u,v) y utiliza la propiedad de simetría para obtener $d(u,v) - d(x,y) \leq d(x,u) + d(y,v)$. Y de ahí concluir lo deseado.

$\blacksquare$

Definición 1.4 *Sean* (X,d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $r > 0$*. Al conjunto* $B(x,r) = \{u \in X : d(x,u) < r\}$ *lo llamaremos* la bola de radio r centrada en x.

Diremos que un conjunto $A \subset X$ es *acotado* si existe una bola $B(x,r)$ que lo contenga.

Como se ha mencionado anteriormente el concepto de espacio métrico es una generalización de los espacios euclideanos, así pues un primer ejemplo de un espacio métrico es un espacio euclideano como vemos a continuación.

Ejemplo 1.5 ESPACIO EUCLIDIANO. *En el espacio* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ *definimos la métrica por la fórmula*

$$d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

y al espacio $\mathbb{C}^n$ *con la métrica*

$$d((z_1,\ldots,z_n),(w_1,\ldots,w_n)) = \left(\sum_{j=1}^{n}(z_j - w_j)\overline{((z_j - w_j)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estos espacios son de los objetos principales de estudio de los cursos de Cálculo, en los cuales se han demostrado las propiedades de sus correspondientes métricas.
Cabe mencionar que los espacios euclidianos son el caso más sencillo de los espacios normados, los cuales serán estudiados en la siguiente sección.

$\diamondsuit$

Los siguientes ejemplos de espacios métricos son dotados de una estructura más "exotica".

Ejemplo 1.6 MÉTRICA DISCRETA. *Sea* X *un conjunto arbitrario. Para* x, $y \in X$ *se define la métrica*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y, \\ 1, \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

Es claro que las propiedades 1° - 3° *de la métrica se satisfacen. Ahora si* $x = y$ *se tiene que* $0 = d(x,y) \leq d(x,u)+d(u,y)$ *para toda* $u \in X$ *y así se satisface la desigualdad del triángulo pues* $d(x,u), d(u,y) \geq 0$*. Para el caso en que* $x \neq y$ *y* $u = x$ *ó* $u = y$ *la desigualdad del triangulo toma la forma* $1 \leq 1$*. Si los tres puntos son distintos la desigualdad de triangulo afirma que* $1 \leq 1+1$*. Es decir, en cualquier caso se cumple que*

$$d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y).$$

Notemos que en un espacio discreto la bola $B(x,r)$ *consta de un solo punto* $\{x\}$ *cuando* $r \leq 1$ *y es todo el espacio* X *cuando* $r > 1$*.*

El espacio de la métrica discreta es fácil de visualizar cuando contiene muy pocos elementos. Por ejemplo cuando $X = \{x,y\}$ *podemos pensar en dos puntos en la recta que se encuentran a la distancia 1. Si* $X = \{x,y,z\}$*, el triangulo equilátero en el plano describe bién la estructura de dicho espacio. Cuando* X *contiene 4 elementos, podemos pensar en una pirámide eqiláteral en el espacio* $\mathbb{R}^3$*. Si el espacio discreto consta de 5 elementos queda fuera de nuestra imaginación. Sin embargo, sí podemos construir un conjunto de 5 puntos en el espacio* $\mathbb{R}^4$ *tal que la distancia entre cada par de puntos sea 1.*

¡Se deja al lector como un ejercicio de geometría euclidiana!

$\diamondsuit$

El ejemplo anterior demuestra que en los espacios métricos generales aparecen fenómenos que no se observan en el espacio euclidiano. Otros fenómenos de este tipo se pueden ver en el siguiente ejercicio.

Ejemplo 1.7 MÉTRICA "SOCIAL". *Esta métrica se define en un conjunto de personas que actualmente viven en nuestro mundo.*

Sean A*,* B *dos personas. Si* $A = B$*, es decir, si se trata de la misma se define* $d(A,B) = 0$*. Si existe un conjunto de personas* $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ *tal que* P_j *y* P_{j+1} *se conocen,* $1 \leq j \leq n-1$*, diremos que* $\mathcal{P}$ *es una cadena de conocidos de longitud* n*. Para personas distintas* A*,* B*, se define a la distancia* $d(A,B)$ *como la longitud de la cadena mas corta tal que* $P_1 = A$ *y* $P_n = B$*. Es claro que el dominio de esta función no está bién determinado, pues la distancia entre Tú y el miembro de algúna tribu perdido en la selva no se puede calcular.*

$\diamondsuit$

Observemos que la bola unitria contiene únicamente un elemento, su centro, como en el espacio discreto. La bola de radio 2 contiene a la misma persona y sus conocidos directos. Es interesante que dicha métrica no alcanza valores muy grandes. Por ejemplo, intenta calcular la distancia entre tu persona y el Presidente de México, el Papa ó cantante más famoso de la actualidad.

Ejemplo 1.8 MÉTRICA DE CAMINO MÁS CORTO

Este caso se trata de una amplia clase de métricas en distintos conjuntos. Por ejemplo, si X es una esfera la distancia entre dos puntos de la esfera se puede definir como la longitud del arco más corto que une a estos puntos. Por otro lado un automovilista mide la distancia entre dos punto de la superficie terrestre como la mas pequeña de longitudes de las carreteras que unen a estos puntos. El espacio X en este caso es el conjunto de puntos sobre las carreteras que llegan al lugar, donde se encuentra el automovilista. De forma semejante, para un turista en una ciudad, la distancia "vuelo de pajaro" es irrelevante. La longitud del recorrido por las calles ó y senderos es lo que realmente define la distancia por recorrer.

$\diamondsuit$

Los Ejercicios 4 y 5 de este Capítulo nos proporcionan ejemplos de este tipo, los cuales estan formulados de forma analítica.

Ejemplo 1.9 *¿Es posible que exista algún espacio métrico cuya una bola de radio 2 contenga a una bola de radio 3? La respuesta es: ¡sí!*

Sea $X = \{-\frac{3}{2}, -1, 0, 1, \frac{3}{2}\}$. En este espacio con su métrica natural $d(x, y) = |x - y|$ tenemos $B(0, 2) = X$ y $B(\frac{3}{2}, 3) = X \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Sin embargo, se puede demostrar que en ningún espacio métrico se puede lograr que $B(x, 2r) \subsetneq B(y, r)$ (Vea el ejercicio 10 de este capítulo y en caso necesario la sugerencia en Capítulo 11).

$\diamondsuit$

Ahora podemos pasar a los ejemplos que serán fundamentales en el material de estudio de este texto. Como hemos advertido en la introducción, una de las novedades más importante que debe asimilar el estudiante de este curso es el hecho de que un objeto tan complicado como una aplicación puede verse como un solo punto en un espacio, en nuestro caso particular en un espacio métrico adecuado.

En algunos problemas tendremos que tratar al mismo tiempo con varios espacios métricos y por consiguiente con varias métricas. En dichos casos lo más adecuado será denotar a la métrica en el espacio X como d_X. Solo en algunos casos, cuando en lugar de X aparezca un espacio con notación demasiado complicada (por ejemplo cuando $X = L^2(M, d\mu)$), vamos a buscar otra forma de denotarla.

En el siguiente ejemplo se define una métrica en un espacio en el cual sus elementos son aplicaciones.

Ejemplo 1.10 Métrica de la convergencia uniforme

Sea C un conjunto cualquiera y (X, d_X) un espacio métrico. Decimos que una aplicación $F\colon C \to X$ es acotada si $F(C)$ es un conjunto acotado en X. Denotamos por $B(C, X)$ al espacio de todas las aplicaciones acotadas entre C y X. En este espacio introducimos la siguiente métrica:

$$d_\infty(F, G) = \sup_{a \in C} d_X(F(a), G(a)),$$

para F, $G \in B(C, X)$. Esta métrica tiene una importancia especial en el análisis matemático. Dicha métrica lleva el nombre de métrica de la convergencia uniforme*, pues en el caso de que $C \subset \mathbb{R}^n$ y $X \subset \mathbb{R}$ la convergencia de sucesiones correspondiente a esta métrica coincide con la convergencia uniforme de funciones que conocemos del curso de cálculo.*

Verifiquemos que la función d_∞ es efectivamente una métrica en $B(C, X)$. Observemos que las propiedades de la positividad y de la simetría son obvias. Si $d_\infty(F, G) = 0$, se sigue $d_X(F(a), G(a)) = 0$, de donde $F(a) = G(a)$ para todo $a \in C$. Entonces $F = G$.

Sea $H \in B(C, X)$. Para todo $a \in C$ se cumple que

$$d_X(F(a), G(a)) \leq d_X(F(a), H(a)) + d_X(H(a), G(a))$$

y por la definición de d_∞

$$d_X(F(a), H(a)) + d_X(H(a), G(a)) \leq d_\infty(F, H) + d_\infty(H, G),$$

entonces

$$d_X(F(a), G(a)) \leq d_\infty(F, H) + d_\infty(H, G).$$

Tomando el supremo del lado izquierdo obtenemos la desigualdad del triángulo para la función d_∞.

$\diamondsuit$

Decimos que la métrica d_X en el espacio X es acotada si existe $c > 0$ talque $d_X(x, y) \leq c$ para todo $x,\ y \in X$, así la métrica d_∞ está bién definida en el espacio C^X de todas las aplicaciones $F\colon C \to X$.

El Ejercicio 11 nos proporciona información muy importante (su solución la podemos ver en el Capítulo 11). Para cualquier espacio métrico $(X.d)$, la función definida por

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es una métrica en X. La métrica δ es acotada (cuya cota es $c = 1$), por lo tanto, para cualquier conjunto C podemos definir la métrica δ_∞ de la convergencia uniforme.

Los espacios cuyos elementos son sucesiones nos proporcionan una gran cantidad de ejemplos de espacios métricos. Por lo cual vamos a definir los espacios más importantes de esta clase y a introducir la notación adecuada para los mismos.

Definición 1.11 *Definimos como una* sucesión en un espacio X *a una aplicación que va del dominio* $\mathbb{N}$ *y con valores en* X.

De acuerdo con la notación general una sucesión $\mathfrak{a}$ se debe denotar como $\mathbb{N} \ni n \to a(n) \in X$, sin embargo por tradición la denotamos por (a_n).

Las sucesiones que toman solo los valores 0 y 1 forman un conjunto de la misma cardinalidad que el eje real. Lo sabe hasta la más simple calculadora. El espacio de todas las sucesiones valuadas en X se denota por $X^{\mathbb{N}}$ aunque en algunos casos, por ejemplo cuando $X = \mathbb{R}$ se usa la notación $\mathbb{R}^\infty$.

Si E es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, en $E^{\mathbb{N}}$ tenemos la estructura vectorial natural. Para $\mathfrak{a} = (a_n)$, $\mathfrak{b} = (b_n) \in E^{\mathbb{N}}$ y $t \in \mathbb{K}$ se define la combinación lineal como

$$\mathfrak{a} + t\mathfrak{b} = (a_n + tb_n).$$

Si además el espacio E es también un álgebra definimos la estructura del álgebra en $E^{\mathbb{N}}$ como:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (a_n b_n).$$

Los espacios $\mathbb{R}^k$ se sumergen en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por medio de aplicaciones que conservan la estructura vectorial de los mismos. Vamos a usar estas aplicaciones en algunas ocasiones, entonces conviene introducir la notación correspondiente.

Para $(a_1, \ldots, a_k) \in E^k = E \times \cdots \times E$ sea

$$\sigma_k(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0 \ldots).$$

En cambio, el espacio $E^{\mathbb{N}}$ se proyecta sobre E^k por medio de la aplicación

$$\pi_k(\mathfrak{a}) = (a_1, \ldots, a_k).$$

Ejemplo 1.12 SUCESIONES ACOTADAS

Las sucesiones acotadas son un caso particular de aplicaciones acotadas que hemos estudiado en el Ejemplo 1.10, entonces solo introduciremos aquí su notación.

El espacio de todas las sucesiones acotadas en X se denota por $l^\infty(X)$. Únicamente en el caso que $X = \mathbb{R}$ en lugar de escribir $l^\infty(\mathbb{R})$ escribimos simplemente l^∞. Para el espacio $l^\infty(X)$ se usa la métrica de convergencia uniforme definida anteriormente:

$$d_\infty(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} d_X(a_n, b_n).$$

para $\mathfrak{a} = (a_n)$, $\mathfrak{b} = (b_n) \in l^\infty(X)$.

1.2. Espacios normados

Los espacios normados ocupan un lugar intermedio entre los espacios euclidianos y los espacios métricos generales. Además, estos espacios conservan algunas propiedades de $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$ y al mismo tiempo nos proporcionan ejemplos de fenómenos nuevos que ocurren en los espacios métricos más generales.

Definición 1.13 *Un* espacio normado *E es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ (usualmente denotamos por $\mathbb{K}$ al campo) dotado de una función $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{K}$ llamada* norma *que satisface las siguientes propiedades:*

1° $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in E$,
2° $\|x\| = 0$ *implica* $x = 0$,
3° $\|ax\| = |a|\|x\|$ *para* $x \in E$, $a \in \mathbb{K}$,
4° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para* x, $y \in E$.

Observese que cada espacio normado admite una métrica de manera natural.

Proposición 1.14 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $d(x,y) := \|x - y\|$. Entonces el espacio (E, d) es un espacio métrico.*

Demostración. Las propiedades 1°, 2°, 3° de la norma implican exactamente las propiedades 1°, 2° 3° de la métrica. Luego,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x - y\| = \|x - u + (u - y)\| \leq \|x - u\| + \|u - y\| \\ &= d(x,u) + d(u,y), \end{aligned}$$

por la propiedad 4°.

■

El siguiente es un ejemplo de norma en los espacios euclideanos.

Ejemplo 1.15 ESPACIOS EUCLIDIANOS

Las métricas que se definen en los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ (Ejemplo 1.5) son casos particulares de métricas provenientes de normas. En ambos casos la norma correspondiente se puede escribir como:

$$\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

para $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$\diamondsuit$

Los espacios de sucesiones $l^2(\mathbb{R})$ y $l^2(\mathbb{C})$ pueden ser considerados como generalizaciones a dimensión infinita de los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ respectivamente.

Ejemplo 1.16 *Sea* $l^2(\mathbb{K}) = \{\mathfrak{a} = (a_n) \in \mathbb{K}^\infty : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2) < \infty\}$. *La norma en ambos espacios* $l^2(\mathbb{R})$ *y* $l^2(\mathbb{C})$ *está dada por*

$$\|\mathfrak{a}\|_2 = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

También en este caso las propiedades 1°, 2°, 3° *de la norma son obvias. Así sólo queda por probar la desigualdad del triángulo. Sean* $\mathfrak{a} = (a_n)$ *y* $\mathfrak{b} = (b_n)$ *en* l^2. *En los espacios* $\mathbb{R}^n$ *y de* $\mathbb{C}^n$ *se cumple la desigualdad*

$$(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Por hipótesis las series $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ *y* $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2$ *convergen. Puesto que la función raíz es continua, pasando al límite* $n \to \infty$ *en la expresión del lado derecho de desigualdad obtenemos que*

$$(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

para $n \in \mathbb{N}$ *arbitrario. Por lo tanto la serie* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^2$ *también converge y*

$$\|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\|_2 \leq \|\mathfrak{a}\|_2 + \|\mathfrak{b}\|_2.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.17 *En el mismo espacio* $\mathbb{R}^n$ *podemos definir otras normas, de las cuales las más importantes son las siguientes:*

$$\|a\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|, \qquad \|a\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|.$$

$\diamondsuit$

Los espacios normados de sucesiones análogos a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ son los espacios l^1 y l^∞ que describimos a continuación.

Ejemplo 1.18 *Sea* $l^1(\mathbb{K}) = \{\mathfrak{a} = (a_n) \in \mathbb{K}^\infty : \sum_{j=1}^\infty |a_j| < \infty\}$. *La norma en este espacio se define como*

$$\|\mathfrak{a}\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |a_j|.$$

Para un espacio normado arbitrario $(E, \|\cdot\|)$ *podemos construir el espacio de sucesiones sumables en* E, *esto es:*

$$l^1(E) = \{(a_n) \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty\}$$

con norma

$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 1.19 *En la sección anterior definimos el espacio de sucesiones acotadas valuadas en un espacio métrico arbitrario. Dicho espacio métrico es un espacio normado* $(E, \|\cdot\|)$. *El espacio* $l^\infty(E)$ *es un espacio normado con la norma*

$$\|\mathfrak{a}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathfrak{a}\|_E = d_\infty(\mathfrak{o}, \mathfrak{a}),$$

donde $\mathfrak{o} = (0, 0, \dots)$ *es la sucesión nula. Por lo tanto*

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|_\infty = d_\infty(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Paro los casos $E = \mathbb{R}$ *y* $E = \mathbb{C}$ *vamos a usar la notación* l^∞ *y* $l^\infty(\mathbb{C})$, *respectivamente.*

$\diamondsuit$

Sabemos de varios ejemplos de espacios de aplicaciones $F\colon X \to M$ valuadas en un espacio métrico, en los cuales se puede definir una métrica de tal manera que $F_n \to F$ implica que $F_n(x) \to F(x)$ para todos los $x \in X$. Es natural preguntarse si en el caso de un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$, el conjunto $\mathcal{F}(X, E)$ de todas las aplicaciones entre X y E, el cual tiene la estructura de un espacio vectorial, se puede definir una norma de tal manera que la convergencia en esta norma implique la convergencia puntual.

En este caso, si el espacio X no es finito, la respuesta es negativa. En el Capítulo 11 presentamos como problema resuelto el caso del espacio de todas las sucesiones reales y además se demostrará que en este espacio no existe ninguna norma que tenga la propiedad mencionada.

La estructura lineal que tenemos en los espacios normados nos permite hablar de conjuntos convexos en estos espacios. La convexidad juega un papel muy importante en el análisis de espacios normados, cuando existe un vínculo entre la estructura vectorial y la estructura métrica. En los capítulos siguientes vamos a observar algunas de estas relaciones, por lo cual es conveniente recordar los hechos básicos sobre los conjuntos convexos.

Dados E un espacio vectorial real y a, $b \in E$. El conjunto

$$I(a,b) := \{ta + (1-t)b : 0 \le t \le 1\}$$

es el segmento lineal que une los puntos a y b. Decimos que un conjunto A es *convexo* si para todo a, $b \in A$ se cumple que $I(a,b) \subset A$.

El interes de estudiar los conjuntos convexos se explica en parte por el hecho de que las bolas en los espacios normados son convexas.

Proposición 1.20 *Sean* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $x \in E$ *y* $r > 0$*, entonces* $B(x,r)$ *es convexa.*

Demostración. Sean a, $b \in B(x,r)$ y $0 \le t \le 1$. Entonces

$$\|ta + (1-t)b\| \le \|ta\| + \|(1-t)b\| = t\|a\| + (1-t)\|b\| < tr + (1-t)r = r.$$

Por lo tanto, $ta + (1-t)b \in B(x,r)$.

■

Definición 1.21 *Para* $A \subset E$ *cualquiera, se define la cáscara convexa de* A *como el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto* A*. La cáscara convexa de* A *se denota por* $conv(A)$.

La definición de la cáscara convexa que hemos usado es elegante, pero poco manejable. Dados $A \subset E$ y $a \in E$, ¿como averiguar si $a \in \mathrm{conv}(A)$?

La siguiente proposición da una descripción de la $\mathrm{conv}(A)$ más técnica, pero también de carácter más constructivo.

Proposición 1.22 *Sea* A *un subconjunto arbitrario de un espacio vectorial real* E*. Entonces*

$$conv(A) = \{\sum_{j=1}^{k} t_j a_j : \ k \in \mathbb{N}, \, a_j \in A, \ \sum_{j=1}^{k} t_j = 1, \ 0 \le t_j, \ 1 \le j \le k\}.$$

Demostración. Denotemos por $C(A)$ al conjunto que aparece de lado derecho de la igualdad. Es claro que $A \subset C(A)$. Verifiquemos que $C(A)$ es un conjunto convexo. Sean $a = \sum_{j=1}^{k} t_j a_j$ y $b = \sum_{i=1}^{m} s_i b_i$ con $a_j \in A$, $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$, $b_i \in A$ y $\sum_{i=1}^{m} s_i = 1$. Si $t + s = 1$ se tiene que

$$ta + sb = \sum_{j=1}^{k} tt_j a_j + \sum_{i=1}^{m} ss_i b_i$$

la cual es una combinación lineal con coeficientes no negativos de elementos de A. Observemos que

$$\sum_{j=1}^{k} tt_j + \sum_{i=1}^{m} ss_i = t + s = 1,$$

por lo tanto $ta + sb \in C(A)$. Luego el conjunto $C(A)$ contiene a A y es convexo, entonces $\text{conv}(A) \subset C(A)$, pues $\text{conv}(A)$ es el conjunto más pequeño con estas dos propiedades.

Ahora tenemos que probar que $C(A) \subset \text{conv}(A)$. Vamos a demostrar que si $a_1, \ldots, a_k \in A$, $0 \le t_j$ para todo $1 \le j \le k$ y $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$, entonces las combinaciones lineales de la forma $\sum_{j=1}^{k} t_j a_j$ pertenecen a $\text{conv}(A)$. Para esto utilizamos la inducción con respecto al índice k.

Determinamos la hipótesis inductiva de la siguiente forma: para $a_1, \ldots, a_k \in A$ y los números no negativos $t_1, \ldots, t_k$ tales que $\sum_{j=1} t_j = 1$ la combiunación $\sum_{j=1^k} t_j a_j$ es elemento de $\text{conv}(A)$.

Comenzando con la inducción, si $k = 1$, se cumple forzosamente que $t_1 = 1$ y para cada $a_1 \in A$ tenemos que $t_1 a_1 = a_1 \in A \subset \text{conv}(A)$. Ahora supóngamos que la hipótesis es válida para k y tomamos $a_1, \ldots, a_{k+1} \in A$, $0 \le t_j$ tales que $\sum_{j=1}^{k+1} t_j = 1$. Sean

$$s = \sum_{j=1}^{k} t_j \quad \text{y} \quad t'_j = t_j / s$$

con $1 \le j \le k$. Entonces se cumple que $\sum_{j=1}^{k} t'_j = 1$ y por lo tanto, gracias a la suposición inductiva $b = \sum_{j=1}^{k} t'_j a_j \in \text{conv}(A)$.

Así tenemos que $t_{k+1} + s = 1$, b, $a_{k+1} \in \text{conv}(A)$ y por la convexidad de $\text{conv}(A)$ se satisface que $sb + t_{k+1} a_{k+1} \in \text{conv}(A)$. Así tenemos lo deseado pues

$$sb + t_{k+1} a_{k+1} = s(\sum_{j=1}^{k} t'_j a_j) + t_{k+1} a_{k+1} = \sum_{j=1} t_j a_j.$$

■

A los elementos del conjunto $\text{conv}(A)$, les llamaremos *combinaciones convexas* de elementos de A.

1.3. Sucesiones convergentes

La convergencia de sucesiones es indudabemente el origen y el concepto fundamental de la teoría de espacios métricos. Durante varios siglos los conceptos de la integral y de la derivada usados exitosamente en tantas ramas de las matemáticas y de la física se basaban en argumentos poco convincentes de los "infinitesimales". En la segunda mitad del siglo XIX en los trabajos de Cauchy aparecieron las definiciones y demostraciones relacionadas con los conceptos de límites que ahora consideramos correctas. Años mas tarde en los trabajos de Heine surgió la idea de definir la continuidad de funciones utilizando las sucesiones. Desde entonces el concepto de sucesión convergente ocupa un lugar central en análisis. El hecho de que las sucesiones son suficientes para manejar la continuidad en los espacios métricos está estrechamente relacionado con la estructura del eje real. Esto no se generaliza a los espacios topológicos más generales.

Definición 1.23 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que una sucesión (a_n) en X es* convergente *si existe $a \in X$ tal que $d(a_n, a) \to 0$, En forma explícita*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > N : \quad d(a_n, a) < \varepsilon.$$

Denotamos este hecho como $a_n \to a$. Al elemento a se le llama el límite de la sucesión (a_n) y se denota por $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si una sucesión es convergente, entonces su límite está definido unívocamente gracias a las propiedades básicas de la métrica.

Proposición 1.24 *Si $a_n \to a$ y $a_n \to b$ entonces $a = b$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la desigualdad de triangulo tenemos que

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b),$$

para n cualquiera. Así para n suficientemente grande se tiene que ambos términos del lado derecho de la desigualdad son menores que $\varepsilon/2$ y por tanto $d(a, b) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Lo cual implica que $d(a, b) = 0$, de donde $a = b$.

■

Definición 1.25 *Sea $n\colon \mathbb{N} \ni k \to n_k \in \mathbb{N}$ una sucesión creciente y sea $a = (a_n)$ una sucesión en X. La composición $a \circ n$ se llama subsucesión de a y siendo también una sucesión, se denota como (a_{n_k}).*

Observemos que una subsucesión se forma con un número infinito de distintos elementos de la sucesión original conservando el orden entre ellos.

Proposición 1.26 *Si una sucesión (a_n) en un espacio métrico X es convergente, entonces cada subsucesión de (a_n) converge al mismo límite.*

Demostración. Sean $a_n \to a$ y (a_{n_k}) una subsucesión de (a_n). Dado $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a) \leq \varepsilon$ para todo $n > N$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$, Si $k > K$ entonces $n_k > n_K > N$ pues n_k es una sucesión creciente. Así $d(a_{n_k}, a) \leq \varepsilon$ cuando $k > K$, por lo tanto $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

■

Ejemplo 1.27 *Sean* $\mathfrak{a} = (a_n) \in l^1$ *y*

$$\mathfrak{a}_m = (a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots).$$

Es claro que $(\mathfrak{a}_m)$ *es una sucesión en* l^1. *Además, para cada* $m \in \mathbb{N}$ *tenemos que* $\|\mathfrak{a}_m\|_1 \leq \|\mathfrak{a}\|_1$ *y*

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_m\|_1 = \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j|.$$

Del hecho que $\|\mathfrak{a}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$ *se deduce que* $\lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j| = 0$. *Por lo tanto* $\mathfrak{a}_m \to \mathfrak{a}$.
Sin embargo, si definimos $\mathfrak{a}_m$ *de la misma manera que en el espacio* l^∞ *entonces*

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_m\|_\infty = \sup_{j>m} |a_j|$$

y este valor tiende a cero si y sólo si (a_n) *es convergente a cero.*

♢

1.4. Ejercicios

1. ♦ En el espacio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la función:

$$d(n, m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m. \end{cases}$$

   Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{N}$.

2. Demuestre que las siguientes funciones son métricas en el espacio $\mathbb{R}^n$ y para el caso de $\mathbb{R}^2$ trazar las bolas unitarias correspondientes.
   - $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|$.
   - $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \max_{1\leq j\leq n} |a_j - b_j|$.
   - $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j |a_j - b_j|^2}$, donde $c_j > 0$, $1 \leq j \leq n$.

3. La métrica *del bosque*. Demueste que la siguiente función en el plano es una métrica. Para $\mathfrak{a} = (a_1, a_a)$, $\mathfrak{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sea

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} |a_1| + |a_1 - b_1| + |b_2|, & a_1 \neq b_1, \\ |a_2 - b_2|, & a_1 = b_1. \end{cases}$$

   Dibuja la bola centrada en el punto $(1, 1)$ y de radio 2.

4. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$, explique su nombre "la metrica de puente" y dibuje la bola centrada en $(1,-1)$ de radio $1+\sqrt{2}$.

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}, & \text{si } (a_2 \geq 0,\ b_2 \geq 0) \\ & \text{ó } (a_2 < 0,\ b_2 < 0), \\ \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}, & \text{si } (a_2 \geq 0,\ b_2 < 0) \\ & \text{ó } (a_2 < 0,\ b_2 \geq 0). \end{cases}$$

5. La métrica *Metro parisiense*. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$:

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \\ \sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}, & \text{si tal número no existe.} \end{cases}$$

6. Traze las siguientes bolas en el espacio métrico definido en el ejercicio anterior:

$$B((0,0),1), \quad B((1,1),1), \quad B((1,1),2).$$

7. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con la norma $\|(x,y,z)\|_1 = |x|+|y|+|z|$ describe la bola unitaria $B(0,1)$.

8. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$ y

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ \\ |x|+|y|-2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

Demuestre que d es una métrica en A.

9. Demuestre que si una bola de radio 7 está contenida en una bola de radio 3, ambas son iguales como conjuntos.

10. Sea (X,d) un espacio métrico. En el mismo conjunto $X \times X$ definimos

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{cuando} \quad d(x,y) \leq 1, \\ \\ 1, & \text{cuando} \quad d(x,y) > 1. \end{cases}$$

Demuestre que $\tilde{d}$ es una métrica en X y que $x_n \to x$ en (X,d) si y sólo si $x_n \to x$ en $(X,\tilde{d})$.

11. ♦ Sean (X,d) un espacio métrico, $x,\ y \in X$ y $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Demuestre que δ es una métrica en X.

12. ♦ Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no negativa que se anula únicamente en cero y sea $\delta(x,y) = f(x-y)$. ¿Cuando δ es una métrica?

13. ♦ Sean $\delta_1(x,y) = |x-y|^2$ y $\delta_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Cual de estas funciones define una métrica en $\mathbb{R}$?

14. Para $0 < p < \infty$, sea l^p el espacio de sucesiones reales (a_n) tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$.

    a. Demuestre que para $0 < p < 1$ la función $d_p((a_n),(b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p$ es una métrica.

    b. Demuestre que para $1 \leq p < \infty$ la función $\|(a_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ es una norma.

15. Sea $C([a,b])$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Para $f \in C([a,b])$ sea
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt.$$
Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $C([a,b])$.

16. Demuestre que la función definida en el espacio $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ de matrices complejas $n \times n$ por la fórmula $\|A\| = (\mathrm{tr}(AA^*))^{\frac{1}{2}}$ es una norma.
(Para $A = (a_{ij})$ se define $A^* = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \overline{a_{ji}}$ y $\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$).

17. Sean X un espacio métrico arbitrario y Y un espacio métrico discreto. Pruebe que $B(X,Y)$ es un espacio discreto.

18. Sean (X,d) un espacio métrico y $a_0 \in X$. Si $\mathfrak{X}$ es el espacio de todas las sucesiones $\mathfrak{a} = (a_j)$ con valores en X tales que $\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j,a_0) < \infty$, demuestre que la función $D\colon \mathfrak{X}\times\mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula
$$D(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j,b_j),$$
está bién definida y es una métrica en $\mathfrak{X}$.

19. Pruebe que en un espacio normado $(E,\|\cdot\|)$ para cada $x \in E$ se tiene que
$$\|x\| = \inf\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}.$$

20. ♦ Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el espacio de todas las sucesiones reales con su estructura natural de espacio vectorial. Demuestre que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no existe ninguna norma $\|\cdot\|$ tal que si $(a_{jn}) = \mathfrak{a}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{a} = (a_j)$ y $\|a_n - a\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ implique que $a_{jn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

21. Demuestre que el espacio $\mathfrak{D}$ de todas las métricas definidas en el conjunto X es un *cono convexo*, es decir para todo d, $d' \in \mathfrak{D}$ y para todo $s \geq 0$, $t > 0$ se cumple que $sd + td' \in \mathfrak{D}$.

22. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y (x_n), (y_n) sucesiones convergentes en E. Demuestre que para a, $b \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = a \lim_{n\to\infty} x_n + b \lim_{n\to\infty} y_n.$$

23. Sean A, B conjuntos convexos en un espacio vectorial E. Demuestre que el conjunto $A + B := \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$ es convexo.

2

Espacios completos

La construcción del eje real $\mathbb{R}$ partiendo del campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene como propósito asegurar que para cada conjunto acotado A los números $\sup A$ e $\inf A$ existan. Esta propiedad resulta ser equivalente a decir que cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ tiene límite. El concepto de la sucesión de Cauchy se generaliza a espacios métricos de forma automática. Decimos que un espacio es completo si tiene la propiedad de que cada sucesión de Cauchy en el es convergente.

El resultado más importante de esta sección dice que así como los números racionales se insertan en el eje real, cada espacio métrico se inserta en un espacio completo.

2.1. Sucesiones de Cauchy

Definición 2.1 *A una sucesión (x_n) en un espacio métrico X se le llama* sucesión de Cauchy *si*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n, m > N \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Cada sucesión convergente es de Cauchy. En efecto, si $x_n \to x$, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > N \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon/2.$$

Si además $m > N$, obtenemos que

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \varepsilon.$$

Luego la sucesión (x_n) es de Cauchy.

No todas las sucesiones de Cauchy son convergentes. Conocemos los contraejemplos en el espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales. La aproximación decimal del número $\sqrt{2}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge en este espacio.

Veamos otro ejemplo de una sucesión de Cauchy de funciones que no es convergente.

Ejemplo 2.2 *Sea* $X = C[-1,1]$ *con la norma* $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|dt$. *En este espacio definimos la sucesión*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - nx, & 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

La función f_n *es constante e igual a 1 en el intervalo* $[-1,0]$, *luego decrece linealmente al valor cero que alcanza en el punto* $\frac{1}{n}$ *y queda nula en los demás puntos del dominio. La sucesión satisface*

$$\|f_n - f_{n+k}\|_1 \leq \frac{1}{2n},$$

entonces es una sucesión de Cauchy. Sin embargo para la función discontinua

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

se cumple $\|f_n - f\|_1 \leq \frac{1}{2n}$. *No existe una función continua que sea el límite de la misma sucesión.*

$\diamondsuit$

El resultado siguiente es muy útil, cuando buscamos el límite de una sucesión de Cauchy.

Proposición 2.3 *Sea* (x_n) *una sucesión de Cauchy en un espacio métrico* X. *Si una subsucesión* (x_{n_k}) *converge a* $x \in X$, *entonces* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}, \quad \forall k > K \quad d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon.$$

La sucesión original es de Cauchy, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Para cada $n > \max\{N, n_K\}$ y k tal que $n_k > \max\{N, n_K\}$ se cumple

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \leq 2\varepsilon.$$

Por lo tanto la sucesión (x_n) converge a x.

$\blacksquare$

Definición 2.4 *Un espacio métrico X se llama* completo *si cada sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Como sabemos, el espacio euclidiano es completo. Varios de los espacios mencionados anteriormente también son espacios completos. Para probar la completez de varios espacios de sucesiones necesitamos hacer una digresión sobre la convergencia de series.

Proposición 2.5 *Sean $a_{nk} \geq 0$, n, $k \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

Demostración. La positividad de los términos de las series es muy importante, pues nos asegura que las sumas parciales forman sucesiones no decrecientes. Supongamos que la primera serie converge al valor A, mientras que la serie del lado derecho converge a $B > A$. Entonces existe K_0 tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = A < \sum_{k=1}^{K_0}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_0} a_{nk} < A.$$

La contradicción que obtuvimos demuestra que si una de las series converge, la otra coverge al mismo valor. Por lo que si una diverge a infinito, lo mismo pasa con la otra.

■

Ejemplo 2.6 *Los espacios l^1, l^2 y l^∞ son completos.*

Sólo vamos a probar el caso para l^1. Los demás casos se demuestran con los mismos argumentos. Sea $(\mathfrak{a}_m)$ una sucesión de Cauchy en l^1. Si denotamos $(\mathfrak{a}_m) = (a_{mn})$, entonces la información que tenemos es la siguiente:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, m, k > N \quad \|\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_k\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{mj} - a_{kj}| \leq \varepsilon.$$

Vamos a buscar una subsucesión $(\mathfrak{a}_{m_k})$ cuyos elementos nos den valores $\|\mathfrak{a}_{m_k} - \mathfrak{a}_{m_l}\|_1$ muy pequeños.

- Sea m_1 tal que para $l > m_1$ se cumple $\|\mathfrak{a}_{m_1} - \mathfrak{a}_l\|_1 < \frac{1}{2}$.
- Sea $m_2 > m_1$ y tal que para $l > n_2$ se cumple $\|\mathfrak{a}_{m_2} - \mathfrak{a}_l\|_1 < \frac{1}{4}$.
- Sea $m_3 > n_2$ y tal que para $l > n_3$ se cumple $\|\mathfrak{a}_{m_3} - \mathfrak{a}_l\|_1 < \frac{1}{8}$.

Cada uno de estos pasos está justificado por la definición de una sucesión de Cauchy. Siguiendo con este procedimiento obtenemos la subsucesión $(\mathfrak{a}_{m_k})$ tal que

$$\|\mathfrak{a}_{m_k} - \mathfrak{a}_{m_{k+1}}\|_1 < \frac{1}{2^k}.$$

Para simplificar la notación denotemos $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_{m_k} = (b_{kj})$. De esta forma se obtiene una sucesión que satisface

$$\|\mathfrak{b}_1\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k\|_1 \leq \|\mathfrak{b}_1\|_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

En forma explícita

$$\sum_{j=1}^{\infty} |b_{1j}| + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |b_{(k+1)j} - b_{kj}| < \infty. \tag{2.1}$$

La convergencia de esta serie asegura que la sucesión de las sumas

$$\mathfrak{s}_n = \mathfrak{b}_1 + \sum_{k=1}^{n} (\mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k)$$

forman una sucesión de Cauchy en l^1. En efecto,

$$\|\mathfrak{s}_{n+l} - \mathfrak{s}_n\|_1 = \|\sum_{k=n+1}^{n+l} \mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} 2^{-n} < 2^{1-n}.$$

Si $\mathfrak{s}_n = (s_{nj})$ entonces obviamente par cada j se cumple

$$|s_{(n+l)j} - s_{nj}| \leq \|\mathfrak{s}_{n+l} - \mathfrak{s}_n\|_1 < 2^{1-n}.$$

Para cada j la sucesión numérica $n \to s_{nj}$ es de Cauchy en el espacio $\mathbb{R}$ que es completo, entonces existe una sucesión $\mathfrak{s} = (s_j) = (\text{lím}_{n\to\infty} s_{nj})$. Vamos a probar que esta sucesión es elemento de l^1.

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{s}\|_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} |s_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\lim_{n\to\infty} s_{nj}| = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |s_{nj}| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (|b_{1j}| + \sum_{k=1}^{n} |b_{(k+1)j} - b_{kj}|) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |b_{1j}| + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |b_{(k+1)j} - b_{kj}|
\end{aligned}$$

La ecuación (1) afirma que, cambiando el orden de las sumas obtenemos un valor finito entonces por Proposición 2.5 concluimos que $\|\mathfrak{s}\|_1 < \infty$, es decir $\mathfrak{s} = \text{lím}\, \mathfrak{s}_n \in l^1$. Ahora debemos darnos cuenta de que

$$\mathfrak{s}_n = \mathfrak{b}_1 + \sum_{k=1}^{n} (\mathfrak{b}_{k+1} - \mathfrak{b}_k) = \mathfrak{b}_{n+1} = \mathfrak{a}_{n_{k+1}}.$$

Acabamos de probar que la subsucesión $(\mathfrak{a}_{n_{k+1}})$ de nuestra sucesión de Cauchy $(\mathfrak{a}_n)$ tiene límite $\mathfrak{s}$ en l^1. Por la Proposición 2.3 se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{a}_n = \mathfrak{s}.$$

Y por lo tanto el espacio l^1 es completo.

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.7 *La afirmación: "un límite uniforme de funciones continuas es una función continua" nos dice exactamente que el espacio $BC(X)$ de funciones acotadas y continuas con la norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

es un espacio completo.

$\diamondsuit$

Ejemplo 2.8 *Dados X un conjunto arbitrario, Y un espacio métrico completo y F_n una sucesión de Cauchy en el espacio $B(X,Y)$, entonces se satisface lo siguiente:*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N, \quad \forall\, n,m > N \quad d_\infty(F_n, F_m) < \varepsilon.$$

Por consiguiente para todo $x \in X$

$$d_Y(F_n(x), F_m(x)) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

La sucesión $(F_n(x))$ es de Cauchy en Y para cada valor $x \in X$. El espacio Y es completo, entonces podemos definir

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Pasando al límite $m \to \infty$ en la desigualdad 2.2 obtenemos que

$$d_Y(F_n(x), F(x)) \leq \varepsilon$$

en todo dominio X y para $n > N$, entonces $d_\infty(F_n, F) < \varepsilon$, lo cual demuestra que la aplicación F es acotada y además $F_n \to F$ en el espacio $B(X,Y)$.

$\diamondsuit$

2.2. Completación

Los espacios completos juegan un papel muy importante en análisis. Más adelante vamos a probar varias de sus propiedades. Sin embargo muchos espacios no son completos. En esta sección vamos a demostrar un teorema muy confortador, el cual nos dice lo siguiente: Cada espacio métrico se puede completar.

Definición 2.9 *Sea X un espacio métrico y $D \subset X$. Decimos que S es denso en X si, para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$,*

$$B(x, \varepsilon) \cap D \neq \varnothing.$$

Definición 2.10 *Una aplicación $\mathcal{I} \colon X \to Y$ entre dos espacios métricos es* isométrica *si $d_Y(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) = d_X(x, y)$ para todo x, $y \in X$.*

Una isometría inserta al espacio X en Y conservando las distancias entre los puntos.

Teorema 2.11 *Para cada espacio métrico X existe un espacio métrico completo Y y una isometría $\mathcal{I} \colon X \to Y$ tal que la imagen $\mathcal{I}(X)$ es densa en Y.*

Demostración. La demostración del teorema es larga y consta de varias etapas que señalamos explicitamente.

Construcción del espacio Y

Empezando la construcción del espacio Y. Denotamos por $\mathfrak{Y}$ al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. En este enorme espacio introducimos una relación de equivalencia de la siguiente manera

$$\mathfrak{a} = (a_n) \sim \mathfrak{b} = (b_n) \text{ cuando } \lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n) = 0.$$

Observemos que la propiedad $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}$ es obvia, al igual que la propiedad de simetría. La transitividad es consequencia de la desigualdad de triangulo. De hecho, si $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}$, tenemos: $\lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty} d_X(b_n, c_n) = 0$ y se sigue que

$$0 \leq d_X(a_n, c_n) \leq d_X(a_n, b_n) + d(b_n, c_n) \to 0,$$

es decir $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{c}$.

Verifiquemos que una sucesión (a'_n) que es equivalente a una sucesión convergente $a_n \to a$, converge al mismo límite. En efecto, para $\varepsilon > 0$ existe N_1 tal que $d_X(a_n, a) < \varepsilon/2$, si $n > N_1$ y existe N_2 tal que $d(a'_m, a_m) < \varepsilon/2$, si $m > N_2$. Tomando $m > \max\{N_1, N_2\}$ obtenemos

$$d_X(a'_m, a) \leq d(a'_m, a_m) + d_X(a_m, a) < \varepsilon.$$

Así pues hemos probado que $a'_m \to a$.

Sea $Y = \mathfrak{Y}/\sim$. Los elementos del espacio Y son clases de equivalencia de elementos de $\mathfrak{Y}$. La clase del elemento $\mathfrak{a} \in \mathfrak{Y}$ se denota por $[\mathfrak{a}]$.

Sumergimos X en Y

Definimos de una vez la aplicación $\mathcal{I} \colon X \to Y$ asociando primero al elemento $x \in X$ la sucesión constante $\mathfrak{x} = (x, x, x, \dots) \in \mathfrak{Y}$ para luego poner $\mathcal{I}(x) = [\mathfrak{x}]$. En seguida tenemos que definir en Y una métrica d_Y para luego probar que $d_Y(\mathcal{I}(x), d_Y(\mathcal{I}(y)) = d_X(x, y)$.

La métrica en Y

Para $[\mathfrak{a}] = [(a_n)]$, $[\mathfrak{b}] = [(b_n)] \in Y$ sea

$$d_Y([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}]) = \lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n).$$

Antes de aceptar d_Y como una función sobre $Y \times Y$ tenemos que verificar que el límite del lado derecho existe y luego probar que el resultado no depende de los representantes de las clases $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}]$ que hemos usado en la definición. Según la desigualdad del cuadrángulo (Proposición 1.3) tenemos

$$|d_X(a_n, b_n) - d_X(a_m, b_m)| \leq d_X(a_n, a_m) + d_X(b_n, b_m).$$

Ambas sucesiones (a_n) y (b_m) son de Cauchy, entonces para cierto N y para todos n, $m > N$ se cumple $d_X(a_n, a_m) < \varepsilon/2$, $d_X(b_n, b_m) < \varepsilon/2$, y así

$$|d_X(a_n, b_n) - d_X(a_m, b_m)| \leq \varepsilon.$$

La sucesión $(d_Y(a_n, b_n))$ es de Cauchy en el espacio completo $\mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n)$ existe para cada par de representates de las clases $[\mathfrak{a}]$ y $[\mathfrak{b}]$. En seguida probamos que el el límite no depende de representantes particulares. Sean $(a'_n) \sim (a_n)$ y $(b'_n) \sim (b_n)$.
Nuevamente, por la desigualdad del rectángulo estimamos:

$$|d_X(a_n, b_n) - d_X(a'_n, b'_n)| \leq d_X(a_n, a'_n) + d_X(b_n, b'_n).$$

La definición de sucesiones equivalentes afirma que para los $n's$ mayores que cierto N $d_X(a_n, a'_n) < \varepsilon$ y $d_X(b_n, b'_n) < \varepsilon$, por lo cual las sucesiones de Cauchy $(d_X(a_n, b_n))$ y $(d_X(a'_n, b'_n))$ son equivalentes y como tales tienden al mismo límite. Por lo tanto la función d_Y está bién definida y es una métrica en el espacio Y.

Prueba que $\mathcal{I}$ es una isometría

Cuando $[\mathfrak{a}] = \mathcal{I}(a) = [(a, a, \dots)]$ y $[\mathfrak{b}] = \mathcal{I}(b) = [(b, b, \dots)]$, obtenemos:

$$d_Y(\mathcal{I}(a), \mathfrak{I}(b)) = d_Y([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}]) = \lim_{n\to\infty} d_X(a, b) = d_X(a, b).$$

La aplicación $\mathcal{I}\colon X \to Y$ sí es una isometría.

Prueba que $\mathcal{I}(X)$ es denso en Y

Sea $[\mathfrak{a}] = [(a_n)]$ y sea $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un elemento de la imagen $\mathcal{I}(X)$ que está a distancia $\leq \varepsilon$ de $[\mathfrak{a}]$.

Existe N tal que $d_X(a_n, a_m) < \varepsilon$ para n, $m > N$. Para el elemento de la imagen $\mathcal{I}(a_{N+1})$ se cumple

$$d_Y([\mathfrak{a}], \mathcal{I}(a_{N+1})) = \lim_{n\to\infty} d_X(a_n, a_{N+1}) \leq \varepsilon.$$

Prueba que el espacio Y es completo

Sea $[\mathfrak{a}_n]$ una sucesión de Cauchy en Y. Por la densidad del conjunto $\mathcal{I}(X)$ en Y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $d_Y(\mathcal{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) < \frac{1}{n}$. Luego, como $\mathcal{I}$ es una isometría, se sigue

$$\begin{aligned} d_X(x_n, x_m) &= d_Y(\mathcal{I}(x_n), \mathcal{I}(x_m)) \leq d_Y(\mathcal{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) + d_Y([\mathfrak{a}_n], \mathcal{I}(x_m)) \\ &\leq d_Y(\mathcal{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) + d_Y([\mathfrak{a}_n], [\mathfrak{a}_m]) + d_Y([\mathfrak{a}_m], \mathcal{I}(x_m)) \\ &\leq \frac{1}{n} + d_Y([\mathfrak{a}_n], [\mathfrak{a}_m]) + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

La sucesión $[\mathfrak{a}_n]$ es de Cauchy, entonces para cierto N y para $m, n > N$ se cumple $d_Y([\mathfrak{a}_n], [\mathfrak{a}_m]) < \varepsilon/3$. Si además tomamos n, $m > \frac{3}{\varepsilon}$ obtenemos $d_X(x_n, x_m) < \varepsilon$.

