



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Libro de texto



Indagaciones sobre Mecánica de Fluidos

Alberto Soria López

Indagaciones sobre mecánica de fluidos

*elementos teórico-experimentales para
la integración de aprendizajes*

Alberto Soria López



Casa abierta al tiempo

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Rector General

Dra. Norma Rondero López

Secretaria General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dra. Verónica Medina Bañuelos

Rectora de Unidad

Dr. Javier Rodríguez Lagunas

Secretario de Unidad

Dr. Román Linares Romero

Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Indagaciones sobre mecánica de fluidos. Elementos teórico-experimentales para la integración de aprendizajes

Primera edición: 2024

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

Av. Ferrocarril San Rafael Atlixco, Núm. 186, Col. Leyes de Reforma 1 A Sección, Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09310, Ciudad de México

ISBN Colección: 978-607-28-2107-1

ISBN Volumen: 978-607-28-3175-9

Dedicado a la juventud indagadora, imaginativa, resiliente y solidaria, y con ella, especialmente a

Leonardo,
Diana
y
Althea Yolotzin,

con todo mi cariño.

*Libro de pinturas es tu corazón,
has venido a cantar,
haces resonar tus tambores,
tú eres el cantor.
En el interior de la casa de la primavera,
alegras a las gentes.*

Índice general

I	Contenidos
1	La mecánica de fluidos y los fenómenos de transporte 23
1.1	Introducción 23
1.2	El tratamiento local 25
1.2.1	Principios de conservación y de balance 25
1.2.2	Partícula material de un fluido y sus ecuaciones de balance 30
1.2.3	Relaciones de comportamiento 35
1.2.4	Hidrostática 38
1.2.5	Flujos reptantes y laminares 38
1.2.6	Flujos ideales y potenciales 39
1.2.7	Flujos en la capa límite 40
1.2.8	Surgimiento de la turbulencia 40
1.2.9	Flujos turbulentos 40
1.2.10	Otros flujos importantes 41
1.3	El tratamiento integral 41
1.3.1	Flujos y caudales 41
1.3.2	Balances postulados y balances integrados 43
2	Modelos, su significado y aplicación 47
2.1	Algunos aspectos elementales 47
2.1.1	Observación y descripción 48
2.1.2	Sistemas 50
2.1.3	Atributos y propiedades 50

2.2	Modelos de ajuste de datos experimentales	50
2.2.1	El teorema de los π	51
2.3	Modelos basados en principios físicos	55
2.3.1	Adimensionalización	56
2.4	Flujo laminar estacionario de un fluido newtoniano en un tubo	59
2.4.1	Modelo postulado de flujo de un fluido newtoniano en un tubo	59
2.4.2	Modelo local de flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo	61
2.4.3	Modelo integrado de flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo	63
2.4.4	Relación entre los parámetros f_F y μ	64
3	Procesos de transporte y tiempos característicos	67
3.1	Flujo por cortante entre dos láminas sólidas planas y paralelas	67
3.1.1	El sistema y sus fronteras	67
3.1.2	La configuración de referencia	68
3.1.3	La condición inicial	69
3.1.4	Etapa transitoria inicial	69
3.1.5	Régimen estacionario	71
3.1.6	La etapa transitoria avanzada	72
3.2	Flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo circular	74
3.2.1	El fluido y sus fronteras	74
3.2.2	La configuración de referencia	74
3.2.3	La condición inicial	74
3.2.4	Etapa transitoria inicial	75
3.2.5	Régimen estacionario	76
3.2.6	Etapa transitoria avanzada	76
4	Procesos transitorios sin etapa estacionaria	79
4.1	Introducción	79
4.2	Modelos de la descarga de un tanque	79
4.2.1	Cantidades integrales fundamentales	80
4.2.2	Modelos integrales transitorios	80
4.2.3	Modelos integrales cuasi-estacionarios	83
4.2.4	Flujo a través de un tanque estacionario	85
4.3	Modelo de viscosímetros capilares	87
4.3.1	Similitudes de funcionamiento con la descarga de un tanque	87
4.3.2	Tiempos característicos y modelos cuasi-estacionarios	88
4.3.3	Modelo cuasi-estacionario del viscosímetro de Cannon-Fenske	88
5	Fluidos newtonianos generalizados (FNG)	91
5.1	Los fluidos newtonianos generalizados	91
5.1.1	La función de viscosidad	91
5.2	Flujo transitorio de un fluido de Ostwald sobre una lámina sólida	92
5.2.1	Formulación del problema	92
5.2.2	Método de solución	93
5.2.3	Solución	94

5.3	Estimación de parámetros reológicos de un FNG	96
5.3.1	Estimación de τ_0 y $\dot{\gamma}$	96
5.3.2	Ajuste desde la relación $\{\dot{\gamma}, (\tau - \tau_0)\}$	96
6	Modelos de capa límite y flujo ideal	101
6.1	Flujos ideales	101
6.2	Flujos en la capa límite	102
6.2.1	Ecuaciones de la capa límite de Prandtl	102
6.2.2	Balance de cantidad de movimiento de von Kármán	105
6.3	Soluciones de la teoría de la capa límite	106
6.3.1	Soluciones polinómicas aproximadas	106
6.3.2	Solución de Blasius	107
7	Flujos turbulentos	111
7.1	Descripción fenomenológica	111
7.1.1	Disipación viscosa de los flujos laminares y surgimiento de la turbulencia . . .	111
7.1.2	Variables tiempo-ajustadas y esfuerzos turbulentos	113
7.1.3	Dos modelos simples de los esfuerzos turbulentos	115
7.2	Flujo turbulento en un tubo	117
7.2.1	Ecuaciones de Reynolds	117
7.2.2	Longitud de mezcla de Prandtl	117
7.2.3	Solución cerca de la pared	118
7.2.4	Solución en distancias intermedias	118
7.2.5	Variables escaladas en la velocidad de fricción	118
7.2.6	Magnitudes de los parámetros de los flujos turbulentos	119
7.2.7	Producción de turbulencia y disipación viscosa	119
7.3	Capa límite turbulenta	121
7.3.1	Análisis de la capa límite turbulenta	122
8	Agitación y mezclado	125
8.1	Introducción	125
8.2	Configuración de tanques agitados	126
8.3	Patrones de flujo en tanques agitados	128
8.4	Tiempos característicos del mezclado	129
8.5	Potencia de tanques agitados	130
9	Energía cinética, trabajo y fricción	135
9.1	Fuerzas, potenciales y energía cinética de flujo	135
9.1.1	Balance local del ímpetu	135
9.1.2	Composición de la aceleración	136
9.1.3	Fuerzas conservativas	137
9.1.4	Potencial de Bernoulli	139
9.1.5	La presión modificada como un potencial de fuerza	140
9.1.6	Presión estática y presión dinámica	141

9.2	Fuerzas conservativas, rapidez de trabajo y vector de potencia	142
9.2.1	Rapidez de trabajo mecánico y fuerzas conservativas	142
9.2.2	Vector de potencia local de los esfuerzos moleculares	143
9.2.3	Flujo de potencia local de los esfuerzos moleculares	144
9.3	Disipación del flujo local de potencia de los esfuerzos moleculares	145
9.3.1	Disipación local reversible en procesos con cambios de volumen	146
9.3.2	Disipación viscosa en procesos con deformación	147
9.4	Disipación viscosa de un fluido newtoniano en un tubo	148
9.4.1	Disipación viscosa en un flujo de Hagen-Poiseuille	148
9.4.2	Fuerza cinética en la pared y disipación en el flujo de Hagen Poiseuille	150
9.4.3	Una función llamada factor de fricción de Fanning	151
9.5	Disipación viscosa en los flujos turbulentos	152
9.5.1	Disipación viscosa, esfuerzos en la pared y pérdida de presión	152
9.5.2	Disipación viscosa en accesorios	154
9.6	Coeficientes de rozamiento en una pared plana	156
10	Flujo compresible, cavitación y ariete	157
10.1	Ondas de presión	157
10.1.1	Elasticidad y propagación del sonido en los fluidos	157
10.1.2	Ondas elásticas y golpe de ariete	158
10.1.3	Cavitación	159
10.1.4	Conservación de la energía mecánica	160
10.2	La bomba de ariete	161
10.2.1	Concepto de la bomba de ariete	161
10.2.2	Válvulas de retención	162
10.2.3	Mecanismo de la bomba de ariete	162
10.2.4	Eficiencias de la bomba de ariete	163
10.2.5	Fases del funcionamiento de una bomba de ariete	165
11	Separaciones mecánicas	169
11.1	Separación de mezclas	169
11.1.1	Procesos y operaciones unitarias	169
11.1.2	Mezclas homogéneas y mezclas heterogéneas	171
11.1.3	Principios de separación	171
11.1.4	Separaciones mecánicas	172
11.2	Flujo alrededor de un cuerpo esférico	175
11.2.1	Principios de separación mecánica	175
11.2.2	Planteamiento del prototipo	175
11.2.3	Adimensionalización	176
11.2.4	Flujo reptante alrededor de un sólido esférico	178
11.2.5	Fuerza del fluido sobre el cuerpo esférico	179
11.2.6	Velocidad terminal de un cuerpo esférico	180
11.2.7	Coeficiente de rozamiento con flujo reptante	181
11.2.8	Coeficiente de rozamiento vs. número de Reynolds	182
11.2.9	Flujo potencial alrededor de una esfera	182

11.3	Separación de fases dispersas	184
11.3.1	Dispersiones en dos fases	184
11.3.2	Cinemática de la sedimentación	185
11.3.3	Procesos dinámicos de dispersiones	192

II	Instrumentos
-----------	---------------------

12	Descarga de tanques	199
12.1	Descripción	199
12.2	Operación	200
12.3	Principios físicos del funcionamiento	200
12.4	Algunos objetivos de las experiencias	202
13	Sedimentación por lotes	203
13.1	Descripción	203
13.2	Operación	204
13.3	Principios físicos del funcionamiento	204
13.4	Algunos objetivos de las experiencias	205
14	Viscosímetros capilares	207
14.1	Descripción	207
14.2	Operación	207
14.3	Principios físicos del funcionamiento	208
14.4	Algunos objetivos de las experiencias	209
15	Viscosímetro de Brookfield	211
15.1	Descripción	211
15.2	Operación	211
15.3	Principios físicos del funcionamiento	212
15.3.1	Determinación de la magnitud de los esfuerzos y de la viscosidad efectiva .	214
15.3.2	Preparación de muestras de un FNG	214
15.4	Algunos objetivos de las experiencias	215
16	Tanques agitados	217
16.1	Descripción	217
16.2	Operación	217
16.3	Principios físicos del funcionamiento	218
16.4	Algunos objetivos de las experiencias	220
17	Bombas de ariete	221
17.1	Descripción	221

17.2	Operación	222
17.3	Principios físicos del funcionamiento	223
17.4	Algunos objetivos de las experiencias	225
17.5	Construcción	225
17.5.1	Diseño y operación de bombas de ariete	227
18	Redes de tuberías	231
18.1	Descripción	231
18.2	Operación	232
18.3	Principios físicos del funcionamiento	234
18.4	Algunos objetivos de las experiencias	234

III

Métodos

19	Aprendizaje significativo	237
19.1	Qué es el aprendizaje significativo	237
19.2	Construcción de conocimientos	239
19.3	Mapas conceptuales	240
19.4	Diagramas de flujo	243
20	Modelos y experimentos	245
20.1	Estimados e incertidumbres	245
20.1.1	Magnitud y cantidad	245
20.1.2	Apreciación, estimación y valor verdadero	246
20.1.3	Exactitud, precisión y error	246
20.1.4	Error sistemático y error estocástico	247
20.2	Propagación de errores	247
20.2.1	Incertidumbre menor que la apreciación	247
20.2.2	Incertidumbre mayor que la apreciación	247
20.2.3	Cifras significativas	248
20.2.4	Incertidumbres de cantidades calculadas	249
20.3	Comparación de modelos y experimentos	250
20.3.1	Variables y parámetros del modelo	250
20.3.2	Incertidumbres experimentales y parámetros ajustados	251
20.3.3	Incertidumbres teóricas y parámetros estimados	252
20.3.4	Determinación de parámetros y constantes	252
21	Elaboración de proyectos experimentales	255
21.1	Proyectos para integrar la teoría y la experiencia	255
21.1.1	Repetibilidad	255
21.1.2	Tipos de proyectos experimentales	256
21.1.3	Estructura de un proyecto experimental	256

21.2	Contenido de una propuesta de proyecto	257
21.2.1	Definición e identificación del proyecto	257
21.2.2	Indagatoria experimental	257
21.2.3	Desarrollo teórico	258
21.2.4	Diseño de la experiencia	260
21.2.5	Hoja de datos	261
21.2.6	Materiales adjuntos	262
22	Elaboración de reportes experimentales	263
22.1	Introducción	263
22.1.1	Objetivo del reporte	264
22.2	Sobre la forma de elaborar un reporte experimental	264
22.3	Contenido de un reporte experimental	264
22.3.1	Portada	264
22.3.2	Resumen ejecutivo	264
22.3.3	Índice	265
22.3.4	Objetivos	265
22.3.5	Ecuaciones de trabajo y hoja de datos	265
22.3.6	Realización de experiencias	265
22.3.7	Análisis de datos y resultados	265
22.3.8	Conclusiones y sugerencias	265
22.3.9	Referencias y apéndices	266

Prefacio

El aprendizaje es uno de los aspectos más importantes en la vida de los pueblos. Las maneras de llevarlo a cabo conforman los procesos educativos vigentes en cada cultura. En la actualidad, la incorporación a la vida occidental ejerce una presión hegemónica invisible sobre las manifestaciones culturales de otras civilizaciones que alguna vez fueron autónomas y que actualmente han venido a estar subsumidas en la civilización occidental. Los procesos educativos son una parte importantísima de las manifestaciones culturales sujetas a la mencionada presión hegemónica, de tal manera que, generalmente, no se nos ocurre siquiera preguntarnos si podría haber otras formas de aprender y otros posibles significados de los aprendizajes, posiblemente más armónicos con el gusto por la creación, por el descubrimiento, por el conocimiento y por el disfrute de nuestra realización como seres humanos. Es desde la educación y desde la canalización de los flujos de riqueza, como la civilización occidental va transformando en única, la manera de crear culturas y comprender la vida. Sobre todo, cuando la mayoría de los seres humanos la consideramos como si fuera la única civilización existente, que se contrapone a "la barbarie", nombrando así a todo lo que no es parte de la civilización occidental, mejor dicho, a todo lo que no se comprende desde los cánones dictados por la civilización occidental, acerca de otras formas de conocimiento de las civilizaciones aún existentes en la actualidad. Sin embargo, dicha civilización occidental se ha nutrido y sigue nutriéndose de las civilizaciones originarias, desde sus inicios en la Grecia clásica hasta la actualidad, como puede ser reconocido si cada una de las civilizaciones es apreciada en su originalidad y grandeza¹.

Parece que lentamente nos movemos hacia la construcción de una civilización planetaria, que debería ser generada desde una **"equidad civilizatoria"**, es decir, desde una participación igualitaria y respetuosa de todas las civilizaciones que siguen presentes en el mundo, aprendiendo de cada una de ellas, sus hábitos que más dignifican al ser humano. Para hacer realidad esta equidad civilizatoria, la evolución de una civilización planetaria debería mostrar preferencia por incorporar la diversidad de formas y sentidos del vivir como seres humanos, que se han dado en las tlacanamilistlin originarias², especialmente en aquellas que han sido diezmadas por la crueldad y el exterminio de

¹Por ejemplo James Poskett (2022) describe las influencias de varias civilizaciones en el desarrollo la ciencia.

²Tlacanamilistli es una palabra náhuatl que significa el modo o la forma de vivir como seres humanos, lo cual equivale

los procesos “civilizatorios”, como ha ocurrido principalmente a las tlacanemilistín del Anáhuac, de Abya Yala y de África, desde la invasión europea a nuestro continente de Abyanáhuac³, durante el siglo XVI, y continúa hasta la actualidad con diversos procesos colonizadores.

Con una chispa de esperanza para lograr la equidad civilizatoria podemos ver cómo, aún con cierta ambigüedad, las teorías de la complejidad⁴ van extendiendo el pensamiento científico hacia su encuentro con otros modos de sabiduría que le son accesibles, cuando deja de erigirse soberbiamente en la única medida de toda sabiduría.

Esta reflexión sobre la formación de una civilización planetaria sirve como un marco referencial, que asocia significado y sentido a los cambios que produce el ser humano, estamos viviendo las crisis simultáneas de múltiples procesos de cambios civilizatorios, que requieren la adaptación de las formas de enseñanza-aprendizaje, para responder a múltiples cambios ambientales, tan profundos como los representados por la reciente pandemia. Así, profesores y estudiantes nos incorporamos a esfuerzos de comunicación inesperados, muchas veces intentando convertir procesos informativos en procesos formativos, con muy diversos resultados y muy significativas experiencias. En la universidad, se hace muy importante elegir cuidadosamente y bajo un conjunto de criterios colegiados, los cursos presenciales que mayor formación puedan aportar al estudiantado, para rediseñarlos y aprovechar al máximo las experiencias elegidas para que los grupos realicen verdaderas **transformaciones a comunidades de aprendizaje**. Es en esta dirección en la cual me gustaría que este texto pudiera contribuir, para generar oportunidades de ampliar y profundizar discusiones que conecten los aspectos teóricos con los aspectos experimentales de la mecánica de fluidos, desde y para el estudiantado, en comunidad con los profesores y los técnicos de los laboratorios.

No es posible convertir los procesos informativos en procesos formativos, pues cada uno tiene su propio ámbito y propósito, y más que una transformación entre estos procesos, necesitamos abrir las posibilidades de incorporar la educación virtual en los procesos del intercambio de reflexiones y experiencias, para **transformar la información en conocimiento**, dos términos que algunos usan como sinónimos, inadvertidamente, pero que son radicalmente distintos: la **información** se codifica en la memoria de los sistemas de información y en las bibliotecas, y es necesario aprender claves y estrategias para acceder a ella. Esto configura los procesos informativos. Los **procesos cognitivos**, en cambio, son procesos formativos o educativos, requieren de sujetos mucho más participativos e importantes; requieren de comunidades decididas a transformarse a sí mismas. Los procesos cognitivos transforman a su sujeto, y a la vez objeto, **la comunidad de aprendizaje**, porque no es el individuo el sujeto fundamental del proceso educativo, sino la comunidad, la que se transforma al llevar a cabo este proceso.

Generar comunidades educativas en torno de cuerpos concretos de conocimientos, tal

con ventajas a la palabra civilización, que se deriva de la voz latina *civis*=ciudad, porque ésta última limita el sentido de *civilización* al ámbito urbano, en oposición a lo rural, que el eurocentrismo considera como lo primitivo y lo bárbaro, sin reconocer que hay diversas maneras de humanizarnos, devenir seres humanos, que constituyen el sentido de cada una de las *tlacanemilistín* (plural de *tlacanemilistli*).

De acuerdo con lo expresado, por ejemplo, por Miguel León Portilla, 1980, hay seis civilizaciones o *tlacanemilistín* originarias, que son la Bantú (Egipto), la Babilónica (Irán), la India, la China, la del Anáhuac (Mesoamérica) y la del Abya Yala (Sudamérica).

³El nombre de Abyanáhuac, ha sido sugerido por Guillermo Marín (<https://youtu.be/aigymkPIXDk>, consultada el 27 de mayo de 2023) y surge de una conjunción de dos palabras: el vocablo *Abya*, de la lengua kuna, de Panamá, que significa *en pleno florecimiento*, y de *Anáhuac*, del náhuatl, que significa *lo situado entre las aguas*, para nombrar a todo nuestro continente, mal llamado América. También, en lengua aimara, podemos llamarlo *Amaru Pacha*, que significa *la gran serpiente de tierra*, al referirse a la enorme cordillera que recorre el continente, desde los Andes, en la Tierra del Fuego, hasta Alaska. Finalmente, este continente también puede nombrarse como *Ixachilan* = inmensidad.

⁴El trabajo de Edgar Morin destaca entre estas teorías por su extensión a muchos campos del conocimiento occidental. Otros enfoques al estudio del pensamiento complejo son la teoría general de los sistemas, iniciada por Ludwig Bertalanffy desde los sistemas biológicos, así como la sistematización lograda por Niklas Luhmann, en los sistemas de la sociología y el derecho. Ver una referencia seleccionada de cada uno de ellos en la bibliografía.

podría ser el objetivo educativo de los cursos presenciales en la universidad. En estos cursos, que a la par con la integración de conocimientos curriculares, se trabaje sistemáticamente en una educación que a partir de la observación cuidadosa y reflexiva de los hechos, que a partir de la discusión de pares que permita profundizar tanto en la información como en los significados, y también a partir de la confrontación de diversas teorías que pretenden dar cuenta de las observaciones, se haga realidad comparar semejanzas, encontrar patrones, evaluar significados, proponer explicaciones y explorar posibilidades diversas de significación y resignificación, ejercitando la flexibilidad del pensamiento y la adaptación a una diversidad de contextos.

Al pensar el proceso educativo como un proceso que llevan a cabo comunidades de aprendizaje, es decir, al emprender **el proceso de humanizarnos juntos**, quiero aportar en estas notas algunas ideas que han surgido de promover la discusión y la reflexión, en grupos de trabajo formados por estudiantes que toman los cursos de **laboratorio de mecánica de fluidos**. Hay una variedad de formas que han sido útiles para promover el aprendizaje y me gustaría mencionar algunos ejemplos, que no son otra cosa que el relato del ejercicio con el cual hemos ido descubriendo y construyendo nuestro propio conocimiento, ya que cada grupo es diferente y genera sus propias posibilidades, que al final, quedan representadas por las discusiones y acciones de las cuales estas notas dan testimonio. Algunos grupos son muy agudos en las discusiones y generan ámbitos de observación y reflexión que permiten arriesgarnos a probar diversos cambios. Los límites son indicados por la seguridad de los participantes, la conservación y el incremento de nuestro acervo de instrumentos y experiencias y las posibilidades económicas que requieren los cambios propuestos, con miras al cumplimiento de los programas de estudio de la carrera, que deben revisarse con frecuencia, bajo criterios que nos permitan la crítica del eurocentrismo.

Así es como han surgido algunas de las prácticas, como la de utilizar el **viscosímetro de Brookfield** para determinar los parámetros reológicos de harinas de maíz, pues lo tradicional en esta práctica ha sido usar el viscosímetro para medir los parámetros de shampú, catsup o mayonesa. Sin embargo, al proponer al grupo trabajar con algún material nuevo, surgió de inmediato la propuesta de las harinas de maíz, que resultó ser un desafío, pues lo es el tema, ya por sí mismo, pero lo fue más para las limitaciones de un laboratorio de docencia, que sólo cuenta con viscosímetros muy elementales. Con nuestros instrumentos, hemos podido llegar a ver que las suspensiones cercanas al 52 % de concentración presentan un comportamiento posiblemente viscoelástico, el cual ya no puede ser representado matemáticamente por el modelo del fluido newtoniano generalizado (*FNG*), y ya no puede ser determinado con un viscosímetro que requiere operar en el régimen estacionario. Sin embargo, las concentraciones entre un 48 % y alrededor del 51 % sí pueden modelarse como *FNG*, cuyos parámetros son funciones de la concentración, pero no del tiempo, a temperatura constante. La colaboración de los diversos equipos de trabajo experimental permite, al conjuntar los resultados de todos ellos, cada uno trabajando con una concentración distinta, elaborar las gráficas del comportamiento del material, representado por el cambio de los valores de los mencionados parámetros en función de la concentración.

La estrategia de distribuir las composiciones de las mezclas entre los equipos de trabajo experimental y conjuntar resultados permitió, además, encontrar el comportamiento de la viscosidad con respecto a la concentración en mezclas líquidas binarias (agua-etilenglicol y agua-glicerol) usando viscosímetros capilares. También pudimos explorar algunos puntos de viscosidad de soluciones ternarias (agua-etilenglicol-glicerol), aunque no hemos abarcado extensivamente mezclas líquidas más viscosas, pues se requieren viscosímetros de tamaños adecuados para mezclas de etilenglicol-glicerol, sin embargo, la continuidad de este trabajo permitiría explorar la representación de la viscosidad de soluciones ternarias parecidas a las mencionadas, en gráficas de base triangular, para la concentración de las componentes del sistema ternario, y abordar posteriormente la elaboración de correlaciones para la estimación de la viscosidad de mezclas líquidas basada, en mayor o menor grado, en métodos de la termodinámica clásica y estadística. Este objetivo implica la colaboración

de la diversidad de grupos que cursan este laboratorio a través del tiempo, y configura una de las características de las comunidades de aprendizaje, a las que me he referido tres párrafos arriba, al proponer que *formemos comunidades de aprendizaje en torno de cuerpos concretos de conocimientos*. Esta característica está asociada a la **permanencia de las comunidades de aprendizaje** a través del tiempo; permanencia basada en la continuidad del trabajo de desarrollo de conocimientos y procedimientos propios, que genera resultados también propios.

El libro que tienes en tus manos, o en la pantalla de tu computadora, no es un libro de texto que deba estudiarse de forma secuencial, pues reconozco que muchos y muy buenos libros de texto de mecánica de fluidos se han escrito y que cada quien elabora sus preferencias y comprende mejor las discusiones en algunos textos que en otros, aunque no tan cabalmente como cuando ocurre el **intercambio de ideas y puntos de vista**, estando en el contacto directo con las experiencias propias y de los otros acerca de los flujos. En cuanto a la notación, me he adaptado en todo lo posible a la de Bird, Stewart y Lightfoot, en su segunda edición en español, de 2006. Este libro es un clásico de la literatura de la ingeniería química, cuya primera edición, de 1960, marcó un hito en la estructura de esta carrera, aglutinando en el tratamiento sistemático de los **fenómenos de transporte**, las principales bases metodológicas de la transformación física de los materiales. También será nuestra principal referencia y se denotará simplemente como "*el Bird*".

Hay una variedad de excelentes y muy buenos libros de mecánica de fluidos, que presentan los contenidos teóricos desde una de las siguientes alternativas: por una parte, aquellos que al iniciar proponen principios de balance y conservación en los instrumentos o dispositivos de flujo, tomados en su integridad. Estos aplican **balances postulados** que reconocen la existencia de **cantidades totales**, como el flujo másico, el caudal volumétrico, el área de la superficie transversal al flujo o de la superficie sólida que lo limita y que ejerce una fuerza de resistencia al mismo, etc. Todas estas cantidades se aplican al instrumento o dispositivo de flujo en su totalidad y son cantidades que no se asocian localmente a un punto específico del instrumento, son **cantidades no-locales**. Otros libros de texto exploran una alternativa, pues inician por el movimiento y las fuerzas sobre una partícula muy pequeña de fluido, aunque con un gran número de moléculas, de manera que todavía es posible asociarle propiedades termodinámicas y mecánicas, tales como la densidad, la velocidad de flujo, la temperatura y la presión. La existencia de dicha **partícula material de fluido** está ligada con dos hipótesis fundamentales de la mecánica de fluidos: la **hipótesis del continuo** y la **hipótesis del equilibrio local**, las cuales se aplican a cualquier partícula material, también llamada cuerpo puntual de fluido. Este cuerpo puntual es una porción muy pequeña de fluido, digamos el que ocupa el volumen de un cubo que tiene $1\mu\text{m}$ de lado, el cual se localiza en alguna posición que cambia en el curso del tiempo, conforme se desplaza el fluido. Mientras en estos últimos textos los balances toman la forma de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), cuya solución requiere de condiciones iniciales (CI) y condiciones a la frontera (CF) adecuadas, los balances postulados son, a lo sumo, ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en una variable independiente: el *tiempo*, durante las etapas transitorias, y ecuaciones algebraicas en el régimen de operación estacionario, que relacionan las variables no-locales, representativas de los flujos.

La formación teórica de la mecánica de fluidos está suficientemente atendida, por textos tales como el ya mencionado *Fenómenos de Transporte*, de Bird, Stewart y Lightfoot y varios otros, muy conocidos entre las referencias de la ingeniería química, como Geankoplis, Whitaker y Slattey, entre otros. Nuestro enfoque persigue la conexión de los **aspectos teóricos**, tratados previa o simultáneamente en un curso básico de mecánica de fluidos, **con las observaciones y el enriquecimiento de las experiencias**. No se trata de un manual de prácticas de laboratorio, aunque también se han desarrollado los procedimientos seguidos en tales manuales, como parte de las operaciones necesarias para obtener resultados experimentales significativos, que pueden ser comparados con resultados previos. Sin embargo, a diferencia de los manuales de prácticas, se procura incidir en la reflexión sobre las consideraciones de las **teorías aplicadas**, tanto como sobre el

significado de las **mediciones realizadas** con sentido crítico, para proponer los cambios necesarios que mejoren las capacidades de representación de los modelos y las condiciones experimentales por ellos representadas. Esto se logra al proponer los objetivos de la realización de las experiencias, que comprendan la elaboración de **ecuaciones de trabajo**, a partir de los principios de conservación y de balance, los cuales se simplifican para obtener relaciones significativas que pueden ser puestas a prueba con las experiencias en el laboratorio.

Las posibilidades de conectar los **contenidos teórico-conceptuales** de la mecánica de fluidos con el **mundo empírico-observacional** de las realizaciones en el laboratorio, tiene aspectos que corresponden al interés de cada estudiante, así como aspectos colectivos que corresponden al **desempeño colaborativo** de cada grupo, incluido el profesor y el personal técnico del laboratorio. Esta afirmación es importante, pues incide directamente en el carácter del **aprendizaje** que deseamos promover, que es entendido aquí como **la generación, la extensión y la precisión de los significados** relativos a una disciplina, en nuestro caso, la mecánica de fluidos. Lo que esta afirmación indica es que el aprendizaje tiene, no solamente una dimensión individual sino, una dimensión social que es la que principalmente se desarrollará con el trabajo colaborativo del grupo.

En este texto deseo aportar elementos para la **integración de conocimientos de la mecánica de fluidos en las comunidades de aprendizaje**. Los temas corresponden a un curso teórico básico que se supone ha sido ya estudiado. Por esta razón no propongo un desarrollo lineal, sino la posibilidad de múltiples miradas que **fortalezcan la relación de unos temas con otros**, aunque siempre alrededor de los ejes principales del tema que se trata.

El texto está dividido en tres partes: **la primera** son los *Contenidos*, que **inicia** con un planteamiento general de los dos enfoques de la mecánica de fluidos: el **tratamiento local**, con sus principales temas que se establecen alrededor de los valores del número de Reynolds, y el **tratamiento integral**, que puede surgir **por integración** de los balances locales o **puede ser postulado**. El **segundo capítulo** trata sobre las familias de modelos que pueden describir la realización de un flujo y su comparación con las determinaciones experimentales, que lleva a conclusiones en cuanto a las posibilidades de representación de una variedad de modelos, que se pueden generar de acuerdo a la profundidad de los conocimientos sobre el tema. El énfasis del **tercer capítulo** es sobre la estimación de los tiempos característicos de los transportes de masa y de momentum, que son la base del desarrollo de los modelos cuasi-estacionarios, que se proponen en el **cuarto capítulo**. En el **quinto capítulo** se revisa el modelamiento de los fluidos newtonianos generalizados (FNG), a partir de su expresión tensorial, para generar el parámetro de rapidez de deformación y el parámetro de esfuerzos viscosos, que son escalares representativos de las normas (o el tamaño) de las cantidades expresadas por ellos. Se propone la relación de comportamiento de los FNG, en términos de dichos parámetros y se resuelve el caso transitorio de una placa plana que se pone súbitamente en movimiento a velocidad constante, deslizándose tangencialmente. Finalmente, se explora cómo encontrar los valores de los parámetros del FNG a partir de mediciones de la viscosidad efectiva, el parámetro de esfuerzos y el de rapidez de deformación. El **capítulo sexto** aborda la teoría de la capa límite, incluyendo el desarrollo de las ecuaciones de la capa límite a partir del estudio de órdenes de magnitud de los términos, dentro de la capa límite, su integración para obtener la ecuación de von Kármán, para finalmente encontrar soluciones aproximadas, suponiendo perfiles polinomiales de la velocidad, conocidas como el método de Kármán-Pohlhausen. También se proponen las ecuaciones de Blasius que dan lugar a su solución numérica, la cual se propone como ejercicio. El tratamiento fenomenológico de los flujos turbulentos se discute en el **septimo capítulo**, incluyendo su surgimiento en la capa límite, a partir de la limitación de la disipación viscosa cuando la energía cinética se incrementa más allá de los límites que pueden soportar los flujos laminares. Luego se define la velocidad de flujo turbulento como la suma de un valor promedio más su fluctuación instantánea, para llegar a las ecuaciones de Reynolds para el flujo turbulento. Se proponen los principios de la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl,

para estimar los esfuerzos de Reynolds y se aplica la expresión de Prandtl para resolver el flujo turbulento en un tubo, simplificando las ecuaciones a dos casos límite asintóticos: cerca y lejos de la pared. Los procesos de mezclado y agitación se relacionan ampliamente con la ocurrencia de los flujos turbulentos y el uso de potencia externa, y se tratan en el **octavo capítulo**. En el **capítulo noveno** se define el vector de potencia local de flujo, cuya divergencia es equivalente al flujo local de trabajo realizado por cada fuerza sobre la superficie de un cuerpo puntual, se muestra que puede descomponerse en dos términos, uno de rapidez de trabajo debido a fuerzas conservativas más otro de disipación, que representa la migración del movimiento local a la escala molecular, es decir, a energía interna que se manifiesta como incrementos de la temperatura o cambios de fase. Se analiza la disipación del trabajo viscoso para un flujo laminar incompresible en un tubo, para encontrar la relación entre la disipación viscosa y el coeficiente de fricción en el tubo. Finalmente se extiende el concepto de coeficiente de rozamiento o fricción con relación a las pérdidas de presión en tuberías y accesorios, así como en la capa límite de una pared plana. El funcionamiento cíclico de las bombas de ariete es complejo, pero su fabricación y operación son muy sencillas e ilustran los conceptos de la transformación de la energía, por lo que es muy valioso abordar su discusión, en el **décimo capítulo**, considerando algunos elementos importantes en su funcionamiento, como son la compresibilidad y el golpe de ariete. Finalmente, el flujo alrededor de una esfera es la base de muchos procedimientos de cálculo de operaciones unitarias y procesos de separación de fases con una o varias fases dispersas. Estas operaciones de separación se tratan en el **capítulo undécimo** al desarrollar los métodos de las separaciones mecánicas usadas en la industria, que resultan en una síntesis de las operaciones unitarias de naturaleza mecánica, las cuales se analizan desde sus semejanzas y diferencias conceptuales.

La **segunda parte** del texto trata de los *Instrumentos* del laboratorio. Cada uno de sus siete capítulos corresponde a un instrumento, el cual es descrito verbalmente y representado en imágenes; se indica el procedimiento normal para su correcta operación y después se describen los principios físicos de su funcionamiento, para dirigir la atención hacia los aspectos que deben considerarse importantes al elaborar sus modelos. En la cuarta sección de cada uno de los capítulos de esta segunda parte, se elaboran **algunos objetivos** que pueden ser establecidos, a manera de ejemplo, como guías para la realización de experiencias que fortalecen el aprendizaje. En general, los **objetivos quedan abiertos** a la observación y a la imaginación del o de la docente y deberían ser complementados por la agudeza y las necesidades de la comunidad de aprendizaje, como parte de su aportación a las siguientes generaciones del estudiantado. El capítulo décimo séptimo incluye una sección de *Construcción*; se trata de **construir una bomba de ariete**, lo cual brinda la oportunidad de identificar y utilizar accesorios usados en las redes de tuberías, ensamblarlos correctamente para lograr la transformación de la energía en sus diversas manifestaciones, como energía potencial, cinética e intrínseca, que son los términos de la ecuación de Bernoulli, para realizar el trabajo de elevar agua a una altura superior a su nivel de alimentación, sin utilizar el trabajo realizado por alguna fuente externa.

La **tercera parte** del texto son los *Métodos*. Consta de cuatro capítulos que apoyan aspectos informativos y formales del aprendizaje de la mecánica de fluidos. El capítulo décimo noveno trata del nivel y la calidad del **aprendizaje significativo**, que es aquel aprendizaje que mayor formación puede aportar; incluye la elaboración de mapas conceptuales y diagramas de flujo. En el vigésimo capítulo estudiamos los **estimados de cantidades medidas** experimentalmente, analizamos las incertidumbres inherentes a la medición, determinamos las cifras significativas de conjuntos de mediciones y la forma apropiada de reportar las cantidades medidas, así como los valores de los parámetros y constantes de los modelos que se usan en las predicciones, de acuerdo con una teoría o un ajuste empírico a un modelo matemático. La organización de los **proyectos experimentales** se trata en el capítulo vigésimo primero, con una parte medular que consiste en la representación teórica del flujo por medio de un modelo, el cual conduce a obtener las ecuaciones de trabajo que

informan sobre las cantidades que se deben medir, ya sean variables o parámetros y las que se deben obtener de la información disponible sobre el tema. Finalmente en el capítulo vigésimo segundo se relata una manera de organizar y presentar los resultados en un **reporte que implica trabajo teórico y experimental**. Había considerado que el último capítulo estuviera relacionado con la **seguridad en el laboratorio**. Un escrito que cubre el tópico con creces es un manual desarrollado por la Sociedad Americana de Química, al cual referimos al lector interesado, y sobre todo, a toda persona que emprenda la tarea de realizar algunas actividades prácticas para la integración de sus conocimientos.

*San Baltazar Tetela, 16 de febrero de 2023,
vigésimo séptimo aniversario de la firma de los Acuerdos de San Andrés Larrainzar,
que siguen esperando su cumplimiento por parte de los gobiernos mexicanos.*



Compendios

1	La mecánica de fluidos y los fenómenos de transporte	23
1.1	Introducción	
1.2	El tratamiento local	
1.3	El tratamiento integral	
2	Modelos, su significado y aplicación .	47
2.1	Algunos aspectos elementales	
2.2	Modelos de ajuste de datos experimentales	
2.3	Modelos basados en principios físicos	
2.4	Flujo laminar estacionario de un fluido newtoniano en un tubo	
3	Procesos de transporte y tiempos característicos	67
3.1	Flujo por cortante entre dos láminas sólidas planas y paralelas	
3.2	Flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo circular	
4	Procesos transitorios sin etapa estacionaria	79
4.1	Introducción	
4.2	Modelos de la descarga de un tanque	
4.3	Modelo de viscosímetros capilares	
5	Fluidos newtonianos generalizados (FNG)	91
5.1	Los fluidos newtonianos generalizados	
5.2	Flujo transitorio de un fluido de Ostwald sobre una lámina sólida	
5.3	Estimación de parámetros reológicos de un FNG	
6	Modelos de capa límite y flujo ideal .	101
6.1	Flujos ideales	
6.2	Flujos en la capa límite	
6.3	Soluciones de la teoría de la capa límite	
7	Flujos turbulentos	111
7.1	Descripción fenomenológica	
7.2	Flujo turbulento en un tubo	
7.3	Capa límite turbulenta	
8	Agitación y mezclado	125
8.1	Introducción	
8.2	Configuración de tanques agitados	
8.3	Patrones de flujo en tanques agitados	
8.4	Tiempos característicos del mezclado	
8.5	Potencia de tanques agitados	
9	Energía cinética, trabajo y fricción . .	135
9.1	Fuerzas, potenciales y energía cinética de flujo	
9.2	Fuerzas conservativas, rapidez de trabajo y vector de potencia	
9.3	Disipación del flujo local de potencia de los esfuerzos moleculares	
9.4	Disipación viscosa de un fluido newtoniano en un tubo	
9.5	Disipación viscosa en los flujos turbulentos	
9.6	Coefficientes de rozamiento en una pared plana	
10	Flujo compresible, cavitación y ariete	157
10.1	Ondas de presión	
10.2	La bomba de ariete	
11	Separaciones mecánicas	169
11.1	Separación de mezclas	
11.2	Flujo alrededor de un cuerpo esférico	
11.3	Separación de fases dispersas	

1. La mecánica de fluidos y los fenómenos de transporte

1.1 Introducción

Los fluidos siempre nos han maravillado: el jugueteo del agua escurriendo entre las rocas para aparecer aguas abajo en algún remanso o en las filtraciones de una caverna, el sonido del viento vibrando entre los dedos y los émbolos de un saxofón o el aterrador anuncio de un posible tsunami siguiendo al hundimiento del piso oceánico, así como los efectos relajantes al contemplar los peces en sus danzas hidrodinámicas, deslizándose mientras el aire burbujea suavemente oxigenando el agua de la pecera, son sólo algunos ejemplos de la diversidad e importancia de los fluidos y de su comportamiento. Esta fascinación ha guiado la reflexión de muchas mentes en las más diversas culturas, para ir desarrollando conocimientos, conceptos y metáforas, y para ir proponiendo relaciones entre elementos importantes, que influyen en los movimientos de los fluidos. Aprender a convivir con los fluidos y encauzar sus flujos de acuerdo con las necesidades de los grupos humanos ha sido un enorme aliciente para indagar la naturaleza de los flujos expuestos a una diversidad de situaciones.

La sistematización del estudio de los fluidos y sus movimientos (los flujos) se ha consolidado en una disciplina sustentada científicamente por los principios de la física: **la mecánica de fluidos**. La búsqueda de sus principios viene desde Arquímedes, quien desarrolló los principios de la hidrostática en su escrito "*Sobre los cuerpos flotantes*".

La segunda parte del título de este capítulo, **los fenómenos de transporte**, se refiere al tratamiento unificado de la mecánica de fluidos, considerada desde el punto de vista de la **transferencia de cantidad de movimiento, momentum o ímpetu**, junto con otros fenómenos de transporte como la **transferencia de energía térmica** y la **transferencia de masa** de materiales con varios componentes o especies químicas. El los fenómenos de transporte se puede también considerar los flujos de materiales iónicos en campos eléctricos y los flujos de fluidos electromagnéticos en campos magnetohidrodinámicos.

Los fenómenos de transporte son una de las bases más importantes para la ingeniería química, así como para otras ingenierías que se han formado posteriormente, alrededor de la fabricación de nuevos materiales, tanto bioquímicos como biológicos y poliméricos. La conceptualización de los fenómenos de transporte se ha llevado a cabo en el Siglo XX, en concordancia con el desarrollo

y la **sistematización de la ingeniería química** por su lado y de la **teoría clásica de los campos**, por el lado de la física clásica. Los fenómenos de transporte obtuvieron su completa identidad en 1960 con el libro *Transport Phenomena* de Bird, Stewart y Lightfoot y simultáneamente con el capítulo *Theory of Clasical Fields* de Truesdell y Toupin en el *Handbuch der Physik*. Este capítulo es un tratado de la teoría general de los fenómenos de transporte, que ha permeado el interés de los círculos de la ingeniería química en menor amplitud.

Los fenómenos de transporte comprenden dos niveles de aplicación relacionados con el objeto de estudio. Así, en el transporte del ímpetu, desarrollamos descripciones que se aplican a movimientos locales e instantáneos de cualquier porción infinitesimal de fluido, a la cual llamamos **partícula material o cuerpo puntual** de fluido, cuya definición y tamaño precisamos en la subsección 1.2.2. El flujo es el movimiento del fluido, pensado como un conjunto innumerable de dichas partículas materiales, que conforman la corriente de bulto del mismo fluido. Esto nos conduce a describir el movimiento de cualquier partícula material de fluido en variables locales e instantáneas, es decir, definidas para todo punto en el espacio y en el tiempo de trabajo, en la forma de ecuaciones diferenciales parciales, dependientes del punto en el espacio que ocupa la partícula material y del instante de tiempo que transcurre. Este enfoque se conoce como de **balances locales**.

Otras descripciones se aplican a la totalidad del flujo en una región del espacio, tal como una pieza de equipo o un instrumento. Esto da lugar a descripciones en ecuaciones diferenciales ordinarias, dependientes del tiempo pero no del espacio, en términos de variables representativas de la totalidad del flujo, las cuales dependen exclusivamente del tiempo, es decir, son variables instantáneas no-locales. Este enfoque se conoce como de **balances integrales**.

El paso de una representación de balances locales a otra de balances integrales se lleva a cabo por medio de un proceso de integración de los balances locales, para abarcar la totalidad de la región de flujo, lo cual se realiza generalmente utilizando herramientas matemáticas conocidas como **teoremas integrales**¹. El resultado son ecuaciones de balance integradas en la región espacial de la totalidad del flujo, cuyas integrales se pueden re-editar para definir **variables promediadas**, que corresponden a las variables no-locales, y **coeficientes no-locales**, propios de los balances integrales. En este cambio de enfoque, del nivel local al integrado, se pierde la información detallada del movimiento de las partículas materiales de fluido, como función de las coordenadas espaciales. Sin embargo, es posible **relacionar** los coeficientes locales (en el sentido de que están definidos para cualquier partícula material del fluido, como la **viscosidad**), con los coeficientes no-locales (que están definidos para toda la región de flujo, en su conjunto, como el **coeficiente de rozamiento**). En particular, para los flujos laminares se puede utilizar un tratamiento local o uno integrado (o no-local), dependiendo de los objetivos que persiga el estudio. Además, los flujos más complejos, como los flujos turbulentos o los flujos de fluidos con varias fases dispersas, viajando en el **bulto**² de una fase continua, pueden asociarse, en promedio, a todo punto del espacio y del tiempo, y es todavía posible obtener descripciones locales promediadas para las diversas fases o para las fluctuaciones estocásticas de variables como la velocidad de flujo. Por medio de integración de los balances locales en el volumen total del instrumento, aparato o pieza de equipo que ocupa el fluido, es posible encontrar las descripciones integrales correspondientes, pero es también posible proponer descripciones en términos de un conjunto de parámetros y variables no-locales definidas *a priori*, y no como resultado de un proceso de integración, es decir que también es posible aplicar los principios generales de balance utilizando variables no-locales, variables definidas para el flujo en su conjunto, para establecer **balances postulados**. Este procedimiento da por resultado ecuaciones de balance, que deben ser equivalentes a los balances integrados. La equivalencia se obtiene al

¹Los teoremas integrales del cálculo vectorial más usados en los fenómenos de transporte son el teorema de la divergencia, el teorema del valor medio y el teorema de transporte, que pueden consultarse por ejemplo en Aris (1962), Borishenko y Tarapov (1968), Whitaker (1968) y en un libro reciente del autor, Soria (2022).

²El término *bulto* se refiere al fluido de un volumen o una masa distinguible, pero no determinada.

identificar el conjunto de variables y parámetros de ajuste de las ecuaciones postuladas, con el conjunto de variables y parámetros integrados de los balances integrados. Usualmente, **los modelos postulados surgen en las etapas tempranas del desarrollo de un campo de trabajo, fortalecidos por abundante experimentación y un método de congruencia** basado en el principio de no sumar peras con manzanas, si lo que queremos es saber cuántas manzanas hay, es decir, la congruencia de unidades elaborada por el *teorema de los π* , que desarrollamos en la subsección 2.2.1.

1.2 El tratamiento local

Distinguimos el movimiento en dos escalas de longitud: **la escala local**, cuyo valor mínimo está en el orden de 10^{-6} m, y el movimiento en **la escala molecular**, cuyo valor está en el orden de la longitud de la trayectoria libre media, para los gases y en el orden del tamaño de las moléculas, para los sólidos, muchos líquidos y los gases densos, de aproximadamente 10^{-10} m. El análisis del movimiento en la escala local conduce a términos cuyo significado se determina en **el nivel local**, como la **velocidad de flujo** de un fluido en movimiento y su **energía cinética de flujo**, en tanto que el movimiento en el **nivel molecular** se refiere al movimiento individual de las moléculas y conduce a variables relacionadas con las fluctuaciones de la velocidad de las moléculas individuales, de donde surge **la temperatura**, como una medida integral de la energía cinética de las fluctuaciones de la velocidad de las moléculas, como es definida por los métodos de la termodinámica estadística, que no abordamos en este libro, aunque reconocemos su importancia y su interacción con los procesos en el nivel local, especialmente los relacionados con el aumento de la entropía.

1.2.1 Principios de conservación y de balance

Algunas interacciones entre los cuerpos materiales se producen por la aplicación de **fuerzas**. Las fuerzas actúan en los fluidos y producen cambios que resultan en movimientos y deformaciones de los cuerpos fluidos. Todo ello es el objeto de la mecánica de fluidos. Podemos, en un nivel amplio de generalidad, reconocer **principios de balances de masa, de momentum lineal y de momento angular**, así como de **energía cinética, de energía interna y de energía total**, que es la suma de las dos anteriores. Llamamos **balances locales** a las aplicaciones de los principios de balance a cualquier punto del flujo. Los balances locales tienen la forma de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y son los principios rectores del análisis del movimiento de los fluidos; Estos principios requieren que las variables usadas, cantidades definidas en función del espacio y el tiempo, estén definidas para todo punto del sistema, por lo cual es necesario reconocer que nos referimos a los fluidos como materiales continuos en el espacio, sin pretender representar su comportamiento en longitudes del orden de la escala de tamaño molecular, es decir, aceptando la **hipótesis del continuo**, que implica suponer que el fluido se puede subdividir infinitamente y que cada porción de esta división tiene bien definidas sus propiedades termodinámicas y mecánicas, tales como la velocidad de flujo, $\mathbf{v}$, y la densidad, ρ , en un punto. Estos principios dan lugar a las ecuaciones de balance de los fluidos puros,³ homogéneos e isotérmicos, las cuales, aplicadas a cualquier lugar o punto fijo del espacio de flujo, son conocidas como la **forma euleriana de las ecuaciones de cambio**, que son:

1. La **ecuación de continuidad**, que representa el **balance local de la masa** de un fluido homogéneo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (1.2.1)$$

³Un fluido puro está formado por una sola especie química o por una mezcla de especies, cuya composición química permanece inalterada en el curso del flujo, por ejemplo el agua o el aire, respectivamente.

En esta ecuación, el término del lado izquierdo corresponde a la rapidez temporal de cambio de la masa del fluido en un punto fijo del flujo, que podemos denominar la **tasa de acumulación local de masa**, en tanto que el término del lado derecho (incluyendo el signo negativo) representa el flujo neto de masa que entra a ese punto fijo, ambos términos expresados por unidad de volumen. Entonces, este balance local de masa se puede expresar diciendo que

La tasa de acumulación local de masa del fluido en un punto fijo es igual al flujo neto de masa que ingresa en ese punto fijo.

2. La ecuación de **balance local del momentum lineal o ímpetu**, que representa la rapidez de los cambios locales del ímpetu en un punto fijo, balanceados por el flujo del ímpetu que entra en ese punto fijo, más la suma de las fuerzas que actúan localmente sobre el fluido en ese punto fijo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + \rho \mathbf{g} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.2.2)$$

donde $\boldsymbol{\pi} = p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos moleculares, compuesto por la presión p , en la dirección normal a cualquier superficie definida localmente, y determinada por el tensor unitario $\mathbf{1}$ o delta de Kronecker, y el tensor de los esfuerzos viscosos $\boldsymbol{\tau}$. Este balance local del ímpetu se puede expresar diciendo que

La tasa de acumulación local del ímpetu del fluido en un punto fijo es igual al flujo neto del ímpetu que ingresa a ese punto fijo más la suma de las fuerzas (intrínsecas, viscosas y gravitacionales) que actúan localmente sobre el mismo punto fijo.

Este balance también está expresado por unidad de volumen.

3. La ecuación de **balance local del momento angular del ímpetu**, que representa un **balance local de torques** para un fluido homogéneo no-micropolar, que conduce a la relación:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad (1.2.3)$$

expresión que representa la **condición de simetría** del tensor de esfuerzos viscosos $\boldsymbol{\tau}$.

4. **La ecuación local de la energía mecánica.** Del balance local del ímpetu (1.2.2) se deriva una ecuación local de la energía mecánica, que consiste en proyectar el balance local del ímpetu en un punto, en la dirección de la velocidad de flujo y multiplicar la proyección de cada término por la magnitud de la velocidad de flujo en ese mismo punto.

Los productos de estas proyecciones de las fuerzas por la magnitud de la velocidad de flujo corresponden a las rapidezces del trabajo mecánico realizado por las fuerzas correspondientes, cuya suma equivale a la rapidez de cambio de la energía cinética en el mismo punto.

La operación que se aplica es el producto punto de la expresión (1.2.2) por el vector de la velocidad de flujo, $\mathbf{v}$. Después de arreglar las derivadas de los términos que representan los cambios del ímpetu, es posible representar **la ecuación local de la energía mecánica** como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \mathbf{v} \cdot \nabla p - \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.2.4)$$

Esta ecuación, como las ecuaciones generales de balance, es intensiva. Sus términos tienen dimensiones de $\left[\frac{\text{energía}}{\text{volumen} \cdot \text{tiempo}} \right]$, que equivalen a densidades de potencia, $\left[\frac{\text{potencia}}{\text{volumen}} \right]$ y

a rapideces de cambio de densidades de energía: $\left[\frac{\text{energía/volumen}}{\text{tiempo}} \right]$. El término del lado izquierdo representa la rapidez de acumulación local de la energía cinética de flujo (en un punto fijo dado), en tanto que el primer término del lado derecho corresponde al flujo neto local de la energía cinética de flujo. El segundo término del lado derecho representa la rapidez del trabajo mecánico realizado por la fuerza de presión. De manera semejante, el tercero y el cuarto término del lado derecho representan las rapideces de trabajo mecánico realizados por la fuerza viscosa y por la fuerza externa (la gravedad o alguna otra), respectivamente.

Todos los términos de la ecuación local de la energía mecánica, ecuación (1.2.4), son mecánicos, es decir, todos están asociados a MOVIMIENTOS EN LA ESCALA LOCAL del fluido.

Para afirmarlo, hemos de observar que el balance local del ímpetu, equivalente a un balance local de fuerzas sobre el fluido (1.2.2), se ha multiplicado por la velocidad de flujo v . Ambos factores están definidos en el nivel local, por lo que representan **contribuciones a la potencia debidas al bulto del fluido en el nivel local, no al movimiento individual de las moléculas**, como ocurriría si se considerara la velocidad individual de cada molécula y las fuerzas de interacción moleculares. Entonces, los términos mecánicos corresponden a la rapidez de cambio de la **energía cinética de flujo** en el lado izquierdo de (1.2.4), así como a la **rapidez de trabajo mecánico** realizado por las fuerzas correspondientes, en el lado derecho de la misma ecuación.

5. **El balance local de la energía cinética.** Es un balance de energía en el nivel local, en el cual se considera cómo los **flujos locales de potencia**: $\nabla \cdot (\text{fuerza} \cdot \text{velocidad})$ modifican la energía cinética local.

Los flujos locales de potencia incluyen efectos mecánicos y efectos disipativos.

Hemos discutido los efectos mecánicos de la aplicación de las fuerzas al analizar la ecuación (1.2.4). Además, los efectos disipativos también forman parte de los flujos locales de potencia, pero no se incorporan a la energía cinética local, es decir, a la energía cinética de flujo, y es necesario considerarlos como una **pérdida de la capacidad de realizar trabajo sobre el sistema local** y elevar su energía cinética de flujo.

La potencia disipada, o simplemente la disipación, es la parte del flujo local de potencia sobre el fluido, que afecta su energía en el nivel molecular, es decir, que aumenta las fluctuaciones de las velocidades individuales de las moléculas del fluido, lo cual se manifiesta en el incremento de su temperatura.

El efecto disipativo es equivalente a un sumidero de energía cinética local, el cual debe restarse en el lado derecho del **balance local de la energía cinética**, para mantener el significado del balance.

Entonces, el balance local de la energía cinética, o **balance de la energía cinética de flujo**, se puede expresar diciendo que

LA TASA DE ACUMULACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE FLUJO EN UN PUNTO FIJO ES IGUAL AL FLUJO NETO DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE FLUJO QUE INGRESA AL MISMO PUNTO FIJO, MÁS LA SUMA DE LOS FLUJOS DE POTENCIA EFECTUADOS POR TODAS LAS FUERZAS MENOS LOS EFECTOS DE DISIPACIÓN DEBIDOS A LA APLICACIÓN DE DICHAS FUERZAS.

Hemos visto que las fuerzas aplicadas son las intrínsecas, cuyos esfuerzos son $P1$, las

viscosas, con esfuerzos $\boldsymbol{\tau}$ y las fuerzas volumétricas, con densidad $\rho \mathbf{g}$. Estas últimas son, generalmente, fuerzas conservativas,⁴ que pueden ser expresadas como gradientes de un potencial de fuerza, cuya consecuencia es la ausencia de disipación, ver la sección 9.1. El balance de la energía cinética de flujo tiene la expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot (P \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \rho \hat{D}_P - \rho \hat{D}_\tau, \quad (1.2.5)$$

El término $\rho \hat{D}_P$ es la densidad de la **disipación del flujo de potencia ocasionado por las fuerzas de presión** y el término $\rho \hat{D}_\tau$ es la densidad de la **disipación del flujo de potencia ocasionado por las fuerzas viscosas** que actúan sobre el sistema.

Al comparar la ecuación de la energía mecánica (1.2.4) con el balance de la energía cinética (1.2.5), notamos que sus lados izquierdos son idénticos, de modo que sus lados derechos son equivalentes. Esta observación nos permite, al notar que los primeros términos del lado derecho en ambas ecuaciones, también son idénticos, encontrar las equivalencias de los restantes. Para lograrlo, igualamos los términos relacionados con la fuerza de la presión y, por separado, los relacionados con las fuerzas viscosas, notando que **los flujos de potencia se pueden desarrollar**, aplicando la fórmula de la derivada de un producto, para encontrar que

$$\underbrace{-\nabla \cdot (P \mathbf{v})}_{\text{flujo local de potencia asociada a las fuerzas de presión}} = \underbrace{-\mathbf{v} \cdot \nabla P}_{\text{rapidez de trabajo mecánico ocasionado por fuerzas de presión}} + \underbrace{-P(\nabla \cdot \mathbf{v})}_{\text{disipación reversible por compresión o expansión.}} \quad (1.2.6)$$

y que⁵

$$\underbrace{-\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})}_{\text{flujo local de potencia asociada a las fuerzas viscosas}} = \underbrace{-\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})}_{\text{rapidez de trabajo mecánico ocasionado por fuerzas viscosas}} + \underbrace{-\boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v})}_{\text{disipación irreversible viscosa.}} \quad (1.2.7)$$

Además, al igualar los términos correspondientes a las fuerzas externas, también podemos encontrar que

$$\underbrace{\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}_{\text{flujo local de potencia asociada a las fuerzas externas}} = \underbrace{\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}_{\text{rapidez de trabajo mecánico ocasionado por fuerzas externas.}} \quad (1.2.8)$$

Esto indica que las fuerzas externas no presentan efectos de disipación, como ha sido propuesto por tratarse de fuerzas conservativas, es decir que

la potencia local, comunicada al fluido por las fuerzas externas, se manifiesta íntegramente como rapidez de trabajo mecánico sobre el fluido.

Por otra parte, de la aplicación de las relaciones (1.2.6) y (1.2.7) en la ecuación (1.2.5), podemos ver que los términos de disipación incluyen la disipación ocasionada por las fuerzas de presión:

$$\rho \hat{D}_P = -P(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.2.9)$$

⁴En la sección 9.2 discutimos las propiedades y la importancia de las fuerzas conservativas y definimos el vector de potencia, que es a la potencia lo que el tensor de esfuerzos es a las fuerzas.

⁵En la sección 9.3 abordamos la discusión sobre la reversibilidad e irreversibilidad de los efectos de disipación.

y la disipación ocasionada por las fuerzas viscosas:

$$\rho \hat{D}_\tau = -\boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}). \quad (1.2.10)$$

Estos términos de disipación son sumideros en el balance de energía cinética en el nivel local, es decir que,

los términos de disipación, que se manifiestan en movimientos en el nivel molecular, son porciones de los flujos de potencia, suministrados por fuerzas en el nivel local, que no contribuyen al incremento de la energía cinética de flujo, sino que aportan energía a la escala molecular, incrementando la energía cinética de las fluctuaciones de la velocidad de las moléculas, las cuales se manifiestan, una vez integradas,^a como incrementos de la temperatura.

^aRevisar los detalles de esta integración en los libros de termodinámica estadística o, al menos en un resumen breve, en la subsección 1.3.3 del libro de Soria, 2026. Dicho texto forma, en combinación con el presente, un trabajo de integración de conocimientos en los fenómenos de transporte.

Al sustituir ambos términos, de las ecuaciones (1.2.9) y (1.2.10), en el balance (1.2.5), podemos encontrar el **balance de energía cinética en su forma euleriana**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot (P \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - (-P(\nabla \cdot \mathbf{v})) - (-\boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v})), \quad (1.2.11)$$

Este balance equivale, en cuanto a su expresión matemática, a la ecuación de la energía mecánica (1.2.4), pero a diferencia de aquella, representa los términos físicos del balance de la energía cinética, en tanto que la ecuación (1.2.4) contiene únicamente los términos que representan efectos mecánicos, es decir, efectos del movimiento en el nivel local.

Ejercicios

1.2.1-1. Flujos incompresibles

Un flujo donde la densidad del fluido tiene cambios despreciables ($\rho \cong \text{constante}$) es un flujo incompresible. Expresa las ecuaciones (1.2.1) a (1.2.4) para los flujos incompresibles.

1.2.1-2. Ecuación de continuidad en sistemas coordenados usuales

Expresa la ecuación de continuidad (1.2.1) en (a) coordenadas rectangulares (x, y, z) , (b) coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y (c) coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Verifica tus resultados comparando con el Apéndice B.4 de Bird *et al* y (d) corrige cualquier diferencia considerando el Apéndice A del mismo texto, en especial el procedimiento de la Sección A.7.

E.1.2.1-3. Balance local del ímpetu en coordenadas usuales

Expresa la ecuación de balance local del ímpetu (1.2.2) en (a) coordenadas rectangulares (x, y, z) , (b) coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y (c) coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Verifica tus resultados comparando con el Apéndice B.5 de Bird *et al* y consulta los procedimientos del Apéndice A del mismo texto para encontrar los términos apropiados.

E.1.2.1-4. Flujo de Couette entre dos planos horizontales

Si la velocidad de un flujo en coordenadas rectangulares es la función vectorial $\mathbf{v} = [v_x(z), 0, 0]$, (a) demuestra que dicho flujo es incompresible y (b) si además se sabe que las dos únicas componentes distintas de cero del tensor $\boldsymbol{\tau}$ son $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, donde τ_{zx} es la constante τ_0 , y p es una función exclusivamente de z , es decir $p = p(z)$ y además $\mathbf{g} = (0, 0, g)$, donde g es la constante gravitacional, encuentra las tres componentes escalares de la ecuación vectorial de balance del ímpetu.

E.1.2.1-5. Flujo de Hagen-Poiseuille en un tubo vertical

Si la velocidad de un flujo en coordenadas cilíndricas es la función vectorial $\mathbf{v} = [0, 0, v_z(r)]$, (a) demuestra que dicho flujo es incompresible y (b) si además se sabe que las dos únicas componentes distintas de cero del tensor $\boldsymbol{\tau}$ son $\tau_{rz} = \tau_{zr}$, que τ_{rz} es una función exclusivamente de r , es decir

$\tau_{rz} = \tau_{rz}(r)$, que p es una función exclusivamente de z , es decir $p = p(z)$ y que $\mathbf{g} = [0, 0, g]$, donde g es la constante gravitacional, encuentra las tres componentes escalares de la ecuación vectorial de balance del ímpetu.

E.1.2.1-6. Flujo de Hagen-Poiseuille en un tubo horizontal

Si la velocidad de un flujo en coordenadas cilíndricas es la función vectorial $\mathbf{v} = (0, 0, v_z(r))$, si también las dos únicas componentes distintas de cero del tensor $\boldsymbol{\tau}$ son $\tau_{rz} = \tau_{zr}$, donde τ_{rz} es una función exclusivamente de r , es decir $\tau_{rz} = \tau_{rz}(r)$, además si p es, en general, la función $p = p(r, \theta, z)$ y $\mathbf{g} = (g_r, g_\theta, 0)$, donde $g_r = -g \sin \theta$, $g_\theta = -g \cos \theta$ y g es la constante gravitacional, encuentra las tres componentes escalares de la ecuación vectorial de balance del ímpetu.

1.2.2 Partícula material de un fluido y sus ecuaciones de balance

Partícula material o cuerpo puntual de un fluido

Una **partícula material o cuerpo puntual de un fluido** es una masa muy pequeña de fluido, que ocupa un volumen también muy pequeño, que desde nuestra percepción cotidiana, bien podríamos asociar con un punto. Para dimensionar este punto en nuestras ideas, pensemos en el volumen de un cubo de un micrómetro ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) de lado, es decir, un volumen de $10^{-18} \text{ m}^3 = 1 \mu\text{m}^3$. Si el cuerpo que tiene este volumen es una minúscula gotita de agua, cuya densidad es $\rho_{\text{agua}} = 10^3 \text{ Kg/m}^3$, la masa de la gotita es de 10^{-12} g que, de acuerdo con su masa molar $M_{\text{agua}} = 18 \text{ g/gmol}$, resulta ser de $5.5556 \times 10^{-14} \text{ gmol}$. Finalmente, el número de Avogadro $N_{\text{avo}} = 6.022 \times 10^{23} \text{ moléculas/gmol}$, nos permite estimar que, en una gotita de agua con diámetro de $1 \mu\text{m}$ habrá, aproximadamente, 3×10^{10} moléculas de agua. Esta gotita minúscula es una representación cercana a lo que podríamos considerar como **una partícula material de agua**. Si se tratara, en cambio, de aire en condiciones ambientales, con $\rho_{\text{aire}} = 1.29 \text{ Kg/m}^3$ y $M_{\text{aire}} = 29 \text{ g/gmol}$, el mismo volumen de 10^{-18} m^3 tendría

$$10^{-18}(1290)(6.022 \times 10^{23})/29 \approx 2 \times 10^7 \text{ moléculas de aire.}$$

Estas cantidades de moléculas, en ambos casos: 3×10^{10} para el agua y 2×10^7 para el aire, son muchísimas más que las usadas en simulaciones de dinámica molecular, por lo cual es viable proponer la longitud de $1 \mu\text{m}$ como el tamaño característico, indicativo o típico de un cuerpo puntual ξ . Así, tanto para el agua como para el aire, y para cualquier fluido, podemos decir que el cuerpo o fluido $\mathcal{C}$ es el conjunto formado por todas sus partículas materiales: $\mathcal{C} = \{\xi\}$, donde cada una de ellas satisface la

HIPÓTESIS DEL CONTINUO: $\xi(\mathbf{x}, t)$ es una partícula material o cuerpo puntual, definido como una masa muy pequeña de fluido, que contiene un conjunto de moléculas suficientemente elevado de manera que todas sus variables de estado termodinámico e hidrodinámico son cantidades bien definidas, que cambian suavemente conforme transcurre el tiempo.

Más aún, en cualquier flujo las cantidades termodinámicas, como la presión, la densidad y la temperatura, y las cantidades hidrodinámicas como la velocidad de flujo, son variables locales e instantáneas, es decir, variables que cambian de un punto a otro y de un tiempo a otro, así que es muy importante saber qué relaciones guardan entre sí las diversas variables termodinámicas. La respuesta que dieron Duhem y Hadamard⁶ a este cuestionamiento se le conoce ahora como la

HIPÓTESIS DEL EQUILIBRIO LOCAL: Las relaciones entre las variables termodinámicas, para una partícula material de un fluido, son las mismas que las del equilibrio termodinámico.

⁶De acuerdo a lo expresado por C. Truesdell, 1973, Pág.2.

A cada partícula material le corresponde una posición en el espacio, conforme transcurre el tiempo y llamamos **trayectoria de una partícula material de fluido** a la función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, que asocia una posición en el espacio a cada partícula material de fluido, que se desplaza en la región $\mathcal{V}_m(t)$ del espacio físico, ocupada por el fluido $\mathcal{C}$.

La **velocidad de un cuerpo puntual o partícula material** de un fluido, también llamada **velocidad de flujo**, es la rapidez temporal de cambio de la trayectoria de dicha partícula:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}. \quad (1.2.12)$$

Derivadas temporales

Además de su trayectoria y su velocidad, **cada partícula material tiene definidas sus propiedades termomecánicas**, como su densidad, su temperatura, su aceleración, su presión, su estado de esfuerzos viscosos, etc... Si A es cualquiera de estos atributos o propiedades de estado, cada una de ellas está definida para cada partícula material de una manera suave, es decir, que cambia suavemente en casi todos los puntos del espacio, conforme transcurre el tiempo. Entonces

$$A = A(\xi, t) = A(\mathbf{x}(t), t),$$

y sus cambios en el tiempo están dados por las derivadas temporales:

1. Derivada parcial:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (1.2.13)$$

es la rapidez de cambio de A en una posición fija del espacio.

2. Derivada material:

$$\frac{DA}{Dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\xi} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \right)_t = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A, \quad (1.2.14)$$

es la rapidez de cambio de A , viajando con la partícula material ξ .

3. Derivada total:

$$\frac{d_s A}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_s \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \right)_t = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla A, \quad (1.2.15)$$

es la rapidez de cambio de A , viajando por una trayectoria arbitraria $\mathbf{x}_s(t)$, cuya velocidad es⁷

$$\mathbf{v}_s(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_s = \frac{d\mathbf{x}_s}{dt}.$$

Ecuación de continuidad de una partícula material

La ecuación (1.2.14) sugiere que podemos representar la **ecuación de continuidad para una partícula material**, si derivamos por partes el producto $\rho \mathbf{v}$, de la ecuación (1.2.1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.2.16)$$

y sustituimos los primeros dos términos por la derivada material de la densidad, utilizando la ecuación (1.2.14), con lo cual resulta:

⁷En el libro de Bird se encuentra una explicación de estas tres derivadas temporales, con un ejemplo muy descriptivo, donde A es la concentración de peces en un río y un observador está parado en un puente ($\mathbf{x}$ fijo), o viaja en una lancha con los peces (ξ fijo) o enciende el motor de la lancha y viaja por donde quiere (sigue la trayectoria arbitraria $\mathbf{x}_s$). En los tres casos estima la rapidez de cambio de la concentración de peces, A .

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho(-\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.2.17)$$

Presentada de esta manera, la ecuación de continuidad expresa, del lado izquierdo el **cambio de estado másico**, por unidad de volumen, representado por la rapidez temporal de cambio de la densidad ρ de la partícula material ξ . El lado derecho expresa el **proceso de dilatación** que produce dicho cambio de estado másico, es decir, la **rapidez de cambio de volumen de la partícula material** ξ , por unidad de volumen, que corresponde al significado físico de la **divergencia de la velocidad**.

Es muy importante señalar aquí, desde esta primera ecuación, que corresponde al balance de masa en su forma lagrangiana, que del lado izquierdo encontramos los términos que indican la rapidez de cambio temporal del estado del sistema, que es un sistema cerrado: la partícula material, y del lado derecho encontramos los términos que representan los procesos de interacción que producen dichos cambios de estado. Adelantamos que la intención de este ordenamiento de términos es recordar y facilitar la interpretación de las expresiones en el contexto de las conexiones entre la termodinámica y la mecánica de fluidos. Así, al representar el primer principio de la termodinámica para un sistema cerrado, acostumbramos escribir la forma diferencial:

$$dU = \delta Q + \delta W, \quad (1.2.18)$$

donde dU representa un cambio diferencial de una **variable de estado**, la energía interna, en tanto que del lado derecho se representan las **variables de proceso**, y se señala que, mientras la variable de estado sólo depende de sus estados inicial, U_i y final U_f , las variables del proceso dependen de las trayectorias seguidas, por lo cual los cambios expresados por δQ y δW no son verdaderas diferenciales. La forma integral de la ecuación (1.2.18) se acostumbra escribir como

$$\Delta U = U_f - U_i = Q + W,$$

donde Q y W son cantidades totales que dependen de las trayectorias seguidas en los procesos.

La principal diferencia conceptual entre la expresión del primer principio termodinámico y los balances que expresamos aquí, reside en que no asociamos los procesos a nuevas “variables de proceso”, sino a transformaciones donde intervienen las variables de estado. Estas transformaciones o procesos se representan como operaciones matemáticas sobre el conjunto de las variables de estado, con expresiones adecuadas donde pueden intervenir parámetros fenomenológicos. Así, el balance de masa, ecuación (1.2.17), se refiere al estado másico del sistema, es decir, de la partícula material ξ . En su lado izquierdo considera los cambios de la densidad másica conforme transcurre el tiempo, en tanto que el lado derecho considera los procesos que generan dichos cambios, los cuales, para la masa como variable de estado, son los procesos de dilatación o cambio de volumen.

En efecto, si definimos la **dilatación del flujo**, J_m , como el cambio de volumen, dV_m , de la partícula material ξ , con respecto a un volumen inicial o de referencia, dV_0 , es decir:

$$J_m = \frac{dV_m}{dV_0}, \quad (1.2.19)$$

y calculamos su derivada material, encontramos su relación con la divergencia de la velocidad de flujo:⁸

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{J_m} \frac{DJ_m}{Dt} = \frac{1}{dV_m} \frac{D}{Dt} dV_m, \quad (1.2.20)$$

⁸Ver R. Aris, 1962 y A. Soria, 2022.

de modo que la ecuación de continuidad (1.2.17) también se puede expresar como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{J_m} \frac{DJ_m}{Dt}. \quad (1.2.21)$$

Esta forma de la ecuación (1.2.17) muestra con claridad la interpretación que se le ha dado. Además, muestra cómo la densidad y la dilatación son inversas, ya que la ecuación (1.2.21) equivale a:

$$\frac{D}{Dt} \ln(\rho J_m) = 0, \quad (1.2.22)$$

es decir que $\rho J_m = \text{constante}$, para toda partícula material.

Balance del ímpetu de una partícula material de fluido

El balance del ímpetu, expresado en la ecuación (1.2.2), se puede escribir para una partícula material, donde resulta:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}. \quad (1.2.23)$$

La ecuación (1.2.23) tiene la forma de un balance de fuerzas sobre la partícula material ξ . Del lado izquierdo tenemos el producto de la masa por la aceleración de la partícula material ξ . Esta forma del término se obtiene derivando los productos $\rho \mathbf{v}$ y $(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v}$, de la ecuación (1.2.2), considerando la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, y empleando la ecuación de continuidad (1.2.16) para simplificar los términos. Del lado derecho de (1.2.23) tenemos la suma de las fuerzas aplicadas sobre la misma partícula ξ , los dos primeros términos, $-\nabla p = \nabla \cdot (-p \mathbf{1})$ y $-\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$, representan densidades (de volumen) de las fuerzas que corresponden a las densidades (de área) de los flujos de momentum intrínseco y viscoso, respectivamente. El tercer término, $\rho \mathbf{g}$, representa la densidad (de volumen) de una fuerza externa, como la gravedad, donde $\mathbf{g}$, es la aceleración de la gravedad, que corresponde a la fuerza de gravedad por unidad de masa.

La ecuación (1.2.23) está también organizada de manera que del lado izquierdo expresa el **cambio temporal del estado dinámico (o mecánico)** de la partícula material, representado por la rapidez de cambio de la velocidad de flujo o aceleración del cuerpo ξ , en tanto que, el lado derecho expresa los **elementos del proceso dinámico** que actúan sobre la partícula ξ , los cuales son **una fuerza barimétrica o intrínseca, una fuerza viscosa y una fuerza gravitacional**. Los tres elementos del proceso representan densidades de fuerzas que, actuando sobre ξ , producen la modificación de su estado dinámico.

Balance de la energía cinética de una partícula material de fluido

Los primeros dos términos del balance de la energía cinética, ecuación (1.2.11) se pueden reagrupar, con ayuda de la ecuación de continuidad, para obtener la forma lagrangiana del balance de energía cinética en sistemas isotérmicos, que se puede expresar en palabras diciendo que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE FLUJO DE UNA PARTÍCULA MATERIAL, ξ , ES IGUAL A LA SUMA DE LOS FLUJOS DE POTENCIA EFECTUADOS POR TODAS LAS FUERZAS MENOS LOS EFECTOS DE DISIPACIÓN DE POTENCIA DEBIDOS A LA APLICACIÓN DE DICHAS FUERZAS,

que corresponde a la ecuación

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - (-p \nabla \cdot \mathbf{v}) - (-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}). \quad (1.2.24)$$

En el lado izquierdo de la ecuación (1.2.24) se representa la **rapidez de cambio del estado de energía cinética de flujo** de la partícula material ξ , en tanto que del lado derecho de la igualdad se representan los **procesos de flujo de potencia de todas las fuerzas**, hacia la partícula material ξ , menos los **procesos de disipación de potencia** en la partícula material ξ , debidos a las fuerzas intrínseca y viscosa aplicadas.

Cambios de estado y modos de transferencia

En resumen, es importante señalar que, en la expresión de los balances locales utilizados en la mecánica de fluidos, en su forma lagrangiana, entendemos los términos del lado izquierdo de las ecuaciones de balance, como rapidezces de cambio de las **funciones que indican los estados del sistema**. El sistema, en el nivel local, es la partícula material ξ . Los términos del lado derecho de la igualdad representan los cambios locales de las funciones, que **determinan los modos de transferencia que ocurren para efectuar el proceso de transporte**. Este ordenamiento de términos se muestra en el balance de masa, ecuación (1.2.17), en el balance del ímpetu, ecuación (1.2.23) y en el balance de la energía cinética, ecuación (1.2.24).

En general, sea ψ una función de estado y sean ϕ , $\hat{\mathbf{f}}$ y σ , funcionales que determinan el proceso, las cuales gobiernan las maneras como se realizan los cambios.

La ecuación general de cambio para una partícula material ξ , se puede expresar como:

$$\underbrace{\alpha \frac{D\psi}{Dt}}_{\text{rapidez de cambio de una función de estado del cuerpo puntual } \xi} = \underbrace{(-\nabla \cdot \phi)}_{\text{flujo local neto hacia el cuerpo puntual } \xi} + \underbrace{\rho \hat{\mathbf{f}}}_{\text{acción de campos externos sobre el cuerpo puntual } \xi} - \underbrace{\sigma}_{\text{disipación o sumideros en el cuerpo } \xi}, \quad (1.2.25)$$

y se resume en la tabla 1.1 para los balances de masa, ímpetu y energía cinética, que corresponden a estados másicos locales, estados dinámicos locales y estados energéticos locales, respectivamente:

Tabla 1.1. Funciones de estado y estructuras de proceso					
Balance local	Coeficiente	Función de estado	Estructuras del proceso		
	α	ψ	ϕ	$\hat{\mathbf{f}}$	σ
Masa	1	$\ln \rho$	$\mathbf{v}$	0	0
Ímpetu	ρ	$\mathbf{v}$	$p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}$	$\mathbf{g}$	0
Energía cinética	ρ	$\frac{1}{2}v^2$	$p\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}$	$\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$	$-p\nabla \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$

Similitudes y diferencias con los procesos termodinámicos

En la tabla 1.1 hemos extendido el término **funciones de estado**, a partir del **concepto de variables de estado termodinámico**, pero hemos de notar dos diferencias importantes: (1) la primera diferencia está relacionada con el tamaño del sistema, pues asumimos la validez de la hipótesis del equilibrio local, aplicada al cuerpo puntual ξ , de modo que el estado del sistema se define por conjuntos de valores de las funciones de estado del cuerpo puntual ξ , los cuales se relacionan por medio de las ecuaciones de estado del equilibrio termodinámico, en tanto que los sistemas de la termodinámica clásica son cuerpos mucho más extensos, cuyas variables de estado tienen un solo valor en toda la extensión del cuerpo, es decir que no son funciones de la posición espacial, pero satisfacen las mismas ecuaciones del equilibrio termodinámico. (2) El segundo señalamiento se relaciona con los límites del **significado de estado del sistema**, el cual

se amplía para abarcar el estado mecánico. En efecto, en el nivel local, la velocidad de flujo y la energía cinética local son consideradas funciones de estado, así como la densidad de masa, ρ . Las dos primeras no son variables termodinámicas, sino mecánicas, es decir que

ampliamos el conjunto de variables de estado a las variables mecánicas locales, por lo cual estudiamos los estados termomecánicos del sistema,

ya que consideramos, no sólo los estados termodinámicos, sino también los estados mecánicos. Dadas las restricciones de nuestro estudio, que se limita, solamente, a fluidos puros en condiciones isotérmicas, las funciones de estado termomecánico no incorporan aquellas otras, que surgen cuando hay cambios de temperatura, como la energía interna, o cambios de concentraciones en las especies químicas de mezclas fluidas, relacionadas con los cambios de las energías libres de Gibbs. Con todo, el estudio de los fluidos puros en condiciones isotérmicas todavía nos ha permitido

distinguir entre las variables que son características del estado del sistema y las estructuras del comportamiento de los procesos de cambio.

Así, podemos afirmar que **la distinción entre los estados del sistema y los procesos de cambio puede resultar muy útil para la convergencia conceptual de la termodinámica y la mecánica de los fluidos.**

Ejercicios

E.1.2.2-1. Derivada total y derivada material.

Encuentra la derivada material de A a partir de su derivada total.

E.1.2.2-2. Aceleración de flujo.

Encuentra la aceleración de flujo, $\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\xi}$,

(1) derivando la ecuación (1.2.12) con respecto al tiempo y

(2) considerando que $A = \mathbf{v}$ y usando la ecuación (1.2.14) y

demuestra que son equivalentes, utilizando las propiedades de los vectores.

E.1.2.2-3. Divergencia de la velocidad de flujo.

Encuentra el signo de la divergencia de la velocidad de flujo

(1) en un proceso de compresión y

(2) en un proceso de expansión y

comprueba tus resultados interpretando las ecuaciones (1.2.17) a (1.2.21).

1.2.3 Relaciones de comportamiento

En un nivel de generalidad amplio, aunque no tanto como el precedente que aplica para cualquier fluido, se establecen las **reglas de comportamiento** de clases específicas de fluidos, es decir que se estudia cómo los fluidos responden o se comportan ante la aplicación de fuerzas sobre ellos. Sus comportamientos son observados, medidos, caracterizados y finalmente expresados por medio de relaciones matemáticas que llamaremos **relaciones de comportamiento**. Estas relaciones causa-efecto establecen cómo las fuerzas aplicadas producen deformaciones en el fluido, o dicho con mayor precisión:

Las relaciones de comportamiento representan cómo los esfuerzos aplicados se relacionan localmente con la rapidez de deformación, o tasa de corte, en cualquier posición del flujo.

Comportamiento del fluido ideal

Los fluidos **se comportan idealmente cuando** su resistencia viscosa es despreciable ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$), por lo cual resisten solamente a las fuerzas de presión. La relación entre el tensor de esfuerzos

moleculares ($\boldsymbol{\pi}$) y la presión aplicada (P) sobre los fluidos ideales es:

$$\boldsymbol{\pi} = P\mathbf{1}, \quad (1.2.26)$$

donde, como ya se ha dicho, $\mathbf{1}$ es un tensor unitario o función delta de Kronecker.

La variable P es la **presión termodinámica**, relacionada con otras propiedades termodinámicas del fluido puro por medio de una **ecuación de estado**, que en condiciones isotérmicas se puede representar como $\rho = \rho(P)$

Comportamiento del fluido newtoniano incompresible

Los **fluidos newtonianos** exhiben una **relación lineal** entre el tensor de los esfuerzos viscosos $\boldsymbol{\tau}$ y el tensor de rapidez de deformación $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, cuando se les somete a un esfuerzo cortante, por pequeño que sea. Los esfuerzos moleculares $\boldsymbol{\pi}$ de los **fluidos incompresibles** se expresan como:

$$\boldsymbol{\pi} = p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} = p\mathbf{1} - \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.2.27)$$

donde la presión p es una **variable mecánica**, que ya no está relacionada con una ecuación de estado, lo cual sería contradictorio con la hipótesis de incompresibilidad.

La hipótesis de incompresibilidad es equivalente al uso de una pseudo-ecuación de estado:
 $\rho = \text{constante}.$

La **presión mecánica**, p , es una variable que en algunos casos es conocida y en otros debe ser especificada como parte de la solución al problema de flujo.

El agua, los líquidos inorgánicos, los lubricantes, azúcares como la glucosa y la glicerina se comportan en muchas situaciones como fluidos newtonianos incompresibles.

Comportamiento del fluido newtoniano compresible

Los **fluidos newtonianos compresibles** también exhiben una **relación lineal** entre el tensor de los esfuerzos viscosos $\boldsymbol{\tau}$ y el tensor de rapidez de deformación $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, cuando que se les somete a un esfuerzo cortante, sin embargo, a diferencia de los fluidos incompresibles, los fluidos compresibles exhiben un comportamiento viscoso dilatacional ante los esfuerzos normales, que se expresan como un término adicional, proporcional a un coeficiente de viscosidad dilatacional κ y proporcional también a la divergencia de la velocidad, que representa el proceso mecánico de la dilatación, ver arriba, la ecuación (1.2.19) y la discusión subsecuente. El tensor de los esfuerzos totales para el fluido compresible tiene la forma:

$$\boldsymbol{\pi} = P\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} = P\mathbf{1} - \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{1} \quad (1.2.28)$$

donde la presión P es la **presión termodinámica**, que se relaciona con otras variables de estado por medio de una ecuación de estado, como $\rho = \rho(P)$, en el caso de fluidos puros isotérmicos, o $\rho = \rho(P, T)$, en el caso de fluidos puros alotérmicos⁹.

La viscosidad dilatacional influye significativamente en algunos procesos específicos, como la absorción del sonido en gases poliatómicos y en la dinámica de líquidos con burbujas, sin embargo,

⁹Mientras la palabra *isotérmico*, que contiene el prefijo griego *isos* que significa *el mismo, lo mismo*, se refiere a procesos efectuados a una sola temperatura constante, la palabra *alotérmico* contiene también un prefijo griego, *álos* que significa *otro, distinto*, la cual empleamos para indicar procesos en los cuales cambia la temperatura, ya sea en el espacio, ya sea en el tiempo, ya sea en ambos, el espacio y el tiempo.

en la mayoría de las aplicaciones es posible evitar la estimación del coeficiente κ ; en el caso de los gases, tratándolos de manera semejante a los monoatómicos, los cuales tienen $\kappa = 0$, y en el caso de los líquidos, considerándolos incompresibles, en cuyo caso $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, y el valor de κ resulta irrelevante.

Comportamientos de los fluidos no-newtonianos

Hay una diversidad de líquidos no-newtonianos que se apartan de la relación lineal típica de los fluidos newtonianos, pero que pueden entenderse como una generalización de ellos: los **fluidos newtonianos generalizados, (FNG)**. Los fluidos cortante-adelgazantes o tixotrópicos, como algunas mieles, requieren ejercer menores esfuerzos cortantes conforme aumenta la rapidez de deformación y por el contrario, los fluidos cortante-espesadores, como ciertas salsas y pinturas, requieren mayores esfuerzos conforme aumenta la rapidez de deformación. Estos comportamientos no-lineales se representan a menudo por modelos empíricos polinomiales, entre los cuales, el más usado es seguramente el de Ostwald-de-Waele, o modelo de potencias:

$$\boldsymbol{\tau} = -m \left(\sqrt{\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^{n-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (1.2.29)$$

Hay otros modelos que llevan los nombres de quienes los han propuesto y pueden tener también dos parámetros ajustables, como el de Eyring o tres, como el de Ellis y el de Carreau. Representan comportamientos típicos de pinturas y lodos, así como de soluciones, suspensiones y emulsiones poliméricas. Los plásticos de Bingham o líquidos visco-plásticos, como la pasta de dientes, la sangre, algunas suspensiones de fibras, etc..., exhiben el comportamiento de los líquidos newtonianos, ya sea en su forma lineal (ver ecuación 1.2.29, con $n = 1$) o polinómica ($n \neq 1$), pero **sólo al aplicar un esfuerzo cortante que sea mayor** a un cierto valor llamado **esfuerzo de fluencia o umbral de esfuerzo, τ_0** :

$$\boldsymbol{\tau} - \tau_0 = -m \left(\sqrt{\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}} \right)^{n-1} \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (1.2.30)$$

Los líquidos viscoelásticos exhiben un comportamiento mixto, de líquido viscoso y de sólido elástico; hay melazas, soluciones, emulsiones y suspensiones de origen polimérico que son de este tipo, que se representan por un conjunto de relaciones de comportamiento que implican tiempos de relajación (θ), y representan comportamientos viscoelásticos, como los modelos de Maxwell, Kelvin, Burgers y Jeffreys, entre otros. Así, **el modelo de Maxwell** se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\tau} + \theta \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = -\mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (1.2.31)$$

Hasta aquí hemos hablado de los dos aspectos de la más amplia generalidad en el tratamiento local de la mecánica de fluidos, por una parte hablamos de las ecuaciones fundamentales que surgen de los principios físicos de conservación y de balance. Estas ecuaciones aplican a **los fluidos no-polares**, es decir, a los fluidos que **no presentan micro-estructura interna**. El segundo aspecto, las relaciones de comportamiento, se refieren a la clasificación de los fluidos, es decir de los materiales en sí, con relación a su comportamiento o respuesta en un campo de fuerzas mecánicas.

Existe, por otra parte, un conjunto extenso de teorías y metodologías específicas para tratar una amplia gama de **problemas de flujo**, que satisfacen algunas condiciones particulares de operación, las cuales simplifican el planteamiento de algunos problemas matemáticos a resolver y consecuentemente facilitan obtener sus soluciones.

1.2.4 Hidrostática

El caso más simple es el de **la hidrostática**, donde las fuerzas se aplican al **fluido en reposo y la velocidad es nula**, es decir $\mathbf{v} = 0$. De estas consideraciones, a partir de la Ecuación (1.2.2), surge la ecuación general de la hidrostática:

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad \text{o bien} \quad \nabla \mathcal{P} = 0, \quad (1.2.32)$$

donde $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + \rho g h(\mathbf{x})$ es un potencial de presión conocido como la presión modificada, que se usa con flujos incompresibles, cuyo valor constante indica el estado hidrostático. La ecuación (1.2.32) establece que en condiciones hidrostáticas, **todo cambio de presión en un fluido corresponde exclusivamente a la acción de las fuerzas gravitacionales**. De este concepto es posible extraer muchos resultados extremadamente útiles como los teoremas de Arquímedes, condiciones para el diseño de presas, de prensas hidráulicas y de instrumentos de medición como el barómetro de mercurio, los manómetros de tubo en U y el hidrómetro, entre otros¹⁰.

En el flujo de fluidos, hay un entendimiento de la hidrostática generalizada, en el sentido de considerar los movimientos del fluido como un cuerpo rígido, como parte de su hidrostática, ya que en el movimiento de un cuerpo rígido, **no existe movimiento relativo** de una porción cualquiera del fluido con respecto a cualquier otra porción. Los movimientos posibles en la hidrostática generalizada son los de los cuerpos rígidos, es decir, traslaciones y rotaciones, como un sólido. La aceleración de un cuerpo rígido se puede expresar como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{y} \times \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} - \Omega^2 \mathbf{y}, \quad (1.2.33)$$

donde la velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{y} \times \mathbf{\Omega}$ es la suma de una velocidad traslacional $\mathbf{V}$ más una velocidad rotacional $\mathbf{y} \times \mathbf{\Omega}$. Los términos de la aceleración se conocen como:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \text{aceleración traslacional},$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = \text{aceleración angular},$$

$$(\mathbf{y} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} = \text{aceleración de Coriolis y}$$

$$\Omega^2 \mathbf{y} = \text{aceleración centrífuga}.$$

La ecuación generalizada de la hidrostática resulta:

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{y} \times \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} \right) + \nabla p = \rho \Omega^2 \mathbf{y} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.2.34)$$

donde el término de la aceleración centrífuga se ha localizado del lado derecho de la ecuación (1.2.34), para enfatizar que, en algunos casos, la fuerza centrífuga equivale a lo que podríamos tomar como un campo centrífugo externo.

1.2.5 Flujos reptantes y laminares

El **número de Reynolds (Re)** es la razón de dos magnitudes en un flujo. Podemos entenderlo como una **razón de dos fuerzas**: el numerador proporcional a la magnitud de las fuerzas convectivas

¹⁰Ver, por ejemplo, los temas de hidrostática tratados en el libro de Whitaker, 1968, secciones 2.3 a 2.7 y los problemas propuestos como ejercicios 2.1 a 2.14, al final del capítulo.

o inerciales $F_c = \rho V^2$ y el denominador proporcional a la magnitud de las fuerzas viscosas $F_v = \mu V/L$, de modo que $Re = F_c/F_v$. También puede ser útil, en el contexto de nuestro estudio, entender el número de Reynolds como la **razón de dos tiempos característicos**: en el numerador el tiempo característico de la propagación de la difusión viscosa $t_v = L^2/\nu$, y en el denominador, el tiempo característico del movimiento convectivo $t_c = L/V$, es decir que $Re = t_v/t_c$. Aquí $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática, con lo cual podemos comprobar la equivalencia de las dos interpretaciones del número de Reynolds. Los **flujos reptantes** son lentos, escurren adheridos a las paredes de los sólidos que limitan su espacio de flujo y las fuerzas viscosas son mucho más importantes que las inerciales, por lo que las últimas no se toman en cuenta en la formulación específica de las ecuaciones de cambio:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.2.35)$$

Su número de Reynolds es relativamente pequeño; en sentido estricto debería ser $Re \rightarrow 0$. Bajo estas condiciones, **los flujos son laminares** y frecuentemente pueden considerarse unidireccionales en el sentido de tener una sola componente del vector de velocidad distinta de cero, como en el caso de flujos radiales en geometrías cilíndrica y esférica, flujos axiales en tubos, regiones anulares y canales de flujo, flujos en película delgada, como en las celdas de Hele-Shaw, en el flujo de Couette plano o entre dos cilindros cuando uno de ellos gira sobre su eje axial, etc... Algunas de las aplicaciones más importantes de los flujos reptantes se dan en la **viscometría**, es decir la teoría para el diseño de viscosímetros, que puede extenderse a la **reometría**, que es su equivalente para medir los parámetros reométricos de los fluidos no-newtonianos.

1.2.6 Flujos ideales y potenciales

El extremo opuesto es analizado por la teoría de los flujos ideales. La idealidad tiene una connotación histórica, ya que las ecuaciones de balance del ímpetu, desarrolladas por Euler, con anterioridad al descubrimiento de la viscosidad, consideraban obviamente los efectos inerciales sin la contraposición de los efectos viscosos y podían representar con bastante precisión muchos resultados experimentales. Los fluidos que mejor se adaptaban a las predicciones de las ecuaciones de Euler, como el aire, eran considerados ideales, en tanto que los que se alejaban, como el agua en similares condiciones, dejaban de ser considerados ideales. Actualmente reconocemos que la condición de idealidad recae parcialmente sobre las condiciones de operación, es decir, sobre los flujos, además de la importancia de los materiales fluidos en sí mismos. **Podemos asociar la idealidad a una condición sobre el número de Reynolds**, en el límite cuando $Re \rightarrow \infty$.

Entre las teorías de los flujos ideales de mayor importancia y utilidad destaca la de los **flujos potenciales** y los **flujos de Bernoulli**, que satisfacen la ecuación:

$$\frac{1}{2}\Delta v^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g\Delta h = 0, \quad (1.2.36)$$

para dos puntos cualesquiera sobre una línea de corriente o una línea vorticiosa, así como para los flujos irrotacionales, donde la notación $\Delta f = f|_2 - f|_1$. En la Ecuación (1.2.36) los tres términos del lado izquierdo son la energía cinética, el trabajo interno o energía intrínseca y la energía potencial, por unidad de masa. La suma de estas tres formas de la energía, en algún punto del flujo, es igual a la suma de las mismas tres, en cualquier otro punto, sobre una línea de corriente o vorticiosa.

Los flujos potenciales bidimensionales conducen a un conjunto de soluciones por transformaciones conformes que ha permitido optimizar el diseño de formas aerodinámicas en las que se ha basado el diseño de alas de avión. La teoría de los flujos potenciales tridimensionales es

una extensión de la teoría bidimensional, bajo la consideración de simetría con respecto al ángulo azimutal (ϕ) de las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ). Al estimar la fuerza total de un flujo ideal sobre la superficie de una esfera sólida, resulta igual al peso de la esfera menos el del líquido desplazado por ella, es decir, menos la fuerza de flotación. Este resultado contradice la experiencia, que indica un efecto adicional de arrastre debido al flujo viscoso alrededor de la esfera y que por ello fue conocido como la **paradoja de D'Alembert** (1717-1783), en la época que aún se ignoraba la existencia de las fuerzas viscosas.

1.2.7 Flujos en la capa límite

El éxito referido anteriormente, logrado por las teorías de los flujos ideales, hacía de la paradoja de D'Alembert un elemento perturbador y fue Ludwig Prandtl y su grupo de la Universidad de Göttingen, en los inicios del Siglo XX, quien propuso la **teoría de la capa límite, que concilia los resultados** exitosos de la teoría del flujo potencial con la evidencia al experimentar el arrastre viscoso debido al flujo sobre el objeto sólido. Esta teoría reconoce la existencia de una delgada capa de fluido, cerca de la pared del sólido, en la que **los efectos viscosos son tan importantes como los inerciales**. En esta capa límite no es posible despreciar la disipación viscosa, hacerlo llevaría a predecir, por ejemplo, que un avión volando en línea recta con una velocidad constante, podría mantener su vuelo indefinidamente, es decir, sin necesidad de turbinas ni combustible. La teoría de la capa límite conduce, entre otras cosas, a estimar el coeficiente de rozamiento y el espesor de la capa límite. Éste es muy pequeño, comparado con las dimensiones del objeto sólido, por lo cual **se considera correcto acoplar la solución para el flujo ideal** sobre el objeto sólido, como condición a la frontera fuera de la capa límite.

1.2.8 Surgimiento de la turbulencia

Así pues, en la capa límite existen notables cambios de la velocidad del fluido, pues cambia desde cero en la región de contacto con la pared sólida inmóvil, hasta algún valor típico del flujo, con el límite del flujo ideal, fuera de la capa límite. En la medida que aumenta la velocidad del fluido, aumenta su energía cinética. Al interior de la capa límite, conforme el flujo se acerca a la pared, la velocidad decae, lo cual implica una rapidez de pérdida de energía cinética por disipación viscosa que se vuelve más, y más elevada conforme se eleva el flujo. Mientras la energía cinética es proporcional a la velocidad al cuadrado, la tasa de disipación viscosa para los fluidos newtonianos es proporcional al cuadrado del gradiente de la velocidad local. Esta rapidez de disipación viscosa está limitada, en las paredes sólidas, por el gradiente de la velocidad del fluido en la capa límite y **no puede contener indefinidamente con el incremento de la energía cinética** en el flujo fuera de la capa límite, que crece también conforme la velocidad aumenta. Así, cerca del límite de la capa límite, llega el punto en el que el fluido, moviéndose muy cerca de la pared sólida con flujo laminar, sólo en una dirección, cambia cualitativamente su movimiento, **apareciendo movimientos transversales, o secundarios**, a la componente principal de la velocidad. Este cambio local de dirección hace posible que el flujo siga incrementando su energía cinética conforme aumenta la velocidad y consecuentemente el número de Reynolds, sin que la disipación viscosa aumente en la misma proporción que lo hacía en el flujo unidimensional de régimen laminar. El efecto de este cambio da lugar al **surgimiento de la turbulencia**. Esta discusión se aborda con mayor detalle al inicio del capítulo 7.

1.2.9 Flujos turbulentos

En los flujos turbulentos existe una estructura en cascada de remolinos turbulentos, desde los más pequeños, que viajan contenidos dentro de los intermedios y éstos viajan en otros mayores, y así sucesivamente hasta los de mayor tamaño, que compite con el tamaño del aparato o dispositivo de flujo, como fue observado ya desde el Siglo XVI por Leonardo da Vinci, y desde el siglo XV

por los sabios anahuacas, quienes dejaron también constancia de ello en los códices de su tiempo, como podemos apreciar en la figura 7.2. **Los remolinos son estructuras tridimensionales que mantienen su identidad durante algún tiempo**; los más pequeños son **disipativos**, es decir que son aquellos donde ocurre el mecanismo de disipación de la energía cinética, transfiriendo el movimiento de la escala local del flujo hacia la escala de los movimientos moleculares, con el consecuente aumento de la energía interna. Los remolinos de tamaño intermedio transfieren la energía cinética, de los tamaños superiores a los inferiores y los de mayor tamaño son remolinos que contienen la mayor parte de la energía cinética de flujo.

El estudio de los flujos turbulentos se ha abordado desde un enfoque fenomenológico y desde un enfoque estadístico. Ambos parten del tratamiento de la velocidad del fluido como una variable estocástica (aleatoria) cuyos valores locales-instantáneos $v_k; k = 1, 2, 3$, se pueden expresar en términos de su valor medio local, $\bar{v}_k$, al que se superponen sus fluctuaciones turbulentas v'_k de modo que $v_k = \bar{v}_k + v'_k$. Para obtener los valores medios se utilizan principalmente dos tipos de promedio: (1) El enfoque fenomenológico, que utiliza el promedio temporal sobre un intervalo de tiempo de magnitud T , da lugar a las ecuaciones de balance tiempo ajustadas, donde surgen los esfuerzos turbulentos, conocidos como esfuerzos de Reynolds, que se suman a los esfuerzos laminares en un tensor de esfuerzos totales. Para representar los esfuerzos turbulentos Prandtl desarrolló su teoría de la longitud de mezclado en 1905 y posteriormente Blasius, von Kármán, Schlichting y Taylor, entre otros, propusieron también expresiones para los esfuerzos de Reynolds. Estas expresiones son necesarias para resolver las ecuaciones de flujo medio y se conocen en el ámbito matemático como ecuaciones de cerradura. (2) Por otra parte, el promedio de ensamble sobre un conjunto de realizaciones ha dado lugar al segundo enfoque: la teoría estadística de la turbulencia, que representa un enorme avance en la descripción y comprensión de estos flujos, ganadas en el Siglo XX con los trabajos de varios autores entre los que habría que destacar a Kolmogorov.

1.2.10 Otros flujos importantes

Los temas o teorías particulares tratadas por la mecánica de fluidos son inagotables, algunos ejemplos son: ondas en fluidos, flujos compresibles, flujos estratificados, flujos burbujeantes, flujos en medios porosos, transporte neumático, flujos en ambientes de microgravedad, microflujos y nanoflujos, reología, flujos en sistemas al vacío, magnetohidrodinámica y un largo etc... Habría que agregar también que para muchas aplicaciones de ingeniería, como el diseño y la operación de sistemas de flujo, basta con el uso de los balances integrados sobre todo el sistema o el aparato de flujo, complementados por información teórica y experimental sobre los coeficientes utilizados. Si los balances se obtienen por integración de las ecuaciones de continuidad, de momentum y de energía mecánica, que son ecuaciones locales e instantáneas, en una región del espacio, correspondiente a todo o a parte del aparato de flujo, obtenemos los balances integrados, propiamente dichos. Esta forma de proceder constituye los métodos de promediado volumétrico, promediado superficial y otros.

1.3 El tratamiento integral

1.3.1 Flujos y caudales

El enfoque integral se refiere a establecer los principios de balance en piezas completas de un equipo o redes largas y complejas de tuberías. Las variables y parámetros necesarios para elaborar dichos balances, deben ser representativos de los flujos en tales sistemas. Así, para determinar el flujo que sale de un tubo, lo más sencillo es recoger el fluido que sale en un intervalo dado de tiempo. Luego, a partir de la masa del fluido recuperado M y del tiempo transcurrido, t , es inmediato definir el **flujo másico** w como la razón de la masa entre el tiempo, es decir $w = M/t$. Si el fluido es un líquido, en vez de cuantificar la masa recuperada, es posible medir el volumen

correspondiente y definir el **caudal o flujo volumétrico** Q como el volumen de fluido recuperado V entre el tiempo transcurrido t , es decir: $Q = V/t$. La masa M y el volumen V se relacionan por medio de la densidad del fluido $\rho = M/V$, de modo que $w = \rho Q$. Además, se puede asociar una **velocidad media de flujo** $\langle v \rangle$ a la totalidad del fluido saliendo del tubo. Dicha velocidad se puede asociar con una longitud, la que habría recorrido el fluido en el tubo, en el tiempo de un segundo si todo el fluido que sale viajara a una velocidad constante. Dicha velocidad es $\langle v \rangle$, la velocidad media de flujo. También podemos visualizar $\langle v \rangle$, a partir del volumen V , si consideramos la forma cilíndrica del tubo y respondemos la pregunta: ¿qué longitud L de tubo sería aquella donde se contiene, exactamente, el volumen de fluido recuperado a la salida, en el tiempo de un segundo? El volumen V debería ser el que salió del tubo en el tiempo t ? Entonces, si el área de la superficie de salida del tubo S es multiplicada por dicha longitud L tenemos que el volumen interno del cilindro (el tubo) es $V = SL$. De lo anterior resulta que $\langle v \rangle = L/t = Q/S$.

Con variables como las anteriores, representativas de las cantidades integradas o globales de un flujo dado, que pueden determinarse experimentalmente de maneras sencillas, podemos establecer relaciones que correspondan a las observaciones. Esta ha sido la manera de proceder de los incansables hidrodinamicistas de los Siglos XVII y XVIII, que llevaron a descubrimientos fundamentales para el desarrollo de la mecánica de fluidos. Como un ejemplo tomemos lo referido por Castelli, en una carta a Galileo, el 12 de noviembre de 1625. Dice Castelli:

“En estos días he demostrado geométricamente con mucha facilidad la siguiente proposición: que la proporción entre la cantidad de agua que escurre por un río cuando este tiene cierta altura de agua y la que escurre en el mismo río cuando tiene otra altura está en razón compuesta de la velocidad con la velocidad y de la altura con la altura.”

Galileo respondió que dicha proposición le parecía “*muy clara, siendo que, al mantenerse la misma altura, el agua que escurre es como la velocidad y, manteniéndose la misma velocidad, ella es como la altura; por tanto, combinando alturas y velocidades, las aguas que escurren tienen la proporción compuesta entre las dos.*” (Citas tomadas de “*El agua según la ciencia, Vol. I*” por Enzo Levi, 1985, p. 189).

Las relaciones expresadas por Castelli y Galileo se refieren a un río de sección transversal rectangular, con ancho constante (a), lo cual para ellos seguramente era obvio. Las variables en juego son “*la cantidad de agua que escurre*” (w), “*la altura de agua*” (h) y “*la velocidad*” ($\langle v \rangle$).

La proposición de Castelli se puede expresar matemáticamente como:

$$\frac{w_1(h_1)}{w_2(h_2)} = \left(\frac{\langle v \rangle_1}{\langle v \rangle_2} \right) \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \quad (1.3.1)$$

Si multiplicamos y dividimos el lado derecho de (1.3.1) por la densidad constante del fluido, ρ , y por el ancho constante del río, a , obtenemos una expresión en las unidades apropiadas para los flujos máscos w_1 y w_2 , es decir, $w_k = \rho \langle v \rangle_k S_k$; $k = 1, 2$, en unidades de (masa/tiempo), donde $S_k = ah_k$, es el área de la superficie transversal del río.

La proposición de Castelli se demuestra apoyándose en otra proposición previa de él mismo, que se lee: “*las secciones de un mismo río descargan, en tiempos iguales, iguales cantidades de agua, aunque las secciones mismas sean desiguales*”. Lo cual equivale a establecer la ecuación de continuidad integrada, a régimen estacionario, $w_1 = w_2$, o su equivalente $\Delta w = w_2 - w_1 = 0$, Ec. (7.1-3) de Bird *et al.*

He querido relatar la conversación anterior, entre Castelli y Galileo, para hacer notar cómo, al ir conceptualizando la hidrodinámica, la elaboración de los conceptos y las relaciones entre ellos, han requerido de un enorme esfuerzo que conjuga (1) la observación cuidadosa, (2) la detallada descripción de lo que se observa, (3) las hipótesis sobre dichas observaciones y (4) los acuerdos sobre los nombres de los conceptos y sobre las relaciones entre ellos. Por ejemplo, el término de la “*razón compuesta*” entre alturas y velocidades, se refiere al lado derecho de la ecuación (1.3.1).

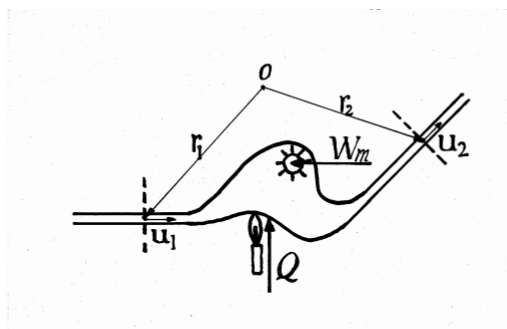


Figura 1.1: Sistema integral de flujo. Los vectores unitarios $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ se localizan en los planos de entrada y salida, respectivamente, en la dirección del flujo. $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son vectores de posición de los planos de entrada y salida, respectivamente, con respecto a un origen O arbitrario. W_m es la rapidez de trabajo mecánico realizado por el entorno sobre el sistema y Q es el calor suministrado por el entorno al sistema.

1.3.2 Balances postulados y balances integrados

El desenvolvimiento de relaciones entre una diversidad de cantidades importantes en determinados fenómenos de flujo, como la relación de velocidades y alturas, de la sección anterior, dió lugar a establecer, con el tiempo y la acumulación de observaciones, principios de balances y principios de conservación de cantidades importantes. Varios principios se establecieron en ríos, canales, ductos de alimentación de agua potable, drenajes, etc..., es decir, en los objetos completos y en la integridad de los equipos o instalaciones de flujo. De esta manera diversos sistemas fueron dando lugar a la definición del concepto de lo que aquí llamamos **sistemas integrales de flujo**, cuyos elementos y notación pueden verse en la Figura 1.1.

Hay **dos maneras de elaborar balances integrales en un sistema integral de flujo**:

1. **Balances postulados.**- Principiar por definir un conjunto suficiente de cantidades representativas en el dispositivo completo y luego postular balances, es decir, relaciones de balance o de conservación, donde intervienen dichas cantidades, definidas previamente.
2. **Balances integrados.**- Elaborar balances locales de cantidades definidas para cualquier punto del sistema de flujo y establecer sus condiciones iniciales y a la frontera. Luego, sin considerar la solución de estos modelos, **integrar los balances locales** en todo el dominio del dispositivo; aplicar herramientas matemáticas, principalmente teoremas integrales, para expresar de manera más adecuada algunos términos de las expresiones integrales y definir, finalmente, ciertas cantidades integrales, como propiedades representativas del flujo en todo el dispositivo, es decir, como **cantidades no-locales**.

Los balances postulados y los balances integrados deben ser equivalentes, puesto que representan el mismo proceso físico; además, aquellos que han sido integrados de las ecuaciones locales (1.2.1) a (1.2.4), permiten definir la correspondencia de sus cantidades integradas con las variables y parámetros del balance postulado correspondiente. Como ocurrió en el desarrollo de la hidráulica, es frecuente que primero se elaboren balances postulados con cantidades representativas de todo el artefacto de flujo, y que posteriormente se propongan balances locales, que al ser integrados, dan lugar a identificar sus términos aquellos que les corresponden en el enfoque postulacional. La integración también permite desarrollar métodos de estimación de los coeficientes, con la ayuda de las ecuaciones integradas y de métodos de promediado adecuados.

Los balances integrales en un sistema integral de flujo, los cuales pueden ser postulados o integrados a partir de los balances locales correspondientes, son como sigue:

1. El **balance integral de materia**, que puede establecerse diciendo que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DE LA MASA TOTAL m_{tot} EN EL SISTEMA INTEGRAL DE FLUJO EQUIVALE AL FLUJO MÁSIKO NETO QUE INGRESA AL SISTEMA:

$$\frac{d}{dt}m_{tot} = -\Delta w, \quad (1.3.2)$$

donde $-\Delta w = -(w_2 - w_1)$ es el flujo másico que entra (w_1) menos el flujo másico que sale (w_2), es decir, el flujo neto que ingresa al sistema. Además, $w_k = \rho_k \langle v_k \rangle S_k; k = 1, 2$.

2. El **balance integral de momentum lineal** o **balance integral del ímpetu** equivale a establecer que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DEL MOMENTUM LINEAL TOTAL (O ÍMPETU TOTAL) $\mathbf{P}_{tot}$ EN EL SISTEMA INTEGRAL DE FLUJO EQUIVALE AL ÍMPETU, O FLUJO NETO DE MOMENTUM QUE ADQUIERE EL SISTEMA INTEGRAL DE FLUJO MÁS LA SUMA DE LAS FUERZAS DE PRESIÓN EN ENTRADAS Y SALIDAS, MÁS LAS FUERZAS DE ARRASTRE EN LAS SUPERFICIES SÓLIDAS MÁS LAS FUERZAS DE GRAVEDAD, **SOBRE EL FLUIDO**:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_{tot} = -\Delta \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} w + pS \right) \mathbf{u} + \mathbf{F}_{s \rightarrow f} + m_{tot} \mathbf{g}, \quad (1.3.3)$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección del flujo, en el centroide del plano de una entrada o de una salida de la región integrada, ver figura 1.1.

3. El **balance integral del momento angular** establece que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DEL MOMENTO ANGULAR TOTAL $\mathbf{L}_{tot}$ EQUIVALE AL FLUJO NETO DE MOMENTO ANGULAR QUE ADQUIERE EL FLUIDO EN EL SISTEMA INTEGRAL DE FLUJO, MÁS LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE TORSIÓN DE LA PRESIÓN EN LAS SUPERFICIES DE ENTRADAS Y SALIDAS, MÁS LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE TORSIÓN EN LAS SUPERFICIES SÓLIDAS, MÁS EL MOMENTO DE TORSIÓN DE LAS FUERZAS EXTERNAS, **SOBRE EL FLUIDO**:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{tot} = -\Delta \left\{ \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{v} w + pS \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \right\} + \mathbf{T}_{s \rightarrow f} + \mathbf{T}_{ext}, \quad (1.3.4)$$

donde $\mathbf{r}$ es un vector de posición desde un origen fijo dado, hasta el centroide de un plano de entrada o salida de la región integrada, ver figura 1.1.

4. El **balance integral de la energía mecánica**, que establece que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DE LA ENERGÍA MECÁNICA TOTAL, LA CUAL ES LA SUMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA TOTAL K_{tot} MÁS LA ENERGÍA POTENCIAL TOTAL Φ_{tot} , EN EL SISTEMA INTEGRAL DE FLUJO, EQUIVALE AL FLUJO NETO DE DICHA ENERGÍA MECÁNICA, MÁS LA RAPIDEZ DEL TRABAJO MECÁNICO REALIZADO POR LAS FUERZAS DE PRESIÓN EN LAS ENTRADAS Y SALIDAS DEL SISTEMA, LA CUAL ES CONOCIDA TAMBIÉN COMO EL FLUJO DE ENERGÍA INTRÍNSECA AL SISTEMA, MÁS LA RAPIDEZ DEL TRABAJO REALIZADO POR SUPERFICIES MÓVILES W_m MENOS LA RAPIDEZ DE LA PÉRDIDA DE CAPACIDAD DE REALIZAR TRABAJO, POR LOS EFECTOS DE DISIPACIÓN DEBIDOS A LA COMPRESIÓN O EXPANSIÓN, E_c , Y A LA DISIPACIÓN

VISCOSA, E_v , **SOBRE EL FLUIDO:**

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot}) = -\Delta \hat{E}_m w + W_m - E_c - E_v, \quad (1.3.5)$$

donde $\hat{E}_m = \left(\frac{1}{2} \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho} \right)$ es la energía por unidad de masa del fluido, que equivale a la suma de las energías cinética, potencial e intrínseca, por unidad de masa, en entradas y salidas del sistema integral de flujo.

5. El **balance integral de energía total**, el cual establece que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DE LA ENERGÍA TOTAL, LA CUAL ES LA SUMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA TOTAL K_{tot} MÁS LA ENERGÍA POTENCIAL TOTAL Φ_{tot} MÁS LA ENERGÍA INTERNA TOTAL U_{tot} EN EL SISTEMA INTEGRAL EQUIVALE AL FLUJO NETO DE ENERGÍA TOTAL $(E_m + U)$, QUE INCLUYE LA RAPIDEZ DE TRABAJO DEBIDA A LAS FUERZAS DE PRESIÓN, LA CUAL ES LLAMADA ENERGÍA INTRÍNSECA, MÁS LA RAPIDEZ DEL TRABAJO REALIZADO POR SUPERFICIES MÓVILES W_m , **SOBRE EL FLUIDO** MÁS EL CALOR Q **AGREGADO AL FLUIDO** DESDE EL ENTORNO:

$$\frac{d}{dt}(K_{tot} + \Phi_{tot} + U_{tot}) = -\Delta(\hat{E}_m + \hat{U})w + W_m + Q, \quad (1.3.6)$$

donde $(\hat{E}_m + \hat{U}) = \frac{1}{2} \frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle} + \hat{\Phi} + \frac{p}{\rho} + \hat{U}$ es la energía mecánica más la energía intrínseca, más la energía térmica, por unidad de masa.

6. El **balance integral de energía interna** considera todos los cambios de energía asociados a cambios de temperatura y a cambios de fase. Establece que

LA RAPIDEZ TEMPORAL DE CAMBIO DE LA ENERGÍA INTERNA TOTAL U_{tot} EN EL SISTEMA INTEGRAL EQUIVALE AL FLUJO NETO DE LA ENERGÍA INTERNA $U = \hat{U}w$ MÁS LA RAPIDEZ DE DISIPACIÓN REVERSIBLE DE LA ENERGÍA MECÁNICA POR EFECTOS DE COMPRESIÓN/EXPANSIÓN E_c , MÁS LA RAPIDEZ DE DISIPACIÓN IRREVERSIBLE POR EFECTOS VISCOSOS E_v , **SOBRE EL FLUIDO**, MÁS EL CALENTAMIENTO Q **AGREGADO AL FLUIDO** DESDE EL ENTORNO:

$$\frac{dU_{tot}}{dt} = -\Delta \hat{U}w + E_c + E_v + Q, \quad (1.3.7)$$

donde $\hat{U}$ es la densidad de energía interna por unidad de masa. Este balance también es conocido como el **balance integral del calor** en un sistema abierto; se obtiene restando el balance integral de energía mecánica, Ecuación (1.3.5), del balance integral de energía total, Ecuación (1.3.6). Es importante notar que siempre $E_v > 0$, en tanto que $E_c > 0$ en los procesos de compresión, en tanto que $E_c < 0$ en los procesos de expansión, por lo que la disipación viscosa siempre induce un calentamiento interno, en tanto que los procesos de compresión/expansión inducen calentamiento/enfriamiento internos, respectivamente.

7. La **ecuación integral de la entropía** se obtiene a partir del balance integral de energía interna, Ecuación (1.3.7), luego de utilizar la ecuación fundamental para $U(S, V)$, que es la conocida ecuación de Gibbs de la termodinámica, representándola en su forma de diferencial con respecto al tiempo.

LA ECUACIÓN DE LA ENTROPÍA ES CONSECUENCIA DEL BALANCE INTEGRAL DE ENERGÍA INTERNA Y DE LA DEFINICIÓN DE LA ENTROPÍA:

$$\frac{dS_{tot}}{dt} = -\Delta\hat{S}w + \frac{E_v + Q}{T} \quad (1.3.8)$$

donde S_{tot} es la entropía total del sistema integral, en tanto que $\hat{S}$ es la densidad de entropía por unidad de masa.

8. La cantidad expresada en el balance (1.3.8) como una razón, corresponde a la **rapidez de producción de entropía**, de manera que el **segundo principio de la termodinámica** se puede formular estableciendo que

$$\frac{E_v + Q}{T} > 0. \quad (1.3.9)$$

Es muy importante señalar que, en un fluido constituido por una sola especie química,

LA PRODUCCIÓN DE ENTROPÍA DE UNA SUSTANCIA PURA TIENE DOS CONTRIBUCIONES, UNA DEBIDA A LA DISIPACIÓN VISCOSA Y OTRA DEBIDA AL CALENTAMIENTO. EL CAMBIO DE LA ENERGÍA INTERNA TIENE, ADEMÁS, UN TÉRMINO E_c , ASOCIADO A LOS PROCESOS REVERSIBLES DE COMPRESIÓN Y EXPANSIÓN, VER ECUACIÓN (1.3.7).

Nótese que el término E_c no aparece en la ecuación de la entropía, (1.3.8), porque **no contribuye** a modificarla, aún cuando E_c contribuye a los cambios de la energía interna, que corresponden a cambios de la temperatura del fluido en los procesos de compresión y expansión, o a cambios de fase. E_c **es un término identificado, en el ámbito de la termodinámica clásica, con el producto $-P\Delta V$** , el cual aparece en la expresión del primer principio de la termodinámica, aplicado a dichos procesos de compresión y expansión en un sistema cerrado, de modo que $w = 0$ y se acostumbra escribir como:

$$\Delta U = Q - P\Delta V.$$

donde el signo de $\Delta V = V_{final} - V_{inicial}$ es negativo en los procesos de compresión y positivo en los procesos de expansión. Sin embargo, como se ha demostrado, E_c no contribuye a la entropía del sistema, como muestra el balance de entropía (1.3.8), debido a la aplicación de la relación de Gibbs. Esto nos permite concluir que E_c **es un término de producción o consumo de energía térmica reversible**.

Ejercicios

E.1.3.2-1. Balance integral de la entropía

Obtener la ecuación (1.3.8) a partir del balance de energía interna, ecuación (1.3.7), y de la ecuación de Gibbs para $U(S, V)$.