La sucesión (x_n) construida en X es de Cauchy. Terminaremos la demostración probando que $[(x_m)] = \lim_{n\to\infty}[\mathfrak{a}_n]$. Hacemos una estimación de la distancia $d_Y([(x_m)], [\mathfrak{a}_n])$.

$$\begin{aligned} d_Y([(x_m)], [\mathfrak{a}_n]) &\leq d_Y([(x_m)], \mathfrak{I}(x_n)) + d_Y(\mathfrak{I}(x_n), [\mathfrak{a}_n]) \\ &\leq \lim_{m\to\infty} d_X(x_n, x_m) + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$ ambos términos del lado derecho tienden a cero, entonces efectivamente $[\mathfrak{a}_n] \to [(x_m)]$.

■

¿Que pasará, si aplicamos el procedimiento de la completación a un espacio completo?

Obviamente obtenemos un espacio isométrico con el espacio original. Si X es completo y $[\mathfrak{a}]$ es una clase de sucesiones de Cauchy equivalentes, todos los elementos de esta clase son sucesiones convergentes al mismo límite $a \in X$. De tal manera obtenemos una aplicación $\mathfrak{Y}/\sim \ni [\mathfrak{a}] \to a \in X$ que es inversa a la aplicación $\mathcal{I}$ y por lo tanto es también isométrica.

El primer caso de una completación de un espacio métrico que hemos conocido en el curso de Cálculo fue la obtención del eje real $\mathbb{R}$ a partir del campo de los números racionales. Desafortunamente el Teorema 2.10 no se aplica a este caso, porque en su demostración hemos usado la completez del eje real. Sin embargo, el método de clases de equivalencia de sucesión de Cauchy sí funciona para obtener la completación del espacio $\mathbb{Q}$. Necesitamos únicamente una modificación al momento de definir la distancia en el espacio $\mathbb{R}$.

Nuestro punto de partida es el espacio $\mathbb{Q}$ provisto de la norma $|x|$ y la métrica $d(p, q) = |p-q|$ que toman valores en el mismo espacio $\mathbb{Q}$. La definición de la sucesión de Cauchy no necesita ninguna modificación y tampoco la definición de la equivalencia de tales sucesiónes.

El problema surge al momento de definir la métrica en el espacio $\mathbb{R}$ definido obviamente como el espacio $\mathfrak{Y}/\sim$ de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy valuadas en $\mathbb{Q}$. La definición $d([(\mathfrak{p}_\mathfrak{n})], [(\mathfrak{q}_\mathfrak{n})]) = \text{lím}_{n\to\infty} |p_n - q_n|$ que hemos usado debe ser substituida por

$$d([(p_n)], [(q_n)]) = [(|p_n - q_n|)]$$

después de haber probado que en estas circunstancias la sucesión $|p_n - q_n|$ es una sucesión de Cauchy. Todos los demás elementos de la demostración funcionan perfectamente en este caso. El hecho de que $\mathbb{Q}$ tiene la estructura algebraica de un campo agrega un aspecto adicional al asunto. Obviamente nos gustaría obtener la misma estructura algebraica en el espacio completado. El problema se resuelve positivamente.

Teorema 2.12 *Sean* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* F *su completación. El espacio* F *tiene la estructura de espacio normado y* E *se sumerge en* F *por medio de una aplicación isométrica y lineal* $\mathfrak{J}$. *Si además* E *es un álgebra tal que* $\|ab\| \le \|a\|\|b\|$ *con* a, $b \in E$ *entonces* F *tiene la estructura de álgebra y* $\mathfrak{J}(ab) = \mathfrak{J}(a)\mathfrak{J}(b)$. *Si* E *es un campo, el espacio* F *es un campo.*

Demostración. La demostración es más larga que difícil. Definiendo el espacio F como el conjunto de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en E, tenemos que introducir la operacion de suma de elementos en F, el producto de un elemento por un número y en el caso de una álgebra el producto de dos elementos de F. Luego, debemos probar que la estructura algebraica obtenida es de un espacio vectorial, de álgebra y de campo, respectivamente.

Las definiciones de la suma y productos en F es natural. En la sección 1.1 hemos definido la suma y el producto en el espacio de sucesiones con valores en un álgebra. Para $[\mathfrak{a}]$, $[\mathfrak{b}] \in F$, $t \in \mathbb{K}$ definimos:

$$[\mathfrak{a}] + [\mathfrak{b}] := [\mathfrak{a} + \mathfrak{b}], \quad t[\mathfrak{a}] = [t\mathfrak{a}], \quad [\mathfrak{a}] \cdot [\mathfrak{b}] := [\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}].$$

Para justificar estas definiciones tenemos que probar que suma de dos sucesiones de Cauchy en un espacio normado, es una sucesión de Cauchy, que en un álgebra normada el producto de dos sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy. Además es necesario verificar que las definiciones correspondientes no dependen de los representantes de las clases.

Dejamos esta labor como ejercicios al Lector.

A continuación señalamos las etapas que debe realizar el Lector para completar la demostración.

Como sabemos, la norma en el espacio E define la métrica en el mismo espacio según la fórmula $d_E(a, b) = \|a - b\|$. De tal manera que $\|a\| = d_E(0, a)$. En la demostración de Teorema 2.10 se define en F la métrica $d_F([\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}])$. Para obtener una norma en F ponemos entonces: $\|[\mathfrak{a}]\| := d_F([0], [\mathfrak{a}])$.

Hay que probar que $\|[\mathfrak{a}]\|$ es una norma en F. Si E es una álgebra, queda por probar que $\|[\mathfrak{a}][\mathfrak{b}]\| \leq \|[\mathfrak{a}]\|\|[\mathfrak{b}]\|$.

Finalmente, cuando E es un campo, debemos probar que cada elemento de F distinto de cero tiene inverso en F. El elemento nulo en F es el conjunto de sucesiones en E que convergen a cero. Si $\mathfrak{a} = (a_n)$ es una sucesión de Cauchy que no converge a cero, entonces solo un número finito de elementos a_n pueden anularse. Además, ninguna subsucesión de (a_n) convergería a cero, lo cual significa que existe $r > 0$ tal que $\|a_n\| > r$ para casi todos $n \in \mathbb{N}$. Ignorando el número finito los elementos nulos de la sucesión podemos definir

$$[(a_n)]^{-1} = [(a_n^{-1})].$$

Falta probar que (a_n^{-1}) es una sucesión de Cauchy que es el elemento inverso de $[(a_n)]$.

■

El punto débil del Teorema 2.10 es que los elementos de la completación son objetos complicados. Si tomamos como X al espacio de funciones polinomiales en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con la norma $\|p\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |p(t)|$, el hecho de que los elementos de la completación son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de polinomios no nos da mucha información. Es mucho más útil la información de que, según Teorema de Weierstrass (vea Capítulo 10) este espacio se identifica con el espacio de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$.

2.3. Ejercicios

1. Dadas dos sucesiones (x_n) y (y_n) de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Demuestre que $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

2. ♦ Dadas dos sucesiones (x_n) y (y_n) de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Sea
$$u_n = \begin{cases} x_k, & \text{si } n = 2k-1, \\ \\ y_k, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$
Demuestre que la sucesión (u_n) es de Cauchy si y solo si
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

3. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Supongamos que la sucesión (y_n) en X satisface que $d(x_n, y_n) < |a_n|$, donde (a_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ convergente a cero. Demuestre que (y_n) es de Cauchy.

4. En el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ introducimos la métrica
$$d((a_n),(b_n)) = \begin{cases} 0, & (a_n) = (b_n), \\ \frac{1}{m}, & m = \min\{n : a_n \neq b_n\}. \end{cases}$$
Demuestre que d es una métrica y que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.
5. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que se anulan fuera de cierto intervalo. Demuestre que $C_0(\mathbb{R})$ no es un espacio completo con respecto a las normas $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ y $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$.
6. ⧫ Con el fin de probar que el espacio de las funciones polinomiales sobre el intervalo $[-1,1]$ no es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ considera los polinomios
$$w_n(t) = \frac{1}{p_n} \int_0^t (1-x^2)^n dx,$$
donde $p_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ y prueba que $w_n(t) \to \operatorname{sgn}(t)$ uniformemente sobre cada conjunto de la forma $[-1,-\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$.
Además pruebe que los polinomios $v_n(t) = \int_0^t w_n(x)dx$ aproximan uniformemente sobre $[-1,1]$ a la función $t \to |t|$.
7. Demuestre que los espacios métricos (l^p, d_p) con $0 < p < 1$ y los espacios normados $(l^p, \|\cdot\|_p)$ para $1 \leq p < \infty$ definidos en Ejercicio 14 del Capítulo 1 son completos.

3

Conjuntos abiertos, conjuntos cerrados

3.1. Conjuntos abiertos

Cuando un físico, un biólogo o un ingeniero hablan de sus objetos de estudio, por ejemplo de una partícula, una planta o un puente, está absolutamente convencido de que se trata de algo "existente". Los conceptos que introducen y utilizan los matemáticos "existen" en un sentido muy diferente. Podemos pasar horas y días discutiendo la siguiente pregunta: ¿ En que sentido existe el número π?.

Indudablemente los conceptos de número o de triangulo se han formado como resultado de experiencias cotidianas de gente que no necesariamente esta relacionada con el pensamiento matemático. Sin embargo la situación es diferente cuando se trata de conceptos relacionados con matemáticas a un nivel más avanzado, especialmente en la etapa de la investigación y de la creación de áreas nuevas. Los matemáticos de inicios del siglo XX estaban probando importantes teoremas sin usar los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados. ¡ Incluso la noción de un espacio vectorial fue introducida en el siglo XX!.

Las dudas que preocupan a los alumnos, cuando tienen que estudiar los conceptos que aparentemente tienen poco que ver con las experiencias de la vida cotidiana son absolutamente naturales. Sin embargo, el enorme progreso en muchas de las ramas de las matemáticas que se ha observado a lo largo del siglo XX, en gran medida se debe a la aparición y el desarrollo de la nueva rama de matemáticas -*la topología*-, en la cual abundan conceptos de gran nivel de abstracción, dicha rama se dedica al estudio de conjuntos abiertos.

Basta con muy poca experiencia en matemáticas para aceptar que el concepto de aproximación de un objeto por una sucesión de objetos más simples es fundamental. Mientras generaciones de geometras estaban haciendo esfuerzos de construir un intervalo de longitud π con la regla y el compás, otros se dedicaban a determinar esta longitud con una exactitud cada vez mejor.

La derivada y la integral fueron fundamentos de la ciencia contemporánea, aunque las definiciones de estos conceptos que se usaron durante varios siglos son para nosotros poco aceptables. Pero sin duda alguna el estudio de las reglas que gobiernan los procesos de aproximación fue el motor del desarrollo de las matemáticas desde hace mucho tiempo. La aparición de la topología está relacionada con una observación muy sencilla: se simplifican muchos razonamientos y muchas demostraciones si en lugar de estudiar los métodos de aproximación nos ocupamos de estudiar los métodos para separar unas cosas de otras. He aquí donde aparece el concepto de conjunto abierto:

-un conjunto cuyos elementos
están bién separados del "mundo exterior"-.

Definición 3.1 *Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $O \subset X$* es abierto *en X si para cada $x \in O$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O$.*

El conjunto O es abierto en X si para cada elemento x de O, existe una bola centrada en x, que esta completamente contenida en el conjunto O. Los elementos de un conjunto abierto O no pueden ser aproximados por elementos del complemento de O, el cual se denota por O^c. Al definir los conjuntos abiertos en espacios métricos generales, estamos construyendo objetos análogos a los intervalos abiertos en el eje real $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2 *Sea $X = \mathbb{R}$. El intervalo $O = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ es el ejemplo fundamental de un conjunto abierto. Observemos que para $x \in (a, b)$ y $r = \min\{x - a, b - x\}$, la bola $B(x, r)$ es el intervalo $(x - r, x + r)$ el cual está contenido en O.*

$\Diamond$

Es muy importante observar la relatividad de concepto:
"ser abierto".

En los siguientes dos ejemplos podemos observar por que decimos que el concepto de abierto puede ser relativo.

Ejemplo 3.3 *El intrevalo $[a, b)$ no es abierto en $X = \mathbb{R}$, debido a que su elemento a no está separado del complemento $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$. En efecto, para cualquier $r > 0$, la "bola"$(a - r, a + r)$ contiene elementos de $[a, b)^c$.*

$\Diamond$

Ejemplo 3.4 *Observemos que el mismo intervalo $[a, b)$ es abierto si lo consideramps como subconjunto del espacio $X = [a, \infty)$. En este caso la bola $B(a, r)$ es el intervalo $[a, a + r)$ y para $r < b - a$ se cumple que $B(a, r) \subset (a, b)$.*

$\Diamond$

Ejemplo 3.5 *En el espacio $X = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ provisto de la métrica cartesiana, todos los subconjuntos $O \subset X$ son abiertos, pues las bolas $B(x, 1)$ consisten de un solo elemento: el mismo x.*

$\Diamond$

La situación del ejemplo anterior se presenta en cada espacio dotado de la métrica discreta.

Ejemplo 3.6 *Sean* $X = \mathbb{R}^n$ *y*

$$O = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

El conjunto O *es abierto, ya que para cada* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in O$*, si tomamos* $r = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ *obtenemos que para cada* $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$

$$|x_i - y_i| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r \leq x_i,$$

$1 \leq i \leq n$*, de donde* $y_i \geq x_i - |x_i - y_i| > 0$*. Por lo tanto, se ha probado que* $B(\mathbf{x}, r) \subset O$*.*

$\diamondsuit$

Sin embargo, en el espacio l^1 de las sucesiones sumables se tiene que existe un conjunto definido en forma semejante que no es abierto.

Ejemplo 3.7 *Sea* $A = \{(a_n) \in l^1 : a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}\}$*. Este conjunto no es abierto en* l^1*. Sean* $(a_n) \in A$ *y* $r > 0$*. Si la sucesión* (a_n) *converge a cero, entonces existe* n_0 *tal que* $a_{n_o} < \frac{r}{2}$*. Sea*

$$y_n = \begin{cases} a_n, & n \neq n_0, \\ \\ -a_n, & n = n_0. \end{cases}$$

La sucesión (y_n) *es elemento de* l^1*, pero obviamente no pertenece a* A*. Sin embargo* $\|(a_n) - (y_n)\|_1 = 2a_{n_0} < r$*. Cada elemento de* A *puede aproximarse con los elementos del complemento de* A*, por lo cual* A *no es abierto.*

$\diamondsuit$

Ejercicio 3.8 *Sean* $C \subset \mathbb{N}$ *un conjunto finito y*

$$A_C = \{(a_n) \in l^1 : a_n > 0,\ n \in C\}.$$

Demuestre que A_C *es abierto en* l^1*.*

Ejemplo 3.9 *Sean* $X = \mathbb{R}^2$ *con la métrica usual*

$$d((x, y), (u, v)) = ((x - u)^2 + (y - v)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

y

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x - 1 < y < 1 - x,\ -x - 1 < y < x + 1\}.$$

Queremos probar que O *es un conjunto abierto. Para* $\mathbf{x} = (x, y) \in O$ *tenemos que determinar explícitamente el valor del radio* $r > 0$ *para el cual* $B(\mathbf{x}, r) \subset O$*. El conjunto* O *es el cuadrado limitado por las rectas* $x + y = 1$*,* $x - y = 1$*,*

$-x + 1 = 1$, $-x - y = 1$. *Recordando la fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta obtenemos que*

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{mín}\{x + y - 1, x - y - 1, -x - y - 1. - x + y - 1\}.$$

Incluso en este caso extremadamente simple tenemos que apoyarnos en fórmulas de geometría analítica para probar lo deseado.

Si queremos ser igual de concretos en el caso del conjunto

$$U = \{\mathbf{x} : y > x^2,\, y - x < 1\},$$

no lo lograríamos sin usar el cálculo diferencial para calcular la distancia de un punto de la parábola. En realidad, si nuestro problema es únicamente demostrar que U es abierto, entonces no nos interesa el valor exacto de r, sino solamente su existencia. Los teoremas que vamos a probar en el capítulo siguiente nos serviran para convertir este problema en uno más sensillo. Sin embargo recomendamos al lector demuestre que U es abierto directamente de la definición.

$\diamondsuit$

En cada espacio métrico existen conjuntos abiertos.

Proposición 3.10 *Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $R > 0$ la bola $B(x, R)$ es abierta.*

Demostración. Sean $y \in B(x, R)$ y $r = R \setminus d(x, y)$. Por suposición $r > 0$. Si $u \in B(y, r)$ se sigue que

$$d(u, x) \leq d(u, y) + d(y, x) < r + d(y, x) = R.$$

Así hemos probado que $B(y, r) \subset B(x, R)$, entonces el último conjunto es abierto.

$\blacksquare$

Ejemplo 3.11 *Sean $a < b \in \mathbb{R}$ y $X = C([a, b])$ con su norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Consideremos $O = \{f \in X : \forall\, x \in [a, b]\ f(x) > 0\}$ y $f \in O$. Cada función continua sobre un intervalo cerrado alcanza en dicho intervalo su mínimo. Sea $m = \text{mín}_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_0)$. Como $f(x_0) > 0$ entonces $m > 0$. Si $g \in B(f, m)$ entonces para todo $x \in [a, b]$ tenemos que

$$-m < g(x) - f(x) < m,$$

luego

$$g(x) = g(x) - f(x) + f(x) > g(x) - f(x) + m > 0.$$

Así $B(f,m) \subset O$ y por lo tanto O es abierto.

$\diamondsuit$

Hay cierta analogía entre el ejemplo anterior y el ejemplo 3.6. En ambos consideramos el conjunto de funciones (sobre $\mathbb{N}$ y $[a,b]$ respectivamente) que toman exclusívamente valores positivos.

En el siguiente teorema vamos a probar las propiedades básicas de la familia compuesta de todos los conjuntos abiertos.

Teorema 3.12 *Sea (X,d) un espacio métrico.*

1. *X es abierto en X.*
2. *$\emptyset$ es abierto en X.*
3. *Si $O_\alpha \subset X$ es abierto en X para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$ es abierto en X.*
4. *Si $O_j \subset X$, $j = 1, \ldots, n$ son abiertos en X, entonces $\bigcap_{j=1}^n O_j$ es abierto en X.*

Demostración. El inciso 1. no requiere de explicación.

2. Un conjunto A no es abierto si existe $x \in A$ tal que cualquier bola $B(x,r)$ contiene elementos que no son de A. En el caso de $A = \emptyset$ la afirmación "existe $x \in \emptyset$..." nos da una contradicción y así probamos que el conjunto vacio $\emptyset$ es abierto.

3. Si $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$, existe α_0 tal que $x \in O_{\alpha_0}$. Sabemos que O_{α_0} es abierto y podemos encontrar $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset O_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$ y así se tiene este inciso.

4. Para cada $x \in \bigcap_{j=1}^n O_j$, $1 \le j \le n$ existe $r_j > 0$ tal que $B(x, r_j) \subset O_j$. Tomando $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$ obtenemos $B(x,r) \subset \bigcap_{j=1}^n O_j$. Luego el teorema está probado.

$\blacksquare$

Inmediatamente debemos aclarar por qué en el inciso 4. se considera el número finito de conjuntos. Facilmente encontramos un ejemplo de un espacio con un número infinito de conjuntos abiertos con intersección que no es abierta.

Ejemplo 3.13 *Sean $X = \mathbb{R}$ y $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Cada intervalo I_n es abierto en $\mathbb{R}$, pero $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = \{0\}$ no es abierto en $\mathbb{R}$.*

$\diamondsuit$

En el caso del eje real $\mathbb{R}$, que es exepcional en muchos aspectos, es posible describir a todos los subconjuntos abiertos.

Teorema 3.14 *Cada abierto $O \subset \mathbb{R}$ es la unión a lo mas numerable de intervalos abiertos mutuamente disjuntos.*

Demostración. Sean $x \in O$ y $r > 0$ tal que $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset O$. Cada elemento de O pertenece a un intervalo abierto contenido en O. Sea O_x la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a x y que están contenidos en O. Por Teorema 3.12 el conjunto O_x es abierto en $\mathbb{R}$ como unión de abiertos. Obviamente

$$O = \bigcup_{x \in O} O_x.$$

Vamos a probar que cada O_x es un intervalo abierto. Sea $a < y < b$ con $a = \text{ínf}(O_x)$ y $b = \sup(O_x)$. Si $y < x$, existe $u \in O_x$ tal que $u < y$ por la definición del ínfimo. Ahora, por la definición de O_x el intervalo (u, x) pertenece a O_x y obtenemos $y \in O_x$. De forma análoga concluimos que $x < y < b$ implica $y \in O_x$. Entonces $O_x = (a, b)$.

Supongamos que para $y,\ x \in O$ con $y \neq x$ tenemos que $O_x \cap O_y \neq \emptyset$. La unión de dos intervalos abiertos que se intersectan es también un intervalo abierto, que contiene a ambos puntos x, y.

De donde obtenemos que $y \in O_x$ y $x \in O_y$, es decir $O_x = O_y$. La familia de conjuntos $\{O_x : x \in O\}$ consta de intervalos abiertos mutuamente ajenos. Cada uno de ellos contiene algún elemento racional, entonces la cardinalidad de esta familia no puede superar la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ - que es numerable.

■

Aunque esta descripción de los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ parece muy sencilla, la estructura de los abiertos en el eje real tiene sus sutilezas.

Ejemplo 3.15 *Sean $\mathbb{N} \ni n \to a_n \in \mathbb{Q}$ una una biyección, $\varepsilon > 0$ y*

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}).$$

El conjunto O es abierto y contiene a todos los números racionales, lo que sugiere que O "casi llena" *al eje. Su complemento O^c no contiene ningún intervalo. Sin embargo la suma de las longitudes de los componentes que definen a O es igual a ε, entonces el "tamaño"de O es en este sentido mínimo en comparación con el de O^c. Esto último es un problema que estudia la teoría de la medida.*

♢

Como hemos explicado anteriormente, el concepto de conjunto abierto tiene su origen en los estudios de las separaciones de puntos y conjuntos. Veamos el caso mas sencillo de estos fenómenos.

Teorema 3.16 *Sean (X, d) un espacio métrico y $x, y \in X$. Si $x \neq y$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $r = \frac{1}{2}d(x, y)$. Observemos que $r > 0$ pues $x \neq y$. Si $u \in B(x, r) \cap B(y, r)$, entonces por la desigualdad de triangulo obtenemos:

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, y) < r + r = d(x, y).$$

Así la contradicción demuestra que la intersección es vacía.

■

Cada subconjunto Y de un espacio métrico (X, d) es un espacio métrico con la métrica definida por restricción. Es importante conocer la relación entre los conjuntos abiertos en (X, d) y (Y, d).

Teorema 3.17 *Un conjunto $U \subset Y$ es abierto en Y si y solo si existe en X un abierto O tal que $U = O \cap Y$.*

Demostración. En este caso tenemos que distinguir entre las bolas en X y en Y. Es claro que, para $y \in Y$ se cumple que

$$B_Y(y, r) := \{u \in Y : d(u, y) < r\} =: B_X(y, r) \cap Y.$$

Resulta obvio que para $O \subset X$ abierto en X el conjunto $O \cap Y$ es abierto en Y. Ahora supongamos que $U \subset Y$ es abierto en Y. Para $y \in Y$, sea $r_y > 0$ tal que $B_Y(y, r_y) \subset U$. Definimos

$$O = \bigcup_{y \in Y} B_X(y, r_y).$$

Obviamente $U \subset O \cap Y$. Sea $u \in O \cap Y$. Entonces $U \in Y$ y existe $y \in U$ tal que $d(u, y) \leq r_y$, lo que implica $u \in U$.

Hemos probado la contensión $O \cap Y \subset U$ completando así la demostración.

■

En algunos problemas es importante saber si un conjunto determinado contiene a un abierto. Para ello es conveniente definir el concepto del interior de un conjunto.

Definición 3.18 *Sea $A \subset X$. Se define como el interior de A al conjunto*

$$\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \exists\, r > 0,\ B(x, r) \subset A\}.$$

Si $x \in \mathrm{Int}(A)$, decimos que A es una vecindad de x.

Note que un conjunto tiene el interior no vacío si contiene un subconjunto abierto. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es abierto.
2. $A = \mathrm{Int}\,(A)$.
3. A es vecindad de cada uno de sus elementos.

Ejemplo 3.19 *En el ejemplo 3.6 tenemos el caso del conjunto A definido como la intersección del número numerable de conjuntos abiertos*

$$A_k = \{(a_n) \in l^1 : a_k > 0\}.$$

Lo que hemos probado es que no solamente A no es abierto, sino que además $\mathrm{Int}\, A = \emptyset$.

$\Diamond$

Definición 3.20 *Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}_d$ la familia de todos los conjuntos abiertos del espacio (X, d). A esta familia, la llamamos la topología del espacio (X, d).*

Si en un espacio X están definidas dos métricas d_1, d_2 y se satisface que $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$, entonces decimos que las métricas d_1 y d_2 son equivalentes.

Ejemplo 3.21 *Sean (X, d) un espacio métrico y*

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

La función δ es una métrica. La métrica δ toma valores acotados por el número 1, sin importar cual sea la métrica d. Además las métricas d y δ son equivalentes.

Ambos hechos están probados en la sección de problemas resueltos.

La convergencia o divergencia de sucesiones se puede expresar en términos de vecindades y conjuntos abiertos.

Proposición 3.22 *En un espacio métrico (X, d) una sucesión (a_n) converge a $x \in X$ si y sólo si para cada vecindad $V(x)$ de x la condición $x_n \notin V(x)$ se cumple solo para un número finito de los índices n.*

En la demostración de este resultado se utilizan únicamente las definiciones de los conceptos correspondientes, por lo cual dejamos esta tarea al Lector.

3.2. Conjuntos cerrados

Definición 3.23 *Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $C \subset X$ es* cerrado en X *si su complemento C^c es abierto en X.*

Inmediatamente debemos enfatizar que el hecho de que un conjunto cerrado es complementario a un abierto no significa que estas propiedades son contrarias.

Ejemplo 3.24 *En el espacio $X = [-1, 0) \cup (0, 1]$ los subconjuntos mutuamente complementarios $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son ambos abiertos y cerrados.*

Las formulas de De Morgan

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c, \quad (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c,$$

conducen a las propiedades de los conjuntos cerrados que son duales a las propiedades de los abiertos. Dejamos al lector como ejercicio la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3.25 *Sea (X, d) un espacio métrico.*

1. *X es carrado en X.*
2. *$\emptyset$ es cerrado en X.*
3. *Si $O_\alpha \subset X$ es cerrado en X para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$ es cerrado en X.*
4. *Si los conjuntos $O_j \subset X$, $j = 1, \ldots, n$ son cerrados en X, entonces $\bigcup_{j=1}^n O_j$ es cerrado en X.*

El Teorema 3.16 tiene también su análogo en el caso de conjuntos cerrados.

Teorema 3.26 *Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subset X$. Un conjunto $C \subset Y$ es cerrado en (Y, d) si y sólo si existe $D \subset X$ cerrado en X tal que $C = D \cap Y$.*

Demostración. Dejamos la demostración al lector como ejercicio.

■

Hasta este momento podemos tener la impresión de que la introducción de los conjuntos cerrados es solamente un juego sin gran importancia porque mediante las fórmulas de de Morgan las propiedades de los abiertos y de los cerrados están en una correspondencia uno a uno. Las siguientes son dos razones importantes por las cuales estudiamos a los conjuntos cerrados:

1. El papel de sucesiones convergentes en el estudio de los conjuntos cerrados.

2. La importancia del concepto de la cerradura de un conjunto que sería poco manejable en términos de los conjuntos abiertos.

Teorema 3.27 *Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y sólo si cada sucesión en A que es convergente en X tiene límite en A.*

Demostración. Sean $A \subset X$ un conjunto cerrado en X y (a_n) una sucesión de elementos de A. Supongamos que $a_n \to a \in X$. Si $a \notin A$, entonces a es elemento del complemento de A el cual es un conjunto abierto. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A^c$. La bola $B(a, r)$ no contiene ningún elemento de la sucesión (a_n), lo cual es una contradicción. Luego hemos probado que $a \in A$.

Ahora supongamos que A tiene la siguiente propiedad: toda sucesión en A que convergente en X tiene su límite en A. Sea $a \in A^c$. Si A^c no es abierto, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la bola $B(a, \frac{1}{n})$ contiene a un elemento de A, digamos a_n. Luego $A \ni a_n \to a$ pero $a \notin A$. Lo cual es una contradicción. Y así concluimos la demostración del teorema.

■

La característica de conjuntos cerrados contenida en Teorema 3.27 se puede expresar utilizando el concepto de un punto de acumulación.

Definición 3.28 *Sea A un conjunto en un espacio métrico X. Un punto $x \in X$ es* un punto de acumulación de A *si en cada bola $B(x, r)$ se encuentra un elemento de A distinto de x. A los elementos de A que no son sus puntos de acumulación los llamamos* puntos aislados *de A. A un conjunto que no tiene puntos aislados lo llamamos* perfecto

Proposición 3.29 *Un elemento $a \in X$ es punto de acumulación de $A \subset X$ si y sólo si en $A \setminus \{a\}$ existe una sucesión (a_n) convergente a a.*

Demostración. Si a es un punto de acumulación de A, entonces para cada n existe un elemento $a_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$ tal que $a_n \neq a$. Así obtenemos una sucesión $A \setminus \{a\} \ni a_n \to a$.
Por otro lado, suponiendo que $a_n \in A \setminus \{a\}$ y $a_n \to a$, obtenemos que cada bola centrada en a contiene un número infinito de elementos de la sucesión, entonces a es un punto de acumulación de A.

■

Proposición 3.30 *Un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Demostración. Sea A un conjunto cerrado. Como afirma Proposición 3.29, los puntos de acumulación de A son limites de elementos de A, entonces por Teorema 3.27, pertenecen a A. Por lo tanto, cada conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación.

Ahora supongamos que A contiene todos sus puntos de acumulación. Sea $A \ni a_n \to a$. Si para algún n_0 tenemos $a_{n_0} = a$, ya sabemos que $a \in A$. En caso contrario a es un punto de acumulación de A y por suposición pertenece a A. Así por el Teorema 3.27 A es cerrado.

■

Definición 3.31 La cerradura de A *en* X *es la unión de* A *y de todos sus puntos de acumulación en* X*. La cerradura de* A *en* X *se denota* $\overline{A}$ *o* $\overline{A}^X$ *si queremos enfatizar cual es nuestro universo de trabajo.*

Proposición 3.32 *La cerradura de* $A \subset X$ *es un conjunto cerrado en* X*.*

Demostración. Según la Proposición 3.30, para probar que la cerradura es cerrada, es suficiente demostrar que cada punto de acumulación de $\overline{A}$ pertenece a $\overline{A}$, es decir es punto de acumulación del mismo A.

Tomemos $x \in X$ tal que cada bola $B(x, r)$ contiene un elemento $u \in \overline{A}$. Cada bola centrada en u, en particular la bola $B(u, r - d(x, u))$, contiene a un elemento $a \in A$. Sin empargo, $B(u, r - d(x, u)) \subset B(x, r)$, entonces $a \in B(x, r)$. Así hemos probado que cada elemento de $\overline{\overline{A}}$ pertenece a $\overline{A}$. Por lo tanto la cerradura de A es cerrada.

■

En el siguiente Teorema enunciamos algunas propiedades de la operación cerradura.

Teorema 3.33 *La operación* $A \to \overline{A}$ *tiene las siguientes propiedades*

1. $A \subset \overline{A}$,
2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración. Las propiedades 1. 2. son obvias por la definición. Las Proposiciones 3.32 y 3.30 implican el inciso 3.

Las contenciones $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ implican por la fórmula 2. que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, es decir $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por otro lado, aplicando nuevamente el inciso 2. a la fórmula $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, obtenemos que: $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Sin embargo el conjunto $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado como unión de dos conjuntos cerrados y por lo tanto es igual a su cerradura. Finalmente $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, lo que temina la demostración.

■

Existe otra manera de caracterizar la cerradura de A que es muy importante para generalizar este concepto a espacios topológicos que no son espacios métricos.

Teorema 3.34 *Sean* X *un espacio métrico y* $A \subset X$*. La cerradura de* A *es igual a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a* A*.*

Demostración. Denotemos por $\widetilde{A}$ la intersección de todos los cerrados que contienen a A. La cerradura $\overline{A}$ es uno de los conjuntos cerrados que contienen a A, entonces $\widetilde{A} \subset \overline{A}$.

Por inciso 3 de Teorema 3.25 el conjunto $\widetilde{A}$ es cerrado y obviamente contiene a A. Aplicamos las propiedades 2. y 3. del Teorema 3.33 a la contención $A \subset \widetilde{A}$ obteniendo que $\overline{A} \subset \overline{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$. Así hemos probado que $\tilde{A} = \overline{A}$.

■

Pasando a los ejercicios sobre el tema de la cerradura y los conjuntos cerrados debemos subrayar que en cada caso tenemos la opción de utilizar el método de sucesiones del Teorema 3.27 o bién las propiedades expresadas en los Teoremas 3.25 y 3.33 respectivamente. El método de sucesiones es más natural para las personas que piensan "geométricamente" mientras que el segundo método es más "algebraico".

La demostración del inciso 4. del último teorema pertenece a la segunda categoría. Como ejercicio hagámosla utilizando el método de sucesiones.

Ejercicio 3.35 *Vamos a probar las siguientes dos contenciones:* $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ *y* $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ *por el método de sucesiones.*

Si un elemento x *pertenece a* $\overline{A} \cup \overline{B}$*, existe una sucesión* (x_n) *convergente a* x *que consta de elementos de* A *únicamente o de elementos de* B *únicamente. En ambos casos la sucesión pertenece a* $A \cup B$ *entonces* $x \in \overline{A \cup B}$*.*

Si $x \in \overline{A \cup B}$*, entonces existe* $x_n \to x$*, tal que para cada* n *determinada sucede que* $x_n \in A$ *o* $x_n \in B$*. Entre los conjuntos* $N = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ *y* $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$ *al menos uno es infinito, entonces la sucesión* (x_n) *tiene una subsucesión que pertenece a* A *o una subsucesión que pertenece a* B*. Así obtenemos que* $x \in \overline{A}$ *o* $x \in \overline{B}$*.*

Ejercicio 3.36 *La igualdad 4. de Teorema 3.25 fácilmente se extiende a las uniones finitas de conjuntos. Es natural pensar en la relación entre los conjuntos* $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$ *y* $\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$*, cuando el conjunto* Λ *es infinito.*

Aplicando la operación de cerradura a relación $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ *obtenemos:*

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}.$$

Un simple ejemplo demuestra que la igualdad no siempre se da.

Sean $X = \mathbb{R}$ *y* $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$*. De la unión de los conjuntos cerrados* A_n *obtenemos el intervalo* $(0, 1]$*, mientras que la cerradura de la unión nos da el intervalo* $[0, 1]$*. Lo que sí se puede probar es la igualdad*

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A_\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha},$$

pero dicha prueba se la dejamos al lector como ejercicio.

Ejercicio 3.37 *No menos natural es preguntarse por la relación entre los conjuntos $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $\overline{A\cap B}$. Cerrando ambos lados de la relación $A\cap B\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ obtenemos la contención*

$$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}.$$

Observemos que la igualdad no se cumple si consideramos los siguientes subconjuntos del eje real. Si $A=(0,1)$ y $B=(1,a)$, el lado izquierdo de la relación es el conjunto vacío, mientras que el lado derecho consta del conjunto $\{1\}$.

Proposición 3.38 *Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces para cada $x\in E$, $r>0$*

$$\overline{B}(x,r)=\overline{B(x,r)}.$$

Recordemos que $\overline{B}(x,r)=\{y\in X:\|x-y\|\le r\}$.

Demostración. Ya hemos visto que $\overline{B(x,r)}\subset\overline{B}(x,r)$. Por la relación $C=\overline{B}(x,r)\setminus B(x,r)=\{y\in E:\|x-y\|=1\}$ es suficiente demostar que $C\subset\overline{B(x,r)}$.

Sea $u\in C$. Denotemos $v=u-x$ y $u_t=x+tv$, $0\le t\le 1$. Tenemos $d(x,u_t)=\|u_t-x\|=\|tv\|=tr$. Para $t<1$ el vector u_t es elemento de $B(x,r)$. Luego

$$d(u_t,u)=\|u_t-u\|=\|x+t(u-x)-u\|(1-t)(x-u)\|=(1-t)r.$$

Cuando $t\nearrow 1$ los elementos u_t de la bola $B(x,r)$ tienden a u. Hemos probado que $C\subset\overline{B(x,r)}$, entonces $\overline{B(x,r)}=\overline{B}(x,r)$.

■

De los cursos de álgebra lineal conocemos la construcción de un espacio cociente E/F cuando F es un subespacio vectorial del espacio vectorial E (real ó complejo). Cuando el espacio E es un espacio normado, es natural pensar en una norma para un espacio cociente.

Proposición 3.39 *Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $F\subset E$ un subespacio vectorial cerrado. La función definida en el espacio cociente E/F por la fórmula*

$$\|[x]\|:=\inf_{h\in F}\|x+h\|$$

es una norma.

Demostración. Primero vamos a estudiar la función sobre E definida por la fórmula:

$$\nu(x)=\inf_{h\in F}\|x+h\|.$$

El valor $\nu(x)$ obviamente existe y es no negativo. Además $\nu(x) \leq \|x + h\|$ para cualquier $h \in F$. La desigualdad del triangulo en E implica que para x, $y \in E$ y h, $h' \in F$ se cumple que

$$\nu(x+y) \leq \|x+y+h+h'\| \leq \|x+h\| + \|y+h'\|.$$

Tomando los ínfimos del lado derecho obtenemos

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y).$$

La función ν se anula sobre el subespacio F y por lo tanto, si $y - x \in F$ entonces:

$$\nu(x) = \nu(y + (x-y)) \leq \nu(y) + \nu(x-y) = \nu(y),$$

y de la misma manera

$$\nu(y) = \nu(x + (y-x)) \leq \nu(x).$$

Por lo tanto $\nu(x) = \nu(y)$ cuando $x - y \in F$.

La función ν toma el mismo valor sobre todo el conjunto $[x] = x + F$. La definición de $\|[\cdot]\|$ como función sobre el espacio cociente es correcta y satisface lo siguiente

$$\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| = \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) = \|[x]\| + \|[y]\|.$$

Por la definición del ínfimo, para cada $x \in E$ existe una sucesión h_n en el subespacio F tal que $\nu(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \|x + h_n\|$. Si $\nu(x) = 0$ tenemos que $0 = \nu(x) = \text{lím}_{n\to\infty} \|x + h_n\|$. Así la sucesión (h_n) es entonces convergente y su límite es el vector $-x$. El subespacio F es cerrado, así por el Teorema 3.27 se sigue que $x \in F$. La función $\|[\cdot]\|$ se anula únicamente sobre la clase $[0]$. Por lo tanto es una $\|[\cdot]\|$ norma.

■

Ejercicio 3.40 *Denotemos por* $\mathbf{c_0}$ *al espacio de todas las sucesiones convergentes a cero. Obviamente* $\mathbf{c}_0 \subset l^\infty$. *Vamos a probar que* $\mathbf{c_0}$ *es un subespacio cerrado en* l^∞.

Sea $\mathbf{c}_0 \ni \mathfrak{a}_n = (a_{nk}) \to \mathfrak{a} = (a_k)$ *en* l^∞. *Entonces tenemos que* $\text{lím}_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_{nk} - a_k| = 0$.

Luego, existe N *tal que* $|a_{Nk} - a_k| < \varepsilon/2$ *para* $k \in \mathbb{N}$. *Sabemos además que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $\text{lím}_{k\to\infty} a_{nk} = 0$. *Entonces existe* K *tal que si* $k > K$ *se tiene que* $|a_{Nk}| < \varepsilon/2$. *Así obtenemos que* $|a_k| < |a_{Nk}| + \varepsilon/2 < \varepsilon$, *cuando* $k > K$. *Hemos probado que* $\text{lím}_{k\to\infty} a_k = 0$, *es decir* $\mathfrak{a} \in \mathbf{c}_0$ *y por el Teorema 3.27 el espacio* $\mathbf{c}_0$ *es cerrado en* l^∞.

3.3. Ejercicios

1. Pruebe que en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto es una unión numerable de bolas.

2. En cada espacio métrico los conjunto finitos son cerrados.

3. Encuentre un espacio métrico (X, d) distinto del espacio discreto en el cual exista una bola $B(x, r) \subset X$ tal que
$$\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

4. Sean d y $\tilde{d}$ dos métricas en el mismo espacio X. Demuestre que las métricas d, $\tilde{d}$ son equivalentes ($d \sim \tilde{d}$) si y sólo si para cada sucesión (x_n) en X se cumple que $(x_n \to x$ en $(X, d)) \Longleftrightarrow (x_n \to x$ en $(X, \tilde{d}))$.

5. Sean d, $\tilde{d}$ dos métricas en el mismo espacio X. Supongamos que existen a, $b \in \mathbb{R}$ tales que para x, $y \in X$
$$a\, d(x,y) \leq \tilde{d}(x,y) \leq b\, d(x,y).$$
Demuestre que las métricas d, $\tilde{d}$ son equivalentes. Además, mediante un ejemplo demuestre que esta condición no es necesaria para la equivalencia de las métricas.

6. ♦ Sean (X, d) un espacio métrico, $x, y \in X$ y $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Demuestre que δ es una métrica equivalente a la métrica d.

7. En el espacio $\mathbb{R}$ definimos la métrica:
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x, y \in \mathbb{Q} \ o \ x, y \in \mathbb{Q}^c, \\ \\ |x| + |y|, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$
a. Demuestre que d es una métrica.
b. Verifique si el espacio $(\mathbb{R}, d)$ es completo.
c. Describa las bolas en este espacio.
d. Encuentre $\operatorname{Int}\mathbb{Q}$, $\operatorname{Int}\mathbb{Q}^c$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}^c}$.

8. ♦ En el espacio l^1 de las sucesiones sumables tenemos la norma natural de este espacio:
$$\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
y la estructura métrica dada por la fórmula
$$d_1((a_n),(b_n)) = \|(a_n) - (b_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|.$$
Demuestre que la métrica $d_\infty((a_n),(b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$ no es eqivalente a la métrica d_1.

9. Sean (x_n) una sucesión en un espacio métrico (X, d) convergente a x y $Y = \{x\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Describe los conjuntos cerrados en (Y, d).

10. Demuestre que para cada familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico se cumple que
$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{A_\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha}$$

11. ♦ En el plano $\mathbb{R}^2$ definamos
$$A = \{(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}) :\ x > 0\}.$$
Describe la cerradura de A.

12. ♦ Demuestre que el espacio l^1 no es cerrado en el espacio $\mathbf{c}_0$, este último provisto de la norma $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$.

13. Sea $0 < p < \infty$, los espacios l^p están definidos en el Ejercicio 14 del Capítulo 1. Si
$$A_p = \{(a_n) \in l^p : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,\ a_n \geq 0\},$$
determine si los conjuntos A_p son cerrados en los espacios l^p correspondientes.

14. Sea A un conjunto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que
$$x \in \overline{A} \iff \inf_{y\in A} d(x, y) = 0.$$

15. Demuestre que en un espacio normado la cerradura de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.

16. Sea C un conjunto en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ tal que $B(0, r) \subset C \subset \overline{B(0, r)}$. Demuestre que C es convexo. ¿Es cierta esta afirmación si en lugar de la norma euclidiana consideramos otra norma en $\mathbb{R}^n$? Encuentre un ejemplo positivo y un contraejemplo.

17. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio normado. Denotamos: $A+B = \{x + y :\ x \in A,\ y \in B\}$. Demuestre que si A es un conjunto abierto entonces $A + B$ también lo es.

18. Sea A un subconjunto en un espacio métrico X. Demuestre que el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A.

19. Demuestre las siguientes propiedades del interior de conjunto:
1. $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$.
2. $\operatorname{Int}(A^c) = (\overline{A})^c$.
3. $(\operatorname{Int}(A))^c = \overline{A^c}$.
¿Es cierto que $\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B)$ para A, B arbitrarios?

20. Para un subconjunto $A \subset X$ de un espacio métrico (X, d) se define *la frontera* de A como $\mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Demuestre las relaciones:
    a. $\mathring{A} = \mathring{A^c}$, **b.** $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(A^c)$,
    c. $\overline{\mathring{A}} \subset \mathring{A}$, **d.** $\mathring{\mathrm{Int}(A)} \subset \mathring{A}$,
    e. $\mathring{(A \cup B)} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$, **f.** $\mathring{(A \cap B)} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
    En los casos **c.**, **d.**, **e.**, **f.** demuestre que las igualdades no son válidas.

21. Sea V un abierto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que para todo $A \subset X$ se tiene que $V \cap \overline{A} \subset \overline{A \cap V}$. ¿Sigue siendo válida la relación si no se supone que V es abierto?

22. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$ un conjunto convexo. Demuestre que la cerradura $\overline{C}$ es también un conjunto convexo.

23. Sea $\mathbf{c}$ el espacio de todas sucesiones reales convergentes y sea $\mathbf{c}_0$ el espacio de sucesiones convergentes a cero. Demuestre que ambos espacios son cerrados en l^∞. ¿Es $\mathbf{c}_0$ cerrado en $\mathbf{c}$?

24. ♦ (Teorema de Cantor) Sea F_n una familia descendiente de conjuntos no vacíos cerrados en un espacio completo tal que $d(F_n) = \sup_{x,\, y \in F_n} d(x, y) \to 0$. Demuestre que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ consta de un sólo punto.

25. ♦ Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo (espacio de Banach) y $F \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Demuestre que el espacio E/F es completo.

26. ♦ Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $F \subset E$ un subespacio vectorial. Supongamos que F y E/F son espacios completos. Demuestre que el espacio E es completo.

4

Teorema de Baire

El Teorema de Baire de Categorías tiene un papel fundamental en el análisis y especialmente en análisis funcional. Los famosos teoremas tales como el Teorema de Banach-Steinhaus, el Teorema de la Gráfica Cerrada, el Teorema de Operador Abierto, el Teorema de Mazur-Orlicz y muchos más son corolarios del Teorema de Baire.

Entre los alumnos de análisis este teorema tiene mala fama. Su formulación en términos de conjuntos de primera y segunda categoría resulta poco accesible para principiantes en topología. Afortunadamente la parte crucial de esta teoría puede ser presentada sin introducir conceptos nuevos. La demostración del Teorema de Baire es un bonito ejercicio acerca de conjuntos abiertos, sucesiones de Cauchy y la completez de espacio métrico.

Después de haber conocido el Teorema de Baire y sus consecuencias, la introducción de los conjuntos de primera y segunda categoría se vuelve muy natural.

4.1. Teorema de Baire básico

Definición 4.1 *Recoordemos que un subconjunto $D \subset X$ es denso en X si $\overline{D} = X$.*

Teorema 4.2 *(Baire) Sean $n \in \mathbb{N}$ y O_n una familia de conjuntos abiertos y densos en un espacio métrico completo X. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es un conjunto denso en X.*

Demostración. Denotemos por D al conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$. Sean $x_0 \in X$ y $r_0 > 0$. Para probar que D es denso en X, será suficiente con demostrar que cada bola $B(x_0, r_0)$ intersecta a D.

Por hipótesis el conjunto O_1 es abierto y denso en X, además observemos que $B(x_0, r_0) \cap O_1$ es un conjunto abierto y no vacío, entonces contiene a alguna bola $B(x_1, s)$. Sea $r_1 = \text{mín}\{s/2, 1/2\}$. La bola más pequeña $B(x_1, r_1)$ satisface que $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_1) \cap O_1$.