2. Modelos, su significado y aplicación

2.1 Algunos aspectos elementales

La descripción del funcionamiento de un instrumento o equipo con flujo de un fluido da elementos para elaborar el análisis de los fenómenos que producen el comportamiento observado. La descripción principia por determinar y delimitar el sistema, identificar y reconocer sus elementos, así como las relaciones existentes entre ellos y con los elementos que están fuera del sistema, pero que interactúan con elementos que forman parte del mismo. En este propósito la descripción conceptual cristaliza en representaciones basadas en las leyes generales de balance y conservación, complementadas con principios de aplicación general y relaciones de comportamiento propias de los materiales del sistema. El análisis desemboca en modelos y sus soluciones, generalmente expresados en el poderoso lenguaje de las matemáticas. Estos modelos representan el comportamiento del sistema y están sujetos a un conjunto de hipótesis o condicionamientos que son susceptibles de estimaciones, verificaciones y cambios para lograr mejores resultados, cuando son necesarios. Entendemos como buenos resultados aquellos que permiten establecer una correspondencia amplia entre las predicciones teóricas y los resultados de las determinaciones experimentales. Sus diferencias, tanto en valores como en tendencias, permiten pasar a la siguiente fase del trabajo: la interpretación. La estimación del significado de las diferencias entre los resultados del modelo y los de las mediciones experimentales tiene un enorme margen para la interpretación, que permite proponer nuevas hipótesis de trabajo, que conducen a nuevos experimentos y nuevos modelos, posiblemente con la adaptación de nuevos accesorios de los instrumentos o métodos de medición. Todo esto con el afán de lograr mejores correspondencias entre la teoría y la práctica, que se traducen en adquirir mayor conocimiento del sistema bajo estudio, cuando se estima necesario. A continuación una síntesis del significado de estas tres etapas:

1. La descripción

Describir es figurar o delinear algo para representarlo cabalmente. Una descripción de algo se obtendría al responder la pregunta: ¿Qué hay allí?, es decir ¿Cuál es nuestro objeto de estudio? ¿Cuál es el sistema?

En otras palabras, para hacer más específica esta pregunta, podríamos preguntar...

... ¿Qué notas? ¿Qué ves? ¿Qué oyes? ... ¿Qué hueles? ¿Qué tocas?, es decir ¿cómo se manifiesta o comporta el sistema?

Las respuestas a estas preguntas nos hacen reflexionar sobre la presencia y las particularidades de los objetos.

Pero las cosas que más nos interesan pueden estar cambiando significativamente, de modo que en el curso de nuestra observación se puede notar su evolución y su desplazamiento; entonces la descripción de este algo cambiante debería incluir la pregunta:

¿Cómo cambia lo que hay allí?, es decir ¿cómo evoluciona y se desplaza el sistema o partes del mismo?

2. El análisis

El análisis es la distinción y separación de las partes de un sistema hasta llegar a conocer sus principios o elementos y las relaciones entre ellos y con el entorno.

El análisis incluye la aplicación de los principios y métodos teóricos a cada una de las partes del sistema, bajo un conjunto de suposiciones y condiciones que relacionan unas partes con otras y con el entorno. Las preguntas que guían la elaboración de los modelos serían aquellas que representan el comportamiento de los elementos del sistema, así como aquellas que cuantificarían cómo los resultados de las observaciones se relacionan por medio de los modelos elaborados.

Algunas preguntas que surgen en el análisis son:

¿Cuáles son los elementos del sistema? ¿Qué hay y qué ocurre a cada una de las partes del sistema? ¿Cómo se relaciona lo que pasa en cada parte del sistema con lo que ocurre en las otras? ¿Cómo afecta al sistema lo que está fuera del mismo y viceversa?

3. La interpretación

Interpretar es encontrar el sentido de una cosa, traducir de una lengua a otra, explicar lo que ocurre. La interpretación no es única, los hechos pueden ser entendidos de diferentes modos, de acuerdo a los marcos conceptuales que se elijan para indagar su sentido, pero en todo caso, la interpretación conecta las observaciones con las predicciones del modelo en cuestión y propone posibles razones de sus semejanzas y diferencias, que pueden ser puestas a prueba y que pueden conducir a elaborar y probar otros modelos.

2.1.1 Observación y descripción

“Describir es valorar.”

Patricia Carini (2001).

La autora de la frase que presenta esta sección ha escrito importantes reflexiones acerca de la descripción. En sus párrafos podemos apreciar cómo describir es inseparable de observar, de tal manera que la observación forma con la descripción, como un par de piernas que nos permiten caminar para adentrarnos en los senderos de nuestro pensamiento creativo, organizándolo, aclarándolo y descubriendo aspectos y conexiones que no habríamos notado anteriormente. A continuación, algunas ideas más en el texto de Carini:

“Al describir hago una pausa, y al hacer una pausa atiendo. Describir requiere alejarme y considerar. Describir requiere que no me apresure a juzgar o concluir antes de haber mirado. Describir abre espacio a algo para que esté totalmente presente. Describir es un trabajo particularmente lento. Debo dejar de lado categorías familiares para clasificar o generalizar. Tengo que quedarme con el sujeto de mi atención. Le tengo que dar tiempo para hablar, para mostrarse. Tengo que confiar en que tiene sentido lo que estoy atendiendo, que no es un simple evento accidental o fortuito. Para descubrir la coherencia del tema y cómo persiste en el mundo, tengo que cambiar

deliberadamente mi propia perspectiva en relación con él. Tengo que ver y oír cómo puede cambiar de acuerdo al contexto o al tiempo."

...

"El describir me enseña que el sujeto de mi atención siempre excede lo que puedo ver. Al describir una pintura, una roca, un niño, o un río aprendo que el mundo es siempre más grande que la conceptualización que tengo de él. Aprendo que cuando veo mucho, sigo viendo sólo un poquito y parcialmente. Aprendo que cuando otros se unen, la descripción es más completa de lo que yo sola veo."

...

"Al describir estoy en relación con. Con lo que estoy en relación con, no puede ser fácil o ligeramente descartado. Permanece. Me reclama. Al describir se compromete lo descrito a la memoria. Describir es aprender desde el corazón."

...

"Describir requiere e infunde respeto. A veces, cuando estoy describiendo un dibujo o una historia escrita, la exploro. Al explorarla experimento el gesto de la línea y el cómo las letras son dibujadas."

...

"Al describir la descripción, estoy describiendo un acto creativo familiar para todo artista, familiar para todo niño, familiar a cualquiera que se sumerja en algo que es recurrentemente el único objeto de atención. Al describir la descripción estoy describiendo el descubrimiento de lo nuevo que refresca y anima."

Hasta aquí las palabras de Carini. Podríamos decir también que al describir tomamos conciencia y damos cuenta de nuestro propio lugar de observación, de nuestro propio punto de vista y perspectiva, que son exclusivos de cada uno, pero que se amplían y profundizan al tomar en cuenta las perspectivas y los puntos de vista de los demás.

Entonces, describir está en la base de nuestra relación con los objetos y con los sujetos. En el trabajo de laboratorio, describir los instrumentos físicos y los contenidos conceptuales, que reconocemos como nuestras herramientas de trabajo, está en la base de nuestro desarrollo de nuevos aprendizajes y la generación de nuevos conocimientos, que serán siempre descubiertos y explorados en la relación con nuestros compañeros y nuestras colegas. Nuestra propia descripción de los instrumentos es nuestra toma de conciencia y nuestra valoración de los mismos, que proviene de nuestra experiencia directa mediante su observación y manipulación. De manera semejante, nuestra propia descripción del funcionamiento de los instrumentos parte de nuestro entendimiento de las relaciones conceptuales que somos capaces de establecer. Se trata así de la descripción que podemos elaborar a partir de lo que cada uno de nosotros comprende e imagina.

Supongamos que un grupo de personas observa, como objeto a describir, los principios de funcionamiento de un instrumento. Imaginemos que en este grupo participamos nosotros, junto con varios de los autores de los contenidos conceptuales que necesitamos y hemos estudiado en nuestra materia. Allí nos encontramos, por ejemplo, con Arquímedes, con Leonardo de Vinci, Newton, Leibniz, Fourier, Fick, Prandtl, Kolmogorov y Bird, entre otros, de acuerdo a lo que, según sabemos, cada uno de ellos ha dicho o podría decir del tema. Ellos forman un círculo alrededor del instrumento, situado en el centro, y hacen su descripción del mismo desde su propio sitio. Nosotros los escuchamos, de la misma manera que los leemos cuando estudiamos sus escritos, y a partir de la diversidad de sus reflexiones y sus puntos de vista, cada uno de nosotros puede ampliar y profundizar su conocimiento acerca del funcionamiento del instrumento y del comportamiento de los materiales, y así mejoramos nuestra propia descripción conceptual y obtenemos las bases para establecer las relaciones que requiere nuestro análisis.

2.1.2 Sistemas

La mecánica de fluidos y en general los fenómenos de transporte son *ciencias fenomenológicas*, es decir, ciencias que se han construido directamente sobre los hechos experimentales, sintetizándolos en sus principios, es decir, comprendiendo las esencias de los fenómenos y llevándolos a los planos de su generalidad abstracta. Central al análisis de los hechos experimentales se encuentra el concepto de **sistema**. La palabra griega *συστεμα* (systema) se aplica a cualquier cosa que sigue ciertas reglas de orden. En mecánica de fluidos, decimos que un **sistema es la parte** del mundo físico que constituye el objeto de análisis, incluyendo fluidos y posiblemente sólidos, que satisfacen ciertas reglas de conservación o balance. La idea de parte supone la existencia de límites y requiere determinar su **frontera** o **contorno** que la separa del resto del todo. Su complemento que podemos llamar el **medio**, junto con el sistema constituyen un “**todo**” de su clase que podemos llamar **universo**.

Un sistema puede constituirse de varios **sub-sistemas**, ya sean idénticos, semejantes, o con ciertas particularidades que pueden, precisamente, tomarse en cuenta para identificarlos y estudiarlos como componentes del sistema, del cual se dice, entonces, que tiene una **composición**. Un **sistema es homogéneo** (del griego *ομογενύς* (omoguenís) = de la misma familia, pariente) **cuando su estructura es uniforme**. Así, los cuerpos que se presentan en una sola fase constituyen sistemas homogéneos (por ejemplo el agua líquida o el aire), en tanto que los cuerpos formados por varias fases, en forma conjunta, pueden constituir un **sistema heterogéneo** (por ejemplo el flujo de agua y aceite en una columna empacada de extracción líquido-líquido o un conjunto de nubes en la atmósfera).

2.1.3 Atributos y propiedades

Todo sistema posee un conjunto de **atributos** o cualidades, entre los cuales algunos son magnitudes físicas medibles que llamaremos **propiedades**.

Las nociones de **sistema homogéneo y heterogéneo** expresadas arriba, se usan veces en un sentido distinto y más restringido; por ejemplo Truesdell (1973) dice que los **sistemas homogéneos** son aquellos cuerpos que pueden describirse suficientemente por medio de funciones exclusivas del tiempo. Así, asocia la homogeneidad con la condición de que el cuerpo tenga, en un cierto instante, **un único valor para cada una de sus propiedades**, como su temperatura, su composición química, densidad, presión, etc..., **en todas sus partes**, es decir, en todo el espacio que el cuerpo ocupe, y que los **cambios de las propiedades termodinámicas** que lo describen, si es que ocurren, se lleven a cabo simultáneamente en todo el cuerpo, sin distinción entre sus partes. Entonces es preferible indicar que dichos cambios se dan uniformemente y que el cuerpo tiene **propiedades uniformes**, que pueden cambiar solamente como funciones del tiempo.

2.2 Modelos de ajuste de datos experimentales

La observación de un fenómeno, como el flujo en un río, en un canal o en un tubo, puede provocar el interés por cuantificarlo y relacionarlo con cantidades y accidentes observables que lo rodean. Al irse acumulando las mediciones y las observaciones cualitativas, podemos llegar a proponer cuáles de las mediciones son significativas (o están correlacionadas) con el flujo o, en general, con el fenómeno estudiado. Si el conjunto de parámetros medidos incluye aquellos que verdaderamente afectan o influyen en el resultado, tenemos la posibilidad de **establecer relaciones de correspondencia entre dicho flujo y algunos de los parámetros**.

En la medida que se va sistematizando una disciplina científica, se van generando los conceptos significativos que intervienen, lo cuales deben ser distinguidos en formas claras y distintas y se van proponiendo correspondencias entre estos conceptos. Las correspondencias pueden representarse en relaciones funcionales, generalmente de proporcionalidades directas o inversas, potenciales o

exponenciales, de los comportamientos observados. Esta es, evidentemente, una etapa incipiente del desarrollo de la disciplina que se está desarrollando. Así nació la mecánica de fluidos, es decir, a partir de la observación sistemática, la definición y determinación de atributos y propiedades, así como su correlación que permitiría, en etapas posteriores, proponer explicaciones y descubrir principios físicos del comportamiento de los fluidos, como veremos a manera de ejemplo en la historia del flujo de Hagen-Poiseuille. Los principios físicos, que llamamos *leyes*, de acuerdo con una tendencia del pensamiento occidental a proyectarse en la naturaleza, son los fundamentos sobre los que se construye la mecánica de fluidos.

2.2.1 El teorema de los π

Como se ha dicho arriba, la búsqueda de correlaciones entre las propiedades de los materiales, las características de los escenarios donde ocurren los fenómenos de interés, y las condiciones del entorno, es **uno de los primeros estadios de crecimiento de una disciplina científica** y su aplicación a problemas específicos puede seguir siendo una herramienta de trabajo muy útil a través de diversas etapas posteriores, aunque es importante destacar que la herramienta conocida como el *teorema de Buckingham* o *teorema de los π* puede ser más útil, **en la medida que ignoramos los principios que subyacen a un comportamiento observado**, el cual deseamos correlacionar con un conjunto de parámetros que manifiestamente influyen en él.

Para encontrar el conjunto de grupos adimensionales $\pi_1, \pi_2, \text{etc.}$ que determinan un fenómeno observado:

1. Elaborar una lista de todas las componentes, $C = \{C_1, C_2, \dots\}$, (los parámetros y variables) que, supuesta o manifiestamente, son importantes en el desenvolvimiento de dicho fenómeno.
2. Asociar a cada elemento de C sus dimensiones fundamentales de masa (M), longitud (L), tiempo (T) y temperatura (θ). Sea B el número de dimensiones fundamentales que intervienen.
3. Calcular el número de grados de libertad $G = C - B$. El teorema establece que se pueden encontrar G grupos adimensionales independientes: $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_G$, que describen el fenómeno, independientemente de las unidades usadas.
4. Expresar el producto Π de todas las componentes, elevada cada una de ellas a una potencia distinta, representada por una incógnita $a, b, c, \dots$ etc.: $\Pi = C_1^a C_2^b C_3^c \dots$ etc.
5. Sustituir en la expresión de dicho producto, las dimensiones fundamentales para cada componente, por ejemplo, si C_1 es una velocidad, entonces sustituimos $C_1 = LT^{-1}$ y reducir la expresión, de modo que cada una de las dimensiones fundamentales aparezca elevada a un exponente dado.
6. Igualar cada exponente a cero, generando un sistema de ecuaciones algebraicas para los exponentes. Notar que el sistema tiene G grados de libertad.
7. Seleccionar los valores de $G - 1$ exponentes como cero y a otro darle el valor de 1. Resolver el sistema de ecuaciones, para tener un conjunto completo de exponentes.
8. Sustituir los exponentes en Π para obtener π_1 .
9. Repetir la asignación de $G - 1$ valores de cero y un valor de uno, a otros exponentes, que difieran al menos en parte, de las asignaciones previas y resolver el sistema de ecuaciones nuevamente. Repetir la sustitución en Π para obtener otro grupo adimensional, y así, sucesivamente, para $\pi_2, \dots, \pi_G$.
10. Expresar la correlación de los datos como la función $\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_G) = 0$.

Ejemplo 2.1. Diferencia de presión vs. flujo en un tubo cilíndrico

Supongamos que desconocemos la teoría que lleva al perfil de velocidad parabólico (ver Bird, sección 2.3) y su integración para encontrar la relación de Hagen-Poiseuille para el flujo laminar en un tubo. Notemos que ésta debió haber sido la situación de Hagen en 1839 y de Poiseuille en

1841, cuando encontraron experimentalmente la relación entre el flujo volumétrico y la diferencia de presión, que lleva sus nombres.

Lo que observaron fue una correlación lineal (Poiseuille) o cuadrática, pero casi lineal (Hagen) entre dos variables: el flujo volumétrico, Q y la presión a la entrada del tubo, P_0 , cuando mantenían la presión a la salida del tubo, igual a la atmosférica, $P_L = P_a$. Hicieron experimentos modificando los siguientes parámetros: las longitudes de los tubos, L , los diámetros de los tubos, D , y pudieron cambiar la viscosidad del fluido, μ , ya sea cambiando de líquido o modificando la temperatura de trabajo (ya que la viscosidad depende de la temperatura $\mu(T)$); en consecuencia, también cambiaba la densidad, $\rho(T)$. Al cambiar al menos uno de estos parámetros, realizaban nuevos conjuntos de experimentos, cambiando las presiones de entrada y midiendo los flujos a la salida. Así, observaron relaciones lineales entre las variables $(P_0 - P_L)$ y Q , a flujos bajos, cuando mantenían fijas las otras condiciones de flujo. Hagen incorporó en su correlación un término cuadrático, proporcional a Q^2 , que representa efectos inerciales.

Los encabezados de sus tablas de datos de laboratorio pudieron tener parecido con el ejemplo de un encabezado, que presentamos aquí como la **Tabla 2.1**.

Tabla 2.1 Parámetros y variables para el flujo en un tubo					
Parámetros				Variables	
$\rho [ML^{-3}]$	$\mu [ML^{-1}T^{-1}]$	$L[L]$	$D[L]$	$(P_0 - P_L)[ML^{-1}T^{-2}]$	$Q[L^3T^{-1}]$

Si Hagen o Poiseuille emplearon algún razonamiento equivalente al teorema de los Pi , posiblemente hicieron algo como el conjunto numerado de pasos que hemos descrito anteriormente. Repasando, podemos suponer que, por la congruencia de unidades de las cantidades usadas, podrían haber hecho algo equivalente a lo siguiente:

1. Al observar el encabezado de la Tabla 2.1, podemos ver que $C = 6$, cuatro parámetros y dos variables.
2. En el encabezado de la Tabla 2.1 están asociadas las dimensiones de cada parámetro y variable, el número de dimensiones fundamentales es $B = 3$, es decir, $[M, L, T]$.
3. Número de grados de libertad, $G = C - B = 6 - 3 = 3$, por lo tanto, hay tres grupos adimensionales: π_1, π_2, π_3 .
4. Cada parámetro o variable se eleva a un exponente:

$$\Pi = \rho^a \mu^b L^c D^d (P_0 - P_L)^e Q^f.$$

5. Se sustituyen las dimensiones de cada parámetro y cada variable:

$$\Pi = [ML^{-3}]^a [ML^{-1}T^{-1}]^b [L]^c [L]^d [ML^{-1}T^{-2}]^e [L^3T^{-1}]^f,$$

y se agrupan los exponentes de cada dimensión fundamental:

$$\Pi = M^{(a+b+e)} L^{(-3a-b+c+d-e+3f)} T^{(-b-2e-f)}.$$

6. Los exponentes de cada dimensión fundamental se igualan a cero:

$$a + b + e = 0; \quad -3a - b + c + d - e + 3f = 0; \quad -b - 2e - f = 0,$$

lo cual es un sistema de tres ecuaciones con seis incógnitas. Hay tres grados de libertad. Habrá que fijarlos y resolver.

7. Sean $a = 1, c = e = 0$. Entonces las ecuaciones son:

$$1 + b = 0; \quad -3 - b + d + 3f = 0; \quad -b - f = 0,$$

cuya solución da

$$b = -1, \quad f = 1, \quad d = b = -1.$$

8. Entonces, sustituyendo en la expresión de Π del punto 4, tenemos:

$$\pi_1 = \rho^1 \mu^{-1} L^0 D^{-1} (P_0 - P_L)^0 Q^1 = \frac{\rho Q}{\mu D} = \frac{Q}{vD}.$$

9. Sean, ahora $e = 1, b = c = 0$. Las ecuaciones son, en este caso:

$$a + 1 = 0; \quad -3a + d - 1 + 3f = 0; \quad -2 - f = 0,$$

cuya solución lleva al grupo adimensional

$$\pi_2 = \rho^{-1} \mu^0 L^0 D^4 (P_0 - P_L)^1 Q^{-2} = \frac{(P_0 - P_L) D^4}{\rho Q^2}.$$

Para el tercer grupo adimensional tomemos, a manera de ejemplo: $c = 1, e = f = 0$. Entonces, las ecuaciones del punto 6 son:

$$a + b = 0; \quad -3a - b + 1 + d = 0. \quad -b = 0,$$

que tienen la solución que lleva a $\pi_3 = L^1 D^{-1} = \frac{L}{D}$

10. Por lo tanto, una correlación de la forma

$$\phi \left(\frac{\rho Q}{\mu D}, \frac{(P_0 - P_L) D^4}{\rho Q^2}, \frac{L}{D} \right) = 0$$

puede representar los resultados experimentales. Sin embargo, para nuestra sorpresa, no encontramos una relación lineal entre $P_0 - P_L$ y Q , sino una relación cuadrática, que se evidencia al suponer que es posible despejar π_2 y proponer la correlación $\pi_2^{-1} = \psi(\pi_1, \pi_3)$, porque, entonces podemos expresar el flujo volumétrico Q como:

$$Q^2 = \frac{(P_0 - P_L) D^4}{\rho} \psi \left(\frac{\rho Q}{\mu D}, \frac{L}{D} \right),$$

por lo tanto, el flujo volumétrico se correlaciona con la raíz cuadrada de la caída de presión en el tubo. Sin embargo, la función $\psi \left(\frac{\rho Q}{\mu D}, \frac{L}{D} \right)$ influye también para modificar esta dependencia.

Recordemos que deseábamos mostrar las cualidades del teorema de los π . En realidad, es lo que estamos haciendo, pero necesitamos ir más allá de la receta del procedimiento básico, el cual ya nos ha mostrado cómo encontrar un conjunto de G grupos adimensionales. Sin embargo, hemos encontrado un grupo que sugiere una dependencia cuadrática de Q (más apropiada para flujos turbulentos), y no la relación lineal de Hagen y Poiseuille, como fue observada por ellos en flujos laminares.

Notemos que nuestras alternativas, para fijar los grados de libertad al seleccionar dos exponentes cero y uno, uno, han sido tomadas arbitrariamente y pudieron ser distintas, de modo que habríamos podido obtener otros grupos adimensionales. En este contexto, una cosa es cierta:

Existe un número infinito de grupos adimensionales, que se obtienen como combinaciones polinómicas de un número G de grupos adimensionales independientes.

En particular, podemos encontrar un nuevo grupo adimensional $\pi'_2 = \pi_2 \pi_1 / \pi_3$, tal que

$$\pi'_2 = \pi_2 \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{(P_0 - P_L) D^4}{\mu L Q},$$

de modo que, si podemos despejar π'_2 de la correlación de datos $\phi'(\pi_1, \pi'_2, \pi_3) = 0$, podríamos tener que $(\pi'_2)^{-1} = \psi'(\pi_1, \pi_3)$, donde, despejando Q , tenemos que

$$Q = \frac{(P_0 - P_L)D^4}{\mu L} \psi'(\pi_1, \pi_3).$$

Esta correlación entre Q y $\Delta P = P_0 - P_L$ es lineal si $\psi' = C = \text{constante}$. Este es el caso de los flujos laminares en tubos largos, donde

$$Q = C \frac{(P_0 - P_L)D^4}{\mu L}. \quad (2.2.1)$$

Podemos ver la coincidencia exacta de esta ecuación con la que surge de la solución del balance de momentum para el flujo másico w , ecuación (2.3-21) de la sección 2.3 del Bird, si multiplicamos por la densidad, ρ , ambos lados de la ecuación anterior, (2.2.1) y hacemos que $C = \pi/128$:

$$\rho Q = w = C \frac{(P_0 - P_L)D^4 \rho}{\mu L} = \frac{\pi(P_0 - P_L)R^4 \rho}{8\mu L}, \quad (2.2.2)$$

donde $R = D/2$ es el radio del tubo.

Hemos visto, con este ejemplo, cómo el uso del teorema de los π es una herramienta auxiliar muy útil para el trabajo cotidiano del ingeniero, sin embargo, hemos mostrado también cómo

el teorema de los π no basta para determinar las relaciones entre las variables de un proceso determinado, cuyo comportamiento requiere indagar las razones de fondo,

que constituyen el conocimiento científico, para lograr mejores representaciones de dicho comportamiento, en muchas ramas de las ciencias físicas y químicas.

Ejercicios

E.2.2.1-1. Número de Reynolds

Convéncete de que el grupo adimensional π_1 del ejemplo anterior es equivalente al número de Reynolds, salvo un factor constante, y que podemos definirlo, así mismo, como un número de Reynolds.

E.2.2.1-2. Factor de fricción

Los modelos para el flujo de líquidos en tuberías se tratan en la sección 2.4, donde podemos ver que el factor de fricción f_D es una función adimensional que depende de aspectos geométricos de la tubería, concentrados en el diámetro del tubo, D y su longitud L , en propiedades importantes del fluido, donde sobresalen la viscosidad, μ y la densidad, ρ , y en las condiciones de operación, que pueden resumirse en la velocidad media de flujo, $\langle v_z \rangle$. ¿De qué grupos adimensionales depende el factor de fricción en un tubo recto?

E.2.2.1-3. Correlación de la caída de presión y el flujo másico para flujos turbulentos en tuberías lisas

¿Es posible, extendiendo el razonamiento que nos ha llevado a las ecuaciones (2.2.1) y (2.2.2), aplicar el teorema de los π a los flujos turbulentos con número de Reynolds, $Re = \rho \langle v_z \rangle D / \mu$, entre $10^4 < Re < 10^5$, para encontrar que siguen, aproximadamente, la ecuación (5.1-6) del libro de Bird:

$$\rho \frac{P_0 - P_L}{L} = 0.0198 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{7/4} \left(\frac{\mu w^7}{R^{19}} \right)^{1/4} ? \quad (2.2.3)$$

2.3 Modelos basados en principios físicos

Una experiencia en el laboratorio implica el manejo de uno o varios **instrumentos**, el uso de uno o varios **fluidos** y la construcción de uno o varios **modelos matemáticos que representan el movimiento** del fluido en los instrumentos. Las predicciones de los modelos serán confrontadas con las mediciones que se hagan, para extraer información y sacar conclusiones acerca del comportamiento de los flujos y de las fuerzas que los gobiernan.

Aun cuando frecuentemente los modelos se encuentran ya elaborados en libros de texto o artículos especializados, es muy importante que tú, como estudiante, **emprendas la tarea de su elaboración**, apoyándote en los métodos que se desarrollan en los textos, incluido éste, incorporando tus conocimientos teóricos, que adquirirán **mayor significación** al aplicarlos apropiadamente a los sistemas del laboratorio y al ejercitar tu propia inventiva, que se verá fortalecida en la medida que descubras cómo eres capaz de **enriquecer tu comprensión**, al explorar libremente con algunas alternativas, probándolas al **modificar partes del modelo o introduciendo cambios en la experiencia** realizada, ya sea para mejorar su adecuación a las hipótesis de dicho modelo¹ o para modificar conjuntamente el dispositivo experimental y el modelo.

Los buenos modelos representan los **aspectos más sobresalientes** del comportamiento de los sistemas de flujo que ocurren en los instrumentos donde se llevan a cabo las experiencias. Surgen de aplicar los principios de balance de masa y de momentum lineal. Estas ecuaciones se aplican a situaciones específicas; la principal es sin duda el tipo de fluido, que puede ser newtoniano o no-newtoniano, de acuerdo al análisis de sus características reológicas, que determinan su **relación de comportamiento**. Luego viene la consideración de las **características de flujo**, que puede ser un flujo compresible o uno incompresible, con régimen de flujo transitorio o estacionario, en una, dos o tres direcciones independientes, en el espacio físico tridimensional, al cual se asocia la estructura del sistema coordinado más adecuado. Integrar las ecuaciones de continuidad y momentum, cuando has empleado un enfoque diferencial, requiere conocer o proponer las condiciones existentes en los límites del sistema. Esto lleva a proponer las condiciones de frontera y las condiciones iniciales que se satisfacen en cada situación específica. Finalmente, también es necesario considerar la ecuación de estado que representa las relaciones entre las variables termodinámicas en cada punto, de acuerdo a la hipótesis del equilibrio local. Entonces, los modelos basados en la teoría de la mecánica de fluidos resultan de la aplicación de las ecuaciones generales de cambio (que surgen de los principios de balance de masa, momentum lineal y energía cinética), a las condiciones específicas del sistema bajo consideración.

Los resultados de los modelos se deben comparar con las mediciones experimentales, para evaluar su correspondencia o ajuste. Cuando dicha correspondencia no ocurre o lo hace solo parcialmente, es decir, cuando solo en parte del intervalo de las condiciones analizadas existen valores cercanos a los de la predicción del modelo, podemos intentar mejorar dicha correspondencia, ya sea actuando sobre el modelo o sobre los instrumentos de la experiencia. Actuamos sobre el modelo cuando notamos que no representa suficientemente ciertas condiciones experimentales que difícilmente podríamos cambiar; actuamos sobre los instrumentos y sus condiciones de operación cuando una modificación en alguno de ellos podría llevar a una mejor representación en las expresiones del modelo, cuando esto no altera de tal manera su representación matemática que haga imposible su solución y evaluación.

Los fluidos se distribuyen en toda la región del espacio que les es disponible, limitados por las fronteras sólidas y por las fuerzas gravitacionales, de acuerdo con la naturaleza del fluido en cuestión, así como por otras fuerzas como las de tensión interfacial. Los flujos ocurren cuando una fuerza emergente desequilibra un estado de reposo, indicativo de un equilibrio estático. Así

¹Introducir cambios en el sistema físico para adecuarlos mejor a las hipótesis se justifica sólo en el proceso de aprendizaje, para adquirir mejor conocimiento de los modelos, por ejemplo en sus condiciones a la frontera. En el ejercicio de la profesión es más importante adecuar los modelos lo mejor posible a las condiciones del experimento.

por ejemplo, al abrir la llave del agua generamos un desequilibrio mecánico en la presión, que antes de la apertura era la presión de la tubería que, para fijar ideas, suponemos como un tramo horizontal, conectado al fondo del tanque de almacenamiento (ver Figura X.a). Todo el tramo horizontal tiene la presión que corresponde a la carga hidrostática hasta la altura del nivel del tanque de almacenamiento, como puede observarse en un conjunto de pequeños tubos verticales que salen del tubo horizontal a diversas longitudes del mismo y se elevan por encima del nivel del tanque de almacenamiento (tubos piezométricos), pues en todos ellos, la carga hidrostática ρgH es igual a la del tanque. Al abrir la llave de paso, situada a la salida del tubo, exponemos el extremo de la tubería a la presión atmosférica p_a y entonces el agua sale impulsada por la diferencia de presión establecida entre su entrada al tramo horizontal, donde la presión absoluta es $p_a + \rho gH$ y la presión atmosférica a la salida.

En condiciones de flujo, entre la entrada y la salida del tubo horizontal, se genera un gradiente de presión, equivalente a la presión hidrostática del tanque.

2.3.1 Adimensionalización

Cuando se conocen las relaciones fundamentales (las leyes) que gobiernan la evolución del comportamiento de un sistema en una determinada disciplina de la física, de la química o de la ingeniería, es posible emplear un procedimiento de adimensionalización de las relaciones fundamentales, para encontrar los números adimensionales que determinan el comportamiento.

El procedimiento de adimensionalización se puede establecer mediante los siguientes pasos, partiendo de las expresiones particulares de las ecuaciones de continuidad y movimiento, así como sus condiciones iniciales y a la frontera (CIF):

1. **Establecer un conjunto completo de escalas**, es decir, encontrar un conjunto de las cantidades típicas fundamentales, que son importantes en los balances y en sus CIF, aplicados a un determinado problema de flujo.
2. **Definir un conjunto de variables adimensionales**, tanto independientes (las coordenadas del espacio y el tiempo) como dependientes (la velocidad, la presión, etc...), a partir de las variables presentes en los balances y en las CIF.
3. **Despejar el conjunto de variables dimensionales** original.
4. **Sustituir las variables dimensionales originales** en función de las adimensionales.
5. **Reordenar cada uno de los términos** de las ecuaciones, para que contenga un coeficiente de escalas precediendo al factor de variables adimensionales.
6. **Elegir en cada ecuación un término** que deseamos tenga un coeficiente numérico de uno.
7. **Dividir toda la ecuación** entre el coeficiente de escalas de dicho término y simplificamos. Cada uno de los coeficientes resultantes es adimensional.
8. **Identificar cada uno de los coeficientes adimensionales** con un número adimensional o con una combinación de los números adimensionales empleados usualmente.

Ejemplo 2.2. Adimensionalización de las ecuaciones de Navier-Stokes

Siguiendo el procedimiento señalado anteriormente, vamos a adimensionalizar las ecuaciones de continuidad y movimiento, para un **fluido newtoniano incompresible** ($\rho = \text{constante}$, $\mu = \text{constante}$).

Partimos de las ecuaciones locales-instantáneas, en primer lugar de la ecuación de continuidad (1.2.1), para obtener la ecuación de continuidad para los flujos incompresibles:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.3.1)$$

También, partimos del balance local del momentum lineal o ímpetu, Ecuación (1.2.2) para llegar al balance de momentum para los fluidos newtonianos en flujos incompresibles:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}) + \rho \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.3.2)$$

Estas dos ecuaciones son conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes para los flujos incompresibles. Entonces,

1. Inspeccionando las ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2) encontramos necesarias, por orden de aparición, las escalas de: longitud (l_0), velocidad (v_0), tiempo (puede ser propuesto un tiempo t_0 , o dejarlo para ser definido posteriormente), presión (podría ser ρv_0^2 para flujos rápidos o $\mu v_0/l_0$ para flujos lentos, o también dejarla para ser definida después). Finalmente aparece el vector de aceleración de la gravedad $\mathbf{g}$ cuya escala es la constante gravitacional g .
2. Definimos las variables adimensionales:

$$\check{\nabla} = l_0 \nabla; \quad \check{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}; \quad \check{t} = \frac{t}{t_0}; \quad \check{\mathbf{g}} = \frac{\mathbf{g}}{g}. \quad (2.3.3)$$

Podemos notar que el tiempo se adimensionaliza con algún tiempo característico t_0 y que la presión no se está adimensionalizando, dejándola para una etapa posterior. En cada uno de estos dos términos ejemplificaremos una manera diferente de abordar la adimensionalización de uno de los términos de la ecuación.

3. Despejamos las variables dimensionales de la Ecuación (2.3.3), así como la aceleración de la gravedad $\mathbf{g}$:

$$\nabla = \frac{1}{l_0} \check{\nabla}; \quad \mathbf{v} = v_0 \check{\mathbf{v}}; \quad t = t_0 \check{t}; \quad \mathbf{g} = g \check{\mathbf{g}}. \quad (2.3.4)$$

4. Sustituimos las variables anteriores en las Ecuaciones (2.3.1) y (2.3.2):

$$\frac{1}{l_0} \check{\nabla} \cdot (v_0 \check{\mathbf{v}}) = 0. \quad (2.3.5)$$

y

$$\rho \frac{\partial}{\partial (t_0 \check{t})} (v_0 \check{\mathbf{v}}) + \rho \frac{1}{l_0} \check{\nabla} \cdot (v_0^2 \check{\mathbf{v}} \check{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{l_0} \check{\nabla} p + \mu \frac{1}{l_0^2} \check{\nabla}^2 (v_0 \check{\mathbf{v}}) + \rho g \check{\mathbf{g}}, \quad (2.3.6)$$

5. Reordenamos ambas ecuaciones, cada término con un coeficiente dimensional y una funcionalidad adimensional, excepto por el término de la presión, que se ha dejado para determinar posteriormente:

$$\frac{v_0}{l_0} \check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{v}} = 0. \quad (2.3.7)$$

y

$$\frac{\rho v_0}{t_0} \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + \frac{\rho v_0^2}{l_0} \check{\nabla} \cdot (\check{\mathbf{v}} \check{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{l_0} \check{\nabla} p + \frac{\mu v_0}{l_0^2} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} + \rho g \check{\mathbf{g}}, \quad (2.3.8)$$

6. Elegimos un término de la ecuación de movimiento, cuyo coeficiente deseamos que sea la unidad. Por ejemplo, consideremos el término viscoso $\check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}}$.
7. Dividimos la ecuación de continuidad (2.3.7) entre $\frac{v_0}{l_0}$ y cada término de la Ecuación (2.3.8)

entre $\frac{\mu v_0}{l_0^2}$, para obtener, luego de simplificar:

$$\check{\nabla} \cdot \check{\mathbf{v}} = 0. \quad (2.3.9)$$

y

$$\frac{\rho v_0 l_0^2}{t_0 \mu v_0} \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + \frac{\rho v_0 l_0}{\mu} \check{\nabla} \cdot (\check{\mathbf{v}} \check{\mathbf{v}}) = -\frac{l_0}{\mu v_0} \check{\nabla} p + \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} + \frac{\rho g l_0^2}{\mu v_0} \check{\mathbf{g}}, \quad (2.3.10)$$

Cada uno de los coeficientes de (2.3.10) es adimensional, excepto el del término de la presión, cuya variable tampoco es adimensional.

8. Identificamos cada uno de los coeficientes adimensionales con números adimensionales o agrupamientos de números adimensionales:

El primer coeficiente puede expresarse como el producto del número de Reynolds, $Re = \frac{\rho v_0 l_0}{\mu}$ por el factor $\frac{l_0}{t_0 v_0}$. El coeficiente del término gravitacional también puede expresarse

como el producto del número de Reynolds por el factor adimensional $\frac{g l_0}{v_0^2}$. Entonces

$$Re \frac{l_0}{t_0 v_0} \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + Re \check{\nabla} \cdot (\check{\mathbf{v}} \check{\mathbf{v}}) = - \frac{l_0}{\mu v_0} \check{\nabla} p + \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} + Re \frac{g l_0}{v_0^2} \check{\mathbf{g}}, \quad (2.3.11)$$

Ahora podemos pasar a definir una presión adimensional $\check{p}$, lo cual puede hacerse de varias maneras. La más directa es re-introducir el coeficiente constante en el operador $\check{\nabla}$ y definir $\check{p} = \frac{l_0 p}{\mu v_0}$, con lo cual el término de la presión tendría un coeficiente de uno. La presión así definida está escalada en las fuerzas viscosas.

Otra posibilidad es escalar la presión en las fuerzas convectivas o inerciales, es decir, definir la presión adimensional como $\check{p} = \frac{P}{\rho v_0^2}$ o incluso como $\check{p} = \frac{P - p_0}{\rho v_0^2}$, donde p_0 es una presión constante, como la presión atmosférica o la presión en algún punto o plano establecido. En este último caso la ecuación (2.3.11) queda:

$$Re \frac{l_0}{t_0 v_0} \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + Re \check{\nabla} \cdot (\check{\mathbf{v}} \check{\mathbf{v}}) = - Re \check{\nabla} \check{p} + \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} + Re \frac{g l_0}{v_0^2} \check{\mathbf{g}}, \quad (2.3.12)$$

Excepto el término viscoso, todos los términos de la Ecuación (2.3.12) tienen en su coeficiente el número de Reynold, por lo que podría ser conveniente dividirla entre dicho factor para obtener una forma más usual de la ecuación adimensional de movimiento:

$$\frac{l_0}{t_0 v_0} \frac{\partial \check{\mathbf{v}}}{\partial \check{t}} + \check{\nabla} \cdot (\check{\mathbf{v}} \check{\mathbf{v}}) = - \check{\nabla} \check{p} + \frac{1}{Re} \check{\nabla}^2 \check{\mathbf{v}} + \frac{1}{Fr} \check{\mathbf{g}}, \quad (2.3.13)$$

donde se ha empleado el número de Froude, definido como $Fr = \frac{v_0^2}{g l_0}$.

Queda aún por explicar el significado del tiempo característico o típico t_0 , asociado a la duración de la etapa transitoria. El tiempo característico del movimiento convectivo es $t_c = l_0/v_0$, es decir, el tiempo en el cual el flujo transita la escala de longitud completa l_0 del sistema de flujo, a la escala de velocidad l_0 . Este tiempo se compara con el tiempo característico que dura el proceso transitorio, como se ve en el coeficiente del término transitorio, como la razón t_c/t_0 . Podríamos definir el número de Péclet de momentum Pe_{mo} como la razón inversa de estos dos tiempos característicos, es decir, como $Pe_{mo} = \frac{t_0}{t_c}$.

Ejercicios

E.2.3.1-1. Número de potencia en un tanque agitado

Al revisar la subsección 8.5, vemos que la potencia empleada para agitar un fluido newtoniano en un tanque agitado es el producto de la velocidad angular del impulsor N multiplicada por el momento de torsión total efectuado por las paredes del tanque y por los deflectores sobre el fluido, como indica la ecuación (8.5.1), de modo que $P = NT_z$ es la potencia efectiva sobre el fluido, ver ecuación (8.5.2).

Adimensionaliza la ecuación (8.5.2), junto con las ecuaciones de gobierno para el flujo, es decir, la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento, para encontrar que el número de potencia es función del número de Reynolds, del número de Froude y de un número de Péclet,

convenientemente definido, y que el resultado se puede correlacionar mediante una función dada por la ecuación (8.5.3).

E.2.3.1-2. Número de Reynolds generalizado

El capítulo 5 está dedicado al tratamiento de los fluidos newtonianos generalizados (*FNG*), cuya relación de comportamiento, que generaliza la de los fluidos newtonianos es la ecuación (5.1.6). En ella, las dimensiones del parámetro m , conocido como el *índice de consistencia*, son $[M/Lt^{2-n}]$, en tanto que el exponente n , conocido como el *índice de comportamiento de flujo*, es adimensional.

- Demuestra que las dimensiones de los esfuerzos viscosos [*fuerza/área*], son equivalentes a las dimensiones de la densidad de la energía cinética media [*energía/volumen*].
- Adimensionaliza la relación de comportamiento (5.2.1), para un *FNG*. Considera que los esfuerzos viscosos se pueden adimensionalizar con la densidad de la energía cinética media.
- Define el grupo adimensional conocido como el número de Reynolds generalizado, Re_n .
- Relaciona también la sección 8.5, viendo la forma particular que adquiere el número de Reynolds generalizado, Re_{ni} , en un tanque donde se mezcla un *FNG*. ¿Cómo se relaciona la velocidad media de flujo, como velocidad característica del movimiento, con la velocidad angular característica del movimiento rotacional?

2.4 Flujo laminar estacionario de un fluido newtoniano en un tubo

En esta sección vamos a desarrollar modelos para el flujo de un fluido newtoniano en un tubo, para ejemplificar, en uno de los flujos más estudiados durante el desarrollo de la mecánica de fluidos, cómo se han desenvuelto los modelos, con sus limitaciones y sus potencialidades.

2.4.1 Modelo postulado de flujo de un fluido newtoniano en un tubo

Consideremos un líquido newtoniano, llenando totalmente un tubo cilíndrico, como sistema. Ver figura 2.1. Sea $z = 0$ el plano que coincide con la superficie de entrada, donde la presión modificada, que puede ser medida con un manómetro, es $\mathcal{P}_0$, y sea $\mathcal{P}_L$ la **presión modificada** a la salida del ducto, de modo que $\mathcal{P}_L < \mathcal{P}_0$. Sea τ_0 el **esfuerzo de resistencia viscosa** sobre la pared del ducto, por unidad de superficie interna del tubo, cuya longitud es L y cuyo diámetro es $D = 2R$.

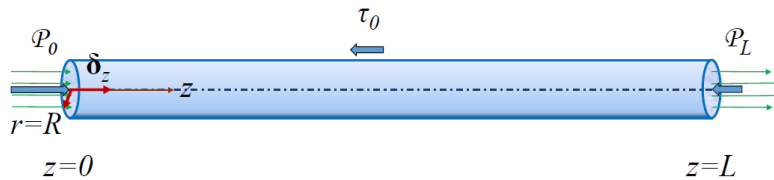


Figura 2.1: Elementos del balance postulado, ecuación (2.4.1)

Considerando la existencia de régimen estacionario, Podemos postular el siguiente Balance de Fuerzas en la dirección z :

$$\pi R^2 \mathcal{P}_0 - \pi R^2 \mathcal{P}_L - 2\pi RL \tau_0 = 0. \quad (2.4.1)$$

En el balance de fuerzas (2.4.1), podemos despejar τ_0 , quedando:

$$\tau_0 = \frac{R}{2L} (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) = R_h \left(-\frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \right), \quad (2.4.2)$$

donde $R_h = D/4 = R/2$ es el radio hidráulico del tubo, en tanto que $\left(-\frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \right)$ es conocido como *el gradiente de la presión modificada*. El símbolo **Delta**, Δ , aplicado a cualquier variable que, en

general podemos denotar por un círculo hueco, $\bigcirc$, equivale a la diferencia de los valores de dicha variable, entre dos puntos, es decir que $\Delta\bigcirc = \bigcirc|_2 - \bigcirc|_1 = \bigcirc|_{z=L} - \bigcirc|_{z=0}$. Aplicado a la presión modificada, en este caso, resulta que $\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_L - \mathcal{P}_0$. Nótese que, por brevedad, decimos que $\left(-\frac{\Delta\mathcal{P}}{L}\right)$ es el gradiente de la presión, cuando en realidad corresponde al negativo del gradiente.

El modelo postulado terminaría en esta relación, que puede considerarse una manera de estimar el valor de τ_0 , la fuerza que explica cómo es que la presión disminuye en un tramo dado de tubería, de longitud L , ver la figura 2.1. Esta expresión también predice que si el tramo de tubería se duplica, $L_2 = 2L$, y si se mantiene constante la diferencia de presión, $-\Delta\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L$, el esfuerzo de resistencia viscosa en la pared, τ_0 , disminuye a la mitad de su valor anterior, de acuerdo con la expresión (2.4.2). Pero, ¿Cómo es posible que ocurra así?

¿Cómo interviene la velocidad media de flujo $\langle v_z \rangle$?

Al realizar el experimento correspondiente, duplicando la longitud de la tubería, podemos observar que existe una variable que no ha sido requerida para llevar a cabo el balance de fuerzas (2.4.1): la velocidad promedio de flujo, $\langle v_z \rangle$, la cual puede ser medida recogiendo el caudal que sale del tubo y llena un recipiente de un volumen dado V_m en un intervalo dado de tiempo t_m , es decir que la velocidad media de flujo es una variable que se mide indirectamente, ya que $\langle v_z \rangle = \frac{V_m}{\pi R^2 t_m}$. Esta velocidad se observa haber disminuido cuando se ha duplicado la longitud del tubo.

¿Cómo interviene la velocidad media de flujo $\langle v_z \rangle$ en la disminución de τ_0 , al cambiar la longitud del tubo? es decir, ¿Cómo encontramos una relación $\tau_0 = f(\langle v_z \rangle)$? Así propuesto, y sin mayor conocimiento de la mecánica de los fluidos, **abordamos la respuesta a esta pregunta por medio del teorema de los π** , que es una herramienta puramente matemática.

Uso del teorema de los π

Las dos cantidades a relacionar y sus dimensiones básicas son $\tau_0 \rightarrow [ML^{-1}T^{-2}]$ y $\langle v_z \rangle \rightarrow [LT^{-1}]$, de modo que es necesario incorporar un parámetro que contenga la masa como una de sus dimensiones, es decir, la densidad, $\rho \rightarrow [ML^{-3}]$. Ahora tenemos un conjunto de tres componentes (ver subsección 2.2.1): $C = \{\rho, \tau_0, \langle v_z \rangle\}$ y tres dimensiones básicas: $B = \{M, L, T\}$, entonces hay cero grados de libertad: $G = C - B = 3 - 3 = 0$. Al no tener grados de libertad, vemos que es imposible encontrar algún grupo adimensional entre τ_0 y $\langle v_z \rangle$, pero **sospechamos que podemos estar ignorando alguna componente del conjunto C** . Efectivamente, ya hemos observado que la longitud del tubo tiene un efecto sobre τ_0 y sobre la velocidad. También podemos experimentar que el diámetro del tubo influye en el experimento. Por lo tanto, consideremos la importancia de estos dos parámetros de longitud: el radio y la longitud del tubo. Entonces las componentes son cinco: $C = \{\rho, \tau_0, \langle v_z \rangle, R, L\}$, lo cual hace que los grados de libertad sean dos: $G = C - B = 5 - 3 = 2$. Ahora seguimos el procedimiento de la subsección 2.2.1, para encontrar dos grupos adimensionales:

El cuarto y el quinto paso del procedimiento dan:

$$\Pi = \rho^a \tau_0^b \langle v_z \rangle^c R^d L^e \longrightarrow (ML^{-3})^a (ML^{-1}T^{-2})^b (LT^{-1})^c L^d L^e = M^{a+b} L^{-3a-b+c+d} T^{-2b-c}.$$

Puesto que los grupos adimensionales son aquellos que tienen exponentes nulos, esto nos lleva en el sexto paso, a proponer el sistema de ecuaciones:

$$a + b = 0; \quad -3a - b + c + d + e = 0; \quad -2b - c = 0.$$

donde hay dos grados de libertad. Tenemos una solución si fijamos dos exponentes, por ejemplo, si deseamos que la densidad aparezca linealmente en el denominador, hacemos que $a = -1$ y que en el mismo grupo no aparezca el radio, entonces $d = 0$. La solución para los otros exponentes da $b = 1, c = -2$ y $e = 0$, es decir que un grupo adimensional es

$$\pi_1 = \rho^{-1} \tau_0^1 \langle v_z \rangle^{-2} R^0 L^0 = \frac{\tau_0}{\rho \langle v_z \rangle^2}.$$

Si ahora modificamos nuestra elección, de modo que $a = 0$ y $d = 1$, la solución al sistema de ecuaciones resulta en $b = 0$, $c = 0$ y $e = -1$, de donde

$$\pi_2 = \rho^0 \tau_0^0 \langle v_z \rangle^0 R^1 L^{-1} = \frac{R}{L};$$

por lo tanto, una correlación de la forma

$$\phi \left(\frac{\tau_0}{\rho \langle v_z \rangle^2}, \frac{R}{L} \right) = 0$$

puede proponerse para relacionar los esfuerzos viscosos con la velocidad media de flujo. **Decimos que la tubería es larga si $R/L \ll 1$.** Considerando el límite $R/L \rightarrow 0$, llegamos a uno de los resultados más importantes en el desarrollo del flujo en tubos:

$$\frac{\tau_0}{\rho \langle v_z \rangle^2} - m = 0,$$

donde m es una constante que podemos relacionar con el factor de fricción.

Definición del factor de fricción

Consideremos que la energía cinética es la mitad del denominador de la expresión anterior y entonces, que

$$\tau_0 = f_F \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2 \quad (2.4.3)$$

es una expresión que puede ser tomada como la definición del **factor de fricción de Fanning f_F** , es decir que

el factor de fricción f_F es el coeficiente de proporcionalidad existente entre los esfuerzos viscosos en la pared del tubo y la energía cinética media del flujo,

o bien que

el factor de fricción f_F es el esfuerzo viscoso en la pared, adimensionalizado con la densidad de la energía cinética media de flujo.

Podemos sustituir la ecuación (2.4.2) en (2.4.3) y despejar la velocidad, para encontrar que

$$\langle v_z \rangle = \sqrt{\frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R}{f_F \rho L}}. \quad (2.4.4)$$

Vemos que el conocimiento del factor de fricción, f_F , es fundamental para estimar los valores de la velocidad media, utilizando la ecuación (2.4.4).

2.4.2 Modelo local de flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo

El modelo local de flujo laminar en un tubo largo está representado en geometría cilíndrica, donde la velocidad tiene la dirección axial del tubo y cambia de valores con la coordenada radial, es decir que $\mathbf{v} = v_z(r) \boldsymbol{\delta}_z$. Ver figura 2.2.

La ecuación de movimiento axial, a partir de la ecuación (B.5-6) de Bird, se reduce a:

$$0 = -\frac{d\mathcal{P}}{dz} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}), \quad (2.4.5)$$

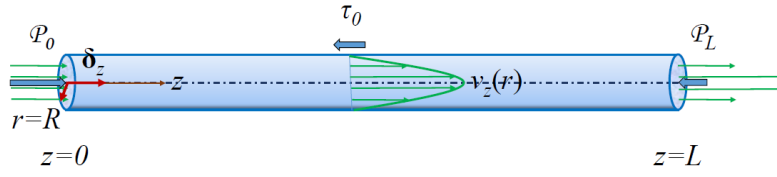


Figura 2.2: Elementos del balance local, ecuación (2.4.5), donde $\mathbf{v} = v_z(r)\delta_z$.

donde el primer término es una función de z y el segundo es sólo función de r . Ambos, por lo tanto, deben ser iguales a una constante A y pueden ser integrados. La integración del término con derivada axial conduce a:

$$-\frac{d\mathcal{P}}{dz} = A = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L}, \quad (2.4.6)$$

en tanto que la integración del término radial resulta

$$\tau_{rz} = \frac{Ar}{2} + \frac{C}{r}. \quad (2.4.7)$$

Como los esfuerzos deben estar acotados en todo el tubo, es decir, $\tau_{rz} < \infty \forall r$, al considerar el valor de la coordenada en $r = 0$, encontramos que es necesario elegir $C = 0$. Entonces

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} \right) \frac{r}{2}. \quad (2.4.8)$$

Podemos, ahora, estimar la **fuerza ejercida por la pared del tubo sobre el fluido**, por unidad de área superficial de tubo, si sustituimos la coordenada radial por el radio del tubo ($r = R$), de donde

$$\tau_0 = \tau_{rz}|_{r=R} = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} \right) \frac{R}{2}. \quad (2.4.9)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación (2.4.2), que fue obtenida al postular un balance de fuerzas sobre todo el fluido del tubo, de modo que vemos cómo

cantidades postuladas, como τ_0 , resultan equivalentes a las expresiones de las variables de campo correspondientes, como τ_{rz} , cuando se integran de los modelos locales.

Así cómo, después de obtener la ecuación (2.4.2), **fue necesario proponer una relación entre τ_0 y la velocidad media de flujo $\langle v_z \rangle$** , lo cual se hizo mediante el uso del teorema de los π , en el caso que ahora nos ocupa: el modelo local, también **se ve necesario proponer una relación entre los esfuerzos viscosos locales, $\tau_{rz}(r)$ y la velocidad local, $v_z(r)$** . Esta relación es conocida como **la ley de Newton de la viscosidad**:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}, \quad (2.4.10)$$

la cual tiene también un coeficiente adecuado, μ , la viscosidad del fluido.

Además de la semejanza expuesta entre los modelos postulado y local, también es conveniente subrayar su principal diferencia: la igualdad (2.4.10) es una igualdad local, es decir, se satisface en cualquier punto, o dicho de otro modo, la satisface cualquier partícula material ξ del fluido. No es una relación para la totalidad del tubo, sino para cada punto interior del mismo. Por esto

mismo, podemos sustituir la ecuación (2.4.10) en (2.4.8) e integrar, para encontrar la distribución de velocidad $v_z(r)$:

$$v_z = -\frac{A}{4\mu}r^2 + C', \quad (2.4.11)$$

que requiere conocer una condición de frontera, que es la condición de no-deslizamiento: $v_z(r=R) = 0$, con la cual se determina C' , para llegar, finalmente a la **distribución parabólica de la velocidad** en un tubo:

$$v_z = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.4.12)$$

donde también se ha sustituido A , de la ecuación (2.4.6).

Cuando conocemos el campo de velocidad como función del punto en la región de flujo, en este caso $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_z(r)\delta_z$, con $v_z(r)$ dada por la ecuación (2.4.12), podemos decir que **hemos resuelto el modelo local y podemos calcular un conjunto de cantidades hidrodinámicas de interés**, tales como la velocidad media de flujo, $\langle v_z \rangle$, los esfuerzos viscosos en una pared, τ_0 , la velocidad másica de flujo w , en alguna superficie de entrada o salida, etc. La evaluación de estas cantidades requiere la integración de funciones dependientes de la velocidad. Sin embargo, ¿Será necesario resolver el problema local, es decir, encontrar la velocidad como función de la posición y del tiempo, para encontrar los parámetros buscados, tales como la velocidad media de flujo, los esfuerzos viscosos en la pared o la velocidad másica de flujo? Exploremos el modelo integrado, para saberlo.

2.4.3 Modelo integrado de flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo

Un modelo integrado se obtiene de uno local cuando, **en vez de resolver el modelo local, lo integramos en todo el volumen del sistema** y después relacionamos los resultados de la integración con lo que se obtiene de los modelos local y postulado. En la figura 2.3 agregamos, a los elementos requeridos por el modelo local, aquellos que corresponden a las regiones de integración, así como la ecuación (2.4.10) para τ_0 .

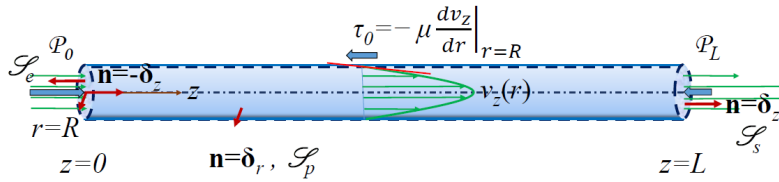


Figura 2.3: Elementos del balance integrado, ecuación (2.4.17)

La ecuación local (2.4.5) sugiere que los únicos dos términos significativos son los esfuerzos viscosos y la presión, cuya igualdad podemos expresar en cantidades vectoriales, a partir de la ecuación (1.2.2), como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla \mathcal{P}, \quad (2.4.13)$$

que corresponde a las condiciones de equilibrio mecánico, es decir, cuando la suma de las fuerzas sobre el cuerpo es igual a cero. Podemos integrar esta expresión local en toda la región del tubo, $\mathcal{R}$, de lo cual resulta que

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV = - \int_{\mathcal{R}} \nabla \mathcal{P} dV, \quad (2.4.14)$$

y podemos aplicar el teorema de la divergencia del lado izquierdo de la igualdad, así como el teorema del gradiente, del lado derecho, para pasar ambos lados de la igualdad a integrales de superficie en la región superficial cerrada $\mathcal{S}$, que limita el volumen:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} dS = - \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \mathcal{P} dS. \quad (2.4.15)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie $\mathcal{S}$, dirigido hacia afuera de la región $\mathcal{R}$ del fluido. Ahora bien, estas integrales sobre superficies cerradas corresponden, en el tubo, a tres fronteras: la superficie de entrada de flujo, $\mathcal{S}_e$, la superficie sólida de la pared del tubo, $\mathcal{S}_p$ y la superficie de salida del flujo, $\mathcal{S}_s$, ver figura 2.3. Es decir que las integrales cerradas equivalen a:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \circ dS = \int_{\mathcal{S}_e} -\boldsymbol{\delta}_z \circ dS + \int_{\mathcal{S}_p} \boldsymbol{\delta}_r \circ dS + \int_{\mathcal{S}_s} \boldsymbol{\delta}_z \circ dS,$$

donde el vector unitario $\mathbf{n}$ se ha especificado en cada una de las superficies. Además, la igualdad (2.4.15) es vectorial y podemos encontrar su proyección en la dirección axial multiplicándola escalarmente (producto punto) por el vector unitario $\boldsymbol{\delta}_z$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_e} -\boldsymbol{\delta}_z \boldsymbol{\delta}_z : \boldsymbol{\tau} dS_e &+ \int_{\mathcal{S}_p} \boldsymbol{\delta}_z \boldsymbol{\delta}_r : \boldsymbol{\tau} dS_p + \int_{\mathcal{S}_s} \boldsymbol{\delta}_z \boldsymbol{\delta}_z : \boldsymbol{\tau} dS_s = \\ - \int_{\mathcal{S}_e} -\boldsymbol{\delta}_z \cdot \boldsymbol{\delta}_z \mathcal{P} dS_e &- \int_{\mathcal{S}_p} \boldsymbol{\delta}_z \cdot \boldsymbol{\delta}_r \mathcal{P} dS_p - \int_{\mathcal{S}_s} \boldsymbol{\delta}_z \cdot \boldsymbol{\delta}_z \mathcal{P} dS_s. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Pero $\tau_{zz} = 0$, porque la velocidad $v_z(r)$ no es función de z , en tanto que la presión en la pared es una fuerza ortogonal a la dirección axial, es decir que $\boldsymbol{\delta}_z \cdot \boldsymbol{\delta}_r = 0$. Por lo tanto la igualdad anterior se reduce a:

$$\int_{\mathcal{S}_p} \tau_{rz}|_{r=R} dS_p = \int_{\mathcal{S}_e} \mathcal{P}_0 dS_e - \int_{\mathcal{S}_s} \mathcal{P}_L dS_s. \quad (2.4.17)$$

En términos generales, para evaluar estas integrales es posible aplicar el teorema del valor medio aunque, en este caso, cada integrando es una constante y puede salir de la integral, de modo que tenemos:

$$\tau_0 2\pi RL = (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) \pi R^2. \quad (2.4.18)$$

También podemos sustituir la expresión de los fluidos newtonianos, ecuación (2.4.10), y despejar el término de los esfuerzos viscosos en la pared, ver figura 2.3, de modo que:

$$-\mu \left. \frac{dv_z}{dr} \right|_{r=R} = \tau_0 = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} \right) \frac{R}{2}. \quad (2.4.19)$$

La segunda igualdad de la ecuación (2.4.19) del presente enfoque integrado es equivalente a la ecuación (2.4.9) del enfoque local y a la ecuación (2.4.2) del enfoque postulado. Esto demuestra la congruencia de la diversidad de enfoques usados para resolver este ejercicio.

2.4.4 Relación entre los parámetros f_F y μ

Mientras en el modelo local hemos incorporado un parámetro, la viscosidad μ , en el modelo postulado hemos incorporado como parámetro el factor de fricción f_F . Podemos elaborar una relación entre estos dos parámetros si encontramos una expresión para la velocidad media de flujo, partiendo del modelo local, donde conocemos la velocidad local y podemos efectuar su integración

y promediado en la superficie de entrada o de salida, para encontrar la velocidad promedio de flujo, es decir:

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_z(r) 2\pi r dr = \frac{2}{R^2} \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{4\mu L} \right) \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr,$$

donde se ha sustituido la velocidad local, de la ecuación (2.4.12). La integración, finalmente da:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) R^2}{8\mu L}. \quad (2.4.20)$$

En esta expresión podemos sustituir la diferencia de presión, usando la ecuación (2.4.19) y luego eliminar los esfuerzos viscosos en la pared, usando la ecuación (2.4.3), para despejar, finalmente, el factor de fricción, el cual resulta

$$f_F = 8 \frac{\mu}{\rho \langle v_z \rangle R} = \frac{16}{\text{Re}}, \quad \text{para } \text{Re} < 2100, \quad (2.4.21)$$

donde Re es el número de Reynolds, definido para la tubería como

$$\text{Re} = \frac{\rho \langle v_z \rangle D}{\mu}. \quad (2.4.22)$$

La ecuación (2.4.21) es un ejemplo de la conclusión mucho más general:

El factor de fricción es función del número de Reynolds, $f_F = f_F(\text{Re})$.

En tuberías largas, es decir, cuando $D/L \ll 1$, con flujos laminares, es decir, cuando $\text{Re} < 2100$, la función es una hipérbola equilátera, dada por la ecuación (2.4.21).

Ejercicios

E.2.4.4-1. Flujo en tuberías verticales e inclinadas

Desarrolla a detalle los modelos postulado, local e integral para (i) flujo descendente en una tubería vertical y para (ii) flujo inclinado ascendente en una tubería con un ángulo $0 < \alpha < \pi/2$ de inclinación, con respecto a la horizontal.

E.2.4.4-2. Potencia de agitación de fluidos newtonianos generalizados (FNG)

- i Elabora a detalle un modelo postulado, para la potencia de agitación de un FNG, proponiendo las variables y parámetros que, presumiblemente, deben ser significativos para estimar la potencia de agitación.
- ii Revisa la sección 8.5 y desarrolla, en terminos vectoriales, un modelo local para flujo laminar, seguido por un modelo integrado para la potencia de agitación de un FNG
- iii Adimensionaliza las ecuaciones del modelo local y el modelo integrado, para encontrar que el número de potencia es función del número de Reynolds generalizado en un tanque agitado.

3. Procesos de transporte y tiempos característicos

Un proceso de transporte consiste en una sucesión de etapas de transporte.

La transferencia o transporte puede ser de momentum, de energía, de masa o de una combinación de ellas. En la dinámica de fluidos se consideran los procesos que implican el transporte de momentum, en tanto que en la transferencia de calor, aquellos que implican el transporte de energía térmica y en la transferencia de masa los que implican el transporte de especies químicas en mezclas multicomponentes. En los procesos de transporte de momentum el sistema se encuentra inicialmente en una configuración dada, que podemos tomar como su configuración de referencia. En determinado instante se genera un cambio local al modificar alguna variable mecánica en una porción del interior del sistema o de su frontera; dicho cambio es una perturbación a la condición de referencia que se da **a partir de** un instante que llamamos tiempo inicial. El estado del sistema en ese instante se denomina **su condición inicial**. El cambio efectuado, que está restringido a una porción del sistema o de su frontera, puede ser instantáneo (un impulso) o continuo (un salto). Este cambio o perturbación da inicio a una etapa transitoria de flujo, que afecta las proximidades de la región donde ocurrió la perturbación inicial. **A la primera etapa le llamamos la etapa transitoria inicial**. Conforme transcurre el tiempo, los cambios del proceso de flujo se extienden a todas las regiones del fluido, en **una segunda etapa que llamamos la etapa transitoria avanzada**. Hay procesos transitorios que terminan por agotamiento del fluido, como al vaciar una tubería. Hay otros **procesos que alcanzan un estado de equilibrio mecánico**, en el cual el flujo se vuelve, finalmente, independiente del tiempo, es decir, **llegan a la etapa de régimen estacionario**.

3.1 Flujo por cortante entre dos láminas sólidas planas y paralelas

3.1.1 El sistema y sus fronteras

Consideremos un fluido entre dos láminas sólidas planas separadas una distancia b constante, que tienen sus lados en las direcciones de las coordenadas (x, z) de dimensiones “infinitas”, es decir, muchísimo más grandes que la distancia b . Focalicemos nuestra atención en el fluido, al que llamamos nuestro sistema; también en las dos láminas sólidas que son las fronteras del sistema.

3.1.2 La configuración de referencia

Todo el conjunto está en reposo, de modo que es conveniente considerar este estado como su configuración de referencia [ver figura 3.1(a)]; es decir, el fluido en su configuración de referencia ocupa el espacio definido por las coordenadas (x, y, z) tales que $0 \leq y \leq b$, para todo (x, z) .

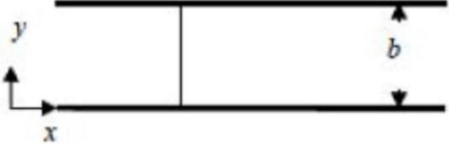
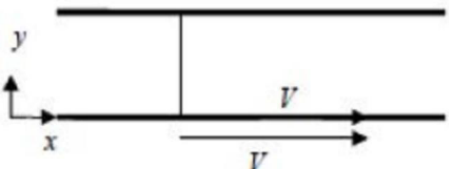
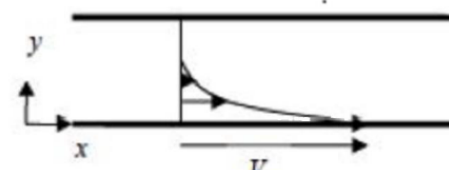
	(a) El sistema y sus fronteras en la configuración de referencia: A $t < 0$, el fluido está en reposo y sus fronteras sólidas también.
	(b) Condición inicial. Condición de no-deslizamiento: A $t = 0$, la lámina sólida inferior se mueve a la velocidad constante V, en la dirección x. El fluido en contacto con ella se desliza a la misma velocidad: $v_x(y=0, t=0)=V$, en tanto que el resto del fluido aún no se mueve: $v_x(y>0, t=0)=0$.
	(c) Etapla transitoria inicial. Transporte del ímpetu cerca de la lámina que se desplaza: A $t > 0$, es decir, a tiempos cortos, el fluido cercano a la placa que se mueve, adquiere la velocidad $v_x(y, t)$, función de la posición y del tiempo, en tanto que sigue en reposo el fluido cercano a la lámina que no se mueve. El flujo es transitorio.
	(d) Etapla transitoria avanzada. Transporte del ímpetu extendido a todo el sistema: A $t \gg 0$, es decir, a tiempos intermedios, todo el fluido se desplaza con velocidad $v_x(y, t)$, es decir, como función de la posición y del tiempo. El fluido en contacto con la placa superior no se mueve, $v_x(y=b, t)=0$, por la condición de no-deslizamiento. El fluido ejerce una fuerza de arrastre sobre la placa superior. El flujo es transitorio.
	(e) Régimen estacionario. El transporte del ímpetu ya no depende del tiempo: Para un tiempo suficientemente largo, $t \rightarrow \infty$, todo el fluido se mueve con velocidad $v_x(y)$, que cambia con la posición, pero ya no con el tiempo. Por la condición de no-deslizamiento, el fluido en contacto con ambas placas sólidas se desplaza con las velocidades de estas, es decir $v_x(b) = 0$ y $v_x(0) = V$. La fuerza de arrastre a través de todo el fluido es constante y el flujo es estacionario.

Figura 3.1: El flujo de Couette plano como un proceso de transporte con dos regímenes. En el régimen transitorio hay aceleración y tiene dos etapas: la etapa transitoria inicial y la etapa transitoria avanzada. En el régimen estacionario hay equilibrio de fuerzas.

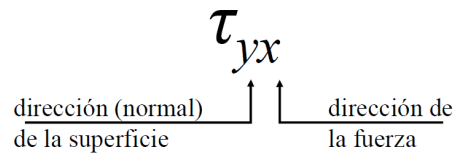
3.1.3 La condición inicial

A partir de un instante dado, supongamos que se desliza tangencialmente la lámina sólida inferior, en la dirección x con una velocidad constante V . Dicho instante señala el inicio del experimento y se denota por el parámetro $t = 0$. El sistema se encuentra entonces en su **condición inicial**, que es el reposo del fluido en todo el espacio entre las dos láminas sólidas, excepto por una delgada capa de fluido adherida a la lámina sólida inferior, que se desplaza con ella, a su misma velocidad [condición de no-deslizamiento, ver Figura 3.1(b)]. Es decir que la condición inicial es:

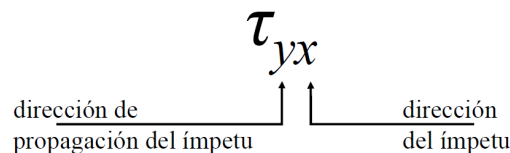
$$\begin{aligned} v_x(y, t) &= 0 & \text{para } 0 < y \leq b, & \text{ al tiempo } t = 0 \\ v_x(y, t) &= V & \text{para } y = 0, & \text{ al tiempo } t = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

3.1.4 Etapa transitoria inicial

El deslizamiento de la lámina sólida inferior arrastra consigo al fluido adyacente, que forma también una lámina o capa fluida. Esta ejerce una fuerza de arrastre sobre el fluido de la siguiente lámina fluida y lo pone en movimiento; ésta a su vez arrastra la siguiente lámina fluida y así sucesivamente. La fuerza se ejerce en la dirección del movimiento (o del flujo de momentum, coordenada x) y las láminas de fluido se identifican por la dirección normal a la superficie donde se aplican (que coincide con la dirección en la que se propaga el movimiento hacia las capas o láminas más internas del fluido, coordenada y). La componente del tensor de los esfuerzos viscosos relativo a esta fuerza es τ_{yx} , donde considerando a τ_{yx} como una fuerza aplicada en una superficie de área unitaria:



o considerando a τ_{yx} como un flujo del ímpetu o flujo de momentum a través de un área unitaria:



En esta etapa inicial **sólo se mueve el fluido cercano a la placa en movimiento**, en tanto que el fluido más lejano permanece en reposo y su estado de esfuerzos viscosos es nulo $\tau_{yx} = 0$. Esta situación equivale a considerar importante el transporte de momentum en los alrededores de la lámina sólida en movimiento y proponer que más allá de una región cercana a esta lámina, el fluido se encuentra en reposo [ver figura 3.1(c)]. **La extensión de esta región en reposo carece de importancia** y puede simplemente proponerse que la región en reposo se extiende indeterminadamente, lejos de la zona cercana a la superficie sólida, hasta el infinito. Estas consideraciones dan lugar al planteamiento teórico del *Ejemplo 4.1-1, Flujo cerca de una pared que se pone súbitamente en movimiento*, del libro de Bird, Stewart y Lightfoot (2006), para un fluido newtoniano. En la sección 5.2 resolvemos este problema para un fluido de Ostwald de Waele. Si consideramos que el fluido newtoniano es un caso particular de los fluidos de Ostwald, para el cual ($n = 1, m = \mu$), podemos seguir el procedimiento de la solución propuesta en dicha sección, ya que el problema es de la difusión transitoria de momentum en el fluido cercano a una lámina sólida, que repentinamente se desliza de manera tangencial, a velocidad constante. El desarrollo, reducido al caso newtoniano y coincidente con el *Ejemplo 4.1-1* de Bird, parte del balance del ímpetu en dirección x :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (3.1.2)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática y las condiciones iniciales y a la frontera (CICF) son:

$$\begin{aligned} v_x(y > 0, t = 0) &= 0 \\ v_x(y = 0, t \geq 0) &= V \\ v_x(y \rightarrow \infty, \forall t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

llegando a la solución dada por la ecuación (5.2.23) para $n = 1$, es decir:

$$\frac{v_x}{V} = 1 - \text{erf}(w), \quad \text{donde } w = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad (3.1.4)$$

es la variable combinada.

La función error, $\text{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-u^2} du$, donde u es una variable muda, está representada en la Figura 3.2, junto con la velocidad adimensional v_x/V .

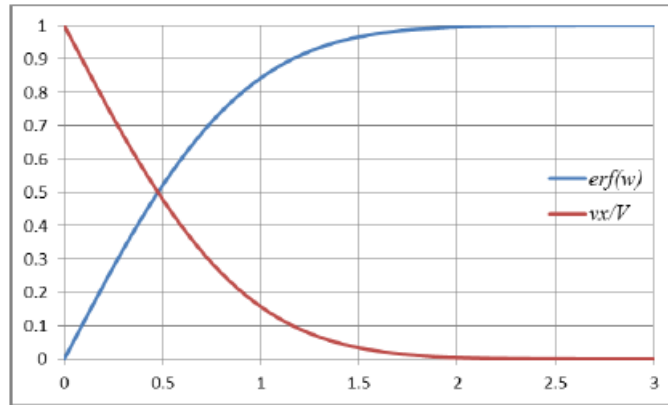


Figura 3.2: Función error y velocidad adimensional v_x/V .

La función error se acerca asintóticamente a uno cuando su argumento $w \rightarrow \infty$, por ello es conveniente, para determinar el **espesor de la película de fluido en movimiento**, en la cercanía de la lámina sólida inferior, tomar algún criterio. Sería deseable medir la velocidad con algún instrumento que nos determine su valor local, como un anemómetro laser o de película caliente, o bien mediante un PIV (Particle Image Velocimeter). En tal caso, la extensión detectada de la película de fluido en movimiento depende de la precisión con la cual podemos medir la velocidad. Un instrumento adecuado, para propósitos generales, debe tener una precisión mayor al 1 % de su rango de mediciones; por ello es conveniente establecer, como una regla empírica, que el tamaño de la región del fluido en movimiento abarca valores de la velocidad v_x , iguales o mayores al 1 % de la velocidad típica o escala de la velocidad V , que en este caso es la velocidad de la lámina sólida. Esto ocurre para algún valor de w entre 1.8 y 1.9, y para facilitar el manejo de la cifra, con cierto margen de aproximación, consideramos el valor de $w \approx 2$, que satisface el criterio propuesto, como puede apreciarse en la Tabla 3.1, ya que entonces $v_x = 0.0047V$. Este valor de w nos sirve como criterio para determinar la extensión de los fenómenos difusivos en un sistema. Ya que la variable combinada w depende tanto de la posición y como del tiempo t , ver ecuación (3.1.4), y dado su

valor de $w = 2$, podemos determinar tanto el espesor puesto en movimiento a un tiempo dado como el intervalo de tiempo necesario para poner en movimiento una lámina fluida de un espesor dado.

Tabla 3.1. Valores de la función error

w	$\text{fer}(w)$	w	$\text{fer}(w)$	w	$\text{fer}(w)$	w	$\text{fer}(w)$	w	$\text{fer}(w)$	w	$\text{fer}(w)$
0.00	0.0000	0.18	0.2009	0.36	0.3893	0.68	0.6638	1.04	0.8586	1.70	0.9838
0.02	0.0226	0.20	0.2227	0.38	0.3893	0.72	0.6914	1.08	0.8733	1.80	0.9891
0.04	0.0451	0.22	0.2443	0.40	0.4284	0.76	0.7175	1.12	0.8868	1.90	0.9928
0.06	0.0676	0.24	0.2657	0.44	0.4662	0.80	0.7421	1.16	0.8991	2.00	0.9953
0.08	0.0901	0.26	0.2869	0.48	0.5028	0.84	0.7651	1.20	0.9103	2.20	0.9981
0.10	0.1125	0.28	0.3079	0.52	0.5379	0.88	0.7867	1.30	0.9340	2.40	0.9993
0.12	0.1348	0.30	0.3286	0.56	0.5716	0.92	0.8068	1.40	0.9523	2.60	0.9998
0.14	0.1570	0.32	0.3491	0.60	0.6039	0.96	0.8254	1.50	0.9661	2.80	0.9999
0.16	0.1790	0.34	0.3694	0.64	0.6346	1.00	0.8427	1.60	0.9764	3.00	1.0000

Ahora tenemos la posibilidad de responder la siguiente pregunta relacionada con el proceso de transporte de la Figura 3.1(c): ¿Qué significa que el tiempo sea pequeño, de modo que estemos en la etapa inicial del movimiento de un flujo de Couette plano? La respuesta, para un fluido newtoniano, es que el tiempo t es pequeño si

$$t < \tau_c = \frac{b^2}{16\nu} \quad (3.1.5)$$

donde τ_c es un tiempo característico del criterio para tiempos cortos en un proceso difusivo. Resulta al sustituir el tiempo $\tau_c = t$ del criterio:

$$w = 2 = \frac{b}{\sqrt{4\nu t}} \quad (3.1.6)$$

donde b es la distancia entre las dos láminas sólidas, como se aprecia en la Figura 3.1.

Ejercicio 3.1

Un fluido de Ostwald de Waele tiene un índice $n = 2/3$; (1) encuentra un tiempo característico del criterio para tiempos cortos, definido a partir de la respuesta del sistema, como se hizo arriba, a partir de la región que se mueve con una velocidad mayor al 0.5% de la velocidad típica V , considerando la separación entre las láminas sólidas b como el espesor que se debe poner en movimiento. (2) Analiza y compara tu respuesta con la ecuación (3.5), aplicable al fluido newtoniano. Elabora las gráficas que sean necesarias para esta comparación. Usa *Mathematica* u otro programa similar.

3.1.5 Régimen estacionario

La evolución del proceso de transporte de momentum del flujo de Couette, después de su etapa transitoria inicial que sólo afecta las inmediaciones de la placa sólida puesta en movimiento, perturba ya la totalidad del fluido entre las dos placas, en su etapa transitoria avanzada o etapa intermedia, como se aprecia en la figura 3.1(d). El análisis de esta etapa se facilita al proponer la velocidad local $v_x(y, t)$ en términos de su defecto con respecto a los valores del régimen estacionario,

ver figura 3.1(e). Por lo anterior es conveniente encontrar primero el perfil de velocidad estacionario, lo cual proponemos en esta subsección.

El estacionario es un régimen de equilibrio mecánico, es decir, de aceleración local cero, cuando la velocidad no es ya función del tiempo, es decir que $v_x(y, t) \rightarrow v_x(y)$ y el problema se reduce a una EDO (ecuación diferencial ordinaria), con sus respectivas CF (condiciones a la frontera):

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0, \quad (3.1.7)$$

con CF:

$$\begin{aligned} v_x(y=0) &= V \\ v_x(y=b) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

cuya solución es la línea recta

$$\frac{v_{x\infty}}{V} = 1 - \frac{y}{b}. \quad (3.1.9)$$

Los esfuerzos viscosos se pueden conocer derivando la velocidad $v_{x\infty}(y)$:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_{x\infty}}{dy} = -\mu \frac{d}{dy} \left[V \left(1 - \frac{y}{b} \right) \right] = \mu \frac{V}{b}. \quad (3.1.10)$$

Este resultado indica que el estado de los esfuerzos viscosos en el fluido es, en este caso, una constante positiva, que representa la fuerza de tracción viscosa por unidad de área (en la dirección positiva x) que una lámina de fluido, situada en la superficie $y = y_0$ (ver Figura 3.3), ejerce sobre la lámina adyacente en la superficie $y = y_0 + \delta y$, donde δy es una longitud infinitesimal positiva.

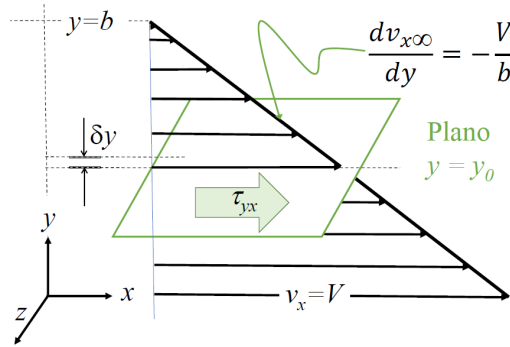


Figura 3.3: Dirección de los esfuerzos viscosos τ_{yx} , en el plano $y = y_0$, para el flujo de Couette plano estacionario.

3.1.6 La etapa transitoria avanzada

En la etapa transitoria avanzada o etapa intermedia, el proceso de transporte de momentum abarca ya la totalidad del sistema y es ya importante considerar que la segunda lámina sólida es paralela a la primera y se encuentra separada de ella por una distancia constante b . El fluido todo se encuentra en un estado mecánico de esfuerzos, provocado por el rozamiento de las láminas adyacentes de fluido, unas sobre otras. Sin embargo, lo que diferencia la etapa transitoria avanzada del régimen

estacionario es que la primera cambia con el tiempo; de hecho su cambio es la evolución hacia el equilibrio mecánico del régimen estacionario. También la etapa transitoria avanzada se diferencia de la etapa transitoria inicial en la importancia que tiene la lámina sólida superior, que está fija y en el transitorio avanzado ejerce un esfuerzo en la dirección negativa del eje x . Este esfuerzo aumenta de magnitud con el tiempo, llegando finalmente a ser igual al negativo de τ_{yx} , dado por la ecuación (3.1.10), cuando alcanza el régimen estacionario.

El planteamiento del problema toma en cuenta todo el proceso transitorio, desde la condición inicial hasta el régimen estacionario. Es fundamental considerar el espacio entre las dos láminas y a éstas como las fronteras del sistema. Entonces el problema es la difusión transitoria de momentum en el fluido entre las dos láminas sólidas, cuando la lámina inferior se desliza repentinamente de manera tangencial, a velocidad constante. El modelo para un fluido newtoniano es el del *Ejemplo 4.1-2* de Bird y consiste en el balance (3.1.2) con las siguientes CICF:

$$\begin{aligned} v_x(y > 0, t = 0) &= 0 \\ v_x(y = 0, t \geq 0) &= V \\ v_x(y = b, \forall t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

La solución a este problema ya no es posible por el método de combinación de variables, ya que no se cumple la condición de reducir las tres condiciones límite de la ecuación (3.1.2) a solo dos condiciones distintas, como ocurrió con las CICF (3.1.3). Esta imposibilidad se debe a la importancia de la lámina sólida situada en $y = b$. Ahora la solución se dará utilizando el método de separación de variables y es conveniente proponerla como la superposición de la solución en el régimen estacionario, $v_{x\infty}$, menos su defecto o desviación transitoria v_{xt} :

$$v_x(y, t) = v_{x\infty}(y) - v_{xt}(y, t) \quad (3.1.12)$$

El resultado, en variables adimensionales, es la ecuación 4.1-40 de Bird:

$$\phi(\eta, \tau) = (1 - \eta) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \right) \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin(n\pi\eta), \quad (3.1.13)$$

donde las variables son:

$$\phi(\eta, \tau) = \frac{v_x}{V}; \quad \eta = \frac{y}{b}; \quad \tau = \frac{vt}{b^2} \quad (3.1.14)$$

En el lado derecho de (3.1.13), el primer paréntesis corresponde a la solución estacionaria [ecuación (3.1.9)], en tanto que la sumatoria corresponde a la desviación que se sustrae de la primera.

Podemos ahora preguntarnos por el tiempo necesario para que la velocidad esté cercana a su valor del régimen estacionario en menos de un 1 % de diferencia, es decir que nos preguntamos por el valor mínimo del tiempo τ_e , que satisface la desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} \right) \exp(-n^2 \pi^2 \tau_e) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \phi\left(\frac{1}{2}, \tau_e\right) < 0.01, \quad (3.1.15)$$

lo cual ha requerido especificar el valor de la coordenada espacial $\eta = 1/2$, que coincide con el punto medio del fluido, es decir, el punto más alejado de ambas fronteras. Es claro que solamente

contribuyen a la sumatoria anterior los términos cuya función seno es distinta de cero, lo cual nos lleva a modificar la sumatoria para que incluya sólo estos términos, es decir, cuando $n \rightarrow 2m - 1$. Entonces buscamos un valor de τ_e tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2m-1)\pi} \right) \exp(-(2m-1)^2 \pi^2 \tau_e) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right) < 0.01. \quad (3.1.16)$$

Ejercicio 3.2

1. Encontrar valores aproximados de τ_e usando la ecuación (3.1.16) para sumatorias truncadas en su número de términos, con valores máximos $m_{\max} = 1, 2, 3, \dots$, donde

$$\sum_{m=1}^{m_{\max}} \left(\frac{2}{(2m-1)\pi} \right) \exp(-(2m-1)^2 \pi^2 \tau_e) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right) < 0.01. \quad (3.1.17)$$

2. Elaborar una gráfica de $m_{\max}$ vs. τ_e para observar cómo los valores aproximados de τ_e tienden a un valor límite conforme aumenta el número de términos de la sumatoria.
3. Evaluar la razón $f_{\tau} = \tau_e/\tau_c$, donde f_{τ} es un factor que indica cuántas veces mayor es el tiempo requerido para llegar al régimen estacionario, con respecto al tiempo característico de duración de la etapa inicial, dado por la ecuación (3.1.5).

3.2 Flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo circular

3.2.1 El fluido y sus fronteras

Consideremos un tubo vertical largo, lleno de un fluido newtoniano, con el fondo cerrado por una válvula de bola o simplemente con un tapón. En determinado momento la válvula se abre totalmente de manera instantánea, poniendo en contacto el fluido del fondo del tubo con la presión atmosférica. Consideremos el sistema formado por el fluido del tubo; las fronteras son la pared interna del tubo, la sección transversal abierta de salida del fluido, situada donde está la válvula (o el tapón) y la sección transversal abierta a la entrada del fluido, donde colocaremos el origen del sistema coordenado. La entrada está situada una distancia L arriba de la salida; para que la velocidad sea positiva vamos a orientar el sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , con su coordenada axial z en la misma dirección de la velocidad, como se aprecia en la Figura 3.4.

3.2.2 La configuración de referencia

El fluido en reposo en el tubo puede tomarse como la configuración de referencia [ver Figura 3.4(a)]; es decir, el fluido en su configuración de referencia ocupa el espacio definido por las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) tales que $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq z \leq L$, donde L es la longitud desde el origen de coordenadas hasta la válvula de salida y a es el radio del tubo. En esta configuración, la presión en el fondo del tubo, donde se encuentra el tapón o la válvula, es $p_L = p_0 + \rho g L$ y más aún, para cualquier valor de z , $p(z) = p_0 + \rho g z$. Definiendo la presión modificada como $\mathcal{P}_z = p_z - \rho g z$, vemos que en las condiciones hidrostáticas $\mathcal{P}_z$ es una constante: $\mathcal{P}_z = p_0$ y por lo tanto, cualquier diferencia de presión modificada en condiciones hidrostáticas es cero.

3.2.3 La condición inicial

Sin embargo, cuando la válvula se abre completamente de manera instantánea, poniendo en contacto el fondo del tubo con el aire ambiental a la presión atmosférica p_a , la presión del fondo cambia abruptamente a la presión atmosférica, de modo que la diferencia de presión modificada deja de ser cero: $-\Delta \mathcal{P} = p_0 - \mathcal{P}_L = p_0 - p_a \neq 0$, y se induce un flujo en la dirección negativa del gradiente de la presión modificada:

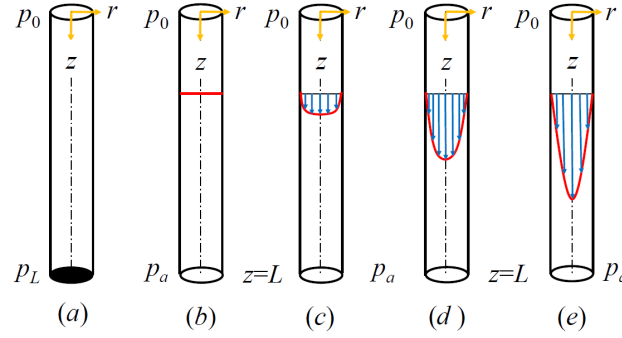


Figura 3.4: El flujo de Hagen-Poiseuille como un proceso de transporte. (a) El tubo vertical tiene su extremo inferior cerrado y se encuentra lleno de un líquido newtoniano a la presión hidrostática, de modo que $p_L = p_0 + \rho gL$. (b) Al tiempo $t = 0$ se destapa el fondo del tubo y súbitamente la presión allí se torna igual a la presión atmosférica, p_a . En este instante no existe flujo. La línea roja indica que $v_z = 0$. (c) Se genera un flujo transitorio acelerado, la velocidad es mayor lejos de la pared y cero en contacto con ella, por la condición de no-deslizamiento. (d) Continúa la etapa transitoria con mayor aceleración en la zona de menor resistencia, es decir, lejos de la pared y cerca del centro del tubo. (e) A tiempos muy largos se establece el perfil parabólico de la velocidad, que es estacionario.

$$-\frac{d\mathcal{P}}{dz} = \frac{p_0 - p_a}{L} \quad (3.2.1)$$

3.2.4 Etapa transitoria inicial

En la Figura 3.4(c) se representa la etapa inicial del flujo laminar en un tubo, que es un movimiento acelerado por el efecto de la diferencia de presión y con efectos de rozamiento en la pared. El fluido escurre por el interior del tubo, aumentando su velocidad conforme pasa el tiempo, lo cual provoca también un aumento en las fuerzas de rozamiento en dirección ascendente, efectuadas por la pared del tubo sobre el fluido.

Por un momento pensemos en la situación que observaría un viajero observador adherido al fluido en el eje axial del tubo. Este observador viajaría a una velocidad igual a la velocidad del fluido en el centro del tubo y podemos imaginar que vería que es la pared del tubo la que se mueve con respecto a él, de la misma manera que viajando en un automóvil, vemos que son las casas y semáforos los objetos que se mueven, en la dirección contraria a nuestro propio movimiento y con nuestra misma velocidad, pero en sentido contrario. Si por un momento, proponemos ahora que cambiamos nuestro problema al del flujo en un tubo, pero generado por el movimiento repentino de la pared del tubo, que a partir del instante inicial se desliza con una velocidad constante, de magnitud y en la dirección ascendente, lo que tenemos es un problema muy semejante al del flujo de Couette, que hemos discutido anteriormente. Podemos también hacernos la pregunta sobre el espesor de la película de fluido que se habría puesto en movimiento, arrastrada por el movimiento ascendente de la pared del tubo, como se ilustra en la Figura (3.5). También cabría una pregunta similar a la que hemos hecho anteriormente: ¿En cuánto tiempo el movimiento del fluido se transfiere desde la pared del tubo hasta su eje axial? Ignorando el efecto de curvatura propio de la geometría cilíndrica, podríamos utilizar el criterio de tiempos cortos, desarrollado en el ejercicio anterior, ecuación (3.6) y expresar que dicho tiempo está dado por

$$t < \tau_c = \frac{R^2}{16\nu} \quad (3.2.2)$$

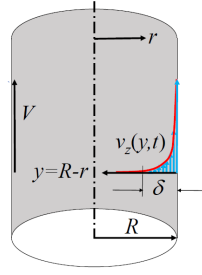


Figura 3.5: Etapa transitoria inicial del flujo de un fluido en el interior de un tubo, cuando el tubo se pone repentinamente en movimiento, en su dirección axial, a una velocidad constante V .

donde R es el radio del tubo. Debemos subrayar que esta expresión representa el tiempo de la difusión del ímpetu (o difusión viscosa) desde la pared hacia el centro del tubo y podemos asociarlo al tiempo requerido para que el movimiento de la pared del tubo afecte, debido al arrastre viscoso del fluido, la región del centro del tubo, representando aproximadamente el problema original propuesto en esta sección, es decir que, si consideramos solamente la etapa transitoria inicial, la película de fluido en movimiento es una delgada capa de fluido, de espesor δ , cercana a la pared, donde $\delta \ll R$. Por tal motivo, es adecuado despreciar los efectos de curvatura del sistema de coordenadas cilíndricas y utilizar, en consecuencia, la expresión (3.2.2), para estimar el tiempo de la etapa transitoria inicial.

3.2.5 Régimen estacionario

La etapa final del flujo es el extremo opuesto a la etapa transitoria inicial, es decir, cuando se establece el régimen estacionario, a tiempos muy grandes, como en la figura 3.4(e), cuando el escurrimiento del fluido debido a la gravedad o a una diferencia de presión modificada no nula, se compensa mecánicamente con el efecto de la resistencia viscosa que ejerce la pared del tubo en la dirección ascendente. El análisis corresponde al resultado conocido como el perfil parabólico de la velocidad, que viene en todos los libros de texto, incluido el presente, ver ecuación (2.4.12):

$$v_z = \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dz} \right) \frac{R^2}{4\mu} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (3.2.3)$$

de donde se obtiene el resultado conocido como la ley de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dz} \right) \frac{\pi R^4}{8\mu} \quad (3.2.4)$$

En estas expresiones el gradiente de la presión modificada está dado por la ecuación (3.2.1), que bien puede ser reemplazado, como se hará en la siguiente sección.

3.2.6 Etapa transitoria avanzada

La descripción del proceso transitorio de la Figura 3.4, que abarca desde el inicio del flujo hasta que se llega al régimen estacionario, se propone a partir de las siguientes consideraciones y simplificaciones, siguiendo el ejercicio 4.D-2, propuesto por Bird *et al*, que aparece con mayor detalle en la primera edición de su libro, de 1960. La velocidad es unidireccional, en coordenadas cilíndricas, es decir que $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$, donde $v_r = v_\theta = 0$ y $v_z = v_z(r, t)$. También que el gradiente de la presión está dado por la ecuación (3.2.1) y entonces tenemos el siguiente modelo para un fluido newtoniano incompresible:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{p_0 - p_a}{L} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.2.5)$$

con las condiciones iniciales y a la frontera:

$$\begin{aligned} v_z(r, t=0) &= 0; & \text{para } 0 \leq r \leq R \\ v_z(r=0, t) &< \infty; & \forall t \\ v_z(r=R, t) &= 0; & \forall t. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

La solución se puede encontrar en términos de las variables adimensionales:

$$\phi = \frac{v_z}{(p_0 - p_a)R^2/4\mu L}; \quad \xi = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{vt}{R^2}, \quad (3.2.7)$$

a partir de la solución que corresponde al perfil parabólico del régimen estacionario, $\phi_\infty(\xi) = 1 - \xi^2$, menos la desviación que corresponde a la aceleración local y se amortigua con el tiempo, $\phi_t(\xi, \tau)$; es decir $\phi(\xi, t) = \phi_\infty(\xi) - \phi_t(\xi, \tau)$ es tal que:

$$\phi(\xi, t) = (1 - \xi^2) - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \xi)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 \tau) \quad (3.2.8)$$

Las desviaciones con respecto de la solución estacionaria, evaluadas en el centro del tubo, son útiles para proponer un criterio sobre el tiempo mínimo necesario τ_e , para que dichas desviaciones sean inferiores al 1 %, con respecto al valor de la velocidad en el régimen estacionario, es decir que:

$$\phi_t(0, \tau_e) = \phi_\infty(0) - \phi(0, \tau_e) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(0)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 \tau_e) < 0.01 \quad (3.2.9)$$

donde las α_n son las raíces de la ecuación $J_0(\alpha) = 0$, cuyos primeros valores son $\alpha_1 = 2.405$, $\alpha_2 = 5.520$ y $\alpha_3 = 8.654$.

Ejercicio 3.3

1. Encontrar valores aproximados de τ_e usando la ecuación (3.2.9) para sumatorias truncadas en su número de términos, con valores máximos $m_{max} = 1, 2, 3, \dots$, donde

$$8 \sum_{n=1}^{m_{max}} \frac{J_0(0)}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \exp(-\alpha_n^2 \tau_e) < 0.01. \quad (3.2.10)$$

2. Elaborar una gráfica de m_{max} vs. τ_e para observar cómo los valores aproximados de τ_e tienden a un valor límite conforme aumenta el número de términos de la sumatoria.
3. Evaluar la razón $f_\tau = \tau_e/\tau_c$, donde f_τ es un factor que indica cuántas veces mayor es el tiempo requerido para llegar al régimen estacionario, con respecto al tiempo característico de duración de la etapa inicial, dado por la ecuación (3.2.2).
4. Con base en los resultados anteriores, así como los del Ejercicio 3.2, ¿es razonable proponer que $\tau_e \approx 100\tau_c$?

4. Procesos transitorios sin etapa estacionaria

4.1 Introducción

En el capítulo precedente tratamos dos **flujos que a tiempos muy largos llegan a su régimen estacionario**. En ambos casos **tienen solución** al modelo transitorio, en la etapa transitoria avanzada, se obtuvo **a partir de la diferencia con la solución del régimen estacionario**, la cual se obtiene cuando se elimina la dependencia temporal en las ecuaciones del modelo, reduciéndolas a ecuaciones diferenciales ordinarias, que se resuelven para la velocidad unidimensional, en función solamente de una de las coordenadas espaciales que limita al flujo con una condición a la frontera.

Existen procesos transitorios de flujo que nunca llegan a su régimen estacionario, sino a su agotamiento,

como sucede al vaciar un tanque que inicialmente contiene un líquido, por un orificio o un tubo localizado en su base, o al determinar la viscosidad de un fluido con un viscosímetro capilar. Ambos flujos se analizan en este capítulo desde un enfoque de balances integrales con modelos transitorios y cuasi-estacionarios.

4.2 Modelos de la descarga de un tanque

El proceso de descarga de un recipiente o tanque a través de un tubo de salida, localizado en la base del tanque, **es transitorio desde el inicio hasta que el recipiente se vacía**. A diferencia de otros procesos de flujo, no alcanza un régimen estacionario. Los principios físicos que gobiernan este proceso pueden analizarse partiendo de los **balances integrales de masa y de energía mecánica en el régimen transitorio**. Además, al considerar la aproximación de los procesos cuasiestacionarios, es posible elaborar modelos parcialmente transitorios y parcialmente estacionarios, considerando sus dinámicas lenta y rápida, respectivamente.

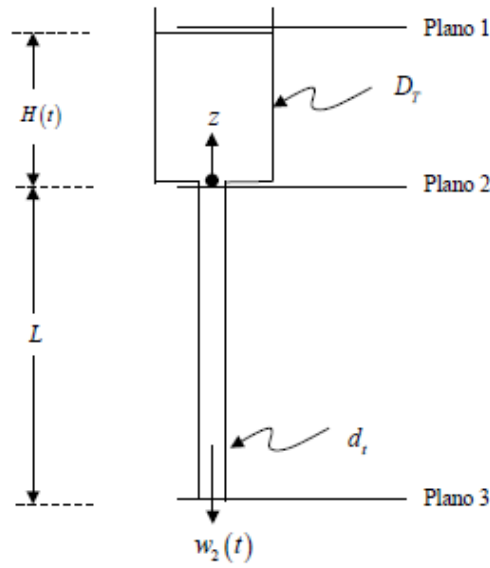


Figura 4.1: Diagrama del recipiente con un tubo de descarga.

4.2.1 Cantidades integrales fundamentales

Consideremos que el recipiente y el tubo que se muestran en el diagrama de la Figura 4.1 contienen al **sistema**, que es **el fluido contenido en ambos, el tubo y el recipiente**. Este sistema se ha dividido en dos sectores o subsistemas por medio de tres planos. Entre los planos 1 y 2 está el recipiente y entre los planos 2 y 3 está el tubo. La **masa total de fluido en el recipiente**, m_{tot} es:

$$m_{tot} = S_1 \int_0^{H(t)} \rho dz = \rho S_1 H(t) \quad (4.2.1)$$

donde ρ es la densidad (constante) del fluido, $S_1 = \pi D_T^2/4$, es el área de la sección transversal del recipiente (constante), $S_1 dz$ es un elemento diferencial de volumen en el recipiente y $H(t)$ es la altura del nivel del fluido en el recipiente, desde el fondo del mismo.

La **energía potencial total del fluido en el recipiente**, Φ_{tot} , se puede estimar por integración de la densidad de energía potencial $\rho \hat{\Phi} = \rho gz$, a cualquier altura z , en el volumen del recipiente, con el elemento diferencial de volumen $S_1 dz$, utilizando el sistema coordenado de la Figura 4.1, donde $z = 0$ en el fondo del mismo recipiente, tenemos:

$$\Phi_{tot} = S_1 \int_0^{H(t)} \rho gz dz = m_{tot} g \frac{H(t)}{2}. \quad (4.2.2)$$

La última igualdad se obtiene al efectuar la integración en z y sustituir la ecuación (4.2.1). En esta última igualdad reconocemos que la energía potencial total del fluido en el recipiente Φ_{tot} , equivale a la fuerza de gravedad $m_{tot}g$ aplicada en el centro de masa, es decir, en el plano horizontal a la mitad del fluido en el tanque $\bar{z} = H/2$. Los cambios de la masa total y la energía potencial total en el recipiente se pueden representar como sus derivadas con respecto al tiempo, al establecer los balances transitorios de masa y energía mecánica, como se hace en la siguiente sección.

4.2.2 Modelos integrales transitorios

Balance integral de masa en el recipiente, desde arriba de la superficie del agua en el recipiente, plano 1, hasta la entrada al tubo, plano 2. Ver Figura 4.1 y simplificar el balance integral de masa, Ecuación (7.1-1) o Ecuación (7.1-2) de Bird *et al*:

$$\frac{dm_{tot}}{dt} = -w_2(t) \quad (4.2.3)$$

donde $w_2(t) = \rho S_2 \langle v_2 \rangle(t)$ es la velocidad másica de flujo o flujo másico, $S_2 = \pi d_t^2/4$ es el área de la superficie transversal del tubo y $\langle v_2 \rangle(t)$ es la velocidad media de flujo en el tubo.

En la Ecuación (4.2.3) hay dos incógnitas dependientes del tiempo: la masa de fluido en el recipiente $m_{tot}(t)$ y la velocidad media en el tubo $\langle v_2 \rangle(t)$. Existe, por lo tanto, un grado de libertad y resolver el balance de masa integrado requiere establecer otra relación independiente entre ambas variables. Por ello elegimos establecer el balance integral de energía mecánica desde arriba de la superficie del agua en el recipiente, plano 1, hasta la salida del tubo, plano 3. Ver Figura 4.1 y simplificar el balance integral de energía mecánica, Ecuación (7.4-1) o Ecuación (7.4-2) de Bird *et al.*:

$$\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = -\frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 w_2(t) - E_v \quad (4.2.4)$$

donde $E_v = \frac{4L}{d_t} f_F \frac{1}{2} \langle v_2 \rangle^2 w_2$ son las pérdidas de energía mecánica por fricción viscosa en el tubo (y en los accesorios de entrada y salida).

Ahora el balance de masa (4.2.3) se puede re-escribir sustituyendo la igualdad desarrollada para $w_2(t)$ y la ecuación (4.2.1) para obtener una expresión para la velocidad como función del nivel del agua $H(t)$ en el tanque:

$$\langle v_2 \rangle = \left(-\frac{S_1}{S_2} \frac{dH}{dt} \right) \quad (4.2.5)$$

Por otra parte, considerando la expresión para la energía potencial total (4.2.2) y la expresión para las pérdidas de energía mecánica por fricción viscosa en el tubo, E_v , en el balance de energía mecánica (4.2.4) tenemos que

$$g \frac{d}{dt} (m_{tot} H) = - \left(1 + \frac{4L}{d_t} f_F \right) \langle v_2 \rangle^2 w_2 \quad (4.2.6)$$

donde se puede aplicar la derivada al producto $m_{tot} H$, conduciendo a dos términos en el lado izquierdo de la ecuación (4.2.6), en la cual se sustituyen (4.2.1) y (4.2.3) quedando:

$$g \left(\rho S_1 H \frac{dH}{dt} - H w_2 \right) = - \left(1 + \frac{4L}{d_t} f_F \right) \langle v_2 \rangle^2 w_2. \quad (4.2.7)$$

Aquí podemos sustituir $w_2 = \rho S_2 \langle v_2 \rangle$ y la ecuación (4.2.5), simplificar y obtener:

$$2Hg = \left(1 + \frac{4L}{d_t} f_F \right) \left(-\frac{S_1}{S_2} \frac{dH}{dt} \right)^2, \quad (4.2.8)$$

a la cual se puede extraer raíz cuadrada antes de integrar con la condición inicial $H(z=0) = H_0$, quedando:

$$\frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2}{g} \left(1 + \frac{4L}{d_t} f_F \right)} \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{H} \right) = t \quad (4.2.9)$$

que es una expresión que asocia un valor de H a cada tiempo t . En particular, el tiempo de descarga t_D es el tiempo al que se vacía el tanque, es decir que $H(t_D) = 0$. Podemos utilizar esta condición en la ecuación (4.2.9) para re-escribirla como:

$$\frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2}{g} \left(1 + \frac{4L}{d_t} f_F \right)} H = t_D - t \quad (4.2.10)$$

que es un resultado comparable con otros que se han reportado; por ejemplo, al despreciar la fricción en la pared del tubo, hacemos el problema equivalente al de un escurrimiento por un orificio en el fondo del tanque, que equivale a sustituir el valor $f_F = 0$ en (4.2.10). En tal caso el resultado coincide con el de Bird *et al.* [Ejemplo 7.7-1(a)], basado en la solución de Torricelli para el flujo a través de un orificio, que utiliza la ecuación de Bernoulli en régimen estacionario. Otros casos de importancia se tratan en los siguientes ejercicios.

Ejercicios

E.4.2.2-1. Refinamiento del modelo de descarga de un tanque

- (1) Corrige las cantidades totales m_{tot} y Φ_{tot} , en las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.2), incluyendo las contribuciones respectivas del fluido contenido en el tubo.
- (2) Repite el desarrollo que lleva a las ecuaciones (4.2.9) y (4.2.10), incorporando las contribuciones del fluido en el tubo, calculadas en el punto anterior y explica tu resultado.

E.4.2.2-2. Descarga con flujo laminar en el tubo

El factor de fricción en tuberías con flujo laminar es $f_F = 16/Re$, donde $Re = \frac{\rho \langle v_2 \rangle d_t}{\mu}$ es el número de Reynolds en el tubo. Sustituye f_F del caso laminar en la ecuación (4.2.10) y compara tu resultado con el del ejercicio 7B.9(a) de Bird *et al.*, después de hacer el álgebra necesaria.

E.4.2.2-3. Descarga con flujos turbulentos en el tubo

El factor de fricción para tuberías con flujo turbulento tiene varias expresiones que se describen a continuación:

- (1) El factor de fricción de Blasius (1913) surge de un análisis de la capa límite y es adecuada para tuberías de pared hidráulicamente lisa en el rango de número de Reynolds que se indica:

$$f_F = \frac{0.0791}{Re^{1/4}}; \quad 2.1 \times 10^3 < Re < 10^5. \quad (4.2.11)$$

- (2) Otro resultado, conocido como la fórmula de Prandtl (1952), utiliza una descripción del flujo turbulento basada en las variables universales (Bird *et al.* Ejemplo 5.5-1), también para tuberías lisas con un rango de números de Reynolds más amplio que la anterior:

$$\frac{1}{\sqrt{f_F}} = 4.0 \log(Re \sqrt{f_F}) - 0.4; \quad 2.3 \times 10^3 < Re < 4 \times 10^6. \quad (4.2.12)$$

- (3) En las tuberías rugosas el parámetro de rugosidad relativa ε/d_t juega un papel importante en la determinación del factor de fricción. Las fórmulas de f_F para tuberías rugosas son variedades empíricas con algún parecido a (4.2.11) y (4.2.12), como la ecuación empírica de Haaland (1983):

$$\frac{1}{\sqrt{f_F}} = -3.6 \log \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/d_t}{3.7} \right)^{10/9} \right]; \quad 4 \times 10^4 < Re < 10^8; \quad 0 < \varepsilon/d_t < 0.05 \quad (4.2.13)$$

Utiliza las expresiones de los factores de fricción para flujo turbulento (4.2.11), (4.2.12) y (4.2.13) en la ecuación (4.2.10), para generar las correspondientes gráficas en el plano (t, H) .

E.4.2.2-4. Flujos de energía potencial gravitacional

Incorpora los flujos de energía potencial gravitacional al balance transitorio de energía cinética (4.2.4) y luego

- (1) Encuentra la solución con respecto al tiempo.
- (2) Compara dicha solución con la ecuación (4.2.10).
- (3) Estima qué tan importante es incorporar estos flujos de energía potencial gravitacional al inicio del experimento, cuando la longitud del tubo es de $L = 0$, $L = H_0/10$, $L = H_0$ y $L = 10H_0$.

Respuesta al punto (1):

$$\frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2}{g} \left(1 + \frac{4L}{d_t} f_F \right)} \left(\sqrt{H+L} - \sqrt{L} \right) = t_D - t \quad (4.2.14)$$

Nota: Aplica nuevamente la Ecuación (7.4-2) de Bird et al., considerando que la densidad de energía potencial por unidad de masa es $\hat{\Phi}(z) = gz$.

4.2.3 Modelos integrales cuasi-estacionarios

Los modelos cuasi-estacionarios se pueden elaborar para las etapas transitorias de un proceso **cuando concurren dinámicas lentas y rápidas**, es decir, cuando la transferencia de las cantidades de interés, en este caso la masa (evidenciada por la altura en el tanque) y la velocidad media (que se establece en el tubo cuando se alcanza el equilibrio de fuerzas entre las fuerzas gravitacionales y las fuerzas viscosas), procede de manera que la rapidez de unas es mucho mayor que la de otras. Esto **puede estimarse comparando los tiempos característicos** de los fenómenos en las etapas de los procesos de transporte (ver Sección 3.2 y el Ejercicio 3.3).

Por ejemplo, para un tubo de 0.56 cm de diámetro por el que fluye agua, hemos estimado que el tiempo de la transferencia de momentum desde la pared al centro del tubo es del orden de 3 segundos, en tanto que el tiempo en el que un tanque de unos 30 litros se vacía por dicho tubo es de unos 90 segundos. Entonces podemos concluir que el tiempo de la transferencia de masa desde el tanque hacia afuera es mucho más grande que el tiempo de la transferencia de momentum en el tubo y podemos, con una buena aproximación, proponer un balance de momentum estacionario (el fenómeno rápido se considera independiente del tiempo), acoplado a un balance de masa transitorio (el fenómeno lento se considera dependiente del tiempo).

Si el transporte de momentum se considera estacionario (*i.e.* es relativamente rápido con respecto al tiempo de descarga del tanque), la velocidad media de flujo se puede estimar a partir de la descripción de Hagen-Poiseuille si el flujo es laminar o a partir de la de Torricelli para flujos rápidos que satisfacen la ecuación de Bernoulli.

En el primer caso, el tiempo que tarda un tanque en vaciarse está relacionado con la resistencia viscosa del agua al fluir por el interior del tubo. Mientras mayor es la resistencia, mayor el tiempo de descarga y menor la velocidad media de flujo. La velocidad cambia con el diámetro y la longitud de los tubos. Así, para flujo laminar estacionario en un tubo recto tenemos la expresión de Hagen-Poiseuille:

$$\langle v_z \rangle = \frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L)d_t^2}{32\mu L} = \frac{(p_0 - p_L + \rho g L)d_t^2}{32\mu L}, \quad (4.2.15)$$

donde p_0 es la presión a la entrada del tubo (o también, la presión hidrostática en el fondo del tanque) y p_L es la presión en la descarga del tubo, que se puede tomar en este caso como la presión atmosférica, p_a . La presión hidrostática en el fondo del tanque es, sin embargo, dependiente del tiempo:

$$p_0 = p_a + \rho g H(t), \quad (4.2.16)$$

de modo que al sustituir esta relación en la expresión de Hagen-Poiseuille, la velocidad media de flujo se podría escribir como

$$\langle v_z \rangle = \frac{\rho g d_t^2}{32\mu L} [H(t) + L], \quad (4.2.17)$$

que es una expresión dependiente del tiempo. Aquí se manifiesta una estrategia de modelamiento, cuya aplicación requiere de criterios claros y distintos: mientras la ecuación (4.2.15) requiere de flujo estacionario, la ecuación (4.2.17) es ciertamente dependiente del tiempo, esto nos haría sospechar que, en general, no sería correcto sustituir la ecuación (4.2.16) en la ecuación (4.2.15), para encontrar (4.2.17) y que, para encontrar la velocidad media de flujo, sería necesario plantear y resolver el problema transitorio completo, para encontrar la distribución de velocidad $v_z(r, t)$ y consecuentemente la velocidad media $\langle v_z \rangle(t)$, por integración en el área transversal del tubo, para encontrar de manera propia, una ecuación equivalente a (4.2.15) para flujos transitorios.

Sin embargo, podemos encontrar un margen para la aplicación a la ecuación (4.2.17) en el ámbito de los modelos cuasi-estacionarios. La ecuación (4.2.17) sería una razonable aproximación a la velocidad media si el cambio de la altura del nivel del tanque, $H(t)$, se lleva a cabo lentamente, comparado con el tiempo en el que se establece el equilibrio mecánico de fuerzas. En tal caso se podría pensar, como aproximación, que en el fluido se establece instantáneamente el equilibrio de fuerzas, que ha dado lugar a la expresión de Hagen-Poiseuille (4.2.15), en tanto que la presión hidrostática va decayendo lentamente, como establece la ecuación (4.2.16). Con estas consideraciones es razonable utilizar la ecuación (4.2.17), donde aparecen dos incógnitas: $\langle v_z \rangle$ y H . Necesitamos, por lo tanto, establecer otra relación independiente entre estas dos variables. Dicha relación se obtiene al elaborar un balance integral de masa en el tanque [que será, necesariamente, transitorio, ver ecuación (4.2.3)], cuyo resultado es la ecuación (4.2.5), equivalente a:

$$\frac{dH}{dt} = - \left(\frac{d_t}{D_T} \right)^2 \langle v_z \rangle, \quad (4.2.18)$$

Ahora es posible combinar las ecuaciones (4.2.17) y (4.2.18) para encontrar $H(t)$ para cualquier valor del tiempo t , con la condición $H(t_D) = 0$, donde t_D es el tiempo al cual el nivel del tanque decae a cero, es decir, el tiempo de descarga. Entonces tenemos:

$$\left(\frac{D_T}{d_t} \right)^2 \frac{32\mu L}{\rho g d_t^2} \ln \left[\frac{H+L}{L} \right] = t_D - t. \quad (4.2.19)$$

La ecuación (4.2.19) se puede evaluar con la condición inicial $H(0) = H_0$ y obtener una expresión para el tiempo de descarga:

$$t_D = \left(\frac{D_T}{d_t} \right)^2 \frac{32\mu L}{\rho g d_t^2} \ln \left[\frac{H_0 + L}{L} \right]. \quad (4.2.20)$$

Otro modelo cuasi-estacionario es para flujos rápidos; se refiere a la conocida solución de Torricelli, que surge de la aplicación de la ecuación de Bernoulli en su versión estacionaria al problema del flujo que sale de un tanque por un orificio en el fondo o cerca del fondo. Se trata de

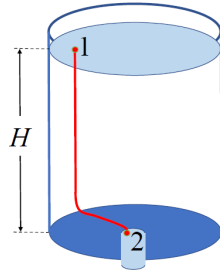


Figura 4.2: Diagrama de una línea de corriente entre los puntos 1 y 2.

aplicar dicha ecuación de Bernoulli a una línea de corriente que se extiende desde la superficie del líquido (subíndice 1) hasta un punto en la corriente de salida (subíndice 2), ya fuera del recipiente y muy cerca de la salida, ver Figura 4.2. Se propone que el flujo es incompresible y que la superficie del líquido cambia lentamente su altura $H(t)$, de modo que la ecuación de Bernoulli, que se expresa, en general, para un flujo entre dos puntos, 1 y 2, se escribe:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} dp + g(h_2 - h_1) = 0 \quad (4.2.21)$$

y puede aplicarse en cualquier instante, bajo los supuestos de que $p_1 = p_2$, $v_1 \approx 0$ y $h_2 - h_1 = -H$, quedando:

$$\frac{1}{2}v_2^2 - gH(t) = 0 \quad (4.2.22)$$

La sustitución de la velocidad $\langle v_2 \rangle$, del balance de masa transitorio (4.2.18), conduce a la EDO:

$$\frac{dH}{dt} = - \left(\frac{d_t}{D_T} \right)^2 \sqrt{2gH(t)}, \quad (4.2.23)$$

cuya integración, considerando el tiempo de descarga, da:

$$\sqrt{\frac{2}{g} \left(\frac{D_T}{d_t} \right)^4 H} = t_D - t. \quad (4.2.24)$$

Este resultado también se puede evaluar para la condición inicial $H(0) = 0$, para obtener una expresión para el tiempo de descarga:

$$t_D = \sqrt{\frac{2}{g} \left(\frac{D_T}{d_t} \right)^4 H_0} \quad (4.2.25)$$

4.2.4 Flujo a través de un tanque estacionario

El proceso de vaciado de un recipiente es de naturaleza transitoria; no conduce a una etapa final estacionaria. Para llegar a un régimen estacionario distinto del trivial (el tanque vacío), es necesario alimentar continuamente al recipiente un flujo equivalente a su descarga, como se observa en la Figura 4.3. En tales circunstancias, no hay acumulación de masa en el sistema y el balance se lee como:

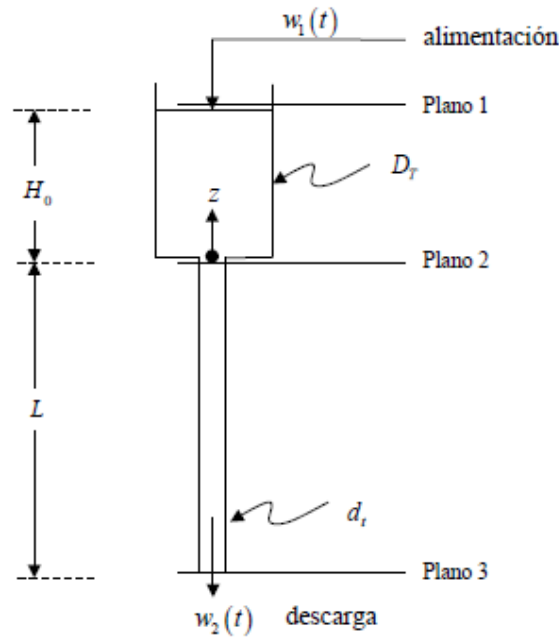


Figura 4.3: Diagrama del recipiente con tubos de alimentación y descarga.

$$w_1(t) = w_2(t) \quad (4.2.26)$$

Este balance es transitorio, puesto que aún cabe la posibilidad de que los flujos másicos cambien en el tiempo, siempre y cuando conserven la característica de ser iguales en todo momento.

Experimentalmente esto puede lograrse mediante un rebosadero que mantenga constante el nivel del tanque $H = H_0$, o mediante un sistema de control proporcional que iguale la alimentación $w_1(t)$ al flujo de descarga $w_2(t)$. Un sistema de control menos preciso, pero todavía aceptable, sería un simple sistema de flotador que acciona una válvula de entrada, de preferencia proporcional para evitar fluctuaciones mayores a las que deseamos aceptar como error en el sistema estacionario.

El proceso de la descarga del tanque partirá, como anteriormente, del reposo: el tanque y el tubo están llenos del líquido en reposo. A un tiempo dado, se descubre el extremo inferior del tubo y el escurrimiento producido por esta acción pasa por una etapa transitoria, como se ha discutido en el Capítulo 3 e ilustrado en la Figura 3.4, pero con una diferencia: en dicha figura se considera un tubo muy largo, de modo que el perfil de la velocidad no depende de la distancia axial desde la entrada al tubo. En otras palabras, se supone que los efectos de entrada y los de salida se dan muy lejos de la región del tubo donde se está planteando el ejercicio, considerando que la velocidad solo es función de la coordenada radial y del tiempo. Bajo estas consideraciones, utilizando la solución (3.2.9), hemos estimado que el régimen estacionario para el agua en un tubo de 0.56 cm de radio, se alcanzaría a los 90 segundos si se tratara de un flujo laminar (entendiendo por alcanzar el régimen estacionario, tener diferencias de velocidad inferiores al 1 % de la velocidad estacionaria, en el centro del tubo). Junto con esta estimación, debemos tener en cuenta que cuando los tubos son cortos, se debe considerar que los efectos de entrada no son ya despreciables. ¿Cómo tomarlos en cuenta?

Considerar la extensión de la región donde los efectos de entrada son significativos, es una aplicación usual de la teoría de la capa límite y representa la manera más sencilla de abordar esta pregunta. El ejercicio 4A.7 de Bird *et al.* indica cómo llevar a cabo los cálculos. Se requiere conocer la velocidad fuera de la capa límite y se propone equivalente a la velocidad en el centro del tubo, es

decir la velocidad máxima. El espesor de la capa límite va aumentando con la coordenada axial y cuando llega a ser igual al radio interno del tubo a , allí se define la longitud de entrada como el valor de la coordenada axial. En esta estimación habría que tomar en cuenta que en la medida que crece el espesor de la capa límite, el defecto de velocidad debido a la resistencia de la pared, requiere ser compensado por un incremento de velocidad en la región exterior a la capa límite para satisfacer el balance de masa bajo la hipótesis de incompresibilidad.