Como el conjunto O_2 es abierto y denso en X entonces podemos usar los mismos argumentos con $B(x_1, r_1)$ en lugar de $B(x_0, r_0)$ para encontrar un $0 < r_2 < 1/4$ tal que $\overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1) \cap O_2$.

Así por inducción, utilizando los mismos argumentos, podemos construir dentro de $B(x_0, r_0)$ una familia de bolas tales que

$$B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2) \supset B(x_3, r_3) \supset \cdots \supset B(x_n, r_n) \supset \ldots$$

y

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n,$$

donde $n = 0, 1, \ldots$ y $r_n < 2^{-n}$.

Notemos que la sucesión (x_n) conformada por los centros de estas bolas satisface que

$$d(x_n, x_{n+k}) < 2^{-n}$$

para todos los $n,\ k \in \mathbb{N}$ y por lo tanto es una sucesión de Cauchy.

Puesto que el espacio X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Del hecho que $x_{n+k} \in \overline{B(x_n, r_n)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se sigue que $x \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset O_n \cap B(x_0, r_0)$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Así el elemento x pertenece a $D \cap B(x_0, r_0)$. Luego el teorema está probado.

■

Como primera aplicación del Teorema de Baire vamos a obtener información importante sobre la estructura de espacios métricos que son completos y numerables al mismo tiempo.

Corolario 4.3 *Si X es un espacio completo finito o numerable entonces X contiene un elemento aislado.*

Demostración. La prueba para el caso de un conjunto finito es inmediata. Supongamos que X es numerable, entonces es de la forma $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$.

Recordemos que un espacio que no contiene elementos aislados se llama perfecto. Estamos probando que un espacio completo y numerable no puede ser perfecto.

Supongamos entonces que X es perfecto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $X \setminus \{x_n\}$ es abierto y denso. Por Teorema de Baire también es denso en X el conjunto

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \{x_n\}) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\})^c = X^c = \emptyset.$$

Esta contradicción demuestra que X no es perfecto.

■

Ejemplo 4.4 *Conocemos varios ejemplos de espacios completos perfectos. Además de los intervalos en $\mathbb{R}$ y el mismo espacio $\mathbb{R}$, el espacio de Cantor también es perfecto. Con el Corolario 4.3 demostramos de forma sencilla que estos conjuntos son no numerables.*

Si en un espacio métrico X tenemos una sucesión (x_n) convergente a x_0, entonces $A = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ es un ejemplo sencillo de un espacio numerable completo y no discreto.

Aunque el teorema de Baire nos dice únicamente que un espacio completo numerable tiene al menos un punto aislado, es fácil ver que en un espacio X de estas propiedades existe un número infinito de puntos aislados. En efecto, si $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto finito de puntos aislados de X, entonces $X \setminus A$ sigue siendo numerable y completo, entonces contiene puntos aislados que a la vez son puntos aislados de X.

4.2. Teorema de Baire generalizado

Para expresar el Teorema de Baire en forma más tradicional necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.5 *Un conjunto A en un espacio métrico X es* denso en ninguna parte *si el interior de $\overline{A}$ es vacío.*

Corolario 4.6 *Si X es un espacio métrico completo y $A_n \subset X$ son conjuntos densos en ninguna parte entonces $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Demostración. Si A_n es denso en ninguna parte, entonces $\overline{A_n}$ tiene complemento abierto y denso en X.

Por teorema de Baire $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{A_n})^c \neq \emptyset$. Por la fórmula de De Morgan se tiene que $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n})^c \neq \emptyset$, es decir, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq X$. Así se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tampoco llena a X, pues es un conjunto mas pequeño.

■

En varias aplicaciones la siguiente forma de Teorema de Baire es más conveniente.

Corolario 4.7 *Si X es un espacio métrico completo que se puede representar como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que* $\mathrm{Int}(\overline{X_k}) \neq \emptyset$.

Definición 4.8 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto $A \subset X$ es de 1^a categoría en X si existe una familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte en X tal que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Un conjunto $B \subset X$ es de 2^a categoría si no es de 1^a categoría.*

Teorema 4.9 *(Teorema de Baire de categorías) Cada espacio métrico completo es de 2^a categoría en si mismo.*

4.3. Ejercicios

1. Sea $a > 0$. Demuestre que en el espacio $C([-a, a])$ los conjuntos de funciones lineales, de funciones polinomiales, de funciones impares y de funciones pares, tienen complementos densos.

2. Utiliza Teorema de Baire para demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo.

3. Demuestre que, si $Y \subset X$ es de 2^a categoría en X entonces X es de 2^a categoría en si mismo.

4. Sean X un espacio métrico completo y $O \subset X$ abierto. Demuestre que O es de segunda categoría en X.

5. ⧫ Demuestre que existen funciones continuas sobre $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que son no derivables en ninguna parte.

6. ⧫ Demuestre que en cada espacio métrico, completo y numerable el conjunto de elementos aislados es denso.

5

Separabilidad

En todos los enfoques de la teoría de los números reales, el eje $\mathbb{R}$ aparece como la completación del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, aunque no neceseriamente se usa esta terminología. En muchos problemas de análisis es importante que el conjunto numerable $\mathbb{Q}$ es denso en el eje real $\mathbb{R}$.

El concepto de espacios separables aparece cuando nos preguntamos que se puede decir sobre los espacios métricos que contienen un subconjunto numerable y denso. La conclusión más importante es que la familia de todos los conjuntos abiertos en tal espacio es también generada por una subfamilia numerable.

Los Teoremas 5.14 y 5.17 son los resultados más importantes de este capítulo.

La primera sección está dedicada a un recordatorio sobre la numerabilidad de los conjuntos.

5.1. Conjuntos a lo más numerables

Definición 5.1 *Decimos que un conjunto C es a lo más numerable si existe en C una sucesión (c_n) tal que $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si un conjunto a lo más numerable no es finito decimos simplemente que es numerable.*

Las propiedades básicas de conjuntos numerables se deducen directamente de las propiedades del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, en particular del principio de buen orden. Las dos "obvias"propiedades siguientes son importantes para el estudio de numerabilidad:

1. Cada subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ es a lo más numerable.
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

El lector interesado puede encontrar la demostración rigurosa de la propiedad 1 en el libro [Z], Capítulo II. La propiedad 1 implica de una manera natural el siguiente corolario.

Corolario 5.2 *Cada subconjunto de un conjunto a lo más numerable, es a lo más numerable.*

Demostración. Sean $D \subset C$ y $C = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos $M = \{n \in \mathbb{N} : c_n \in D\}$. Si M es finito, D es finito. En caso contrario por la propiedad 1 existe una sucesión $\mathbb{N} \ni k \to n_k \in M$ que es suprayectiva. Por lo tanto $\mathbb{N} \ni k \to c_{n_k} \in D$ es una sucesión suprayectiva. Luego el conjunto D es a lo más numerable.

■

La propiedad 2 se puede obtener construyendo explícitamente una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ejercicio 5.3 *La función* $\tau\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (k, l) \to \frac{k(k+1)}{2} + l - 1 \in \mathbb{N}$ *es una biyección.*
Sugerencia. Grafique el producto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *en el plano y despues de calcular los valores* $\tau(1,1)$, $\tau(1,2)$, $\tau(2,1)$, $\tau(1,3)$, $\tau(2,2)$, $\tau(3,1)$, *etc. encuentre la interpretación geométrica de la función* τ.

♢

Como corolarios obtenemos dos resultados.

Corolario 5.4 *Si* $X_1, X_2, \ldots, X_N$ *son conjuntos a lo más numerables, el producto cartesiano* $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ *es a lo más numerable.*

Demostración. Es suficiente demostrar el hecho para dos conjuntos X, Y y luego aplicar la inducción y la fórmula $X \times Y \times Z \equiv (X \times Y) \times Z$. Sea $\tau\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida en Ejercicio 5.3.

Denotemos $\tau^{-1}(k) = (n(k), m(k))$ para $k \in \mathbb{N}$. Si $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $Y = \{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, obtenemos

$$X \times Y = \{(x_n, y_m)\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{(x_{n(k)}, y_{m(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

El último conjunto es a lo más numerable.

■

Corolario 5.5 *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* C_n *una familia de conjuntos a lo más numerables. Entonces* $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *es un conjunto a lo más numerable.*

Demostración. Cada uno de los conjuntos C_n es de forma $C_n = \{c_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces $C = \{c_{nk}\}_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{c_{\tau^{-1}(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Luego el conjunto C es a lo más numerable.

■

Ejemplo 5.6 *El conjunto de números racionales* $\mathbb{Q}$ *es numerable, porque se puede identificar con un subconjunto del producto* $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *de pares* (k, l) *tales que* k *y* l *no tienen divisores comunes no triviales.*

El espacio $\mathbb{Q}^n$ *es también numerable para cada* $n \in \mathbb{N}$.

♢

Veamos otro ejemplo, que resultará útil en la sección siguiente.

Ejemplo 5.7 *Sean X un espacio a lo más numerable y $S(X)$ el espacio de las sucesiones $\mathfrak{a}$ con valores en X y tales que a_n es constante desde cierto índice en adelante. Entonces el espacio $S(X)$ es a lo más numerable.*

En efecto, para $\mathfrak{a} \in S(X)$ fijo, sea $N_{\mathfrak{a}}$ el índice más pequeõ desde el cual los valores de $\mathfrak{a}$ son constantes. Sea

$$\phi(\mathfrak{a}) = (a_1, \dots, a_{N_{\mathfrak{a}}}) \in X^{N_{\mathfrak{a}}}.$$

La aplicación ϕ es visiblemente inyectiva y sumerge $S(X)$ en el espacio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$. Por el Corolario 5.5 el último espacio es numerable, entonces según Corolario 5.2, $S(X)$ es a lo más numerable.

$\diamondsuit$

Ejemplo 5.8 *El conjunto $\mathcal{R}$ de todas las sucesiones que toman únicamente los valores 0 y 1 no es numerable. En efecto, supongamos que $\mathcal{F}\colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ es una biyección. Denotamos*

$$\mathcal{F}(n) = (\mathcal{F}(n)_1, \mathcal{F}(n)_2, \dots,)$$

Definimos una sucesión por la fórmula

$$\mathfrak{s} = (1 - \mathcal{F}(1)_1, 1 - \mathcal{F}(2)_2, 1 - \mathcal{F}(3)_3, \dots).$$

La aplicación $\mathcal{F}$ es biyectiva entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{s} = \mathcal{F}(N)$. Así obtenemos una contradicción pues el elemento N-ésimo de $\mathfrak{s}$ es igual a $1 - \mathcal{F}(N)_N$, mientras que el N-ésimo elemento de la sucesión $\mathcal{F}(N)$ es $\mathcal{F}(N)_N$. Por lo tanto el conjunto $\mathcal{R}$ no es numerable.

$\diamondsuit$

5.2. Espacios separables

Definición 5.9 *El espacio X es separable si contiene un subconjunto a lo más numerable y denso.*

Ejemplo 5.10 *El espacio $\mathbb{R}^n$ es una completación de $\mathbb{Q}^n$ entonces $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$. El espacio $\mathbb{Q}^n$ es numerable y denso en $\mathbb{R}^n$, así que $\mathbb{R}^n$ es separable para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.*

$\diamondsuit$

Ejemplo 5.11 *Un espacio discreto es separable si y solo si es a lo mas numerable.*

$\diamondsuit$

Ejemplo 5.12 *El espacio l^1 es separable. Recordemos que*

$$l^1 = \left\{ \mathfrak{a} = (a_n) : \|\mathfrak{a}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}.$$

Para $\mathfrak{a} = (a_n)$ *hemos denotado por* $\sigma_k(\mathfrak{a})$ *a la sucesión* $(a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$. *Sea* D *el conjunto de elementos de* l^1 *con coordenadas racionales y de la forma* $\sigma_k(\mathfrak{a})$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$. *El conjunto* D *es numerable como subconjunto del espacio* $S(\mathbb{Q})$ *el cual hemos definido en el Ejemplo 5.7.*

Vamos a probar que la cerradura de D *coincide con el espacio* l^1. *Para ello calculamos*

$$\|\mathfrak{a} - \sigma_k(\mathfrak{a})\|_1 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|.$$

La convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *significa que* $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n| = 0$, *entonces* $\lim_{k\to\infty} \sigma_k(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. *Por otro lado para cada elemento de la forma* $\sigma_k(\mathfrak{a})$ *y para cada* $\varepsilon > 0$ *existen números racionales* $q_1, \dots, q_k$ *tales que* $\sum_{n=1}^{k} |a_n - q_n| < \varepsilon$, *pues cada elemento de* l^1 *se puede aproximar por los elementos del conjunto numerable* D.

$\diamondsuit$

De manera análoga se puede probar que el espacio l^2 es separable.

Ejemplo 5.13 *El espacio* l^∞ *no es separable. Sea* $\mathcal{R}$ *el conjunto de sucesiones que toman únicamente los valores 0 y 1. Como sabemos estas sucesiones tienen la misma cardinalidad que el mismo* $\mathbb{R}$, *entonces* $\mathcal{R}$ *no es numerable. Por otro lado, si* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *son elementos distintos de* $\mathcal{R}$ *tenemos que* $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| > 2$.

El conjunto $\mathcal{R} \subset l^\infty$ *tiene la métrica discreta y es no numerable, por lo tanto* $\mathcal{R}$ *y* l^∞ *son no separables.*

$\diamondsuit$

Existen otras formas de caracterizar la separabilidad de un conjunto, una de ellas es en términos de conjuntos abiertos en lugar de aproximaciones. El siguiente teorema da cuenta de ello.

Teorema 5.14 *Un espacio métrico* (X, d) *es separable si y sólo si existe una familia a lo más numerable* $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de conjuntos abiertos tal que cada abierto* $O \subset X$ *se puede representar como* $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{n_k}$.

Demostración. Supongamos que X es un espacio separable con un subconjunto denso $D = \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$. Sean $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $O_{n,k} = B(x_n, \frac{1}{k})$. Los conjuntos $O_{n,k}$ son abiertos y forman una familia a lo más numerable.

Sea $O \subset X$ un abierto y sea $\mathcal{U} = \{O_{n,k} : O_{n,k} \subset O\}$. Como subfamilia de una familia numerable, $\mathcal{U}$ es una familia a lo más numerable de conjuntos abiertos. Vamos a probar que $O = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$.

Para $x \in O$ arbitrario debemos encontrar un elemento de la familia $\mathcal{U}$ que lo contenga. Por ser O abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O$. Ahora sea

$k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < r/2$. Por la densidad del conjunto D existe $x_n \in D$ tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{k})$ y se cumple que

$$x \in B(x_n, \frac{1}{k}) \subset B(x,r) \subset O.$$

La bola $B(x_n, \frac{1}{k})$ pertenece a la familia $\mathcal{U}$ y contiene el elemento $x \in O$. Luego la familia $\mathcal{U}$ tiene las propiedades deseadas.

Ahora supongamos que en el espacio X hay una familia numerable $\mathcal{U}$ tal que cada conjunto abierto se puede representar como unión de algunos elementos de esta familia. Para $O_n \in \mathcal{U}$, sea $x_n \in O_n$ (¡axioma de selección!). Vamos a probar que el conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X.

Sean $x \in X$ y $r > 0$. La bola $B(x,r)$ es un conjunto abierto y se puede representar como $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_{n_k}$, donde $O_{n_k} \in \mathcal{U}$. Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in O_{n_{k_0}}$. Por la definición $x_{n_{k_o}} \in O_{n_{k_0}} \subset B(x,r)$. En particular $d(x, x_{n_{k_o}}) < r$. Así hemos probado que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X y por lo tanto X es separable.

$\Diamond$ ■

El Teorema 5.14 nos proporciona en realidad una definición equivalente de la separabilidad de un conjunto. De hecho esto nos ayuda a que algunas propiedades de espacios separables se puedan demostrar más fácilmente.

Corolario 5.15 *Sean (X,d) un espacio métrico separable y $Y \subset X$. Entonces (Y,d) es separable.*

Demostración. Si $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos en X que tiene las propiedades de la definida en el Teorema 5.14, entonces $O_n = U_n \cap Y$ es la familia de abiertos en Y que tiene las mismas propiedades. Luego el espacio Y es separable.

■

Obviamente se puede demostrar el Corolario 5.15 utilizando la definición original de separabilidad. Lo recomendamos como ejercicio.

Definición 5.16 *Sea A un subconjunto del espacio métrico X. Una cubierta abierta de A es una familia $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de conjuntos abiertos en X tal que $A \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} O_\alpha$. Si $\Lambda \subset \Delta$ entonces a la familia $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, la llamamos subcubierta de $\mathcal{O}$.*

El concepto de una cubierta abierta juega un papel fundamental en el estudio de espacios compactos. Sin embargo, la separabilidad del espacio se puede caracterizar también en estos términos. La familia de abiertos $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ del Teorema 5.14 es un ejemplo de una cubierta, pero en este caso la cubierta tiene propiedades adicionales muy espaciales, a saber es muy fina.

El siguiente Teorema es otra caracterización de espacios separables, la cual es conocida como el Teorema de Lindelöf.

Teorema 5.17 (Lindelöf) *Un espacio métrico X es separable si y sólo si de cada cubierta abierta de X se puede selecciónar una subcubierta a lo más numerable.*

Demostración. Vamos a llamar *la propiedad de Lindelöf* a la condición que según el presente teorema eqivale a la separabilidad de un espacio métrico. Esta propiedad de cubiertas abiertas del espacio $\mathbb{R}^n$ fue observada por Lindelöf en 1903 dando inicio a una teoría actualmente muy avanzada.

Supongamos que X es separable. Sabemos por el Teorema 5.14 que existe una cubierta numerable $\mathcal{O} = \{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que cada abierto $O \subset X$ se puede cubrir con una subfamilia de $\mathcal{O}$.

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una cubierta abierta de X arbitraria. Primero definimos una subfamilia $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$. A un conjunto O_n, lo incluimos en $\mathcal{O}'$ si existe $\alpha \in A$ tal que $O_n \subset U_\alpha$. La familia $\mathcal{O}'$ es también una cubierta abierta a lo más numerable de X. En efecto, para cualquier $x \in X$ existe $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$. El abierto U_α es unión de algunos elementos de la cubierta $\mathcal{O}$. En particular, para algún O_n se cumple $x \in O_n \subset U_\alpha$.

Resulta que $O_n \in \mathcal{O}'$ y que cada $x \in X$ pertenece a algún elemento de la cubierta reducida $\mathcal{O}'$. Ahora, para cada $O_n \in \mathcal{O}'$ escogemos uno de los U_α que lo contenga y ya tenemos una subcubierta numerable de $\mathcal{U}$. Hemos probado que cada espacio métrico separable tiene la propiedad de Lindelöf, es decir cada cubierta abierta del espacio se puede reducir a una cubierta numerable.

Ahora supongamos que X tiene la propiedad de Lindelöf. Vamos a probar que X es separable construyendo un subconjunto denso numerable.

Sea $\mathcal{U}_n$ la familia de todas las bolas en X de radio $\frac{1}{n}$. Obviamente $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de X. Esta cubierta tiene una subcubierta numerable que es de la forma $\mathcal{U}'_n = \{B(x_{n,k}, \frac{1}{n}) : x_{n,k} \in X,\, k \in \mathbb{N}\}$.

Repitiendo el procedimiento para cada $n \in \mathbb{N}$ obtenemos un conjunto numerable de elementos de X, a saber $D = \{x_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$.

Inmediatamente vemos que el conjunto D es numerable y denso en X. Si $x \in X$ y $r > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Luego, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$ y por lo tanto existe k tal que $x \in B(x_{n,k}, \frac{1}{n})$. En cada vecindad de x existe un elemento de D. Por lo tanto D es denso en X. Y así obtenemos lo deseado.

■

5.3. Ejercicios

1. ¿Cuando un espacio discreto es separable?
2. Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ es no numerable.

3. ♦ Sean (X, d) un espacio métrico separable y $C \subset X$ un conjunto que es no numerable. Demuestre que C contiene un número no numerable de sus puntos de acumulación.

4. ♦ Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset E$ un conjunto separable. Demuestre que la la cáscara convexa de A es separable.

5. ♦ La siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$: (vea Capítulo 1, Ejercicio 6)

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si tal número ¿ no existe.} \end{cases}$$

Demuestre que el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ no es separable.

6. ♦ Supongamos que en el espacio métrico X cada conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es separable.

7. Para $A \subset \mathbb{N}$ definimos la función (sucesión) característica del conjunto A como

$$1_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A, \\ \\ 0, & n \notin A \end{cases}.$$

Demuestre que las combinaciones lineales de las funciones características forman un conjunto denso en l^∞.

8. Sea G un subgrupo del grupo additivo $(\mathbb{R}, +)$. Demuestre que G es denso en $\mathbb{R}$ si y solo si $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$.

9. Sea $r \in \mathbb{Q}^c$. Demuestre que el conjunto $\{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

10. Demuestre que la métrica en un espacio métrico (X, d) es equivalente a la métrica discreta si y sólo si el único subconjunto denso en X es el mismo X.

6

Funciones y aplicaciones continuas

6.1. Definición de continuidad

Existen dos opciones de definir la continuidad de aplicaciones entre los espacios métricos, exactamente como en el caso de aplicaciones entre los espacios euclidianos. Ambas definiciones son equivalentes, entonces es solamente un problema didáctico cual de las dos escogemos como la básica. Consideramos como más natural la definición secuencial relacionada con el nombre del matemático alemán H. E. Heine (1821-1881).

Definición 6.1 *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y $x \in X$. Una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua en x si para cualquier sucesión convergente $x_n \to x$ en X se cumple que $F(x_n) \to F(x)$ en Y.*

La segunda de las definiciones mencionadas pertenece al francés A. L. Cauchy (1789-1857), a quien se considera creador del análisis funcional. Sus definiciones y demostraciones precisas de "tipo ε, δ", tan odiadas por los alumnos, abrieron una época nueva en matemáticas. Presentamos la definición de Cauchy en forma del siguiente teorema.

Teorema 6.2 *Dados (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Sean $F\colon X \to Y$ una aplicación y $x \in X$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que la distancia $d_X(x, y) < r$ implica que $d_Y(F(x), F(y)) \leq \varepsilon$.

(b) F es continua en x.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Supongamos que la aplicación tiena la propiedad descrita en el inciso (a). Sea $x_n \to x$ en X. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea $r > 0$ el número que existe de acuerdo con la condición (a). Por la convergencia de la sucesión (x_n) podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se cumple que $d_X(x_n, x) < r$. Por consiguiente para los mismos n se cumple que $d_Y(F(x_n, F(x)) \leq \varepsilon$. La convergencia $F(x_n) \to F(x)$ está probada.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que F es continua en x y que la condición (b) no se cumple. Vamos a llevar esta situación al absurdo. La condición (b) no se cumple si podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta > 0$ arbitrario algún punto x_δ satisface que $d_X(x_\delta, x) < \delta$, mientras que $d_Y(F(x_\delta, F(x)) > \varepsilon$.

En particular, tomando δ como $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, se obtiene en X una sucesión (x_n) que converge a x, pero los valores $F(x_n)$ están a una distancia mayor que ε del punto $F(x)$. La aplicación no es continua en x contrario a nuestra suposición.

■

Ejemplo 6.3 *En el caso de las funciones y aplicaciones sobre el espacio euclideaano la existencia de objetos continuos es obvia, porque la estructura vectorial del espacio nos proporciona las funciones - coordenadas que son continuas. En el caso de un espacio métrico, las funciones dadas por la misma estructura del espacio son las distancias.*

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $y \in X$ fijo definimos la siguiente función

$$f_y(x) = d(x, y).$$

Vamos a probar que esta función es continua en cada punto $x \in X$ usando el criterio de Cauchy de continuidad. Observemos que

$$|f_y(x) - f_y(u)| = |d(x, y) - d(x, u)| \leq d(x, u)$$

por la Proposición 1.2. Ahora dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $r = \varepsilon$ y de esta manera bajo la condición $d(x, u) < r$ obtenemos que $|f_y(x) - f_y(u)| \leq \varepsilon$, es decir, función f_y es continua.

$\diamondsuit$

Resulta que la familia de funciones que obtenemos de esta manera es bastante amplia. Al menos es suficiente para separar los puntos de X.

Definición 6.4 *Una familia de funciones $\mathcal{F}$ definidas en el espacio X* separa los puntos de X *si para cada par de puntos $x \neq y$ en X existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

El ejemplo fundamental de una familia de funciones que separa los puntos del dominio es el sistema de coordenadas en el espacio euclidiano. El caso de las funciones f_x definidas en Ejemplo 6.3 es muy sencillo, pero de suma importancia.

Teorema 6.5 *Sea (X, d) un espacio métrico. Para $y \in X$ fijo definimos $f_y(x) = d(x, y)$. La familia de funciones $\mathcal{D} = \{f_y : y \in X\}$ separa los puntos del espacio X.*

Demostración. Si x, $y \in X$ y $x \neq y$ entonces la función f_y separa estos puntos. En efecto, $f_y(y) = 0$, mientras que $f_y(x) = d(x, y) \neq 0$.

■

Ejemplo 6.6 *La función distancia $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es también continua con respecto a la distancia*

$$D((x,y),(u,v)) = d(x,u) + d(y,v)$$

definida en $X \times X$. Para la demostración usamos la desigualdad del rectángulo (Proposición 1.3). Según esta fórmula

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,y) + d(u,v) = D((x,y),(u,v)).$$

Dado $\varepsilon > 0$, es suficiente con que tomemos $r = \varepsilon$ y entonces la condición $D((x,y),(u,v)) < r$ implica que $|d(x,y) - d(u,v)| \leq \varepsilon$.

$\diamondsuit$

Es conveniente formular la condición (a) del Teorema 6.2 en términos de las bolas en los espacios correspondientes. El siguiente resultado significa únicamente un cambio de lenguaje y es tan solo otra forma del Teorema 6.2.

Proposición 6.7 *Una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y sólo si*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, r > 0 \quad F(B_X(x,r)) \subset B_Y(F(x),\varepsilon).$$

A continuación seguimos reformulando Teorema 6.2 para darle forma cada vez más "topologica" y menos "técnica". El cambio es de gran importancia para nuestra forma de pensar, pero también tiene grandes valores prácticos.

Teorema 6.8 *Una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para toda vecindad $U \subset Y$ del punto $F(x)$ la imagen inversa $F^{-1}(U)$ contiene una vecindad de x.*

Demostración. Suponemos primero que F es continua. Si $U \subset Y$ es una vecindad de $F(x)$, existe una bola $B_Y(F(x),\varepsilon) \subset U$. Por la Proposición 6.7 existe $r > 0$ tal que $F(B_X(x,r)) \subset B_Y(F(x),\varepsilon)$ lo cual implica que $B_X(x,r) \subset F^{-1}(U)$. Así vemos que $F^{-1}(U)$ es efectivamente una vecindad de x.

Ahora supongamos que $F^{-1}(U)$ es una vecindad de x, siempre y cuando U sea una vecindad de $F(x)$. En particular para $U = B_Y(F(x),\varepsilon)$ la imagen inversa $F^{-1}(B_Y(F(x),\varepsilon))$ es una vecindad de x y por lo tanto contiene una bola $B_X(x,r)$. Y así la Proposición 6.7 demuestra que la aplicación F es continua.

$\blacksquare$

Definición 6.9 *Cuando una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua en todos los puntos del dominio, decimos simplemente que F es continua. El espacio de todas las aplicaciones continuas entre dos espacios métricos X, Y se denota por $C(X,Y)$. Por $BC(X,Y)$ denotamos al espacio de las aplicaciones acotadas y continuas.*

Teorema 6.10 *Una aplicación $F\colon X \to Y$ es continua si y sólo si para cada $U \subset Y$ abierto $F^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sean F una aplicación continua y $U \subset Y$ un conjunto abierto. Sea $x \in F^{-1}(U)$. El conjunto U es una vecindad de $F(x)$, entonces por el Teorema 6.8 $F^{-1}(U)$ contiene una vecindad de x y por lo tanto una bola $B(x,r)$. Así hemos probado que $F^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

$\Leftarrow$ Suponiendo que la imagen inversa de cada abierto $U \subset Y$ es abierto en X, fijamos $x \in X$ y una vecindad U del punto $F(x)$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $B(F(x),\varepsilon) \subset U$. El conjunto $F^{-1}(B(F(x),\varepsilon)$ es abierto y contiene a x, entonces este es una vecindad de x y por el teorema 6.8 obtenemos la continuidad de F en cada $x \in X$.

■

En muchos casos la continuidad de una aplicación no es obvia, pero resulta fácil de probar si la tratamos como composición de aplicaciones mas simples.

Teorema 6.11 *Sean X, Y, Z espacios métricos y $F\colon X \to Y$, $G\colon Y \to Z$ aplicaciones. Si F es continua en $x \in X$ y G es continua en $F(x) \in Y$, entonces la composición $G \circ F(y) := G(F(y))$ es continua en x.*

Demostración. Vamos a aplicar Teorema 6.8. Sea V una vecindad del punto $G \circ F(x) = G(F(x))$. Debemos probar que $(G \circ F)^{-1}(V)$ contiene a una vecindad de x. Por la definición de la composición $(G \circ F)^{-1}(V) = F^{-1}(G^{-1}(V))$. Aplicando Teorema 6.8 a la aplicación G sabemos que $G^{-1}(V) \subset Y$ contiene a una vecindad U de $F(x)$, luego por continuidad de F obtenemos que $F^{-1}(U)$ contiene a una vecindad O de x, la cual está contenida en $(G \circ F)^{-1}(V)$.

■

Ejemplo 6.12 *Veamos como el Teorema 6.8 se usa en ciertos casos para investigar si un conjunto dado es abierto. Sea*

$$O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x + y < 3,\ 0 < z - y\}.$$

Para probar directamente por la definición que O es abierto tendríamos que hacer cálculos relativamente complicados. En lugar de eso, definamos la aplicación $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y,z) = (x + y, z - y).$$

Obtenemos entonces: $O = F^{-1}((1,3) \times (0,\infty))$. La aplicación F es continua en cada punto, el conjunto $(1,3) \times (0,\infty)$ es abierto, entonces por Teorema 6.8 nuestro conjunto O es una vecindad de cada uno de sus puntos. Por lo tanto O es abierto.

Inmediatamente podemos generalizar este método.

Ejemplo 6.13 *Sean X un espacio métrico y $f_1, \dots, f_k \in C(X)$. Definimos*

$$O = \{x : a_1 < f_1(x) < b_1, \dots, a_k < f_k(x) < b_k\}.$$

Podemos representar $O = F^{-1}((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k))$, donde la aplicación $F\colon X \to \mathbb{R}^k$ está dada por: $F(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$. Así el conjunto O es abierto como imagen inversa del cubo abierto $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_k, b_k)$ bajo una aplicación continua.

$\diamondsuit$

Ejemplo 6.14 *Como sabemos, una matriz $k \times k$ real o compleja A es invertible si y sólo si* $\det A \neq 0$. *La matriz A es un elemento del espacio $\mathbb{K}^{k\times k}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dependiendo del caso. La función determinante* $\det\colon \mathbb{K}^{k\times k} \to \mathbb{K}$ *es continua pues tiene forma polinomial. El conjunto de matrices invertibles se representa como $O = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ y es abierto.*

Un análisis mas detallado permite calcular para cada $A \in O$ el radio $r(A) > 0$ tal que $B(A, r(A)) \subset O$. Este radio depende únicamente de la norma de A en el espacio $\mathbb{K}^{k\times k}$.

Por lo tanto, si A_n es una sucesión de matrices que converge a la matriz invertible A, entonces existe N tal que para todos $n > N$ la matriz A_n es invertible.

Observemos que en este ejemplo los conjuntos abiertos aparecen no solo como una herramienta para estudiar la continuidad sino como un criterio para estudiar la invertibilidad de matrices.

6.2. Homeomorfismos, isometrías

Definición 6.15 *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. Un homeomorfismo entre X y Y es una biyección $F \in C(X, Y)$ tal que $F^{-1} \in C(X, Y)$. Los espacios X, Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Una aplicación $F\colon X \to Y$ es isométrica (es una isometría) si $d_Y(F(x), F(y)) = d_X(x, y)$ para todos x, $y \in Y$.*

Cada isometría es inyectiva y continua. La aplicación inversa a una isometría es también isométrica, entonces cada isometría es un homeomorfismo sobre su imagen.

Para establecer la existencia de homeomorfismo entre dos espacios dados es importante ver cuales propiedades se conservan bajo los homeomorfismos.

Ejemplo 6.16 *La completez de un espacio no es una propiedad invariante bajo homeomorfismos. Los espacios $\mathbb{N}$ y $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, ambos provistos de la métrica en $\mathbb{R}$ son homeomorfos por medio de la aplicación $\mathbb{N} \ni n \to \frac{1}{n} \in Y$. El primer espacio es completo y el segundo no lo es.*

Ejemplo 6.17 *Las propiedades de conjuntos "ser abierto", "ser cerrado" son invariantes bajo homeomorfismos.*

Ejemplo 6.18 *La separabilidad es una propiedad invariante bajo homeomorfismos. Gracias al Teorema 5.17 el hecho es obvio porque un homeomorfismo transforma una cubierta abierta en cubierta abierta.*

6.3. Continuidad uniforme

La propiedad de continuidad de una aplicación es de caracter local incluso considerando la continuidad en todos los puntos del dominio. Para un punto x del dominio y $\varepsilon > 0$ dado, el valor de r que asegure la implicación

$$d(x,y) < r \;\Rightarrow\; d(F(x),F(y)) < \varepsilon$$

depende no solamente de $\varepsilon > 0$ sino también del punto x. Las aplicaciones que admiten para $\varepsilon > 0$ el valor de r que sirva para todos los puntos del dominio, se llaman uniformemente continuas y son de importancia especial.

Definición 6.19 *Una aplicación $F\colon X \to Y$ es* uniformemente continua *si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que para x, $y \in X$*

$$d(x,y) < r \;\Rightarrow\; d(F(x),F(y)) < \varepsilon.$$

Obviamente cada aplicación uniformemente continua es continua. Las aplicaciones uniformemente continuas *"respetan"* a las sucesiones de Cauchy, cosa que no se cumple para algunas aplicaciones continuas.

Proposición 6.20 *Sean $F\colon X \to Y$ una aplicación uniformemente continua y (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Entonces $(F(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en Y.*

Demostración. El hecho se deduce directamente de las definiciones correspondientes. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(F(x),F(y)) < \varepsilon.$$

Sea N tal que para n, $m > N$ se cumple que $d_X(x_n,x_m) < \delta$. Para los mismos n, $m \in \mathbb{N}$ obtenemos $d_Y(F(x_n),F(x_m)) < \varepsilon$, lo que demuestra que $(F(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en Y.

■

Teorema 6.21 *Sean $F\colon X \to Y$ una aplicación uniformemente continua y $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ las completaciones de los espacios X y Y, respectivamente. Entonces existe una aplicación uniformemente continua $\tilde{F}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$ tal que $\tilde{F}|_X = F$.*

Demostración. En los espacios $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ denotamos las distancias por $\tilde{d}_X$ y $\tilde{d}_Y$ respectivamente. Tenemos que definir el valor $\tilde{F}(u)$ para cada $u \in \tilde{X}$ conservando la continuidad uniforme de la aplicación.

Sea $u = \lim_{n\to\infty} x_n$, donde $x_n \in X$. La sucesión (x_n) es de Cauchy en X entonces por la Proposición 6.20 la sucesión $(F(x_n))$ es de Cauchy en Y. Así existe $\lim_{n\to\infty} F(x_n) \in \tilde{Y}$. Definimos $\tilde{F}(u) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Observemos que para $n > N$ se cumple que $\tilde{d}_Y(\tilde{F}(u), F(x_n) \leq \varepsilon$.

Debemos asegurarnos sin embargo, que el valor $\tilde{F}(u)$ no depende de la sucesión particular (x_n) que aproxima a u. Si $(y_n) \sim (x_n)$, existe M tal que para $n > M$ se cumple que $d_X(y_n, x_n) < \delta$ y nuevamente por la continuidad uniforme $d_Y(F(x_n), F(y_m)) < \varepsilon$. Luego las sucesiones $(F(x_n))$ y $(F(y_n))$ son equivalentes y así

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(y_n).$$

Obviamente $\tilde{F}(x) = F(x)$ para $x \in X$. Ahora, sólo queda por probar que $\tilde{F}$ es uniformemente continua. Si $u = \lim_{n\to\infty} x_n$, $v = \lim_{n\to\infty} y_n$ y $\tilde{d}_X(u, v) < \delta/3$, entonces existe N tal que para $n > N$ se cumple que $\tilde{d}_X(u, x_n) < \delta/3$, $\tilde{d}_X(u, y_n) < \delta/3$, de tal manera que

$$d_X(x_n, y_n) < \tilde{d}_X(u, x_n) + \tilde{d}_X(u, v) + \tilde{d}_X(v, x_n) < \delta.$$

Y por la continuidad uniforme de F se sigue que:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_Y(\tilde{F}(u), \tilde{F}(v)) &\leq \tilde{d}_Y(\tilde{F}(u, F(x_n)) + \tilde{d}_Y(F(x_n), F(y_n)) \\ &+ \tilde{d}_Y(\tilde{F}(v), F(y_n)) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, la extensión $\tilde{F}$ de la aplicación F es uniformemente continua.

■

Ejemplo 6.22 *El espacio métrico $BC(X, Y)$. Para espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) denotamos por $BC(X, Y)$ al espacio de aplicaciones $f\colon X \to Y$ acotadas y continuas. El espacio $BC(X, Y)$ dispone de la métrica natural*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

heredada del espacio $B(X, Y)$.

Teorema 6.23 *El espacio $BC(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $B(X, Y)$. Si Y es completo entonces $BC(X, Y)$ también lo es.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $BC(X, Y)$ convergente a una aplicación f en $B(X, Y)$. Debemos probar que f es una función continua.

Sea N tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $d_\infty(f, f_n) < \varepsilon/3$. La función f_N es continua, entonces para todo $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $d_X(x, y) < r$ implica que $d_Y(f_N(x), f_N(y)) < \varepsilon/3$. Para los mismos x, y calculamos:

$$d_Y(f(x), f(y)) \le d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(y)) + d_Y(f_N(y), f(y))$$

$$\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Hemos probado la continuidad de f en cada punto del dominio. El conjunto $BC(X,Y)$ es cerrado en $B(X,Y)$. Cuando Y es completo, el espacio $B(X,Y)$ es completo (ver Ejemplo 2.8) y así su subespacio cerrado $BC(X,Y)$ también es completo.

■

6.4. Continuidad de operadores lineales

Cuando $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado, tenemos en E dos estructuras: la lineal de suma y de multiplicación por números y la estructura métrica. La definición de la norma establece la relación entre estas estructuras. Es natural pensar primero en la continuidad de las operaciones algebraicas en E. Estudiamos entonces la continuidad de dos aplicaciones:

$$S\colon\ E \times E \ni (x,y) \to x + y \in E,$$

$$M\colon\ \mathbb{K} \times E \ni (t,x) \to tx \in E.$$

En el espacio $E \times E$ fijamos la norma $\|(x,y)\| = \|x\|_E + \|y\|_E$ y en $\mathbb{K} \times E$ la norma $\|(t,x)\| = |t| + \|x\|_E$.

Proposición 6.24 *Las aplicaciones S y M son continuas.*

Demostración. Para (x,y), $(u,v) \in E \times E$ se tiene

$$\begin{aligned}\|S(x,y) - S(u,v)\|_E &= \|x + y - (u+v)\|_E = \|(x-u) + (y-v)\|_E \\ &\le \|x-u\|_E + \|y-v\|_E = \|(x,y) - (u,v)\| \\ &= d((x,y),(u,v)).\end{aligned}$$

La desigualdad asegura la continuidad de la operación de adición. En el caso de la multiplicación M calculamos:

$$\begin{aligned}\|M(t,x) - M(s,y)\|_E &= \|tx - sy\|_E = \|t(x-y) + (t-s)y\|_E \\ &\le |t|\|x-y\|_E + |t-s|\|y\|_E.\end{aligned}$$

Cuando $(s_n, y_n) \to (t,x)$, se obtiene que $M(s_n,y_n) \to M(t,x)$.

■

Sean E, F espacios normados sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $A\colon E \to F$ un operador lineal, es decir una aplicación $A\colon E \to F$ tal que para todos x, $y \in E$, $a \in \mathbb{K}$

$$A(x + ay) = A(x) + aA(y).$$

Un operador lineal es continuo en todas partes si y sólo si es continuo en cero. Lo vamos a demostrar en el siguiente teorema, donde incluimos otro criterio de continuidad que tiene mucha importancia para la teoría.

Teorema 6.25 *Sea $A\colon E \to F$ un operador lineal. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

(a) A es continuo en cero.

(b) A es uniformemente continuo.

(c) $\sup_{\|y\|_E \leq 1} \|A(y)\|_F < \infty$.

(d) Existe $C > 0$ tal que para todo $x \in E$

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponemos que A es continuo en cero. En particular para cada $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que para $x \in E$ con $\|x\|_E < r$ se cumple que $\|A(x)\|_F < \varepsilon$. Si los puntos x, $y \in E$ satisfacen que $\|x - y\|_E < r$ entoces obtenemos que $\|A(x) - A(y)\| = \|A(x - y)\|_F < \varepsilon$. Es decir, el operador es uniformemente continuo.

(b) $\Rightarrow$ (c) La continuidad de A en cero expresada en términos del Teorema 6.2 inciso (a) implica que existe $r > 0$ tal que para $\|x\|_E < r$ se tiene que $\|A(x)\|_F \leq 1$. Si $\|y\|_E \leq 1$, obtenemos que $\|\frac{r}{2}y\|_E = \frac{r}{2}\|y\|_E < r$, entonces $\left\|A(\frac{r}{2}y)\right\|_F \leq 1$. Así obtenemos $\left\|A(y)\|_F = \frac{2}{r}\|A(\frac{1}{2}ry)\right\|_F \leq \frac{2}{r} < \infty$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sea $C = \sup_{\|y\|_{E \leq 1}} \|A(y)\|_F < \infty$. Para $x \neq 0$ tenemos $\left\|\frac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = 1$. Por lo tanto $\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq C$, luego $\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E$. Para $x = 0$ la misma desigualdad se cumple.

(d) $\Rightarrow$ (a) La desigualdad en cuestión implica que para $\|x_n\|_E \to 0$ se cumple que $\|A(x_n)\|_F \to 0$ y la continuidad de A en cero está probada.

■

El valor $\sup_{\|y\|_{E \leq 1}} \|A(y)\|_F$ se denota por $\|A\|$ y se llama *norma del operador* A. El espacio de todos los operadores lineales continuos $A\colon E \to F$ se denota por $L(E, F)$. Al espacio $L(E, \mathbb{K})$ de las funciones lineales y continuas sobre E, se le llama el *espacio dual* de E y se denota por E'. Para el espacio de todas las funciones lineales sobre un espacio vectorial E usamos la notación E^*.

Ejemplo 6.26 *Veamos como se puede describir el espacio dual del espacio* $\mathbf{c}_0$ *que es el espacio de todas las sucesiones complejas convergentes a cero. La función*

$$\mathbf{c}_0 \ni \mathfrak{a} = (a_n) \to \|\mathfrak{a}\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j|$$

es una norma en $\mathbf{c}_0$.

A cada $\mathfrak{c} = (c_n) \in l^1$, *le podemos asociar un elemento de* $\mathbf{c}_0'$ *por la fórmula*

$$\varphi_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j.$$

La serie del lado derecho converge pues

$$|\varphi_{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a})| = |\sum_{j=1}^{\infty} c_j a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |c_j a_j| \leq \|\mathfrak{c}\|_1 \|a\|_\infty < \infty.$$

La misma desigualdad demuestra que $\varphi_{\mathfrak{c}} \in \mathbf{c}_0'$ *y además* $\|\varphi_{\mathfrak{c}}\| \leq \|\mathfrak{c}\|_1$.

Ahora vamos a demostrar que cada $\varphi \in \mathbf{c}_0'$ *es de esta forma, es decir existe* $\mathfrak{c} \in l^1$ *tal que* $\varphi = \varphi_{\mathfrak{c}}$. *Para* $\mathfrak{a} = (a_n) \in \mathfrak{c}_0$ *arbitrario definamos una sucesión en el mismo espacio convergente a* $\mathfrak{a}$. *Denotamos por* $\mathfrak{e}_N$ *a la sucesión de forma* $\mathfrak{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots)$ *y definimos*

$$\mathfrak{a}_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathfrak{e}_j = (a_1, \dots, a_N, 0, 0, \dots).$$

Tenemos entonces que $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_N\|_\infty = \sup_{j>N} |a_j| \to 0$, *pues la sucesión* $\mathfrak{a}$ *es convergente a cero. Ahora calculamos aprovechando la continuidad de* φ:

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \lim_{N\to\infty} \varphi(\mathfrak{a}_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi(\mathfrak{e}_j).$$

Sabemos que este límite existe, entonces

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi(\mathfrak{e}_j).$$

Así, de esta manera hemos demostrado que φ *está definido por una sucesión* $\mathfrak{c} = (\varphi(\mathfrak{e}_n))$ *y queda por demostrar que* $\mathfrak{c} \in l^1$.

Cada número complejo $c_n = \varphi(\mathfrak{e}_n)$ *tiene la forma* $c_n = |c_n| e^{i\alpha_n}$, *donde* $0 \leq \alpha_n < 2\pi$. *Sea*

$$\mathfrak{b}_N = (e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \dots, e^{i\alpha_N}, 0, 0 \dots) = \sum_{j=1}^{N} e^{i\alpha_j} \mathfrak{e}_j.$$

Las sucesiones $\mathfrak{b}_N$ *pertenecen al espacio* $\mathbf{c}_0$ *y son de norma 1, entonces*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |\varphi(\mathfrak{b}_N) \leq \|\varphi\|.$$

Sin embargo $\varphi(\mathfrak{b}_N) = \sum_{j=1}^{N} |\varphi(\mathfrak{e}_n)| = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\mathfrak{e}_n)|$. *De donde concluimos que* $\varphi = \varphi_{\mathfrak{c}}$, *con* $\mathfrak{c} = (c_n) = (\varphi(\mathfrak{e}_n)) \in l^1$ *y además* $\|\mathfrak{c}\|_1 \leq \|\varphi\|$. *Junto con el resultado anterior se obtiene que* $\|\varphi\| = \|\varphi_{\mathfrak{c}}\| = \|\mathfrak{c}\|_1$.

La aplicación $l^1 \ni \mathfrak{c} \to \varphi_{\mathfrak{c}} \in \mathbf{c}_0'$ *es lineal, suprayectiva y conserva la norma. Es entonces un elemento del espacio de operadores* $L(l^1, \mathbf{c}_0')$. *Obtenemos así una descripción completa del espacio dual* $\mathbf{c}_0'$ *que simbólicamente podemos expresar como* $\mathbf{c}_0' \cong l^1$.

$\diamondsuit$

Ejemplo 6.27 *Uno de los espacios mas importantes que se estudia en este curso es el espacio de funciones continuas sobre un conjunto compacto. La integral de Riemann define una función sobre el espacio* $C[a,b]$, *donde* $[a,b]$ *es un intervalo finito:*

$$C[a,b] \ni f \to \varphi(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Como sabemos, esta función es lineal y además satisface

$$|\varphi(f)| = |\int_a^b f(t)dt| \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = \|f\|_\infty.$$

La función φ *definida sobre el espacio métrico* $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ *es continua. En realidad conocemos este hecho del curso de Cálculo Avanzado como el teorema que afirma: Si* $C[a,b] \ni f_n \to f$ *uniformemente entonces*

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt.$$

La norma $\|\varphi\|$ *se calcula fácilmente. La desigualdad de arriba demuestra que* $\|\varphi\| \leq |b-a|$. *El funcional* φ *alcanza este valor sobre la función* $f \equiv 1$, *entonces* $\|\varphi\| = |b-a|$.