Si el flujo es laminar, la región de entrada L_e se puede estimar por la expresión:

$$L_e = 0.035d_t Re \quad (4.2.27)$$

en tanto que si es turbulenta, entonces

$$L_e \approx 4.4d_t Re^{1/6} \quad (4.2.28)$$

Ejercicios

E.4.2.4.1. Tanque estacionario

- (1) Establecer el balance de energía mecánica transitorio que aplica al sistema de la figura 4.3 con el balance de masa de la ecuación (4.2.26), para el proceso de flujo a través de un tanque estacionario que parte del reposo.
- (2) Resolver el modelo planteado en el punto anterior.

E.4.2.4.2. Tanque continuo

Ampliar el modelo para considerar la posibilidad de que la alimentación no sea en todo momento equivalente a la descarga, sino una función arbitraria del tiempo. Resolver para

$$w_1(t) = A(1 + \alpha \sin \omega t)$$

donde $\alpha < 1$ y (A, α, ω) son constantes.

4.3 Modelo de viscosímetros capilares

4.3.1 Similitudes de funcionamiento con la descarga de un tanque

Los principios del funcionamiento de un viscosímetro capilar de Cannon-Fenske se describen en el capítulo 14. Partiendo de su descripción podemos apreciar ciertas similitudes con el flujo en la descarga de un tanque, analizado en la sección anterior. Así notamos semejanza en la localización geométrica de un recipiente que se vacía en un tiempo que se mide, conectado a un tubo en su parte inferior, como se aprecia en la Figura 4.4, donde el bulbo de medida B del viscosímetro se asemeja al tanque y el tubo capilar se asemeja al tubo conectado en el fondo del tanque. Además, el flujo en los dos casos se genera por una diferencia de presión modificada entre los dos extremos del tubo. Hay también diferencias: por una parte al estar inclinado el tubo un ángulo θ , con respecto a la dirección vertical, la componente de la aceleración de la gravedad en la dirección z tiene la magnitud $g \cos \theta$, donde g es la constante gravitacional. Por otra parte, **la presión a la salida del tubo capilar** no es necesariamente atmosférica, como en la descarga de un tanque, aunque permanece cercana a dicha presión atmosférica. La presión es, efectivamente, atmosférica en el aire del bulbo de descarga A , y como el nivel de líquido en este bulbo sólo cambia levemente, conforme el fluido descarga en él, su altura desde el inicio hasta el final del experimento cambia sólo levemente. Como la salida del capilar se encuentra a una altura cercana a la altura del nivel del bulbo A en la otra rama del tubo en U, su presión debe ser cercana a la atmosférica. Entonces determinamos una semejanza más con el flujo en la descarga de un tanque: la diferencia de presión entre la entrada y la salida del tubo capilar es también una función del tiempo $\Delta \mathcal{P}(t)$ (aunque no necesariamente la misma).

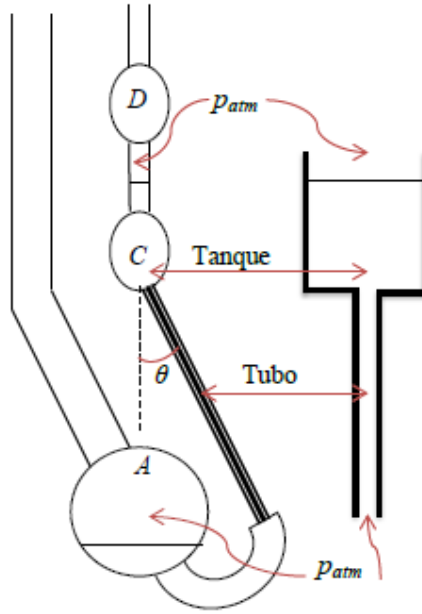


Figura 4.4: Comparación de un viscosímetro capilar de Cannon-Fenske con la descarga de un tanque.

4.3.2 Tiempos característicos y modelos cuasi-estacionarios

Como resultado de las semejanzas y diferencias señaladas arriba, el modelo del viscosímetro capilar debe partir también de los principios de conservación de la masa y de balance de energía mecánica. Los tiempos característicos de los fenómenos de transporte importantes son el de transporte de masa τ_{mas} , que se asocia al fluido trasladándose del bulbo de medida C al bulbo de descarga A , pasando por el tubo capilar, y el de transporte de momentum lineal τ_{mom} , que asocia la transferencia de la cantidad de movimiento desde el eje axial del tubo hasta la pared del mismo, de acuerdo a lo expresado en la Subsección 3.2.4, Ecuación (3.2.2), y en el Ejercicio 3.3-4. Partiendo de estos elementos y sabiendo que los fabricantes de viscosímetros de Cannon-Fenske recomiendan que el tiempo de un experimento no sea menor a 200 segundos, nuestro criterio de operación para el flujo másico en el tubo capilar será que $\tau_{mas} \approx 200$ segundos (ver Tabla 14.1) y podemos establecer que $\tau_{mom} \approx 100d_t^2/64\nu$ (ver Ejercicio 3.3-4). Por ejemplo, para flujo de agua a 20°C en un viscosímetro # 100 resulta que $\tau_{mom} \approx 0.6$ segundos.

Estos resultados numéricos permiten concluir que bajo las condiciones del ejemplo, $\tau_{mas} \gg \tau_{mom}$ y que por lo tanto, es apropiado desarrollar modelos cuasi-estacionarios compuestos por una ecuación transitoria para la conservación de la masa y una ecuación estacionaria para el balance de momentum lineal, ya que **el transporte de cantidad de movimiento en el tubo capilar procede con mucha mayor rapidez que el transporte de masa a través del mismo.**

4.3.3 Modelo cuasi-estacionario del viscosímetro de Cannon-Fenske

De acuerdo a la sección anterior, el balance de masa en el bulbo C es transitorio y semejante al establecido por la Ecuación (4.2.3):

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = -\rho S_{tc} \langle v_{tc} \rangle \quad (4.3.1)$$

donde $V(t)$ es el volumen de fluido en el bulbo C del viscosímetro, que depende del tiempo. $S_{tc} = \pi d_{tc}^2/4$ es la superficie transversal del tubo capilar, cuyo diámetro interno es d_{tc} , en tanto que

$\langle v_{tc} \rangle$ es la velocidad media de flujo en el tubo capilar.

El balance de momentum lineal en el tubo capilar, acorde con el planteamiento de un modelo cuasi-estacionario, puede tomarse como el balance en un tubo cilíndrico, Ecuación (2.3-10) de Bird *et al.*, cuya solución conduce a la expresión para la velocidad media, Ecuación (2.3-20) del mismo Bird *et al.*, que a continuación se expresa, adaptada en términos del diámetro del tubo capilar:

$$\langle v_{tc} \rangle = \left(-\frac{\Delta \mathcal{P}}{L} \right) \frac{d_{tc}^2}{32\mu} = \frac{p_0 - (p_L - \rho g L \cos \theta)}{L} \frac{d_{tc}^2}{32\mu}. \quad (4.3.2)$$

donde p_0 es la presión a la entrada del tubo capilar y p_L es la presión a la salida del mismo. Ambas presiones son cantidades dependientes del tiempo, que sin embargo, son muy cercanas a la presión atmosférica, ya que el flujo en el tubo capilar se produce debido a la acción de la gravedad y este efecto es considerado principalmente por el término $\rho g L$. Además, la condición de cuasi-estacionariedad del modelo es compatible con ignorar el cambio temporal de la presión, y proponer que $p_0 = p_L = p_{at}$ que es la presión atmosférica. Entonces:

$$\langle v_{tc} \rangle = \frac{\rho g \cos \theta d_{tc}^2}{32\mu} = \frac{g \cos \theta d_{tc}^2}{32\nu}. \quad (4.3.3)$$

Considerando un líquido incompresible de $\langle v_{tc} \rangle$ constante, podemos integrar la Ecuación (4.3.1), desde el inicio del experimento, cuando $t = 0$ y $V(t) = V_C$, hasta el final, cuando $t = t_e$ y $V = 0$, resultando que:

$$\int_{V_C}^0 dV = V_C = \frac{\pi d_{tc}^2}{4} \langle v_{tc} \rangle t_e, \quad (4.3.4)$$

donde V_C es el volumen interior del bulbo C entre sus marcas superior e inferior. Despejando la velocidad media en la ecuación (4.3.4) e igualando a (4.3.3), tenemos que

$$\frac{4V_C}{\pi d_{tc}^2 t_e} = \frac{g \cos \theta d_{tc}^2}{32\nu}, \quad (4.3.5)$$

que puede expresarse para la viscosidad cinemática como:

$$\nu = \frac{\pi d_{tc}^4 g \cos \theta}{128 V_C} t_e, \quad (4.3.6)$$

y para la viscosidad dinámica como:

$$\mu = \frac{\pi d_{tc}^4 g \cos \theta}{128 V_C} \rho t_e, \quad (4.3.7)$$

Para llegar a las expresiones (4.3.6) y (4.3.7) hemos realizado varias simplificaciones que nos han facilitado llegar a relaciones sencillas entre los valores de la viscosidad y el tiempo de flujo a través del tubo capilar. Sin embargo, para recuperar la información despreciada en nuestras suposiciones, es conveniente ahora reintroducir de una manera práctica dicha información, mediante un proceso de calibración.

Podemos aglutinar en un factor K_ν los parámetros que dependen de las dimensiones geométricas del aparato, incluyendo la constante gravitacional, en un sólo parámetro que podemos llamar ***la***

constante del aparato. En esta constante se re-incorporan también los pequeños efectos que hemos despreciado, como el hecho de que las presiones p_0 y p_L no son, en realidad, la presión atmosférica, sino algo cercano a ella. La constante del aparato K_v es, entonces, una cantidad aproximadamente igual a:

$$K_v \approx \frac{\pi d_{tc}^4 g \cos \theta}{128 V_C}, \quad (4.3.8)$$

Entonces, las Ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} v &= K_v t_e & (a) \\ \mu &= K_v \rho t_e, & (b) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

y la constante K_v puede ser stimada mediante un proceso de calibración, que consiste en utilizar el viscosímetro con un líquido newtoniano de viscosidad conocida, μ_0 y densidad conocida ρ_0 , de donde, de la Ecuación (4.3.9) resulta:

$$K_v = \frac{\mu_0}{\rho_0 t_{e0}} = \frac{v_0}{t_{e0}}, \quad (4.3.10)$$

donde t_{e0} es el tiempo de la experiencia con el estandar de calibración. Una vez que se conoce K_v , se pueden determinar las viscosidades de fluidos de viscosidad y densidad cercanas a las del fluido utilizado en la calibración.

Ejercicios

E.4.3.3-1. Verificación de parámetros de capilares de Cannon-Fenske. Utilizando los diámetros de los tubos capilares reportados en la Tabla 14.1 del Capítulo 14, y el valor de $V_C = 2.64$ mL, que hemos medido en el laboratorio,

- (1) calcula los valores de las constantes K_v y compáralos con los que aparecen en dicha tabla. ¿Cómo explicarías las diferencias de valores de las constantes calculadas y las reportadas en la tabla?
- (2) Considerando el **tiempo mínimo de flujo** establecido en la Tabla 14.1 y tomando el tiempo máximo de flujo como 5 veces el tiempo mínimo, encuentra el rango de viscosidad cinemática que podría ser medido, para los diversos diámetros de capilar.
- (3) ¿Con qué diámetros de capilar sería adecuado medir la viscosidad del agua?

E.4.3.3-2. Parámetros de viscosímetros capilares para medir la viscosidad de la glicerina. Diseña la longitud, el diámetro y el volumen V_C de un capilar de Cannon-Fenske, para medir la viscosidad del glicerol a 20°C de temperatura.

5. Fluidos newtonianos generalizados (FNG)

5.1 Los fluidos newtonianos generalizados

5.1.1 La función de viscosidad

Las relaciones de comportamiento de los fluidos establecen la dependencia del **tensor de los esfuerzos viscosos** $\boldsymbol{\tau}$ con respecto al **tensor de la rapidez de deformación** $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. Así, para un fluido newtoniano incompresible

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (5.1.1)$$

donde $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$ es un tensor simétrico y μ es el coeficiente de viscosidad o viscosidad dinámica, que es una constante para los fluidos newtonianos. Una extensión sencilla de este modelo de comportamiento de un fluido consiste en considerar que

la viscosidad ya no es una constante μ , sino una función η del tensor de rapidez de deformación:

$$\boldsymbol{\tau} = -\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (5.1.2)$$

donde la **función de viscosidad** $\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$ es una **función escalar** del tensor de segundo orden $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. La única manera de establecer la funcionalidad escalar con respecto a un tensor (de segundo orden, en este caso), es a través de sus invariantes, los cuales son funciones escalares que tienen sentido físico. En particular, es de importancia el segundo invariante de la rapidez de deformación, conocido como su norma euclidiana: $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}}$, que representa la magnitud del tensor y es conocido también como el **parámetro de la rapidez de deformación**. Entonces la función de viscosidad se puede expresar como $\eta = \eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$.

La función de viscosidad tiene las mismas dimensiones que la viscosidad dinámica, que son las de $ML^{-1}t^{-1}$ o $FL^{-2}t$. En el sistema internacional de unidades (SI), corresponden a (Pa·s), aunque es frecuente encontrar viscosidades reportadas en poises (p) y centipoises (cp), donde $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ p} = 10^3 \text{ cp}$.

Podemos efectuar la doble contracción, lado a lado, de la Ecuación (5.1.2), para obtener $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} = \eta^2 \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}}$, luego dividir entre dos y extraer la raíz cuadrada de ambos lados, para expresar la relación de comportamiento (5.1.2) en términos escalares:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad (5.1.3)$$

donde $\tau = \sqrt{\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}}$ es la magnitud del tensor de los esfuerzos viscosos, también llamado el **parámetro de los esfuerzos viscosos**, y $\dot{\gamma}$ es el parámetro de la rapidez de deformación, definido recientemente.

Se puede proponer una forma algebraica de la función de viscosidad que ajusta empíricamente el comportamiento medido con un reómetro. A partir del conjunto de datos experimentales es posible determinar las constantes reológicas del FNG, expresado por la ley de potencias:

$$\tau - \tau_0 = m\dot{\gamma}^n. \quad (5.1.4)$$

El modelo (5.1.4) tiene tres parámetros: τ_0 , llamado **esfuerzo de cedencia**, **esfuerzo de fluencia** o **umbral de esfuerzos**, es el esfuerzo necesario para vencer la resistencia interna del fluido al iniciar el flujo. m y n son constantes que caracterizan el fluido: el **coeficiente pre-exponencial** y el **índice de viscosidad**, respectivamente. El fluido newtoniano está representado por el caso particular cuando el umbral de esfuerzos $\tau_0 = 0$, el índice $n = 1$ y el coeficiente m es la viscosidad newtoniana μ . Entonces (5.1.4), por su semejanza con el fluido newtoniano, también se puede escribir como:

$$\tau - \tau_0 = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad (5.1.5)$$

donde

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1}. \quad (5.1.6)$$

El valor que toma la función de viscosidad, a determinada tasa de corte (o rapidez de deformación), se conoce como su **viscosidad efectiva** para esa tasa de corte y se puede denotar por el símbolo η_{ef} . Es conveniente destacar que la función de viscosidad y sus valores de viscosidad efectiva tienen las mismas dimensiones de μ , es decir, M/Lt , en tanto que las dimensiones de m son M/Lt^{2-n} .

5.2 Flujo transitorio de un fluido de Ostwald sobre una lámina sólida

Un espacio semi-infinito está ocupado por un fluido newtoniano generalizado (FNG). En el plano $y = 0$ se tiene una lámina sólida plana, que se desliza tangencialmente a partir de un determinado instante $t = 0$, con una rapidez constante V . Encontrar la distribución de velocidad $v_x(y, t)$ aplicando un método de combinación de variables.

5.2.1 Formulación del problema

La componente importante del tensor de esfuerzos viscosos para el fluido de Ostwald de Waele, en este problema, está dado por

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (5.2.1)$$

donde el índice o exponente n es generalmente menor que uno. El balance de momentum en dirección x en un sistema coordenado cartesiano da:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}. \quad (5.2.2)$$

Sustituyendo (5.2.1) en (5.2.2) tenemos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{m}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad (5.2.3)$$

pero en el semiplano superior ($y \geq 0$), la velocidad $v_x(y, t)$ disminuye cuando y aumenta, entonces

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right| = - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (5.2.4)$$

y la ecuación de gobierno se convierte en:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{m}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(- \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n \right]. \quad (5.2.5)$$

Con las condiciones iniciales y a la frontera:

$$\begin{aligned} v_x(y > 0, t = 0) &= 0, & (a) \\ v_x(y = 0, t \geq 0) &= V, & (b) \\ v_x(y \rightarrow \infty, t) &= 0. & (c) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

5.2.2 Método de solución

El método de combinación de variables será aplicable si existe una variable (adimensional) combinada $\eta(y, t)$, que reduce el problema planteado en (5.2.5) y (5.2.6) a **una EDO con dos condiciones de frontera compatibles**. Proponemos que

$$\eta(y, t) = Cyt^p, \quad (5.2.7)$$

donde C y p son constantes. Las derivadas parciales de η son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= Ct^p, & (a) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0, & (b) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= Cpyt^{p-1}, & (c) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

de modo que la solución sea únicamente función de η , es decir que

$$\phi(\eta) = \frac{v_x[\eta(y, t)]}{V}. \quad (5.2.9)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= V \frac{dv_x}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = Cpyt^{p-1} V \frac{d\phi}{d\eta}, & (a) \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= V \frac{dv_x}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = Ct^p V \frac{d\phi}{d\eta}, & (b) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(- \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n \right] &= (Ct^p)^{n+1} \frac{d}{d\eta} \left[\left(-V \frac{d\phi}{d\eta} \right)^n \right], & (c) \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

las cuales se pueden sustituir en la ecuación (5.2.5) dando, después de simplificar y reordenar:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\left(-\frac{d\phi}{d\eta} \right)^n \right] - \frac{\rho p V^{1-n}}{C^n m} y t^{-pn-1} \left(-\frac{d\phi}{d\eta} \right) = 0, \quad (5.2.11)$$

donde es necesario, para reducir el problema a una ecuación diferencial ordinaria, que el coeficiente de la derivada de primer orden sea una función de η . Como en este coeficiente la variable y aparece en la misma potencia que en la definición de la η propuesta, Ecuación (5.2.7), podemos suponer que este coeficiente es una función lineal de η , igual a (-2η) . Esto es posible si proponemos las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\rho p V^{1-n}}{C^n m} &= -2C \quad (a) \\ y &= -pn - 1 = p. \quad (b) \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Al resolver 5.2.12(b) para p y luego 5.2.12(a) para C , vemos que η debe ser:

$$\eta = y \left(\frac{\rho V^{1-n}}{2(1+n)mt} \right)^{\frac{1}{1+n}} \quad (5.2.13)$$

y la ecuación (5.2.11) resulta:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\left(-\frac{d\phi}{d\eta} \right)^n \right] + 2\eta \left(-\frac{d\phi}{d\eta} \right) = 0 \quad (5.2.14)$$

que ya exhibe a η como única variable independiente. Sin embargo, el método de combinación de variables también requiere que las tres condiciones límite, es decir dos condiciones a la frontera y la condición inicial, se reduzcan a solamente dos condiciones de frontera compatibles, cuando se transforman a la nueva variable η . Entonces, aplicando las definiciones de η y $\phi(\eta)$ en las ecuaciones (5.2.6), las transforman en:

$$\begin{aligned} \phi(\eta \rightarrow \infty) &= 0, \quad (a) \\ \phi(\eta = 0) &= 1 \quad (b) \\ y \\ \phi(\eta \rightarrow \infty) &= 0, \quad (c) \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

respectivamente. Como se aprecia, la primera condición, que corresponde a la condición inicial, es equivalente a la tercera condición, que corresponde a la frontera para valores de y muy grandes. Así se reducen las tres condiciones límite a sólo dos condiciones distintas para la variable combinada η . El problema ya está **bien planteado** y se puede pasar a la búsqueda de su solución.

5.2.3 Solución

Para integrar la ecuación (5.2.14) con las condiciones límite (5.2.15) es conveniente hacer el cambio de variable

$$\psi(\eta) = \left(-\frac{d\phi}{d\eta} \right), \quad (5.2.16)$$

escribiendo (5.2.14) como $\frac{1}{\psi} \frac{d}{d\eta} (\psi^n) = -2\eta$, cuya integral es, después de derivar el lado izquierdo e integrar el lado derecho:

$$n \int \frac{d\psi}{\psi^{2-n}} = -\eta^2 - C_1. \quad (5.2.17)$$

En el caso newtoniano, es decir, cuando $n = 1$, la solución de (5.2.17) para ψ es logarítmica, de modo que integrando y aplicando (5.2.16):

$$\frac{d\phi}{d\eta} = -Ce^{-\eta^2}, \quad (5.2.18)$$

donde $C = e^{-C_1}$.

En el caso de un FNG donde $n < 1$, la solución es:

$$-\frac{n}{1-n}\psi^{-(1-n)} = -\eta^2 - C_1, \quad (5.2.19)$$

de donde, al despejar ψ y sustituirla en función de ϕ aplicando (5.2.16), resulta que:

$$\frac{d\phi}{d\eta} = -\left(\frac{n}{1-n}\right)^{\frac{1}{1-n}} (\eta^2 + C_1)^{-\frac{1}{1-n}}, \text{ para } n < 1. \quad (5.2.20)$$

Ahora las ecuaciones (5.2.18) y (5.2.20) se pueden integrar nuevamente, utilizando la condición límite para $\eta = 0$ de la Ecuación (5.2.15b), como el límite inferior de las integrales, de donde tenemos, para el fluido newtoniano:

$$\phi - 1 = -C \int_0^\eta e^{-w^2} dw, \text{ para } n = 1, \quad (5.2.21)$$

y para el FNG:

$$\phi - 1 = -\left(\frac{n}{1-n}\right)^{\frac{1}{1-n}} \int_0^\eta (w^2 + C_1)^{-\frac{1}{1-n}} dw, \text{ para } n < 1. \quad (5.2.22)$$

La integral de la Ecuación (5.2.21), cuando se integra en todo el semiplano, tiene el valor $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, propiedad que nos permite determinar C al sustituir la condición límite cuando $\eta \rightarrow \infty$, de la Ecuación (5.2.15a) en la Ecuación (5.2.21), resultando que $C = 2/\sqrt{\pi}$ y que entonces **la solución particular, para el fluido newtoniano es:**

$$\frac{v_x}{V} = 1 - \text{fer}(\eta), \text{ donde } \text{fer}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-w^2} dw \quad (5.2.23)$$

se conoce como la función error de η . Esta función es cero para $\eta = 0$ y uno en el límite cuando $\eta \rightarrow \infty$.

Cuando consideramos los FNG, sin perder generalidad desde un punto de vista experimental, podemos restringir los valores de n a números racionales, tales que $n = \frac{q-p}{q}$; donde $0 < p < q$, de donde la velocidad, dada en (5.2.22), se convierte en

$$\frac{v_x}{V} = 1 - \left(\frac{q-p}{p}\right)^{\frac{q}{p}} \int_0^\eta \frac{dw}{(w^2 + C_1)^{\frac{q}{p}}}, \text{ para } n < 1, \quad (5.2.24)$$

la cual debe satisfacer la condición de frontera cuando $\eta \rightarrow \infty$, Ecuación (5.2.15a), para lo cual es necesario elegir la constante C_1 de modo que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(w^2 + C_1)^{\frac{q}{p}}} = \left(\frac{p}{q-p}\right)^{\frac{q}{p}}. \quad (5.2.25)$$

La Ecuación (5.2.24), donde C_1 cumple la igualdad (5.2.25) es **la solución particular para los FNG.**

Ejercicios

E.5.2.3-1. Espesor de la capa en movimiento para los fluidos de Ostwald.

Considera fluidos de Ostwald de Waele, que tienen índices $n = \{1/3, 1/5, 1/7, 1/9\}$. Usando *Mathematica* (o un paquete similar):

- (1) Encuentra la velocidad v_x/V analíticamente y elabora una gráfica de η vs. v_x/V , para cada índice n ,
- (2) Determina el valor de η para el cual v_x corresponde al 1 % de la velocidad V de la placa sólida.

5.3 Estimación de parámetros reológicos de un FNG**5.3.1 Estimación de τ_0 y $\dot{\gamma}$**

Podemos desarrollar procedimientos iterativos para encontrar el parámetro τ_0 de la ecuación (5.1.4),¹ simultáneamente con el conjunto de valores de $\dot{\gamma}$ que corresponden a los valores de η_{ef} dados por la Ecuación (5.1.5). Las Figuras 5.1 y 5.2 son diagramas de flujo en los cuales se aprecia que la estimación de τ_0 y $\dot{\gamma}$ es el eje del procedimiento iterativo.

En el curso de una iteración, digamos la iteración k -ésima, una vez establecido el valor de τ_0^k , encontramos un nuevo estimado de $\dot{\gamma}$, aplicando la relación (5.1.5) y considerando, tanto el valor de τ_0^k como los datos experimentales $\{\eta_{ef}, \tau\}$. Este estimado es $\dot{\gamma}_k$. A continuación ya es posible encontrar estimados de los parámetros m y n utilizando uno de los siguientes procedimientos:

5.3.2 Ajuste desde la relación $\{\dot{\gamma}, (\tau - \tau_0)\}$

Podemos realizar un ajuste del conjunto de valores $\dot{\gamma}_k$ a una función potencial u_k , de acuerdo a la ecuación (5.1.4), tal que

$$u_k = m_k \dot{\gamma}_k^{n_k}. \quad (5.3.1)$$

Aquí, el k -ésimo estimado de τ , es decir, τ^k resulta, a partir de la ecuación (5.1.4),

$$\tau^k = u_k + \tau_0^k. \quad (5.3.2)$$

Ahora es necesario proponer un nuevo valor a τ_0 , el valor τ_0^{k+1} . El problema de encontrar un nuevo estimado de τ_0 es un problema de optimización, que abordamos por mínimos cuadrados y resumimos a continuación:

1. Definimos el error cuadrático medio $e(\tau_0, m, n)$ como

$$e = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\tau_j - \tau_j^k)^2. \quad (5.3.3)$$

2. Suponemos que los valores de los parámetros $\{\tau_0, m, n\}$ son independientes, lo cual no es tan cierto, pero simplifica nuestro análisis enormemente, vamos a derivar parcialmente el error, con respecto al parámetro τ_0^k :

$$\frac{\partial e}{\partial \tau_0^k} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \tau_0^k} (\tau_j - \tau_j^k)^2 = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N (\tau_j - \tau_0^k - u_{kj}). \quad (5.3.4)$$

¹ Alternativamente, se propone un ejercicio para utilizar la ecuación (5.1.6). El método iterativo es necesario cuando sólo se cuenta con algún resolutor básico como *Excel*. Empleando *Mathematica* u otros resolutores más completos, no es necesario realizar iteraciones.

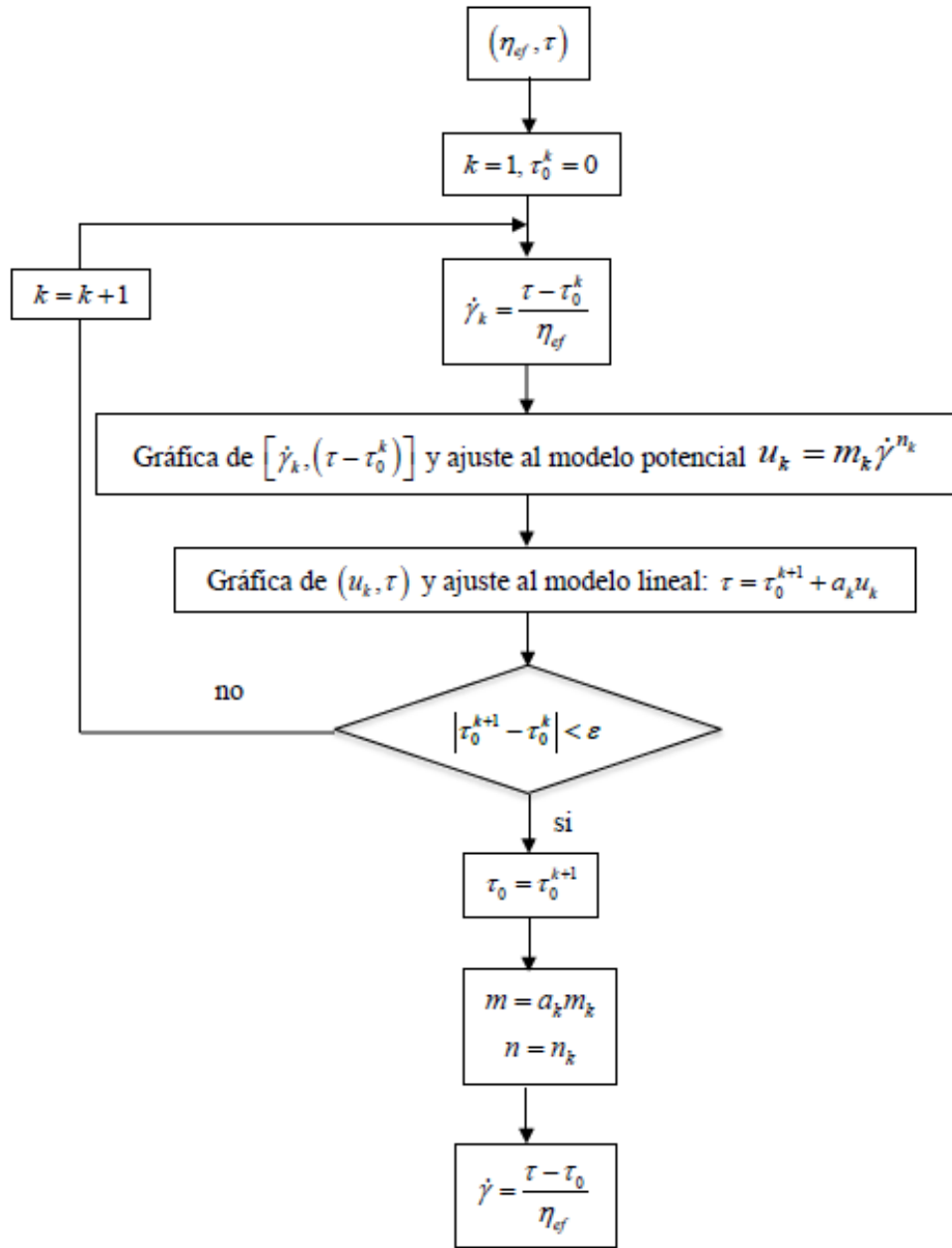


Figura 5.1: Diagrama de flujo para la estimación del esfuerzo de fluencia τ_0 y de la rapidez de deformación $\dot{\gamma}$, utilizando la ecuación (5.1.4).

- Esta derivada del error es igual a cero en los puntos estacionarios. Igualamos a cero la derivada, generando una nueva igualdad que es satisfecha por la nueva iteración de τ_0 , que podemos denominar como τ_0^{k+1} , es decir que

$$\frac{\partial e}{\partial \tau_0^k} = 0 = \sum_{j=1}^N (\tau_j - \tau_0^{k+1} - u_{kj}) = \sum_{j=1}^N (\tau_j - u_{kj}) - N \tau_0^{k+1}. \quad (5.3.5)$$

- Finalmente, despejando τ_0^{k+1} :

$$\tau_0^{k+1} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\tau_j - u_{kj}). \quad (5.3.6)$$

La diferencia de τ_0^{k+1} menos τ_0^k , en valor absoluto es el criterio a emplear para suspender las iteraciones y definir los parámetros del modelo del FNG, ver diagrama de flujo 5.1.

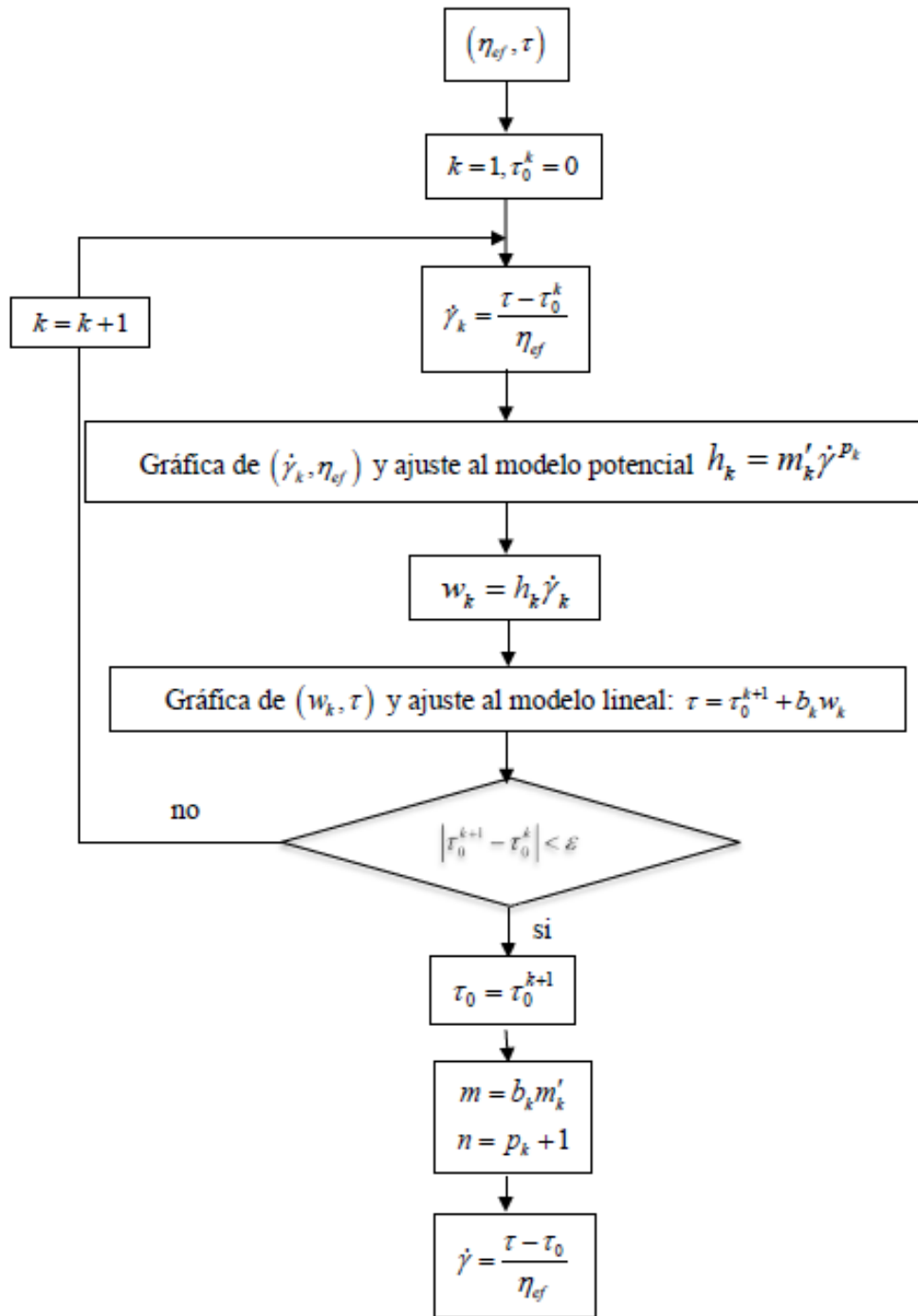


Figura 5.2: Diagrama de flujo para la estimación del esfuerzo de fluencia τ_0 y de la rapidez de deformación $\dot{\gamma}$, utilizando la ecuación (5.1.6).

Ejercicios**5.3.2-1 Ajuste desde la relación $\{\dot{\gamma}, \eta_{ef}\}$.**

La segunda parte de las iteraciones, después de estimar los valores de prueba de $\dot{\gamma}_k$, para un valor supuesto de τ_0^k , podemos estimar valores de la función η_{ef} , mediante el ajuste al modelo potencial $h_k = m'_k \dot{\gamma}^{p_k}$, donde h_k son estimados del conjunto de valores η_{ef} , de acuerdo con la ecuación (5.1.6) y p_k son los estimados del índice $n - 1$. Ver también el diagrama 5.2.

5.3.2-2 Ajuste directo y comparación de procedimientos.

Utilizando *Mathematica* o un resolutor similar y los resultados de los procedimientos iterativos desarrollados en esta sección,

- (1) Ajusta los tres parámetros del FNG, por ajuste directo.
- (2) Encuentra los valores de τ y los de η_{ef} utilizando los valores de los parámetros estimados por los tres procedimientos seguidos.
- (3) Compara los valores de τ y los de η_{ef} con respecto a los datos experimentales, para los tres métodos de ajuste de los parámetros.
- (4) Determina la incertidumbre experimental de tus datos.
- (5) Determina si alguno de los ajustes realizados conducen a estimados que caen dentro de la banda del error experimental.
- (6) ¿Qué criterios de cercanía ε para la variable τ^k sería suficiente para cumplir con el punto anterior?
- (7) Expresa tus conclusiones sobre los procedimientos usados y sobre la bondad del modelo de FNG para tus datos de laboratorio.

6. Modelos de capa límite y flujo ideal

6.1 Flujos ideales

Cuando se desprecian los efectos viscosos ($\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$), la ecuación de movimiento adquiere la forma simplificada:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (6.1.1)$$

que se conoce como **ecuación de Euler**. En ella la aceleración del fluido se puede descomponer usando la identidad vectorial: $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$, donde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ es el cuadrado de la magnitud de la velocidad. Además podemos proponer que existe un potencial gravitacional $\phi = gh$ de modo que $\rho \mathbf{g} = -\rho \nabla \phi = -\rho g \nabla h$, donde g es la constante gravitacional y h es una altura vertical, medida desde un nivel de referencia arbitrario pero fijo. Entonces la ecuación de Euler es

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] = -\nabla \mathcal{P}, \quad (6.1.2)$$

donde la presión modificada se define como $\mathcal{P} = p + \rho gh$ y se puede agrupar con el gradiente de la energía cinética para obtener

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\nabla \mathcal{P}}{\rho} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] = 0 \quad (6.1.3)$$

Para flujos incompresibles, irrotacionales y estacionarios, la ecuación anterior se reduce a $\nabla \hat{E} = 0$, de donde la **densidad másica de energía** $\hat{E}$ se conserva en el espacio de flujo, dando la conocida **ecuación de Bernoulli**: $\hat{E} = \hat{E}_0$. Aquí $\hat{E}$ se define, de modo que la ecuación de Bernoulli se puede escribir como:

$$\hat{E} = \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{p}{\rho} + gh = \hat{E}_0, \quad (6.1.4)$$

donde la densidad de energía es la suma de la energía cinética, la energía intrínseca y la energía potencial, respectivamente, por unidad de masa, y **puede ser llamada el potencial de Bernoulli**¹.

¹En la subsección 9.1.4 definimos y analizamos el potencial de Bernoulli $\hat{\phi}_B$ y otros potenciales de fuerzas, dentro del contexto de las fuerzas conservativas y los procesos de disipación de potencia.

Ejercicios

E.6.1-1. Tubo de Pitot.

Un tubo de Pitot es un instrumento de medición que permite estimar la velocidad local de un flujo, haciendo uso del concepto de **presión dinámica**. El tubo de Pitot tiene una sonda que se alinea con el flujo. Esta sonda tiene dos tubos concéntricos; el interior está abierto frontalmente al flujo y el exterior tiene orificios laterales, tangenciales al flujo. Tanto en la abertura frontal como en los orificios laterales se transmite la presión hacia las ramas de un manómetro diferencial, de manera que la diferencia de presión entre ellas configura una manera de determinar la velocidad local en los alrededores de la abertura frontal del tubo de Pitot. Utilizando la ecuación de Bernoulli (6.1.4) encontrar una expresión para estimar la magnitud de la velocidad local, determinada con un tubo de Pitot, como función de la presión diferencial.

6.2 Flujos en la capa límite

6.2.1 Ecuaciones de la capa límite de Prandtl

Cuando un sólido se encuentra inmerso y fijo en una corriente de un fluido con velocidad elevada, lejos del sólido el flujo puede ser representado por la ecuación de Bernoulli, pero existe una región de flujo, muy cerca del sólido, donde la aproximación de Bernoulli no es adecuada, porque en esta región, que llamaremos la **capa límite**, **los efectos viscosos son tan importantes como los convectivos**. Dicha región es una delgada película del fluido en movimiento, en los alrededores del sólido. Es entonces necesario elaborar un modelo que considere tanto los efectos inerciales (o convectivos) como los efectos viscosos, en la región de la capa límite. Para fijar ideas, consideremos un cuerpo sólido con una longitud característica l_0 y un flujo incidente alrededor del sólido, con velocidad típica de magnitud v_0 , como se aprecia en la Figura 6.1.

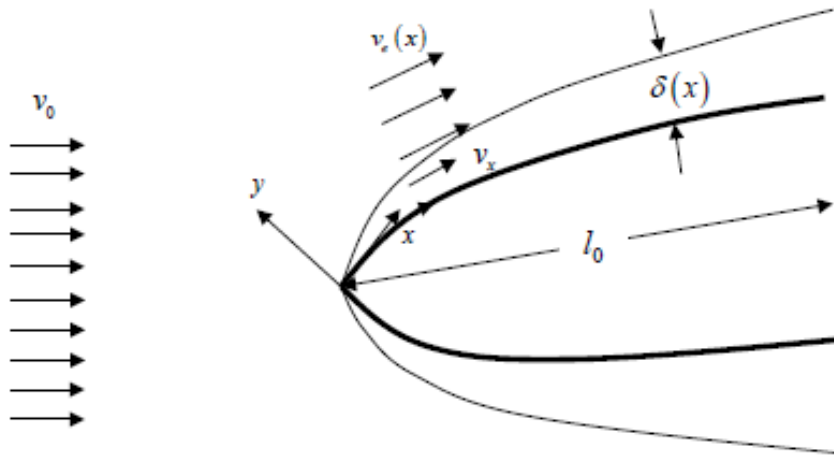


Figura 6.1: Parámetros de la capa límite alrededor de un objeto de tamaño l_0

El **espesor de la capa límite** $\delta(x)$ es una variable dependiente cuya dimensión característica es de un tamaño típico δ_0 que cumple la condición $\delta_0 \ll l_0$, es decir, que el espesor de esta capa límite es mucho más pequeño que el tamaño del objeto sólido. Pensemos además que dicho objeto sólido se extiende ampliamente en la dirección normal a la hoja de papel donde está dibujado, de modo que podemos pensar que solamente dos componentes de la velocidad son importantes y que dichas componentes cambian en las direcciones de las coordenadas x y y . Es decir que, para establecer la forma particular de las ecuaciones de Navier-Stokes para este problema, seleccionamos las siguientes variables y sus dependencias de las variables independientes: $\mathbf{v} = [v_x(x, y), v_y(x, y), 0]^T$; $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, y)$; $\rho, \mu = \text{constantes}$ y régimen estacionario.

Entonces las ecuaciones de continuidad y de movimiento en las direcciones coordenadas x y y son, respectivamente:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (6.2.1)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (6.2.2)$$

$$y \quad (6.2.3)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (6.2.4)$$

Estas tres ecuaciones forman un sistema para encontrar las variables dependientes v_x , v_y y $\mathcal{P}$, en función de las variables independientes x y y .

Antes de abordar técnicas para resolverlas, es importante simplificar el modelo, mediante un análisis de los estimados de órdenes de magnitud, para eliminar los términos de menor orden². En la ecuación de continuidad (6.2.1) el primer término es del orden

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{v_0}{l_0}\right), \quad (6.2.5)$$

donde v_0 es el valor típico de la velocidad fuera de la capa límite y, como se ha dicho, l_0 es la longitud del objeto sólido en la dirección x .

El segundo término de la ecuación de continuidad (6.2.1) debe ser del mismo orden que el primero, pues de otra manera la ecuación podría reducirse a una con un solo término, el de mayor orden, pero éste tendría que hacerse igual a cero para cumplir con la ecuación, lo que entraría en contradicción con el orden mismo del término. Entonces

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = O\left(\frac{v_0}{l_0}\right) = O\left(\frac{v_y}{\delta_0}\right) \quad (6.2.6)$$

De la última igualdad encontramos que

$$v_y = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} v_0\right) \quad (6.2.7)$$

Ahora analizamos los estimados de los órdenes de magnitud de los términos de la ecuación de movimiento en dirección x :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{v_0^2}{l_0}\right) \quad (6.2.8)$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left[\left(\frac{\delta_0}{l_0} v_0\right) \left(\frac{v_0}{\delta_0}\right)\right] = O\left(\frac{v_0^2}{l_0}\right) \quad (6.2.9)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = O\left(\nu \frac{v_0}{l_0^2}\right) \quad (6.2.10)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\nu \frac{v_0}{\delta_0^2}\right) \quad (6.2.11)$$

²Seguimos en esto la notación de Bird, sección 4.4. El desarrollo es un bello ejemplo de razonamiento cualitativo de los órdenes de magnitud de los términos, que lleva a una depuración de las ecuaciones de trabajo, seguido por muchos libros de texto, con menor o mayor detalle.

Aquí podemos apreciar que el término viscoso de (6.2.11) es mucho más significativo que el de (6.2.10), es decir que

$$\nu \left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right| \gg \nu \left| \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right| \quad (6.2.12)$$

y que, por lo tanto, el balance (6.2.2) se puede simplificar a

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (6.2.13)$$

donde todos los términos están en el mismo orden de magnitud, es decir que

$$O\left(\frac{v_0^2}{l_0}\right) = O\left(\nu \frac{v_0}{\delta_0^2}\right). \quad (6.2.14)$$

De aquí, es posible obtener una expresión para el orden de magnitud del espesor de la capa límite:

$$\frac{\delta_0}{l_0} = O\left(\sqrt{\frac{\nu}{l_0 v_0}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}\right), \quad (6.2.15)$$

donde $\text{Re} = l_0 v_0 / \nu$ es el número de Reynolds. Además, es posible asegurar que el orden de magnitud del término de los cambios de presión es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = O\left(\frac{v_0^2}{l_0}\right). \quad (6.2.16)$$

Estimamos ahora las magnitudes de los términos del balance de momentum en la dirección transversal al flujo principal, ecuación (6.2.4), donde

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} \frac{v_0^2}{l_0}\right), \quad (6.2.17)$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} \frac{v_0^2}{l_0}\right), \quad (6.2.18)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} \nu \frac{v_0}{l_0^2}\right) \quad (6.2.19)$$

$$\text{y} \quad (6.2.20)$$

$$\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} \nu \frac{v_0}{\delta_0^2}\right). \quad (6.2.21)$$

Cada uno de estos cuatro términos es de menor magnitud al que le corresponde en el balance (6.2.2), en un factor $\delta_0/l_0 \ll 1$. Por lo tanto, el término de los cambios de presión en la dirección y debe ser también de una magnitud comparable a la de estos cuatro términos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} = O\left(\frac{\delta_0}{l_0} \frac{v_0^2}{l_0}\right). \quad (6.2.22)$$

y por lo tanto resulta que

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \right|. \quad (6.2.23)$$

de donde se puede proponer que los cambios de presión sólo ocurren en la dirección de x , es decir que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x)$.

Como fuera de la capa límite se cumple la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2} v_e^2(x) + \frac{\mathcal{P}(x)}{\rho} = \hat{E}_0, \quad (6.2.24)$$

por derivación se puede encontrar que

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{P}}{dx} = v_e \frac{dv_e}{dx}, \quad (6.2.25)$$

y esta expresión se puede sustituir en la Ecuación (6.2.13) para obtener

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_e \frac{dv_e}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (6.2.26)$$

De esta manera, en la Ecuación (6.2.26) hemos acoplado el problema de capa límite a la solución al flujo ideal, en la región exterior a la capa límite. En cambio, ya no requerimos del balance de momentum en la dirección y , Ecuación (6.2.4), pues el sistema de ecuaciones a resolver, consta ahora de la ecuación de continuidad (6.2.1) y el balance de momentum (6.2.26), donde la velocidad fuera de la capa límite se supone conocida. La ecuación de continuidad (6.2.1) junto con el balance de momentum (6.2.26) es un conjunto cerrado de dos ecuaciones que se conocen como las **ecuaciones de Prandtl de la capa límite**, cuya solución daría las componentes de la velocidad $v_x(x, y)$ y $v_y(x, y)$.

6.2.2 Balance de cantidad de movimiento de von Kármán

Las ecuaciones de la capa límite debidas a Prandtl se pueden integrar en el semi-plano $y \geq 0$, para obtener un balance integral conocido como el **balance de cantidad de movimiento de von Kármán**. La idea general es eliminar la variable v_y mediante su sustitución en (6.2.26) usando la ecuación de continuidad y luego integrar en la dirección y , reestructurando los términos en función de las diferencias de velocidad dentro y fuera de la capa límite, como se detalla a continuación.

Podemos integrar la ecuación de continuidad (6.2.1) y encontrar que

$$v_y = - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} d\tilde{y}, \quad (6.2.27)$$

la cual se sustituye en (6.2.26) y luego se integra en el semiplano $0 \leq y < \infty$:

$$\int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} d\tilde{y} dy - \int_0^\infty v_e \frac{dv_e}{dx} dy = \int_0^\infty v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy. \quad (6.2.28)$$

Si cambiamos las variables de integración en el segundo y en el cuarto términos, recordando que $v_x = v_e$ cuando $y \rightarrow \infty$ y que $v_x = 0$ cuando $y = 0$, tenemos:

$$\int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^{v_e} \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} d\bar{y} dv_x - \int_0^\infty v_e \frac{dv_e}{dx} dy = v \int_0^0 \frac{\partial v_x}{\partial y} \bigg|_0 d\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \quad (6.2.29)$$

Ahora consideramos el segundo término, con relación a la integración del producto de dos funciones $\int f dg$ e integramos el cuarto término, para obtener:

$$\int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - v_e \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy - \int_0^\infty v_e \frac{dv_e}{dx} dy = -v \frac{\partial v_x}{\partial y} \bigg|_0. \quad (6.2.30)$$

A continuación, sumamos y restamos el término $\int_0^\infty v_x \frac{dv_e}{dx} dy$, reagrupando los términos, de manera que:

$$\int_0^\infty v_x \frac{\partial}{\partial x} (v_e - v_x) dy + \int_0^\infty (v_e - v_x) \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\infty (v_e - v_x) \frac{dv_e}{dx} dy = v \frac{\partial v_x}{\partial y} \bigg|_0, \quad (6.2.31)$$

donde las dos primeras integrales se compactan usando la fórmula de la derivada de un producto, en tanto que la derivada en la tercera integral, no depende de la variable de integración y puede expresarse fuera de la integral. Entonces obtenemos el balance de cantidad de movimiento de von Kármán:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (v_e - v_x) dy + \frac{dv_e}{dx} \int_0^\infty (v_e - v_x) dy = \frac{\tau_0}{\rho} = v_*^2 \quad (6.2.32)$$

donde

$$\tau_0 = -\tau_{yx}|_{y=0} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \bigg|_0, \quad (6.2.33)$$

es una cantidad positiva que representa el esfuerzo cortante del fluido sobre la superficie del sólido o la magnitud de la resistencia del sólido al flujo viscoso del fluido. La notación v_* se usa para $\sqrt{\tau_0/\rho}$ y se conoce como la **velocidad de fricción**, puesto que representa el mismo esfuerzo cortante del fluido sobre la superficie del sólido, en unidades de velocidad.

6.3 Soluciones de la teoría de la capa límite

6.3.1 Soluciones polinómicas aproximadas

La distribución de la velocidad $v_x(x, y)$ en la capa límite puede aproximarse mediante polinomios en la variable independiente y . Dichos polinomios deben satisfacer las condiciones a la frontera, en los extremos de la capa límite, de modo que $v_x(x, 0) = 0$, $v_x(x, \delta) = v_e(x)$ y $\frac{\partial v_x}{\partial y}(x, \delta) = 0$. De estas condiciones, un polinomio de primer grado sólo puede satisfacer las dos primeras, en tanto que uno de segundo debe satisfacer las tres. Polinomios de grados tres y cuatro requieren satisfacer condiciones adicionales, que han sido propuestas por un método conocido como **las soluciones aproximadas de Kármán-Pohlhausen**. Dichas condiciones aplican sobre la segunda derivada parcial en y y son: $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(x, 0) = -\frac{v_e}{v} \frac{dv_e}{dx}(x)$ y $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(x, \delta) = 0$.

Es conveniente emplear las variables adimensionales $u = v_x/v_e(x)$ y $\eta = y/\delta(x)$, de modo que, para un polinomio de cuarto grado tenemos:

$$u = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4, \quad (6.3.1)$$

que debe satisfacer las condiciones:

$$u(x, 0) = 0, \quad (6.3.2)$$

$$u(x, 1) = 1, \quad (6.3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1) = 0, \quad (6.3.4)$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(x, 0) = -\frac{\delta^2}{\nu} \frac{dv_e}{dx} = -\Lambda(x), \quad (6.3.5)$$

donde $\Lambda(x)$ es una variable adimensional que representa el gradiente de la presión de la región exterior a la capa límite y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(x, 1) = 0. \quad (6.3.6)$$

La aplicación de las condiciones (6.3.2) a la (6.3.6) permiten determinar las constantes de la solución propuesta (6.3.1), llegando finalmente a la expresión:

$$u = 1 - (1 + \eta)(1 - \eta)^3 + \frac{\Lambda}{6}\eta(1 - \eta)^3. \quad (6.3.7)$$

Ejercicios

E.6.3.1-1. Soluciones polinómicas de la capa límite

El flujo externo a la capa límite de una placa plana es la velocidad uniforme v_∞ , tal que $v_e = v_\infty$.

- (1) Encuentra la presión en la capa límite a partir del flujo en la región exterior.
- (2) Desarrolla las soluciones polinómicas aproximadas de grados uno a cuatro para la placa plana.
- (3) Encuentra las funciones $\delta(x)$ para cada una de las soluciones anteriores.

E.6.3.1-2. Soluciones trigonométricas de la capa límite.

Considera funciones trigonométricas e hiperbólicas, que tengan una forma aproximada semejante a la del perfil de la capa límite del ejercicio anterior, en el intervalo $(0, \infty)$ y resuelve el ejercicio proponiendo dichas funciones como soluciones y encontrando las constantes necesarias⁴ por medio de las condiciones a la frontera. Encuentra también el espesor de la capa límite $\delta(x)$ a partir de dichas soluciones.

6.3.2 Solución de Blasius

El ejemplo más simple de una capa límite es la que se forma arriba y abajo de una lámina sólida plana, colocada de manera tangencial a un flujo uniforme (*i.e.* con ángulo de incidencia de cero). En este caso, la velocidad fuera de la capa límite es la constante v_∞ y la presión es también constante, como consecuencia de la aplicación del balance de Bernoulli. La ecuación de continuidad y el balance diferencial de movimiento en la capa límite son:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6.3.8)$$

y

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (6.3.9)$$

y las condiciones a la frontera son $v_x = v_y = 0$ para $y = 0$, $v_x = v_\infty$ cuando $y \rightarrow \infty$ y $v_x = v_\infty$ cuando $x = 0$ y $y \neq 0$.

Fue H. Blasius quien abordó la solución de este problema, en su tesis doctoral de la universidad de Goettingen, en 1907. Lo primero fue expresar las componentes de velocidad v_x y v_y por medio de una función de corriente ψ , que satisface idénticamente la ecuación de continuidad (6.3.8). La definición de ψ se establece por el par de ecuaciones:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6.3.10)$$

y

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.3.11)$$

de modo que la ecuación de movimiento (6.3.9) resulta

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (6.3.12)$$

y las condiciones a la frontera se convierten en:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; y = 0, x \geq 0, \quad (6.3.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty; y \rightarrow \infty, \forall x \quad (6.3.14)$$

y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty; x = 0, y \neq 0. \quad (6.3.15)$$

Como en la capa límite la velocidad v_x crece desde cero en $y = 0$ hasta v_0 cerca de $y = \delta$, y no existe, en la dirección x , alguna causa que pudiera provocar un comportamiento distinto, podemos pensar que el perfil de velocidad sería único si lo expresamos convenientemente escalado, tanto en la velocidad v_x como en la coordenada y . Sean entonces $u = v_x/v_\infty$ y $\eta = y/\delta(x) = y/\sqrt{\nu x/v_\infty}$ una velocidad y una coordenada transversal escaladas. Sea, además, $\psi(x, y) \sim f(\eta)$ tal que

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \sim \sqrt{\frac{\nu_\infty}{\nu x}} f'(\eta). \quad (6.3.16)$$

Además deseamos que, para un valor de η constante, exista un sólo valor de v_x también constante, por lo que es necesario que en la funcionalidad de ψ exista una $\sqrt{x}$, para que v_x sea sólo función de η . Como además las unidades de ψ deben ser $[L^2/t]$, y considerando $f(\eta)$ adimensional, entonces la función de corriente

$$\psi(x, y) = \sqrt{\nu v_\infty x} f(\eta) \quad (6.3.17)$$

satisface condiciones para una solución de similaridad.

Derivando parcialmente $\psi(x, y)$ de la Ecuación (6.3.17), tanto como requieran los términos de la Ecuación (6.3.12), y sustituyéndolos en dicha ecuación, así como en las CF, llegamos a establecer el problema de similaridad:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (6.3.18)$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (6.3.19)$$

$$f'(\eta \rightarrow \infty) = 1, \quad (6.3.20)$$

que se puede resolver numéricamente con precisión, y por ello es considerada como solución exacta al problema de la capa límite (6.3.8) y (6.3.9).

Ejercicios

6.3.2-1. Solución de Blasius y coeficiente de rozamiento.

- (1) Resolver numéricamente el problema de Blasius, dado por la Ecuación (6.3.18), con sus CF (6.3.19) y (6.3.20).
- (2) Estimar los esfuerzos viscosos sobre la superficie de la pared sólida.
- (3) Estimar el coeficiente de rozamiento por un solo lado del sólido y expresarlo como función del número de Reynolds $Re_x = v_\infty x / \nu$, donde x es la coordenada longitudinal sobre la placa sólida, desde el borde de ataque.

7. Flujos turbulentos

7.1 Descripción fenomenológica

7.1.1 Disipación viscosa de los flujos laminares y surgimiento de la turbulencia

La pérdida irreversible del flujo de trabajo, debida a la disipación viscosa de un fluido newtoniano, corresponde a la integral de volumen de la **función de disipación de Rayleigh** ϕ_v , ver por ejemplo Bird *et al.* Pag. 93 y Apéndice B.7. Así, para un **flujo laminar unidimensional en el interior de un tubo, o entre dos planos paralelos**, con velocidad $v_x(y)$, en una región $\mathcal{V}$ del espacio ocupado por el fluido, la **rapidez de disipación de la energía cinética**, E_v es:

$$E_v = - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\tau} : (-\nabla \mathbf{v}) dV = \int_{\mathcal{V}} \mu \phi_v dV = \int_{\mathcal{V}} \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 dV \geq 0, \quad (7.1.1)$$

que es proporcional al cuadrado del gradiente de la velocidad, el cual consta, en este ejemplo, de una sola derivada ordinaria de la única componente no nula de la velocidad, $v_x(y)$. La velocidad local se va incrementando desde las paredes sólidas sin movimiento, donde es cero, hacia la corriente libre, donde tiene su máximo. Sin embargo, **cerca de la superficie sólida la velocidad aumenta ampliamente en distancias muy pequeñas, de manera que su gradiente es más grande que hacia el centro del ducto, dónde la corriente es más libre**. En la Figura 7.1 se representa E_v como el área encerrada por el contorno de color rojo y se muestra cómo, de acuerdo con la Ecuación (7.1.1), al ser las pérdidas de energía cinética proporcionales al cuadrado del gradiente de la velocidad, podrían llevar a valores de E_v extremadamente grandes, conforme aumenta el flujo, suponiendo que se mantuviera el perfil parabólico de la velocidad. Sin embargo, esto ocurre sólo en los flujos laminares y **las pérdidas observadas a velocidades elevadas no coinciden con estas estimaciones**. Así, la figura 7.1(a) corresponde a un flujo laminar en un tubo, con un número de Reynolds pequeño, por ejemplo $Re = 800$. La distribución espacial de la velocidad $v_x(y)$ es parabólica, donde x es la coordenada axial y y es la coordenada radial. Los perfiles de velocidad se representan en las formas parabólicas de un color azul oscuro, y el gradiente de la velocidad, **evaluado en la pared**, corresponde a la recta tangente a la función v_x , representada por líneas oblicuas delgadas en azul claro, en la Figura 7.1(a). Además, la función τ_{yx} es la recta azul oscuro

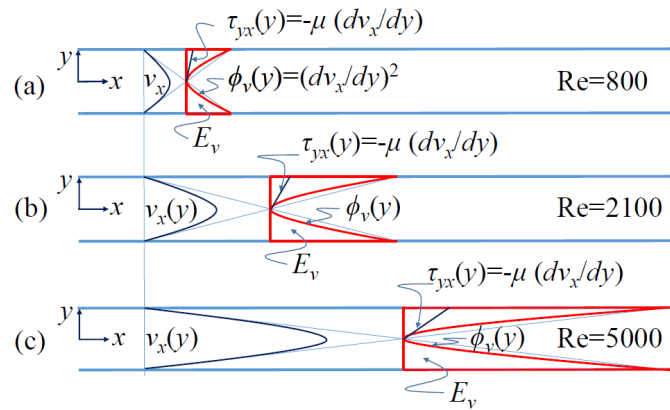


Figura 7.1: El crecimiento de la disipación viscosa E_v equivale al área cerrada por el contorno rojo. Conforme la velocidad aumenta, de (a) a (c) y suponiendo que fuera posible mantener el perfil parabólico de la velocidad, incluso más allá de la transición al flujo turbulento ($Re=2100$, en b), sería posible ver cómo E_v tendría que incrementarse más allá de cierto límite donde el flujo ya es inestable. Dicha inestabilidad da lugar a la generación de turbulencia, que rompe la estructura ordenada del flujo laminar mediante remolinos que mantienen pequeñas estructuras disipativas en su interior y son capaces de viajar a velocidades elevadas manteniendo su identidad, con pequeños gradientes de la velocidad.

que une el valor de τ_0 en la pared con el valor cero en la intersección con el eje de las x . El valor de τ_0 , que representa los esfuerzos viscosos del fluido en la pared, corresponde al valor negativo de la recta tangente a la velocidad en la pared multiplicada por la viscosidad. Al multiplicar los valores de τ_{yx} por el negativo de los valores del gradiente de la velocidad local, y al integrar sobre todo el volumen, encontramos la región cerrada por el contorno rojo. Esta región corresponde a la rapidez de disipación de la energía cinética, E_v . La Figura 7.1(b) corresponde, esquemáticamente, a la situación límite de un flujo laminar, antes de la transición a flujo turbulento que, en el flujo por un tubo, corresponde al número de Reynolds de 2100. En esta situación, la recta tangente a la velocidad en la pared del tubo corresponde, como en el caso (a), a las líneas oblicuas azules claras, en tanto que τ_0 corresponde al negativo del valor de dicha pendiente (la cual es negativa) multiplicada por el valor de la viscosidad, como se ve en la Figura 7.1(b). Entonces, en ambos casos, 7.1(a) y 7.1(b), la disipación viscosa corresponde a la región encerrada por el contorno rojo. Se aprecia que **la disipación viscosa crece conforme el flujo laminar es más elevado**. La Figura 7.1(c) es una representación hipotética de un flujo que permaneciera laminar a números de Reynolds más elevados. Esta representación nos permite ver cómo la disipación viscosa E_v seguiría incrementándose, de ser eso posible, si no existieran limitaciones físicas a la disipación viscosa. Sin embargo, la intensidad de la disipación viscosa está limitada físicamente y si la velocidad y su gradiente crecen más allá de un límite compatible con dicha limitación,

la estructura de flujo no puede permanecer inalterada, sino que tenderá a reorganizarse, cambiando en consecuencia, el régimen de flujo

para contender eficazmente con el incremento de la energía cinética del flujo, sin llegar a incrementar la disipación viscosa en la misma proporción que fué característica de los flujos laminares.

Esto ocurre mediante el surgimiento espontáneo de la estructura turbulenta.



Figura 7.2: Estructura de los remolinos turbulentos en cascada. (a) Un boceto de Leonardo da Vinci (1500-1508), (b) Katsushika Hokusai, pintor japonés (1830-1833) y (c) Artistas mixtecos, llamados *tlacuiloque* en lengua náhuatl, en los códices Nuttal (arriba) y Vindobonensis (abajo) (1438).

7.1.2 Variables tiempo-ajustadas y esfuerzos turbulentos

La figura 7.2(a) es un boceto de Leonardo da Vinci en el código Leicester, realizado entre 1500 y 1508, que detalla la estructura turbulenta de un flujo descargando desde un canal. Esta estructura turbulenta consiste, básicamente, en la formación de paquetitos o remolinos turbulentos de diversos tamaños, inmersos los pequeños en los intermedios y estos en otros mayores, y así sucesivamente, hasta llegar a remolinos cuyo tamaño compite con el tamaño característico del equipo, instrumento o sistema, en este caso, el tamaño del canal. La observación de los remolinos en cascada ha sido representada por otros artistas de culturas muy diversas, así, es famoso el grabado llamado *La gran ola de Kanagawa*, del pintor japonés Katsushika Hokusai; gráfica impresa entre 1830 y 1833, ver figura 7.2(b). Observamos esta estructura de remolinos en cascada, también en algunas láminas de los códices Nuttal y Vindobonensis, pintados en la región mixteca poblana y concluidos alrededor del año 1438,¹ durante el período postclásico de la civilización del Anáhuac, ver figura 7.2(c). En particular, notamos en dichas ilustraciones cómo las ondas mayores llevan consigo conjuntos de ondas más pequeñas, como en los flujos turbulentos.

La ocurrencia de los remolinos turbulentos hace de la velocidad una cantidad altamente fluctuante. Así, al medir una componente de la velocidad local con un instrumento apropiado, como un anemómetro de hilo caliente, el histograma o serie de tiempo que se obtiene, es una traza semejante a la observada en la figura 7.3. En dicha figura se representan las trazas de la velocidad local, en algún punto fijo del espacio, conforme el tiempo avanza, así como la **velocidad (local) tiempo ajustada**, correspondiente a dos flujos, un flujo estacionario y uno transitorio. La traza (a) representa un flujo turbulento con velocidad tiempo-ajustada estacionaria y la traza (b) representa un flujo turbulento con velocidad tiempo-ajustada dependiente del tiempo.

El promedio temporal de la velocidad de los flujos turbulentos o **velocidad tiempo-ajustada** se define como

$$\bar{v}_x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{1}{2}T}^{t+\frac{1}{2}T} v_x(t') dt', \quad (7.1.2)$$

donde T es la duración del intervalo de tiempo en el cual se realiza la integración, de modo que la velocidad instantánea $v_x(t)$ se puede expresar como la suma de la velocidad tiempo-ajustada $\bar{v}_x(t)$ a dicho tiempo t más la fluctuación de la velocidad $v'_x(t)$ a ese mismo tiempo t , es decir

$$v_x(t) = \bar{v}_x(t) + v'_x(t), \quad (7.1.3)$$

El intervalo de tiempo T debe ser tal que las variables tiempo-ajustadas y sus fluctuaciones se comporten de modo que una nueva aplicación del operador integral de ajuste temporal sobre

¹Tomado de Alfonso Caso, 1996, lámina XVI, figuras t y x .

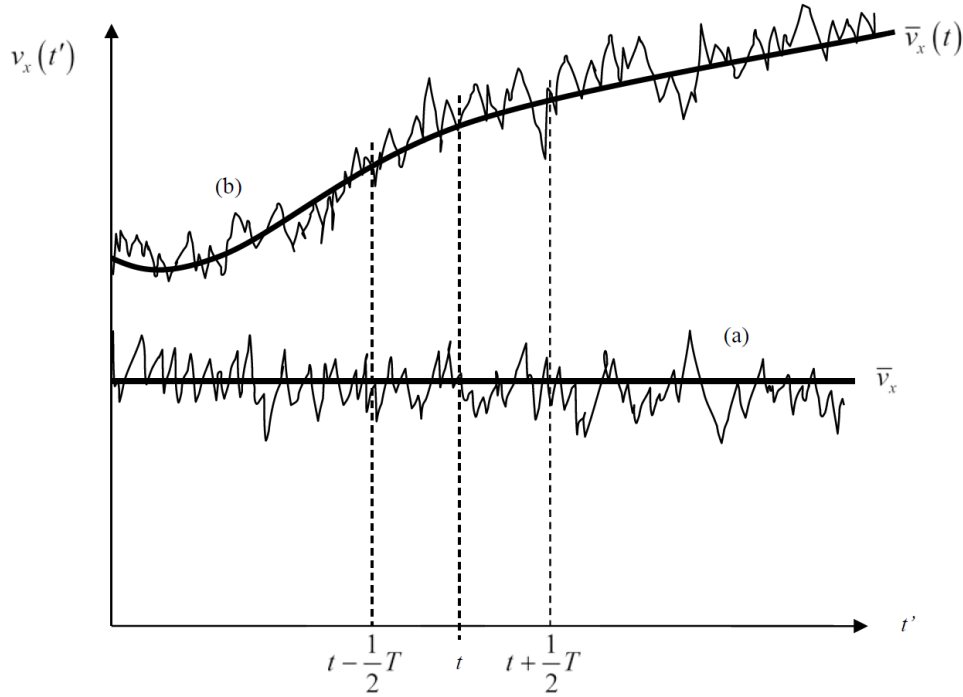


Figura 7.3: Componente de la velocidad v_x y su valor tiempo-ajustado $\bar{v}_x$ para (a) un flujo estacionario y (b) un flujo transitorio.

una variable tiempo-ajustada, la deje sin cambio. Es decir, que las variables tiempo-ajustadas se comporten como constantes ante la aplicación subsecuente del operador integral de ajuste temporal. Entonces, aplicando el ajuste temporal a la expresión (7.1.3), tenemos:

$$\bar{v}_x(t) = \overline{\bar{v}_x(t)} + \overline{v'(t)} = \overline{\bar{v}_x(t)}, \quad (7.1.4)$$

lo cual implica que $\overline{v'(t)} = 0$, es decir que la integral de las fluctuaciones tiempo-ajustadas da cero. Para que esto ocurra, es necesario que el intervalo de integración T sea lo suficientemente grande, aunque también, si se trata de flujos transitorios, dicho intervalo no puede crecer indiscriminadamente, pues estará acotado por arriba, para poder representar los efectos transitorios. Debe hacerse notar, sin embargo, que **los productos de fluctuaciones tiempo-ajustadas no dan cero**.

De hecho, las funciones de productos de fluctuaciones promediadas, como $\sqrt{\overline{v'_x v'_x}}$ o $\sqrt{\overline{v'_y v'_z}}$ sirven para cuantificar las magnitudes de las fluctuaciones turbulentas y sus correlaciones.

Existen también dos propiedades importantes de las derivadas de cantidades tiempo-ajustadas, que son la aplicación del operador de ajuste temporal a una derivada con respecto a una coordenada espacial y la aplicación de dicho operador a una derivada temporal. El primer caso es muy simple, dada la independencia de las coordenadas espaciales y el tiempo:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}, \quad (7.1.5)$$

En cuanto a la derivada temporal, su integración directa da:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{1}{2}T}^{t+\frac{1}{2}T} \frac{\partial v_x}{\partial t'}(t') dt' = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{1}{2}T}^{t+\frac{1}{2}T} dv_x = \frac{v_x|_{t+\frac{1}{2}T} - v_x|_{t-\frac{1}{2}T}}{T}. \quad (7.1.6)$$

Aunque, por otra parte, al aplicar la fórmula de Leibniz para derivar bajo el signo de una integral, tenemos:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{1}{2}T}^{t+\frac{1}{2}T} v_x(t') dt' = \frac{v_x|_{t+\frac{1}{2}T} - v_x|_{t-\frac{1}{2}T}}{T}. \quad (7.1.7)$$

De lo anterior se verifica la igualdad:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t}. \quad (7.1.8)$$

Con estos elementos, las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser integradas usando el operador de ajuste temporal de la definición (7.1.2), con ayuda de las propiedades diferenciales (7.1.5) y (7.1.8). De aquí resultan las ecuaciones de Reynolds, que son similares a las de Navier-Stokes, pero cuyas variables son tiempo-ajustadas y cuyo tensor de esfuerzos incorpora, además de los efectos viscosos tiempo-ajustados $\bar{\tau}^{(v)}$, los efectos turbulentos, debidos a los promedios de los productos de fluctuaciones de las componentes de la velocidad, conocidos como las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds $\bar{\tau}^{(t)}$. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\bar{\tau}^{(t)} = \begin{pmatrix} \overline{\rho v'_x v'_x} & \overline{\rho v'_x v'_y} & \overline{\rho v'_x v'_z} \\ \overline{\rho v'_y v'_x} & \overline{\rho v'_y v'_y} & \overline{\rho v'_y v'_z} \\ \overline{\rho v'_z v'_x} & \overline{\rho v'_z v'_y} & \overline{\rho v'_z v'_z} \end{pmatrix}, \quad (7.1.9)$$

en tanto que el tensor de esfuerzos viscosos tiempo-ajustado para fluidos newtonianos incompresibles, es:

$$\bar{\tau}^{(v)} = -\mu \left[\nabla \bar{\mathbf{v}} + (\nabla \bar{\mathbf{v}})^T \right] \quad (7.1.10)$$

y el tensor de los esfuerzos totales tiempo-ajustado es ahora $\bar{\tau} = \bar{\tau}^{(v)} + \bar{\tau}^{(t)}$. Con esta consideración especial, y re-interpretando todas las variables de las ecuaciones de Navier-Stokes como variables tiempo-ajustadas, se pueden utilizar las ecuaciones del Apéndice B de Bird *et al.* para la elaboración de modelos de flujo turbulento tiempo-ajustados. Esta versión de los balances de momentum, con densidad y viscosidad constantes, se conoce como las **ecuaciones de Reynolds**, que son:

Ecuación de continuidad tiempo-ajustada:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (7.1.11)$$

Ecuación de movimiento tiempo-ajustada:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{\mathbf{v}} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla \bar{p} - \nabla \cdot (\bar{\tau}^{(v)} + \bar{\tau}^{(t)}) + \rho \mathbf{g}. \quad (7.1.12)$$

7.1.3 Dos modelos simples de los esfuerzos turbulentos

El tensor de esfuerzos de Reynolds, Ecuación (7.1.9), es simétrico y está formado por cantidades dependientes de la estructura de los procesos estocásticos de la turbulencia, que introducen nuevas variables en los balances a tiempo-ajustado. Estas variables, las integrales de los productos de fluctuaciones de la velocidad, implican un **problema de cerradura**, es decir que ahora el sistema de ecuaciones contiene más variables que el número de relaciones independientes entre las variables.

Para resolver este problema es necesario **generar un conjunto adicional de expresiones**, que permita relacionar a las nuevas variables [las del lado derecho de la Ecuación 7.1.9)] con la velocidad tiempo-ajustada y sus derivadas. En este sentido, Boussinesq propuso en 1877, por analogía con los fluidos newtonianos, que los esfuerzos turbulentos satisfacen la siguiente relación de comportamiento:

$$\overline{\tau}^{(t)} = -\mu^{(t)} \left[\nabla \bar{\mathbf{v}} + (\nabla \bar{\mathbf{v}})^T \right], \quad (7.1.13)$$

donde $\mu^{(t)}$ es la **viscosidad de remolino o viscosidad turbulenta**, que Boussinesq consideró, en una primera aproximación, como una constante $\mu^{(t)} = C$. Posteriormente se han elaborado expresiones aplicables a diversas situaciones, como la turbulencia cerca de una pared o en una corriente libre, lejos de superficies sólidas.

Otro modelo para obtener relaciones entre los esfuerzos de Reynolds y el gradiente de la velocidad tiempo-ajustada es debido a Prandtl, y considera una **longitud de mezcla**. La hipótesis básica de este modelo consiste en proponer que los remolinos turbulentos se propagan de un modo semejante al momentum viscoso.

Consideremos un caso sencillo, el flujo turbulento sobre una placa plana. Aquí el flujo a tiempo-ajustado es unidireccional, con la componente de velocidad $\bar{v}_x(y)$. En la Figura 7.4 se representa el mezclado turbulento, en la dirección transversal al flujo principal.

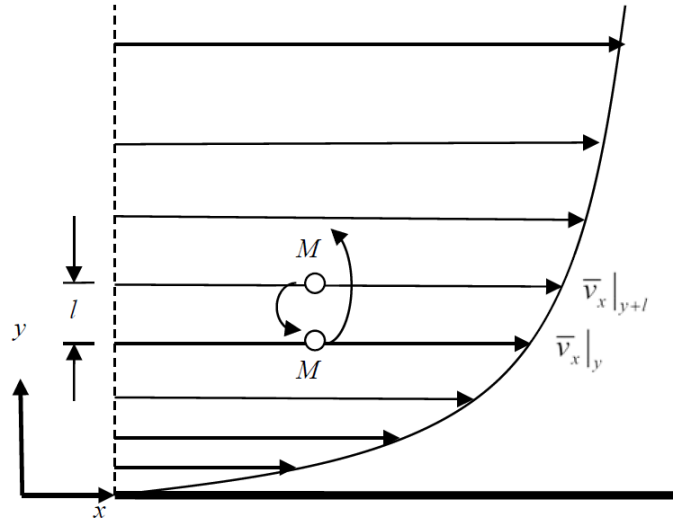


Figura 7.4: Modelo de longitud de mezcla de Prandtl.

En el modelo de longitud de mezcla,² se propone que existe una distancia l transversal al flujo, en la cual hay un intercambio convectivo de momentum, dado por la diferencia del momentum entre masas iguales que se intercambian de lugar, $M\bar{v}_x|_{y+l} - M\bar{v}_x|_y$. El flux tiempo-ajustado de momentum turbulento, asociado a este intercambio es:

$$\overline{\tau}_{yx}^{(t)} = -\frac{M}{\Delta t \Delta S} [\bar{v}_x|_{y+l} - \bar{v}_x|_y]. \quad (7.1.14)$$

Aquí, la masa intercambiada se puede expresar como la densidad por el volumen intercambiado, $M = \rho c l \Delta S$, donde c es una constante de proporcionalidad. Si l es pequeña, una expansión en series

²El desarrollo de la teoría de Prandtl y su aplicación al flujo en un tubo, que presentamos aquí, se ha tomado de Whitaker en las secciones 6.4 y 6.5 de su libro de 1968.

de Taylor para representar $\bar{v}_x|_{y+l}$ en función de $\bar{v}_x|_y$ y sus derivadas, da la expresión

$$\bar{v}_x|_{y+l} = \bar{v}_x|_y + l \frac{d\bar{v}_x}{dy} + o(l^2), \quad (7.1.15)$$

de modo que la Ecuación (7.1.14) se puede expresar como

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l^2 \frac{c}{\Delta t} \frac{d\bar{v}_x}{dy}. \quad (7.1.16)$$

Experimentalmente se observa que los esfuerzos de Reynolds son mayores cuando hay mayores cambios de la velocidad tiempo-ajustada, por lo cual es razonable proponer una proporcionalidad tal que

$$\frac{c}{\Delta t} = \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|. \quad (7.1.17)$$

Finalmente, el modelo de longitud de mezcla de Prandtl es:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_x}{dy}, \quad (7.1.18)$$

donde la viscosidad de remolino $\mu^{(t)}$ se puede identificar con la función

$$\mu^{(t)} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|. \quad (7.1.19)$$

7.2 Flujo turbulento en un tubo

7.2.1 Ecuaciones de Reynolds

La velocidad tiempo-ajustada en el interior de un tubo cilíndrico en régimen estacionario es $\bar{\mathbf{v}} = [0, 0, \bar{v}_z(r)]^T$ y la presión modificada, también tiempo-ajustada, es $\bar{\mathcal{P}}(z)$. Entonces la componente z del balance de momentum es

$$0 = -\frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dz} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \bar{\tau}_{rz}), \quad (7.2.1)$$

donde, integrando en r , $\bar{\tau}_{rz}$ resulta

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz}^{(v)} + \bar{\tau}_{rz}^{(t)} = \left(-\frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dz} \right) \frac{r}{2} = \tau_0 \frac{r}{R}, \quad (7.2.2)$$

aquí $\tau_0 = \bar{\tau}_{rz}|_{r=R}$ son los esfuerzos en la pared del tubo, usados como condición a la frontera.

7.2.2 Longitud de mezcla de Prandtl

Sustituyendo las contribuciones viscosa y turbulenta, de esta componente del tensor de esfuerzos totales, tenemos:

$$\bar{\tau}_{rz} = -\mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} - \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \frac{d\bar{v}_z}{dr} = \tau_0 \frac{r}{R}. \quad (7.2.3)$$

La longitud de mezcla l se propone, generalmente, proporcional a la distancia desde la pared, $l = ky$. Entonces es conveniente hacer el cambio de variable $r = R - y$ y $d/dr = -d/dy$, de donde la Ecuación (7.2.3) resulta

$$v \frac{d\bar{v}_z}{dy} + k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{v}_z}{dy} \right)^2 = v_*^2 \left(1 - \frac{y}{R} \right). \quad (7.2.4)$$

Aquí se ha usado el hecho de que la velocidad es creciente cuando aumenta la distancia desde la pared hacia el eje axial del tubo cilíndrico, resultando en una derivada mayor que cero. También se ha dividido entre la densidad ρ y se ha empleado la notación v_* para la velocidad de fricción definida como $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. La expresión (7.2.4) no se puede resolver analíticamente, sin embargo podemos explorar dos casos asintóticos para analizar su comportamiento.

7.2.3 Solución cerca de la pared

Cerca de la pared ($y < y_0$), los efectos viscosos son más importantes que los turbulentos y entonces (7.2.4) se reduce a

$$v \frac{d\bar{v}_z}{dy} = v_*^2 \left(1 - \frac{y}{R}\right), \text{ para } y < y_0, \quad (7.2.5)$$

cuya integración da, considerando la condición a la frontera $\bar{v}_z = 0$ cuando $y = 0$:

$$\frac{\bar{v}_z}{v_*} = \frac{v_* y}{v}, \text{ para } 0 \leq y \leq y_0. \quad (7.2.6)$$

7.2.4 Solución en distancias intermedias

En el otro extremo asintótico, cuando los esfuerzos turbulentos son mucho más importantes que los esfuerzos viscosos, la Ecuación (7.2.4) se reduce a

$$ky \frac{d\bar{v}_z}{dy} = v_* \sqrt{1 - \frac{y}{R}}, \quad (7.2.7)$$

y suponiendo que la distancia desde la pared no se acerca mucho al centro del tubo, por ejemplo si $y > 0.3R$, resulta que la raíz cuadrada es mayor que 0.8367, con su límite superior de 1.0000. Entonces, de manera aproximada, podemos tomar este último límite para sustituirlo en la Ecuación (7.2.7) y proponer que

$$ky \frac{d\bar{v}_z}{dy} = v_*, \quad (7.2.8)$$

cuya integración da

$$\frac{\bar{v}_z}{v_*} = \frac{1}{k} \ln y + C_1. \quad (7.2.9)$$

Ahora bien, podemos estimar la constante C_1 a partir de la condición de empalme de ambas soluciones en $y = y_0$, donde tenemos que $\bar{v}_z = \bar{v}_{z0}$, entonces $C_1 = \bar{v}_{z0}/v_* - \ln y_0/k$ y

$$\frac{\bar{v}_z}{v_*} = \frac{\bar{v}_{z0}}{v_*} - \frac{1}{k} \ln y_0 + \frac{1}{k} \ln y. \quad (7.2.10)$$

7.2.5 Variables escaladas en la velocidad de fricción

Los resultados de ambos casos asintóticos, Ecuaciones (7.2.6) y (7.2.10), se pueden expresar en términos de las así llamadas, variables adimensionales del flujo turbulento, que se definen como

$$y^+ = \frac{v_* y}{v} \quad (7.2.11)$$

y

$$v^+ = \frac{v_z}{v_*}. \quad (7.2.12)$$

Todas las variables adimensionales escaladas en la velocidad de fricción llevan un signo + para identificar este escalamiento, que en el caso de las ecuaciones (7.2.6) y (7.2.10) resulta en

$$v^+ = y^+, \text{ para } 0 \leq y^+ \leq y_0^+ \quad (7.2.13)$$

y

$$v^+ = C + \frac{1}{k} \ln y^+, \text{ para } y_0^+ \leq y^+ \leq \frac{0.3Rv_*}{v}. \quad (7.2.14)$$

Hay una cantidad apreciable de datos experimentales, así como otras expresiones y ajustes numéricos que pueden usarse, siguiendo diversas fuentes y estudios, como se aprecia en la figura 5.5-3 de Bird *et al.* Una posibilidad entre otras, que hemos obtenido del ajuste de los datos de dicha figura, es tomar los valores $y_0^+ = 10.3$, $k = 0.36$ y $C = 3.8$. Con estos valores de las constantes, aseguramos la continuidad de los dos tramos de la gráfica, aunque no de su derivada, lo cual se logra con ajustes en el tramo intermedio, a expresiones semiempíricas, como las del pie de la figura 5.5-3 de Bird.

7.2.6 Magnitudes de los parámetros de los flujos turbulentos

Volviendo a la Ecuación (7.2.3), podemos dividirla entre la densidad y re-escribirla como:

$$-v \frac{d\bar{v}_z}{dr} - v^{(t)} \frac{d\bar{v}_z}{dr} = v_*^2 \frac{r}{R}, \quad (7.2.15)$$

o, en términos de las variables adimensionales (7.2.11) y (7.2.12), tenemos:

$$\left(1 + \frac{v^{(t)}}{v}\right) \frac{dv^+}{dy^+} = 1 - \frac{y}{R}, \quad (7.2.16)$$

donde podemos despejar la razón de viscosidades cinemáticas:

$$\frac{v^{(t)}}{v} = \frac{1 - y/R}{dv^+/dy^+} - 1, \quad (7.2.17)$$

y estimar la derivada con la Ecuación (7.2.14), para diversos valores de y . Así, suponiendo que $y_0 \leq y = R/4$, tenemos

$$\frac{v^{(t)}}{v} = \frac{3}{4}ky^+ - 1, \text{ para } y_0^+ \leq y^+ = \frac{Rv_*}{4v}. \quad (7.2.18)$$

Esta razón depende de tres factores: el fluido (v), el tamaño del tubo (D) y las condiciones de operación (v_*). Para concretar ideas sobre estas magnitudes, consideremos agua ($v = 1.02 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) fluyendo por un tubo de 0.05 m. de diámetro, con una velocidad de fricción, $v_* = 0.0128 \text{ m/s}$. Entonces $y^+ = 78.4$ y $v^{(t)}/v = 20.2$. Es decir que los esfuerzos turbulentos son veinte veces mayores que los laminares.

7.2.7 Producción de turbulencia y disipación viscosa

Volviendo a la Ecuación (7.2.15), podemos expresar su término turbulento en función de los esfuerzos de Reynolds, quedando:

$$-v \frac{d\bar{v}_z}{dr} + \overline{v'_r v'_z} = v_*^2 \frac{r}{R}. \quad (7.2.19)$$

En esta forma, la ecuación (7.2.19) no depende de modelo alguno para la representación de los esfuerzos de Reynolds. Al multiplicar esta ecuación por el factor positivo $(v/v_*)(-d\bar{v}_z/dr)$, resulta:

$$\frac{v}{v_*^4} \left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) \overline{v'_r v'_z} + \frac{v^2}{v_*^4} \left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr} \right)^2 = \frac{v}{v_*^2} \left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) \frac{r}{R}. \quad (7.2.20)$$

Los términos de esta ecuación fueron interpretados por Laufer (1954) como:³

$$\frac{v}{v_*^4} \left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) \overline{v'_r v'_z} = \text{Pr}_\tau,$$

es la **producción de energía** debida a la generación de turbulencia, en tanto que

$$\frac{v^2}{v_*^4} \left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr} \right)^2 = W_\mu,$$

es la **pérdida de energía** por disipación viscosa directa y

$$\frac{v}{v_*^2} \left(-\frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) \frac{r}{R} = \sqrt{W_\mu} \frac{r}{R} = E(r),$$

es la **energía total disponible**, debida a la pérdida de presión en el tubo. Entonces, la ecuación (7.2.20) se puede expresar como

$$\text{Pr}_\tau + W_\mu = \sqrt{W_\mu} \frac{r}{R} = E(r), \quad (7.2.21)$$

la cual establece que

debido a la pérdida de presión a lo largo del tubo, la energía total disponible en un punto, menos la pérdida de energía correspondiente a la disipación viscosa directa en el mismo punto, equivale a la producción de energía asociada a la generación de turbulencia.

Los términos de producción de energía turbulenta (Pr_τ) y disipación viscosa de energía (W_μ), corresponden a la figura de Brodkey que se ha mencionado en la nota al pie, se representan en la Figura 7.5 y corresponden a la primera igualdad en la ecuación (7.2.21).

La producción de energía turbulenta, Pr_τ , es máxima en la zona central del tubo, es decir, cuando $r/R \rightarrow 1$. Considerando este límite, podemos derivar la ecuación (7.2.21) con respecto a W_μ , para luego encontrar el máximo de la función Pr_τ , igualando su derivada a cero, lo cual ocurre cuando $W_\mu = 1/4$, y luego, por la sustitución de este valor en la ecuación (7.2.21), encontramos que también $\text{Pr}_\tau = 1/4$. El punto (1/4, 1/4), en la figura 7.5 es, entonces, un máximo, en concordancia con los valores experimentales de Laufer y de Klebanoff, representados aproximadamente por la traza de la figura 7.5.

Ejercicios

E.7.2.-1. Flujo turbulento de agua en un tubo. Fluye agua a condiciones ambientales de presión y temperatura, por el interior de un tubo de vidrio cuyo gradiente de presión es de 1 kPa/m y cuyo diámetro interno es de $25.4 \times 10^{-3} \text{ m}$. Utilizando las ecuaciones (7.2.13) y (7.2.14), para las regiones cerca y lejos de la pared, respectivamente, hasta llegar al centro del tubo, lo cual implica

³de acuerdo con lo expresado por Brodkey, en la sección 14-3.H de su libro (1967), donde presenta gráficas de las funciones Pr_τ y W_μ en términos de la coordenada y^+ , así como valores experimentales de Klebanoff (1955) y de Laufer (1954).

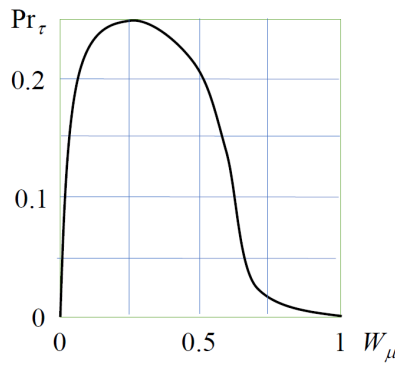


Figura 7.5: Disipación viscosa directa W_μ vs. producción de turbulencia Pr_τ , que corresponde a los datos experimentales de la figura 14-17 de Brodkey (1967). Elaboración propia.

no tomar en consideración el límite superior de y^+ , (i) encontrar el perfil de velocidad turbulenta, (ii) encontrar la velocidad media de flujo y (iii) calcular el número de Reynolds.

E.7.2.-2. Flujo de glicerina en el mismo tubo. Sustituir el agua por glicerina (glicerol) en la tubería del ejercicio anterior y, sin alterar el gradiente de presión y bajo las mismas consideraciones del ejercicio previo, (i) encontrar el perfil de velocidad, (ii) encontrar la velocidad media de flujo, (iii) calcular el número de Reynolds y (iv) Comparar los resultados de este ejercicio con los del ejercicio anterior, a la luz del párrafo introductorio de este capítulo, para aclarar la importancia de τ_0 y para encontrar una interpretación de los términos de producción de energía turbulenta y de disipación viscosa, Pr_τ y W_μ , respectivamente.

7.3 Capa límite turbulenta

Cuando un fluido entra en un tubo desde un recipiente amplio, su velocidad experimenta una re-distribución, acelerándose en el centro del tubo y retardándose cerca de la pared. Esto ocurre en una porción del tubo, llamada la **región de entrada**. Desde la época de Reynolds era sabido que en este re-ordenamiento de la velocidad, cuando era muy elevada, luego de un corto tramo en el que el flujo es laminar dentro del tubo, sigue una zona de transición y finalmente se observa flujo turbulento. La observación se puede relacionar con un número de Reynolds Re_x , **basado en la distancia x desde la entrada al tubo**, como su longitud característica, es decir que:

$$Re_x = \frac{\langle v_x \rangle x}{\nu}. \quad (7.3.1)$$

Ahora podemos decir que el número de Reynolds Re_x experimenta un rápido crecimiento desde la entrada al tubo, hasta alcanzar valores de transición y luego valores típicos del régimen turbulento.

Posteriormente se observó un proceso semejante para flujos en la capa límite, es decir que se observaron tanto el flujo laminar, como una zona de transición y el flujo turbulento, al interior de la capa límite, ver la Figura 7.6. El proceso de desarrollo de la capa límite es indicativo de las etapas del régimen turbulento: la capa límite laminar se desarrolla desde el **borde de ataque** de la placa plana, hasta donde el número de Reynolds alcanza un valor crítico $Re_{x,crit} \approx 3.5 \times 10^5$, el cual indica el inicio de la transición a los flujos turbulentos. A continuación el flujo laminar se hace inestable, desarrollando movimientos ondulatorios, primero bi-dimensionales (2D), conocidos como ondas de Tollmien-Schlichting, y posteriormente generando ondulaciones tri-dimensionales (3D) y la formación de vórtices. Los sitios de mayor vorticidad dan lugar a erupciones turbulentas, que generan a su vez núcleos turbulentos, en los lugares donde las fluctuaciones turbulentas de la

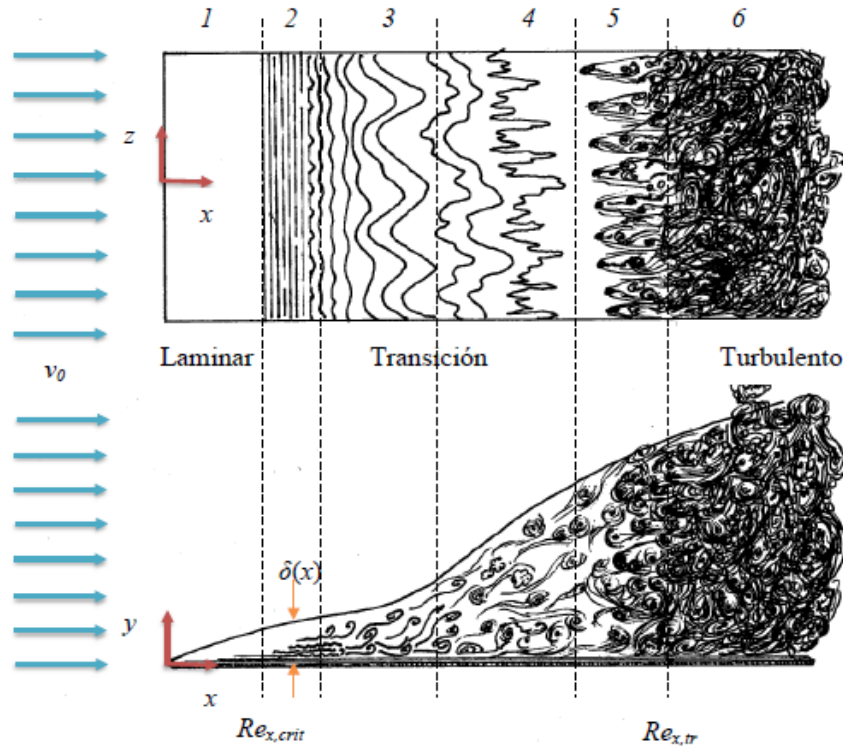


Figura 7.6: Representación de la transición a la turbulencia en la capa límite del flujo sobre una placa plana horizontal. *Arriba:* vista superior. *Abajo:* vista lateral. 1. Flujo laminar estable. 2. Flujo laminar inestable con ondas 2D de Tollmien-Schlichting. 3. Desarrollo de ondas 3D inestables y formación de vórtices. 4. Erupciones turbulentas en sitios con elevada vorticidad. 5. Formación de núcleos turbulentos en sitios con elevadas fluctuaciones turbulentas de velocidad. 6. Flujo turbulento totalmente desarrollado.

velocidad son más elevadas. Estos núcleos turbulentos interactúan unos con otros, coalesciendo y dando lugar a la **capa límite turbulenta totalmente desarrollada**, que ocurre cuando $Re_{x,tr} \approx 1.8 \times 10^6$.

7.3.1 Análisis de la capa límite turbulenta

El análisis de la capa límite turbulenta es semejante al desarrollo de la teoría de Prandtl para la capa límite laminar, aunque su punto de partida son las **ecuaciones de movimiento de Reynolds**, ver la ecuación (7.1.12) para los flujos turbulentos, en vez de las ecuaciones de Navier-Stokes. En el Capítulo 7 se estudian los flujos turbulentos; baste aquí señalar que su descripción fenomenológica parte de un promediado temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes, que conduce a variables promediadas en el tiempo, conocidas como **variables tiempo ajustadas**, que se definen en la Ecuación (7.1.2). Existen, además, sus **fluctuaciones turbulentas**, que sumadas a la variable tiempo ajustada correspondiente, equivalen al valor local-instantáneo de la variable, como indica la Ecuación (7.1.3).

En términos de dicha descripción tiempo-ajustada para los flujos turbulentos, a partir de las ecuaciones de Reynolds (7.1.12), aplicadas a flujos bi-dimensionales sencillos en un sistema de coordenadas rectangulares, se puede proponer que las tres componentes de la velocidad son:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \overline{v_x}(x,y) + v'_x(x,y,z,t) \\ \overline{v_y}(x,y) + v'_y(x,y,z,t) \\ 0 + v'_z(x,y,z,t) \end{pmatrix}. \quad (7.3.2)$$

Nótese que la componente de la velocidad v_z tiene un valor tiempo ajustado de cero, $\overline{v_z} = 0$, pero fluctuaciones no nulas, es decir que $v_z = v'_z(x, y, z, t)$. Además, todas las fluctuaciones de velocidad dependen de las tres coordenadas del espacio y del tiempo (x, y, z, t) . Considerando la velocidad dada por la Ecuación (7.3.2), el resultado análogo al de la capa límite laminar de la Ecuación (6.2.26), es:

$$\overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \overline{v_y} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} = v_e \frac{dv_e}{dx} + v \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v_y v'_x} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z v'_x} \right). \quad (7.3.3)$$

Por otra parte, integrando la ecuación de continuidad tiempo ajustada, encontramos que

$$\overline{v_y} = - \int_0^y \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} d\tilde{y}, \quad (7.3.4)$$

donde $\tilde{y}$ es una variable muda, que se integra entre límites, hasta el valor y de la coordenada. $\overline{v_y}$ se sustituye en (7.3.3) y luego se integra en el semi-plano $0 \leq y < \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} dy - \int_0^\infty \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} d\tilde{y} dy - \int_0^\infty v_e \frac{dv_e}{dx} dy = \\ \int_0^\infty v \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} dy - \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v_y v'_x} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z v'_x} \right) dy. \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Cambiando variables de integración en el segundo y el cuarto términos, recordando que $\overline{v_x} = v_e$ cuando $y \rightarrow \infty$ y que $\overline{v_x} = 0$ cuando $y = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x^2} \right) dy - \int_0^{v_e} \int_0^y \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} d\tilde{y} dv_x - \int_0^\infty v_e \frac{dv_e}{dx} dy = \\ \int_0^\infty \left(v \frac{\partial^2 \overline{v_x}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v_y v'_x} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z v'_x} \right) dy. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Considerando el segundo término con relación a la integración del producto de dos funciones $\int f dg$ y utilizando la notación $-\overline{v_*^2}$ para el cuarto término, tenemos:

$$\int_0^\infty \left(\overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x^2} \right) dy - v_e \int_0^\infty \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} dy + \int_0^\infty \overline{v_x} \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} dy - \int_0^\infty v_e \frac{dv_e}{dx} dy = -\overline{v_*^2}. \quad (7.3.7)$$

Sumando y restando el término $\int_0^\infty \overline{v_x} \frac{dv_e}{dx} dy$ y reagrupando:

$$\int_0^\infty \overline{v_x} \frac{\partial}{\partial x} (v_e - \overline{v_x}) dy + \int_0^\infty (v_e - \overline{v_x}) \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} dy - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_x^2} dy + \int_0^\infty (v_e - \overline{v_x}) \frac{dv_e}{dx} dy = \overline{v_*^2}, \quad (7.3.8)$$

donde las dos primeras integrales se compactan usando la fórmula de la derivada de un producto, en tanto que la derivada en la cuarta integral, no depende de la variable de integración y puede expresarse fuera de la integral. Entonces obtenemos, en lugar del balance de cantidad de movimiento de von Kármán, la siguiente **ecuación integral de movimiento**, aplicable a la capa límite turbulenta:

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \left[\overline{v_x} (v_e - \overline{v_x}) - \overline{v_x^2} \right] dy + \frac{dv_e}{dx} \int_0^\infty (v_e - \overline{v_x}) dy = \overline{v_*^2}, \quad (7.3.9)$$

donde la **velocidad de fricción turbulenta** $\overline{v}_*^2$ incorpora todos los efectos debidos a esfuerzos tangenciales, incluídos los de la turbulencia:

$$\overline{v}_*^2 = \int_0^\infty \left(-\overline{v} \frac{\partial^2 \overline{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_y v'_x} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z v'_x} \right) dy, \quad (7.3.10)$$

aunque podemos aproximar este parámetro por el valor de los esfuerzos en la pared:

$$\begin{aligned} \overline{v}_*^2 &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{v} \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} + \overline{v'_x v'_y} \right) dy + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z v'_x} dy = \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{v} \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} + \overline{v'_x v'_y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \overline{v'_z v'_x} dy = \left. \overline{v} \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} \right|_0 = \frac{\tau_0}{\rho}, \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

donde τ_0 ha sido definido en la Ecuación (6.2.33), en tanto que las fluctuaciones de las componentes de la velocidad, v'_x , v'_y y v'_z son nulas en la subcapa laminar que se forma muy cerca de la placa sólida, así como son cero tanto los esfuerzos viscosos como los turbulentos fuera de la capa límite, es decir, en el flujo externo, cuando $y \rightarrow \infty$.

8. Agitación y mezclado

8.1 Introducción

La composición química de los fluidos simples puede ser la de un compuesto puro, formado por una sola especie química o la de una mezcla de varias especies completamente miscibles, que forman una sola fase fluida. Esta mezcla constituye una mezcla homogénea cuando sus propiedades físicas y químicas son uniformes, es decir cuando no existen diferencias entre dos cualesquiera de las porciones del fluido en un sistema, sin importar qué tan lejanas se encuentren una de otra. Cuando ocurre lo contrario, es decir, cuando existen diferencias locales en las propiedades de una mezcla, decimos que la mezcla es heterogénea. Además decimos que existe un medio estratificado cuando su no-homogeneidad corresponde a un ordenamiento sencillo o tiene una estructura simple fácilmente reconocible, como por ejemplo la presentación de una bebida en un vaso, donde el fluido más denso reposa en el fondo y sobre él un líquido más ligero. En esta configuración tenemos una mezcla estratificada, en tanto que cuando se agita con suficiente energía, tiende a convertirse en una mezcla homogénea. Para que la reunión de varias especies químicas sea una mezcla homogénea se requiere evitar su estratificación, promoviendo la uniformidad de las propiedades de las especies químicas, como son sus propiedades parciales molares tales como el volumen y la presión, así como propiedades de la mezcla como la densidad y la temperatura, por medio de operaciones como la agitación, ya sea con accesorios mecánicos o con la energía cinética de los chorros de los componentes que se mezclan.

Cuando los compuestos de una mezcla no son todos completamente miscibles, existen varias fases en ella. Las fases fluidas son una fase gaseosa y las fases líquidas. También puede haber fases sólidas, formadas por pequeños granos que se dispersan en las fases fluidas. Para distinguir estas mezclas de las formadas por una sola fase fluida, mencionadas en el párrafo anterior, llamamos mezclas heterogéneas a las mezclas formadas por una o varias fases dispersas en una fase fluida continua, que en aplicaciones biotecnológicas se acostumbra llamar sustrato y en un lenguaje más general medio. Para que la reunión de varias fases sea una mezcla heterogénea se requiere evitar su estratificación, promoviendo la uniformidad de la dispersión de las fases discontinuas en el medio. Esta uniformidad tiene un significado distinto al de la uniformidad en mezclas homogéneas, puesto que en las mezclas homogéneas el nivel de uniformidad se refiere a las escalas de tamaño

donde es posible definir propiedades termodinámicas, como la temperatura o la concentración de una especie química ($10^{-8} m$), en tanto que la uniformidad en las mezclas heterogéneas se refiere principalmente al tamaño típico de las fases dispersas en la fase fluida continua (como ejemplo, digamos $10 d_p$ a $100 d_p$, donde d_p es la longitud característica de las **inclusiones**: burbujas, gotas o granos de la fase dispersa o de la separación media entre dos inclusiones).

Muchas veces se agita una mezcla para homogeneizarla, es decir, para eliminar diferencias locales en sus propiedades de interés, como puede ser su densidad, su concentración, su temperatura o la uniformidad de tamaño y distribución de las inclusiones, que podría referirse como la concentración de las fases, medida usualmente como fracción volumen de fase. El mezclado resulta del intercambio de lugar de pequeñas porciones de la mezcla, lo cual promueve el contacto de porciones de material que antes estaban separadas por grandes distancias. Recorrer esas distancias mediante mecanismos difusivos haría procesos de transferencia muy lentos, en tanto que con el movimiento turbulento de porciones de los fluidos y con la proximidad y el contacto de porciones inicialmente lejanas, tanto los efectos inerciales como los difusivos acentúan el transporte favoreciendo la uniformidad, tanto en el sentido de las mezclas homogéneas como en el de las heterogéneas.

El concepto de mezclado perfecto se refiere a la situación ideal de una mezcla o de un material que no tiene diferencias locales en sus propiedades de interés, es decir, que en cualquier punto tiene un único valor para cada una de estas propiedades. Dicho valor corresponde asimismo al de su punto de descarga o salida o al de cualquier muestra que se tome de algún punto del sistema. Los sistemas termodinámicos que analiza la termostática son sistemas equivalentes a los perfectamente mezclados.

Las características del mezclado están directamente asociadas a las estructuras turbulentas generadas por los dispositivos de agitación. En la escala más grande se da el macro-mezclado, que tiene que ver con los remolinos turbulentos de mayor tamaño, que son principalmente transportadores de energía cinética desde una región a otras del sistema, cuya escala de longitud compite con el tamaño del sistema. El macro-mezclado, conocido también como distribución, es una de las consecuencias del movimiento de estos remolinos más grandes. En el extremo pequeño de las estructuras turbulentas están los remolinos más pequeños, en el rango disipativo en el que se dan los mecanismos difusivos, tales como la disipación viscosa. En esta escala ocurre el micro-mezclado, que corresponde a los procesos de difusión de las especies químicas, la conducción de energía térmica, y el transporte viscoso de momentum. Entre los dos límites anteriores están los remolinos de los rangos intermedios, en los que ocurren mecanismos de dispersión hidrodinámica, gobernando procesos locales de interacción entre las inclusiones de las mezclas heterogéneas, que incluyen los de contacto directo inclusión-inclusión, así como los que se dan a través del medio, como interacción hidrodinámica, con resultados que modifican el tamaño de las inclusiones, como los procesos de ruptura, aglomeración, coalescencia, atrición, etc... En las mezclas homogéneas los remolinos de rangos intermedios contribuyen tanto al micro-mezclado como al macro-mezclado y generalmente se les asocia con el aspecto más sobresaliente de estos mecanismos, de acuerdo al interés de las aplicaciones.

8.2 Configuración de tanques agitados

La agitación del medio se puede efectuar al inyectar los componentes de la mezcla como chorros, dirigiéndolos hacia otros chorros o hacia obstáculos sólidos, que desmenuzan el chorro y lo dispersan en el medio. Puede agitarse también usando un medio fluido, como la inyección de un gas inerte con el propósito de mover el fondo de un recipiente, impidiendo la sedimentación o estratificación de las fases más densas de una mezcla heterogénea. Pueden emplearse agitadores mecánicos, llamados también impulsores, que son accesorios unidos a una flecha o eje axial, que al girar rápidamente transfieren energía cinética al medio y generan las estructuras turbulentas que promueven el mezclado. Los tanques agitados pueden tener también unas tiras de metal verticales,

sostenidas fijamente desde la pared lateral del tanque, que se conocen como deflectores, que funcionan para reducir la tendencia del fluido a circular de manera giratoria, siguiendo el movimiento del impulsor girando con el eje axial del tanque. Los deflectores se interponen obstruyendo la trayectoria circular del fluido y obligando al mismo a diversificarse en remolinos turbulentos; tienen un ancho entre $1/10$ y $1/12$ del diámetro del tanque. Los elementos que conforman un tanque agitado pueden apreciarse en la figura 8.1.

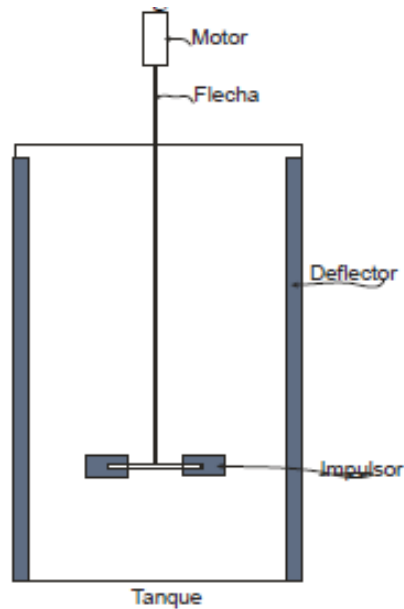


Figura 8.1: Configuración de un tanque agitado.

Hay una variedad de impulsores utilizados para el mezclado en tanques, algunas de cuyas formas geométricas podemos apreciar en la figura 8.2. Cada diseño es apropiado para un rango determinado de viscosidad del medio. La selección del impulsor depende también de la geometría del recipiente y de la sensibilidad del sistema a los esfuerzos cortantes. En la tabla 7.1 reportamos los rangos de operación de los impulsores representados en la figura 8.2.

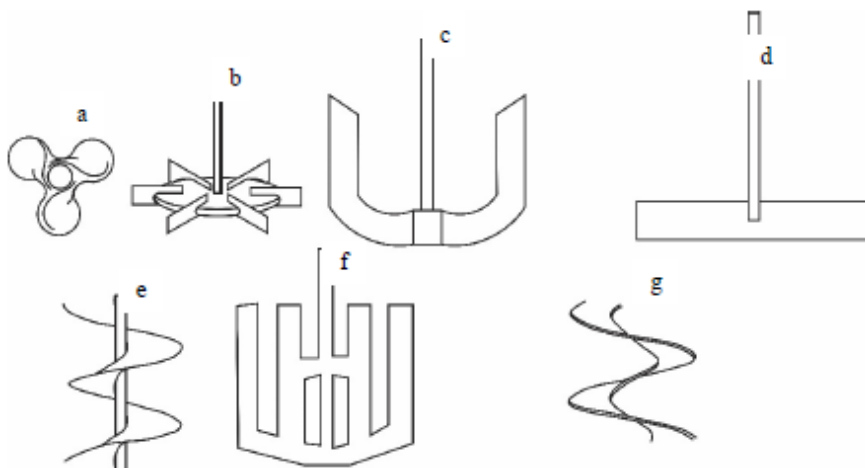


Figura 8.2: Geometría de los impulsores. (a) propela, (b) turbina, (c) ancla, (d) pala, (e) tornillo helicoidal, (f) ancla de compuerta y (g) listón helicoidal.

Tabla 8.1 Rango de viscosidad de los impulsores		
Impulsor	Rango de viscosidad $\times 10^3$ (Pa·s)	
Propela	1	10^4
Turbina de hojas planas	1	5×10^4
Anclas	10^2	3×10^3
Paletas	10^2	5×10^4
Anclas de compuerta	10^3	10^5
Tornillos helicoidales	5×10^3	5×10^5
Listones helicoidales	10^4	3×10^6

Los impulsores tienen usualmente un diámetro de alrededor de 1/3 del diámetro del tanque y se sujetan a una flecha sobre el eje axial del tanque cilíndrico.

8.3 Patrones de flujo en tanques agitados

Una de las principales características de los impulsores, que determina el tipo de flujo que proporciona al fluido en un tanque, es el ángulo de sus hojas o paletas, con respecto a la posición vertical. En las propelas y tornillos helicoidales dicha inclinación se conoce como *pitch* y se mide como la distancia vertical que avanza una vuelta completa del tornillo o de la propela.

Consideremos un tanque sin deflectores y un impulsor de hojas verticales que imparte movimiento angular y radial al fluido (de acuerdo a un sistema de coordenadas cilíndricas), lanzándolo hacia las paredes del recipiente por efecto de la fuerza centrífuga; la presión dinámica que se genera por esta fuerza centrífuga se equilibra al elevarse el nivel del líquido en las proximidades de la pared del tanque, aumentando la presión hidrostática. El resultado observable es un vórtice cuyo eje coincide con el de la flecha y el eje axial del tanque, como puede observarse en la figura 8.3.

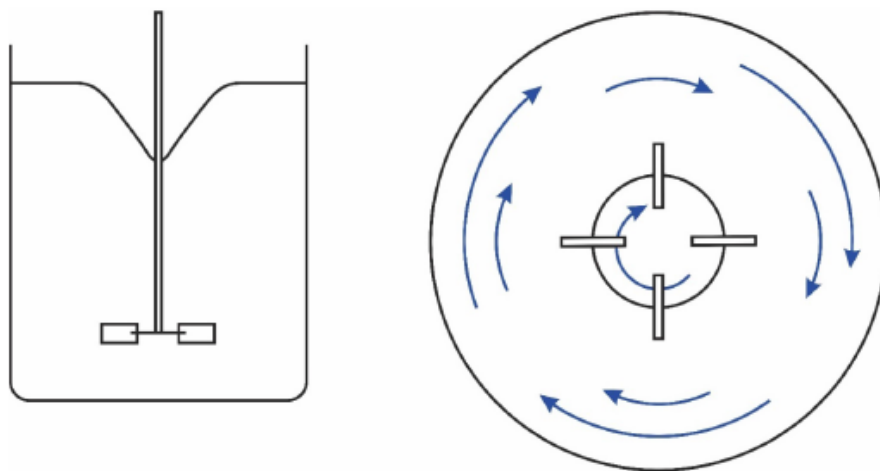


Figura 8.3: Patrón de flujo con impulsor de hojas verticales y sin deflectores.

La introducción de deflectores en el sistema anterior genera flujos secundarios en la dirección axial, tanto ascendente como descendente, según se aprecia en la figura 8.4. Además la obstrucción al movimiento angular introducida por los deflectores genera remolinos turbulentos en la parte posterior de los deflectores y ambos efectos contribuyen a una redistribución de las fuerzas, que destruyen el vórtice observado en ausencia de deflectores.

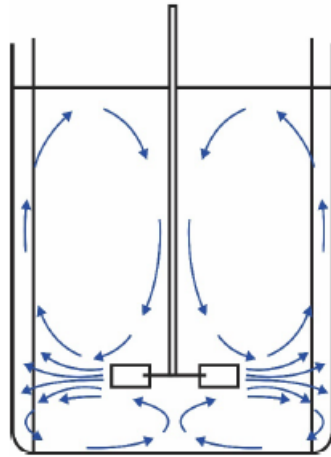


Figura 8.4: Patrón de flujo con deflectores e impulsor de hojas verticales.

Consideremos ahora el efecto de incorporar impulsores con hojas inclinadas un ángulo dado con respecto a la dirección vertical descendente. El efecto de la inclinación es dirigir el flujo cambiando su dirección de manera similar al efecto de un espejo sobre la luz, igualando el ángulo de incidencia al de reflexión. Por esto los impulsores de hojas inclinadas generan una componente axial de la velocidad, que es máxima cuando la inclinación es de 45° . En la figura 8.5 puede apreciarse el patrón de flujo que se produce al utilizar un impulsor de hojas inclinadas, con un ángulo de inclinación aproximado de 30° y con velocidad angular que sigue la regla de la mano derecha en el sentido de su rotación. La cara inferior del impulsor es la de alta presión, que impulsa al fluido hacia abajo, en tanto que la cara superior del impulsor es de baja presión y genera la succión del fluido hacia la zona del impulsor.

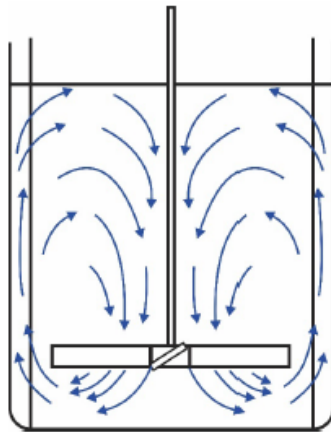


Figura 8.5: Patrón de flujo con deflectores e impulsor de hojas inclinadas, circulando en la dirección de giro de la regla de la mano derecha.

8.4 Tiempos característicos del mezclado

El mecanismo de distribución, como se ha referido arriba, está asociado a los remolinos turbulentos más grandes. Este mecanismo tiene también asociado un tiempo característico que puede encontrarse experimentalmente si consideramos la posibilidad de inyectar un pulso de algún trazador y seguirlo conforme se mezcla en el tanque. Necesitamos entonces detectar localmente

alguna propiedad del trazador en un punto del tanque, como su concentración, su coloración, su conductividad eléctrica o su pH . Al inicio el trazador será trasladado por los remolinos grandes, pasando en algún momento por la región que detecta el sensor, generando una señal del mismo. Luego el pulso viajará por otras regiones del sistema, hasta que vuelva a pasar por la región sensible al instrumento de medición y así otras veces más, pero conforme esto transcurre, el pulso irá perdiendo su identidad al irse desmenuzando en la cascada de los remolinos de menores tamaños que invaden la mayor parte del sistema, haciendo que persista parte de la señal del pulso en el sensor y provocando una señal más intensa cada vez que pasa lo que va quedando del pulso por la zona de detección.

Esta porción de la señal es cada vez más pequeña, como puede apreciarse en la figura 8.6, donde podemos identificar dos tiempos característicos. Uno de ellos es el **tiempo de circulación** t_c , el cual está asociado a una vuelta del pulso por la zona de detección. El otro es el **tiempo de mezclado** t_m que puede definirse como el tiempo necesario para que los cambios de la señal del pulso sean una cantidad menor al 10% del cambio final de la señal, debido al efecto de la adición del pulso. Existe relación entre el tiempo de circulación y el tiempo de mezclado, así, para un líquido en un tanque con desviadores y un impulsor pequeño se puede proponer que $t_m = 4t_c$. El diagrama de la figura 8.6 ejemplifica esta situación.

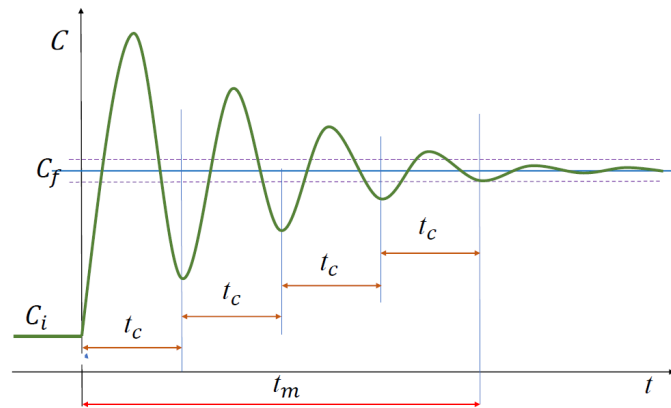


Figura 8.6: Señal de un pulso de concentración, desde un estado base inicial C_i , hasta un estado final con concentración C_f , detectadas por un sensor local de concentración, como función del tiempo. Se muestran dos tiempos característicos del mezclado, el tiempo de circulación, t_c y el tiempo de mezclado t_m , para un tanque con impulsor pequeño y desviadores, donde $t_m \approx 4t_c$.