$\diamondsuit$

6.5. Ejercicios

1. De un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en un solo punto.
2. ♦ Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n},\ n > 0,\ n, m \text{ primos relativos,} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en cero y en los puntos irracionales y es discontinua en puntos racionales $\neq 0$.

3. El eje real $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial con el campo $\mathbb{Q}$. Sabemos del curso de álgebra lineal que existe una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ tal que el número 1 es uno de los elementos de la base que denotamos por r_0. Representamos esta base como $\{r_0\} \cup \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos la descomposición única:
$$x = q_0(x) + \sum_{\alpha\in\Delta} q_\alpha(x) r_\alpha,$$
donde $q_0(x)$, $q_\alpha(x) \in \mathbb{Q}$ y solo un número finito de los coeficientes q_α es distinto de cero. Sea $f(x) := q_0(x)$. Demuestre que la función f es aditiva $(f(x+y) = f(x) + f(y))$ y discontinua en todos los puntos del dominio.

4. Construye una isometría del espacio $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$ con la métrica
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$
sobre el intervalo $[0,2]$ con su métrica natural.

5. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no cerrado. Construya una función continua no acotada sobre A.

6. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que la función sobre X definida por
$$d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$$
es uniformemente continua.

7. Muestre que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces existen $a, b > 0$ tales que $|f(x)| \leq a|x| + b$.

8. Muestre que cada función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y acotada es uniformemente continua.

9. Sean f, g funciones uniformemente continuas y acotadas sobre un espacio métrico X. Demuestre que fg es una función uniformemente continua. Mediante un ejemplo demuestre que es necesario suponer que las funciones son acotadas.

10. Demuestre que una función $f \in BC(\mathbb{R})$ es uniformemente continua si y sólo si para toda sucesión $x_n \to 0$ se tiene que $f(x + x_n) \to f(x)$ uniformemente.

11. Sean X un espacio métrico arbitrario y Y un espacio discreto. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (F_n) en $B(X,Y)$ sea uniformemente convergente.

12. Sean X, Y espacios métricos y $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y sólo si para cada conjunto cerrado $B \subset Y$ la imagen inversa $F^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en X.

13. ♦ Sean X, Y espacios métricos y $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y sólo si $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$ para cada $B \subset Y$.

14. ♦ Sean X, Y espacios métricos y $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y sólo si $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ para cada $A \subset X$.

15. Demuestre que la función $\|\cdot\|$ sobre el espacio $L(E,F)$ es una norma y que $\|A\| = \text{ínf}\{C > 0 : \forall x \in E\,;\, \|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}$.

16. ¿ Averigue si la propiedad "ser acotado" es invariante bajo homeomorfismos?

17. ♦ Demuestre que el cuadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ y el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 2,\ (x+1)^2 + y^2 < 2\}$ son homeomorfos.

18. Sean E, F espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$ y sea $F\colon E \to F$ una aplicación continua y aditiva: $F(x+y) = F(x) + F(y)$. Demuestre que F es lineal.

19. ♦ Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ una función lineal no identicamente nula. Demuestre que φ es continua si y sólo si $\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso en E.

20. ♦ Sea (X,d) un espacio métrico y u_0 un punto arbitrario en X. Para $x, u \in X$ sea
$$f_u(x) = d(x,u) - d(x,u_0).$$
Demuestre que f_u es una función acotada, continua sobre X y que la aplicación $X \ni u \to f_u \in BC(X)$ es una isometría.

21. ♦ Demuestre el Teorema 2.11 aplicando el resultado del ejercicio anterior.

22. ♦ Sea $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ el disco unitario en el plano. Sea $E = CB(\mathbb{R}^2)$ - el espacio de funciones continuas acotadas sobre el plano provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $F = \{f \in E : f|\mathbb{D} \equiv 0\}$. Encuentre una isometría lineal entre el espacio cociente E/F y el espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.

23. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es *abierta* si para cada $O \subset X$ abierto $f(O)$ es abierto. Demuestre que, si X es de 2^a categoría y $f\colon X \to Y$ es abierto, entonces Y es de 2^a categoría.

24. ♦ Sea $C^1([a,b])$ el espacio de funciones sobre $[a,b]$ que tienen derivada continua. Sea
$$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|.$$

Estudie la continuidad de la aplicación $T\colon C^1([a,b]) \to C^1([a,b])$ cuando

1. $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{sen}\,(x-t)dt$,
2. $(Tf)(x) = \int_a^x f^2(t)dt$.

7

Espacios compactos

Cuando se trata de las propiedades de los conjuntos tales como la de ser acotado, conexo, separable, se puede dar una idea de su significado a cualquier persona utilizando ejemplos sencillos de subconjuntos del eje real.

No sucede así cuando se habla de la compacidad de un conjunto. Esta es una propiedad que posee el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pero la importancia de esta propiedad salió a la luz apenas en la segunda mitad del siglo XIX, en realidad hasta finales del siglo. La compacidad del intervalo $[a, b]$ constituye exactamente el contenido del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

En el año 1894 Borel formuló otra propiedad para los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ que resulto ser equivalente a la propiedad de Bolzano-Weierstrass no solamente en el caso de los intervalos cerrados sino también para todos los espacios métricos. Seguramente el teorema de Borel fue uno de los impulsos más importantes para el nacimiento de una nueva rama de las matemáticas, a saber la topología. En la topología general la compacidad secuencial del teorema de Bolzano-Weierstrass y la compacidad en el sentido de Borel son conceptos distintos.

7.1. Compacidad secuencial

La aparición del concepto de conjunto compacto esta relacionado con los problemas donde se necesitaba encontrar una sucesión convergente dentro de un conjunto. Por lo cual la definición secuencial de compacidad parece más natural y manejable.

Definición 7.1 *Decimos que un espacio métrico* (X, d) *es* compacto *si para cada sucesión* (x_n) *en* X *existen una subsucesión* (x_{n_k}) *y* $x \in X$ *tales que* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. *Un conjunto* $K \subset X$ *es* compacto *si el espacio* (K, d) *es compacto.*

Observemos inmediatamente que por la definición la propiedad “K es compacto” es intrínsica, es decir, no depende del espacio X en el cual K

está sumergido, mientras se conserve la métrica en K. Por esta razón no es necesario decir “K es compacto en X”.

La causa original de nuestro interés es probar la compacidad de un intervalo $[a, b]$. Por lo tanto repetimos aquí su demostración llamada por algunos “la caza del león”.

Teorema 7.2 *(Bolzano-Weierstrass) Sean a, $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. El intervalo $[a, b]$ es compacto.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \in [a, b]$. Para un intervalo $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$ denotemos por $d(I)$ su diámetro $|d-c|$. Vamos a probar que existe una sucesión decreciente de intervalos $I_k \subset [a, b]$ tales que $d(I_k) \leq \frac{|b-a|}{2^k}$ y que cada I_k contiene a x_n para un número infinito de índices.

Al menos uno de los intervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ o $[\frac{a+b}{2}, b]$ contiene x_n para un número infinito de índices n. A este intervalo, lo llamamos I_1. Si ya hemos construido los intervalos $I_1, \ldots, I_k$, donde I_k contiene a x_n para un número infinito de índices, partimos I_k en dos intervalos de la misma longitud $d(I_k)/2$ y aquel de los dos que contiene x_n para un número infinito de índices, lo llamamos I_{k+1}. De esta forma obtenemos una sucesión descendiente de intervalos y aseguramos que $d(I_k) \leq \frac{|b-a|}{2^k}$. Además cada intervalo contiene a x_n para un número infinito de índices.

En seguida construimos, también por inducción, una subsucesión x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in I_k$ escogiendo como x_{n_1} cualquier elemento de la sucesión que esté en de I_1. Luego , si ya hemos obtenido $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$, podemos encontrar en I_{k+1} un elemento x_N tal que $N > n_k$, ya que I_{k+1} contiene a x_n para un número infinito de los $n's$. Definimos entonces $n_{k+1} = N$. La inducción nos permite obtener la subsucesión deseada.

El hecho de que $|x_k - x_{k+l}| \leq \frac{|b-a|}{2^k}$, k, $l \in \mathbb{N}$ significa que (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy, entonces convergente en $\mathbb{R}$ a un elemento x. El intervalo $[a, b]$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $x \in [a, b]$. El intervalo $[a, b]$ es compacto.

■

Los siguientes resultados son muy útiles para estudiar la compacidad de conjuntos más complicados.

Proposición 7.3 *Sean K_n conjuntos compactos con $n = 1, \ldots, k$. Entonces el producto cartesiano $K_1 \times \cdots \times K_k$ es compacto.*

Demostración. En virtud de que

$$K_1 \times \cdots \times K_k \cong K_1 \times (K_2 \cdots \times K_k)$$

es suficiente probar que $K_1 \times K_2$ es compacto y luego aplicar la inducción.

Sea (x_n, y_n) una sucesión en $K_1 \times K_2$. Por la compacidad de K_1 existe una subsucesión $x_{n_k} \to x$. Consideramos en K_2 la subsucesión (y_{n_k}), que por su lado tiene una subsucesión $(y_{n_{k_l}})$ convergente con respecto a l a un elemento $y \in K_2$. Así obtenemos que $\lim_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) = (x, y)$. Luego la compacidad del producto $K_1 \times K_2$ está probada.

∎

Proposición 7.4 *Si K es un compacto y $A \subset K$ es cerrado en K, entonces A es compacto.*

La demostración de la proposición anterior es directa por la definición de conjunto compacto y el Teorema 3.25.

Como una aplicación obtenemos inmediatamente el importante Teorema de Heine-Borel que se enuncia a continuación.

Teorema 7.5 (Heine, Borel) *Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que K es compacto y que no es acotado. Para cada conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset K$ contenido en una bola $B(0, N)$ existe un elemento $x_{m+1} \in K$ que está fuera de la bola $B(0, N+1)$. Para cada $1 \leq j \leq m$ tenemos $\|x_j - x_{m+1}\| > 1$.

De esta forma podemos construir por inducción una sucesión (x_m) en K tal que para todos $i \neq j$ se cumple que $\|x_i - x_j\| > 1$. Esta sucesión no tiene subsucesión convergente. Así la contradicción demuestra que K es acotado.

Si K no es cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces por el Teorema 3.25 existe una sucesión (x_n) en K que converge a $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ y cada subsucesión converge al mismo x, entonces no tiene límite en K. Nuevamente, la contardicción demuestra que K tiene que ser cerrado.

$\Leftarrow$ Ahora suponemos que K es acotado y cerrado en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una bola $B(0, r)$ que contiene al conjunto K. Por lo tanto $K \subset [-r, r] \times \cdots \times [-r, r] \subset \mathbb{R}^n$. Así K es un subconjunto cerrado de un producto cartesiano de intervalos compactos. Luego K es compacto.

∎

En muchos espacios métricos existen conjuntos acotados y cerrados que no son compactos. En el siguiente ejemplo vemos uno de ellos.

Ejemplo 7.6 *En el espacio l^1 de sucesiones sumables definamos $C = \overline{B(0,1)}$, el cual es un conjunto cerrado y acotado. Sea*

$$\mathfrak{x}_k = (0, \ldots, 0, \overbrace{\ 1\ }^{k}, 0, 0 \ldots).$$

Observemos que $\|\mathfrak{x}\|_1 = 1$, entonces $\mathfrak{x}_k \in C$. Para $k \neq j$ se cumple que $\|\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_j\|_1 = 2$. Así la sucesión $(\mathfrak{x}_k)$ no tiene ninguna subsucesión convergente, por lo tanto C no es compacto.

♢

Los espacios compactos tienen una propiedad más fuerte que ser acotado y que suponiendo que el conjunto es además completo, aseguran su compacidad.

Definición 7.7 *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es* totalmente acotado *si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ (llamado ε - red de A) tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon)$.*

Usando el término de la cubierta, un conjunto $\{x_1, \dots, x_k\} \subset A$ es una ε - red de A si las bolas $B(x_j, \varepsilon)$, $1 \leq j \leq k$ forman una cubierta de A. Observamos inmediatamente que cada subconjunto de un conjunto totalmente acotado es totalmente acotado.

Proposición 7.8 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $E \subset X$. Entonces el subespacio $(E, d|_{E \times E})$ es compacto si E es cerrado y totalmente acotado en X.*

Demostración. Como E es un subespacio cerrado de un espacio métrico completo, entonces E es completo. Ahora, supongamos que E no es compacto, es decir E tiene una cubierta abierta $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ que no contiene ninguna subcubierta finita. Definimos una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puntos en E de la siguiente manera: primero eligimos una ε-red con $\varepsilon = 1/2$ (esto lo podemos hacer puesto que E es totalmente acotado). Sea x_1 cualquier elemento de la ε-red con la propiedad de que ninguna subfamilia finita de $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ es una cubierta de $B(x_1, 1/2)$. Como $B(x_1, 1/2)$ es totalmente acotado, entonces está contenido en un número finito de bolas abiertas de radio $1/4$ cuyos centros están en $B(x_1, 1/2)$. Así pues existe x_2 en $B(x_1, 1/2)$ tal que $B(x_2, 1/4)$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. De este modo construímos de forma inductiva una sucesión de puntos $\{x_i\}$ tales que si $x_i \in B(x_i, 2^i)$ entonces $B(x_{i+1}, 2^{i+1})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. Por lo tanto para toda $k \geq i$ se tiene que

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_{i+1}) + \cdots + d(x_{j-1}, x_j) < \frac{1}{2^i} + \cdots + \frac{1}{2^{j-1}} < \frac{1}{2^{i-1}},$$

es decir, la sucesión $\{x_i\}$ es de Cauchy. Como E es completo entonces la sucesión $\{x_i\}$ converge a un punto $y \in E$. Haciendo que $j \to \infty$ en la desigualdad anterior se tiene que

$$d(x_i, y) \leq \frac{1}{2^{i-1}},$$

para toda $i \in \mathbb{N}$. Observemos que como $y \in E$, existe $O' \in \mathcal{O}$ tal que $y \in O'$. Como O' es abierto, entonces exite $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset O'$. Sea i tal que $\frac{1}{2^{i-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para todo $x \in B(x_i, \frac{1}{2^i})$ se tiene que

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) < \frac{1}{2^i}) + \frac{1}{2^{i-1}}) < \varepsilon,$$

de donde $B(x_i, \frac{1}{2^i}) \subset B(y, \varepsilon) \subset O'$. Lo cual es una contradicción, por lo tanto E es compacto.

■

La propiedad principal de los conjuntos totalmente acotados esta formulada en el teorema siguiente.

Teorema 7.9 *Un conjunto A es totalmente acotado si y sólo si cada sucesión (a_n) en A contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sean A un conjunto totalmente acotado y (x_n) una sucesión de elementos de A. Procedemos como en la demostración de la compacidad de un intervalo. Vamos a construir una sucesión decreciente (B_k) de conjuntos tales que cada B_k está contenido en una bola de radio $\frac{1}{k}$ y además para cada k existe un número infinito de índices n para los cuales $x_n \in B_k$. El método de construcción es inductivo. Sabemos que para ciertos $a_1, \ldots, a_k \in X$ se cumple que $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, 1)$. Alguna de estas bolas contiene los x_n para un número infinito de índices n y a esta bola la definimos como B_1.

Supongamos que ya tenemos construidos los conjuntos $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k$, tales que $d(x, y) \leq \frac{1}{m}$ para $x,\ y \in B_m$, $1 \leq m \leq k$, y que B_k contiene un número infinito de elementos de la sucesión. Como B_k es también totalmente acotado contiene una $\frac{1}{k+1}$ - red $\{a_1^k, \ldots, a_l^k\}$. Uno de los conjuntos $B_k \cap B(a_j^k, \frac{1}{k+1})$ contiene un número infinito de elementos de la sucesión y a este conjunto, lo nombramos B_{k+1}.

Así hemos obtenido por inducción la sucesión B_k. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de la sucesión (x_n) tal que $x_{n_k} \in B_k$. Para todos k, l naturales tenemos que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+l}}) < \frac{1}{k+l}$ entonces esta subsucesión es de Cauchy. Y así tenemos probada la primera parte.

$\Leftarrow$ Para probar la implicación inversa, veremos que cada espacio A que no es totalmente acotado contiene una sucesión de elementos $x_n \in A$ tales que para algún $\varepsilon > 0$ se tiene que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Nuevamente la construcción de la prueba es inductiva y muy parecida a la que hemos usado en la demostración del Teorema de Heine-Borel.

Si A no es totalmente acotado, existe $\varepsilon > 0$ tal que para ningún conjunto finito $\{a_j\}_{j=1}^{k} \subset A$ se logra que $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, \varepsilon)$. Empezando con cualquier $a_1 \in A$, existe $a_2 \in A$ tal que $d(a_1, a_2) > \varepsilon$, pues $A \not\subset B(a_1, \varepsilon)$. Luego, si ya tenemos el conjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ tal que $d(a_i, a_j) > \varepsilon$, $i \neq j$, existe $a_{k+1} \notin \bigcup_{j=1}^{k} B(a_j, \varepsilon)$. La sucesión (a_n) obtenida inductivamente de esta manera no contiene ninguna subsucesión de Cauchy. Y así obtenemos lo deseado.

∎

Teorema 7.10 *Un espacio K es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que K no es completo, entonces contiene una sucesión de Cauchy (x_n) que no es convergente. Cada subsucesión de esta sucesión tampoco converge, lo cual contradice el hecho de que K es compacto y por tanto cada espacio compacto es completo. Recordemos que cada sucesión en espacio compacto K contiene una subsucesión convergente, es decir es de Cauchy. Así por el Teorema 7.9 se tiene que K es totalmente acotado.

$\Leftarrow$ Supongamos que K es totalmente acotado, entonces cada sucesión (x_n) en K contiene una subsucesión de Cauchy (ver Teorema 7.9). Además la sucesión $x_n \to x$ para algún elemento de K, puesto que K es completo. Por lo tanto la compacidad de K está probada.

■

A continuación consideramos el caso cuando K es un subconjunto de un espacio completo.

Corolario 7.11 *Sean X un espacio métrico completo y $K \subset X$. Entonces K es compacto si y sólo si es cerrado en X y totalmente acotado.*

Este corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior, ya que un conjunto en un espacio completo X es completo si y sólo si es cerrado en X.

Los espacios totalmente acotados tienen otra propiedad muy notable.

Teorema 7.12 *Cada espacio métrico totalmente acotado es separable. En particular tenemos que cada espacio compacto, es separable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que existe un conjunto finito $A_n = \{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\} \subset X$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j^n, \frac{1}{n})$. Sea $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. El conjunto C es numerable como unión numerable de conjuntos finitos.

Para probar la densidad del conjunto C es suficiente ver que para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ la bola $B(x, \varepsilon)$ contiene a un elemento de C, es decir uno de los x_j^n. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ entonces $x \in \bigcup_{j=1}^{k_n} B(x_j^n, \frac{1}{n})$ y existe j tal que $x \in B(x_j^n, \frac{1}{n})$. Por lo tanto $x_j^n \in B(x, \frac{1}{n})$, lo que termina la demostración.

■

Obviamente existen espacios separables que no son acotados. Un ejemplo de esto es el eje real $\mathbb{R}$.

7.2. Teorema de Borel

El teorema de Borel que presentamos a continuación proporciona una condición necesaria y suficiente para la compacidad de un espacio métrico. Como vamos a observar más adelante, el criterio de Borel es muy útil para probar de una forma rápida varios teoremas, pero su importancia no termina ahí. En caso de que los espacios topológicos no sean métricos, la compacidad secuencial es una propiedad más débil que la condición encontrada por Borel. El teorema de Borel sugiere la correcta definición de compacidad para los espacios topológicos generales.

Teorema 7.13 (Borel) *Un espacio métrico K es compacto si y sólo si cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita.*

Demostración. Vamos a referirnos a la propiedad: "cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita" como a "la propiedad de Borel".

Empezamos probando que la propiedad de Borel implica la compacidad, pues esta demostración es más sencilla. Suponemos entonces que K tiene la propiedad de Borel. Dado $\varepsilon > 0$ construimos la cubierta abierta $K = \bigcup_{x\in K} B(x,\varepsilon)$. Sea $\{B(x_i,\varepsilon)\}_{i=1}^{k}$ una subcubierta finita, entonces esta es una ε - red para K y así se obtiene que el espacio K es totalmente acotado.

Supongamos que K no es completo, es decir, existe en K una sucesión de Cauchy (x_n) que no tiene su límite en K. El conjunto de todos los elementos de la sucesión es entonces cerrado, pues contiene a todos sus puntos de acumulación (¡No hay tales!).

Sea $O_k = K \setminus (\bigcup_{j=k}^{\infty}\{x_j\})$. El conjunto O_k es el complemento del conjunto $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$. Usando los mismos argumentos vemos que cada O_k es abierto. Pero $\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k = K$, entonces tenemos una cubierta abierta de K de la cual podemos escoger una subcubierta finita. Así, para un conjunto finito $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_m}\}$ tenemos que $K = \bigcup_{j=1}^{m} O_{k_j}$.

Esto es un absurdo, ya que lo anterior significa que la sucesión de Cauchy divergente (x_n) toma un número finito de valores. Lo cual demuestra que K sí es completo y por el Teorema 7.10 es compacto.

Ahora probaremos que cada espacio compacto tiene la propiedad de Borel. Sea $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una cubierta abierta del espacio compacto K. Por los Teoremas 5.17 y 7.12 esta cubierta contiene una subcubierta numerable que podemos denotar por $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} O_k$. Visiblemente $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también una cubierta abierta que consta de una sucesión creciente de abiertos. Supongamos que ninguno de los conjuntos U_n cubre a K. Sea $x_n \in K \setminus U_n$. Existe una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x \in K$ porque K es compacto. El límite x de esta subsucesión tiene que pertenecer a uno de los conjuntos de la cubierta, digamos $x \in U_{n_0}$. Es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k > N$, $x_{n_k} \in U_{n_0} \subset U_{n_k}$, que es una obvia contradicción. Se cumple entonces que $K = U_n = \bigcup_{k=1}^{n} O_k$ para n suficientemente grande. Por lo tanto la propiedad de Borel está probada.

■

El siguiente Teorema es consecuencia del Teorema de Borel y tiene numerosas aplicaciones en análisis funcional.

Teorema 7.14 *Un espacio métrico C es compacto si y sólo si para cada familia decreciente de conjuntos cerrados $F_n \subset C$ no vacíos se cumple $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Si C es compacto y la familia F_n de conjuntos cerrados es decreciente, entonces $O_n = F_n^c$ es una familia creciente de conjuntos abiertos. Si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, por la formula de De Morgan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^c = X,$$

entonces la familia $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de X que no contiene subcubierta finita. Lo cual es imposible por el Teorema de Borel. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

■

Aunque sabemos perfectamente de otros cursos que los números reales forman un conjunto no numerable, es interesante ver que este hecho está relacionado con la compacidad del intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 7.15 *El conjunto* $[0, 1]$ *es no numerable.*

Supongamos que los números reales del intervalo $I = [0, 1]$ *se pueden ordenar en una sucesión de elementos* (x_n)*. El conjunto* $I \setminus \{x_1\}$ *contiene a un intervalo cerrado* $I_1 = [a_1, b_1]$*. El conjunto* $I_1 \setminus \{x_2\}$ *contiene algún intervalo cerrado* I_2 *. . . . Siguiendo así podemos construir una sucesión decreciente de intervalos compactos tal que* $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *no contiene ningún elemento de la sucesión* (x_n)*, es decir la intersección es vacia, pero esto es imposible por el Teorema 7.14.*

♢

Ejercicio 7.16 *Utilizando el método aplicado en el Ejemplo 7.15 demuestre que el conjunto de Cantor es no numerable.*

7.3. Aplicaciones continuas sobre espacios compactos

Las aplicaciones continuas sobre un dominio compacto tienen muchas propiedades notables. En algunos casos la definición secuencial de la compacidad es mas conveniente para deducir estas propiedades, en otros casos es más conveniente usar el Teorema de Borel. Aquí presentamos algunas de estas propiedades.

Teorema 7.17 *Sean* K *un espacio compacto y* X *un espacio métrico. Si* $F \in C(K, X)$ *entonces* $F(K)$ *es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $y_n \in F(K)$, entonces existen $a_n \in K$ tales que $F(a_n) = y_n$. La sucesión (a_n) tiene una subsucesión convergente $a_{n_k} \to a \in K$. Como la aplicación F es continua, entonces $F(a_{n_k}) = y_{n_k} \to F(a)$ es la subsucesión convergente buscada en $F(K)$.

■

Para el caso de una función real obtenemos un resultado de suma importancia.

Corolario 7.18 *Sean* K *un espacio compacto y* $f \in C(K)$*. Entonces existen* $a, b \in K$ *tales que* $f(a) = \max_{x\in K} f(x)$ *y* $f(b) = \min_{x\in K} f(x)$*.*

Demostración. Puesto que el conjunto $f(K) \subset \mathbb{R}$ es compacto entonces el $\sup_{x\in K} f(x)$ y el $\inf_{x\in K} f(x)$ existen y pertenecen a $f(K)$ siendo su máximo y mínimo, respectivamente. Esto es exactamente lo que dice el anunciado.

■

El enunciado del Corolario 7.18 se puede expresar brevemente: cada función continua real sobre un espacio compacto alcanza sus extremos.

Teorema 7.19 *Sea K un espacio compacto. Si $F \in C(K,X)$ es una aplicación biyectiva, entonces $F^{-1} \in C(X,K)$.*

Demostración. Supongamos que $x_n = F(a_n) \to x = F(a)$. Tenemos que probar que $F^{-1}(x_n) = a_n \to a = F^{-1}(x)$. Si no es así, por la compacidad de K existe una subsucesión $a_{n_k} \to b \neq a$. La aplicación F es continua y se sigue $F(a_{n_k}) \to F(b) \neq F(a)$. Así hemos obtenido una contradicción que termina la demostración.

■

Sobre un dominio compacto la continuidad de una aplicación implica su continuidad uniforme.

Teorema 7.20 *Sean K un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Cada aplicación continua $F\colon X \to Y$ es uniformemente continua.*

Demostración. La demostración es mucho mas sensilla si usamos el teorema de Borel. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ buscamos $r_x > 0$ tal que si $d(x,y) < r_x$ entonces $d(F(x),F(y)) < \varepsilon/2$. Las bolas $B(x,r_x/2)$, $x \in K$ forman una cubierta abierta del compacto K. Por Teorema de Borel existen $x_1,\dots,x_k$ tales que $K = B(x_1,r_{x_1}/2) \cup \dots \cup B(x_k,r_{x_k}/2)$. Elegimos $r = \max_{1\le j\le k} r_{x_j}$. Sean u, $v \in K$ tales que $d(u,v) < r/2$. El elemento u pertenece a una de las bolas, supongamos que $u \in B(x_j,r/2)$. Se sigue que

$$d(v,x_j) \le d(v,u) + d(u,x_j) < r.$$

Y por lo tanto

$$d(F(u),F(v)) \le d(F(u),F(x_j)) + d(F(x_j),F(v)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

siempre que $d(u,v) < r/2$. La continuidad uniforme está probada. ■

El último de los resultados enunciados habla de la convergencia de funciones reales y relaciona la convergencia puntual con la convergencia uniforme que en general es mucho mas fuerte que la primera.

Teorema 7.21 *(Lema de Dini) Sea K un espacio métrico compacto. Sean $f_n \in C(K)$ tales que para todo $x \in K$ $f_n(x) \searrow 0$. Entonces $f_n \to 0$ en $C(K)$ es decir, la sucesión converge uniformemente.*

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que $f_{N_x}(x) < \varepsilon$. Por la monotonía de la sucesión $f_n(x) < \varepsilon$ para todos $n > N_x$. La función f_{N_x} es continua y existe $r(x) > 0$ tal que en el dominio $B(x,r(x))$ el valor ε mayoriza a f_{N_x} y a todas las fiunciones siguientes.

La cubierta abierta $K = \bigcup_{x\in K} B(x,r(x))$ tiene una subcubierta finita $K = \cup_{j=1}^m B(x_j,r(x_j))$. Sea $N = \max\{N_{x_1},\dots,N_{x_m}\}$. Si $x \in K$, existe j tal que $x \in B(x_j, r(x_j))$ y para todo $n > N$ se cumple que $0 \leq f_n(x) < \varepsilon$. Así hemos probado que $\sup_{x \in K} f_n \leq \varepsilon$ para $n > N$. por lo tanto la sucesión (f_n) converge uniformemente a cero.

■

7.4. Operadores en espacios de dimensión finita

En la sección 3 del Capítulo 6 hemos estudiado la continuidad de aplicaciones lineales en los espacios normados, las cuales son conocidas como operadores. Los resultados de la última sección conducen inmediatamente a resultados importantes cuando adicionalmente los espacios vectoriales son de dimensión finita.

Vamos a demostrar que en este caso cada aplicación lineal (operador) es continua. Esta conclusión está relacionada con otro hecho importante de que todas las normas en un espacio de dimensión finita conducen a la misma topología y a la misma convergencia.

Definición 7.22 *Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en un espacio vectorial E. Decimos que las normas son equivalentes ($\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$) si existen A, $B > 0$ tales que*

$$A\|x\| \leq \|x\|' \leq B\|x\|$$

para toda $x \in E$.

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia, cuya demostración dejamos como ejercicio.

Conocemos varios ejemplos de normas en el espacio $\mathbb{R}^n$: $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$ $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ y $\|\mathbf{x}\|_\infty = \text{máx}_{1 \leq n} |x_j|$, por mencionar las más importantes. Salta a la vista que en todos los casos la convergencia de una sucesión es equivalente a la convergencia de las coordenadas del vector. Este fenómeno es de caracter más general.

Teorema 7.23 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Todas las normas en E son equivalentes.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{b_j}\}_{j=1}^n$ una base del espacio E. Definimos una aplicación biyectiva entre el espacio $\mathbb{K}^n$ y E:

$$A((a_j)) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j.$$

Visiblemente A es lineal. Investigamos la continuidad de A considerando $\mathbb{K}^n$ dotado de la norma euclideana $\|(a_j)\|_2 = (\sum_{j=1}^n |a_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. Así por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}\|A((a_j))\| &= \|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j|\|\mathbf{b}_j\| \\ &\le (\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{b}_j\|^2)^{\frac{1}{2}} = B\|(a_j)\|_2,\end{aligned}$$

donde $B = (\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{b}_j\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

La esfera unitaria $S^{n-1} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n : \|\mathbf{a}\|_2 = 1\}$ es compacta según el Teorema de Heine-Borel. Por Corolario 7.18 la función $f(\mathbf{a}) = \|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|$ alcanza su mínimo en la esfera. Este mínimo, que denotamos por m, es positivo (pues cada norma se anula únicamente en cero).

Sabemos entonces que para cada $\mathbf{a} = (a_j) \in \mathbb{K}^n$ de norma cartesiana igual a 1 se cumple que $\|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\| \ge m$. Para cada $\mathbf{a} \neq 0$ tenemos $\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|_2} \in S^{n-1}$, entonces $\|\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j}{\|\mathbf{a}\|_2}\| \ge m$, lo que demuestra la desigualdad

$$m(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} = m\|\mathbf{a}\|_2 \le \|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|,$$

para $\mathbf{a}$ arbitrario. Así hemos probado que para $(a_j) \in \mathbb{K}^n$ arbitrario se satisfacen dos desigualdades

$$m(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \le \|\sum_{j=1}^{na_j}\mathbf{b_j}\| \le B(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\|\cdot\|'$ es otra norma en el espacio E se cumple también

$$m'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \le \|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|' \le B'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

para constantes positivas m', B' que dependen únicamente de la norma $\|\cdot\|'$ y de la base $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^{n}$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned}m\|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|' &\le mB'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \le B'\|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\| \\ &\le BB'(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2)^{\frac{1}{2}} \le \frac{BB'}{m'}\|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|'.\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{m}{B'}\|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|' \le \|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\| \le \frac{B}{m'}\|\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{b}_j\|'.$$

Por lo tanto las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes.

∎

Corolario 7.24 *Para cada espacio normado* $(E, \|\cdot\|_E)$ *de dimensión* n *sobre* $\mathbb{K}$ *existe un operador lineal continuo* $J\colon E \to \mathbb{K}^n$ *cuyo inverso es también continuo.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base en E. Para $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j \in E$ definimos $J(\mathbf{a}) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. El operador inverso tiene la forma

$$J^{-1}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{b}_j.$$

De la demostración anterior obtenemos las siguientes desigualdades

$$m\|J(\mathbf{a})\|_2 \le \|\mathbf{a}\|_E = \|J^{-1}(J(\mathbf{a}))\|_E \le B\|J(\mathbf{a})\|_2.$$

La primera desigualdad expresa la continuidad del operador J, mientras que la segunda expresa la continuidad del operador inverso. Con lo cual queda concluida la prueba.

■

Definition 7.25 *A un operador continuo definido entre dos espacios normados cuyo inverso también es continuo, lo llamamos isomorfismo entre los espacios normados.*

Teorema 7.26 *Sean* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *dos espacios normados de dimensión finita sobre un campo* $\mathbb{K}$ *igual a* $\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *y sea* $A\colon E \to F$ *un operador lineal. Entonces* A *es continuo.*

Demostración. En principio probaremos que cada operador A entre dos espacios euclidianos $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ es continuo. En ambos espacios denotamos por $\|\cdot\|_2$ a la norma euclidiana. Sean $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ la base canónica en $\mathbb{K}^n$ y $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ la base canónica en $\mathbb{K}^m$. Entonces

$$A\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e_j}\right) = \sum_{j=1}^n x_j A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^m a_{jk}\mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n x_j a_{jk} \mathbf{f}_k.$$

Para $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ obtenemos el valor $\|A(\mathfrak{a})\|_2^2$ estimado como

$$\|A(\mathfrak{a})\|_2^2 = \sum_{k=1}^m \left|\sum_{j=1}^n x_j a_{jk}\right|^2 \le \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |a_{jk}|^2\right) = \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 \|\mathfrak{a}\|_2^2,$$

donde hemos aplicado la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Por lo tanto la desigualdad demuestra la continuidad del operador A.

■

Dado un espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimensión n podemos construir según Corolario 7.24 un isomorfismo de espacios normados $J_n\colon E \to \mathbb{K}^n$. En el caso del espacio F de dimessión m existe un isomorfismo $J_m\colon F \to \mathbb{K}^m$. La composición $\tilde{A} = J_m \circ A \circ J_n^{-1}$ es un operador lineal entre los espacios $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$, el cual es continuo por lo mencionado al principio de la demostración. Además el operador $A = J_m \circ \tilde{A} \circ J_m^{-1}$ es continuo como composición de operadores continuos.

7.5. Ejercicios

1. Describe los conjuntos compactos en un espacio dotado con la métrica discreta.
2. Construya en $\mathbb{R}$ un conjunto numerable compacto con un número infinito de puntos de acumulación.
3. Construya una cubierta abierta del intervalo $[0, 1)$ que no tenga ninguna subcubierta finita.
4. Demuestre que el producto cartesiano de dos conjuntos totalmente acotados es totalmente acotado. Úselo para probar que un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado.
5. Demuestre que la relación $\sim$ (definida en la sección 4 de este capítulo) entre las normas en un espacio vectorial E es una relación de equivalencia.
6. Demuestre que en cada espacio normado $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ una sucesión $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nk})$ converge si y sólo si para cada j la sucesión numérica $(b_n) = (a_{nj})$ converge.
7. Demuestre que cada subespacio vectorial en un espacio normado de dimensión finita es cerrado.
8. Sean $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ espacios normados y $A\colon E \to F$ un operador lineal. Demuestre que, si E es de dimensión finita entonces A es continuo.
9. ⧫ Demuestre que para cada conjunto A totalmente acotado en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ la cáscara convexa $\operatorname{conv}(A)$ es también totalmente acotada.
10. ⧫ Sea A un conjunto compacto en un espacio de Banach E. Demuestre que $\overline{\operatorname{conv}(A)}$ es un conjunto compacto.
11. ⧫ Supongamos que en el espacio métrico X cada subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es compacto.
12. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ se llama *abierta* si para todo conjunto $O \subset X$ su imagen $\phi(O)$ es abierta. Demuestre que cada función continua y abierta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona.

8

Espacios conexos

El origen del concepto de conexidad es muy natural, pues se trata de espacios que son “de una sola pieza”. Sin embargo, ni siquiera en el caso del eje real es obvio cuando debemos considerar que un subconjunto se descompone en dos ó más piezas. Observemos que podemos escribir el intervalo $[0,1]$ de la siguiente manera: $[0,1] = [0,\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2},1]$, pero esta descomposición es solo una partición mental, porque no tiene ninguna explicación en la estructura del intervalo. Estas dos piezas están ”pegadas” en el punto $\frac{1}{2}$ que pertenece al segundo conjunto, pero se puede aproximar por elementos del primero.

La situación es distinta en el caso del conjunto $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\} = [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]$, cuando cada elemento de uno de los componentes está separado del otro componente. Notemos que la descomposición consta de dos conjuntos no vacíos que son abiertos en el espacio formado por la unión de estos conjuntos.

La definición de conjuntos y espacios conexos empieza entonces con la definición de los espacios que no lo son, lo que dificulta al principio el manejo de este concepto. Es mucho mas claro el concepto de conjuntos *conexos por arcos*, por lo que ponemos énfasis en los ejemplos, donde se puede usar este criterio.

8.1. Espacios conexos

Definición 8.1 *Un espacio métrico (X,d) es disconexo si se puede representar como $X = O_1 \cup O_2$, donde los conjuntos O_1, O_2 son abiertos, disjuntos y no vacíos. Decimos que un espacio es conexo, si no es disconexo.*

En los espacios conexos los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son el mismo espacio y el conjunto vacío. Así como el concepto de compacidad, separabilidad y completez, la conexidad es una más de las propiedades del intervalo finito $[a,b]$ que se observa en otros espacios y se estudia por separado. Primero debemos ver que un intervalo sí tiene dicha propiedad.

Teorema 8.2 *El intervalo $[a,b]$ es conexo.*

Demostración. Vamos a llevar a contradicción la suposición de que el intervalo es disconexo. Supongamos que $[a, b] = O_1 \cup O_2$, donde $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, los conjuntos son abiertos y no triviales. Así existen $x \in O_1$ y $y \in O_2$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $x < y$. Como el conjunto O_1 es abierto entonces para algún $s \in [a, b]$ se cumple que $[x, s) \subset O_1$. Sea

$$s_M = \sup\{s \in \mathbb{R} : [x, s) \subset O_1\}.$$

El número s_M pertenece al intervalo $[a, b]$, por lo cual está en uno de los conjuntos O_1, ó O_2. Si $s_M \in O_1$, entonces $[x, s_M] \in O_1$. Nuevamente, por el hecho de que el conjunto O_1 es abierto, entonces para algún $r > 0$ se cumple que $[s_M, s_M + r) \in O_1$. De tal manera que $[x, s_M + r) \subset O_1$, lo cual contradice la definición de s_M.

Así sólo queda la opción de que $s_M \in O_2$, por lo cual $(s_m - \varepsilon, s_M] \subset O_2$ para cierto $\varepsilon > 0$, pues O_2 es también abierto. Esto también contradice la definición de s_M. Por lo tanto el intervalo es no disconexo.

■

En la última demostración hemos usado como argumento decisivo el orden que está definido en el eje real. ¿Como vamos a proceder por ejemplo en el caso del disco en $\mathbb{R}^2$, que es también un conjunto "de una sola pieza"?

Los resultados siguientes nos proporcionan un método efectivo, para determinar cuando un conjunto es de una sola pieza.

Teorema 8.3 *Sean X un espacio métriuco conexo, Y un espacio métrico y $F\colon X \to Y$ una aplicación continua. Entonces $F(X)$ es un conjunto conexo.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Sea $F(X) = O_1 \cup O_2$, donde O_1 y O_2 son conjuntos abiertos en $F(X)$, no vacíos, mutuamente ajenos. Los conjuntos $U_i = F^{-1}(O_i)$, $i = 1, 2$ son abiertos en X, no vacíos, mutuamente ajenos. Lo cual es una contradicción que demuestra el teorema.

■

Definición 8.4 *Un espacio métrico X es conexo por arcos si para cada par x, $y \in X$ existe una aplicación continua $\gamma\colon [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.*

Teorema 8.5 *Todo espacio métrico conexo por arcos es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es conexo por arcos y sin embargo disconexo con la descomposición correspondiente $X = O_1 \cup O_2$. Entonces existen $x \in O_1$, $y \in O_2$ y una curva continua $\gamma\colon [0, 1] \to X$ que inicia en x y termina en y. Sea $I = [a, b]$. La imagen de γ se descompone en la forma siguiente: $\gamma(I) = U_1 \cup U_2$, donde $U_1 = \gamma(I) \cap O_1$, $U_2 = \gamma(I) \cap O_2$. El primer conjunto contiene al punto x y el segundo al punto y, por lo cual ninguno de los conjuntos es vacío, ambos son abiertos en $\gamma(I)$ y su intersección es vacía. Así hemos probado que $\gamma(I)$ es disconexo, lo que es falso por el Teorema 8.2 y el Teorema 8.3. Por lo tanto, el espacio X es conexo.

■

Todos los conjuntos convexos en un espacio normado son obviamente conexos por arcos y por lo tanto son conexos. También lo son los conjuntos llamados *estrellados.*

Ejemplo 8.6 *Sea F un espacio normado y sea $E \subset F$. El conjunto E se dice estrellado si existe $x_0 \in E$ tal que para todo $y \in E$ y $0 \leq t \leq 1$ se cumple que $tx_0 + (1-t)y \in E$.*

Un conjunto E es estrellado si el segmento lineal que une a x_0 con cualquier otro elemento de E pertenece a E. Observemos que cada conjunto estrellado es conexo por arcos y de acuerdo con Teorema 8.5 es conexo.

En el siguiente ejemplo presentamos un conjunto que es conexo pero que no es conexo por arcos.

Ejemplo 8.7 *El subconjunto del plano:*

$$C = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-1,1]\} \cup \{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

es conexo pero no es conexo por arcos, pues los puntos $(0,0)$ y $(\frac{1}{\pi}, 0)$ pertenecen a C y no se pueden unir con una curva continua dentro de C.

♢

Las operaciones de unión o intersección de conjuntos conexos no respetan la conexidad. Sin embargo existen teoremas sobre este tema, como el resultado siguiente que trata de una "cadena"de conjuntos conexos.

Teorema 8.8 *Sean $n \in \mathbb{N}$ y C_n una familia de conjuntos conexos. Supongamos que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es conexo.*

Demostración. Si $C = O_1 \cup O_2$ con O_1, O_2 abiertos y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $C_n = (O_1 \cap C_n) \cup (O_2 \cap O_2)$ y por la conexidad de C_n uno de los componentes es vacío, lo que significa que $C_n \subset O_1$ ó $C_n \subset O_2$. Si suponemos que $C_1 \subset O_1$, la condición $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ implica por inducción que $C_n \subset O_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $C \subset O_1$, mientras que $O_2 = \emptyset$. Por lo tanto el conjunto C es no disconexo.

■

El hecho de que en el Teorema 8.8 solo consideramos una familia numerable de conjuntos representa cierta desventaja. Con los mismos argumentos podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 8.9 *Sean $\alpha \in \Delta$ y C_α una familia de conjuntos conexos en el espacio métrico X. Si $\bigcap_{\alpha\in\Delta} C_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Delta} C_\alpha$ es un conjunto conexo.*

Ejercicio 8.10 *Demuestre que en el eje real coinciden los conceptos: conjunto convexo, conjunto conexo, conjunto estrellado.*

Una de las consecuencias del Teorema 8.8 es que cada espacio se descompone en una unión de conjuntos conexos mutuamente disjuntos.

Definición 8.11 *Sean X un espacio métrico y $x \in X$. La componente conexa $C(x)$ de x es el conjunto conexo más grande que contiene al punto x.*

La componente conexa $C(x)$ está bién definida, porque es igual a la unión de todos los conjuntos conexos que contienen a x (y por el Teorema 8.9 es conexo). Por otro lado, si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, entonces $C(x) \cup C(y)$ es conexo, contiene a x y por lo tanto coincide con $C(x)$. Observemos que $X = \bigcup_{x \in X} C(x) = \bigcup_{u \in U} C(u)$, donde U es el conjunto formado a partir del axioma de selección, que contiene un solo elemento de cada componente conexa.

8.2. Funciones sobre espacios conexos

Hasta este momento hemos usado el Teorema 8.3 como un medio para el estudio de la conexidad de los conjuntos. Pero en realidad se trata de una herramienta de análisis de funciones continuas.

Teorema 8.12 *Sean X un espacio conexo y $f \in C(X)$. Si f alcanza en X los valores a, b, entonces alcanza cada valor intermedio.*

Demostración. El conjunto $f(X) \subset \mathbb{R}$ es conexo y contiene por suposición a ambos puntos a y b. Por lo tanto contiene a todo el intervalo $[a, b]$.

■

En el siguiente ejemplo presentamos otra aplicación típica del concepto de conexidad.

Ejemplo 8.13 FUNCIONES LOCALMENTE CONSTANTES. *Sea X un espacio métrico. Supongamos que $F\colon X \to Y$ tiene la propiedad siguiente:*

$$\forall x \in X \quad \exists\, r > 0,\ c \in Y \quad f|_{B(x,r)} \equiv c.$$

Si F tiene esta propiedad, decimos que F es localmente constante.

Proposición 8.14 *Sean X un espacio métrico y $F\colon X \to Y$ localmente constante. Si el dominio X es conexo, entonces F es constante.*

Demostración. Sea c un valor que F alcanza en algún punto. El conjunto $O_c := \{x \in X : F(x) = c\}$ es por lo tanto no vacío. Este conjunto es también abierto por el hecho de que F es localmente constante. Ahora sean $y \in B$ y B el complemento de O_c en X. Por el mismo argumento de que F es localmente constante vemos que F toma el mismo valor $F(y) \neq c$ en alguna vecindad de y. Luego el conjunto B es abierto. Pero la conexidad de X implica que $B = \emptyset$ y en consecuencia $O_c = X$ y por lo tanto la función F es constante.

■

La conexidad es una propiedad invariante bajo aplicaciones continuas, entonces también es invariante bajo homeomorfismos. En el ejemplo siguiente podemos ver como se puede aprovechar este hecho para demostrar que algunas espacios son no homeomorfos.

Ejemplo 8.15 *¿ Existe un homeomorfismo entre* $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R}^2$*? La respuesta es: ¡No!. Para ver esto supongamos que* $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es un homeomorfismo. La misma aplicación define un homeomorfismo entre* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *y* $\mathbb{R} \setminus \{\phi(0)\}$*. De esto obtenemos una contradicción, puesto que* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *es un conjunto conexo, mientras que* $\mathbb{R} \setminus \{\phi(0)\}$ *no lo es.*

♢

8.3. Ejercicios

1. Sea E un subespacio vectorial de dimensión $n-1$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ es disconexo.
2. Demuestre que un espacio métrico X es conexo si y sólo si para cada par de puntos x, $y \in X$ existe un conjunto conexo $C \subset X$ tal que x, $y \in C$.
3. Sea $C \subset X$ un conjunto conexo en un espacio métrico. Demuestre que $\overline{C}$ es conexo.
4. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X. Supongamos que para cada par α_1, $\alpha_2 \in \Delta$ se cumple que $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Demuestre que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es conjunto conexo.
5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ una función continua. Supongamos que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$
Demuestre que f es suprayectiva.
6. ⧫ Sean $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le |x| \le 2\}$ y
$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$
Demuestre que el espacio (A,d) es conexo.

7. Demuestre que el conjunto
$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$$
es conexo.

8. ⧫ Demuestre que en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto y conexo es conexo por arcos.

9. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}$ con la métrica
$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x - y \in \mathbb{Q}, \\ \\ 2, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

10. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}^2$ con la métrica
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & y_1 = y_2, \\ \\ |x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2|, & y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

11. Sea X un espacio métrico. Para $x,\ y,\ z \in X$ sean $\gamma_1,\ \gamma_2 \in C([0, 1], X)$ curvas continuas tales que $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$, $\gamma_2(1) = z$. Construye una curva continua γ tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = z$.

12. Un espacio métrico se llama *localmente conexo* si cada punto del espacio tiene una vecindad conexa. Demuestre que cada espacio conexo y localmente conexo es conexo por arcos.

13. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto tal que $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$ y $\mathrm{Int}(A^c) \neq \emptyset$. Si $a \in \mathrm{Int}(A)$ y $b \in \mathrm{Int}(A^c)$, demuestre que cada curva continua que une a con b se intersecta con la frontera de A.

14. Sea A un conjunto conexo en un espacio métrico. ¿Es conexo el conjunto $\mathrm{Int}\, A$?

15. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. ¿Es conexo el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus C$?

16. ⧫ Investigue la conexidad del conjunto
$$A = (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{R}^2.$$
.

17. ⧫ Investigue la conexidad del conjunto
$$B = (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^2.$$
.

9

Teorema de Ascoli

Este capítulo está dedicado al problema de la compacidad de subconjuntos en el espacio de aplicaciones continuas definidas en un dominio compacto o al menos totalmente acotado. Por razones históricas en esta área se utiliza el término de familias de aplicaciones en lugar del de conjuntos de aplicaciones.

Para un espacio K compacto y un espacio completo Y el espacio $C(X, Y)$ es métrico y completo. Como sabemos, (por el Corolario 7.11) un subconjunto $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es compacto si y solo si es cerrado y totalmente acotado.

El proposito de este Capítulo es encontrar un criterio que nos permita averiguar de forma más sencilla cuándo la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada.

9.1. Familias de aplicaciones uniformemente equicontinuas

La propiedad que estudiamos en esta sección es local y el concepto tiene sentido para dominios X y codominios Y métricos arbitrarios.

Definición 9.1 *Una familia $\mathcal{F}$ de funciones $F\colon X \to Y$ es* equicontinua en *$x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $r_x > 0$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$ se cumple que $F(B(x, r_x)) \subset B(F(x), \varepsilon)$.*

La última condición equivale a decir

$$d(x, y) < r_x \;\Rightarrow\; d(F(x), F(y)) < \varepsilon.$$

Dicho de forma no muy rigurosa, la equicontinuidad de una familia de aplicaciones en un punto determinado x significa que todos los miembros de la familia son continuos en este punto y además su crecimiento en la vecindad de x es "semejante".

Ejemplo 9.2 *Sea $\mathcal{L}$ la familia de todas las funciones lineales sobre $\mathbb{R}$. Esta familia no es equicontinua en ningún punto $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si para algún $C > 0$ consideramos $\mathcal{L}_C = \{f \in \mathcal{L} : f(x) = cx + b, \text{ con } b \in \mathbb{R}, |c| \leq C\}$ obtenemos una familia de funciones equicontinua en cada punto del dominio.*

Este ejemplo se puede generalizar de la siguiente manera.

En el espacio $C^1(\mathbb{R})$ de funciones derivables con derivada continua en $\mathbb{R}$ escogemos

$$\mathcal{F}_a = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : |f'(x)| < a \text{ para } x \in [-1, 1]\},$$

donde $a > 0$ es una constante. Supongamos que $0 \leq x < 1$. Por teorema de Fermat para cada $f \in \mathcal{F}$ y $|x - y| < 1 - x$ se cumple que

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)||x - y| \leq a|x - y|.$$

Dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $r_x = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{a}, 1 - x\}$ para cumplir la condición $f((x-r_x, x+r_x)) \subset (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$. En el caso de $-1 < x < 0$ es suficiente tomar $r_x = x + 1$. Así la familia $\mathcal{F}_a$ es equicontinua en todos los puntos del intervalo $(-1, 1)$.

Definición 9.3 *Una familia $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ se llama* uniformemente equicontinua *si dado $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que para cualesquiera $F \in \mathcal{F}$ y $x \in X$ se cumple que $F(B(x, r)) \subset B(F(x), \varepsilon)$.*

Todos los elementos de una familia uniformemente equicontinua son funciones uniformemente continuas y además su "rapidez" de crecimiento tiene cota que no depende ni del punto ni tampoco del miembro de la familia.

En el teorema siguiente vemos una vez más la importancia del concepto de la compacidad.

Teorema 9.4 *Sean K un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subset C(K, Y)$ es una familia equicontinua en cada punto $x \in K$, entonces $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.*

Demostración. En cierto sentido este teorema generaliza Teorema el 7.20 entonces el método de demostración será semejante. Nuevamente el Teorema de Borel es el argumento más conveniente. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ tenemos $r_x > 0$ tal que para $F \in \mathcal{F}$ arbitrario

$$d(x, y) < r_x \Rightarrow d(F(x), F(y)) < \varepsilon.$$

La cubierta abierta $K = \bigcup_{x\in K} B(x, r_x/2)$ tiene una subcubierta finita:

$$K = \bigcup_{1\leq j\leq k} B(x_j, r_{x_j}/2).$$

Escogemos como r el valor $\frac{1}{2}\,\text{mín}\{r_{x_j} : 1 \le j \le k\}$. Si $x \in B(x_j, r_{x_j}/2)$ y $d(x,y) < r$ se sigue

$$d(y, x_{r_j}) \le d(y,x) + d(x, x_{r_j}) < r_{x_j}.$$

Luego, para un elemento arbitrario F de la familia $\mathcal{F}$ obtenemos que

$$d(F(x), F(y)) \le d(F(x), F(x_{r_j})) + d(F(y), F(x_{r_j})) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Así hemos probado que:

$$d(x,y) < r \;\Rightarrow\; d(F(x), F(y)) < 2\varepsilon$$

para cada $F \in \mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.

■

Proposición 9.5 *Sean K un compacto y Y un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es una familia uniformemente equicontinua entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es también uniformemente equicontinua.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $r > 0$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}$ y $d(x,y) < r$ se tiene que $d(F(x), F(y)) \le \varepsilon$. Sean $\mathcal{F} \ni F_n \to \tilde{F} \in \overline{\mathcal{F}}$ uniformemente. En particular para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos $d(F_n(x), F_n(y)) \le \varepsilon$. La distancia es una función continua, entonces pasando al límite $n \to \infty$ obtenemos $d(\tilde{F}(x), \tilde{F}(y)) \le \varepsilon$. Por lo tanto la cerradura de $\mathcal{F}$ sigue siendo uniformemente equicontinua.

■

9.2. Teorema de Ascoli

Como hemos advertido al principio del capítulo, nuestro propósito principal es determinar cuándo una familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es compacta con respecto a la métrica

$$d(F,G) = \sup_{x \in K} d(F(x), G(x)).$$

Buscamos primero las condiciones necesarias para la compacidad de $\mathcal{F}$.

Teorema 9.6 *Sean K un espacio compacto y Y un espacio métrico. Supongamos que $\mathcal{F} \subset C(K,Y)$ es un conjunto compacto. Entonces*

1. *para todo $x \in K$ el conjunto $\{F(x) : F \in \mathcal{F}\} \subset Y$ es compacto,*

2. *la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua.*

Demostración. Para $x \in K$ fijo consideramos la aplicación $\delta_x \colon C(K,Y) \ni F \to F(x) \in Y$ que es obviamente continua. Si $\mathcal{F}$ es compacta en $C(K,Y)$, su imagen bajo δ_x es compacta, lo que demuestra el inciso 1.

Como en cada conjunto compacto, la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada. Para $\varepsilon > 0$ determinado, existen $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(F_j, \varepsilon)$. Fijamos ahora un punto $x \in K$ y para cada $1 \leq j \leq k$ por la continuidad de F_j podemos encontrar $r_j > 0$ tal que si $d(x,y) < r_j$ obtenemos que $d(F_j(x), F_j(y)) < \varepsilon$.

Sea $r = \text{mín}\{r_j : 1 \leq j \leq k\}$, es claro que $r > 0$. Si $F \in \mathcal{F}$, existe j tal que $F \in B(F_j, \varepsilon)$, lo cual significa que $d(F(u), F_j(u)) < \varepsilon$, $u \in K$. Obtenemos finalmente para $d(x,y) < r$:

$$\begin{aligned} d(F(x), F(y)) &\leq d(F(x), F_j(x)) + d(F_j(x), F(y)) \\ &\leq d(F(x), F_j(x)) + d(F_j(x), F_j(y)) + d(F_j(y), F(y)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon. \end{aligned}$$

La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua y por Teorema 9.4 es uniformemente equicontinua.

■

Definition 9.7 *Sean $\mathcal{Z}$ un conjunto de k elementos: $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ y $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ un conjunto de m elementos. Denotaremos por T al espacio de todas las aplicaciones $\tau \colon \mathcal{Z} \to \mathcal{P}$, el cual consta de m^k elementos.*

El Teorema de Ascoli es casi exactamente inverso al teorema anterior. A continuación presentamos el teorema de Ascoli.

Teorema 9.8 (Ascoli) *Sean K un espacio compacto y Y un espacio métrico completo. Si $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ es un conjunto cerrado, equicontinuo y para todo $x \in K$ el conjunto $\{F(x) : F \in \mathcal{F}\}$ es totalmente acotado, entonces $\mathcal{F}$ es compacto.*

Demostración. Sabemos que el espacio $C(K,Y)$ es completo y por hipótesis $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado, entonces para probar que $\mathcal{F}$ es compacto solo nos falta demostrar que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

Fijamos $\varepsilon > 0$ y procedemos a construir una ε-red para $\mathcal{F}$. Por la Proposición 7.8 es suficiente buscar la red $\{F_1, \ldots, F_s\}$ de elementos que pertenecen a un espacio métrico en el cual $\mathcal{F}$ se sumerge isométricamente. Sea $B(K,Y)$ el espacio de todas las aplicaciones acotadas de K en Y con la misma métrica

$$d(F,G) = \sup_{x \in K} d(F(x), G(x)).$$

Nuevamente, gracias a la compacidad de K, la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua y para cierto $r > 0$ la condición $d(x,y) < r$, $F \in \mathcal{F}$ implica que $d(F(x), F(y)) < \varepsilon$. Ahora aprovechamos que K es totalmente acotado y buscamos una $r/2$ - red para K. Existen $x_1, \ldots, x_k \in K$ tales que

$$K = \bigcup_{1 \le j \le k} B(x_j, r/2).$$

Necesitamos sin embargo una descomposición de K en conjuntos mutuamente ajenos tales que cada uno de ellos esta dentro de alguna de las bolas $B(x_j, r/2)$. Definimos entonces $Z_1 = B(x_1, r/2)$, $Z_2 = B(x_2, r/2) \setminus Z_1$ y así sucesivamente $Z_j = B_j(x_j, r/2) \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} Z_i$. De esta manera aseguramos las siguientes propiedades:

a. $Z_j \subset B(x_j, r/2)$,
b. $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ si $i \neq j$,
c. $K = \bigcup_{j=1}^{k} Z_j$.

En seguida seleccionamos en cada conjunto $z_j \in Z_j$ arbitrario. Por la suposición $P_j = \{F(z_j) : F \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto totalmente acotado y la unión finita $P = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$ es también un conjunto totalmente acotado en Y.

Sea $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ una ε - red para P. Vamos a definir m^k funciones "escalonadas" en $B(K, Y)$ asociando a cada aplicación $\tau\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{P}$ una función $F_\tau \in C(K, Y)$ que toma valores constantes en cada uno de los Z_j. Para ello, sea $F_\tau(x) = \tau(z_j)$ cuando $x \in Z_j$. Observemos que la definición es correcta pues cada x pertenece a un único Z_j. La función F_τ es acotada porque toma solo a lo más k valores. Ahora es suficiente probar que $\{\mathcal{F}_\tau\}_{\tau \in T}$ es una 2ε-red para el conjunto $\mathcal{F}$. Dado $F \in \mathcal{F}$ arbitrario tenemos que encontrar τ tal que para cada $x \in K$ se cumpla $d(F(x), F_\tau(x)) < \varepsilon$. Tenemos que definir el valor $\tau(z_j) \in \mathcal{P}$ para cada $z_j \in \mathcal{Z}$, donde $1 \le j \le k$. Tomamos entonces $F(z_j) \in \mathcal{P}$ y buscamos p_i para el cual $d(F(z_j), p_i) < \varepsilon$. Luego definimos $\tau(z_j) = p_i$. Finalmente hacemos estimaciones para $x \in Z_j$, recordando que $d(F(x), F(z_j)) < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} d(F(x), F_\tau(x)) &= d(F(x), p_i) \le d(F(x), F(z_j)) + d(F(z_j, p_i) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon. \end{aligned}$$

■

Vale la pena observar que en la última parte de esta demostración hemos probado un hecho que se puede considerar otra versión del Teorema de Ascoli.

Proposición 9.9 *Sean K un espacio compacto y Y un espacio métrico. Si $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es una familia equicontinua y para todo $x \in K$ el conjunto $\{F(x) : F \in \mathcal{F}\}$ es totalmente acotado, entonces $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.*

Entre muchas de las aplicaciones que tiene el Teorema de Ascoli algunas son de caracter general por tal motivo las presentamos como teoremas separados.

Definition 9.10 *Decimos que una función $f \in C^{(n)}(K)$ si sus derivadas parciales de orden n existen y son continuas.*

Teorema 9.11 *Sean $O \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado y $K = \overline{O}$. Sea $\mathcal{F}_0 \subset C^1(K)$ un conjunto acotado. Entonces la cerradura de $\mathcal{F}_0$ en $C(K)$ es compacta.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{F}_0$ es acotado en el espacio $C^{(1)}(K)$, cuya norma está definida por

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{x\in K} |f'(x)|.$$

Entonces, existe $A > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}_0$

$$\sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{x\in K} |f'(x)| < A.$$

En particular en cada punto $x \in K$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}_0\}$ es acotado en $\mathbb{R}$, por lo cual también es totalmente acotado. Por otro lado tenemos que para x, $y \in K$

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{u\in K} \|f'(u)\| \|x - y\| \leq A\|x - y\|,$$

de donde concluimos que la familia es equicontinua.

Por lo tanto la familia de funciones $\mathcal{F} \subset C(K)$ satisface las suposiciones del teorema de Ascoli, luego es compacta.

∎

Ejemplo 9.12 *Sean*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad y \quad \mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

Una sucesión de funciones $f_n \in \mathbb{C}(\mathbb{D})$ converge a f casi uniformemente *si para cada $0 < r < 1$ la sucesión de restricciones $f_n|_{\mathbb{D}_r}$ converge a $f|_{\mathbb{D}_r}$ uniformemente. Esta convergencia no corresponde a una convergencia en un espacio normado, pero sí podemos construir una métrica d en $C(\mathbb{D})$ tal que $d(f_n, f) \to 0$ si y sólo si $f_n \to f$ casi uniformemente.*

Sean $r_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ y

$$d_n(f, g) = \sup_{z\in\mathbb{D}_{r_n}} |f(z) - g(z)|.$$

A esta métrica, le corresponde la convergencia uniforme sobre el espacio $\mathbb{D}_{r_n}$.

La función d_n es una métrica sobre $C(\mathbb{D}_{r_n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y la función definida por

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$$

es una métrica en $C(\mathbb{D})$. La convergencia con respecto a esta métrica significa la convergencia casi uniforme.

Definition 9.13 *Denotemos por $A(\mathbb{D})$ a la llamada álgebra del disco, es decir, el subespacio de $C(\overline{\mathbb{D}})$ de las funciones que son analíticas en $\mathbb{D}$ y continuas sobre su frontera. El espacio $A(\mathbb{D})$ hereda la norma del espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.*

El Teorema de Ascoli tiene aplicaciones importantes en la teoría de las funciones analíticas. Una de ellas es el siguiente teorema.

Teorema 9.14 (Montel) *Sea $\mathcal{F} \subset A(\mathbb{D})$ un subconjunto acotado. Entonces cada sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ tiene una subsucesión f_{n_k} que converge casi uniformemente a una función f acotada y analítica en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria parametrizada por el ángulo $0 \le t \le 2\pi$. Observemos que existe $A > 0$ tal que para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ y $f \in \mathcal{F}$ se cumple que $|f(z)| \le A$. Ahora el Teorema integral de Cauchy nos permite representar a cada elemento de $A(\mathbb{D})$ como $f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)dw}{z-w}$, por lo cual $f'(z) = -\int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)dw}{(z-w)^2}$. Para $0 < r < 1$ y $z \in \mathbb{D}_r$ obtenemos

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{f(w)dw}{(z-w)^2} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}dt}{(z-e^{it})^2} \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{it})|dt}{|z-e^{it}|^2} \\ &\le \frac{A}{|1-r|^2}. \end{aligned}$$

La familia $\mathcal{F}_r$ restringida al conjunto $\overline{\mathbb{D}_r}$ de los elementos de $\overline{\mathcal{F}}$ es acotada y además tiene las derivadas acotadas, entonces por el Teorema 9.11 la familia $\overline{\mathcal{F}_r}$ es compacta. Luego, existe una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente en $C(\overline{\mathbb{D}_r})$ entonces tiene límite el cual es una función analítica en $\mathbb{D}_r$ y continua en $\overline{\mathbb{D}_r}$,.

Aplicamos estos argumentos al caso cuando $r_1 = \frac{1}{2}$ y denotamos por f_n^1 la sucesión obtenida. Para $r_2 = \frac{2}{3}$ existe una subsucesión de (f_n^1) que converge uniformemente en $\mathbb{D}_{r_2}$. Siguiendo así podemos definir por inducción funciones f_n^k de tal manera que para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión (f_n^k) de variable n es una subsucesión de (f_n^{k-1}) que converge uniformemente en $\mathbb{D}_{r_k}$ cuando $n \to \infty$. En cada $\mathbb{D}_{r_k}$ la función $f_k = \lim_{n\to\infty} f_n^k$ es una acotada por A y analítica en $\mathbb{D}_{r_k}$. Así obtenemos una sola función f analítica y acotada definida univocamente en todo $\mathbb{D}$.

Vamos a probar que $f_n^n \to f$ casi uniformemente en $\mathbb{D}$. Para $0 < r < 1$ existe $r_k > r$ entonces es suficiente demostrar que f_n^n converge uniformemente sobre cada D_{r_k}. Sea $N_k \in \mathbb{N}$, entonces para $n > N_k$ se tiene que

$$|f(z) - f_n^k(z)| < \varepsilon.$$

Es claro que podemos escoger $N_k > k$. Por la definición de una subsucesión, para cada $m > N_k$ el elemento f_m^m es de la forma $f_{N_k}^n$ para algún $n > N_k$. Por lo tanto $|f(z) - f_m^m(z)| < \varepsilon$ cuando $m > N_k$. Lo cual concluye la prueba.

■

9.3. Ejercicios

1. Sean X, Y espacios métricos. Para cada $x \in X$ definimos la aplicación $\delta_x \colon BC(X,Y) \to Y$ por $\delta_x(f) = f(x)$.
   a. Demuestre que δ_x es una aplicación continua.
   b. Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en $x_0 \in X$ si y sólo si la aplicación

   $$X \ni x \to \delta_x|_{\mathcal{F}} \in BC(\mathcal{F}, Y)$$

   es continua en x_0.
   c. Muestre que si $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua, entonces dicha aplicación es uniformemente continua.

2. ⧫ Sean $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$ una familia equicontinua y

   $$U = \{x \in X : \{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \text{ es totalmente acotado}\}.$$

   Muestre que U es un conjunto abierto y cerrado en X. Supongamos que $U \neq \emptyset$. Muestre que si X es compacto y conexo la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada.

3. Sean V un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}$ y $k(\cdot,\cdot) \in BC(V \times V)$. Denotamos por K al operador integral definido sobre $CB(U)$ por:

   $$Kf(x) = \int_V f(x,y)f(y)dy.$$

   Demuestre que $K(B(0,1))$ es un conjunto totalmente acotado en $BC(U)$.

4. Sea $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Utilizando Teorema de Ascoli describe los conjuntos compactos en $C(X)$.

5. Para $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ demuestre que el conjunto $\{f \in C(X) : |f(x)| \leq |x|\}$ es compacto.

10

Teorema de Stone-Weierstrass

El teorema clásico de Weierstrass afirma que cada función real continua sobre un intervalo finito $[a, b]$ se puede aproximar uniformemente por polinomios. El Teorema de Stone-Weierstrass generaliza este resultado. Resulta que el mismo fenómeno se observa en el espacio de las funciones continuas sobre cualquier espacio compacto y si en lugar de los polinomios usamos un álgebra de funciones que contiene a la función constante y que separa a los puntos del dominio.

Cuando consideramos el espacio de las funciones continuas complejas hay que añadir una condición mas: que dicha álgebra sea invariante bajo la operación de la conjugación compleja.

Como vemos, la estructura algebraica del espacio de las funciones continuas tiene un papel muy importante en esta área, por lo cual dedicamos la primera sección del capítulo a la presentación de los elementos de la estructura del espacio $C(K)$.

10.1. La retícula de funciones continuas

Sea (K, d) un espacio métrico compacto y $C(K)$ el espacio de todas las funciones continuas reales sobre K. Entonces el espacio $C(K)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es un espacio normado con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

2. Es un álgebra con el producto de la multiplicación entre funciones:

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

La multiplicación considerada como operación

$$C(K) \times C(K) \ni (f, g) \to fg \in C(K)$$

es continua. Y la desigualdad $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ nos lleva a

$$\begin{aligned}\|fg - hk\|_\infty &= \|fg - fk + fk - hk\|_\infty \leq \|f(g-k)\|_\infty + \|(f-h)k\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \|g-k\|_\infty + \|k\|_\infty \|f-h\|_\infty.\end{aligned}$$

Por lo que, si $(h_n, k_n) \to (f, g)$ en $C(K) \times C(K)$ entonces $h_n k_n \to fg$.

3. Es una *retícula*, es decir, que para cada $f \in C(K)$, la función

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$$

pertenece al espacio $C(K)$. Esta propiedad también se puede expresar de la siguiente manera. Si definimos

$$f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0 \\ 0, & f(x) > 0, \end{cases}$$

Obtenemos las relaciones $f^- = -(-f)^+$ y $f = f^+ - f^-$, mientras que $|f| = f^+ + f^-$. El hecho de que $C(K)$ es una retícula significa que es un espacio cerrado con respecto a cualquiera de las operaciones: $f \to f^+$, $f \to f^-$ o $f \to |f|$. Ahora, sean f, $g \in C(K)$ y

$$f \wedge g(x) := \text{mín}\{f(x), g(x)\},$$

$$f \vee g(x) := \text{máx}\{f(x), g(x)\}.$$

Observemos la relación que tienen estas operaciones con las anteriores. A saber:

$$f \wedge g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|,$$

$$f \vee g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|.$$

La forma más sencilla de probar estas relaciones es verificarlas punto por punto considerando los casos $f(x) \leq g(x)$ y $f(x) > g(x)$.
El hecho de que $C(K)$ es una retícula significa que las operaciones $\wedge$, $\vee$ actuan dentro de este espacio.

Ahora vamos a probar que la función $[0,1] \ni t \to \sqrt{t} \in \mathbb{R}^+$ se puede aproximar uniformemente por polinomios de la variable t. Este hecho es interesante por si mismo.

Lema 10.1 *Existe una sucesión de polinomios p_n que converge a la función $\sqrt{t}$ uniformemente sobre* $[0,1]$.

Demostración. Definimos

$$p_1(t) = \frac{t}{2}, \quad p_2(t) = t - \frac{t^2}{8} \quad \text{y} \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + (t - p_n^2(t))/2.$$

Primero veamos que en el dominio $[0,1]$ se cumple que $p_n(t) \leq 1$. Para este fin calculamos

$$1 - p_{n+1}(t) = 1 - p_n(t) - (t - p_n^2(t))/2 = \frac{1}{2}(1 - p_n(t))^2 + \frac{1}{2}(1 - t) \geq 0,$$

mientras $0 \leq t \leq 1$. Al mismo tiempo la sucesión p_n es monótona creciente. Lo probamos por inducción. En efecto, se cumple que

$$p_2(t) - p_1(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} \geq 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= p_n + \frac{1}{2}(t - p_n^2) - p_{n-1} - \frac{1}{2}(t - p_{n-1}^2) \\ &= (p_n - p_{n-1})(1 - \frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}). \end{aligned}$$

El segundo factor es no negativo en $[0,1]$, entonces, si por la hipótesis inductiva tenemos $p_n - p_{n-1} \geq 0$, la fórmula implica $p_{n+1} - p_n \geq 0$ para todo n. La sucesión p_n es monótona creciente, acotada por el valor 1, entonces converge puntualmente. Por Lema de Dini obtenemos que la convergencia es uniforme a una función continua, no negativa $q(t)$. Queda por probar que $q(t) = \sqrt{t}$. En la relación

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + (t - p_n^2(t))/2$$

pasamos al límite $n \to \infty$ y obtenemos $q(t) = q(t) + (t - q(t)^2)/2$, lo cual implica inmediatamente que $q(t) = \sqrt{t}$.

■

Teorema 10.2 *Cada subálgebra cerrada de $C(X)$ es una retícula.*

Demostración. Si $f \in C(K)$ y p es un polinomio, denotamos

$$p(f)(t) = p(f(t)).$$

Cuando una sucesión de polinomios p_n converge uniformemente sobre el intervalo $[a,b]$ y $f \in C(K)$ toma valores en el mismo intervalo, la función $p_n(f)$ converge uniformemente sobre K.

Para cada $f \in C(K)$ la función $f/\|f\|_\infty$ toma valores en el intervalo $[-1,1]$. Tomando la sucesión de polinomios p_n (del Lema anterior) convergente a $\sqrt{t}$ en este intervalo obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{f(t)^2}{\|f\|_\infty^2}\right) = \sqrt{\frac{(f(t)^2}{\|f\|_\infty^2}} = \frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty},$$

donde la convergencia es uniforme sobre K. Si $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(K)$ que contiene a la función constante y $f \in \mathcal{A}$, para cada polinomio p el elemento $p(f^2)$ pertenece a $\mathcal{A}$. Luego, como hemos visto

$$\frac{|f|}{\|f\|_\infty} = \lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right).$$

Si $\mathcal{A}$ es además cerrada, el valor absoluto de f pertenece a $\mathcal{A}$ como límite uniforme de elementos de $\mathcal{A}$.

■

El Teorema 10.2 implica que cada subalgebra cerrada de $C(K)$ es también cerrada con respecto a las operaciones $\wedge$ y $\vee$. Terminamos los preparativos relacionados con el Teorema de Stone-Weierstrass con un resultado muy sencillo pero importante.

Proposición 10.3 *Sea $\mathcal{A}$ una subalgebra de $C(K)$. Entonces la cerradura de $\mathcal{A}$ en $C(K)$ es también un álgebra.*

Demostración. Si f, $g \in \overline{\mathcal{A}}$, existen f_n, $g_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ y $g_g \to g$. Como hemos visto en la misma sección, $f_n g_n \to fg$, por lo cual $fg \in \overline{\mathcal{A}}$. Por lo tanto el espacio $\overline{\mathcal{A}}$ es un álgebra.

■

Recordemos que una familia $\mathcal{F} \subset C(K)$ *separa los puntos de* K, si para cada par de puntos $x \neq y$ en K existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

10.2. Teorema de Stone-Weierstrass. Versión real.

Teorema 10.4 *Sea K un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{A}$ es una subalgebra de $C(K)$ que contiene a la función 1 y separa los puntos de K, entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(K)$.*

Demostración. Dados dos números reales $a \neq b$ y $x \neq y$ en K, construimos una función $h \in \mathcal{A}$ tal que $h(x) = a$, $h(y) = b$. Entonces, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$, porque la familia $\mathcal{A}$ separa los puntos del dominio. La función

$$h(u) = a + \frac{(b-a)(g(u) - g(x))}{g(y) - g(x)}$$

tiene las propiedades deseadas. (Solo en este momento usamos la suposición de que $\mathcal{A}$ contiene a la función constante.)

Sean $f \in C(K)$ y $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar un elemento g del álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ que satisfaga que $f - \varepsilon \leq g \leq f + \varepsilon$. Fijamos $x_0 \in K$ y sea $z \in K$. Buscamos $h_z \in \mathcal{A}$ tal que $h_z(x_0) = f(x_0)$ y $h_z(z) = f(z)$. La función $h_z - f$ es continua y se anula en z, entonces existe un radio $r(z) > 0$ tal que para y en la bola $B(z, r(z))$ se cumple que $h_z(y) - f(y) < \varepsilon$.

Después de haber construido las funciones h_z y los radios correspondientes $r(z)$ para todos $z \in K$, representamos $K = \bigcup_{z\in K} B(z, r(z))$. El espacio K es compacto, así que esta cubierta abierta de K tiene una subcubierta finita:

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} B(z_j, r(z_j)).$$

Sea $g_{x_0} = h_{z_1} \wedge \cdots \wedge h_{z_n}$. Esta función pertenece a $\overline{\mathcal{A}}$ y satisface las condiciones $g_{x_0} = f(x_0)$ y $g_{x_0}(y) < f(y) + \varepsilon$ para todos $y \in K$. Por la continuidad de las funciones existe $R(x_0)$ tal que para $u \in B(x_0, R(x_0))$ se cumple $f(u) - \varepsilon < g_{x_0}(u)$. Ahora consideramos la familia de todas las funciones g_{x_0} y los radios $R(x_0) > 0$ para todo $x_0 \in K$.

La cubierta $K = \bigcup_{x\in K} B(x, R(x))$ tiene una subcubierta finita $K = \bigcup_{m=1}^{k} B(x_m, R(x_m))$. La función $g = g_{x_1} \vee \cdots \vee g_{x_k}$ que es elemento de $\overline{\mathcal{A}}$ satisface para $u \in K$ arbitrario que $f(u) - \varepsilon < g(u) < f(u) + \varepsilon$.

Los elementos del álgebra $\overline{\mathcal{A}}$ aproximan a cada elemento de $C(K)$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$ y como $\overline{\mathcal{A}}$ es cerrado en esta norma, obtenemos que

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K).$$

■

10.3. Teorema de Stone-Weierstrass. Versión compleja.

El hecho de que las funciones consideradas en la sección anterior eran reales fue usado en la demostración del teorema. Esto no significa que realmente la suposición sea necesaria. Para darse cuenta de que en el caso del álgebra $C(K, \mathbb{C})$ se necesita agregar otras suposiciones para obtener subálgebras densas, veamos un ejemplo clásico.

Ejemplo 10.5 *Tomemos como el dominio de funciones al disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$, el cual esta definido por*

$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Sea $\mathcal{A}$ el algebra de funciones polinomiales de variable z restringidas al disco con la norma $\|\cdot\|_\infty$ que es una subálgebra en $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ que contiene a las funciones constantes y obviamente separa los puntos del disco. Las funciones que son límites uniforme de elementos de $\mathcal{A}$ son analíticas en el interior del *disco. Obviamente no todos los elementos de* $C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ *son analíticos en el interior del disco, por lo cual* $\overline{\mathcal{A}} \neq C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$*.*

$\diamondsuit$

Teorema 10.6 *Sea* K *un espacio métrico compacto. Entonces una subálgebra* $\mathcal{A} \subset C(\overline{K, \mathbb{C}})$ *es densa si y sólo si separa los puntos de* K*, contiene a las funciones constantes y es cerrada con respecto a la operación de la conjugación compleja* $f \to \overline{f}$*.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es cerrada respecto a la conjugación compleja, entonces las operaciones de tomar las partes real e imaginaria de las funciones:

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \qquad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}),$$

actuan también dentro de $\mathcal{A}$.

Si denotamos $\widetilde{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{A} : \overline{f} = f\}$, se cumple $\operatorname{Re}(\mathcal{A}) \cup \operatorname{Im}(\mathcal{A}) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$. El espacio $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra real y subalgebra de $C(K)$. Además, $\widetilde{\mathcal{A}}$ separa los puntos de K, porque para $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{A}$, que separa estos puntos. Tenemos que $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y) + i \operatorname{Im} f(y)$ y por lo tanto $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ ó $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$. En cualquier caso algún elemento de $\widetilde{\mathcal{A}}$ separa los puntos.

Por el Teorema 10.4 obtenemos que $\overline{\widetilde{\mathcal{A}}} = C(X)$. Para cualquier elemento arbitrario $g = \operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g$ existen $f_1,\ f_2 \in \widetilde{\mathcal{A}}$ tales que $\|\operatorname{Re} g - f_1\|_\infty < \varepsilon/2$ y $\|\operatorname{Im} g - f_2\|_\infty < \varepsilon/2$, de tal manera que $\|g - (f_1 + i\, f_2)\|_\infty < \varepsilon$, de donde $f_1 + i\, f_2 \in \mathcal{A}$.

$\blacksquare$

10.4. Aplicaciones

El Teorema de Stone-Weierstrass proporciona un método para construir subconjuntos densos en espacios de funciones, lo que crea una relación con el estudio de la separabilidad de estos espacios.

Teorema 10.7 *Sea* (K, d) *un espacio métrico compacto. El espacio* $C(K)$ *es separable.*

Demostración. El espacio K es separable de acuerdo con Teorema 7.12. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en K y $f_n(x) = d(x, x_n)$. Los elementos de la familia de funciones f_n, $n \in \mathbb{N}$ son continuas y separan los puntos de X. En efecto, si $d = d(x, y)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < d/3$. Por la desigualdad de triangulo $f_n(y) = d(y, x_n) \geq d(x, y) - d(x, x_n) > d - d/3 = \frac{2}{3}d$. La función f_n separa los puntos x y y pues $f_n(y) - f_n(x) > \frac{2}{3}d - \frac{1}{3}d = \frac{1}{3}d$.

Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial de las combinaciones lineales de funciones de la forma

$$f_{n_1}^{k_1} \cdots f_{n_N}^{k_N},$$

donde $n_j, k_j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Visiblemente la suma y producto de dos combinaciones siguen teniendo la misma forma, entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones, que contiene a funciones constantes.

Por Teorema de Stone-Weierstrass se tiene que $\mathcal{A}$ es denso en $C(K)$. Sea $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ el subconjunto de estos elementos de $\mathcal{A}$ que son combinaciones lineales con coeficientes racionales.

Si $g \in \mathcal{A}$ se puede representar en forma $g = \sum_{j=1}^{m} a_j g_j$, donde cada función g_j es de forma $f_{n_N}^{k_N}$, así podemos encontrar $q_1, \ldots, q_m$ tales que

$$|a_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{m\|g_j\|_\infty},$$

donde $j = 1, 2, \ldots, m$. Se sigue que

$$\|g - \sum_{j=1}^{m} q_j g_j\|_\infty = \|\sum_{j=1}^{m}(a_j - q_j)g_j\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j - q_j|\|g_j\|_\infty < \varepsilon.$$

El espacio $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ es denso en $\mathcal{A}$ y por lo tanto es denso en $C(K)$. Queda por probar que el conjunto $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ es numerable. Un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$ es numerable si y sólo si su base es numerable. La base de $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}$ está formada por funciones de forma $f_{n_N}^{k_N}$. Es suficiente demostrar que el número de estas funciones es numerable. Cada una de estas funciones está determinada por dos sistemas de números enteros no negativos $(n_1, \ldots, n_N)$, $(k_1, \ldots, k_N)$, donde N recorre el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$. La base del espacio no es más grande que

$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^{2N}$$

y este espacio es numerable como afirman los Corolarios 5.4 y 5.5.

■

Los teoremas famosos como el Teorema de Stone-Weierstrass deben su importancia al hecho de que encuentran muchas aplicaciones en análisis y en otras áreas de matemáticas. Sin embargo la mayoría de las aplicaciones no consisten en el uso directo del Teorema sino necesitan la creación de un vínculo - un "puente" - entre el problema original y el Teorema.

Tratandose del Teorema original de Weierstrass podemos formular varios problemas a los cuales a primera vista no se aplica el Teorema. Por ejemplo:

Si una función continua sobre el intervalo $[-1, 1]$ se anula en cero, ¿es posible aproximarla solo por polinomios que se anulan en cero?

Si la función del espacio $C[-1, 1]$ es simétrica (o antisimétrica), ¿podemos aproximarla por polinomios simétricos? (resp. antisimétricos?)

Las funciones que se anulan en cero, sí forman un álgebra, pero dicha álgebra no contiene la unidad y sus elementos no separan los puntos del intervalo $[-1, 1]$. Las funciones simétricas tampoco separan los puntos, mientras que las funciones antisimétricas ni siquiera forman un algebra. Sin embargo la solución de estos problemas está a la mano gracias al Teorema de Weierstrass.

Teorema 10.8 *Sean K un espacio métrico compacto y $x_0 \in K$. Si $\mathcal{A} \subset C(K)$ es un algebra que separa los puntos de K y contiene a la función constante 1. Si $\mathcal{A}_0 = \{f \in \mathcal{A} : \ f(x_0) = 0\}$, entonces*

$$\overline{\mathcal{A}_0} = \{f \in \overline{\mathcal{A}} : \ f(x) = 0\}.$$

Demostración. Sea $f \in C(K)$ tal que $f(x_0) = 0$. Por Teorema de Stone-Weierstrass existen $f_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente. En particular $f_n(x_0) \to 0$. Sean $g_n = f_n - f_n(x_0)$. Se cumple entonces que $g_n \in \mathcal{A}_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g_n \to f \in \overline{\mathcal{A}}$ uniformemente.

■

Otros problemas mencionados arriba también se pueden formular y resolver en forma más general. Para una función f sobre un espacio vectorial E denotemos $\breve{f}(x) = f(-x)$. Una función es *simétrica o par* si $\breve{f} = f$ y *antisimétrica o impar* si $\breve{f} = -f$.

Teorema 10.9 *Sea K un conjunto compacto en un espacio normado E y tal que $-K = K$. Sea $\mathcal{A} \subset C(K)$ un algebra que separa los puntos de K, contiene a la función 1 y satisface $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \breve{f} \in \mathcal{A}$. Entonces cada función simétrica (antisimétrica) de $C(K)$ se puede aproximar uniformemente por elementos simétricos (resp. antisimétricos) de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Cada función f sobre K se puede representar en forma única como suma de componentes simétrica é antisimétrica:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = f_s(x) + f_a(x).$$

Una función es simétrica si $f = f_s$ y antisimétrica si $f = f_a$. Sean $f_n \in \mathcal{A}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente. Sea $(f_n)_s \to f_s$ y $(f_n)_a \to f_a$. Si f es simétrica obtenemos $f = f_s = \lim_{n\to\infty}(f_n)_s$ y en caso de una función antisimétrica $f = f_a = \lim_{n\to\infty}(f_n)_a$.

■

La compacidad del dominio es una suposición importante para la validez del Teorema de Stone-Weierstrass. Sin embargo, en el caso de algunos dominios no compactos el Teorema proporciona resultados interesantes sobre la aproximación uniforme de funciones continuas. Antes de presentar estos corolarios formulamos un lema sencillo sobre la convergencia uniforme.

Lema 10.10 *Sean* (X, d_X) *un espacio métrico y* (f_n) *una sucesión de funciones acotadas sobre* X *que convergente uniformemente a la función* f*. Sean* (Y, d_Y) *y* $\phi\colon Y \to X$ *una aplicación suprayectiva. Entonces la sucesión* $f_n \circ \phi$ *converge uniformemente a* $f \circ \phi$*.*

Sea

$$C_\infty(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}.$$

El espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es obviamente una subalgebra cerrada del álgebra $BC(\mathbb{R})$ que no contiene a la función 1 (La prueba de esto se deja como parte de los ejercicios de esta sección).

Teorema 10.11 *Sea* $\mathcal{A}$ *un subálgebra de* $C_\infty(\mathbb{R})$ *que separa los puntos de* $\mathbb{R}$ *y cuyos elementos no tienen ningún cero en común en* $\mathbb{R}$*. Entonces* $\overline{\mathcal{A}} = C_\infty(\mathbb{R})$*.*

Demostración. La función de variable compleja $\tau(z) = \frac{iz-1}{iz+1}$ transforma el eje real en la circunferencia $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Su imagen es $\mathbb{S} \setminus \{1\}$ y cuando $x \to \pm\infty$ se tiene que $\tau(x) \to 1$.

La función inversa $\tau^{-1}(w) = \frac{i(w+1)}{w-1}$ satisface entonces $|\tau^{-1}(e^{i\alpha})| \to \infty$ cuando $e^{i\alpha} \to 1$. De tal manera τ define un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}\setminus\{1\}$ y además para $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\lim_{z\to 1} f \circ \tau^{-1}(z) = \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0.$$

Para $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ la composición $f \circ \tau^{-1}$ es una función continua en $\mathbb{S} \setminus \{1\}$ que tiene límite cero en 1, entonces se extienda a una función continua sobre $\mathbb{S}$ que se anula en 1. Sea

$$C_1(\mathbb{S}) = \{f \in C(\mathbb{S}) : f(1) = 0\}$$

y definimos una aplicación $T\colon C_\infty(\mathbb{R}) \to C_1(\mathbb{S})$ por

$$Tf(z) = \begin{cases} f(x), \; z = \tau(x), \; x \in \mathbb{R}, \\ \\ 0, \qquad z = 1. \end{cases}$$

Visiblemente T es una isometría lineal suprayectiva, porque su inverso es el operador que asocia a $g \in C_1(\mathbb{S})$ la composición $g \circ \tau$. Las funciones de la forma Tf, $f \in \mathcal{A}$ forman en $C_1(\mathbb{S})$ una subalgebra $\mathcal{B}$ que separa los puntos de $\mathbb{S}$. (Suponiendo que en ningún punto de $\mathbb{R}$ se anulan todos los elementos de $\mathcal{A}$ hemos asegurado que el punto 1 se puede separar de otros elementos del círculo por algún elemento Tf, $f \in \mathcal{A}$). Por teorema 10.8 el álgebra $\mathcal{B}$ es densa en $C_1(\mathbb{S})$ y como T es una isometría, entonces $\mathcal{A}$ es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$.

■

Definición 10.12 *Un espacio métrico* (X, d) *se llama* σ*-compacto si existe una familia numerable de conjuntos compactos* $K_n \subset X$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$*.*

El ejemplo principal de un espacio σ-compacto es el espacio euclidiano que se puede representar como

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{B(0,m)}.$$

Definición 10.13 *Una sucesión de funciones (f_m) continuas sobre un espacio σ-compacto $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$ converge a la función f casi uniformemente si para todo $m \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K_m} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

En otras palabras, $f_n \to f$ casi uniformemente si para cada $m \in \mathbb{N}$ $f_n|_{K_m} \to f|_{K_m}$ uniformemente.

El Teorema de Stone-Weierstrass conduce a un teorema sobre la aproximación casi uniforme de funciones continuas sobre un espacio σ-compacto.

Teorema 10.14 *Sean X un espacio σ-compacto y $\mathcal{A} \subset C(X)$ una subálgebra que contiene a la función 1 y que separa los puntos de X. Para cada $f \in C(X)$ existe una sucesión $f_n \in \mathcal{A}$ tal que $f_n \to f$ casi uniformemente.*

Demostración. Sea $C_m = \bigcup_{j=1}^m K_j$. Obviamente los conjuntos C_m son compactos y $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$. Denotamos: $\mathcal{A}_m = \{f|_{C_m} : f \in \mathcal{A}\}$. Por Teorema de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}_m$ es un subálgebra densa en $C(C_m)$. Entonces existe $f_m \in \mathcal{A}$ tal que

$$\sup_{x\in C_m} |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

Así por inducción obtenemos una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$. Puesto que C_m es una sucesión creciente se sigue para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $n > m$:

$$\sup_{x\in C_m} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}.$$

La sucesión f_n converge casi uniformemente con respecto a la familia de compactos C_m. Y como $K_m \subset C_m$ entonces la sucesión converge casi uniformemente con respecto a la familia original K_m.

■

La convergencia casi uniforme, así como la hemos definido no corresponde a la convergencia con respecto a una norma determinada sino a un sistema de normas en los espacios $C(K_m)$. Sin embargo sí se puede introducir en el espacio $C(X)$ una métrica D tal que la convergencia casi uniforme $f_n \to f$ tenga lugar si y sólo si $D(f_n, f) \to 0$, donde la métrica D esta definida de la siguiente manera:

$$D(f,g) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m} \frac{\|f-g\|_m}{1+\|f-g\|_m},$$

donde

$$\|f\|_n = \sup_{x \in K_m} |f(x)|.$$

10.5. Ejercicios

1. Encuentre una subálgebra de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separe los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyos elementos se anulen en cero.
2. Demuestre que el espacio vectorial de funciones de la forma $p(x)e^{-a^2x^2}$, donde p es un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ un número fijo, es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$.
3. Sea $f \in C[a,b]$. Demuestre que si para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$, entonces $f = 0$.
4. Una función f sobre $\mathbb{R}$ se dice periodica con periodo a si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x+a) = f(x)$. Demueste que cada función continua, periodica con periodo 2π se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales de las funciones 1, $\operatorname{sen} nx$, $\cos nx$, con $n \in \mathbb{N}$.
5. Demuestre que cada función periódica y continua es acotada e uniformemente continua.
6. Demuestre que cada función continua sobre el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ se puede aproximar uniformemente por funciones de la forma $P(z, \overline{z})$, donde P es un polinomio de dos variables.
7. Demuestre que los polinomios de forma $P(z)$ son no densos en $C(\overline{\mathbb{D}})$.
8. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es separable.
9. Formule y demuestre las versiones complejas de los teoremas de la última sección de este capítulo.
10. Sean X, Y espacios métricos compactos y $\mathcal{A}$ el conjunto de las funciones sobre $X \times Y$ dadas por

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\psi_i(y),$$

    donde $\psi_i \in C(X)$ y $\psi_i \in C(Y)$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es denso en $C(X \times Y)$.
11. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es cerrado en $BC(\mathbb{R})$.
12. Demuestre Lema 10.10.

13. Demuestre que para cada espacio σ-compacto X la función $D(\cdot,\cdot)$ definida al final de este capítulo es una métrica en el espacio $C(X)$ y que la convergencia en esta métrica coincide con la convergencia casi uniforme.

14. ♦ Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Formule y demuestre la versión vectorial del Teorema de Weierstrass para el espacio $C(K,\mathbb{R}^m)$.

11

Sugerencias y soluciones

Espacios métricos

1. ♦ En el espacio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la función:

$$d(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m. \end{cases}$$

Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{N}$.

Solución. Solamente necesitamos demostrar la desigualdad de triangulo. Observemos que si entre los tres números m, n, k dos de ellos coinciden, entonces la desigualdad se cumple. Suponemos entonces que los tres números son distintos. Lo que debemos probar es que

$$1 + \frac{1}{n+m} \leq 1 + \frac{1}{n+k} + 1 + \frac{1}{k+m},$$

lo cual equivale a

$$\frac{1}{n+m} \leq 1 + \frac{1}{n+k} + \frac{1}{k+m}$$

y finalmente a

$$(n+k)(k+m) \leq (n+m)(n+k)(k+m) + (n+m)(k+m) + (n+m)(n+k).$$

Desarrollando la expresión que aparece del lado izquierdo de la desigualdad anterior, obtenemos el valor

$$nk + k^2 + mn + km.$$

En la expresión del lado derecho entre otros términos positivos aparecen los valores nk, km y nm. Además aparece el término nk^2 que es mayor que k^2. Así sin hacer más cálculos vemos que la desigualdad es cierta.

■

2. Demuestre que las siguientes funciones son métricas en el espacio $\mathbb{R}^n$ y en el caso de $\mathbb{R}^2$ traza las bolas unitarias correspondientes.

a. $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|$.

b. $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \max_{1\le j\le n} |a_j - b_j|$.

c. $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j |a_j - b_j|^2}$, donde $c_j > 0$ y $1 \le j \le n$.