El tiempo de mezclado se puede expresar como función del número de Reynolds del impulsor $Re_i = Nd_i^2/\nu$. En la Figura 8.7 se muestra dicha funcionalidad para un impulsor de turbina de Rushton de seis hojas en un tanque con desviadores. Puede notarse que cuando $Re_i > 5 \times 10^3$, el tiempo de mezclado adimensional es prácticamente constante. Su valor constante se ha estimado con la siguiente relación, debida a Kossen y Oosterhuis (1985):

$$Nt_m = 1.54 \frac{V}{d_i^3}, \quad \text{para } Re_i > 5 \times 10^3 \quad (8.4.1)$$

8.5 Potencia de tanques agitados

La potencia neta que se requiere para mantener un tanque en agitación se puede calcular a partir de su momento de torsión total, multiplicado por la velocidad angular de la flecha. El momento de torsión se puede encontrar por integración de la fuerza efectuada por las paredes del tanque

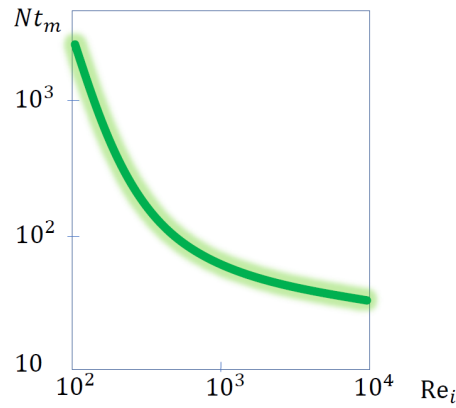


Figura 8.7: Tiempo de mezclado como función del número de Reynolds. Elaboración propia, siguiendo la traza de los puntos experimentales de Hoogendoorn CJ u den Hartog AP, 1967, *Chem. Eng. Sci.***22**, 1689-1699.

sobre el fluido, multiplicada por el brazo de palanca, desde el eje axial hasta el punto de aplicación de la fuerza, más la fuerza de presión de los deflectores sobre el fluido, multiplicada también por el brazo de palanca e integrada sobre la superficie de los mismos deflectores. Así tenemos que la componente axial del momento de torsión total es:

$$T_z = \delta_z \cdot \int_{S_p} \mathbf{R} \times (-\delta_r \cdot \boldsymbol{\pi})|_{\text{paredes}} dS_p = \int_{S_{\text{tanque}}} R \tau_{r\theta}|_{\text{pared}} dS + \int_{A_{\text{deflectores}}} R p|_{\text{superficie}} dA, \quad (8.5.1)$$

donde $\mathbf{R}(z)$ es el vector de posición de cualquier punto de la pared, con respecto al eje axial del tanque, $\boldsymbol{\pi}$ es el tensor de presiones o de esfuerzos totales, que tiene su parte de esfuerzos viscosos $\boldsymbol{\tau}$ y su parte de esfuerzos hidrostáticos $p\mathbf{I}$. La pared consta de dos superficies: **la pared del tanque**, con superficie S_{tanque} , donde los esfuerzos son principalmente tangenciales, debidos a los efectos viscosos y **la pared que corresponde a los deflectores**, con superficie $A_{\text{deflectores}}$, donde los esfuerzos son principalmente normales y corresponden a las fuerzas de **presión**. La potencia efectiva P impartida por el impulsor al fluido es:

$$P = NT_z = N \left(\int_{S_{\text{tanque}}} R \tau_{r\theta}|_{\text{pared}} dS + \int_{A_{\text{deflectores}}} R p|_{\text{superficie}} dA \right). \quad (8.5.2)$$

Esta expresión se puede adimensionalizar (Bird et al., ejercicio 6C.3), en conjunto con las ecuaciones de gobierno (ecuación de continuidad y ecuación de momentum lineal) para concluir que la potencia efectiva, expresada como el número de potencia N_P , se puede correlacionar como función del número de Reynolds, del número de Froude y de un tiempo adimensional:

$$N_P = \frac{P}{\rho N^3 d_i^5} = \Phi \left(\frac{N d_i^2}{\nu}, \frac{N^2 d_i}{g}, Nt \right). \quad (8.5.3)$$

Las correlaciones se pueden establecer a partir de experiencias en las que se mide la potencia para velocidades angulares dadas. Para fluidos newtonianos se ha visto que en la región laminar, el producto del número de potencia por el número de Reynolds es aproximadamente una constante, es decir que

$$Re_i N_P = k_1, \text{ para } Re_i < 10, \quad (8.5.4)$$

donde el subíndice i se refiere a la dimensión característica del diámetro del impulsor d_i , la cual es la longitud que más determina el flujo. Para flujos altamente turbulentos, el número de potencia es

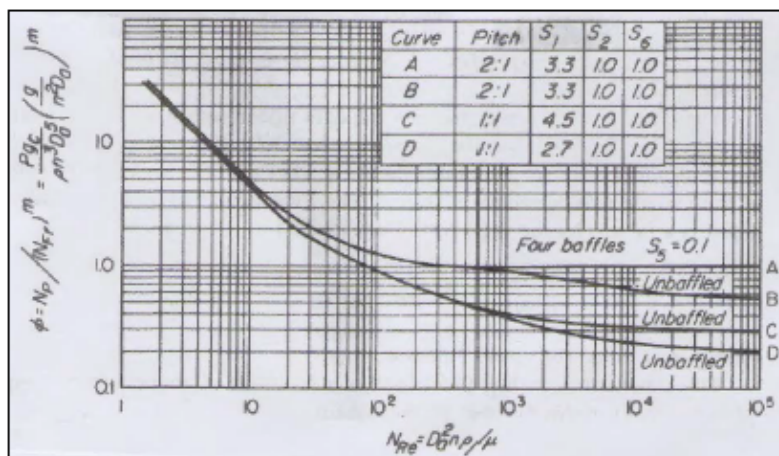


Figura 8.8: Potencia efectiva de algunos impulsores, en función del número de Reynolds. Tomada de McCabe, WL y Smith JC, 1976, *Unit Operations of Chemical Engineering*, pag. 238.

independiente del número de Reynolds, es decir que:

$$N_P = k_2, \text{ para } Re_i > 10^4. \quad (8.5.5)$$

En la Tabla 8.2 se presentan valores típicos de k_1 y k_2 para diversos impulsores.

Tabla 8.2 Valores típicos de k_1 y k_2 para diversos impulsores		
Impulsor	$k_1 (Re_i = 1)$	$k_2 (Re_i = 10^5)$
Turbina de Rushton	70	5 - 6
Paletas	35	2
Propela marina	40	0.35
Ancla	420	0.35
Listón helicoidal	1,000	0.35

Otras correlaciones se han determinado experimentalmente y se reportan en los manuales y libros sobre mezclado en tanques agitados, muchas veces en forma gráfica, como se muestra en la Figura 8.8. Algunos criterios de órdenes de magnitud indican una potencia de unos 10 kW/m^3 en recipientes pequeños, hasta unos 100 litros. En recipientes más grandes, hasta unos 100 m^3 , la potencia de agitación es de 1 a 2 kW/m^3 . La ecuación (8.5.3) también puede aplicarse a los fluidos no-newtonianos; basta para ello sustituir en el comportamiento apropiado, por ejemplo, para un fluido newtoniano generalizado, al explorar el capítulo 5, podemos ver que la ecuación (5.1.6), para la función de viscosidad η es:

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1}. \quad (8.5.6)$$

Aquí m es un coeficiente constante, conocido como el **índice de consistencia** y n es el **índice de comportamiento de flujo**. $\dot{\gamma}$ es el **parámetro de la rapidez de deformación**, también conocido como velocidad de corte.

Un número de Reynolds adecuado a los fluidos newtonianos generalizados (FNG) con movimiento angular, se puede expresar como:

$$Re_{ni} = \frac{\rho d_i^2 N}{m\dot{\gamma}^{n-1}}, \quad (8.5.7)$$

ver ejercicio (2.4-2), pero la rapidez de deformación $\dot{\gamma}$ se puede estimar en tanques agitados, por su proporcionalidad con la velocidad angular del impulsor N , de modo que

$$\dot{\gamma} = kN. \quad (8.5.8)$$

Algunos valores de k se reportan en la Tabla 8.3 y se pueden sustituir para redefinir el número de Reynolds generalizado como:

$$\text{Re}_{ni} = \frac{\rho d_i^2}{mk^{n-1}N^{n-2}}. \quad (8.5.9)$$

Tabla 8.3 Coeficientes k de la Ecuación (8.5.8)

Impulsor	k
Turbina de Rushton	10 - 13
Paletas	10 - 13
Paletas curvas	7.1
Propela	10
Ancla	20 - 25
Listón helicoidal	30

9. Energía cinética, trabajo y fricción

9.1 Fuerzas, potenciales y energía cinética de flujo

9.1.1 Balance local del ímpetu

Podemos entender el balance de momentum lineal, o balance del ímpetu, como un **balance de fuerzas**, es decir, como la extensión de la segunda ley de Newton a los cuerpos continuos, como son los fluidos y los sólidos extendidos. Este balance de fuerzas puede ser formulado en una forma reconocida como la **primera ley de Euler**:

La rapidez temporal de cambio del ímpetu de un cuerpo fluido es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo cuerpo.

Este enunciado, **aplicado a una partícula material o cuerpo puntual del fluido**, ξ , ver subsección 1.2.2, da lugar a la **primera ley de Cauchy** o balance del ímpetu para una partícula material ξ , en la forma de la ecuación (1.2.23), que se puede representar como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (9.1.1)$$

donde $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{a}$ es la **derivada material de la velocidad de flujo**, que corresponde a la **aceleración de la partícula material de fluido**, la cual puede denotarse por el símbolo vectorial $\mathbf{a}$. Entonces, la Ecuación (9.1.1), que está expresada en la forma de una relación intensiva, por unidad de volumen de fluido, puede leerse como:

el producto de la masa por la aceleración de una partícula ξ de fluido es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre la misma partícula.

Las fuerzas sobre un fluido puro en condiciones isotérmicas, son **la presión, las fuerzas viscosas y las fuerzas gravitacionales o externas**. El enunciado es similar a la segunda ley de Newton, aunque su aplicación al fluido debe entenderse como “*fuerzas aplicadas a cualquier partícula material de fluido, por unidad de volumen*“. La ecuación (9.1.1) ha resultado del escalamiento a un volumen unitario, por lo que la masa de la partícula de fluido se encuentra dividida por su volumen y

así, aparece la densidad local ρ , en vez de la masa de la partícula ξ . De manera congruente con este escalamiento, la aplicación local de las fuerzas sobre la partícula material del fluido, corresponde a las derivadas locales de los esfuerzos intrínsecos (la presión) y los esfuerzos viscosos en las formas vectoriales que corresponden al gradiente y la divergencia, respectivamente, con lo cual, los términos ∇P y $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ también pueden entenderse como **densidades locales de fuerza neta** sobre la partícula material ξ , cuyas unidades son de *fuerza/volumen*, al igual que el término de la fuerza de gravedad ρg .

Otro aspecto de la ecuación (9.1.1) que también es importante observar, es aquel que relaciona al balance del ímpetu con la existencia de **variables de estado y variables de proceso**, de la termodinámica clásica. Así, la ecuación (9.1.1) presenta un arreglo de términos, de tal manera que del lado izquierdo de la igualdad se representa la **rapidez de los cambios de una variable de estado mecánico: el ímpetu** de la partícula material ξ . Este término corresponde al producto de la masa de ξ , que es constante, por la derivada material del ímpetu por unidad de masa, que equivale a la aceleración de la partícula. La expresión es intensiva porque está normalizada, al dividir la masa de ξ del lado izquierdo por el volumen de la partícula; en tanto que, del lado derecho se representan los **procesos de transporte** que producen los cambios de estado expresados, como se ha dicho, del lado izquierdo de la igualdad. Los procesos de transporte corresponden a **los flujos netos locales de momentum intrínseco y viscoso, y se conocen también como las fuerzas intrínseca y viscosa**, que se aplican desde los alrededores sobre el cuerpo ξ y equivalen a la proyección del operador diferencial $\nabla \cdot$ sobre las densidades (de área) del **momentum intrínseco y del momentum viscoso**, que actúan sobre la partícula material ξ de fluido, de acuerdo con el significado de los operadores diferenciales del gradiente y la divergencia, más la acción de los **campos de fuerzas externas** que actúan sobre la masa de ξ , por unidad de volumen.

9.1.2 Composición de la aceleración

La aceleración de la partícula material de fluido, ξ , es la derivada material de la velocidad (ver subsección 1.2.2):

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\xi} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (9.1.2)$$

que se puede expresar de otra forma, al tener presente la igualdad vectorial:

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (9.1.3)$$

y al aplicar esta ecuación (9.1.3) en (9.1.2), podemos representar la aceleración en sus tres componentes, que son:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}, \quad (9.1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \text{aceleración local, en un punto fijo del espacio.} \\ \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) &= \text{gradiente de la energía cinética por unidad de masa, y} \\ (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} &= \text{aceleración de Coriolis, donde } \mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}, \text{ es la vorticidad.} \end{aligned}$$

La ecuación (9.1.4) puede sustituirse en el lado izquierdo de la ecuación (9.1.1).

Ejercicios**E.9.1.2-1. Demostración.**

Convéncete de la igualdad (9.1.3), al expresar y desarrollar el lado izquierdo de la igualdad en sus componentes rectangulares y luego reordenar los términos en la forma que equivalen a los del lado derecho.

9.1.3 Fuerzas conservativas

Una fuerza $\mathbf{f}$ es conservativa cuando sus valores no dependen de la trayectoria seguida, sino únicamente de los puntos inicial y final. Por ello puede ser expresada como el gradiente de un potencial escalar ψ , es decir que si

$$\mathbf{f} = \nabla \psi, \quad (9.1.5)$$

entonces $\mathbf{f}$ es una fuerza conservativa. Una propiedad matemática del operador rotacional es que el rotacional de un gradiente es cero. Por ello, si ψ es una función escalar continua, ocurre que

$$\nabla \times (\nabla \psi) = 0. \quad (9.1.6)$$

En la ecuación (9.1.1), hay dos términos de fuerzas que pueden expresarse como gradientes de un potencial, y luego pueden agruparse como fuerzas conservativas. El primero de ellos es el gradiente de la presión, ∇P , que ya se encuentra expresado como una fuerza conservativa, considerando que la presión es un campo continuo $P(\mathbf{x})$. El otro, cuando las fuerzas externas son conservativas, como la fuerza de gravedad, para un número muy importante de aplicaciones, donde se puede expresar como el gradiente de un potencial gravitacional, es decir cuando

$$\mathbf{f} = -\nabla \hat{\phi}_G = -\nabla gh(\mathbf{x}), \quad (9.1.7)$$

donde $h(\mathbf{x})$ es la altura vertical ascendente, en función del vector de posición $\mathbf{x}$. El potencial gravitacional $\hat{\phi}_G = gh(\mathbf{x})$ tiene dimensiones de $[\text{longitud}^2/\text{tiempo}^2]$, o de $[\text{fuerza} \times \text{longitud}/\text{masa}]$ o, de manera equivalente, de $[\text{energía}/\text{masa}]$. Así, en la ecuación (9.1.1) tenemos un segundo gradiente, que puede ser también expresado por medio del potencial gravitacional, de modo que, sustituyendo la aceleración (9.1.4) y el potencial gravitacional (9.1.7), reordenando y dividiendo entre la densidad ρ , tenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} - \nabla(gh). \quad (9.1.8)$$

Cuando el flujo es incompresible, la densidad es constante y se puede introducir directamente en el gradiente de la presión y en la divergencia del tensor de esfuerzos viscosos. Sin embargo en los flujos compresibles, para fluidos puros en condiciones isotérmicas, es decir, cuando

$$\rho = \rho(P), \quad (9.1.9)$$

es conveniente considerar el gradiente

$$\nabla \hat{\phi}_P = \nabla \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho}, \quad (9.1.10)$$

que representa procesos no-isobáricos en flujos compresibles. Esta expresión vectorial contiene tres igualdades escalares, que se evidencian al multiplicarla por sus vectores unitarios correspondientes en un sistema de coordenadas ortogonales. A cada uno de los términos escalares se puede aplicar

la regla de Leibniz, para derivar bajo el signo de la integral. Al hacerlo y luego representar los términos en su composición vectorial resulta:

$$\nabla \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} = \int_{P_0}^P \nabla \frac{1}{\rho} dP - \frac{\nabla P_0}{\rho(P_0)} + \frac{\nabla P}{\rho(P)}; \quad (9.1.11)$$

pero ρ sólo depende de P , la presión termodinámica, de modo que el primer término del lado derecho es cero. Además, P_0 es constante, de modo que se obtiene la igualdad:

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho}, \quad (9.1.12)$$

que nos permite ver que el término del lado derecho representa tanto los flujos compresibles como los incompresibles.

Ejemplo: La gravedad como fuerza conservativa.

La fuerza de gravedad, $\mathbf{g}$ está dirigida hacia el centro de la tierra, es decir, en la dirección vertical descendente. Su magnitud es la constante gravitacional, $g = 9.81 \text{ [N/kg]}$, de modo que, si $\mathbf{e}$ es un vector unitario en la dirección vertical descendente, entonces $\mathbf{g} = g\mathbf{e}$.

Para representar a $\mathbf{g}$ en cualquier sistema coordenado, basta descomponer $\mathbf{e}$ en sus componentes en dicho sistema. Consideremos, en particular, un sistema de coordenadas rectangulares $\{x, y, z\}$, en el cual $\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{g} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{i})g\mathbf{i} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j})g\mathbf{j} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})g\mathbf{k}. \quad (9.1.13)$$

Consideremos, en particular, un sistema coordenado rectangular, en el cual las coordenada x y y generan planos horizontales, en tanto que la coordenada z se asocia a la dirección vertical ascendente, es decir que $\mathbf{e} = -\mathbf{k}$. Entonces, la ecuación (9.1.13) toma la forma particular

$$\mathbf{g} = (-\mathbf{k} \cdot \mathbf{i})g\mathbf{i} + (-\mathbf{k} \cdot \mathbf{j})g\mathbf{j} + (-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})g\mathbf{k} = -g\mathbf{k}. \quad (9.1.14)$$

Por otra parte, consideremos la ecuación (9.1.7), donde la fuerza externa $\mathbf{f}$ es la gravedad $\mathbf{g}$, la cual se asocia con un potencial gravitacional, entonces

$$\mathbf{g} = -\nabla \hat{\phi}_G = -g\nabla h(x, y, z). \quad (9.1.15)$$

De la comparación de (9.1.14) con (9.1.15), vemos que debe ser $\mathbf{k} = \nabla h$:

$$\nabla h(x, y, z) = \mathbf{i} \frac{\partial h}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial h}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial h}{\partial z} = \mathbf{k}, \quad (9.1.16)$$

expresión vectorial que corresponde a tres igualdades escalares, una en cada una de las direcciones de los ejes coordenados, es decir que, en el sistema coordenado propuesto,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0, \rightarrow h \text{ no depende de } x \quad (9.1.17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0, \rightarrow h \text{ no depende de } y \quad (9.1.18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 1 \rightarrow h \text{ sí depende de } z. \quad (9.1.19)$$

Por lo tanto, la derivada parcial en z se puede considerar como derivada ordinaria, que se integra para dar:

$$\frac{dh}{dz} = 1 \rightarrow h(x, y, z) = z + h_0, \quad (9.1.20)$$

donde h_0 es una constante, que puede tomarse como cero, o como un valor de referencia constante. Regresando a la ecuación (9.1.15), vemos que, en el sistema coordenado propuesto, $\hat{\phi}_G = gh(x, y, z) = gz$, donde se cumple que $\mathbf{g} = -\nabla \hat{\phi}_G = -g\mathbf{k}$.

Ejercicios**E.9.1.3-1. Rotacional del gradiente de un campo escalar.**

Utilizando coordenadas rectangulares, desarrolla el lado izquierdo de la ecuación (9.1.6), para convencerte de que es igual a cero.

E.9.1.3-2. Potencial gravitacional para componentes iguales de $\mathbf{g}$.

Otro caso particular de la representación de $\mathbf{g}$ en la forma de un potencial gravitacional, ocurre cuando las proyecciones del vector $\mathbf{e}$ en los ejes coordenados, son iguales. Es decir, cuando $\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$ es tal que $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{k}) = \alpha$, ya que entonces $\mathbf{e} = \alpha(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Encuentra el valor de α , recordando que $\mathbf{e}$ es un vector unitario. Sigue el desarrollo del ejemplo anterior, para encontrar el potencial gravitacional en este sistema de coordenadas rectangulares.

E.9.1.3-3. Potencial gravitacional en un tubo horizontal.

Repite el razonamiento del ejemplo de la gravedad como fuerza conservativa, para el caso de un tubo horizontal, descomponiendo $\mathbf{g}$ en sus componentes cilíndricas polares, de modo que $\mathbf{g} = (g_r, g_\theta, g_z)$. La dirección de la fuerza de gravedad es una entidad física que se dirige hacia el centro de la tierra, en la dirección vertical descendente, cuyo vector unitario es $\mathbf{e}$. Los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados (r, θ, z) son $(\boldsymbol{\delta}_r, \boldsymbol{\delta}_\theta, \boldsymbol{\delta}_z)$, de modo que $\mathbf{e}$ se puede expresar en sus componentes cilíndricas polares como $\mathbf{e} = (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\delta}_r)\boldsymbol{\delta}_r + (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\delta}_\theta)\boldsymbol{\delta}_\theta + (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\delta}_z)\boldsymbol{\delta}_z$, y se pueden encontrar las proyecciones del vector unitario $\mathbf{e}$ en las direcciones de los ejes coordenados, así como la expresión del gradiente, ecuación (A.7-5) del Bird¹

9.1.4 Potencial de Bernoulli

Podemos definir el **potencial de Bernoulli** como:

$$\hat{\phi}_B = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + gh(\mathbf{x}), \quad (9.1.21)$$

que es la suma de la energía cinética de flujo por unidad de masa, $\frac{1}{2}v^2$, del potencial intrínseco, determinado por la ecuación (9.1.10), y del potencial gravitacional $\hat{\phi}_G$ definido por la ecuación (9.1.7). Cada uno de los potenciales anteriores tiene las dimensiones de [energía/masa], por lo cual,

EL POTENCIAL DE BERNOULLI TAMBIÉN SE CONOCE COMO LA ENERGÍA TOTAL DE UN FLUIDO DE MASA UNITARIA, EN CONDICIONES ISOTÉRMICAS,

sin embargo, **en esta identificación del potencial de Bernoulli con la energía total** del fluido², la energía total E no debería entenderse como una variable del estado cinético, puesto que es la suma de una **variable de estado**: la energía cinética de flujo, más la suma de dos términos que representan **procesos de transporte**, realizados por las fuerzas de presión y 'por las fuerzas externas, como se ha discutido en la sección 1.2.2 y aquí mismo. Así,

EL PRIMER TÉRMINO DE $\hat{\phi}_B$ CORRESPONDE A UNA VARIABLE DE ESTADO, PUES ES LA ENERGÍA CINÉTICA POR UNIDAD DE MASA, EN TANTO QUE EL POTENCIAL INTRÍNSECO $\hat{\phi}_P$ Y EL POTENCIAL GRAVITACIONAL $\hat{\phi}_G$ SON CANTIDADES CUYOS GRADIENTES CORRESPONDEN A LAS FUERZAS QUE REALIZAN TRABAJO SOBRE EL FLUIDO.

¹Pag. 975. Es conveniente revisar las secciones A.6 y A.7 del Bird, referentes al uso de las coordenadas cilíndricas polares, para resolver este ejercicio, siguiendo los procedimientos del ejemplo resuelto arriba.

²Dicha energía total por unidad de volumen, E , se ha definido, por ejemplo en Enzo Levi (1965), Pag. 56, ecuación (27.5). En la sección 6.1 del presente texto, definimos la energía total del flujo por unidad de masa $\hat{E}$, para flujos ideales y desarrollamos un procedimiento para encontrar la ecuación de Bernoulli.

Además, en muchas aplicaciones, es posible definir una densidad media $\bar{\rho}$ para el término viscoso, e introducirla en las derivadas, para tener, finalmente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\hat{\phi}_B) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\bar{\rho}} \right). \quad (9.1.22)$$

La forma escalar de la razón $\sqrt{\boldsymbol{\tau}/\rho}$, evaluada en la frontera con una superficie sólida se ha llamado velocidad de fricción, v_* al final de la sección 6.2, se ha usado extensivamente en el tratamiento fenomenológico de los flujos turbulentos y corresponde al flujo de momentum viscoso. Entonces, las ecuaciones de movimiento del fluido newtoniano compresible se pueden escribir en términos del potencial de Bernoulli, $\hat{\phi}_B$, Ecuación (9.1.21) como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \hat{\phi}_B + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\lambda + \mu}{\bar{\rho}} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (9.1.23)$$

Para flujos incompresibles, la ecuación 9.1.23 se simplifica, quedando:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \hat{\phi}_B + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (9.1.24)$$

En los flujos estacionarios el primer término es cero y la suma los términos estacionarios se reduce a dos cuando $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, lo cual ocurre en tres casos: (1) cuando la vorticidad $(\nabla \times \mathbf{v})$ es paralela al campo de velocidad $\mathbf{v}$, que es cuando los flujos son llamados flujos de Beltrami, (2) si el primer factor es cero, que corresponde a flujos irrotacionales o de Bernoulli, $(\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ o (3) cuando los fenómenos son hidrostáticos, es decir, cuando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejercicios

E.9.1.4-1. Flujos de Bernoulli.

Los flujos de Bernoulli estacionarios satisfacen la condición $\hat{\phi}_B = \text{constante}$. Encuentra las condiciones que debe satisfacer el flujo de un fluido newtoniano incompresible, para que se comporte como un flujo de Bernoulli estacionario.

E.9.1.4-2. Campos vectoriales de Beltrami.

Si $\mathbf{v}$ es un campo paralelo a la vorticidad $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$, es decir, un campo de Beltrami³, encuentra las tres relaciones escalares entre las tres componentes rectangulares de la velocidad y sus derivadas espaciales.

9.1.5 La presión modificada como un potencial de fuerza

Si tomamos los dos últimos términos del potencial de Bernoulli para los flujos incompresibles, ecuación (9.1.21), y los multiplicamos por la densidad del fluido, podemos definir la conocida **presión modificada** $\mathcal{P}$, como

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + \rho g h(\mathbf{x}), \quad (9.1.25)$$

que es un potencial de fuerza, cuyas dimensiones son de $[\text{energía}/\text{volumen}]$ o de $[\text{fuerza}/\text{área}]$. Este potencial es la suma de dos potenciales, el intrínseco y el gravitacional, cada uno de ellos multiplicado por la densidad, lo cual lo presenta como una cantidad escalada en el volumen de la partícula material de fluido, en vez del escalamiento en su masa, a semejanza del potencial de Bernoulli (9.1.21).

La presión modificada equivale al potencial de Bernoulli en condiciones hidrostáticas, es decir, cuando la velocidad de flujo es cero, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En tal caso $\mathcal{P} = \rho \hat{\phi}_B$, de modo que el **balance del ímpetu para los flujos incompresibles**, ecuación (9.1.24), en **condiciones hidrostáticas** resulta

³Ver Enzo Levi (1965), Pag. 80

en la ecuación (1.2.32), que también se puede expresar como la ecuación (9.1.26), empleando la definición de la presión modificada (9.1.25), con lo cual resulta:

$$\nabla \mathcal{P} = 0, \quad (9.1.26)$$

que se conoce como la ecuación general de la hidrostática, cuya integración indica que el potencial, en condiciones hidrostáticas, permanece constante, es decir, que

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}_0, \quad (9.1.27)$$

de modo que,

EN CONDICIONES HIDROSTÁTICAS, EL EFECTO DE LA GRAVEDAD ES EXACTAMENTE COMPENSADO POR EL CAMBIO DE LA PRESIÓN DEL FLUIDO.

Ejercicios

E.9.1.5-1. Componentes de la gravedad y de la velocidad.

Fluye una película uniforme de agua por un plano inclinado debido al efecto de la gravedad terrestre. Si el ángulo de inclinación con respecto a la vertical es $\alpha < \pi/2$,

- (1) Elige un sistema de coordenadas rectangulares, con un eje paralelo a la dirección de la velocidad y expresa las componentes de la fuerza de gravedad y las componentes de la velocidad distintas de cero.
- (2) Elige un sistema coordenado rectangular con un eje vertical ascendente y expresa nuevamente, las componentes rectangulares de la fuerza de gravedad y de la velocidad, distintas de cero.
- (3) Invierte el sentido del eje que corre en la dirección de la velocidad y representa las componentes rectangulares de los dos vectores anteriores, es decir de $\mathbf{g}$ y de $\mathbf{v}$.

E.9.1.5-2. Presión hidrostática en un tubo horizontal.

Un tubo cilíndrico en posición horizontal se encuentra lleno de agua.

- (1) Asocia un sistema de coordenadas cilíndricas con el eje axial coincidente con el eje del tubo, el eje radial, desde $r = 0$ en el centro del tubo, hasta $r = R$ en la pared del tubo y el ángulo $\theta = 0$ en la dirección vertical ascendente, desde el centro del tubo.
- (2) Indica cuáles son las componentes (g_r, g_θ, g_z) de la aceleración de la gravedad, como funciones de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y de la constante gravitacional.
- (3) Encuentra la presión intrínseca $p(r, \theta, z)$ sobre la pared interna del tubo, como función de θ , sabiendo que $p(r = R, \theta = 0, z) = p_0$, para cualquier valor de z .

9.1.6 Presión estática y presión dinámica

Otro caso particular del uso del potencial de Bernoulli ocurre cuando el potencial gravitacional es constante, es decir cuando $h(\mathbf{x}) = h_0$. Entonces, para flujos ideales incompresibles, en condiciones estacionarias, donde es posible despreciar los efectos viscosos y seguir sobre líneas de flujo, donde $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0$, resulta que

$$\rho \hat{\phi}_B = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p = \text{constante}. \quad (9.1.28)$$

Esta ecuación es la base para el desarrollo de algunos instrumentos de medición de flujo, donde la estimación de la velocidad de flujo se estima a partir del conocimiento de la presión, como en el tubo de Pitot, que es un instrumento para determinar la **velocidad local de flujo**, ver figura 9.1. El tubo de Pitot es un instrumento con dos orificios muy cercanos a una posición dada $\mathbf{x}$. Requiere determinar dos presiones, medidas en $\mathbf{x}$; una de ellas es la fuerza perpendicular a la dirección del flujo y la otra es una fuerza tangencial al mismo flujo. Esto se logra, aproximadamente, seleccionando la orientación de los dos orificios inmersos en el flujo, de modo que uno de ellos

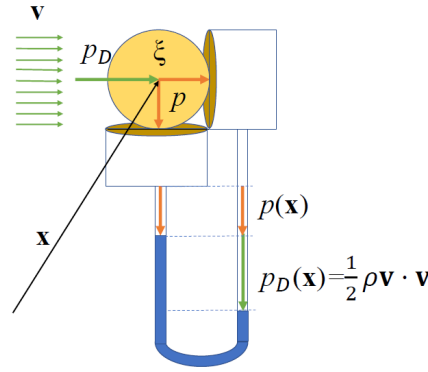


Figura 9.1: El tubo de Pitot mide la presión total del fluido en un punto $\mathbf{x}$, en dos direcciones; en la dirección horizontal la presión es la suma de la presión dinámica $p_D(\mathbf{x})$ más la presión intrínseca o interna, $p(\mathbf{x})$, en tanto que en la rama vertical la presión es únicamente la presión intrínseca, $p(\mathbf{x})$.

es tangencial a la dirección del flujo, en tanto que el otro es normal a dicha dirección. El orificio tangencial determina la presión estática del fluido, $p(\mathbf{x})$; en cambio, el orificio cuya sección transversal es normal a la dirección del flujo, determina la presión total, $p_T(\mathbf{x})$, que es la suma de **la presión estática p más la presión dinámica, p_D** . Esta última, la p_D , corresponde a la diferencia de alturas del manómetro mostrado en la figura 9.1, debida al empuje ejercido por la energía cinética del flujo, es decir que

$$p_T(\mathbf{x}) = p_D(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \rho v^2(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}), \quad (9.1.29)$$

donde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ es el cuadrado de la magnitud de la velocidad, en este caso alineada con la coordenada horizontal. Entonces la magnitud de la velocidad local resulta, al despejarla en la ecuación (9.1.29):

$$v = \sqrt{\frac{2[p_T(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})]}{\rho}}. \quad (9.1.30)$$

Ejercicios

E.9.1.6-1. Velocidad con un tubo de Pitot

Un flujo de aire a condiciones de la ciudad de México (590 mmHg y 20°C), se mide con un tubo de Pitot, cuyo líquido manométrico es etilenglicol. La diferencia de alturas del líquido entre las ramas del manómetro en U es de 100 mm. Determina la velocidad local del aire en el punto de medición.

9.2 Fuerzas conservativas, rapidez de trabajo y vector de potencia

9.2.1 Rapidez de trabajo mecánico y fuerzas conservativas

Una manera de probar que un campo vectorial continuo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es conservativo, consiste en aplicarle el operador rotacional y comprobar que es cero, es decir que $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Esto nos permite asegurar que las fuerzas representadas por el potencial de Bernoulli son conservativas, ya que una propiedad del operador vectorial gradiente es que su rotacional es cero, es decir que $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$, para todo campo continuo ϕ .

De lo anterior, sabemos que

LAS FUERZAS CORRESPONDIENTES AL POTENCIAL DE BERNOULLI, $\hat{\phi}_B$, SON FUERZAS CONSERVATIVAS.

La principal propiedad de las fuerzas conservativas es que **su integración, de un punto $\mathbf{x}_A$ a un punto $\mathbf{x}_B$ cualesquiera, no depende de la trayectoria entre estos límites, sino únicamente de los valores de la fuerza en los límites de integración.**

Podemos obtener una forma alternativa de la **ecuación de la energía mecánica** al efectuar el producto punto de la velocidad de flujo por el balance local de fuerzas (9.1.22), de donde resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \hat{\phi}_B - \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho} \right). \quad (9.2.1)$$

Puesto que las fuerzas conservativas no dependen de las trayectorias de integración, podemos concluir que la rapidez del trabajo efectuado por dichas fuerzas conservativas es, necesariamente, trabajo mecánico; es decir, es un término que se manifiesta íntegramente en el movimiento local del fluido, de modo que la ecuación (9.2.1) se puede verbalizar diciendo que

LA RAPIDEZ DE TRABAJO QUE EFECTÚAN LAS FUERZAS CONSERVATIVAS DEL POTENCIAL DE BERNOULLI, SUMADA A LA RAPIDEZ DE TRABAJO QUE REALIZAN LAS FUERZAS VISCOSAS, ES EQUIVALENTE A LA RAPIDEZ DE CAMBIO DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE FLUJO EN CUALQUIER PUNTO FIJO DEL SISTEMA.

9.2.2 Vector de potencia local de los esfuerzos moleculares

Recordemos que $\boldsymbol{\pi}$, cuyas dimensiones son las de [fuerza/área], representa el **tensor de los esfuerzos moleculares** que se ejercen sobre un cuerpo fluido $\mathcal{C}$, en cualquier punto de la superficie de su frontera. También $\boldsymbol{\pi}$ se puede entender como una **densidad de flujo de momentum molecular** en dicho punto de la frontera de $\mathcal{C}$. $\boldsymbol{\pi}$ se compone de dos términos: los esfuerzos hidrostáticos, que corresponden a la presión o fuerza intrínseca y los esfuerzos viscosos, de modo que $\boldsymbol{\pi} = P\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}$.⁴ La proyección del tensor de los esfuerzos moleculares en la dirección de la velocidad de flujo local, multiplicado por la magnitud de la misma velocidad, corresponde al producto punto de estas dos cantidades y define lo que podemos llamar

EL VECTOR DE LA DENSIDAD DE POTENCIA LOCAL DE LOS ESFUERZOS MOLECULARES, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}$, CUYAS DIMENSIONES SON DE [POTENCIA/ÁREA], ES EL VECTOR QUE DETERMINA LOS ESTADOS DE LA POTENCIA LOCAL SUMINISTRADA POR LOS ESFUERZOS MOLECULARES SOBRE CUALQUIER PARTÍCULA MATERIAL ξ .

En esta definición, *los estados de la potencia local* es un término que se refiere a la capacidad del vector de potencia para determinar la potencia en un punto, que corresponde a la orientación de una superficie dada en ese mismo punto, de una manera análoga a lo que ocurre con los estados de esfuerzos, que son determinados por el tensor de los esfuerzos moleculares⁵.

Ejercicios

E.9.2.2-1. Análisis dimensional de $\boldsymbol{\omega}$.

- (1) Haciendo el análisis dimensional, convéncete de que las dimensiones de $\boldsymbol{\omega}$ son las de *potencia/área*.
- (2) Justifica el nombre de $\boldsymbol{\omega}$ como el *vector de densidad de potencia local de los esfuerzos moleculares*, es decir, (i) ¿por qué es un vector, si la potencia es un escalar? *Sugerencia:* ¿por

⁴Revisar la sección 1.2 del Bird, Pags. 17 y 18.

⁵El tensor de los esfuerzos moleculares es un tensor de segundo orden, capaz de representar las fuerzas de presión y viscosas ejercidas, cuando el tensor se proyecta en la dirección específica de alguna superficie considerada. Ver nuevamente el Bird, Pags. 17 y 18, en especial el texto referente a la figura 1.2-1 de dicho libro.

qué los esfuerzos moleculares son un tensor (de segundo orden) si las fuerzas o esfuerzos moleculares son vectores? (ii) ¿qué hace que $\boldsymbol{\omega}$ sea una densidad? (iii) ¿por qué tiene dimensiones de potencia? (iv) ¿por qué es local? (v) ¿qué entiendes por la potencia asociada a una fuerza?

E.9.2.2-2. Potencia asociada a una gota de lluvia.

- (1) Una gota esférica de lluvia de 2 mm de diámetro cae verticalmente en el aire, a su velocidad terminal. Ver la subsección 11.2.6. Suponiendo que el flujo de aire a su alrededor es laminar, ¿cuáles son su velocidad terminal y su número de Reynolds?
- (2) Otra gota esférica de lluvia, cuyo número de Reynolds es $Re = 5$ cae también a su velocidad terminal. Con estos datos calcula su velocidad terminal y su diámetro y luego encuentra su vector de potencia local $\boldsymbol{\omega}$, en el sistema coordenado de la figura 11.4, donde la gravedad actúa en la dirección $-\delta_z$.
- (3) Elabora una lista de las suposiciones que requiere el cálculo del inciso anterior. Una de dichas suposiciones sería que la gota no se deforma, otra suposición sería que para el valor del Re de 5, el flujo alrededor de la gota todavía se pueda considerar laminar.

9.2.3 Flujo de potencia local de los esfuerzos moleculares

La integración del vector de potencia local de los esfuerzos moleculares, $\boldsymbol{\omega}$, en una superficie cerrada $\mathcal{S}(t)$, que encierra una región tridimensional $\mathcal{V}(t)$, correspondiente a un cuerpo $\mathcal{C}$ de fluido, cuya normal unitaria exterior es $\mathbf{n}$, conduce a encontrar la **potencia** P_o comunicada por los alrededores sobre dicho cuerpo $\mathcal{C}$, es decir que

$$P_o = \oint_{\mathcal{S}(t)} -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} dS = \oint_{\mathcal{S}(t)} -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (9.2.2)$$

es la **potencia suministrada por los esfuerzos moleculares al cuerpo** $\mathcal{C}$, donde podemos decir que

LA POTENCIA P_o , SUMINISTRADA A UN CUERPO $\mathcal{C}$ POR LOS ESFUERZOS MOLECULARES, ES LA INTEGRAL DE ÁREA DE LA PROYECCIÓN DEL VECTOR DE DENSIDAD DE POTENCIA DE LOS ESFUERZOS MOLECULARES, $\boldsymbol{\omega}$, ENTRANDO POR LA SUPERFICIE CERRADA DEL CUERPO.

Por el teorema de la divergencia, podemos igualar la integral (9.2.2) con una integral sobre la región tridimensional ocupada por el mismo cuerpo fluido, es decir,

$$\oint_{\mathcal{S}(t)} -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} dS = \int_{\mathcal{V}(t)} -\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV. \quad (9.2.3)$$

En este punto, **volvemos a la descripción de un sistema local**, representado por una partícula material de fluido, ξ , y nos preguntamos, ¿Cómo podemos expresar el flujo local hacia, o desde, una partícula material de fluido? La expresión (9.2.3) puede ilustrar la respuesta, si pensamos en una sucesión de volúmenes, cada vez más pequeños, y seguimos un procedimiento para tomar el límite de dicha sucesión, cuando su volumen tiende a cero. En efecto, consideremos una región pequeña $\Delta\mathcal{V}(t)$, con un volumen pequeño ΔV , que preserve la forma de la sucesión de volúmenes y está limitado por la superficie $\Delta\mathcal{S}(t)$, ver figura 9.2. En este caso la función-integrando de la integral en volumen se puede expresar como el producto de algún valor de dicha función al interior de la región $\Delta\mathcal{V}(t)$, por el volumen de la región, de acuerdo con el teorema del valor medio para funciones acotadas, de modo que

$$-\overline{\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}} \int_{\Delta\mathcal{V}(t)} dV = \oint_{\Delta\mathcal{S}(t)} -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} dS. \quad (9.2.4)$$

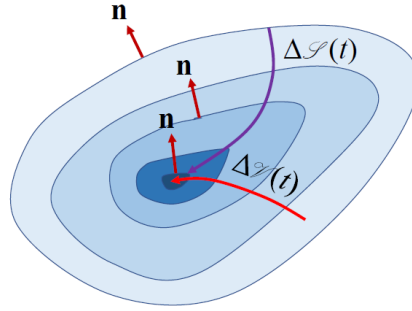


Figura 9.2: Sucesión de regiones $\Delta V(t)$ con volúmenes ΔV , limitadas por la sucesión de superficies $\Delta S(t)$ para determinar el significado del operador divergencia del vector de potencia de los esfuerzos moleculares como un flujo local de potencia.

Claramente, la integral de volumen en el lado izquierdo de (9.2.4), es el volumen ΔV de la región ΔV , el cual puede despejarse al lado derecho de la ecuación. A continuación es posible considerar una sucesión de regiones cada vez más pequeñas, como sugiere la figura 9.2, en un procedimiento que, al ser aplicado a la ecuación (9.2.4), en el límite cuando el volumen de la región tiende a cero, lleva al valor local del término del lado izquierdo, de modo que :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S(t)} -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} dS. \quad (9.2.5)$$

De esta ecuación (9.2.5) podemos decir que

LA DIVERGENCIA DEL VECTOR DE POTENCIA DE LOS ESFUERZOS MOLECULARES, $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}$, ES LA DENSIDAD DE FLUJO LOCAL DE POTENCIA DE LOS ESFUERZOS MOLECULARES,

en cualquier punto del sistema. El signo negativo que hemos usado es el que corresponde al flujo que ingresa al sistema, puesto que se ha definido el vector unitario normal a la superficie de la región $\Delta S(t)$, como el vector normal externo, $\mathbf{n}$, que puede apreciarse en la figura 9.2. En consecuencia, la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ en la dirección $(-\mathbf{n})$ corresponde a un flujo que ingresa por la superficie ΔS .

Al sustituir los esfuerzos moleculares $\boldsymbol{\pi}$ por sus dos términos, la presión y los esfuerzos viscosos, como en las ecuaciones (1.2.27) y (1.2.28), en el vector de potencia local $\boldsymbol{\omega}$, tenemos que

$$\boldsymbol{\omega} = (P\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} = P\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}, \quad (9.2.6)$$

de manera que la densidad de potencia local es

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}), \quad (9.2.7)$$

cuyos términos y componentes se han definido en las ecuaciones (1.2.6) y (1.2.7), efectuando las derivadas de los productos de las dos funciones y consisten, básicamente, de dos términos de rapidez de trabajo mecánico, que son productos de la velocidad de flujo por fuerzas conservativas, más dos términos de disipación de potencia local.

9.3 Disipación del flujo local de potencia de los esfuerzos moleculares

LA DISIPACIÓN DEL FLUJO LOCAL DE POTENCIA DE LOS ESFUERZOS MOLECULARES ES LA PORCIÓN DE ESTE FLUJO LOCAL QUE NO CONTRIBUYE A LA ENERGÍA CINÉTICA DE FLUJO DE LA PARTÍCULA MATERIAL ξ , SINO A SU ENERGÍA INTERNA.

En síntesis, podemos decir que

LA RAPIDEZ DE DILATACIÓN ES IMPORTANTE EN PROCESOS CON CAMBIO DE VOLUMEN Y LA RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN ES IMPORTANTE EN PROCESOS CON CAMBIO DE FORMA. AMBOS TÉRMINOS SON IMPORTANTES EN PROCESOS CON CAMBIOS, TANTO DE VOLUMEN COMO DE FORMA.

9.3.1 Disipación local reversible en procesos con cambios de volumen

Los procesos de disipación pueden ser reversibles o irreversibles. La disipación que acompaña los procesos de dilatación/compresión, es decir, la disipación debida a cambios de volumen, es reversible, en tanto que los procesos de fricción o rozamiento viscoso son irreversibles.

EL HECHO DE QUE LA DISIPACIÓN LOCAL DE POTENCIA SEA REVERSIBLE O IRREVERSIBLE SE RELACIONA DIRECTAMENTE CON LA GENERACIÓN DE ENTROPÍA.

En efecto, consideremos la ecuación fundamental de la termodinámica para los compuestos puros, $U = U(S, V)$, de la cual surge, en su forma diferencial, la ecuación de Gibbs:

$$dU = TdS - PdV. \quad (9.3.1)$$

Esta ecuación se puede expresar para una partícula material ξ del fluido, en la forma de densidades másicas (cantidades por unidad de masa, como $\hat{U}$), dividiendo la ecuación (9.3.1) entre la masa de ξ . Además, la diferencial puede expresarse, para procesos dependientes del tiempo, en la forma de derivadas materiales, esto es:

$$\frac{D\hat{U}}{Dt} = T \frac{D\hat{S}}{Dt} - P \frac{D\hat{V}}{Dt}. \quad (9.3.2)$$

Pero el volumen específico $\hat{V}$ es el inverso de la densidad: $\hat{V} = 1/\rho$, de modo que

$$\frac{D\hat{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (9.3.3)$$

Para establecer la última igualdad se requiere aplicar la ecuación de continuidad (1.2.17). Sustituyendo la ecuación (9.3.3) en la expresión para la energía interna (9.3.2), resulta:

$$\frac{D\hat{U}}{Dt} = T \frac{D\hat{S}}{Dt} - \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = T \frac{D\hat{S}}{Dt} + \hat{D}_P, \quad (9.3.4)$$

donde se ha empleado la ecuación (1.2.9) para obtener la última igualdad. Así, los miembros extremos de la ecuación (9.3.4) indican que la rapidez temporal de los cambios de la energía interna de la partícula material de fluido tiene dos contribuciones: por una parte está la rapidez temporal de los cambios de la entropía y por la otra la disipación térmica asociada a los procesos de compresión-expansión, $\hat{D}_P$, es decir que

LOS CAMBIOS DE LA ENERGÍA INTERNA DE LA PARTÍCULA MATERIAL ξ , DEBIDOS A LOS CAMBIOS DE VOLUMEN, SON INDEPENDIENTES DE LOS CAMBIOS DE ENERGÍA INTERNA DEBIDOS A LA ENTROPÍA, LO CUAL INDICA QUE LOS PRIMEROS SON CAMBIOS REVERSIBLES.^a

^aBird también concluye que la disipación por cambios en el volumen es reversible. La razón que ofrece para ello es que el término $P \nabla \cdot \mathbf{v}$ puede ser positivo o negativo. Ver la discusión que sigue a su ecuación (11.2-1). Su conclusión, en última instancia, coincide con la nuestra, que basamos en el primer principio de la termodinámica.

El signo de la disipación del flujo de la potencia local de la fuerza de presión, asociada a los procesos de compresión/expansión o de cambios de volumen, ecuación (9.3.4), **puede ser positivo o negativo**. En efecto, al considerar que la presión se puede definir como

$$P = - \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_{\xi}, \text{ donde } P > 0, \quad (9.3.5)$$

podemos ver que, en procesos isentrópicos, los cambios de volumen deben tener signo contrario a los cambios de energía interna, para que la derivada parcial sea negativo y en consecuencia, la presión sea una cantidad positiva. Esto implica que cuando el volumen de ξ aumenta, su energía interna disminuye, como ocurre en los procesos de expansión y a la inversa, cuando el volumen de ξ disminuye, la energía interna aumenta. Así mismo, podemos ver, en la segunda igualdad de la ecuación (9.3.4), que el signo de la disipación del flujo de potencia local de las fuerzas de presión coincide con el signo opuesto al de la divergencia de la velocidad.

En efecto, podemos ver con ayuda de las ecuaciones (1.2.20), (9.3.4) y (9.3.5), que en los **procesos de expansión**, el término $\hat{D}_P$ es un término de **fuerza de energía cinética**, puesto que $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ al aumentar el volumen de la partícula ξ . Entonces $\hat{D}_P < 0$ y la partícula material ξ **disminuye su energía interna**, de acuerdo con la ecuación (9.3.4) y aumenta su energía cinética, de acuerdo con la ecuación (1.2.24). Lo contrario ocurre en los **procesos de compresión** donde el término $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$. Aquí, la disipación asociada a la compresión es un **sumidero de energía cinética**, es decir que, al disminuir el volumen de la partícula ξ , el fluido **reduce su energía cinética y aumenta**, consecuentemente, **su energía interna**.

9.3.2 Disipación viscosa en procesos con deformación

El término de la **disipación viscosa local** es importante en los **procesos con deformación** de la partícula material de fluido.

La rapidez de deformación es la parte simétrica del gradiente de la velocidad: $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T$, donde $(\nabla \mathbf{v})^T$ es el tensor transpuesto del gradiente de la velocidad. Por ejemplo, si el fluido es newtoniano, el tensor de los esfuerzos viscosos está dado por la ecuación (1.2-7) del Bird:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{1}, \quad (9.3.6)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor unitario o delta de Kronecker. κ se conoce como la viscosidad dilatacional que, para muchas aplicaciones incluyendo los flujos incompresibles, no es necesario determinar.

Al aplicar a $-\boldsymbol{\tau}$ el doble producto punto por el gradiente de la velocidad $\nabla \mathbf{v}$, resulta la ecuación (3.3-3) del Bird:

$$-\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{1} \right]^2 + \kappa (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 = \mu \Phi_v + \kappa \Psi_v, \quad (9.3.7)$$

donde los dos coeficientes de viscosidad son positivos y cada uno está multiplicado por funciones reales cuadráticas, que por esta razón son positivas definidas. Por lo anterior,

EL TÉRMINO DE LA DISIPACIÓN VISCOSA LOCAL, $\rho \hat{D}_\tau = -\tau : \nabla \mathbf{v}$, CORRESPONDIENTE A UNA PORCIÓN DEL FLUJO LOCAL DE POTENCIA DE LOS ESFUERZOS VISCOSOS, ES SIEMPRE POSITIVO PARA LOS FLUIDOS NEWTONIANOS Y SE CONVIERTE EN ENERGÍA INTERNA, DE ACUERDO CON LA ECUACIÓN (9.3.7). LA DISIPACIÓN VISCOSA CONVIERTE EL MOVIMIENTO DE LA ESCALA LOCAL A LA ESCALA MOLECULAR, GENERANDO MOVIMIENTOS ALEATORIOS AL INTERIOR DE LA PARTÍCULA ξ , CON MAGNITUDES DE LOS DESPLAZAMIENTOS EN EL ORDEN DE LA ESCALA MOLECULAR.

En otras palabras, los procesos de deformación, que causan la fricción viscosa de los fluidos newtonianos, son siempre pérdidas mecánicas de potencia viscosa, que equivalen a incrementos de energía interna, la cual se manifiesta generalmente como calor sensible, con aumento de temperatura. En algunos casos podría existir una transformación de fase, donde la energía interna se manifieste como calor latente.

Ejercicios

E.9.3.2-1. Cambio de fase por fricción viscosa en el flujo estacionario de Couette.

Agua líquida en su punto de ebullición llena el espacio entre dos placas planas y paralelas, en condiciones isotérmicas. El flujo estacionario es conocido como flujo de Couette, en el cual la placa inferior se desliza tangencialmente a sí misma a una velocidad constante V , en tanto que la placa superior permanece fija y la separación entre ambas placas es b . Ver la discusión detallada de este problema en la sección 3.1.

- (1) Encontrar la disipación viscosa local, $\rho \hat{D}_\tau$, del flujo estacionario incompresible, cuya solución, $v_{x\infty}(y)$ se ha desarrollado en la subsección 3.1.5.
- (2) Sea λ el calor latente de evaporación del agua en las condiciones de trabajo. Ya que el sistema isotérmico se encuentra saturado, es decir, a su temperatura de ebullición (punto de burbuja), encuentra el flujo másico por unidad de volumen que cambia de líquido a vapor, debido a la disipación viscosa.
- (3) Como el vapor que se produce tiene una densidad del orden de 10^3 veces menor a la densidad del agua líquida, el volumen de la masa evaporada es muy importante con respecto al volumen del agua, de modo que se genera una inestabilidad parecida a los problemas de cavitación en los álabes de las bombas centrífugas, ver subsección 10.1.3. Elabora un ensayo sobre el fenómeno de la cavitación, relacionándolo con tu experiencia en el desarrollo de este problema y asocia valores numéricos. En particular, ¿consideras adecuado suponer que una partícula material de líquido, ξ_L , al evaporarse, da origen a unas 10^3 partículas materiales de vapor ξ_V y
- (4) Cada una de estas partículas ξ_V ¿es una burbuja o solo parte de una burbuja? Fundamenta tu respuesta estudiando el fenómeno de nucleación de fases.

9.4 Disipación viscosa de un fluido newtoniano en un tubo

9.4.1 Disipación viscosa en un flujo de Hagen-Poiseuille

Consideremos el flujo laminar estacionario de un fluido newtoniano incompresible por el interior de un tubo de sección transversal circular. El balance del ímpetu en **la dirección axial** se puede escribir, de acuerdo con el Bird, sección 2.3, ecuación (2.3-10), como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{L} \right) \quad (9.4.1)$$

La expresión (9.4.1) relaciona dos efectos que constituyen el equilibrio mecánico para el flujo estacionario en un tubo: existe una fuerza impulsora que es la presión modificada y una resistencia al flujo, dada por los esfuerzos viscosos.

Puesto que la velocidad es aquí un vector de una sola componente: $\mathbf{v} = [0, 0, v_z(r)]^T$, podemos obtener la **ecuación de la energía mecánica** de este flujo, multiplicando la ecuación (9.4.1), que es la componente z del balance del ímpetu, por la componente axial de la velocidad $v_z(r)$. Podemos notar que el resultado de estas multiplicaciones es una expresión que cuantifica **cómo la rapidez de trabajo que realiza la presión sobre la partícula material de fluido equivale, exactamente, a la rapidez de trabajo que necesita la partícula, para vencer las fuerzas viscosas**:

$$v_z \left(-\frac{d\mathcal{P}}{dz} \right) = v_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}). \quad (9.4.2)$$

Este resultado es la expresión particular de la ecuación (1.2.4), cuando se aplica al flujo en un tubo. Corresponde a una igualdad entre cantidades que implican el movimiento local, por una parte, la componente axial del gradiente de la presión modificada, que se expresa como una derivada ordinaria, debido a que $\mathcal{P}(z) = p(z) - \rho g z$ es una función exclusiva de la coordenada z .

Podemos ahora introducir el factor $v_z(r)$ en ambas derivadas para encontrar que la **densidad de flujo de trabajo viscoso local** o densidad de potencia viscosa local menos la disipación local de trabajo viscoso es igual a la densidad de flujo local de trabajo desarrollado por las fuerzas de presión, es decir:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{P}v_z) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}v_z) - \left(-\tau_{rz} \frac{dv_z}{dr} \right). \quad (9.4.3)$$

Esta expresión **equivale al balance de energía cinética**, donde el primer término del miembro derecho representa los flujos locales de trabajo realizados por los esfuerzos intrínsecos y gravitacionales, sobre el fluido, el segundo término representa el flujo local de trabajo debido a los esfuerzos viscosos y el tercer término representa la densidad de la disipación viscosa. El lado izquierdo de la igualdad indica que **no hay cambio temporal del estado de energía cinética local** de la partícula material, lo cual es congruente con la hipótesis de un régimen estacionario. Para apreciar apropiadamente las contribuciones de los tres términos del lado derecho de la igualdad, que corresponde a los procesos efectuados sobre la partícula material de fluido, ξ , recordemos que para este fluido, la ley de Newton de la viscosidad se expresa como la ecuación (2.3-14) del Bird:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}, \quad (9.4.4)$$

de modo que **el segundo término** de la ecuación (9.4.3) es una contribución siempre negativa, ya que $\rho \hat{D}\tau = \left(-\tau_{rz} \frac{dv_z}{dr} \right) = \mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 > 0$, lo cual indica que **una porción del flujo local de potencia de los esfuerzos viscosos**, desde los alrededores de la partícula material ξ , no se aplica al cambio de la energía cinética de la partícula en la escala local, sino que **se disipa**, es decir, se convierte en movimientos aleatorios, al interior de la partícula material ξ , que conducen los desplazamientos a tener magnitudes del orden de la escala molecular, dando por resultado un aumento de la energía interna del fluido. Esta disipación viscosa lleva el movimiento de la escala local a la escala molecular y está íntimamente relacionado con el incremento de la entropía.

Podemos estimar la disipación viscosa total, E_v , integrando la densidad de la disipación viscosa en el volumen del tubo:

$$E_v = \int_V \rho \hat{D}\tau dV = 2\pi L \int_0^R -\tau_{rz} \frac{dv_z}{dr} r dr = 2\pi \mu L \int_0^R \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 r dr, \quad (9.4.5)$$

pero, por la Ecuación (2.3-15) de Bird:

$$\frac{dv_z}{dr} = - \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} \right) r, \quad (9.4.6)$$

la integral (9.4.5) lleva a:

$$E_v = 2\pi\mu L \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} \right)^2 \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\mu L}{2} \left(\frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{2\mu L} R^2 \right)^2 \quad (9.4.7)$$

y recordando que la velocidad media de flujo se expresa como la Ecuación (2.3-20) de Bird:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L}{8\mu L} R^2, \quad (9.4.8)$$

la expresión (9.4.7) se puede reescribir como:

$$E_v = 8\pi\mu L \langle v_z \rangle^2 \quad (9.4.9)$$

que puede dividirse entre el flujo másico, $w = \pi R^2 \rho \langle v_z \rangle$, para obtener la disipación de potencia por unidad de masa:

$$\hat{E}_v = \frac{E_v}{w} = 8 \frac{\mu L \langle v_z \rangle}{R^2 \rho} = \frac{1}{2} \langle v_z \rangle^2 \frac{4L}{D} \frac{16\mu}{\rho \langle v_z \rangle D}. \quad (9.4.10)$$

Esta expresión se puede reescribir como una conocida relación entre las pérdidas de energía cinética por disipación viscosa y el factor de fricción f_F , que es una función del número de Reynolds, $\text{Re} = \frac{\rho \langle v_z \rangle D}{\mu}$. Para un tubo con flujo laminar estacionario el factor de fricción es $f_F = \frac{16}{\text{Re}}$. Entonces:

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2} \langle v_z \rangle^2 \frac{4L}{D} f_F. \quad (9.4.11)$$

La relación (9.4.11) se acostumbra aplicar también a los flujos turbulentos, pero es necesario sustituir el factor de fricción f_F por alguna expresión más adecuada, en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de la pared del tubo. En la siguiente sección desarrollamos los principales elementos para comprender y usar los factores de fricción.

9.4.2 Fuerza cinética en la pared y disipación en el flujo de Hagen Poiseuille

En la subsección anterior hemos estimado la disipación de la potencia viscosa en un tubo a partir de la integración del término de disipación local en toda la región de flujo, de acuerdo con el desarrollo de la ecuación (9.4.5). Sin embargo, es más conocido el desarrollo de estimaciones de la disipación a partir de la interacción del flujo con las paredes fijas del sólido que contiene al fluido.

Podemos calcular la **fuerza cinética del flujo sobre la pared del tubo**, F_k , mediante la integración:

$$F_k = 2\pi \int_0^L \tau_{rz}|_{r=R} R dz = 2\pi \int_0^L -\mu \frac{dv_z}{dr} \Big|_{r=R} R dz = \pi R^2 (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L), \quad (9.4.12)$$

donde se ha utilizado, en la segunda igualdad, la relación de comportamiento de los fluidos newtonianos, ecuación (9.4.4), en tanto que, en la tercera igualdad se ha empleado la relación (9.4.6), evaluada en la pared del tubo, donde $r = R$. Además, utilizando la ecuación (9.4.8), podemos ver que $R^2 (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) = 8\mu L \langle v_z \rangle$ y que la fuerza cinética, para el flujo laminar en un tubo, se puede expresar como

$$F_k = \pi R^2 (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) = 8\pi\mu L \langle v_z \rangle. \quad (9.4.13)$$

Esta ecuación (9.4.13) puede combinarse con (9.4.9), para relacionar la fuerza cinética F_k con la disipación viscosa E_v , de donde resulta que

$$E_v = F_k \langle v_z \rangle, \quad (9.4.14)$$

es decir que, **para flujos laminares y estacionarios de fluidos newtonianos en tuberías largas**,

LA DISIPACIÓN VISCOSA EN UN TUBO EQUIVALE A LA FUERZA CINÉTICA SOBRE LA PARED DEL TUBO, MULTIPLICADA POR LA VELOCIDAD MEDIA DE FLUJO.

También podemos relacionar la disipación viscosa en el tubo, para flujos laminares estacionarios, con la caída de presión. En efecto, sustituyendo la ecuación (9.4.13) en (9.4.14), tenemos que

$$E_v = \pi R^2 (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L) \langle v_z \rangle = Q (\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_L), \quad (9.4.15)$$

donde $Q = \pi R^2 \langle v_z \rangle$ es el gasto o flujo volumétrico.

Ejercicios

E.9.4.2-1. Equivalencias.

- (1) Comprueba que la definición de fuerza cinética en un tubo, dada por Bird en su ecuación (6.2-1) coincide con la de nuestro texto.
- (2) Explica cómo, la expresión (7.5-7) del Bird para $\hat{E}_v$, se puede obtener a partir de nuestra ecuación (9.4.14), cuando se expresa por unidad de masa, dividiendo entre el flujo másico y
- (3) Encuentra una relación para el factor de pérdidas por fricción, e_v , definido por Bird en su ecuación (7.5-4), comparando dicha ecuación con tu resultado del inciso (2).

9.4.3 Una función llamada factor de fricción de Fanning

Por otra parte, el término conocido como **el factor de fricción** se usa principalmente para flujos en conductos (flujos internos) y se denota por f_F .⁶ Para el flujo en tubos lo definimos, de manera implícita como:

$$F_k = f_F A K = f_F (\pi D L) \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2. \quad (9.4.16)$$

donde $A = \pi D L$ es el área de la superficie interna de la pared del tubo y $K = \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2$ es la energía cinética característica del flujo en tubos, basada en la velocidad media de flujo, $\langle v_z \rangle$.