Sugerencia. En los tres casos se trata de métricas asociadas a una norma. Por lo cual es suficiente demostrar que las funciones siguientes son normas:

a. $\|\mathfrak{a}\| = \sum_{j=1}^{n} |a_j|$,

b. $\|\mathfrak{a}\| = \max_{1\le j\le n} |a_j|$,

c. $\|\mathfrak{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j |a_j|^2}$

Sólo la desigualdad de triangulo en el caso c. no es obvia. Sin embargo, conocemos esta desigualdad en caso de la norma euclidiana

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplíquela a los vectores

$$\mathfrak{a}' = (\sqrt{c_1}a_1, \sqrt{c_2}a_2, \ldots, \sqrt{c_n}a_n) \quad \text{y} \quad \mathfrak{b}' = (\sqrt{c_1}b_1, \sqrt{c_2}b_2, \ldots, \sqrt{c_n}b_n).$$

3. La métrica *del bosque.* Demueste que la siguiente función en el plano es una métrica. Para $\mathfrak{a} = (a_1, a_2)$, $\mathfrak{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ sea

$$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \begin{cases} |a_1| + |a_1 - b_1| + |b_2|, & a_1 \ne b_1, \\ |a_2 - b_2|, & a_1 = b_1. \end{cases}$$

Dibuje la bola centrada en el punto $(1,1)$ y de radio 2.

Sugerencia. *Como sugerencia agregamos el comentario sobre la interpretación geométrica de esta métrica.*

El eje horizontal X se interpreta como el terreno de un bosque compuesto de "árboles": los ejes verticales. (Un bosque bastante espeso).

Si los puntos $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se encuentran sobre la misma recta vertical (sobre el mismo "árbol"), la distancia entre ellos se mide a lo largo del "árbol": $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = |a_2 - b_2|$. Cuando $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se encuentran sobre "árboles"distintos

($a_1 \neq b_1$), para medir su distancia tenemos que bajar del "arbol"al terreno recorriendo la distancia $|a_2|$, luego sobre el terreno cubrimos la distancia entre los dos "árboles"que es igual a $|a_1 - b_1|$ y finalmente llegamos al punto $\mathfrak{b}$ recorriendo a lo largo del "árbol" la distancia $|b_2|$. En este caso entonces $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = |a_1| + |a_1 - b_1| + |b_2|$.

4. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$, explique su nombre "la metrica de puente" y traza la bola centrada en $(1, -1)$ de radio $1 + \sqrt{2}$.

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si } (a_2 \geq 0,\ b_2 \geq 0) \\ & \text{ó } (a_2 < 0,\ b_2 < 0), \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si } (a_2 \geq 0,\ b_2 < 0) \\ & \text{ó } (a_2 < 0,\ b_2 \geq 0). \end{cases}$$

Sugerencia. *El eje horizontal tiene el papel del "río" y el punto $(0, 0)$ es el "puente". Si los puntos $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ se encuentran del mismo lado del "río", entonces medimos su distancia eucidiana. Si estos puntos están en lados opuestos del "río", para llegar del punto $\mathfrak{a}$ al punto $\mathfrak{b}$ tenemos que llegar primero al puente recorriendo la distancia $\|\mathfrak{a}\|$ y luego cubrir la distancia del puente a $\mathfrak{b}$ que es igual a $\|\mathfrak{b}\|$.*

5. Demuestre que la siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$:

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si tal número no existe.} \end{cases}$$

Sugerencia. *Si dos puntos son proporcionales, su distancia coincide con $\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\|$, es decir con su distancia euclidiana. En caso contrario la distancia es igual a $\|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\|$. Para probar la desigualdad de triangulo*

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leq d(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + d(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$$

debemos considerar los casos siguientes:
a) los tres puntos son proporcionales y entonces la desigualdad coincide con la del eje real,
b) los puntos $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son proporcionales y $\mathfrak{c}$ es linealmente independiente. En este caso la desigualdad toma la forma

$$\|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{c}\| + \|b\| + \|\mathfrak{c}\|$$

así que es obvia.
c. Los puntos $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$ son proporcionales y $\mathfrak{a}$ es independiente. La desigualdad que queremos probar dice:

$$\|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{b}\| \leq \|\mathfrak{a}\| + \|\mathfrak{c}\| + \|\mathfrak{b} - \mathfrak{c}\|$$

la cual se verifica fácilmente.

6. Traze las siguientes bolas en el espacio métrico del ejercicio anterior:

$$B((0,0),1), \quad B((1,1),1), \quad B((1,1),2).$$

7. En el espacio $\mathbb{R}^3$ con la norma $\|(x,y,z)\|_1 = |x|+|y|+|z|$ describe la bola unitaria $B(0,1)$.

   Sugerencia. *Entre muchos posibles métodos de describir esta bola, podemos empezar investigando su intersección con el octante* $O = \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.
   La condición $\|(x,y,z)\|_1 < 1$ *se vuelve más sencilla tomando la forma:* $x + y + z < 1$. *Como* $O \cap B(0,1)$ *obtenemos el conjunto de puntos de* O *por debajo del plano de ecuación* $z = 1 - x - y$.
   Recorriéndo otros octantes del espacio obtenemos como $B(0,1)$ *el octágono de vértices* $(1,0,0)$. $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ *y que tiene forma de dos pirámides pegados con sus bases cuadradas.*

8. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$. Sea

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

   Demuestre que d es una métrica en A.

   Sugerencia. *El espacio* (A,d) *es muy peculiar. Aunque, aparentemente* A *consta de dos piezas separadas, el espacio es conexo. Visiblemente la función es no negativa en su dominio, es simétrica y se anula únicamente para* $x = y$.
   En forma explícita $A = [-2,-1] \cup [1{,}2]$. *En cada conjunto por separado la métrica está definida como la métrica natural del eje real. Queda por probar la desigualdad de triangulo* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *en los casos, cuando los argumentos* x, y, z *no pertenecen al mismo intervalo.*
   Observe que la distancia no cambia si cambiamos a la vez los signos de ambos argumentos. Por lo tanto es suficiente considerar dos casos:
   1. $x = 1 + u$, $y = 1 + v$ *con* u, $v \geq 0$, $z \in [-2,-1]$.
   2. $x = 1 + u$, y, $z \in [-2,-1]$. *Escribe las desigualdades deseadas en cada caso y verás que se cumplen trivialmente.*

9. Demuestre que si una bola de radio 7 está contenida en una bola de radio 3, ambas son iguales.

   Sugerencia. *Suponemos que* $B(x,7) \subset B(y,3)$. *Tomamos* $u \in B(y,3)$ *y queremos probar que* u *está en la bola* $B(x,7)$, *es decir que* $d(u,x) < 7$. *Por suposición* $d(x,y) < 3$. *Aplique la desigualdad de triangulo.*

10. Sea (X, d) un espacio métrico. En el mismo conjunto $X \times X$ definimos

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{cuando} \quad d(x,y) \leq 1, \\ \\ 1, & \text{cuando} \quad d(x,y) > 1. \end{cases}$$

Demuestre que $\tilde{d}$ es una métrica en X y que $x_n \to x$ en (X, d) si y sólo si $x_n \to x$ en $(X, \tilde{d})$.

Sugerencia. *Partimos de la desigualdad de triangulo para la métrica original d:*

$$d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y).$$

Primero pensamos en el caso de $d(x,y) \geq 1$, cuando $\tilde{d}(x,y) = 1 \leq d(x,y)$. Si al menos uno e los valores $d(x,u)$, $d(u,y)$ supera a 1, la desigualdad $1 = \tilde{d}(x,y) \leq \tilde{d}(x,u) + \tilde{d}(u,y)$ es obvia, porque del lado derecho también aparece el valor 1. En caso contrario

$$\tilde{d}(x,y) = 1 \leq d(x,y) \leq d(x,u) + d(u,y) = \tilde{d}(x,u) + \tilde{d}(u,y).$$

El caso de $d(x,y) < 1$ es más sencillo todavía..

11. ♦ Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\delta(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$, x, $y \in X$. Demuestre que δ es una métrica en X.

Solución. *Las propiedades $1°$, $2°$, $3°$ de la métrica se cumplen visiblemente. Queda por probar la desigualdad del trángulo $4°$:*

$$\frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \leq \frac{d(x,u)}{1 + d(x,u)} + \frac{d(u,y)}{1 + d(u,y)}$$

Para este fin es suficiente demostrar que, dados los números no-negativos a, b, c tales que $a \leq b + c$, se cumple

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Partimos de la desigualdad $a \leq b + c$ y continuamos:

$$\begin{aligned} a(1+b)(1+c) &= a + ab + ac + abc \\ &\leq b + c + ab + ac + abc + bc + abc + bc \\ &= b(1+a)(1+c) + c(1+b)(1+a). \end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad entre $(1+a)(1+b)(1+c)$ obtenemos la fórmula deseada.

12. ♦ *Sea* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función no negativa que se anula únicamente en cero. Sea* $\delta(x,y) = f(x-y)$*. ¿Cuando* δ *es una métrica?*

Solución. *Ya hemos asegurado que* δ *es una función no-negativa que se anula únicamente cuando* $x = y$*. Para asegurar la propiedad* 3° *de la métrica tenemos que suponer que* f *es simétrica, es decir* $f(-x) = f(x)$*. Supungamos ahora que* δ *es una métrica, es decir* $f(x-y) \leq f(x-u) + f(u-y)$ *para* x*,* y*,* $u \in \mathbb{R}$ *arbitrarios. En particular, poniendo* $u = 0$ *obtenemos* $f(x-y) \leq f(x) + f(-y)$ *para todos* x*,* y*, entonces también* $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$*. Entonces la última desigualdad es entonces la condición necesaria para que* δ *fuera una métrica.*

Supongamos que f *es positiva, simétrica, se anula únicamente en cero y satisface* $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ *para todos* a*,* $b \in \mathbb{R}$*. Tomando* $a = x-u$*,* $b = u-y$ *se sigue*

$$\begin{aligned}\delta(x,y) = f(x-y) = f(a+b) &\leq f(a) + f(b) = f(x-u) + f(u-y)\\ &= \delta(x,u) + \delta(u,y).\end{aligned}$$

La función δ *es una métrica.*

Hemos obtenido el siguiente resultado:
Una función de forma $\delta(x,y) = f(x-y)$ *define una métrica sobre el eje real si y sólo si es no-negativa, simétrica, se anula únicamente en cero, y es subaditiva, es decir satisface* $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ *para todos* x*,* $y \in \mathbb{R}$*.*

■

13. ♦ *Sean* $\delta_1(x,y) = |x-y|^2$ *y* $\delta_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$*. Cual de estas funciones define una métrica en* $\mathbb{R}$*?*

Solución. *En ambos casos podemos usar el resultado que obtuvimos resolviendo el problema anterior. La función* x^2 *no es subaditiva, porque* $(1+1)^2 > 1^2 + 1^2$*, entonces* δ_1 *no es una métrica. La función* $\sqrt{|x|}$ *es creciente y para* x*,* y *del mismo signo se tiene*

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x| + 2\sqrt{|x|}\sqrt{|y|} + |y|} = \sqrt{(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2} = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Si x *y* y *son de signos opuestos, tenemos* $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x| + |y|}$ *entonces la desigualdad sigue siendo válida. Y por lo tanto la función* $\sqrt{|x|}$ *es subaditiva y* δ_2 *es una métrica.*

14. ♦ *Para* $0 < p < \infty$*, sea* l^p *el espacio de sucesiones reales* (a_n) *tales que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$*.*
a. *Demuestre que para* $0 < p < 1$*,* $d_p((a_n),(b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p$ *es una métrica.*

b. *Demuestre que para* $1 \leq p < \infty$ *la función* $\|(a_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ *es una norma.*

Solución. **a.** *Vamos a usar el resultado probado en Ejercicio 12 para probar que para* $0 < p < 1$ *la función* $(x, y) \to |x - y|^p$ *es una métrica en* $\mathbb{R}$*. Para ello debemos verificar la desigualdad* $|x + y|^p \leq |x|^p + |y|^p$*. En el caso de* $p = \frac{1}{2}$ *lo hemos hecho resolviendo el Ejercicio 13. Ahora necesitamos un método más general.*
Para $y \geq 0$ *y* $x > 0$ *fijos consideramos* $f(x) = x^p + y^p - (x+y)^p$*. La función* f *es derivable con derivada continua* $f'(x) = px^{p-1} - p(x+y)^{p-1}$*. Cuando* $p < 1$ *la función* $u \to u^{p-1}$ *es decreciente sobre* $\mathbb{R}^+$*. Así obtenemos que*

$$f'(x) = p(|x|^{p-1} - |x + y|^{p-1}) > 0$$

para x*,* $y > 0$*. La función* f *se anula en cero y es creciente, entonces*

$$0 \leq |x|^p + |y|^p - |x + y|^p,$$

que es la desigualdad buscada. Si x, y *tienen signos opuestos* $|x + y|^p \leq ||x| + |y||^p$*, entonces sigue siendo válida la desigualdad. Así por el resultado probado en el Ejercicio 12 obtenemos la desigualdad*

$$|a - b|^p \leq |a - c|^p + |c - b|^p$$

que podemos aplicr a las coordenadad de los elementos (a_n)*,* (b_n)*,* $(c_n) \in l^p$*. Sumando las series obtenemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - c_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - b_n|^p.$$

b. *El propósito es demostrar que para* $p \geq 1$ *se cumple*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

suponiendo que las sumas del lado derecho son finitas. Esta desigualdad se llama la desigualdad de Minkowski. Para obtenerla tenemos que probar otras desigualdades importantes, a saber la desigualdad de Young y la desigualdad de Hölder.

Para $p = 1$ *la desigualdad es conocida. Suponemos entonces que* $p > 1$*.*

Desigualdad de Young

Como sabemos del curso de Cálculo que la función exponencial e^x *es convexa pues tiene la segunda derivada positiva en todo su dominio. La convexidad significa que para todos* x*,* $y \in \mathbb{R}$ *y* $0 \leq t \leq 1$ *se cumple que*

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y.$$

Al denotar $a = e^x$, $b = e^y$, $t = \frac{1}{p}$, $q = 1-t = \frac{p}{p-1}$ *obtenemos la desigualdad de Young:*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b,$$

para $a,\ b > 0$ *y* $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Desigualdad de Hölder

Supongamos ahora que $\|(a_n)\|_p < \infty$ *y* $\|(b_n)\|_q < \infty$. *Hacemos* $a = \frac{|a_n|^p}{p}$ *y* $b = \frac{|b_n|^q}{\|(b_n)\|_q^q}$ *y aplicamos la desigualdad de Young para obtener*

$$\frac{|a_n b_n|}{\|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_n|^p}{\|(a_n)\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_n|^q}{\|(b_n)\|_q^q}.$$

Sumamos en ambos lados de la desigualdad y llegamos a:

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|}{\|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

que se puede escribir como

$$\|(a_n b_n)\|_1 \leq \|(a_n)\|_p + \|(b_n)\|_q,$$

y que es precisamente la desigualdad de Hölder.

Desigualdad de Minkowski

En el último paso suponemos que $\|(a_n)\|_p < \infty$ *y* $\|(b_n)\|_p < \infty$. *Primero verificamos que* $\|(a_n + b_n)\|_p < \infty$. *Estimamos:*

$$\begin{aligned} |a_n + b_n|^p &\leq (|a_n| + |b_n|)^p \\ &\leq (2 \max\{|a_n|, |b_n|\})^p \leq 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p). \end{aligned}$$

Sumando de ambos lados la desigualdad vemos que al menos

$$\|(a_n + b_n)\|_p \leq 2^p (\|(a_n)\|_p + \|(b_n)\|_p) < \infty.$$

Ahora buscamos una estimación más fina.

$$\begin{aligned}\|(a_n+b_n)\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|a_n+b_n| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|a_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|b_n|^p\end{aligned}$$

Ahora viene la parte más ingeniosa de esta demostración. Nuevamente, sea $q=\frac{p}{p-1}$. *Observemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n+b_n|^{p-1}\right)^q = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p < \infty.$$

Tenemos un par de sucesiones $(|a_n|)\in l^p$, $(|b_n|)\in l^p$ *y* $(|a_n+b_n|^{p-1})\in l^q$ *con* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Podemos aplicar la desigualdad de Hölder en ambos casos. Así obtenemos que*

$$\begin{aligned}\|(a_n+b_n)\|_p^p &\le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|a_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^{p-1}|b_n|^p \\ &\le \|((a_n+b_n)^{p-1})\|_q\|(a_n)\|_p + \|((a_n+b_n)^{p-1})\|_q\|(b_n)\|_p \\ &= \|(a_n+b_n)\|_p^{p-1}(\|(a_n)\|_p+\|(b_n)\|_n).\end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados entre $\|(a_n+b_n)\|_p^{p-1}$ *obtenemos la desigualdad de Minkowski que es la desigualdad del triangulo para la función* $\|\cdot\|_p$. *A diferencia del caso de* $p<1$ *la función* $\|\cdot\|_p$ *es positivamente homogénea, es decir,* $\|t(a_n)\|_p=|t|\|(a_n)\|_p$. *Por lo tanto esta función es una norma.*

■

15. *Sea* $C([a,b])$ *el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo* $[a,b]$. *Para* $f\in C([a,b])$ *sea*

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt.$$

Demuestre que $\|\cdot\|_1$ *es una norma en* $C([a,b])$.

Sugerencia. *Todas las propiedades de esta función son consequencias de la positividad de la integral y de la función valor absoluto. Para una función no negativa y continua* f *se cumple que* $\int_a^b f(t)dt\ge 0$. *Además la integral es lineal con respecto a la variable* f. *Las propiedades* 1, 3, 4 *se deducen de inmediato. Para obtener la propiedad* 2 *tenemos que aprovechar la continuidad de la función. Si* $f\ne 0$ *la función* $|f|$ *toma en algún punto el valor positivo. Si* $|f(x)|=r>0$ *en algún intervalo* $[x-\delta,x+\delta]$ *se cumple que* $|f(t)|\ge r/2$ *y* $\int_a^b|f(t)dt\ge r\delta$. *En efecto,* $\|f\|_1=0$ *implica* $f=0$.

16. *Demuestre que la función definida en el espacio $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ de matrices complejas $n \times n$ por la fórmula $\|A\| = (tr(AA^*))^{\frac{1}{2}}$ es una norma. (Para $A = (a_{ij})$ se define $A^* = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \overline{a_{ji}}$ y $tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.)*

 Sugerencia. *El espacio de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ como espacio vectorial es lo mismo que $\mathbb{C}^{n^2}$. Calcule $(tr(AA^*))^{\frac{1}{2}}$ usando las definiciones correspondientes y verá que $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, la cual es la norma conocida en el espacio euclidiano de dimensión n^2.*

17. *Sea X un espacio métrico arbitrario y sea Y un espacio métrico discreto. Pruebe que $B(X,Y)$ es un espacio discreto.*

 Sugerencia. *El espacio Y es acotado, entonces en este caso el espacio $B(X,Y)$ coincide con el espacio de todas las aplicaciones $F\colon X \to Y$. La norma en $B(X,Y)$ está definida por*

$$D(F,G) = \sup_{x\in X} d_Y(F(x), G(y))$$

 y en nuestro caso d_Y toma únicamente los valores 0 y 1. ¿Le falta algo para terminar?

18. *♦ Sean (X,d) un espacio métrico, $a \in X$ y $\mathfrak{X}$ el espacio de todas las sucesiones $\mathfrak{a} = (a_j)$ con valores en X tales que $\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, a) < \infty$. Demuestre que la función $D\colon \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ dada por la fórmula*

$$D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, b_j),$$

 está bién definida y es una métrica en $\mathfrak{X}$.

 Solución. *Por la desigualdad del triangulo que satisface la métrica d tenemos que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, b_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (d(a_j, a) + d(a, b_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, a) + \sum_{j=1}^{\infty} d(a, b_j) < \infty,$$

 entonces la función D está bién definida. La función es no negativa y se anula solo si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. La desigualdad del triangulo para D también se deduce de inmediato:

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) &= \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, b_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (d(a_j, c_j) + d(c_j, b_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} d(a_j, c_j) + \sum_{j=1}^{\infty} d(c_j, b_j) = D(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) + D(\mathfrak{c}, \mathfrak{b}). \end{aligned}$$

■

19. Pruebe que en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ para cada $x \in E$ se tiene

$$\|x\| = \text{ínf}\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}.$$

Sugerencia. *Sea* $A = \{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}$. *Verifique que para* $t > \|x\|$, *tenemos que* $\|\frac{1}{t}x\| < 1$, *y por lo tanto* $t \in A$. *Esto último implica que* $\|x\| \leq \text{ínf}\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(0,1)\}$. *Luego considere que* $t_n \searrow \|x\|$ *para obtener la igualdad.*

20. ♦ Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el espacio de todas las sucesiones reales con su estructura natural de espacio vectorial. Demuestre que en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no existe ninguna norma tal que $(a_{jn}) = \mathfrak{a}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{a} = (a_j)$ implique que $a_{jn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Solución. Supongamos lo contrario: que para cierta función $\|\cdot\|$ el espacio $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \|\cdot\|)$ es normado y que la convergencia en esta norma implica la convergencia puntual. Esta última suposición significa que las formas lineales φ_j con $j \in \mathbb{N}$ definidas por $\varphi_j((a_k)) = a_j$ son continuas. Obviamente estas formas son lineales, entonces para cada j existe $C_j > 0$ tal que $|a_j| = |\varphi_j(\mathfrak{a})| \leq C_j\|\mathfrak{a}\|$ (vea Ejemplo 6.26).
Sea $\mathfrak{c} = (jC_j)$. Para cada j se cumple que $jC_j \leq C_j\|\mathfrak{c}\|$ y como $C_j > 0$, se obtiene una contardicción $j < \|(c)\|$ con $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto no existe ninguna norma con las propiedades indicadas.

21. Demuestre que el espacio $\mathfrak{D}$ de todas las métricas definidas en el conjunto X es un *cono convexo*, es decir para todo d, $d' \in \mathfrak{D}$ y $s \geq 0$, $t > 0$ se cumple que $sd + td' \in \mathfrak{D}$.

Sugerencia. *Hemos supuesto que el coeficiente* s *de la combinación lineal no es nulo, lo que asegura que la función* $D = sd + td'$, *obviamente no negativa se anula únicamente para* $x = y$. *Para obtener la desigualdad del triangulo para* D *la escribimos para* d *y* d', *en seguida multiplicamos ambos lados por coeficientes adecuados y los sumamos.*

22. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y (x_n), (y_n) sucesiones convergentes en E. Demuestre que para a, $b \in \mathbb{K}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}(ax_n + by_n) = a \lim_{n\to\infty} x_n + b \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Sugerencia. *Denotamos por* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *y* $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. *Luego calculamos*

$$\|ax + by - (ax_n + by_n)\| \leq |a|\|x - x_n\| + b\|y - y_n\|$$

y usamos las suposiciones.

23. Sean A, B conjuntos convexos en un espacio vectorial E. Demuestre que el conjunto $A+B := \{x+y : x \in X,\ y \in Y\}$ es convexo.

    Sugerencia. *Tome a, $x \in A$ y b, $y \in B$. Considere la combinación convexa de $a+b$, $x+y \in A+B$: $t(a+b)+(1-t)(x+y)$ y aproveche la convexidad de los conjuntos A, B.*

Espacios completos

1. Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X,d). Demuestre que $(d(x_n,y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia. *La estimación del valor $|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|$ se obtiene inmediatamente utilizando la Proposición 2.3.*

2. ♦ Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones en un espacio métrico (X,d) y

$$u_n = \begin{cases} x_k, & \text{si } n = 2k-1, \\ y_k, & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

   Demuestre que la sucesión (u_n) es de Cauchy si y sólo si ambas sucesiones son de Cauchy y

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0.$$

   Demostración. Primero supongamos que la sucesión u_n es de Cauchy entonces

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,N\in\mathbb{N} \quad \forall\,n,m>N \quad d(u_n,u_m)<\varepsilon.$$

   Para los valores $k \in \mathbb{N}$ tales que $n=2k-1>N$ y $m=2k$ obtenemos exactamente la afirmación: la sucesión $d(x_k,y_k)$ converge a cero.
   Si consideramos únicamente los índices n, m pares (impares), la misma afirmación nos dice que (x_k) (respectivamente (y_k)) es una sucesión de Cauchy.

   Para la segunda parte partimos de la información de que:

$$\varepsilon>0 \quad \exists\,n\in\mathbb{N} \quad \forall\,n>N \quad d(x_n,y_n)<\varepsilon.$$

   Además sabemos que las sucesiónes (x_n) y (y_n) son de Cauchy. En el caso de la sucesión (x_n) esto quiere decir que

$$\varepsilon>0 \quad \exists\,K\in\mathbb{N} \quad \forall\;n,\;m>K \quad d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

   Sean $m \geq n > 2\max\{K,N\}$. Si ambos números son impares $n=2k-1$, $m=2l-1$ obtenemos que $u_n=x_k$, $u_m=x_l$, donde k, $l>K$ y por lo tanto $d(u_n,u_m)<\varepsilon$.

En el caso de los valores $n = 2k$, $m = 2l$ se cumple

$$d(u_n, u_m) = d(y_k, y_l) \leq d(y_k, x_k) + d(x_k, x_l) + d(x_l, y_l) < 3\varepsilon.$$

Estamos buscando una estimación para $d(u_n, u_m)$ para n, m suficientemente grandes. El caso de los n, m de paridad opuesta se procede analógamente. Por lo tanto la sucesión (u_n) es de Cauchy.

Observemos que en realidad sólo hemos utilizado la suposición de que una de las sucesiones es de Cauchy. ■

3. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X, d). Supongamos que la sucesión (y_n) en X satisface que $d(x_n, y_n) < |a_n|$, donde (a_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$ convergente a cero. Demuestre que (y_n) es una sucesión de Cauchy.

   Sugerencia. *Utilize el hecho de que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para n, m suficientemente grandes y la desigualdad del rectángulo en la forma*

   $$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_n, y_m).$$

4. ⧫ En el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ introducimos la métrica

   $$d((a_n), (b_n)) = \begin{cases} 0, & (a_n) = (b_n), \\ \frac{1}{m}, & m = \text{mín}\{n : \, a_n \neq b_n\}. \end{cases}$$

   Demuestre que d es una métrica y que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio completo.

   Solución. La desigualdad de triangulo es la única propiedad de la métrica que en este caso no es obvia a primera vista. Sean (a_n), (b_n), $(c_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Supongamos que k el primer índice para el cual $c_k \neq b_k$; l el primer índice para el cual $c_l \neq a_l$; m el primer índice para el cual $a_m \neq b_m$. Si $j < k$ y $j < l$ se cumple que $a_j = c_j = b_j$. Por lo tanto $m \geq k$ o $m \geq l$ y obtenemos que

   $$\frac{1}{m} \leq \text{máx}\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right\} < \frac{1}{k} + \frac{1}{l}.$$

   En el espacio métrico $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ dos elementos de cualquier bola de radio $r > 0$ coinciden para todos los índices menores que $\frac{1}{r}$. Si $(\mathfrak{a}_n)$ es una sucesión de Cauchy en este espacio, el límite $\mathfrak{a}$ de la sucesión (a_k) lo encontramos de la manera siguiente. Para definir el elemento a_k buscamos N tal que para m, $l > N$ se cumple que $d(\mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_l) < \frac{1}{k}$. Ponemos $a_k :=$\{el elemento de índice k en la sucesión $\mathfrak{a}_m$ para cualquier valor $m > N$\}. Y así por la definiciín de la métrica $\mathfrak{a} = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{a}_n$. Por lo tanto el espacio es completo.

5. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ que se anulan fuera de cierto intervalo. Demuestre que $C_0(\mathbb{R})$ no es un espacio completo con respecto a las normas

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \text{y} \quad \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$

Sugerencia. *Nosotros podemos construir la aproximación de la función* $g(x) = e^{-x^2}$ *(que no es elemento de* $C_0(\mathbb{R})$*) por medio de elementos de* $C_0(\mathbb{R})$ *y esta nos funciona para ambas normas. Sea*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \le n, \\ 0, & \text{si } |x| > n+1, \\ 1 - |x-n|, & \text{si } n \le |x| < n+1. \end{cases}$$

La función $f_n g$ *es no negativa, continua, coincide con* g *en el intervalo* $[-n, n]$*, es nula fuera del intervalo* $[-n-1, n+1]$ *y en todas partes no supera a la función* g*. Demuestre que*

$$\|g - gf_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(g - gf_n)(x)| \to 0$$

y que

$$\|g - gf_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(g - gf_n)(x)|dx \to 0.$$

6. ⧫ Con el fin de probar que el espacio de las funciones polinomiales sobre el intervalo $[-1, 1]$ no es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ considere los polinomios

$$w_n(t) = \frac{1}{p_n} \int_0^t (1 - x^2)^n dx,$$

donde $p_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$ y pruebe que $w_n(t) \to \operatorname{sgn}(t)$ uniformemente sobre cada conjunto de la forma $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$. Pruebe que los polinomios $v_n(t) = \int_0^t w_n(x)dx$ aproximan uniformemente sobre $[-1, 1]$ a la función $t \to |t|$.

Solución. Vamos a probar primero que en el intervalo $[\varepsilon, 1]$ las funciones $1 - w_n$ convergen uniformemente a la función constante 1. Calculamos:

$$1 - w_n(t) = 1 - \frac{\int_0^t (1 - x^2)^n dx}{\int_0^1 (1 - x^2)^n dx} = \frac{\int_t^1 (1 - x^2)^n dx}{\int_0^1 (1 - x^2)^n dx}.$$

La función $1 - x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ es monótona decreciente y no negativa, entonces $\int_t^1 (1 - x^2)^n \le (1 - t)(1 - t^2)^n$ y $\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \ge s(1 - s^2)^n$ para cualquier $0 < s < 1$.

Para $\varepsilon > 0$ dado fijamos $s < \varepsilon$ y para todo $t \in [\varepsilon, 1]$ obtenemos

$$1 - w_n(t) \leq \frac{(1-t)(1-t^2)^n}{s(1-s^2)^n} \leq \frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^n}{s(1-s^2)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

puesto que $\dfrac{(1-\varepsilon^2)}{(1-s^2)} < 1$. La convergencia uniforme $w_n \to 1$ en el intervalo $[\varepsilon]$ está probada. Además hemos obtenido la información de que $1 - w_n > 0$ en dicho intervalo. Tomando en cuenta que $w_n(-x) = -w_n$ en el intervalo $[0, 1]$ tenemos también la convergencia uniforme $w_n \to -1$ en el intervalo $[-1, -\varepsilon]$. Finalmente $w_n \to \operatorname{sgn}$ uniformemente en cada conjunto $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$. Ahora observemos que

$$|t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \lim_{n\to\infty} w_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 w_n(x).$$

Vertifique que esta convergencia es también uniforme. Una función que no es polinomial es límite uniforme de funciones polinomiales.

7. Demuestre que los espacios métricos (l^p, d_p) con $0 < p < 1$ y los espacios normados $(l^p, \|\cdot\|_p)$ para $1 \leq p < \infty$ definidos en el Ejercicio 14 del Capítulo 1 son completos.

   Sugerencia. *Sigue la idea de la demostración de la completez del espacio l^1 demostrada en Ejemplo 2.6.*

Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados

1. Pruebe que en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto es una unión numerable de bolas.

   Sugerencia. *En el caso de $n > 1$ y de un conjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ abierto no disponemos del orden en el espacio $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto el resultado es más débil. Considere las bolas $B(\mathfrak{q}, p)$ tales que $\mathfrak{q} \in \mathbb{Q}^n \cap O$ y $p > 0$ son racionales. Pruebe que la familia de estas bolas cubre a O y que es numerable.*

2. *En cada espacio métrico los conjunto finitos son cerrados.*

   Sugerencia. *¿Es necesaria alguna sugerencia?. Por si acaso. Sabemos que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Es suficiente entonces demostrar que un conjunto de un solo punto $\{x\}$ es cerrado, es decir $X \setminus \{x\}$ es abierto. Si $y \neq x$ ¿cual debe ser $r > 0$ que satisfaga que $x \notin B(y, r)$?*

3. *Encuentre un espacio métrico (X,d) distinto del espacio discreto y una bola $B(x,r) \subset X$ tal que $\overline{B(x,r)} \neq \overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.*

   Sugerencia. *Escoge en el espacio $X = [0,1] \cup [2,3]$ una bola adecuada de radio 1.*

4. ♦ *Sean d y δ dos métricas en el mismo espacio X. Demuestre que las métricas d, δ son equivalentes ($d \sim \delta$) si y sólo si para cada sucesión (x_n) en X se cumple que ($x_n \to x$ en (X,d)) $\Longleftrightarrow$ ($x_n \to x$ en (X,δ)).*

   Solución. *Supongamos primero que $d \sim \delta$, es decir que un conjunto $O \subset X$ es abierto en el espacio (X,d) si y sólo si es abierto en (X,δ). Sea $x_n \to x$ en (X,d). Por la definición de convergencia sabemos que*

   $$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \;\; d(x_n, x) < \varepsilon.$$

   En otras palabras, para cualquier $\varepsilon > 0$, sólo un número finito de elementos de la sucesión queda fuera de la bola $B_d(x,\varepsilon)$. Supongamos que la misma sucesión no converge a x en (X,δ). Es decir

   $$\exists\, r > 0 \quad \forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, m > N \quad \delta(x_m, x) \geq r.$$

   La última afirmación significa que en particular para este radio r un número infinito de elementos de la sucesión está fuera de la bola $B_\delta(x,r)$. Sin embargo la última bola es un conjunto abierto en (X,δ) y por la suposición es también un conjunto abierto en (X,d). En particular, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x,\varepsilon) \subset B_\delta(x,r)$. De aquí se tiene que un número infinito de elementos de la sucesión se encuentran fuera de la bola $B_d(x,\varepsilon)$, lo cual es contrario a la suposición. Por lo tanto, si

   $$x_n \to x \text{ en } (X,d) \quad \text{entonces} \quad x_n \to x \text{ en } (X,\delta).$$

   Cambiando los papeles de d y δ, podemos concluir que si

   $$d \sim \delta \quad \Longrightarrow \quad (x_n \to x \text{ en } (X,d)) \Longleftrightarrow (x_n \to x \text{ en } (X,\delta)).$$

   Ahora pasamos a la demostración de la implicación contraria, queremos probar que:

   $$(x_n \to x \text{ en } (X,d)) \Longleftrightarrow (x_n \to x \text{ en } (X,\delta)) \quad \Longrightarrow \quad d \sim \delta.$$

   Para ello supongamos que la convergencia $x_n \to x$ en (X,d) no implica que $x_n \to x$ en (X,δ). Vamos a concluir que existe un conjunto abierto en (X,δ) que no es abierto en (X,d). Nuevamente tenemos una sucesión (x_n) y x tales que para todo $\varepsilon > 0$ solo un número finito de $x_n's$ está fuera de $B_d(x,\varepsilon)$ y por otro lado existe $r > 0$ tal que un número infinito de los $x_n's$ está fuera de $B_\delta(x,r)$. ¡La bola $B_\delta(x,r)$ no es abierta en (X,d)! En efecto, si fuera abierta en este espacio, existiria $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x,\varepsilon) \subset B_\delta(x,r)$ entonces solo un número finito de elementos de la sucesión estaría fuera de $B_\delta(x,r)$. Esta contradicción termina toda nuestra demostración.

5. *Sean d y $\tilde{d}$ dos métricas en el mismo espacio X. Supongamos que existen a, $b \in \mathbb{R}$ tales que para todo x, $y \in X$ se tiene que*

$$a\, d(x, y) \leq \tilde{d}(x, y) \leq b\, d(x, y).$$

Demuestre que las métricas d, $\tilde{d}$ son equivalentes y mediante un ejemplo demuestre que esta condición no es necesaria para la equivalencia de las métricas.

Sugerencia. *Según la definición de la equivalencia de métricas debemos probar que los espacios (X, d) y $(X, \tilde{d})$ tienen las mismas familias de conjuntos abiertos. Observemos que para este fin es suficiente probar que cada bola $B_d(x, r)$ contiene a una bola $B_{\tilde{d}}(x, \rho)$ y que cada bola $B_{\tilde{d}}(x, \rho)$ contiene a una bola $B_d(x, r_1)$ para r_1 adecuado. Las desigualdades que aparecen como suposición lo aseguran.*
Para encontrar dos espacios de métricas equivalentes que no cumplen dichas desigualdades piense en $\mathbb{Z}$ con la métrica discreta y con la métrica natural.

6. ♦ *Sean (X, d) un espacio métrico y $\delta(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, x, $y \in X$. Demuestre que δ es una métrica equivalente a la métrica d.*

Solución. *Recordemos que las métricas definidas en el mismo espacio X son equivalentes si conducen a las mismas familias de conjuntos abiertos. Tenemos que probar que un conjunto $O \subset X$ es abierto en el espacio (X, d) si y sólo si es abierto en el espacio (X, δ).*
Directamente por la definición de la métrica δ vemos que $\delta(x, y) \leq d(x, y)$, entonces $d(x, y) < r$ implica que $\delta(x, y) < r$ y de tal manera para cualquier radio r y $x \in X$ se cumple que $B_d(x, r) \subset B_\delta(x, r)$. Si un conjunto O es abierto en el espacio (X, δ), para cada $x \in O$ existe $\rho > 0$ tal que $B_d(x, \rho) \subset O$. Por la observación anterior obtenemos $B_d(x, \rho) \subset B_\delta(x, \rho) \subset O$, entonces O es abierto en (X, d).
La función $f\colon\ t \to \frac{t}{1+t}$ es estrictamente creciente en el semieje $[0, \infty)$ (verificalo calculando su derivada) y su ímite en el infinito es 1, entonces la función inversa existe en el dominio $[0, 1)$ y es también creciente. Explícitamente $f^{-1}(s) = \frac{s}{1-s}$. De tal manera

$$d(x, y) = f^{-1}(\delta(x, y)) = \frac{\delta(x, y)}{1 - \delta(x, y)}$$

y para $\delta(x, y) < r < 1$ se cumple que

$$d(x, y) < f^{-1}(r) = \frac{r}{1 - r}.$$

Supongamos que O es abierto en el espacio (X, d) y que para $x \in O$ se cumple $B_d(x, r) \subset O$. Sea $\delta(x, y) < \frac{r}{1+r} = f(r)$. Entonces se sigue que $d(x, y) < f^{-1}(f(r)) = r$, de donde $B_\delta(x, \frac{r}{1+r}) \subset B_d(x, r) \subset O$. Y por lo *tanto, el conjunto O es abierto en el espacio (X, δ).*

7. ♦ *En el espacio $\mathbb{R}$ definimos la métrica:*

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x, y \in \mathbb{Q} \text{ ó } x, y \in \mathbb{Q}^c, \\ \\ |x|+|y|, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

a. *Demuestre que d es una métrica.*
b. *Verifique si el espacio $(\mathbb{R}, d)$ es completo.*
c. *Describe las bolas en este espacio.*
d. *Encuentre Int$\mathbb{Q}$, Int$\mathbb{Q}^c$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}^c}$.*

Solución.
a. *Restringida al conjunto $\mathbb{Q}$ o al conjunto $\mathbb{Q}^c$ la métrica coincide con la métrica de $\mathbb{R}$ entonces tiene las propiedades deseadas. Así sólo debemos probar la desigualdad de triangulo en el caso de que x, y y z sean tomados de subconjuntos distintos. Si x, $y \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{Q}^c$ entonces tenemos que:*

$$d(x,y) = |x-y|; \quad d(x,z) = |x|+|z|; \quad d(y,z) = |y|+|z|.$$

Es claro que $|x-y| \leq |x|+|z|+|y|+|z|$.
Ahora consideramos el caso cuando $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}^c$, $z \in \mathbb{Q}$. Entonces tenemos la desigualdad

$$d(x,y) = |x|+|y| \leq |x-z|+|y|+|z| = d(x,z)+d(z,y),$$

observemos que se satisface la desigualdad. Por último si suponemos que $z \in \mathbb{Q}^c$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad no cambia, mientras que el lado derecho aumenta su valor. Los demás casos corresponden a las mismas estimaciones.

b. *Sea (a_n) una sucesión en $\mathbb{Q} \cap [1,2]$ que converge a $\sqrt{2}$ en el espacio $\mathbb{R}$ con su metrica natural. Entonces la sucesión (a_n) es también una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d)$. Para cualquier $x \in \mathbb{Q}^c$ tenemos que $d(x, x_n) = |x|+|x_n| > 1$. La sucesión (x_n) no converge a ningún elemento de $\mathbb{R}$. Por lo tanto el espacio $(\mathbb{R}, d)$ no es completo.*

c. *Sean $x \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$. En la bola $B_d(x,r)$ se encuentran todos los elementos racionales del segmento $(x-r, x+r)$ y además todos los puntos irracionales p tales que $|x|+|p| < r$. Si $r \leq |x|$ la bola $B_d(x,r)$ no contiene ningún elemento irracional. Observemos que la bola $B_d(0,r)$ es un caso especial pues es igual a todo el segmento $(-r, r)$. Cuando $x \in \mathbb{Q}^c$ la situación es análoga.*

d. *Observemos que el punto $x = 0$ no pertenece al interior de $\mathbb{Q}$, debido a que cada de sus vecindades contiene algunos elementos irracionales. Así tenemos que Int$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ y Int$\mathbb{Q}^c = \mathbb{Q}^c$. Además $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ y $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{Q}^c$.*

Nótemos que podemos visualizar el espacio $(\mathbb{R}, d)$ *como el subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *de elementos racionales del eje horizontal* X *y elementos irracionales del eje* Y.

8. ♦ *En el espacio* l^1 *de las sucesiones sumables tenemos la norma natural de este espacio:* $\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *y la estructura métrica dada por la fórmula* $d_1((a_n),(b_n)) = \|(a_n)-(b_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$.
   Demuestre que la métrica $d_\infty((a_n),(b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$ *no es eqivalente a la métrica* d_1.

   Solución. *Nuestra tarea es encontrar un conjunto abierto en alguno de los espacios* (l^1, d_1), (l^1, d_∞) *que no es abierto en el otro. Es claro que*

$$\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)\|_1,$$

   lo cual nos dice que la inmersión natural del espacio $(l^1, d_1) \to (l^1, d_\infty)$ *es continua, por lo tanto cada conjunto abierto en* (l^1, d_∞) *es abierto en* (l^1, d_1).
   Vamos a probar que la bola unitaria en el espacio (l^1, d_1) *no es un conjunto abierto en* (l^1, d_∞). *Sea*

$$B_1 = \{(a_n) \in l^1 : \|(a_n)\|_1 < 1\}.$$

   Como sabemos B_1 *es un conjunto abierto en* (l^1, d_1) *(Proposición 3.10). El elemento nulo pertenece a* B_1. *Ahora para* $r > 0$ *arbitrario, consideremos*

$$B_\infty(r) = \{(b_n) \in l^1 : \|(b_n)\|_\infty < r\},$$

   es decir la bola centrada en cero y de radio r *con respecto a la métrica* d_∞. *Sea* N *un número natural mayor que* $\frac{1}{r}$. *La bola* $B_\infty(r)$ *contiene el elemento*

$$\mathfrak{a} = \Big(\underbrace{\frac{r}{N}, \dots, \frac{r}{N}}_{N}, 0, 0, \dots\Big),$$

   que no pertenece a B_1. *Así hemos probado que en el espacio* (l^1, d_∞) *ninguna bola centrada en* $0 \in B_1$ *está contenida en* B_1. *Por lo tanto el conjunto* B_1 *no es abierto en* (l^1, d_∞), *aunque sí lo es en* (l^1, d_1).
   Para construir nuestro ejemplo hemos aprovechado el hecho de que l^1 *es un espacio vectorial de dimensión infinita. Recordemos que en los espacios vectoriales de dimensión finita todas las normas y las métricas correspondientes son equivalentes.*

9. *Sea* (x_n) *una sucesión en un espacio métrico* (X, d) *convergente a* x. *Sea* $Y = \{x\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Describe los conjuntos cerrados en* (Y, d) *y los conjuntos abiertos en* (Y, d).

Sugerencia. *En el espacio Y existe un solo punto que es punto de acumulación de Y, a saber el punto x. Demuestre que C es cerrado en $Y \iff C$ es finito ó $x \in C$. Por lo tanto O es abierto en $Y \iff O$ no contiene a x ó su complememto es finito.*

10. *Demuestre que para cada familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico se cumple*

$$\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} \overline{A_\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}$$

Sugerencia. *Utilice el Ejemplo 3.36 y los incisos 2 y 3 del Teorema 3.33.*

11. ♦ *En el plano $\mathbb{R}^2$ definamos*

$$A = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) : \ x > 0 \right\}.$$

Describe la cerradura de A.

Solución. *El conjunto A se encuentra en el semiplano S definido por la ecuación $x > 0$ entonces la cerradura de A está en la cerradura de S que es el semiplano $\overline{S} = \{(x, y) : \ x \geq 0\}$.*
Los puntos de A tienen como segundas coordenadas los valores de la función seno *entonces los puntos de la cerradura tienen tambén sus valores en el intervalo $[-1, 1]$. Vamos a probar que*

$$\overline{A} = A \cup \{(0, y) : \ y \in [-1, 1]\}.$$

Para cada $y \in [-1, 1]$ los elementos de la forma $x_k = \dfrac{1}{\operatorname{arcsen}(y) + 2\pi k}$, $k \in \mathbb{N}$, son soluciones de la ecuación $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. De tal manera que los puntos (x_k, y) pertenecen a A y convergen al límite $(0, y)$, lo cual prueba que $(0, y) \in \overline{A}$ para todo $y \in [-1, 1]$.

12. ♦ *Demuestre que el espacio l^1 no es cerrado en el espacio $\mathbf{c_0}$, el último provisto de la norma $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.*

SOLUCIÓN. *Recordemos que $\mathbf{c_0}$ es el espacio de todas las sucesiones convergentes a cero. Partiendo de la definición de conjunto cerrado, debemos probar que $A = \mathbf{c_0} \setminus l^1$ no es abierto. Para algún $\mathfrak{a} \in A$ y para $r > 0$ arbitrario debemos encontrar en la bola $B(\mathfrak{a}, r)$ un elemento $\mathfrak{b}$ l^1.*
El problema se resuelve con la observación de que cualquier elemento en $\mathfrak{a} = (a_j) \in \mathbf{c_0}$ es límite de elementos de l^1. Sea $\mathbf{a}_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. Obtenemos $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}_n\|_\infty = \sup_{k>n} |a_k| \to 0$, porque $a_n \to 0$.

13. ♦ *Sea* $0 < p < \infty$, *los espacios* l^p *están definidos en el Ejercicio 14 del Capítulo 1. Sean*

$$A_p = \{(a_n) \in l^p : \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1,\ a_n \geq 0\}.$$

Investigue si los conjuntos A_p *son cerrados en los espacio* l^p *correspondiente.*

Solución. *Vamos a probar que en el caso en que* $p \leq 1$ *el conjunto es cerrado y en los demás casos no lo es. Cuando* $p \leq 1$ *tomemos* $(a_n) \in l^p$ *tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ *y* $(b_n) \in l^p$ *tal que*

$$d_p((a_n),(b_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p < 1.$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned} |1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n| &= |\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n| = |\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p = d_p((a_n),(b_n)). \end{aligned}$$

Si tenemos $\mathfrak{a}_k \in A_p$ *y* $\mathfrak{a}_k \to \mathfrak{b} = (b_n)$ *obtenemos que*

$$|1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n| \leq d_p(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}) \to 0,$$

por lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ *y* $\mathfrak{b} \in A_p$. *Y por lo tanto el conjunto* A_p *es cerrado.*

Pasamos al caso cuando $p > 1$ *y probaremos que* A_p *no es cerrado. Como sabemos la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *es convergente, mientras que* $S(k) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$ *tiende a infinito cuando* $k \to \infty$. *Sea*

$$\mathfrak{a}_k = \frac{1}{S(k)}(1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \ldots, \frac{1}{k^p}, 0, 0, \ldots).$$

La sucesión $\mathfrak{a}_k$ *pertenece a* A_p *y converge la sucesión a cero que no es elemento de* A_p. *Por lo tanto cuando* $p > 1$ *el conjunto* A_p *no es cerrado.*

14. *Sea* A *un conjunto en un espacio métrico* (X, d). *Demuestre que*

$$x \in \overline{A} \iff \inf_{y \in A} d(x,y) = 0.$$

Sugerencia. *Si $x \in \overline{A}$, existen $x_n \in A$ tales que $x_n \to x$.¿Que dice esto sobre el valor $\inf_{y \in A} d(x,y)$?*
Si $y \in A$ y $\inf\limits_{y \in A} d(x,y) = 0$ entonces los valores $d(y,x)$ se acercan a cero. Para cualquier n existe $y_n \in A$ que satisface que $d(x,y_n) < \frac{1}{n}$. ¿Que podemos decir sobre la convergencia de la sucesión (y_n)?

15. *Demuestre que en un espacio normado la cerradura de un subespacio vectorial es un subespacio vectorial.*

    Sugerencia. *Como se ha mostrado en el Ejercicio 22 del Capítulo 1 en los espacios normados se cumple que*

    $$\lim_{n\to\infty} (ax_n + by_n) = a \lim_{n\to\infty} x_n + b \lim_{n\to\infty} y_n.$$

    De esto se deduce de inmediato, que si x, y pertenecen a la cerradura de un subespacio vectorial F, su combinación lineal pertenece a dicha cerradura.

16. *Sea C un conjunto en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ tal que $B(0,r) \subset C \subset \overline{B(0,r)}$. Demuestre que C es convexo. ¿Es cierta esta afirmación si en lugar de la norma euclidiana consideramos otra norma en $\mathbb{R}^n$? Encuentre un ejemplo positivo y un contraejemplo.*

    Sugerencia. *Fijese que en la bola euclidiana ningún punto de la esfera se puede representar como combinación convexa no trivial de otros puntos de la esfera. Piense en otras normas que conducen a esta propiedad y de otras que no lo cumplen.*

17. *Sean A, B dos subconjuntos de un espacio normado. Denotamos:*

    $$A + B = \{x + y : x \in A, \ y \in B\}.$$

    Supongamos que A es abierto. Demuestre que $A + B$ es abierto.

    Sugerencia. *Sea $y \in B$ y sea $y + A := \{y + a : a \in A\}$. Demuestre que $y + A$ es abierto y luego aprovecha la representación $A + B = \bigcup\limits_{y \in B} (y + A)$.*

18. *Sea A un subconjunto en un espacio métrico X. Demuestre que el interior de A es el conjunto abierto más grande contenido en A.*

    Sugerencia. *Si se cumple que $B(x.r) \subset A$, entonces todos los elementos de la bola abierta $B(x,r)$ son elementos del interior. La misma definición $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \exists\, r > 0, \ B(x,r) \subset A\}$ presenta el interior de A como unión de bolas abiertas, entonces $\mathrm{Int}(A)$ es conjunto abierto contenido en A. Y por la misma definición cada abierto contenido en A pertenece al interior de A, entonces $\mathrm{Int}(A)$ es efectivamente el mayor de los abiertos contenidos en A.*

19. *Demuestre las siguientes propiedades del interior de conjunto:*
1. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.
2. $\mathrm{Int}(A^c) = (\overline{A})^c$.
3. $(\mathrm{Int}(A))^c = \overline{A^c}$.
4. ¿Es cierto que $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$ *para* A, B *arbitrarios?*

Sugerencias: Se puede justificar la igualdad 1. verificando que un punto dado $x \in X$ *pertenece a uno de los conjuntos si y sólo si pertenece al otro.*
2. El conjunto del lado derecho es un subconjunto abierto del complemento de A*, entonces pertenece a* $\mathrm{Int}(A^c)$*. Por otro lado un elemento* $x \in \mathrm{Int}(A^c)$ *está aislado de* A*, entonces pertenece a* $(\overline{A})^c$*.*
3. Se demuestra de forma semejante al inciso 2.
4. Piense en subconjuntos A, $B \subset \mathbb{R}$ *que tienen interiores vacíos, pero* $A \cup B = \mathbb{R}$*.*

20. *Para un subconjunto* $A \subset X$ *de un espacio métrico* (X, d) *se define la frontera de* A *como* $\mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$*. Demuestre las relaciones:*

a. $\mathring{A} = \mathring{A^c}$, **b**. $X = \mathring{A} \cup \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(A^c)$,
c. $\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{A}$, **d**. $\mathring{\mathrm{Int}(A)} \subset \mathring{A}$,
e. $(A \mathring{\cup} B) \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$, **f**. $(A \mathring{\cap} B) \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

En los casos **c**., **d**., **e**., **f**. *demuestre que las igualdades no son válidas.*

Sugerencias. **b**. *Si* $x \notin \mathrm{Int}(A)$*, quiere decir que pertenece a* $\overline{A^c}$*. Si además* $x \notin \mathrm{Int}(A^c)$*, quiere decir que* $x \in \overline{A}$*. Finalmente* $x \in \mathring{A}$*. Cada elemento de* X *pertenece a uno de los tres componentes de la unión.*
La prueba para los demas incisos se puede realizar de forma semejante.

21. *Sea* V *un abierto en un espacio métrico* (X, d)*. Demuestre que para todo* $A \subset X$ *se tiene que* $V \cap \overline{A} \subset \overline{A \cap V}$*. ¿Sigue siendo válida la relación si no se supone que* V *es abierto?*

Sugerencia. *Si* $x \in V \cap \overline{A}$*, existe* $x_n \in A$ *tales que* $x_n \to x$*. El conjunto* V *es abierto y salvo un número finito de elementos esta sucesión pertenece a* V*. Estos elementos satisfacen* $x_n \in V \cap A$ *lo que significa que* $x \in \overline{V \cap A}$*. Para el caso cuando* V *no es abierto busque un contraejemplo en el eje real tomando a* V *como un intervalo cerrado y* A *como un intervalo abierto adecuado.*

22. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y sea* $C \subset E$ *un conjunto convexo. Demuestre que la cerradura* $\overline{C}$ *es también un conjunto convexo.*

Sugerencia. *Para puntos x, $y \in \overline{C}$ y $0 \leq t \leq 1$ hay que demostrar que $tx+(1-t)y \in \overline{C}$. Sabemos que x se puede representar como $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ con $x_n \in C$ y $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.*
Por la convexidad de C tenemos que $tx_n + (1-t)y_n \in C$, donde $n \in \mathbb{N}$. Es suficiente demostrar que $tx_n + (1-t)y_n - tx + (1-t)y \to 0$ estimando la norma de elementos del lado izquierdo.

23. Sea $\mathbf{c}$ el espacio de todas sucesiones reales convergentes con la norma usual y sea $\mathbf{c}_0$ el espacio de sucesiones convergentes a cero. Demuestre que ambos espacios son cerrados en l^∞.

Sugerencia. *Estamos en el espacio $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Cada sucesión convergente es acotada, entonces $\mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset l^\infty$.*
Para probar que el conjunto $\mathbf{c}$ es cerrado en l^∞ podemos usar la definición de conjunto cerrado como complemento de un abierto, ó podemos aprovechar el método de sucesiones - Teorema 3.27.
Consideramos más divertida la primera opción. Probaremos que el conjunto $l^\infty \setminus \mathbf{c}$ es un conjunto abierto.
Una sucesión acotada (x_n) en $\mathbb{R}$ es convergente si y sólo si

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Para una sucesión $(x_n) \in l^\infty \setminus \mathbf{c}$ se cumple que

$$\delta = \limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} x_n > 0.$$

Probaremos que $B((x_n), \delta/3) \subset l^\infty \setminus \mathbf{c}$. Sea $(y_n) \in B((x_n), \delta/3)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$x_n - \delta/3 \leq y_n \leq x_n + \delta/3.$$

De aquí se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} y_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n - \delta/3, \quad y \quad \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n + \delta/3,$$

de donde obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} y_n - \liminf_{n\to\infty} y_n \geq \delta/3.$$

Cada elemento de $B((x_n), \delta/3)$ es divergente. Dejamos al lector la segunda parte de este ejercicio recomendando que lo haga aplicando Teorema 3.27 para variar.

24. ♦ *(Teorema de Cantor) Sea F_n una familia descendiente de conjuntos no vacíos cerrados en un espacio completo y tal que*

$$d(F_n) = \sup_{x,\, y \in F_n} d(x, y) \to 0.$$

Demuestre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ consta de un punto,

Solución. *De cada conjunto F_n escogemos un elemento x_n. La sucesión $d(F_n)$ es monótona descendiente a cero. Si $d(F_N) < \varepsilon$ y n, $m > N$, se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. La sucesión (x_n) es de Cauchy. Por la completez del espacio existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo y $n > m$ se cumple $x_n \in F_m$. El conjunto F_m es cerrado, entonces $x \in F_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Hemos probado que la intersección no es vacía. Si la intersección contiene otro punto y, entonces y, $x \in F_n$ para todo n. Por consiguiente*

$$d(x, y) \leq d(F_n) \to 0,$$

así se tiene que $d(x, y) = 0$ y $x = y$.

25. ♦ *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado completo (espacio de Banach) y sea $F \subset E$ un subespacio vectorial cerrado. Demuestre que el espacio E/F es completo.*

Solución. *Por la definición de la norma en el espacio cociente*

$$\|[x]\| = \inf_{h\in F} \|x + h\|$$

vemos que $\|[x]\| \leq \|x\|$, entonces para una sucesión de Cauchy (x_n) en E, la sucesión de clases $([x_n])$ es también de Cauchy y para una sucesión convergente $x_n \to x$ en E tenemos $[x_n] \to [x]$ en E/F.
Si $([y_n])$ es una sucesión de Cauchy en E/F, la sucesión (y_n), no necesariamente es de Cauchy. Sin embargo, es posible construir en E una sucesión de Cauchy (x_n) tal que $[x_n] = [y_n]$. La construcción de dicha sucesión será por inducción. Sea $x_1 = y_1$. Por la misma definición de la norma en E/F existe $h \in F$ tal que $\|x_1 - y_2 + h\| < \|x_1 - y_2\| + \frac{1}{2}$. Con $x_2 = y_2 - h$ obtenemos las propiedades

$$[x_2] = [y_2] \quad y \quad \|x_1 - x_2\| < \|x_1 - y_2\| + \frac{1}{2}.$$

Hagamos la siguiente hipótesis inductiva:
(H_n) Supongamos que existen x_1, x_2,..., $x_{n+1} \in E$ tales que $[x_j] = [y_j]$ para $j = 1, 2, \ldots, n+1$ y además $\|x_{j+1} - x_j\| < \|y_{j+1} - y_j\| + \frac{1}{2^j}$ para $j = 1, 2, , \ldots, n$. Hemos verificado esta hipótesis para $n = 1$. Supongamos que la afirmación (H_n) está verificada. Existe $h \in F$ tal que

$$\|x_n - y_{n+1} + h\| < \|x_n - y_{n+1}\| + \frac{1}{n^{n+1}}.$$

Si definimos $x_{n+1} = y_{n+1} - h$, *obtenemos la propiedad* (H_{n+1}). *Y así por la inducción obtenemos una sucesión* (x_n) *en* E *que satisface* (H_n) *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Los elementos de esta sucesión satisfacen:*

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\| &= \|(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\le \sum_{j=1}^{k} \|x_{n+j} - x_{n+j-1}\| \le \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n+j-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

La sucesión (x_n) *es de Cauchy y* E *es completo. Por lo tanto existe* $x \in E$ *tal que* $x_n \to x$ *y luego* $[y_n] = [x_n] \to [x]$ *en* E/F. *Y así tenemos que el espacio* E/F *es completo.*

26. ♦ *Sean* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $F \subset E$ *un subespacio vectorial. Supongamos que* F *y* E/F *son espacios completos. Demuestre que el espacio* E *es completo.*
Solución. *Sea* (a_n) *una sucesión de Cauchy en* E. *Por la desigualdad* $\|[a]\| \le \|a\|$ *es claro que la sucesión* $([a_n])$ *es de Cauchy en el espacio completo* E/F, *entonces existe* $a \in E$ *tal que* $\lim_{n\to\infty}[a_n] = [a]$. *Ahora de la definición* $\|[a_n - a]\| = \inf_{h\in F} \|a_n - a + h\|$ *se sigue que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $h_n \in F$ *tal que*

$$\|a_n - a + h_n\| < \|[a_n - a]\| + \frac{1}{n}.$$

La sucesión $(a_n - a)$ *es de Cauchy, antonces* (h_n) *es también una sucesión de Cauchy en* F. *Este espacio es completo por suposición y además existe* $h = \lim_{n\to\infty} h_n \in F$. *Así obtenemos que*

$$\begin{aligned} \|a_n - (a-h)\| &= \|a_n - (a-h_n) - h_n + h\| \le \|a_n - (a-h_n)\| + \|h_n - h\| \\ &\le \|[a_n - a]\| + \frac{1}{n} + \|h_n - h\|. \end{aligned}$$

Todos los términos del lado derecho tienden a cero, entonces la sucesión (a_n) *tiene límite* $(a-h)$. *Y por lo tanto el espacio* E *es completo.*

Teorema de Baire

1. Sea $a > 0$. Demuestre que en el espacio $C([-a,a])$, los conjuntos de funciones lineales, de funciones polinomiales, de funciones impares y de funciones pares tienen complementos densos.

   Sugerencia. *En el primer caso debemos probar que cada función lineal es límite uniforme de funciones continuas que no son lineales. Sea* $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\cos x$. *Los elementos de la sucesión no son funciones lineales y la sucesión converge uniformemente a cero. Si* f *es una función lineal,*

$g_n = f + \varphi_n$ no es lineal y converge uniformemente a f. El complemento del conjunto de funciones lineales es denso en $C([-a, a])$ en su métrica natural de convergencia uniforme. De forma análoga se pueden tratar los demás casos.

2. Utiliza el Teorema de Baire para demostrar que el espacio $\mathbb{Q}$ no es completo.

   Sugerencia. *Los conjuntos de un solo punto son cerrados en cada espacio métrico. En el caso del espacio de los racionales estos conjuntos son densos en ninguna parte. Forman una familia numerable. ¿Si $\mathbb{Q}$ fuera completo, que pasaría según Teorema de Baire?*

3. Demuestre que, si $Y \subset X$ es de 2^a categoría en X entonces X es de 2^a categoría en si mismo.

   Sugerencia. *Supongamos que X es de 1^a categoría en si mismo. Entonces existen conjuntos A_j (donde $j = 1, 2, \dots$) cerrados en X tales que $Int\, Aj = \emptyset$ y $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = X$. Considere la familia $B_j = A_j \cap Y$ y busca una contradicción.*

4. Sean X un espacio métrico completo y $O \subset X$ abierto. Demuestre que O es de segunda categoría en X.

   Sugerencia. *El espacio $Y = \overline{O}$ es también completo y por lo tanto es de 2^a categoría en si mismo, mientras que O es abierto en Y. Si O es de 1^a categoría en X, se puede representar como $O = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$ donde las cerraduras de C_j's en X tienen interiores vaciós. Observemos que las cerradura de cada C_j en Y también tienen interiores vacíos y que $Y \setminus O$ tiene interior vacío. Lo cual es una contradicción.*

5. ⧫ Demuestre que existen funciones continuas sobre $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que no son derivables en ninguna parte.

   Solución. Este ejercicio es una aplicación clásica del Teorema de Baire. La demostración consiste en probar que las funciones que son derivables al menos en un punto forman un conjunto de 1^a categoría en el espacio $C([a, b])$, mientras que este espacio es completo y por el Teorema de Baire es de 2^a categoría en si mismo. Para $n \in \mathbb{N}$ sea

   $$C_n = \{f \in C([a, b]) : |f(x + h) - f(x)| \leq n|h|\},$$

   para algún x y para todo h tal que $x+h \in [a, b]$. Si una función $f \in C([a, b])$ tiene derivada en un solo punto, entonces pertenece a uno de los conjuntos C_n. Vamos a ver que cada conjunto C_n es cerrado y denso en ninguna parte. Para ello sean $f_k \in C_n$ y supongamos que $f_k \to f$ uniformemente. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe x_k tal que $|f_k(x_k+h) - f(x_k)| \leq n|h|$. La sucesión (x_k) tiene una subsucesión convergente, porque el intervalo $[a,b]$ es compacto. Para simplificar la notación vamos suponer que $x_k \to x \in [a,b]$. Para probar que $f \in C_n$ calculamos:

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| = &|f(x+h) - f(x_k+h) + f(x_k+h) - f_k(t_k+h) \\
&+ f_k(x_k+h) - f_k(x_k) + f_k(x_k) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\
\leq &|f(x+h) - f(x_k+h)| + |f(x_k) - f(x)| \\
&+ |f_k(x_k+h) - f(x_k+h)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| \\
&+ |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)|.
\end{aligned}$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ los primeros dos términos de la suma son menores que ε para k suficientemente grande por la continuidad de la función f. El tercer y cuarto termino se pueden dominar por ε por la convergencia uniforme $f_k \to f$. El último término es menor o igual a $n|h|$, puesto que todas las funciones pertenecen a C_n. Así obtenemos la desigualdad

$$|f(x+h) - f(x)| \leq n|h| + 2\varepsilon$$

para $\varepsilon > 0$ arbitrario y por lo tanto $f \in C_n$.

Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que el $\operatorname{Int} C_n \neq \emptyset$, entonces existe una bola $B(f,r) = f + B(0,r) \subset C_n$. Para probar que cada C_n es denso en ninguna parte es suficiente probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ y $f \in C_n$ existe una función $g \notin C_n$ la cual satisface que $\|f - g\|_\infty < r$. Primero construimos una función sobre $\mathbb{R}$ tal que en algunos intervalos de longitud 1 esta cambia su valor por 1. Sea

$$h(2k + x) = |x|$$

para $-1 \leq x \leq 1$ y $k \in \mathbb{N}$. La función es no negativa y con forma de sierra; en cada intervalo $[n, n+1]$ cambia el valor linealmente entre 0 y 1. Si definimos ahora $h_{r,p}(x) = rh(px)$ obtenemos una función que cambia de valor entre cero y r sobre intervalos de longitud $\frac{1}{p}$. Si $f \in C_n$, entonces $g = f + h_{r,2n+1}$ pertenece a la bola $B(f,r)$, pero $g \notin C_n$, porque sobre intervalos pequeños esta función alcanza incrementos de tamaño $(n+1)|h|$.

Resumimos: los conjuntos C_n son cerrados, densos en ninguna parte en $C([a,b])$ y por el Teorema de Baire $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq C([a,b])$. Todas las funciones que tienen la derivada al menos en un punto están contenidas en Y. Por lo tanto existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto.

6. ♦ Demuestre que en cada espacio métrico, completo y numerable el conjunto de elementos aislados es denso.

   Solución. Sea X un espacio métrico, completo y numerable y sea A el conjunto de elementos aislados en X. Supongamos que $O = X \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. El conjunto O no contiene elementos aislados en X y es abierto, entonces tampoco contiene elementos aislados en O. Sean $x_0 \in O$ y $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset O$. Consideramos el conjunto $C = \overline{B(x_0, r/2)}$, donde la cerradura es tomada en X. Obviamente $C \subset B(x_0, r) \subset O$. Observemos que C es un subconjunto cerrado de un espacio completo y numerable, por lo cual C es completo y numerable. Por el Corolario 4.3 existe en C un elemento aislado a. Como elemento aislado de la cerradura $a \in B(x_0, r/2)$. Resulta que $B(x_0, r/2)$ contiene un elemento aislado en O, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{A} = X$.

Separabilidad

1. ¿Cuando un espacio discreto es separable?

   ¿Que pregunta? Obviamente si y sólo si es numerable.

2. Demuestre que el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ no es numerable.

   Sugerencia. *Sea* $\mathfrak{N}$ *la familia de todos los subconjuntos* $\mathbb{N}$. *Para cada* $C \in \mathfrak{N}$ *definimos la sucesión*

$$a_C(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \in C, \\ \\ 0, & \text{si } n \notin C. \end{cases}$$

   Aproveche el Ejemplo 5.8

3. ♦ Sean (X, d) un espacio métrico separable y $C \subset X$ un conjunto que no es numerable. Demuestre que C contiene un número no numerable de sus puntos de acumulación.

   Solución. Como subconjunto de un espacio separable, C es un espacio separable. Sea N un conjunto numerable y denso en C. Supongamos que C contiene solo un número numerable de sus puntos de acumulación. Sin embargo

$$C = \overline{N} = N \cup \{\text{puntos de acumulación de } N\}.$$

   El último conjunto es numerable. Así hemos obtenido una contradicción.

4. ♦ Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $A \subset E$ un conjunto separable. Demuestre que la la cáscara convexa de A es separable.

Solución. Recordemos que la cáscara convexa de A denotada por $\operatorname{conv}(A)$ está definida como el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto A. La cáscara $\operatorname{conv}(A)$ se puede describir como

$$\{x \in E : \, x = t_1x_1 + \cdots + t_kx_k, \;\; x_1, \ldots, x_k \in A, \; 0 \le t_j, \; \sum_{j=1}^{k} t_j = 1\}.$$

Sea A_0 un conjunto a lo más numerable y denso en A. Denotemos

$$C(A) = \{x \in E : x = \sum_{j=1}^{k} q_j a_j\},$$

donde $a_1, \ldots, a_k \in A_0$, $0 \le q_j \in \mathbb{Q}$ y $\sum_{j=1}^{k} q_j = 1$. Observemos que $C(A) \subset \operatorname{conv}(A)$. Cada elemento de $C(A)$ está definido por un par $(\mathbf{a}, \mathbf{q})$ donde $\mathbf{a} \in A_0^k$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^k$. Por lo tanto $C(A)$ se sumerge en el espacio

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_0 \times \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}^k$$

que es numerable, y así se tiene que $C(A)$ es numerable (vea Capítulo 5, sectión 1). Por lo cual sera suficiente con probar que $C(A)$ es denso en $\operatorname{conv}(A)$.

Sean $x = \sum_{j=1}^{k} t_j x_j \in \operatorname{conv}(A)$ y $r > 0$. La aplicación

$$\mathbb{R}^k \times A^k \ni (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \to \sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j \in E$$

es continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que, si para todo $1 \le j \le k$ se cumple que $|q_j - t_j| < \delta$, $\|a_j - x_j\| < \delta$, entonces $\| \sum_{j=1}^{k} t_j x_j - \sum_{j=1}^{k} q_j a_j \| < r/2$. La continuidad de la función $\dfrac{1-s}{s}$ en $s = 1$ significa que existe también $\rho > 0$ tal que para $|s| < \rho$ se cumple $\dfrac{|1-s|}{s} < \dfrac{r}{2(\|x\| + \frac{r}{2})}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y de A_0 en A podemos encontrar $q_j \in \mathbb{Q}$ y $a_j \in A_0$ tales que $|q_j - t_j| < \min\{\delta, \rho/k\}$ y $\|a_j - x_j\| < \delta$, lo que asegura que

$$\|x - \sum_{j=1}^{k} q_j a_j\| < r/2.$$

Sin embargo, $\sum_{j=1}^{k} q_j a_j$ no necesariamente es elemento de $C(A)$, porque no hemos asegurado la condición $\sum_{j=1}^{k} q_j = 1$. Sí $|\sum_{j=1}^{k} q_j - 1| < \rho$, entonces para $q'_j = \frac{q_j}{\sum_{j=1}^{k} q_j}$ se tiene $\sum_{j=1}^{k} q'_j a_j \in C(A)$ y

$$\|\sum_{j=1}^{k} q_j a_j - \sum_{j=1}^{k} q'_j a_j\| = \frac{|1-\sum_{j=1}^{k} q_j|}{\sum_{j=1}^{k} q_j} \|\sum_{j=1}^{k} q_j a_j\|.$$

Según nuestra construcción $|1-\sum_{j=1}^{k} q_j| < \rho$ y $\|\sum_{j=1}^{k} q_j a_j\| < \|x\| + \frac{r}{2}$, entonces

$$\|\sum_{j=1}^{k} q_j a_j - \sum_{j=1}^{k} q'_j a_j\| < \frac{r}{2}.$$

Así hemos obtenido que $\sum_{j=1}^{k} q'_j a_j \in C(A)$ tal que $\|x - \sum_{j=1}^{k} q'_j a_j\| < r$. El conjunto $\operatorname{conv}(A)$ contiene a $C(A)$ que es numerable y denso en $\operatorname{conv}(A)$. Por lo tanto la cáscara $\operatorname{conv}(A)$ es separable.

5. ♦ La siguiente función es una métrica en $\mathbb{R}^2$:

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}, & \text{si existe } t \in \mathbb{R}, \mathfrak{a} = t\mathfrak{b}, \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{si tal número no existe.} \end{cases}$$

Demuestre que el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ no es separable.

Solución. La prueba sería complicada si partimos de la definición original de la separabilidad. En cambio, la prueba es inmediata si aprovechamos el Teorema 5.14. Vamos a demostrar que en este espacio existe una familia no numerable de bolas mutuamente ajenas. Por el Teorema 5.14 esto no es posible en un espacio separable. Vamos a denotar por $\|\cdot\|$ la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$ y por $B(\mathfrak{a}, r)$ la bola euclidiana (que en este caso es un disco). La observación más importante para resolver el problema es que para $r \leq \|\mathfrak{a}\|$ la bola $B_d(\mathfrak{a}, r)$ es un segmento lineal:

$$B_d(\mathfrak{a}, r) = \{t\mathfrak{a} : 1 - r < t < 1 + r\}.$$

Cuando $r > \|\mathfrak{a}\|$ tenemos la bola en forma de una “paleta”:

$$B_d(\mathfrak{a}, r) = \{t\mathfrak{a} : 1 - r < t < 1 + r\} \cup B((0,0), \|\mathfrak{a}\| - r).$$

La familia de los segmentos de la forma $I_{\mathfrak{a}} = \{t\mathfrak{a} : 0 < t < 2\}$, donde $\|a\| = 1$ consta de bolas abiertas mutuamente ajenas y está parametrizada por los puntos de la circunferencia unitaria, así esta es no numerable. Por lo tanto el espacio $(\mathbb{R}^2, d)$ no es separable.

6. ♦ Supongamos que en el espacio métrico X cada conjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es separable.

Solución. Sea $r > 0$. Por nuestra suposición en el espacio X no existe ninguna sucesión x_n tal que $d(x_n, x_{n+k}) \geq r$ para todos n, $k \in \mathbb{N}$, porque una sucesión de estas propiedades no tiene puntos de acumulación.

El hecho de que tal sucesión no se puede construir significa que para todo $r > 0$ existe número finito de bolas $B(x_{r,1}, r), \ldots, B(x_{r,m_r}, r)$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{m_r} B(x_{r,j}, r)$. Tomamos los radios de valores $\frac{1}{k}$, para $k \in \mathbb{N}$ y construimos las bolas correspondientes:

$$B_{k,j} = B\left(x_{\frac{1}{k},j}, \frac{1}{k}\right),$$

que tienen la propiedad de que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{j=1}^{m_{\frac{1}{k}}} B_{k,j} = X.$$

Afirmamos que la sucesión compuesta de los centros de estas bolas es densa en X. En efecto, para cada $x \in X$ y $r > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < r$. Para algún valor j se cumple que $x \in B_{k,j}$. En otras palabras $x_{\frac{1}{k},j} \in B(x, \frac{1}{k}) \subset B(x, r)$. El conjunto

$$C = \{x_{\frac{1}{k},j} : k \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq m_{\frac{1}{k}}\}$$

es numerable y denso en X. Por lo tanto el espacio X es separable.

7. Para $A \subset \mathbb{R}$ definimos la función característica del conjunto A como

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Demuestre que las combinaciones lineales de las funciones características forman un conjunto denso en el espacio $B(\mathbb{R})$ de las funciones acotadas sobre el eje $\mathbb{R}$.

Sugerencia. *Para $f \in B(\mathbb{R})$ dado $\varepsilon > 0$ arbitrario debemos encontrar una función de la forma*

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_n 1_{A_n} \quad \textit{tal que} \quad \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Como una función acotada, la función f toma valores en cierto intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que por su lado está contenido en algún intervalo de forma $[N_\varepsilon, M_\varepsilon)$ con N, $M \in \mathbb{Z}$. Sea

$$A_j = \{x \in \mathbb{R} : j\varepsilon \leq f(x) < (j+1)\varepsilon\},$$

con $N \leq j \leq M - 1$. Demuestre que

$$g = \sum_{N \leq j \leq M-1} f(j\varepsilon) 1_{A_j}$$

aproxima a f adecuadamente.

8. Sea G un subgrupo del grupo additivo $(\mathbb{R}, +)$. Demuestre que G es denso en $\mathbb{R}$ si y sólo si $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$.

   Sugerencia. *La condición es obviamente necesaria, pues la densidad de G en $\mathbb{R}$ implica que para cada $\varepsilon > 0$ algún elemento de G se encuentra en el intervalo $(0, \varepsilon)$. Supongamos ahora que $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $0 < p \in G$ tal que $p < \varepsilon$. Los elementos np tales que $n \in \mathbb{Z}$ también pertenecen a G.*

9. Si $r \in \mathbb{Q}^c$, demuestre que el conjunto $\{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

   Sugerencia. *Podemos usar el resultado del ejercicio anterior. El conjunto $G = \{m + nr : m, n \in \mathbb{Z}\}$ forma un subgrupo del grupo aditivo $\mathbb{R}$. Es suficiente demostrar que los elementos positivos del conjunto G aproximan a cero. Observemos que si $a < b \in G$ y $b - a < \varepsilon$, entonces se tiene que $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) \leq b - a$, pues el último elemento es positivo y pertenece a G. La condición $\operatorname{ínf}(G \cap \mathbb{R}_+) = r > 0$ implica que $|a - b| > r$ para cualquier par de elementos de G. Considera ahora el grupo cociente $G/\mathbb{Z}$ que se puede identificar con un subconjunto del intervalo $[0, 1]$ y que por lo dicho tiene que ser finito. Pruebe que r es racional, obteniendo una contradicción.*

10. Demuestre que la métrica en un espacio métrico (X, d) es equivalente a la métrica discreta si y sólo si el único subconjunto denso en X es el mismo X.

    Sugerencia. *Una métrica δ es equivalente a la métrica discreta d si y sólo si en el espacio (X, δ) todos los conjuntos son abiertos. Si $A \subset X$ es un conjunto denso en X, cada abierto contiene a un elemento de A. ¡Pero cada conjunto de un punto es abierto!*

Espacios de funciones y aplicaciones continuas

1. De un ejemplo de una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua en un sólo punto.

   Sugerencia. *Construye una función acotada y discontinua en todas partes y luego multiplíquela por la función $f(x) = x$.*

2. ♦ Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x = \frac{m}{n},\ n > 0,\ n, m \text{ primos relativos}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en cero y en los puntos irracionales y que es discontinua en los puntos racionales distintos de cero.

Solución. Empezamos con el estudio de la continuidad en cero. El valor de la función en $x = 0$ es cero y el mismo valor toma la función en los puntos irracionales. Es suficiente estudiar la continuidad en cero de la función restringida a $\mathbb{Q}$.
Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon$. Para $x = \frac{m}{n}$ la condición $|x| = \frac{|m|}{|n|} < \delta$ implica que $f(x) = \frac{1}{|n|} < \delta$ pues $|m| \geq 1$. Y por lo tanto la función es continua en cero.
Por otra parte, sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Supongamos primero que $x > 0$. Tenemos nuevamente $f(x) = 0$ por la definición. Supongamos que la función es discontinua en x. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ en el intervalo $(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k})$ existe $y_k = \frac{m_k}{n_k}$, m, $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(y_k) = \frac{1}{n_k} > \varepsilon$. Para estos puntos "malos" se cumple que $n_k < \frac{1}{\varepsilon}$. Luego existe solo un número finito de los valores n_k, $m_k \in \mathbb{N}$ que satisfacen las condiciones $n_k < \frac{1}{\varepsilon}$ y $\frac{m_k}{n_k} < x + 1$. Así la sucesión (y_k) toma solo un número finito de valores racionales. Por lo cual su límite es entonces un número racional. Sin embargo $y_k \to x$ por su definición, lo que es una contradicción. La función f es continua en los puntos irracionales positivos. La función f es par, entonces es continua también en los puntos irracionales negativos. La discontinuidad en cada punto racional $x \neq 0$ es obvia, ya que en este caso $f(x) > 0$, mientras que existen puntos irracionales $x_k \to x$ y $f(x_k) = 0$.

3. El eje real $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Q}$. Sabemos del curso de álgebra lineal que existe una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ tal que el número 1 es uno de los elementos de la base que denotamos por r_0. Representamos esta base como $\{r_0\} \cup \{r_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos la descomposición única:

$$x = q_0(x) + \sum_{\alpha \in \Delta} q_\alpha(x) r_\alpha,$$

donde $q_0(x)$ y $q_\alpha(x) \in \mathbb{Q}$ y solo un número finito de los coeficientes q_α es distinto de cero. Sea $f(x) := q_0(x)$. Demuestre que la función f es aditiva $(f(x + y) = f(x) + f(y))$ y discontinua en todos los puntos del dominio.

Sugerencia. *La representación de un vector como combinación lineal de elementos de una base es única. De aquí se sigue que la función f es aditiva y $\mathbb{Q}$ - lineal.*
¿Que forma tiene la función f sobre $\mathbb{Q}$? Suponiendo que f es continua demuestre que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Porque esto es una contradicción?

4. Construye una isometría del espacio $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2,\ x \neq 1\}$ con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{si } xy > 0, \\ \\ |x|+|y|-2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

sobre el intervalo $[0,2]$ con su métrica natural.

Sugerencia: *Intentelo con la aplicación* $\phi(x) = x - \operatorname{sgn}(x)$.

5. Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no cerrado. Construye una función continua no acotada sobre A.

Sugerencia. *Si A no es cerrado en X, entonces existe $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. ¿Que propiedades tiene la función $f(x) = d(x,x_0)$? ¿Que propiedades tiene la función $g = \dfrac{1}{f}$?*

6. ♦ Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demuestre que la función sobre X definida por la fórmula

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

es uniformemente continua.

Solución. Sean $x,\ y \in A$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $d_A(x) \leq d_A(y)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$d(x,a) \leq \inf_{u \in A} d(x,u) + \varepsilon,$$

es decir $d(x,a) \leq d_A(x) + \varepsilon$. Se sigue por la desigualdad del triangulo que:

$$d_A(y) \leq d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \leq d(x,y) + d_A(x) + \varepsilon.$$

Así para ε arbitrario obtenemos que:

$$|d_A(y) - d_A(x)| \leq d(x,y) + \varepsilon$$

y la continuidad uniforme está probada.

7. Muestre que si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, existen $a,\ b > 0$ tales que $|f(x)| \leq a|x| + b$.

Sugerencia. *Por la continuidad uniforme en el dominio $\mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que $|x-y| \leq \delta$ implica que $|f(x)-f(y)| \leq 1$. Sea $b = |f(0)|$ y sea $a = \frac{1}{\delta}$. Represente $x = n\delta + c$ con $0 < c < \delta$ y para terminar la demostración aplique la inducción con respecto a n.*

8. Muestre que cada función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, monótona y acotada es uniformemente continua.

   Sugerencia. *Consideramos el caso de una función f monótona creciente. Siendo además acotada la función tiene los límites en el $\pm$ infinito iguales a $m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, respectivamente. Para $\varepsilon > 0$ existen $a < b$ tales que para $x < a$ ó $b < x$ se cumple que*

$$f(x) - m < \varepsilon/2 \qquad \text{ó} \qquad M - f(x) < \varepsilon/2,$$

   respectivamente. En el intervalo $[a, b]$ la función es continua entonces es uniformemente continua y existe δ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$, mientras ambos puntos estén en $[a, b]$ y $|x - y| < \delta$. Con estos datos en la mano demuestre que para $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x-y| < \delta$ se cumple $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ sin más restricciones sobre los puntos. El caso de una función monótona decreciente g se resuelve considerando la función $-g$.

9. Sean f, g funciones uniformemente continuas y acotadas sobre un espacio métrico X. Demuestre que fg es una función uniformemente continua. Mediante un ejemplo demuestre que la suposición de que las funciones sean acotadas es necesaria.

   Sugerencia. *El incremento del producto se puede representar de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} |f(y)g(y) - f(x)g(x)| &= |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \\ &= |f(y)(g(y) - g(x)) + (f(y) - f(x))g(x)| \\ &\leq |f(y)||g(y) - g(x)| + |f(y) - f(x)||g(x)|. \end{aligned}$$

   Ahora es suficiente aprovechar ambas suposiciones y la continuidad uniforme está probada. Para ver que ambas funciones deben ser acotadas piense en las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x$ con dominio en $\mathbb{R}$.

10. Demuestre que una función $f \in BC(\mathbb{R})$ es uniformemente continua si y sólo si para toda sucesión $x_n \to 0$ se tiene que $f(x + x_n) \to f(x)$ uniformemente.

    Sugerencia. *Este ejercicio es principalmente para recordar las dos definiciones involucradas. La función f es uniformemente continua si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, |h| < \delta,\ x \in \mathbb{R} \quad d(f(x+h), f(x)) < \varepsilon.$$

    Si para $|h| < \delta$ calculamos $\sup_{x \in \mathbb{R}} d(f(x+h), f(x))$ obtenemos el valor $\leq \varepsilon$. Si $h_n \to 0$, para n suficientemente grande se cumple que $|h_n| < \delta$ y denotando $f_h(x) = f(x+h)$ obtenemos $d_\infty(f_{h_n}, f) \leq \varepsilon$, lo que significa la convergencia uniforme de la sucesión.

La implicación opuesta también consiste en leer con atención la definición de la convergencia uniforme.

11. Sean X un espacio métrico arbitrario y Y un espacio discreto. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que una sucesión (F_n) en $B(X,Y)$ sea uniformemente convergente.

    Sugerencia. *En un espacio discreto la condición $d(x,y) < 1$ implica que $x = y$. La convergencia uniforme $F_n \to F$ implica $F_n = F$ para n grandes.*

12. Sean X, Y espacios métricos y $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y sólo si para cada conjunto cerrado $B \subset Y$ la imagen inversa $F^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en X.

    Sugerencia. *La operación de tomar la imagen inversa tiene la propiedad $F^{-1}(A) = F^{-1}(A^c)^c$ (¡verifíquelo!).*
    Si O es un abierto, su complemento es cerrado y por lo tanto $F^{-1}(O) = F^{-1}(O^c)^c$ es abierto como complemento del conjunto $F^{-1}(O^c)$ cerrado por suposición.

13. ♦ Sea X, Y espacios métricos y $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y sólo si $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$ para cada $B \subset Y$.

    Solución. La operación de tomar la imagen inversa tiene la propiedad $F^{-1}(D^c) = F^{-1}(D)^c$, la cual se deduce directamente de la definición.
    Primero supongamos que $F \in C(X,Y)$. Entonces $F^{-1}(\overline{B}^c) = F^{-1}(\overline{B})^c$ es un conjunto abierto como imagen inversa de un abierto. Por lo tanto $F^{-1}(\overline{B})$ es cerrado. Aplicamos la cerradura a ambos lados de la relación $F^{-1}(B) \subset F^{-1}(\overline{B})$ obteniendo $\overline{F^{-1}(B)} \subset \overline{F^{-1}(\overline{B})} = F^{-1}(\overline{B})$, pues este conjunto es cerrado.

    Ahora pasemos a demostrar el recíproco. Para ello observemos que para probar la continuidad de F es suficiente ver que la imagen inversa de cada conjunto cerrado es conjunto cerrado. En efecto, si F tiene la última propiedad y $O \subset Y$ es abierto, entonces $F^{-1}(O^c) = F^{-1}(O)^c$ es un conjunto cerrado y por lo tanto $F^{-1}(O)$ es abierto, probando la continuidad de F. Suponemos ahora que $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$ para cada $B \subset Y$. Tomamos B cerrado (entonces $\overline{B} = B$) y obtenemos $F^{-1}(B) = F^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{F^{-1}(B)}$, lo que implica que $F^{-1}(B)$ es cerrado. Y así la continuidad de F está probada.

    Nota. En esta demostración no henmos usado el resultado del ejercicio anterior, lo que se hizo fue repetir la demostración del mismo.

14. ⧫ Sean X, Y espacios métricos y $F\colon X \to Y$ una aplicación. Demuestre que F es continua si y sólo si $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ para cada $A \subset X$.

Solución. Primero supongamos que F es continua. Sea $x \in \overline{A}$, entonces existe $a_n \in A$ tal que $a_n \to x$. Por la continuidad de F se tiene que $F(A) \ni F(a_n) \to F(x)$, entonces $x \in \overline{F(A)}$. Por lo tanto $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$.

Demostremos el recíproco. Para ello supongamos que $F(\overline{A}) \subset \overline{F(A)}$ se cumple para cada $A \subset X$. Sean $B \subset Y$ cerrado ($\overline{B} = B$) y $A = F^{-1}(B)$, entonces
$$F(\overline{F^{-1}(B)}) \subset \overline{F(F^{-1}(B))} = \overline{B} = B.$$
Resulta que cada elemento de $\overline{F^{-1}(B)}$ se transforma en B bajo F, es decir pertenece a $F^{-1}(B)$, por lo tanto $\overline{F^{-1}(B)} = F^{-1}(B)$. Luego la imagen inversa bajo F de cada conjunto cerrado es un conjunto cerrado. Y por el ejercicio anterior esta propiedad implica la continuidad de F.

15. Demuestre que la función $\|\cdot\|$ sobre $L(E,F)$ es una norma y que
$$\|A\| = \text{ínf}\{C > 0 : \forall x \in E\, ; \|A(x)\|_F \le C\|x\|_E\}.$$

Sugerencia. *La norma definida como*
$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|A(x)\|_F$$
es un caso particular de una norma en el espacio de aplicaciones acotadas, solo que no se calcula en el dominio entero sino solo sobre la bola unitaria. Sea
$$D = \text{ínf}\{C > 0 : \forall x \in E\, , \|A(x)\|_F \le C\|x\|_E\}.$$
Es claro que el número D satisface la desigualdad $\|A(x)\|_F \le D\|x\|_E$ para todo $x \in E$. Tomando el supremo del valor del lado izquierdo sobre la bola unitaria de obtiene que $\|A\| \le D$. La misma definición de la norma $\|A\|$ implica que para cada $x \neq 0$ en E se cumple que $\|A(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \le \|A\|$ de donde $\|A(x)\|_F \le \|A\|\|x\|_E$. Por lo tanto $D \le \|A\|$. Y así la igualdad $D = \|A\|$ está probada.

16. ¿ Averigue si la propiedad "ser acotado" es invariante bajo homeomorfismos?

Sugerencia. *Consulte la solución del Ejercicio 3.7.*

17. ⧫ Demuestre que el cuadrante $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0\}$ y el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 < 2,\ (x+1)^2 + y^2 < 2\}$ son homeomorfos.

Solución. Existen muchos homeomorfismos entre estos espacios. Una forma elegante de construir uno de ellos se basa en la teoría de funciones analíticas ó más exactamente en las transformaciones de Möbius. Vamos a aprovechar la estructura compleja que existe en el plano escribiendo el elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ como $z = x + iy$. Para una matríz no singular $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $c \neq 0$ definimos la transformación de Möbius del plano como

$$m_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

El dominio de esta aplicación es igual a $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{c}{d}\}$ y en este dominio la aplicación es obviamente continua. Cuando z tiende a $-\frac{c}{d}$ el valor $|m_A(z)|$ tiende al infinito. De las transformaciones de Möbius se sabe que transforman el conjunto de lineas rectas y círculos en si mismos. En otras palabras, si C es una recta ó un círculo, $m_A(C)$ es también una recta o un círculo. De este punto de vista una recta en $\mathbb{R}^2$ es un círculo que pasa por "el punto en infinito".

El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 2,\ (x+1)^2 + y^2 < 2\}$ tiene como frontera dos arcos que se intersectan en los puntos $\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{2}i$ y que pasan por los puntos 1 y -1, respectivamente. Vamos a buscar la transformación de Möbius que envía el punto $\sqrt{2}i$ al infinito y transforma el punto $-\sqrt{2}i$ en cero. La transformación

$$m(z) = \frac{z + \sqrt{2}i}{z - \sqrt{2}i}$$

satisface ambas condiciones. Las circunferencias que forman la frontera de la región A se transforman en dos rectas que pasan por el punto 0 y $m(1) = \frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} = \frac{1}{3}(-1 + 2\sqrt{2}i)$ y $m(-1) = \frac{-1+\sqrt{2}i}{-1-\sqrt{2}} = \frac{1}{3}(-1 - 2\sqrt{2}i)$, además $m(0) = -1$. El conjunto $m(A)$ está entonces contenido en el semiplano izquierdo entre los semiejes que parten de cero y pasan por los puntos $-1 + 2\sqrt{2}i$ y $-1 - 2\sqrt{2}i$, respectivamente. Si definimos

$$f(z) = (-1 - 2\sqrt{2}i)m(z)$$

obtenemos como imagen $f(A)$ a la región entre el semieje real positivo y el semieje que pasa por el punto $-7 + 4\sqrt{2}i$. Si α es el argumento de $-7+4\sqrt{2}i$, definimos finalmente el homeomorfismo buscado por la fórmula:

$$\phi(z) = \left((-1 - 2\sqrt{2}i) \frac{z + \sqrt{2}i}{z - \sqrt{2}i} \right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

18. Sean E, F espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$ y $F \colon E \to F$ una aplicación continua y aditiva, es decir, $F(x + y) = F(x) + F(y)$. Demuestre que F es lineal.

Sugerencia. *Para tener la linealdad nos falta unicamente la propiedad* $F(tx) = tF(x)$ *para todo* $x \in E$ *y* $t \in \mathbb{R}$. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *usando la aditividad de la función tenemos que:*

$$nF(\frac{1}{n}x) = F(\frac{1}{n}x) + \cdots + F(\frac{1}{n}x) = F(\frac{1}{n}x + \cdots + \frac{1}{n}x) = F(x),$$

de donde $F(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}F(x)$. *También para cada* $m \in \mathbb{Z}$ *se sigue por el mismo argumento que* $F(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}F(x)$. *Ya hemos probado que para cada* $q \in \mathbb{Q}$ *se cumple* $F(qx) = qF(x)$. *Ahora es tiempo de aprovechar la continuidad de la aplicación* F. *Para* $t \in \mathbb{R}$ *escogemos una aproximación* $\mathbb{Q} \ni q_j \to t$ *y obtenemos* $F(tx) = F(\text{lím}_{j\to\infty} q_j x) = \ldots$. *El resto del ejercio se le deja al lector.*

19. ⧫ Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ una función lineal no identicamente nula. Demuestre que φ es continua si y sólo si $\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso en E.

Solución. Existe un elemento de $y \in E$ tal que $\varphi(y) \neq 0$. Para $x \in E$ arbitrario se cumple

$$\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}y\right) = 0,$$

es decir $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}y \in \operatorname{Ker}\varphi$ para cada $x \in E$. Cada elemento x de E se descompone en forma única como $x = ty + h$, donde $t \in \mathbb{K}$, $h \in \operatorname{Ker}\varphi$. El espacio E tiene la forma de suma directa $E = \mathbb{K}y + \operatorname{Ker}\varphi$. El kernel de una función lineal es de codimensión 1. Si φ es una función continua, $\operatorname{Ker}\varphi$ es un conjunto cerrado como imagen inversa del conjunto cerrado $\{0\}$ y por lo tanto no es denso en E.

Ahora supongamos que $E \neq \overline{\operatorname{Ker}\varphi}$. Sea $y \in \overline{\operatorname{Ker}\varphi} \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Tenemos entonces $\varphi(y) \neq 0$ y por las observaciones hechas al principio se tiene que $E = \overline{\operatorname{Ker}} = \mathbb{K}y + \operatorname{Ker}\varphi$ lo cual es una contradicción demostrando que $\overline{\operatorname{Ker}\varphi} = \operatorname{Ker}\varphi$. Acabamos de probar que $\operatorname{Ker}\varphi \neq E$ implica que $\operatorname{Ker}\varphi$ es cerrado en E.
El espacio cociente $E/\operatorname{Ker}\varphi$ es un espacio normado de dimensión 1 y la aplicación $p\colon E \ni x \to [x] \in E/\operatorname{Ker}\varphi$ es continua. La función $\tilde{\varphi}$ sobre $E/\operatorname{Ker}\varphi$ definida por la fórmula $\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x)$ está bién definida y es lineal entre dos espacios de dimensión uno. Por consiguiente $\tilde{\varphi}$ es una función continua.

Obtenemos que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ p$ demuestra la continuidad de φ como de la suposición de dos aplicaciones continuas. Así hemos probado que si $\operatorname{Ker}\varphi$ no es denso en E entonces φ es continua. El mismo resultado se puede formular de la siguiente manera:

Una aplicación lineal sobre un espacio normado es discontinua si y sólo si su kernel es denso en el dominio.

20. ⧫ Sean (X, d) un espacio métrico y u_0 un punto arbitrario en X. Para x, $u \in X$ sea $f_u(x) = d(x, u) - d(x, u_0)$. Demuestre que f_u es una función acotada, continua sobre X y que la aplicación $X \ni u \to f_u \in BC(X)$ es una isometría.

    Solución. La continuidad de la función f_u es clara, pues la distancia es una función continua (vea Ejemplo 6.3). Por la Proposición 1.2 sabemos que $|f_u(x)| \le d(u, u_0)$, por lo cual $f_u \in BC(X)$. Queda por probar que la aplicación $X \ni u \to f_u \in CB(X)$ es isométrica, es decir

$$\|f_u - f_v\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_u(x) - f_v(x)| = d(u, v).$$

    Calculamos:

$$\begin{aligned} |f_u(x) - f_v(x)| &= |d(x, u) - d(x, u_0) - (d(x, v) - d(x, u_0)| \\ &= |d(x, u) - d(x, v)| \\ &\le d(u, v), \end{aligned}$$

    nuevamente por Proposición 1.2. En los puntos $x = u$ y en $x = v$ la función $|d(x, u) - d(x, v)|$ alcanza el valor deseado $d(u, v)$.

21. ⧫ Demuestre el Teorema 2.11 aplicando el resultado del ejercicio anterior.

    Solución El Teorema 2.11 dice que cada espacio métrico X se inserta isométricamente en un espacio completo el cual forma un subconjunto denso.

    Al resolver el Ejercicio 6.20 hemos construido (sin mucho esfuerzo) una inyección isométrica $\phi\colon X \to BC(X)$. Este espacio es completo, entonces la cerradura de $\phi(X)$ en $BC(X)$ es la completación buscada.

    Nota: Inmediatamente surge la pregunta de porque en el Capítulo 2 hemos usado una demostración tan larga y complicada en lugar de la que acabamos de hacer en media página. La respuesta es muy sencilla. Uno de los casos más importantes de la completación es la construcción de los números reales como la completación del campo de los racionales. Para este fin no sirve la última demostración en la cual se aprovecha la completez del eje real.

    Este momento es buena oportunidad para darse cuenta de la exepcional importancia de los números reales en el análisis. Tal vez el hecho de que cada espacio métrico está contenido en el espacio $BC(X)$ no es tan sorprendente, pero según teorema de Banach y Mazur (1932) cada espacio métrico seprable se sumerge isométricamente en el espacio $C[0,1]$ de funciones continuas sobre el intervalo $[0,1]$. Después de "crear" un enorme mundo de todos los espacios métricos (separables) de repente constatamos que todo este "cosmos" ya existió dentro de un espacio tan sencillo como él de $C[0,1]$ conocido de los cursos del cálculo. No se puede evitar la comparación con el caso de los fractales...

22. ♦ Sean $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ el disco unitario en el plano, $E = CB(\mathbb{R}^2)$ el espacio de funciones continuas acotadas sobre el plano provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $F = \{f \in E : f|_{\mathbb{D}} \equiv 0\}$. Encuentre una isometría lineal entre el espacio cociente E/F y el espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$.

Solución. Sea $A(f) = f|_{\overline{\mathbb{D}}}$. Si $A(f) = 0$, la función f se anula en el disco, entonces $f \in F$. Cada función continua g que se anula dentro del disco, es nula en el disco cerrado. Tenemos entonces la igualdad $\ker A = F$. Así la definición $\tilde{A}([f]) = A(f)$ es correcta. El operador $\tilde{A}\colon E/F \to C(\overline{\mathbb{D}})$ es lineal é inyectivo. Vamos a probar que $\tilde{A}$ es suprayectivo. Para $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ debemos encontrar una función continua acotada tal que $f|_{\overline{\mathbb{D}}} = g$. Existen teoremas generales sobre las extensiones continuas de funciones continuas (Teorema de Tietze), pero en nuesto caso podemos construir tal extensión en forma muy sencilla. Sea

$$\mathcal{E}(g)(\mathfrak{a}) := \begin{cases} g(\mathfrak{a}), & \|\mathfrak{a}\| \leq 1, \\ \\ g(\frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|}), & \|\mathfrak{a}\| > 1. \end{cases}$$

Fuera del disco la función $\mathcal{E}(g)$ es constante sobre cada rayo que parte de la circunferencia. La función $\mathcal{E}(g)$ es continua, acotada y satisface que $A(\mathcal{E}(g)) = g$. Además se cumple la fórmula

$$\sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |\mathcal{E}(g)(\mathfrak{a})| = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{D}} |g(\mathfrak{a})|.$$

La última observación es importante para probar que $\tilde{A}$ es una isometría. La norma en el espacio cociente en nuestro caso es

$$\|[f]\| = \inf_{h\in F} \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |(f+h)(\mathfrak{a})|,$$

por lo cual $\|[f]\| \leq \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |(f)(\mathfrak{a})|$. La función $h_0 = \mathcal{E}(A(f)) - f$ es un elemento del subespacio F (que se anula sobre el disco). Se cumple que

$$\|[f]\| \leq \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |f + h_0|(\mathfrak{a})| = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |\mathcal{E}(A(f))| = \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{D}} |f(\mathfrak{a})| = \|A(f)\|_\infty.$$

Para cada h que se anula sobre $\mathbb{D}$ tenemos

$$\sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{R}^2} |(f+h)(\mathfrak{a})| \geq \sup_{\mathfrak{a}\in\mathbb{D}} |(f)(\mathfrak{a}),$$

de donde se sigue tomando el ínfimo con respacto a $h \in F$ que:

$$\|[f]\| \geq \|A(f)\|_\infty.$$

Así las últimas dos desigualdades implican que $\|[f]\| = \|A(f)\|_\infty$.

23. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es *abierta* si para cada $O \subset X$ abierto $f(O)$ es abierto. Demuestre que si X es de 2^a categoría en si mismo y $f\colon X \to Y$ es abierto, entonces Y es de 2^a categoría en si mismo.

    Sugerencia. *Supongamos que C_n es una familia de conjuntos cerrados en Y tales que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Debemos probar que uno de los conjuntos C_n tiene interior no vacío. Los conjuntos $f^{-1}(C_n)$ son cerrados en X y cubren el espacio X. Si X es de 2^a categoría, existe n_o tal que* $\operatorname{Int} C_{n_o} \neq \emptyset$. *Ahora llega el momento de aprovechar el hecho de que f es una aplicación abierta.*

24. ♦ Sean $C^1([a,b])$ el espacio de funciones sobre $[a,b]$ que tienen derivada continua y

    $$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| + |f'(x)-g'(x)|.$$

    Investigue la continuidad de la aplicación $T\colon C([a,b]) \to C^1([a,b])$ cuando

    1. $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\operatorname{sen}(x-t)dt$,

    2. $(Tf)(x) = \int_a^x f^2(t)dt$.

    Solución. 1. La métrica en el espacio $C^1([a,b])$ está relacionada con la norma

    $$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + |f'(x)|.$$

    Para obtener el valor $\|(Tf)\|$ tenemos que calcular la derivada de la función Tf. Como recordamos del curso del cálculo para derivar una función de este tipo debemos introducir una función de dos variables $F(x,y) = \int_a^x f(t)\operatorname{sen}(y-t)dt$ y entonces se cumple que

    $$(Tf)'(x) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,x) + \frac{\partial}{\partial y}F(x,x).$$

    Así por el Teorema Fundamental del Cálculo $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = f(x)\operatorname{sen}(y-x)$. La segunda derivada parcial es la derivada de una integral a un parámetro y tiene valor $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \int_a^x f(t)\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{sen}(y-t))dt = \int_a^x f(t)\cos(y-t)dt$. De tal manera que

$$(Tf)'(x) = \int_a^x f(t)\cos(x-t)dt.$$

En este caso el operador T es lineal, entonces su continuidad en todas partes equivale a la continuidad en cero. Calculamos:

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \sup_{x\in[a,b]} |\int_a^x |f(t)dt| + |\int_a^x |f(x)\cos(x-t)dt| \\ &\leq 2(b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = 2(b-a)\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Este operador es continuo como operador del espacio $C([a,b])$ sobre el espacio $C^1([a,b])$.

2. En este caso $(Tf)'(x) = f^2(x)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo. El operador no es lineal, entonces calculamos

$$\begin{aligned}d(Tf,Tg) &= \sup_{x\in[a,b]} |\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dt| \\ &\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}(f-g)^2(x) \leq (b-a)(\sup_{x\in[a,b]}|f-g|(x))^2 \\ &= (b-a)\|f-g\|_\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, esta desigualdad demuestra la continuidad de la aplicación $T\colon C([a,b]) \to C^1([a,b])$.

Espacios compactos

1. Describe los conjuntos compactos en un espacio dotado de la métrica discreta.

   Sugerencia. *Si en un espacio de métrica discreta X disponemos de un número infinito de elementos, podemos construir en X una sucesión en la cual ningún elemeno se repite. Tal sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente. ¿Conclusión?*

2. Construya en $\mathbb{R}$ un conjunto numerable y compacto con un número infinito de puntos de acumulación.

   Sugerencia. *El ejemplo sencillo de un conjunto infinito compacto en $\mathbb{R}$ es $C = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto tiene un solo punto de acumulación en cero. Si construimos $C_1 = C \cup (1+C)$, obtenemos un conjunto con dos puntos de acumulación. Sigue así...*

3. Construya una cubierta abierta del intervalo $[0,1)$ que no tenga ninguna subcubierta finita.

   Sugerencia. *Agregando el punto 1 al intervalo $[0,1)$ obtenemos un conjunto compacto, y según el Teorema de Borel cada cubierta abierta de un compacto tiene una subcubierta finita. Construyendo una cubierta con las propiedades deseadas tenemos que aprovechar la falta del punto 1 en nuestro conjunto. Sean $[0,1) \ni x_n \nearrow 1$ y $O_n = [0, x_n)$. ¿Que tiene que ver esta familia de conjuntos con nuestro problema?*

4. Demuestre que el producto cartesiano de dos conjuntos totalmente acotados es totalmente acotado. Use esto último para probar que un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado.

   Sugerencia. *En el producto cartesiano de los espacios (X, d_X), (Y, d_Y) usamos la métrica*

$$d((x,y),(u,v)) = d_X(x,u) + d_Y(y,v).$$

   Si para $\varepsilon >$ dado, tenemos que $X = \sum_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon/2)$, $Y = \sum_{k=1}^{m} B(y_k, \varepsilon/2)$, demuestre que

$$\{(x_j, y_k) : \, 1 \le j \le n, \, 1 \le k \le m\}$$

   es una ε-red para el producto $X \times Y$. Extiende este resultado a un producto $X_1 \times \cdots \times X_n$. En el caso de un subconjunto A acotado en $\mathbb{R}^n$ aproveche el hecho de que A es un subconjunto de un producto que tiene la forma $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, recordando también que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

5. Demuestre que la relación $\sim$ definida en la sección 4 entre las normas en un espacio vectorial E es una relación de equivalencia.

   Sugerencia. *La relación $\sim$ entre dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ se tiene cuando existen constantes A, $B > 0$ tales que para $x \in E$ cualquiera*

$$A\|x\| \le \|x\|' \le B\|x\|.$$

   A primera vista se puede dudar si esta relación es simétrica. Sin embargo, si se cumplen las dos igualdades, tenemos también que

$$\frac{1}{B}\|x\|' \le \|x\| \le \frac{1}{A}\|x\|',$$

   entonces la simetría sí tiene lugar. La transitividad también se demuestra facilmente.

6. Demuestre que en cada espacio normado $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ una sucesión $\mathfrak{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nk})$ converge si y sólo si para cada j la sucesión numérica $(b_n) = (a_{nj})$ converge.

   Sugerencia. *El Teorema 7.23 afirma que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes. La equivalencia de las normas significa que una sucesión convergente en una norma sigue siendo convergente en cualquier otra norma. Por lo tanto es suficiente demostrar el hecho que nos interesa utilizando la norma más conveniente. Use la norma euclidiana.*

7. Demuestre que cada subespacio vectorial en un espacio normado de dimensión finita es cerrado.

   Sugerencia. *Por el Teorema 7.26 sabemos que cada operador lineal entre dos espacios normados de dimensión finita es continuo. Si E es un espacio normado de dimensión n y $F \subset E$ es un subespacio vectorial de dimensión k, podemos construir el espacio cociente E/F el cual tiene dimensión $n-k$. Por la misma definición del espacio cociente existe el operador lineal $A\colon E \to F$, cuyo kernel es exactamenye el espacio F. Este operador es continuo, por lo tanto $F = A^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado como imagen inversa de un conjunto cerrado bajo una aplicación continua. Si esta demostración le parece demasiado complicada puede buscar otra. Hay muchas formas de demostrar este hecho.*

8. Sean $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ espacios normados y $A\colon E \to F$ un operador lineal. Demuestre que, si E es de dimensión finita, entonces A es continuo.

   Sugerencia. *Este hecho está probado como el Teorema 7.26 en el caso cuando ambos espacios son de dimensión finita. Sin embargo, incluso cuando $\dim F = \infty$, el subespacio $F' = A(E) \subset F$ es un espacio normado de dimensión finita. Aplique el Teorema 7.26 al operador A tratado como operador de E en F'.*

9. ♦ Demuestre que para cada conjunto A totalmente acotado en un espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ la cáscara convexa $\operatorname{conv}(A)$ es también totalmente acotada.

   Solución. En Proposición 1.22 hemos obtenido la descripción de la cáscara $\operatorname{conv}(A)$ como del conjunto combinaciones convexas de elementos de A, es decir vectores de forma: $\sum_{j=1}^{k} t_j a_j$, donde $\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$ y además los coeficientes t_j son no negativos.

   Si A es un conjunto acotado, entonces $\operatorname{conv}(A)$ es también acotado, pues si suponemos que $\|a\| \leq C$ para todo $a \in A$ obtenemos que

$$\|\sum_{j=1}^{k} t_j a_j\| \leq \sum_{j=1}^{k} t_j \|a_j\| \leq \sum_{j=1}^{k} t_j C = C.$$

Por la definición de un conjunto acotado (resp. totalmente acotado) se observa que si $A \subset E_1 \subset E$ donde A es un subconjunto acotado (resp. totalmente acotado) en E_1, entonces es A también acotado (totalmente acotado) en E. En un espacio normado de dimensión finita un conjunto es totalmente acotado si y sólo si es acotado. Un conjunto finito en un espacio normado tiene cáscara convexa totalmente acotada. En efecto, para un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_N\} \subset E$, la cáscara convexa $\mathrm{conv}(\{a_1, \ldots, a_N\})$ pertenece al subespacio de domensión finita $E_1 \subset E$ generado por estos vectores y en este espacio su cáscara es totalmente acotada. Pero esto implica que la cáscara es totalmente acotada también como subconjunto de E.

Volvamos al caso general de un conjunto A totalmente acotado en un espacio normado E. Para $\varepsilon > 0$, sea $R = \{a_1, \ldots, a_N\}$ una ε-red de elementos de A. El conjunto $\mathrm{conv}(R)$ es totalmente acotado en E y existe una ε-red $\{x_1, \ldots, x_M\}$ de $\mathrm{conv}(R)$. Vamos a probar que el mismo conjunto $\{x_1, \ldots, x_M\}$ es una 2ε-red para A. Sea $u = \sum_{j=1}^{k} t_j u_j \in \mathrm{conv}(A)$. Para cada j existe $a_{i_j} \in R$ tal que $\|a_{i_j} - u_j\| < \varepsilon$. Sea $a = \sum_{j=1}^{k} t_j a_{i_j}$. Tenemos entonces un elemento $a \in \mathrm{conv}(R)$ que satisface

$$\|u - a\| = \|\sum_{j=1}^{k} t_j (u_j - a_{i_j}\| \leq \sum_{j=1}^{k} t_j \|u_j - a_{i_j}\| \leq \sum_{j=1}^{k} t_j \varepsilon = \varepsilon.$$

Por otro lado existe $x_m \in R$ tal que $\|a - x_m\| < \varepsilon$. Por consiguiente

$$\|u - x_m\| \leq \|u - a\| + \|a - x_m\| < 2\varepsilon.$$

Hemos probado que para cada ε existen $\{x_1, \ldots, x_M\} \subset \mathrm{conv}(A)$ tales que

$$\mathrm{conv}(A) \subset \bigcup_{m=1}^{M} B(x_m, 2\varepsilon).$$

Por lo tanto, la cáscara $\mathrm{conv}(A)$ es totalmente acotada.

10. ♦ Sea A un conjunto compacto en un espacio de Banach E. Demuestre que $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ es un conjunto compacto.

Solución. Por el Corolario 7.11 en un espacio completo cada conjunto cerrado y totalmente acotado es compacto. En el problema anterior hemos probado que $\mathrm{conv}(A)$ es un conjunto totalmente acotado. Para probar que su cerradura es compacta basta observar que la cerradura de un conjunto totalmente acotado sigue siendo totalmente acotada.

11. ♦ Supongamos que en el espacio métrico X cada subconjunto infinito tiene un punto de acumulación. Demuestre que X es compacto.

    Solución. Sean (x_n) una sucesión en X y $Y = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Si este conjunto es finito, la sucesión contiene una subsucesión constante que obviamente es convergente en X. Si el conjunto Y es infinito, existe por nuestra suposición $x \in X$ que es un punto de acumulación de Y. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_{n_k} \neq x$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. La subsucesión (x_{n_k}) converge a x. El espacio X es compacto.

12. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $\phi\colon X \to Y$ se llama *abierta* si para todo conjunto $O \subset X$ su imagen $\phi(O)$ es abierta. Demuestre que cada función continua y abierta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona.

    Sugerencia. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función abierta, continua y no monótona. Una función abierta no puede ser constante. Supongamos que para algunos x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x) < f(y)$. Si para algún $z > y$ tenemos $f(z) < f(y)$, la función alcanza en el intervalo $[x, z]$ su máximo M que es mayor que $f(x)$ y $f(z)$. ¿Es abierto el conjunto $f((x, z))$? Así la contradicción obtenida demuestra que la función es monótona creciente. Si en principio tenemos que $x < y$ con $f(x) > f(y)$, en forma análoga probamos que f es monótona decreciente.*

Espacios conexos

1. Sea E un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus E$ es disconexo.

    Sugerencia. *Consideramos el espacio $\mathbb{R}^n$ con su estructura natural euclidiana. Cada subespacio vectorial E es cerrado y la proyección natural $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E$ es continua. Si $\dim E = n - 1$ se tiene que $\dim \mathbb{R}^n/E = 1$ y $p(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ que es un conjunto disconexo. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus E$ es disconexo, puesto que las aplicaciones continuas conservan la conexidad de conjuntos.*

2. Demuestre que un espacio métrico X es conexo si y sólo si para cada par de puntos x, $y \in X$ existe un conjunto conexo $C \subset X$ tal que x, $y \in C$.

    Sugerencia. *Si el espacio es conexo, obviamente cumple esta condición con $C = X$ para cualquier par de puntos x, $y \in X$. Para probar la implicación inversa supongamos que un espacio X que cumple dicha condición es disconexo con la descomposición $X = O_1 \cup O_2$ en dos conjuntoa abiertos, disjuntos no triviales. Toma $x \in O_1$, $y \in O_2$ y sea C el conjunto conexo que contiene a ambos puntos. Su descomposición $C = (O_1 \cap C) \cup (O_2 \cap C)$*

contradice la conexidad de C, entonces X tiene que ser conexo.

3. Sea $C \subset X$ un conjunto conexo en un espacio métrico. Demuestre que $\overline{C}$ es conexo.

   Sugerencia. *Supongamos que $\overline{C}$ es disconexo y que $\overline{C} = O_1 \cup O_2$, donde O_1, O_2 son abiertos en $\overline{C}$ y no vacíos. Sean $\tilde{O}_i = O_i \cap C$, $i = 1, 2$, los conjuntos $\tilde{O}_i$ son abiertos. ¿Es posible que uno de ellos sea vacío ?. Luego la contradicción está lista.*
4. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X. Supongamos que para cada par α_1, $\alpha_2 \in \Delta$ se cumple $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Demuestre que $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ es conjunto conexo.

   Sugerencia. *Supongamos nuevamente que el conjunto $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ es disconexo y se descompone en $O_1 \cup O_2$ con O_i, $i = 1, 2$ abiertos disjuntos, no vacíos. Observe que por la conexidad de cada componente, para cada $\alpha \in \Delta$ el conjunto A_α esta en O_1 o está en O_2. Ahora es fácil encontrar la contradicción con el hecho de que $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \neq \emptyset$ para cada par α_1, $\alpha_2 \in \Delta$.*

5. Sea $f\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ una función continua. Supongamos que

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

   Demuestre que f es suprayectiva.

   Sugerencia. *El eje real es conexo y la función f es continua, entonces $f(\mathbb{R})$ es un subconjunto conexo en $(-1, 1)$. Todos los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ tienen la forma de un intervalo. Encuentre los extremos del intervalo $f(\mathbb{R})$.*

6. ♦ Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2\}$. Sea

   $$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{si } xy > 0, \\ |x| + |y| - 2, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

   Demostrar que el espacio (A, d) es conexo.

   Solución. El conjunto A es la unión de los intervalos:

   $$A = [-2, -1] \cup (1, 2].$$

   Dentro de cada intervalo la métrica coincide con la métrica natural de $\mathbb{R}$, entonces ambos intervalos con la métrica d son conexos. Si O_1, O_2 son conjuntos abiertos y $A = O_1 \cup O_2$, las intersecciones $U_i = O_i \cap [-2, -1]$,

$i = 1, 2$ son conjuntos abiertos en $[-2, -1]$ y $U_1 \cup U_2 = [-2, -1]$, entonces por la conexidad del intervalo uno de los conjuntos, digamos U_2 es vacío. Por lo tanto $[-2, -1] \subset O_1$ y $O_2 \subset (1, 2]$. La bola centrada en -1 y de radio r en A es igual a $(-1-r, -1] \cup (1, 1+r)$. El conjunto O_1 es abierto en A entonces contiene un intervalo $(1, 1+r)$ para algún $r > 0$. Así obtenemos que $(1, 2] = (O_1 \cap (1, 2]) \cup O_2$ y sabemos que $O_1 \cap (1, 2] \neq \emptyset$. Por lo tanto $O_2 = \emptyset$. Luego el espacio A es conexo.

7. Demuestre que el conjunto

$$S = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z > 0\}$$

es conexo.

Sugerencia. *Hay muchas formas de demostrarlo. La semiesfera es una unión de "meridianos" que se intersectan en el "polo norte".*

8. ⧫ Demostrar que en $\mathbb{R}^n$ cada conjunto abierto y conexo es conexo por arcos.

Solución. Sean $O \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo y $x_0 \in O$. Denotamos por D el conjunto de puntos de O que se pueden unir con x_0 por medio de una curva continua:

$$D = \{x \in O : \exists \; \gamma_x \in C([0, 1], O), \; \gamma_x(0) = x_0, \; \gamma_x(1) = x\}.$$

Para $x \in D$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset O$, pues O es abierto. Dado $y \in B(x, r)$, construimos una curva que una x_0 con y de la siguiente manera:

$$\gamma_y(t) = \begin{cases} \gamma_x(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \\ (2 - 2t)x + (2t - 1)y, & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Esta curva es continua, ya que en cada uno de intervalos es continua y el final del primer tramo coincide con el inicio del segundo. De tal manera vemos que si $x \in D$, entonces $B(x, r) \subset D$. Hemos probado que el conjunto D es abierto. Ahora supongamos que existe $y_0 \in O \setminus D$. Nuevamente podemos encontrar $r' > 0$ tal que $B(y_0, r') \subset O$. Si $y \in B(y_0, r')$ y $y \in D$, entonces de la misma manera como arriba podemos unir y_0 con x_0 usando primero la curva γ desde x_0 hasta y y el segmento lineal que une y con y_0. Esto es una contradicción, la cual demuestra que $B(y_0, r') \subset O \setminus D$. Por lo que $O \setminus D$ es también un conjunto abierto. Sin embargo, O es conexo, y como $D \neq \emptyset$ obtenemos que $D = O$, lo cual termina la demostración.

9. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}$ con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x-y \in \mathbb{Q}, \\ \\ 2, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Sugerencia. *Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ es abierto y cerrado en el espacio $(\mathbb{R}, d)$. Para este fin describe $B(x,1)$ cuando $x \in \mathbb{Q}$ y cuando $x \in \mathbb{Q}^c$.*

10. Investigue la conexidad del espacio $\mathbb{R}^2$ con la métrica

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & y_1 = y_2, \\ \\ |x_1| + |x_2| + |y_1 - y_2|, & y_1 \neq y_2. \end{cases}$$

Sugerencia. *Se trata de la "métrica del bosque". Acuerdese de su interpretación geométrica y demuestre que este espacio es conexo por arcos.*

11. Sea X un espacio métrico y para x, y, $z \in X$ sean γ_1, $\gamma_2 \in C([0,1], X)$ curvas continuas tales que $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$, $\gamma_2(1) = z$. Construya una curva continua γ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = z$.

Sugerencia. *Aproveche la constructión usada en la demostración anterior.*

12. Un espacio métrico se llama *localmente conexo* si cada punto del espacio tiene una vecindad conexa. Demuestre que cada espacio conexo y localmente conexo es conexo por arcos.

Sugerencia. *Observe que la demostración del Problema 7 de esta sección usa exactamente la conexidad local del espacio $\mathbb{R}^n$, entonces se adapta perfectamente al caso general.*

13. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto tal que $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, y $\text{Int}(A^c) \neq \emptyset$. Si $a \in \text{Int}(A)$ y $b \in \text{Int}(A^c)$, demuestre que cada curva continua que une a con b se intersecta con la frontera de A.

Sugerencia. *Supongamos lo contrario. Recuerde que*

$$X = \overset{\circ}{A} \cup \text{Int}(A) \cup \text{Int}(A^c).$$

Si una curva continua $c\colon [a,b] \to X$ une un punto $x \in \text{Int}(A)$ con $y \in \text{Int}(A^c)$ y no se intersecta con la frontera $\overset{\circ}{A}$ podemos descomponer el intervalo $[a,b]$ en $O_1 = \{t \in [a,b] : c(t) \in \text{Int}(A)\}$ y $O_2 = \{t \in [a,b] : c(t) \in \text{Int}(A^c)\}$. Lo cual es una contradicción. ¿Por qué?.

14. Sea A un conjunto conexo en un espacio métrico. ¿Es conexo el conjunto $\mathrm{Int}(A)$?

Sugerencia. *Considere el conjunto*

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+1)^2+t^2\leq 1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+t^2\leq 1\}.$$

15. Sea $C\subset\mathbb{R}^2$ un conjunto numerable. ¿Es conexo el conjunto $\mathbb{R}^2\setminus C$?

Sugerencia. *Tome en cuenta dos ejemplos:*

$$A=\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2 \quad y \quad B=\mathbb{R}\setminus\{(\frac{1}{n},0) : n\in\mathbb{N}\}.$$

Demuestre que A es disconexo y que B es conexo.

16. ♦ Investigue la conexidad del conjunto

$$A=(\mathbb{Q}^c\times\mathbb{Q})\cup(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}^c)\subset\mathbb{R}^2.$$

Solución. La diagonal $\Delta=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$ que no se intersecta con A. Su complemento es un conjunto abierto y disconexo con la descomposición $\Delta^c=D_1\cup D_2$, donde

$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y\} \quad \text{y} \quad D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>y\}.$$

Así obtenemos que $A=(A\cap D_1)\cup(A\cap D_2)$, la cual es una descomposición en partes abiertas, no vacías. Por lo tanto el conjunto A no es conexo.

17. ♦ Investigue la conexidad del conjunto

$$B= \quad (\mathbb{Q}^c\times\mathbb{Q}^c)\cup(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}^2.$$

Solución. Supongamos que $B=O_1\cup O_2$, donde O_i, $i=1,2$ es abierto en B, no vacío. El conjunto $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}^2$, entonces es denso en B. Los conjuntos $O_i\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$, $i=1,2$ son no vacíos. Sean

$$\mathbf{a}=(x,y)\in O_1\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}) \quad \text{y} \quad \mathbf{b}=(s,t)\in O_2\cap(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}).$$

El segmento en $\mathbb{R}^2$ que une los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tiene la forma

$$I(t)=(tx+(1-t)u, ty+(1-t)v), \quad \text{donde } t\in[0,1].$$

Las coordenadas x, y, u, v son racionales entonces para $t\in\mathbb{Q}$ tenemos $I(t)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\subset B$ y para $t\in\mathbb{Q}^c\times\mathbb{Q}^c$ se cumple $I(t)\in\mathbb{Q}^c\times\mathbb{Q}^c\in B$. El segmento está totalmente contenido en B. Considerando

$$T_i=\{t\in[0,1] : I(t)\in O_1\}, \quad i=1,2$$

obtenemos la descomposición del intervalo $[0,1]$ en dos conjuntos no vacíos, abiertos lo cual es una contradicción, pues el intervalo es conexo. La contardicción demuestra que el conjunto B es conexo.

Teorema de Ascoli

1. Sean X, Y espacios métricos. Para cada $x \in X$ definimos la aplicación $\delta_x \colon BC(X,Y) \to Y$ por $\delta_x(f) = f(x)$.
   a. Demuestre que δ_x es una aplicación continua.
   b. Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en $x_0 \in X$ si y sólo si la aplicación
   $$X \ni x \to \delta_x|_{\mathcal{F}} \in BC(\mathcal{F}, Y)$$
   es continua en x_0.
   c. Muestre que si $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua, entonces dicha aplicación es uniformemente continua.

   Sugerencia.
   a. La convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

   b. Directo por la definición escribimos que significa que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en $x_0 \in X$:
   $$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, f \in \mathcal{F},\; d_X(y, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(y), f(x_0)) < \varepsilon.$$
   Ahora afirmamos en forma explícita que la aplicación $X \ni x \to \delta_x|_{\mathcal{F}} \in BC(\mathcal{F}, Y)$ es continua en x_0:
   $$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, d_X(y, x_0) < \delta\; \sup_{f \in \mathcal{F}} d_Y(f(y), f(x_0)) < \varepsilon.$$
   ¿Acaso no es lo mismo?

   c. En ambos casos agregando el adjetivo “uniformemente” *decimos que la misma $\delta > 0$ sirve para todo x_0.*

2. ♦ Sea $\mathcal{F} \subset BC(X,Y)$ una familia equicontinua. Sea
   $$U = \{x \in X : \{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \text{ es totalmente acotado}\}.$$
   Muestre que U es un conjunto abierto y cerrado en X. Supongamos que $U \neq \emptyset$. Muestre que para X compacto y conexo, la familia $\mathcal{F}$ es totalmente acotada.

   Solución. Dado $x \in U$, existe una $\frac{\varepsilon}{3}$ red del conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$, la cual tiene la forma $\{f_j(x) : 1 \le j \le N\}$, donde $f_j \in \mathcal{F}$. Ahora, la equicontinuidad de la familia $\mathcal{F}$ en el punto x significa que existe $\delta > 0$ tal que $d_X(x,y) < \delta$ implica que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ para cualquier $f \in \mathcal{F}$. Sean $f \in \mathcal{F}$ y $j \in \mathbb{N}$ tal que $d_Y(f(x), f_j(x)) < \varepsilon$. Así obtenemos que:

$$d_Y(f(y), f_j(y)) \leq d_Y(f(y), f(x)) + d_Y(f(x), f_j(x)) + d_Y(f_j(x), f_j(y)) < \varepsilon.$$

De esta manera hemos probado que, si $x \in U$ y $d_X(x, y) < \delta$, entonces $y \in U$, es decir el conjunto U es abierto. Ahora vamos a ver que U es cerrado, pues su complemento es abierto. Dado $v \in U^c$, existe un $\varepsilon > 0$ para el cual el conjunto $\{f(v) : f \in \mathcal{F}\}$ no tiene ninguna ε - red. Sin embargo la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en el punto v y existe $r > 0$ tal que $d_Y(v, u) < r$ implica que $d_Y(f(v), f(u)) < \varepsilon/3$, $f \in \mathcal{F}$. Si el conjunto $\{f(u) : f \in \mathcal{F}\}$ tuviera una $\varepsilon/3$ - red, por el mismo cálculo que hicimos arriba, tuvieramos una ε red en v, que es una contradicción. Así, hemos probado que U^c es abierto y que U es cerrado. Suponiendo que el conjunto X es conexo y $U \neq \emptyset$, obtenemos que $U = X$. Si además X es compacto, por el Teorema 9.4 la familia es uniformemente continua y así la Proposición 9.9 afirma que $\mathcal{F}$ es una familia totalmente acotada.

3. Sean V un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}$ y $k(\cdot, \cdot) \in BC(\overline{V} \times \overline{V})$. Denotamos por K al operador integral definido sobre $CB(\overline{V})$ por:

$$Kf(x) = \int_{\overline{V}} k(x, y) f(y) dy.$$

Demuestre que $K(B(0, 1))$ es un conjunto totalmente acotado en $CB(U)$.

Sugerencia. *Observe que es conveniente aplicar la Proposición 9.9 a la familia $\mathcal{F} = K(B(0, 1))$. La parte esencial de la demostración es verificar que la familia es equicontinua. La función $k(\cdot, \cdot)$ es continua en un dominio compacto entonces es uniformemente continua. Sea $\delta > 0$ tal que*

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |k(x, y) - k(u, v)| < \varepsilon.$$

Calculamos para $f \in K(B(0, 1))$:

$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(u)| &= \left| \int_{\overline{V}} (k(x, y) - k(u, y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\overline{V}} |k(x, y) - k(u, y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\overline{V}} dy, \end{aligned}$$

cuando $|x - u| < \delta$. Por lo tanto la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.

4. Sea $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Utilizando Teorema de Ascoli describe los conjuntos compactos en $BC(X)$.

Sugerencia. *El espacio X tiene un solo punto que no es aislado y cada elemento $f \in C(X)$ se puede identificar con una sucesión convergente*

$a_n = f(\frac{1}{n})$ tal que $f(0) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Cada familia de funciones $\mathcal{F}$ es equicontinua en los puntos aislados, entonces la equicontinuidad uniforme es asegurada si $\mathcal{F}$ es equicontinua en cero. Por Teorema de Ascoli la familia $\mathcal{F}$ es compacta si y sólo si es cerrada, acotada y equicontinua en cero.

5. Para $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ demuestre que el conjunto

$$\{f \in C(X) : |f(x)| \leq |x|\}$$

es compacto.

Sugerencia. *Use el resultado del ejercicio anterior.*

Teorema de Stone-Weierstrass

1. Encuentre una subálgebra de $C_\infty(\mathbb{R})$ que separe los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyos elementos se anulen en cero.

Sugerencia. *El espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ consta de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. Sea*

$$\mathcal{A} = \{p(x)e^{-ax^2} : p \ - \ \text{un polinomio}, \quad a > 0\}.$$

El espacio $\mathcal{A}$ es un álgebra. La funciíon xe^{-ax^2} es impar entonces separa los puntos de signos diferentes y separa cero de los demás puntos. Es suficiente probar que cada par de dos puntos positivos se puede separar por un elemento de $\mathcal{A}$. Solo queda por probar que para $x \neq y$ positivos existe un polinomio p tal que $p(x)e^{-ax^2} \neq p(y)e^{-ay^2}$.

2. Demuestre que el espacio vectorial de las funciones $p(x)e^{-a^2x^2}$, donde p es un polinomio y $a \in \mathbb{R}$ es un número fijo, es denso en $C_\infty(\mathbb{R})$.

Sugerencia. *Utilize el resultado del ejercicio anterior y el Teorema 10.11.*

3. Sea $f \in C[a,b]$. Demuestre que si para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ se tiene que $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$, entonces $f = 0$.

Sugerencia. *Por el Teorema de Weierstrass existe una sucesión de polinomios $p_n \to f$ uniformemente. Por lo tanto $p_n f \to f^2$ también uniformemente. La suposicion implica que para cada polinomio $\int_a^b p_n(x)f(x)dx = 0$. ¿Entonces?*

4. Una función f sobre $\mathbb{R}$ se dice periodica con periodo a si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x+a) = f(x)$. Demueste que cada función continua periodica con periodo 2π se puede aproximar uniformemente por combinaciones lineales de las funciones 1, $\operatorname{sen} nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$.

   Sugerencia. *Sea $\mathcal{P}$ el espacio de las funciones complejas, continuas y periodicas de periodo 2π sobre $\mathbb{R}$. A cada $f \in \mathcal{P}$ le corresponde una única función $\tilde{f}$ sobre la circunferencia unitaria $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ dada por la fórmula $\tilde{f}(e^{ix}) = f(x)$. La operación $\mathcal{P} \ni f \to \tilde{f} \in C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ es un homomorfismo de álgebras. Observa que esta aplicación es biyectiva. Además $\sup_{|z|=1} |\tilde{f}(z)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ entonces se trata de un isomorfismo isométrico de álgebras.*

   El espacio $C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ es un álgebra compleja completa con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\mathcal{A}$ el espacio vectorial de combinaciones lineales de funciones sobre $\mathbb{S}$ de la forma $e_n(z) = z^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. El espacio $\mathcal{A}$ contiene a las funciones constantes, separa los puntos de $\mathbb{S}$ y es cerrada con respecto a la conjugación compleja, pues $\overline{e_n} = e_{-n}$.. Por el Teorema de Stone-Weierstrass en su versión compleja, el álgebra $\mathcal{A}$ es densa en $C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$. Por lo tanto cada función $\tilde{f} \in C(\mathbb{S}, \mathbb{C})$ se puede aproximar uniformemente por funciones de la forma

   $$g = a_{-k}e_{-k} + a_{-k+1}e_{-k+1} + \cdots + a_{-1}e_{-1} + a_0 + a_1e_1 + \cdots + a_me_m.$$

   Así por la fórmula de De Moivre $e_n(e^{ix}) = e^{inx} = \cos nx + i\operatorname{sen} nx$, obtenemos que

   $$g(e^{ix}) = \sum_{-k \le n \le m} a_n(\cos nx + i\operatorname{sen} nx).$$

   La aplicación $f \to \tilde{f}$ es una isometría, entonces $\|g - \tilde{f}\|_\infty < \varepsilon$ implica que

   $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{-k \le n \le m} a_n(\cos nx + i\operatorname{sen} nx \right| < \varepsilon.$$

5. Demuestre que cada función periódica continua es acotada e uniformemente continua.

   Sugerencia. *Utilize la aplicación $f \to \tilde{f}$ definida en la sugerencia anterior.*

6. Demuestre que cada función continua sobre el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ se puede aproximar uniformemente por funciones de la forma $P(z, \overline{z})$, donde P es un polinomio de dos variables.

   Sugerencia. *Solo queda probar que el conjunto de funciones de esta forma es un álgebra que satisface las suposiciones de el Teorema 10.6.*

7. Demuestre que los polinomios de forma $P(z)$ no son densos en $C(\overline{\mathbb{D}})$.

   Sugerencia. *Busque un funcional lineal continuo que no es nulo sobre el espacio $CB(\overline{\mathbb{D}})$ pero se anula sobre las funciones z^n, $n = 1, 2, \ldots$.*

8. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es separable.

   Sugerencia. *Aproveche el hecho probado en Ejercicio 2 de esta sección y siga las ideas de la demostración del Teorema 10.7.*

9. Formule y demuestre las versiones complejas de los teoremas de la última sección.

   Sugerencia. La formulación es la siguiente

   Teorema 11.1 *Sea (K, d) un espacio métrico compacto. El espacio $C(K, \mathbb{C})$ es separable.*

   Cada función $f \in C(K, \mathbb{C})$ se puede representar como $f = f_1 + if_2$, donde $f_1, f_2 \in C(K)$. Sabemos que el espacio $C(K)$ es separable. Si $C \subset C(K)$ es un subconjunto numerable y denso, entonces $C + iC$ es denso en $C(K, \mathbb{C})$ y obviamente es numerable.

   El mismo argumento funciona para demostrar las versiones complejas de los Teoremas 10.8 y 10.11.

10. Sean X, Y espacios métricos compactos y $\mathcal{A}$ el conjunto de funciones sobre $X \times Y$ de la forma
$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\psi_i(y),$$
donde $\psi_i \in C(X)$, $\psi_i \in C(Y)$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es denso en $C(x \times Y)$.

    Sugerencia. *Se trata de una aplicación directa del Teorema de Stone-Weierstrass. Esta familia de funciones es una álgebra, contiene a la función 1. Es suficiente demostrar que la familia separa los puntos del producto $X \times Y$. Para este fin, dados $(x, y) \neq (u, v)$ tenemos $x \neq u$ ó $u \neq v$ entonces es suficiente aprovechar el hecho de que $C(X)$ y $C(Y)$ separan los puntos de su dominio.*

11. Demuestre que el espacio $C_\infty(\mathbb{R})$ es cerrado en $BC(\mathbb{R})$.

    Sugerencia. *Si $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$ y $f_n \to f$, entonces la función f es continua y acotada, pues $BC(\mathbb{R})$ es un espacio completo. Queda por probar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Por otro lado existe $y \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\sup_{|x| \geq |y|} |f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

pues $f_n \in C_\infty(\mathbb{R})$*. Falta poco para concluir que*

$$\sup_{|x| \geq |y|} |f(x)| \leq \varepsilon.$$

12. Demuestre el Lema 10.10.

Sugerencia. *La afirmación se deduce de inmediato de la observación de que la aplicación* $\psi\colon B(X) \ni f \to f \circ \phi \in B(Y)$ *es una isometría. En efecto,*

$$\|f \circ \phi\| = \sup_{y \in Y} |f \circ \phi(y)| = \sup_{y \in Y} |f(\phi(x))| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f\|,$$

ya que ϕ *es suprayectiva.*

Observe que si la aplicación ψ *no es suprayectiva, entonces no tiene que ser isométrica, sin embargo por la misma estimación* $\|f \circ \phi\| \leq \|f\|$*, entonces la convergencia uniforme en* $B(X)$ *implica que la convergencia uniforme en* $B(Y)$*.*

13. Demuestre que para cada espacio σ-compacto X, la función $D(\cdot, \cdot)$ definida al final del capítulo es una métrica en el espacio $C(X)$ y que la convergencia en esta métrica coincide con la convergencia casi uniforme.

Sugerencia. *Sea* $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$*, donde la familia* $\{K_n\}$ *es creciente y consta de conjuntos compactos. En la solución de ejercicio 5 del Capítulo 3 hemos probado que la métrica*

$$\|f - g\|_n = \sup_{x \in K_n} |f(x) - g(x)|$$

sobre $C(K_n)$ *es equivalente a la métrica*

$$\frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}.$$

Cada suma finita $\displaystyle\sum_{n<N} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}$ *satisface la desigualdad del triángulo y pasando al límite* $N \to \infty$ *se concluye que* $D(f, g)$ *satisface también la desigualdad del triángulo.*

Si dos funciones continuas f *y* g *satisfacen que* $D(f, g) = 0$ *se sigue que* $f|_{K_n} = g|_{K_n}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. La simetría de la función* D *es obvia, así que* D *es una métrica.*

La condición $D(f_n, f) \to 0$, equivale a que $\|f_n - f\|_n \to 0$ para cada n, que es exactamente la convergencia casi uniforme de la sucesión (f_n) a f.

14. ♦ Formule y demuestre la versión vectorial del Teorema de Weierstrass para el espacio $C(K, \mathbb{R}^m)$, donde K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y finalmente $f = g$.

Solución. Cada función continua sobre K valuada en $\mathbb{R}^m$ tiene la forma $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, donde las funciones f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ son continuas. Por el teorema de Weierstrass clásico para cada $\varepsilon > 0$ y $1 \leq j \leq m$ existen polinomios p_j de grado r_j tales que

$$\sup_{x \in K} |f_j(x) - p_j(x)| < \varepsilon.$$

Sea $r = \text{máx}\{r_1, \ldots, r_j\}$. Cada uno de los polinomios p_j se puede representar por

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{r} a_{jk} x^k,$$

donde los coeficientes a_{jk} son números reales. Sean $\mathfrak{a}_k = (a_{1k}, \ldots, a_{mk}) \in \mathbb{R}^m$ y $\mathfrak{p}$ la función valuada en $\mathbb{R}^m$ dada por

$$\mathfrak{p}(x) = \sum_{k=0}^{r} \mathfrak{a}_k x^k.$$

A una función de esta forma, la llamamos polinomio con coeficientes vectoriales. Así obtenemos la siguiente estimación.

$$\|F - \mathfrak{p}\|_\infty = \sup_{x \in K} \|F(x) - \mathfrak{p}\| = \sup_{x \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} (f_j(x) - p_j(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq m^{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Luego hemos probado el siguiente teorema.

Teorema de Weierstrass vectorial.
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Cada aplicación $F \in C(K, \mathbb{R})$ puede aproximarse por polinomios de valores vectoriales uniformemente sobre K.

Referencias

[B] R. G. Bartle, The elements of real analysis, J. Wiley, 1964.

[Br] H. Brezis, Análisis funcional. Teoría y aplicaciones, Alianza Ed., 1984.

[G] F. Galaz Fontes, Introducción al análisis matemático, UAM - Iztapalapa, (1992)

[JW] J. M. Jedrzejewski, W. Wilczyński, Przestrzenie metruczne w zadaniach, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 1999.

[KF] A. Kolmogorov, S. Fomin, Introductory real analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.

[E] R. Engelking, General Topology, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[PS] W. Pusz, A. Strasburger, Zbiór zadań z analizy matematycznej, Uniwersytet Warszawski, 1982.

[R] H. L. Royden, Real analysis, Macmillan, 1963.

[Ru] W. Rudin, Principios de análisis Matemático, Mc Graw-Hill, 1966.

[S] A. Sołtysiak, Analiza Matematyczna, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2000.

[So] A. Sołtysiak, Notas, Información privada.

[St] K. R. Stromberg, An introduction to classical real analysis, Wadswort Inc. Belmont, 1981.

[T] V. Tkachuk, Curso básico de topología general, Ed. UAM Iztapalapa, 1999.

[WD] A. Wawrzyńczyk, J. Delgado, Introducción al Análisis, Ed. UAM - Iztapalapa, 1993.

[Z] F. Zaldívar, Fundamentos de álgebra, UAM, FCE, 2005.

[Y] K. Yosida, Functional analysis, Springer Verlag, 1968.

Índice alfabético