LOS FACTORES DE FRICCIÓN SON FUNCIONES QUE DEPENDEN DE LA ESTRUCTURA DE FLUJO, YA SEAN LOS FLUJOS LAMINARES O TURBULENTOS,

cuya funcionalidad es conveniente indagar utilizando las técnicas de adimensionalización. Conviene entonces despejar f_F en la Ecuación (9.4.16) y sustituir F_k de la ecuación (9.4.12), para obtener:

$$f_F = \frac{2\pi \int_0^L \left(-\mu \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right)_{r=R} \frac{D}{2} dz}{(\pi D L) \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2}, \quad (9.4.17)$$

donde se ha empleado una velocidad tiempo ajustada $\bar{v}_z$ para indicar que podemos incluir flujos turbulentos en este desarrollo. Esta ecuación puede expresarse en variables adimensionales para casos específicos. Consideremos un tubo de pared lisa, unido a un recipiente de almacenamiento que suministra un líquido. En la región cercana a la entrada la velocidad local depende de su cercanía con la entrada, en tanto que lejos de la entrada, la velocidad local es ya independiente de los efectos de entrada. Considerando las cantidades adimensionales $\check{v}_z = \bar{v}_z / \langle \bar{v}_z \rangle$, $\check{r} = r/D$ y $\check{z} = z/D$, la Ecuación (9.4.17) se puede adimensionalizar, quedando:

$$f_F = \frac{1}{\pi} \frac{D}{L} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^{L/D} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{d\check{v}_z}{d\check{r}} \right)_{\check{r}=1/2} d\theta d\check{z}. \quad (9.4.18)$$

⁶El subíndice F se usa para distinguir este factor como el *factor de fricción de Fanning*, con respecto a otro, también muy usado *factor de fricción de Darcy*, f_D , que se relaciona con el primero por medio de $f_D = 4f_F$, de donde resulta que $f_D = 64/\text{Re}$. En muchas referencias no se especifica cual de estos dos factores de fricción se utiliza; una manera de identificarlo es encontrar su valor para $\text{Re} = 1000$, ya que en tal caso, $f_F = 0.016$, en tanto que $f_D = 0.064$.

donde $Re = \frac{\rho \langle \bar{v} \rangle D}{\mu}$ es el número de Reynolds. La integral es una función que depende de las ecuaciones que determinan $\check{v}_z$, es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes si el flujo es laminar o las ecuaciones de Reynolds si el flujo es turbulento, así como de las condiciones de frontera apropiadas, que son:

$$\begin{aligned} \check{v} &= \mathbf{0}; & \check{r} &= 1/2, & \check{z} &> 0, & (a) \\ \check{v} &= \delta_z; & 0 &\leq \check{r} \leq 1/2, & \check{z} &= 0, & (b) \\ \check{\mathcal{P}} &= 0; & \check{r} &= 0, & \check{z} &= 0. & (c) \end{aligned} \quad (9.4.19)$$

De acuerdo a esta expresión, la velocidad y la presión modificada de flujos estacionarios, laminares y turbulentos, son funciones de las coordenadas adimensionales y de los límites de integración, así como del número de Reynolds, de modo que

$$\begin{aligned} \check{v} &= \check{v}(\check{r}, \theta, \check{z}, Re), & (a) \\ \check{\mathcal{P}} &= \check{\mathcal{P}}(\check{r}, \theta, \check{z}, Re), & (b) \end{aligned} \quad (9.4.20)$$

y por lo tanto, el factor de fricción para tubos de pared lisa sólo puede depender del número de Reynolds y de la razón L/D , es decir

$$f_F = f_F(Re, L/D). \quad (9.4.21)$$

Sin embargo para tuberías largas, es decir, cuando $L/D > 0.03 Re$ para flujo laminar o $L/D > 60$ para flujo turbulento, el factor de fricción sólo depende del número de Reynolds. Por otra parte, podemos considerar las tuberías rugosas como aquellas cuyo radio no es constante, sino que es afectado por pequeñas protuberancias irregulares que llamamos rugosidad, la cual puede ser representada por una función: $\kappa(\theta, z)$. Aquí la escala de longitud D se sigue tomando como un valor constante, de modo que podemos expresar el radio del tubo como una función R , suma de su valor medio $D/2$ más la función de rugosidad ϵ . Entonces, en variables adimensionales,

$$\check{R} = \frac{1}{2} + \frac{\kappa(\theta, \check{z})}{D}. \quad (9.4.22)$$

El valor medio de estas protuberancias, que son aleatorias, se conoce como la rugosidad relativa y es un parámetro adimensional que se denota por k/D . En las tuberías rugosas, la Ecuación (9.4.18) y la condición a la frontera (9.4.19) se deben modificar considerando (9.4.22), de modo que el factor de fricción resulta una función f_F que incorpora la rugosidad relativa k/D , como uno de sus argumentos, es decir que

$$f_F = f_F(Re, k/D), \quad (9.4.23)$$

para tuberías largas con flujos turbulentos.

9.5 Disipación viscosa en los flujos turbulentos

9.5.1 Disipación viscosa, esfuerzos en la pared y pérdida de presión

Al definir el factor de fricción con la ecuación (9.4.16), hemos mencionado que f_F es una función, la cual depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa de la pared del conducto, como hemos concluido al obtener la ecuación (9.4.23).

Para considerar la disipación viscosa en los flujos turbulentos, podemos elaborar un primer enfoque que parte de la estimación de la fuerza cinética de flujo sobre la pared del tubo, $\bar{F}_k$, la cual es una variable tiempo ajustado, a partir de las ecuaciones de Reynolds. La fuerza cinética

en la pared, para los flujos turbulentos, como también ocurre con los flujos laminares, se obtiene mediante la integración de los esfuerzos viscosos en la pared del tubo, los cuales se han estimado en la sección 7.2, y se representan por τ_0 en la ecuación (7.2.2). Entonces, a semejanza de la expresión (9.4.12), podemos estimar la fuerza cinética tiempo ajustada en la pared del tubo, $\bar{F}_k$:

$$\bar{F}_k = 2\pi \int_0^L \bar{\tau}_{rz}|_{r=R} R dz = 2\pi \int_0^L \tau_0 R dz = \pi DL \tau_0 = \pi R^2 (\bar{\mathcal{P}}_0 - \bar{\mathcal{P}}_L), \quad (9.5.1)$$

donde la última igualdad se obtiene de la ecuación (7.2.2), al considerar un gradiente lineal de presión, tal que $\frac{d\bar{\mathcal{P}}}{dz} = \frac{\bar{\mathcal{P}}_L - \bar{\mathcal{P}}_0}{L}$. La última igualdad en la expresión (9.5.1) es equivalente a un **balance integral en el equilibrio mecánico, entre las fuerzas intrínseca y gravitacional en la entrada del tubo menos las fuerzas intrínseca y gravitacional a la salida del tubo, cuya diferencia es igual a la resistencia viscosa en la pared del tubo**. Cada uno de los términos de este balance es igual a la fuerza cinética sobre la pared del tubo, $\bar{F}_k$, por lo cual es posible, al sustituir $\bar{F}_k$ de la definición del factor de fricción, ecuación (9.4.16) para variables tiempo-ajustado de los flujos turbulentos, encontrar que

$$\bar{\mathcal{P}}_0 - \bar{\mathcal{P}}_L = f_F \frac{4L}{D} \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 = \frac{4L}{D} \tau_0. \quad (9.5.2)$$

Para la discusión a detalle del balance integrado puede verse la sección 2.4, en especial la ecuación (2.4.1). Podemos elaborar una ecuación integrada de la energía mecánica, para las fuerzas en equilibrio mecánico y régimen estacionario, multiplicando la ecuación (9.5.2) por la velocidad media de flujo y por el área transversal del tubo, es decir,

$$\pi \frac{D^2}{4} (\bar{\mathcal{P}}_0 - \bar{\mathcal{P}}_L) \langle \bar{v}_z \rangle = f_F \pi DL \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^3 = \pi DL \tau_0 \langle \bar{v}_z \rangle, \quad (9.5.3)$$

y podemos **postular un balance de energía mecánica integrado**, en la situación del equilibrio mecánico, de dos maneras:

$$\pi \frac{D^2}{4} (\bar{\mathcal{P}}_0 - \bar{\mathcal{P}}_L) \langle \bar{v}_z \rangle = E_v \quad (9.5.4)$$

y también

$$\pi DL \tau_0 \langle \bar{v}_z \rangle = E_v. \quad (9.5.5)$$

Mientras el primer balance, ecuación (9.5.4), indica que la diferencia entre la potencia del flujo a la entrada y a la salida del tubo equivale a la disipación de potencia, el segundo balance, ecuación (9.5.5), indica que la resistencia viscosa del fluido en la pared del tubo es la causa, en última instancia, de la disipación de la potencia. Ambas interpretaciones son correctas y son dos aspectos que se complementan. Además, podemos expresar un tercer punto de vista que completa los anteriores, al comparar el miembro intermedio de la ecuación (9.5.3) con los miembros laterales, que son equivalentes a la disipación de potencia, de acuerdo con los balances postulados (9.5.4) y (9.5.5). Así, encontramos que:

$$E_v = f_F \pi DL \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^3 = f_F \left(\pi DL \frac{1}{2} \rho \langle \bar{v}_z \rangle^2 \right) \langle \bar{v}_z \rangle = \bar{F}_k \langle \bar{v}_z \rangle, \quad (9.5.6)$$

la cual es, en términos de variables tiempo-ajustadas, similar a la ecuación (9.4.14) que obtuvimos anteriormente para flujos laminares. De esta manera podemos extender la validez de la expresión (9.4.14) a todos los flujos estacionarios, ya sean laminares o turbulentos.

La estimación del factor de fricción se hace de dos maneras:

- Utilizando una gráfica, conocida como *gráfica de Moody*, de coordenadas (Re, f) , que representa la función $f_F = 16/Re$ en la región laminar, y varias líneas en la región turbulenta, cada una en el parámetro ε/D constante. Es necesario distinguir si el factor de fricción graficado es f_F o f_D , lo cual es inmediato si en la región laminar se representa la función f_F o $f_D = 64/Re$, aunque algunas veces el factor de fricción simplemente se representa por f y no se hace explícita la fórmula del caso laminar⁷.
- Utilizando alguna fórmula apropiada a la región de flujo turbulento, como la fórmula de Blasius, basada en la teoría de la capa límite. Ver por ejemplo el Bird, ecuación (6.2-12). Otras correlaciones son empíricas o semiempíricas y hemos incluido algunas de ellas en el enunciado del ejercicio propuesto 4.2.2-3. La mayoría de los libros presenta diversas correlaciones, cambiando posiblemente de una edición a otra, de acuerdo con las experiencias y criterios de sus autores.

9.5.2 Disipación viscosa en accesorios

LAS TUBERÍAS SON CONDUCTOS FORMADOS POR VARIOS TRAMOS DE TUBOS RECTOS, UNIDOS POR DIVERSOS ACCESORIOS QUE SATISFACEN DETERMINADAS NECESIDADES QUE DEBEN SER CUBIERTAS AL TRANSPORTAR UN FLUIDO.

Estas necesidades corresponden a:

- cambios de dirección, que se efectúan con codos de 180, 90 o 45 grados,
- ensanchamientos o reducciones, que son cambios en el diámetro de la tubería y que modifican la velocidad media de flujo, al conservar el caudal Q , ya que, en un cambio de diámetro, de D_1 a D_2 , tenemos que

$$\frac{4}{\pi}Q = D_1^2 \langle v_z \rangle_1 = D_2^2 \langle v_z \rangle_2. \quad (9.5.7)$$

- bifurcaciones o uniones de corrientes en tuberías, como tes, yes e injertos, crucetas y múltiples
- accesorios para regular el paso del fluido, como válvulas de paso, válvulas de retención, válvulas reguladoras de flujo, etc...
- instrumentos para la determinación del caudal, como bridas de orificio, tubos de Vénturi, rotámetros, etc...
- tubos de Pitot para determinar la velocidad local de flujo.

CADA ACCESORIO DISIPA UNA PARTE DE LA POTENCIA DE FLUJO POR FRICCIÓN INTERNA Y HACE NECESARIO, PARA MANTENER CONSTANTE LA ENERGÍA CINÉTICA DEL FLUJO, INCREMENTAR EL TRABAJO MECÁNICO DE LAS OTRAS FUERZAS SOBRE EL FLUIDO.

En una tubería, las pérdidas de potencia por efectos viscosos corresponden a la suma de pérdidas en los tramos de tubo rectos más la **suma de pérdidas en los accesorios**, de manera que es conveniente saber cómo estimar las pérdidas de potencia por disipación viscosa en cada accesorio, al conservar constante la energía cinética del flujo.

El caso más sencillo de la disipación de potencia por efectos viscosos en accesorios se da cuando, en un tramo de tubo recto y suficientemente largo para poder ignorar los efectos de entradas y salidas, insertamos un accesorio.

Sea L la longitud de un tramo de tubo recto y D su diámetro, la disipación de potencia por unidad de masa, $\hat{E}_{v,t}$, en este tramo de tubo, está dada por la ecuación (9.4.11), que podemos

⁷Un truco muy útil, debido a Levenspiel, consiste en buscar el valor de f para un número de Reynolds de 1000, el cual tiene el valor 0.016 si se trata de una gráfica para f_F o tiene el valor de 0.064, si se trata de f_D .

representar como:

$$\hat{E}_{v,t} = f_F \frac{4L}{D} \frac{1}{2} \langle v_z \rangle^2, \quad (9.5.8)$$

Si se inserta un accesorio, en medio de este tramo de tubo recto y se determina experimentalmente la disipación de potencia por unidad de masa, incluyendo dicho accesorio, se mide la disipación total de potencia por unidad de masa, $\hat{E}_{v,T}$, en ese tramo de tubo y accesorio juntos, es decir que

$$\hat{E}_{v,T} = \hat{E}_{v,t} + \hat{E}_{v,a}, \quad (9.5.9)$$

donde $\hat{E}_{v,a}$ es la disipación de potencia por unidad de masa, debida a la presencia del accesorio.

Existen dos maneras muy útiles para representar las estimaciones de las pérdidas de potencia debidas a la disipación viscosa en un accesorio: el **método del factor de pérdidas por fricción**, e_v y el **método de la longitud equivalente**, L_{eq} . Ambos métodos basan sus estimaciones en la determinación empírica de la pérdida de presión debida a la presencia del accesorio, cuando la energía cinética del fluido permanece constante.

Método del factor de pérdidas por fricción

En este método, consideramos que la disipación de potencia por efectos viscosos en el accesorio es proporcional a la energía cinética media por unidad de masa del fluido, es decir que

$$\hat{E}_{v,a} = e_{v,a} \frac{1}{2} \langle v_z \rangle^2, \quad (9.5.10)$$

donde $e_{v,a}$ es el factor de pérdidas por fricción, debido a la presencia del accesorio.

Los valores de $e_{v,a}$ se reportan en muchos textos de mecánica de fluidos, para una diversidad de accesorios usuales en las tuberías⁸.

Método de la longitud equivalente

Una manera de estimar las pérdidas por fricción en un accesorio, es decir, estimar la disipación de potencia por fricción viscosa en un accesorio, consiste en **igualar la pérdida en el accesorio con la que se observaría en un tramo de tubo recto** cuya longitud, L_{eq} , fuera tal que la disipación de potencia en el tramo de tubo recto sería equivalente a la pérdida en el accesorio, es decir que

$$\hat{E}_{v,a} = f_F \frac{4L_{eq}}{D} \frac{1}{2} \langle v_z \rangle^2. \quad (9.5.11)$$

Las expresiones (9.5.10) y (9.5.11) son equivalentes, de modo que la relación entre el factor de pérdidas y la longitud equivalente se da por medio de la expresión:

$$e_{v,a} = f_F \frac{4L_{eq}}{D} = f_F \frac{L_{eq}}{R_h}, \quad (9.5.12)$$

donde se ha utilizado el radio hidráulico del tubo, alternativamente al uso del diámetro D , como distancia característica.

Radio hidráulico

El radio hidráulico es una variable que relaciona el área de la superficie transversal al flujo en un conducto, S_f con el área de la superficie de contacto entre el fluido y la pared del conducto, que convencionalmente se denomina como superficie mojada, S_m , de modo tal que, el radio hidráulico,

⁸Ver por ejemplo el manual de la compañía CRANE, de 1986, el Bird, tabla 7.5-1, tomada de una referencia de 1958 o Lydersen, 1979, Tabla 1.2 y correlaciones que incluyen bancos de tubos y tubos helicoidales.

R_h , es la longitud que iguala ambas áreas, $S_m = S_f$. Sea P_m el perímetro de contacto entre la pared del conducto y el fluido, es decir, el perímetro mojado, entonces

$$S_m = P_m R_h = S_f. \quad \text{Despejando,} \quad R_h = \frac{S_f}{P_m}. \quad (9.5.13)$$

En el caso de un tubo, $S_f = \pi D^2/4$, en tanto que $S_m = \pi D R_h$, de donde, igualando ambas superficies y despejando, tenemos

$$R_h = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4}. \quad (9.5.14)$$

Si se tratara de un tubo horizontal con agua fluyendo por la mitad inferior del tubo y aire estancado a presión constante en la mitad superior del tubo, el perímetro mojado sería solamente el de la parte inferior del tubo, que corresponde al contacto de la pared con el agua, es decir que $S_m = (\pi D/2) R_h$ y por lo tanto $R_h = D/2$.

9.6 Coeficientes de rozamiento en una pared plana

En el Ejemplo 4.4-1 de Bird *et al.* se propone una distribución polinómica de la velocidad v_x , dentro de la capa límite, pegada a una velocidad constante v_∞ en la región de flujo potencial. A partir de este planteamiento se encuentra el espesor de la capa límite $\delta_x = 4.64 \sqrt{v_x/v_\infty}$, así como la fuerza ejercida sobre una superficie sólida plana, **por un sólo lado**:

$$F_x = \int_0^W \int_0^x \left(+\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} dx' dz = 0.646 \sqrt{\rho \mu x W^2 v_\infty^3} \quad (9.6.1)$$

Podemos ahora definir el coeficiente de rozamiento (local) c_D como esta fuerza sobre la superficie sólida, adimensionalizada, considerando la energía cinética de un flujo potencial como la escala adecuada para la adimensionalización. Entonces

$$c_D = \frac{\frac{F_x}{Wx}}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2} = 1.293 \sqrt{\frac{v}{v_\infty x}} = \frac{1.293}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.6.2)$$

donde el número de Reynolds está basado en la distancia recorrida por la coordenada x , es decir, la escala de longitud usada en la definición del número de Reynolds es la distancia x . Se puede estimar un valor promedio del coeficiente de rozamiento $\bar{C}_D$, que se define como:

$$\bar{C}_D = \frac{1}{L} \int_0^L 1.293 \sqrt{\frac{v}{v_\infty x}} dx = 2.586 \sqrt{\frac{v}{v_\infty L}} = \frac{2.586}{\sqrt{Re}} = 2c_D|_{x=L}. \quad (9.6.3)$$

Aquí el número de Reynolds está basado en la longitud total de la placa, en la dirección del flujo. Además se ve que **el coeficiente de rozamiento promedio es igual al doble del coeficiente de rozamiento local, evaluado para la longitud total de la placa.**

Ejercicios

E.9.6-1. Coeficientes de rozamiento local y promedio.

Estimar coeficientes de rozamiento c_D y $\bar{C}_D$ para las soluciones polinomiales desarrolladas en el ejercicio E.6.3.1-1.

E.9.6-2. Coeficientes de rozamiento para la fórmula de Blasius.

Estimar coeficientes de rozamiento c_D y $\bar{C}_D$ para la solución de la capa límite de Blasius, desarrollada en el ejercicio E.6.3.2-1.

10. Flujo compresible, cavitación y ariete

10.1 Ondas de presión

10.1.1 Elasticidad y propagación del sonido en los fluidos

Los fluidos, así como los sólidos, son materiales elásticos sujetos a cambios de volumen cuando son expuestos a esfuerzos de compresión-expansión. Así pues los fluidos, también como los sólidos, tienen un **módulo de elasticidad** (a temperatura constante) E_T , que se define como:

$$E_T = \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T. \quad (10.1.1)$$

El módulo de elasticidad tiene las mismas unidades de la presión y es conveniente entender su significado, a partir de estas unidades, como la energía necesaria para un cambio unitario de volumen, es decir como *energía/volumen*. Si aplicamos un esfuerzo compresivo a un fluido, por ejemplo cuando se encuentra confinado en un cilindro cerrado por un pistón móvil, y súbitamente desplazamos el pistón reduciendo el volumen del fluido, estamos acostumbrados a pensar que si el fluido es un gas, el cambio de volumen es inmediato, pasando el material a un nuevo estado termodinámico. En cambio, si el fluido es un líquido, el desplazamiento del pistón es imperceptible, el volumen “no cambia” y el líquido eleva su presión interna. Muchas aplicaciones no requieren análisis transitorios y es suficiente con evaluar las variables termodinámicas en ambos estados, el inicial y el final, lo cual puede hacerse al disponer de una ecuación de estado para el gas o al establecer la hipótesis de incompresibilidad para el líquido. Sin embargo, hay procesos de naturaleza transitoria o cíclica, gobernados por los cambios locales de la presión, que se transmiten a través del cuerpo fluido con una **rapidez o celeridad** c con la cual viaja una **onda de presión u onda elástica** en dichos fluidos.

Las ondas de presión se propagan a la **rapidez de propagación del sonido** c en el fluido, la cual se define como:

$$c = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{\rho}} & \text{para sólidos y líquidos} \\ \sqrt{\frac{c_p P}{c_v \rho}} & \text{para gases ideales} \end{cases} \quad (10.1.2)$$

para procesos isotérmicos e isentrópicos, respectivamente, donde k es el **coeficiente de compresibilidad isotérmico**.

La rapidez de propagación del sonido también se puede encontrar a partir del módulo de elasticidad E_T , resultando que $c = \sqrt{E_T/\rho}$.

10.1.2 Ondas elásticas y golpe de ariete

Se conoce como *ariete* o *golpe de ariete* la propagación de una onda elástica en un líquido, la cual ocurre como consecuencia del cambio local y abrupto de la presión. Este cambio de presión puede ser generado directamente por un agente externo, como el cierre repentino de una válvula situada a la salida de una tubería. Esto puede apreciarse en la figura 10.1 cuando, en el instante $t = 0$, interrumpimos abruptamente el curso del flujo en el extremo del tubo de longitud L , (ver figura 10.1.a) por medio de una válvula de cierre rápido, (ver figura 10.1.b).

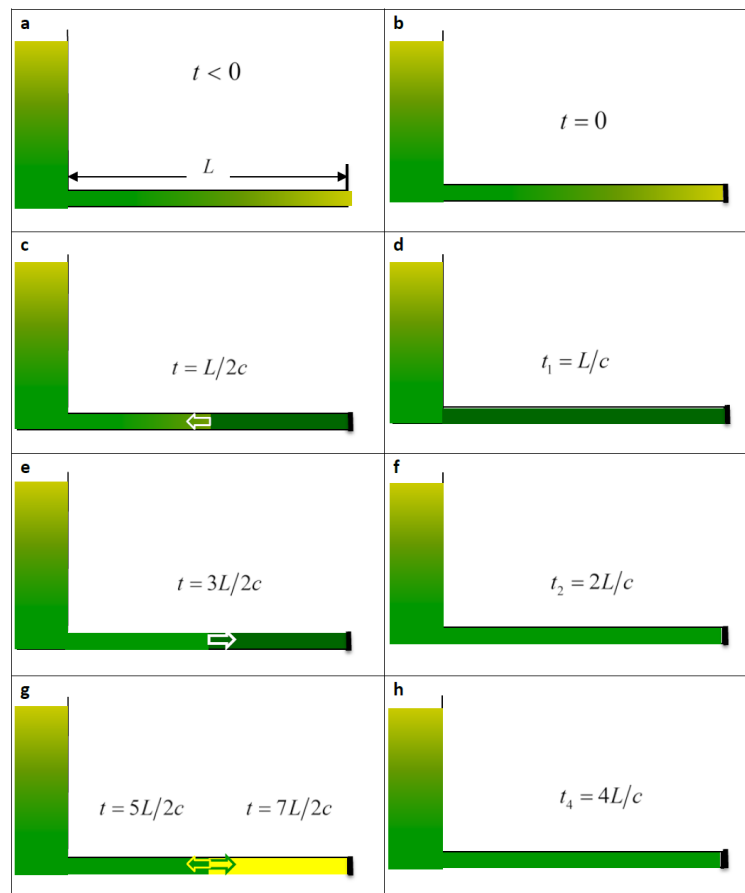


Figura 10.1: Movimiento de una onda elástica en un tubo. El tono de verde corresponde a la magnitud de la presión local, que se incrementa hacia los tonos más oscuros. El color amarillo representa valores de la presión inferiores a la presión atmosférica.

Para precisar ideas, podemos pensar en una válvula de compuerta o de disco con un actuador electromagnético, situada en el extremo derecho del tubo horizontal, el otro extremo sale del fondo de un tanque de almacenamiento de agua, como se ilustra en la figura 10.1. Antes de cerrar la válvula, el flujo ocurre en régimen estacionario. La tonalidad del color verde indica la magnitud de la presión. Así, el verde intenso al fondo del tanque equivale a su presión hidrostática, en tanto que el verde amarillento de la superficie superior y a la salida del tubo, cuando fluye, equivale a la presión atmosférica. El color amarillo representa una presión inferior a la atmosférica.

Al tiempo $t = 0$, el actuador electromagnético cierra la válvula, suponiendo un cierre instantáneo, como se aprecia en la figura 10.1.b. La inercia del flujo ejerce una fuerza sobre el disco de la válvula, elevando la presión del fluido estancado junto a la válvula, denotado por un tono más oscuro en el diagrama. Conforme transcurre el tiempo el proceso anterior va formando una región estancada y presurizada cada vez más amplia, que avanza hacia el tanque de almacenamiento, como se ve en la figura 10.1.c. La rapidez de esta onda de presión es la del sonido en el líquido (en este caso, agua), es decir $\approx 1400 \text{ m/s}$, que alcanza la mitad del tubo al tiempo $t = L/2c$ y llega a la entrada en el fondo del tanque al tiempo $t_1 = L/c$, como se ve en la figura 10.1.d. Aquí la presión se relaja, en el gran volumen de agua del tanque y la inercia provoca una disminución de la presión a la entrada del tubo, igualándola a la presión en el fondo del tanque, es decir, a su presión hidrostática. Este pulso de la presión a la entrada del tubo se propaga ahora a través del mismo, desde el tanque hacia la salida (que permanece cerrada), como una expansión del fluido, que llega a la mitad del tubo al tiempo $t = 3L/2c$ y alcanza la válvula cerrada, al tiempo $t_2 = 2L/c$, como se aprecia en la figura 10.1.e y figura 10.1.f, respectivamente.

Debido a la inercia de la etapa expansiva, al encontrarse con el extremo cerrado del tubo, el fluido continúa su expansión, disminuyendo la presión más allá de la presión hidrostática y generando ahora una región de presión barométrica negativa en los alrededores de la válvula. Esta onda de baja presión se representa en color amarillo y se propaga nuevamente hacia la entrada, ver figura 10.1.g, alcanzando la mitad del tubo al tiempo $t = 5L/2c$ y el extremo de la entrada al tiempo $t_3 = 3L/c$. El relajamiento de esta onda de presión negativa en el tanque corresponde al incremento local de la presión hasta la hidrostática, que avanza desde la entrada al tubo y alcanza la mitad del mismo al tiempo $t = 7L/2c$, ver en la figura 10.1.g una onda en color verde propagándose hacia la derecha, para alcanzar nuevamente la válvula al tiempo $4L/c$, como se aprecia en la figura 10.1.h. La inercia eleva la presión por encima de la hidrostática y se repite la secuencia del proceso ondulatorio de compresión-expansión en el tubo, ilustrado desde la figura 10.1.c hasta la figura 10.1.h. La viscosidad del fluido actúa como un elemento disipador irreversible, que conduce a un estado final de presión hidrostática, cuya temperatura habrá aumentado, aunque sólo sea marginalmente, debido sobre todo a la conducción térmica a través de la pared del tubo.

10.1.3 Cavitación

Una onda de presión también puede generarse internamente, aunque inducida por un agente externo, como en el fenómeno de la cavitación de una bomba o de una propela de agitación o propulsión. En este caso, las partes sólidas móviles (aspas o propelas) dan lugar a la formación de zonas de alta y baja presión en el líquido de sus alrededores. **Si la presión desciende hasta la presión de vapor del líquido, se forman burbujas** que al ser arrastradas a una región de presión más elevada, **colapsan abruptamente** generando una aceleración local del líquido adyacente, al ocupar el espacio de la burbuja. El líquido se detiene abruptamente al agotar el espacio que ocupaba la burbuja, dando lugar entonces a un incremento súbito de la presión, que al propagarse en el líquido, puede llegar a romper las aspas o propelas. En la figura 10.2 se ve el impulsor de una bomba centrífuga con aspas rotas por fatiga debida a esfuerzos abruptos, causados por cavitación.



Figura 10.2: Impulsor de una bomba centrífuga con aspas rotas por el efecto de la cavitación.

10.1.4 Conservación de la energía mecánica

El balance integral de energía mecánica, ecuación (1.3.5), en flujos estacionarios, $\left(\frac{d}{dt} \rightarrow 0\right)$, sin elementos que realicen trabajo desde las fronteras del flujo ($W_m \rightarrow 0$) y considerando despreciables tanto la disipación dilatacional ($E_c \rightarrow 0$) como la disipación viscosa ($E_v \rightarrow 0$), se puede escribir como una ecuación de conservación que equivale a proponer que **el flujo de energía que entra al sistema es igual al flujo de energía que sale del sistema**: $-\Delta \hat{E}_m = 0$, donde la densidad de energía por unidad de masa, en flujos compresibles, es la suma de **la energía cinética más la energía potencial más la energía intrínseca**:

$$\Delta \hat{E}_m = \Delta \frac{1}{2} \bar{v}^2 + g \Delta h + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dP = 0, \quad (10.1.3)$$

respectivamente. (Revisa las subsecciones 9.1.3 y 9.1.4 sobre las fuerzas conservativas y el potencial de Bernoulli). En la ecuación (10.1.3) se ha considerado un perfil de velocidad plano, para el cual se cumple que $\langle \bar{v}^3 \rangle = \langle \bar{v} \rangle^3$. Además, se ha omitido por simplicidad de notación, el uso del operador promedio en la sección transversal. Aquí es equivalente escribir $\langle \bar{v} \rangle$ o $\bar{v}$, indistintamente. El símbolo Δ significa la diferencia de un término, evaluado en el punto 2 (una salida) menos el mismo término, evaluado en el punto 1 (una entrada), así $\Delta h = h_2 - h_1$. La ecuación (10.1.3) se conoce como la ecuación de Bernoulli estacionaria *de la ingeniería*, porque coincide formalmente con la ecuación de Bernoulli, aunque su significado es distinto, pues aplica a un sistema integrado, con entradas, salida y paredes sólidas, cuyas aplicaciones se encuentran muy frecuentemente en el ámbito de la ingeniería, en tanto que el desarrollo original se aplica en líneas o tubos de corriente, en líneas o tubos vorticosos y cuando los campos de velocidad y de vorticidad son ortogonales.

10.2 La bomba de ariete

10.2.1 Concepto de la bomba de ariete

Supongamos que tengo una gran masa de agua, que fluye desde un tanque de almacenamiento, cuya superficie es estacionaria. El tanque está situado unos 2 m arriba del suelo. Nos preguntamos: **¿Será posible utilizar la energía potencial del agua en el tanque, para elevar una parte de ella misma, unos 5 m arriba del nivel del tanque de alimentación?** Esto implica que parte del agua perderá su energía potencial transfiriéndola, finalmente, a la energía potencial de la otra parte del agua, que será elevada 5 m arriba del nivel del tanque, como se propone en la figura 10.3.

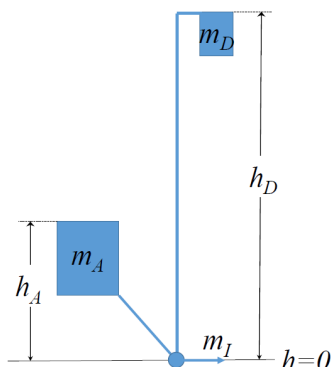


Figura 10.3: Principio de una bomba de ariete.

De acuerdo con la ecuación de Bernoulli (10.1.3) y con el diagrama de la figura 10.3, si elegimos $h = 0$ en el plano horizontal I , queremos que la energía potencial en el tanque de alimentación A sea equivalente a la energía potencial en un tanque de descarga D , cuya superficie está a una altura h_D , donde $h_D > h_A$. Entonces, en dos situaciones hidrostáticas, antes y después del proceso de bombeo, tenemos que:

$$m_A g h_A = m_D g h_D. \quad (10.2.1)$$

De aquí, podemos concluir que la masa límite que podría ser elevada al tanque de descarga o de elevación, utilizando toda la energía potencial del tanque de alimentación en elevar el fluido, sería $m_D = \frac{h_A}{h_D} m_A$.

Sin embargo, este es un valor límite teórico, suponiendo que toda la energía potencial del fluido en el tanque A es la del fluido en el tanque elevado D , en tanto que la masa de fluido derramada en el extremo de la tubería de impulso I tiene energía potencial nula y altura $h = 0$.

La siguiente pregunta es **¿cómo fabricamos un dispositivo que transforme la energía potencial de la alimentación, de manera que la concentre en una masa más reducida, pero llevando esta masa a mayor altura?**

Para lograr incrementar la energía potencial de la descarga será necesario **utilizar las otras formas de la energía mecánica**, es decir, la energía cinética y la energía intrínseca o presión. Así, colocando un tubo inclinado descendente, a la salida del tanque de alimentación, hasta el nivel de referencia $h = 0$ al abrir una válvula de paso, situada en el extremo de este tubo, opuesto al tanque A , podemos **transformar la energía potencial del fluido** que sale por el tubo, **en energía cinética**. Luego, si podemos cerrar rápidamente esta válvula, **la inercia** que lleva el fluido **se transformará en una onda de presión** elevada, una onda de choque. Si aprovechamos **el choque de alta presión para elevar el líquido**, lograríamos llevarlo al depósito de descarga.

El principal elemento clave para lograr el conjunto de cambios requeridos es la actuación de dos válvulas de retención, en combinación con una cámara de aire a presión.

10.2.2 Válvulas de retención

Las válvulas de retención son dispositivos de apertura y cierre, que al abrirse, dejan pasar el flujo en una dirección y se cierran cuando la diferencia de presión se invierte y el flujo pretende circular en la dirección opuesta.

Hay una diversidad de mecanismos de apertura y cierre de las válvulas de retención. El aspecto más general de todos ellos es que el flujo debe ejercer sobre el dispositivo de cierre, llamado **clapeta**, una fuerza que equilibre la fuerza que dicha clapeta ejerce, para desplazarse y cerrar. La figura 10.4 consta de dos fotografías de una válvula de retención de columpio, llamada así porque la clapeta es un disco que cierra haciendo un giro a la manera de un columpio. Cuando el flujo es ascendente, la clapeta se levanta impulsada por la presión dinámica y así se mantiene, descansando casi todo su peso en el eje de rotación, ya que la clapeta está en posición muy cercana a la vertical, pero si la diferencia de presión se invierte y el flujo pretende invertirse, la presión y la gravedad se alinean en la dirección vertical descendente e impulsan la clapeta a cerrarse, impidiendo el flujo.



Figura 10.4: Corte longitudinal de una válvula de retención de columpio (a) cerrada, impide el flujo descendente (b) abierta, permite el flujo ascendente. Este arreglo corresponde a la válvula de descarga.

Existen otras variantes de válvulas de retención, las hay de obturador esférico, que también cierran por gravedad y otras que cierran por la fuerza de un resorte; estas pueden diseñarse para ser colocadas en tramos horizontales de tuberías.

10.2.3 Mecanismo de la bomba de ariete

La siguiente pregunta es **¿Cómo deberíamos colocar válvulas de retención que nos permitan lograr ciclos de apertura y cierre que produzcan ondas de choque que impulsen al líquido en la dirección ascendente en una tubería vertical?**

El primer mecanismo a lograr es **que el flujo en el tubo de salida de la alimentación sea el detonante del cierre de una válvula de retención** colocada en el extremo del tubo de alimentación y llamada **válvula de impulso o de choque**. Esta condición se logra haciendo que el flujo que circula en el tubo de alimentación cierre la válvula en el extremo del mismo tubo.

Al cerrarse la válvula se genera un choque de alta presión, que viaja por el tubo de alimentación, hacia la entrada. Para aprovechar la onda de alta presión hay que redirigirla hacia otra rama de la tubería, que se abre colocando un accesorio en forma de *Te*, cerca de la salida del tubo de alimentación. Ver figura 10.5. La onda de alta presión afectará una segunda válvula de retención, colocada en el curso de la derivación producida por la *Te*, de manera que abre la válvula y el líquido

penetra en una cámara o recipiente con aire. El aire actúa como un capacitor de presión, la cual aumenta con el flujo de líquido que pasa por esta segunda válvula. Este flujo provoca también la liberación de la presión en el tubo de alimentación, haciendo que la primera válvula de retención ya no esté sujeta a la fuerza de presión en su interior.

Mientras tanto, al aumentar la presión en la cámara de aire, se invierte su gradiente y también la dirección de flujo, el cual no puede mantenerse a través de la válvula, que se cierra, separando la parte de la cámara de aire con alta presión.

La presión y el flujo en la cámara de aire se controlan mediante una válvula reguladora, que permite el paso continuo del líquido proveniente de la cámara, hacia el recipiente de descarga situado arriba del nivel de la alimentación.

Mientras tanto, la válvula de retención de la tubería de alimentación se está abriendo, la salida está a presión atmosférica y el flujo desde el tanque de alimentación comienza a producirse. Pero este flujo, cuando crece lo suficiente, provoca el cierre abrupto de esta primera válvula de retención, conduciendo al siguiente ciclo de la bomba.

Armar una bomba de ariete a partir de las consideraciones anteriores y los accesorios necesarios es ocasión de adquirir el manejo de los elementos más útiles de la construcción de líneas de tuberías. Los accesorios que se utilizan en la construcción de una bomba de ariete se han detallado en la lista de la tabla 17.1, del capítulo 17.

10.2.4 Eficiencias de la bomba de ariete

La eficiencia de un proceso estima cuánto producto se obtiene de los recursos empleados. También puede estimar cuánto producto se obtiene de la cantidad máxima de producto que se podría obtener, en la mejor de las situaciones ideales.

Al tratarse de bombas de ariete, podemos definir la eficiencia de dos maneras: la **eficiencia de D'Aubuisson** es la razón de la cantidad en el producto relativo a la cantidad alimentada. Por su parte, la **eficiencia de Rankine** es la cantidad ganada en el producto relativo a la cantidad perdida, o desperdiciada, en el residuo. La cantidad alimentada es la suma de la cantidad en el producto más la cantidad en el residuo, más la cantidad perdida por efectos irreversibles que podemos considerar como un sumidero, si es el caso.

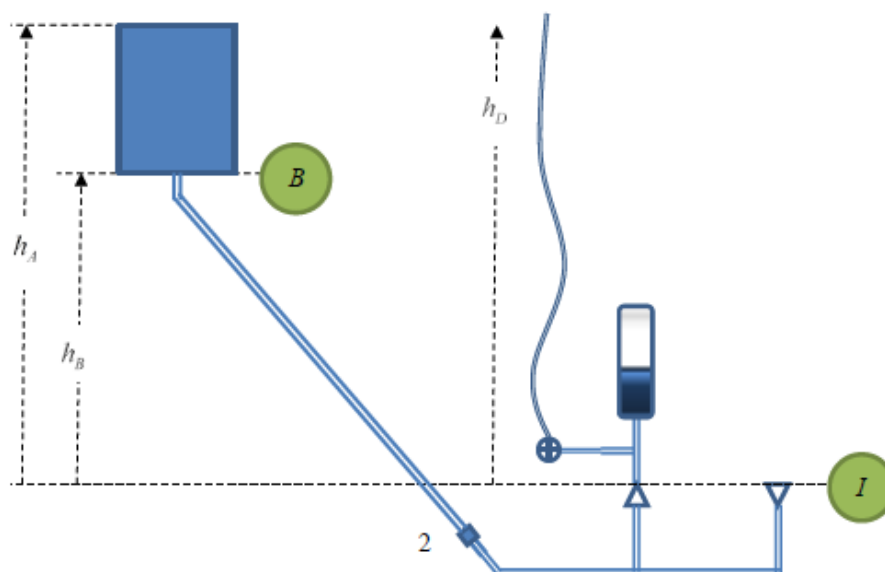


Figura 10.5: Diagrama de la bomba de ariete. Nótese que la válvula de impulso (V) se encuentra aguas abajo de la válvula de descarga (Δ).

Al operar una bomba de ariete hay seis valores que se pueden medir directamente al realizar la experiencia; los dos primeros son parámetros geométricos, ver figura 10.5:

1. Altura del nivel de la alimentación, h_A ,
2. Altura del nivel de la descarga, h_D .

Los siguientes cuatro son variables de operación:

3. Intervalo de tiempo de operación medido, a régimen estacionario, τ ,
4. Número de ciclos o número de golpes de ariete en la válvula de impulso, n , en el intervalo de tiempo τ ,
5. Masa de agua recuperada en la descarga, m_D , en el intervalo de tiempo τ ,
6. Masa de agua residual derramada por la válvula de impulso, m_I , en el intervalo de tiempo τ .

La **presión medida** en el manómetro de carátula es un **parámetro de operación cualitativo**, que oscila continuamente con grandes amplitudes, cuyos valores típicos dan una indicación del carácter **estacionario en promedio**, de las mediciones. Para una caracterización cuantitativa de la presión, podría encontrarse el espectro de frecuencias de la señal, el cual debería permanecer estacionario.

Con estos valores y la densidad del líquido se pueden determinar los flujos máscos y volumétricos, por unidad de tiempo al dividir por τ , y por ciclo o choque, al dividir por n . La frecuencia $\omega = n/\tau$ permite cambiar de unos a otros.

El **balance integrado de masa**, a régimen estacionario, da (c.fr: Bird, ecuación 7.1-3):

$$(\overline{w_D} + \overline{w_I}) - \overline{w_A} = 0, \quad (10.2.2)$$

donde $\overline{w_D} = m_D/\tau$, $\overline{w_I} = m_I/\tau$ y $\overline{w_A} = m_A/\tau$, son valores promedio, integrados en el intervalo de tiempo τ , de los flujos máscos o velocidades máscas de flujo, que al ser sustituidas y multiplicar posteriormente por τ conducen al **balance de masa**:

$$m_D + m_I - m_A = 0. \quad (10.2.3)$$

El **balance integrado de energía cinética**, a régimen estacionario, da (c.fr: Bird, ecuación 7.4-3):

$$(gh_D\overline{w_D} + gh_I\overline{w_I}) - gh_A\overline{w_A} = -\overline{E_v}, \quad (10.2.4)$$

donde los flujos máscos promedio se pueden también sustituir en función de las masas integradas en un intervalo de tiempo τ y luego multiplicar la ecuación (10.2.4) por el factor τ/g para tener el **balance de energía**:

$$h_D m_D + h_I m_I - h_A m_A = -\frac{\tau}{g} \overline{E_v} = -\varepsilon_v. \quad (10.2.5)$$

donde $\overline{E_v}$ son las pérdidas de potencia mecánica por fricción viscosa, en promedio y ε_v es la integración de la energía perdida durante el tiempo de operación estacionaria τ .

Podemos ahora definir la **eficiencia máscica de D'Aubuisson**:

$$\eta_{mD} = \frac{m_D}{m_A} = \frac{m_D}{m_D + m_I}, \quad (10.2.6)$$

y la **eficiencia máscica de Rankine**:

$$\eta_{mR} = \frac{m_D}{m_I}. \quad (10.2.7)$$

Así mismo, podemos definir también las **eficiencias energéticas de D'Aubuisson y de Rankine** como:

$$\eta_{eD} = \frac{m_D h_D}{m_A h_A} = \frac{m_D h_D}{(m_D + m_I) h_A}, \quad (10.2.8)$$

y

$$\eta_{eR} = \frac{m_D h_D}{m_I h_A}, \quad (10.2.9)$$

respectivamente. La eficiencia energética de Rankine es la razón de la energía potencial de la descarga con relación a la energía potencial gastada en lograr dicha elevación. Además, existe una **relación entre la eficiencia másica de D'Aubuisson y la de Rankine**, que puede expresarse como:

$$\eta_{mD} = \frac{\eta_{mR}}{1 + \eta_{mR}}, \quad (10.2.10)$$

y otra relación entre las eficiencias másicas y las energéticas, para las **eficiencias de D'Aubuisson**:

$$\eta_{eD} = \frac{h_D}{h_A} \eta_{mD}. \quad (10.2.11)$$

De manera similar, para las **eficiencias de Rankine** vemos que:

$$\eta_{eR} = \frac{h_D}{h_A} \eta_{mR}. \quad (10.2.12)$$

Por su parte, de la ecuación (10.2.5) se puede despejar el término de la alimentación:

$$h_A m_A = h_D m_D + h_I m_I + \varepsilon_v = h_D m_D + \varepsilon_v; \quad (10.2.13)$$

esta última igualdad se puede simplificar, notando que $h_I = 0$, debido a que la salida de la válvula de impulso está en el nivel $h = 0$. Entonces se sigue que, al sustituir el término de la alimentación en el denominador de la ecuación (10.2.8), tenemos que la eficiencia energética de D'Aubuisson, también se puede escribir como:

$$\eta_{eD} = \frac{m_D h_D}{m_D h_D + \varepsilon_v} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_v}{m_D h_D}}, \quad (10.2.14)$$

Es decir, que los efectos de pérdidas viscosas, y otros que pudieran quedar englobados en el término ε_v , como la disipación dilatacional, si fuera el caso, explican cómo la eficiencia energética de D'Aubuisson tiende a uno cuando no hay pérdidas, de acuerdo con la ecuación (10.2.14).

10.2.5 Fases del funcionamiento de una bomba de ariete

El método de Krol (1951)¹ se usa con frecuencia para representar un ciclo de trabajo de la bomba de ariete. El ciclo de Krol se compone de siete fases o etapas que se representan en la figura 10.6. Sin embargo se pueden definir otras fases del ciclo, si la bomba en cuestión tiene otras características que las determinan; así Watt (1975) reporta solo cinco fases, cuatro determinadas por los estados de la válvula de impulso I y una, la primera, determinada por el cambio de la presión en la cercanía de dicha válvula, de una presión barométrica negativa hasta una presión que corresponde a la carga hidrostática desde la alimentación. Las fases del ciclo de Watt son:

Fase 1. La velocidad en la zona del impulso² es positiva y va en aumento desde cero, la válvula de impulso I está abierta y la presión, desde la zona del impulso sobre la válvula, es negativa.

¹Krol, J. (1951) *The Automatic Hydraulic Ram. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 165 (1), 53-73.

²Identificamos la zona de impulso (ZI), en la Figura 17.1, por su color azul, a diferencia de la zona de descarga (ZD), en color rojo.

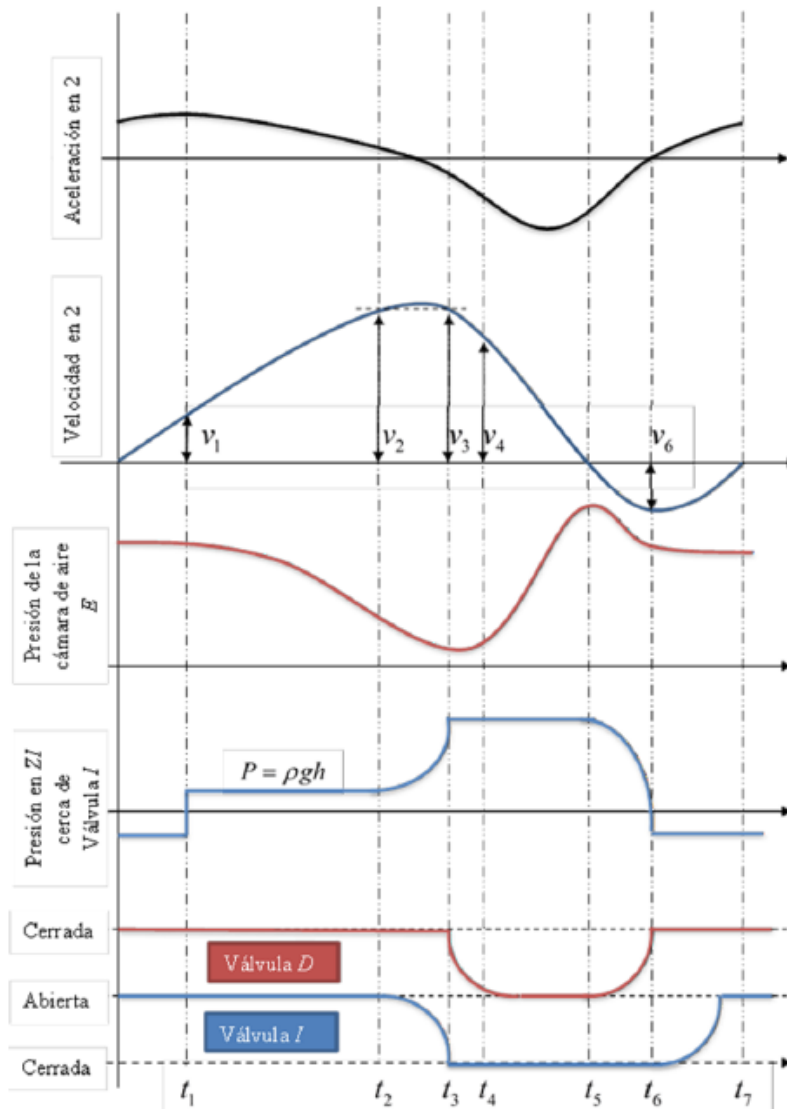


Figura 10.6: Ciclo de Krol, con siete fases y ciclo de Watt, con sólo cinco fases: t_1, t_2, t_3, t_6, t_7 .

Fase 2. La onda de presión desde *ZI* alcanza la válvula *I*, cambiando abruptamente su valor al de la carga hidrostática de la alimentación. La velocidad en *ZI* continúa creciendo y la válvula *I* continúa abierta.

Fase 3. La válvula *I* comienza a cerrarse, provocando un incremento de la presión en sus proximidades. La velocidad en *ZI* es máxima, pero ya no va en aumento.

Fase 4. La válvula *I* se ha cerrado totalmente, provocando el ariete de la presión, es decir, un aumento notable de la presión en las proximidades de la válvula, que a continuación se propaga hacia atrás en *ZI*, hasta el tanque de alimentación donde se disipa y retorna como una onda a la presión hidrostática, que al llegar a las proximidades de la válvula *I* cerrada, continúa disminuyendo hasta valores negativos. La velocidad en *ZI* disminuye hasta hacerse negativa, correspondiendo a la presión negativa.

Fase 5. La presión negativa sobre la válvula *I* provoca que se abra, lo que requiere un lapso de tiempo. Al irse abriendo, la velocidad, que es negativa, disminuye este carácter hasta llegar a cero, lo cual ocurre cuando la válvula *I* ya se ha abierto completamente, aunque la presión continúe siendo negativa.

Las fases de Krol coinciden con las de Watt, pero son siete porque Krol también concede importancia a los estados de la válvula de descarga D, la cual se abre y cierra cuando la válvula del impulso permanece cerrada. Es decir que la fase 4 de Watt se subdivide en tres fases de Krol: una cuando la válvula D se está abriendo (fase 4 de Krol), otra cuando permanece abierta (fase 5 de Krol) y una más cuando se está cerrando (fase 6 de Krol), correspondiendo la fase 5 de Watt a la fase 7 de Krol. Ver en la figura 10.6, las fases de Krol para reconocer en ellas las de Watt, de acuerdo a lo expresado.

11. Separaciones mecánicas

11.1 Separación de mezclas

11.1.1 Procesos y operaciones unitarias

En las actividades de la ingeniería química, la fabricación de compuestos químicos y, por extensión de las actividades y campos de conocimientos del ingeniero, la fabricación de materiales bioquímicos, biológicos y genéticos, **ocurren transformaciones de insumos para generar los productos** deseados.

En términos generales, **los productos son materiales** que no existían en los insumos, sino **que han surgido como resultados de las reacciones químicas o bioquímicas, y de las transformaciones biológicas o genéticas**, según los casos. Estos productos sólo pueden obtenerse con la calidad necesaria, si los insumos se combinan en las cantidades adecuadas, desde materiales que se presentan en formas de agregación y condiciones de operación adecuadas, en los tiempos adecuados, y los productos suelen estar, al finalizar la reacción, mezclados con otros materiales y subproductos, de los cuales **deberán separarse** para poder obtener los productos deseados con la calidad requerida.

EL CONJUNTO DE ACCIONES SECUENCIALES Y ESTIPULADAS SOBRE LOS INSUMOS CONFORMAN LOS PROCESOS DE FABRICACIÓN DE LOS PRODUCTOS FINALES,

muchas veces de acuerdo con normativas establecidas. Cada una de estas acciones u operaciones son las **operaciones unitarias de la industria** química, bioquímica, electroquímica, de la energía, etc.

Al inicio del proceso es necesario verificar la calidad de los insumos y establecer características del **preprocesamiento** necesario, para llevarlos a las condiciones que requiere su transformación, ver en la figura 11.1 el primer bloque, llamado **acondicionamiento**. Este consiste en acciones de molienda o aglutinamiento, mezclado, selección o tamizado, humidificación o secado y calentamiento o enfriamiento, entre otros. **El reactor es el corazón del proceso**; el elemento fundamental de la transformación de los insumos en los productos. Sin el reactor, el proceso puede existir, pero no está completo, como ocurre en **las refinerías**, cuyo proceso completo corresponde solamente al **preprocesamiento del petróleo**. Las fracciones ligeras corresponden a gasolinas, que son usadas

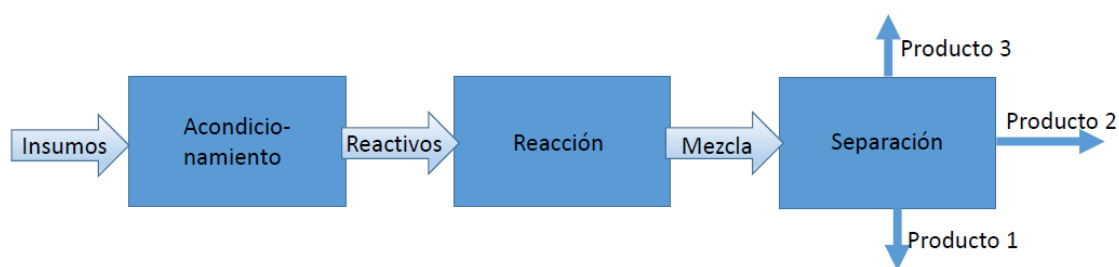


Figura 11.1: Secuencia de un proceso de fabricación completo.

posteriormente, principalmente en los motores de combustión interna de los automóviles, y otras fracciones que corresponden a diesel, gasóleos, y asfaltenos para diversos usos. Algunos de estos usos requieren de incorporar otros reactores, es decir, requieren llevar a cabo otros procesos, como es el caso de los gasóleos, que son hidrocarburos con cadenas de carbón mayores que las de las gasolinas. Estos hidrocarburos pueden ser fragmentados en reactores de desintegración catalítica, conocidos como reactores FCC, para generar más gasolinas, ante la elevada demanda de las mismas. **El proceso de FCC es un proceso completo**, ya que tiene un suministro de insumos o materiales acondicionados y alimentados, entre los cuales está el gasóleo, un reactor para la fractura de las moléculas del gasóleo, el reactor FCC, y productos de reacción, básicamente las gasolinas.

Las refinerías pueden interpretarse, también, como unidades de **postprocesamiento del petróleo**, si consideramos el petróleo crudo como el producto de **los yacimientos o campos petroleros que se entenderían como inmensos reactores bioquímicos** que han estado en operación durante millones de años, para ofrecernos, finalmente, su producto: el petróleo crudo. Vista de esta manera, **la refinería corresponde a la separación de los productos de reacción** y las gasolinas, así como las otras fracciones del petróleo, corresponden a los productos y subproductos del **proceso petroquímico primario**.

Otro proceso incompleto es la **potabilización del agua**, procedente de pozos en un manto acuífero o de ríos y arroyos. Es incompleto, porque el producto principal, agua potable, no es generado en una reacción, sino que ya existe en los insumos, aunque es necesario separarlo de sustancias nocivas que le disminuyen su calidad. Dependiendo de la calidad original del agua, se diseña un conjunto de operaciones de separación. El conjunto necesario de operaciones unitarias a realizar consiste sobre todo en un tratamiento para que cumpla con las normas estipuladas. Dependiendo de la calidad inicial del agua, será necesario realizar algunas operaciones unitarias para convertir el agua en potable. Las principales operaciones que podrían realizarse en una planta potabilizadora son: tamizado, coagulación-floculación, precipitación-sedimentación, decantación, filtración y desinfección con ozono, cloro o luz UV. En la potabilización del agua, todas las operaciones que hemos mencionado son operaciones mecánicas, porque el resultado de cada una de ellas se logra por la acción de una fuerza mecánica, así, el tamizado separa objetos sólidos que no pueden pasar por una malla, la coagulación-floculación no es exclusivamente mecánica, pues se mezcla en el agua un material que provoca el aglutinamiento de algunas sustancias, las cuales forman flóculos que precipitan en fase sólida. La decantación es una separación por influencia de una fuerza externa; puede ser la gravedad o una fuerza centrífuga. En la potabilización se acostumbra emplear la fuerza de gravedad, debido a los elevados volúmenes de agua para consumo humano. La filtración es, como el tamizado, la separación de sólidos mayores a un tamaño límite. Existe una diversidad de mallas y membranas para lograr la separación de sólidos muy pequeños, por efectos mecánicos, en la figura 11.3 se pueden apreciar los diversos tamaños y los nombres específicos de los tipos de filtración que les corresponden. Finalmente, la desinfección es una operación biofísica o bioquímica; consiste en desactivar bacterias mediante un agente físico, como

el ozono o la luz UV, o un agente químico, como el hipoclorito de sodio.

11.1.2 Mezclas homogéneas y mezclas heterogéneas

Ya sea petróleo crudo, gasóleo, agua cruda de pozo o de río, efluentes de un reactor de FCC, la corriente de productos de cualquier reactor o inclusive el agua de un arroyo a ser potabilizada, cualquiera de ellos es una mezcla, es decir, son corrientes de materiales formadas por una variedad de componentes y tienen, consecuentemente, una composición.

UNA *mezcla* ES UN MATERIAL COMPUESTO POR DOS O MÁS COMPONENTES.

Si agregamos una cucharada de sal al agua de un vaso, y agitamos, la sal se disuelve completamente, suponiendo que no alcanzamos el límite de saturación. Por otra parte, si agregamos una cucharada de arena al agua, y agitamos, la arena permanecerá en la forma de sus granos originales, arrastrándose en círculos sobre el fondo del vaso. La arena es insoluble en el agua; su estado de agregación, en el agua, seguirá siendo el que tenía cuando los dos componentes se encontraban separados, en tanto que la sal en el agua se disuelve completamente distribuyéndose uniformemente en la masa de agua, en la forma de partículas iónicas, es decir que, **la sal en el agua forma una sola fase y una mezcla homogénea, en tanto que la arena en el agua se mantiene en dos fases y forma una mezcla heterogénea.**

Cada grano de arena puede ser llamado un cúmulo o agregado. Para precisar los conceptos, decimos que

EN UNA *mezcla heterogénea*, LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LA COMPONENTE K -ÉSIMA OCURRE EN UNA ESCALA MAYOR O IGUAL A LA LOCAL, FORMANDO UNA FASE DISTINTA AL RESTO DE LAS COMPONENTES, CON $\mathcal{C}_K \geq \xi_K$, DONDE $\mathcal{C}_K$ SON LOS CÚMULOS DE LA COMPONENTE PURA Y ξ_K ES UNA PARTÍCULA MATERIAL DE LA MISMA.

Por otra parte,

EN UNA *mezcla homogénea*, NO ES POSIBLE DISTINGUIR CÚMULOS DE LA K -ÉSIMA COMPONENTE OCUPANDO REGIONES DISTINTAS DEL ESPACIO, PORQUE SU COMBINACIÓN ESPACIAL CON LAS OTRAS COMPONENTES OCURRE EN UNA SOLA FASE Y EN LA ESCALA MOLECULAR.

11.1.3 Principios de separación

Para separar una mezcla en sus componentes es necesario aplicar las fuerzas adecuadas sobre las componentes a separar, es decir, debe producirse una selección, pues **la fuerza que promueve la separación debe actuar de manera diferenciada sobre la componente a separar que sobre las otras componentes.**

La separación de mezclas homogéneas requiere la acción de fuerzas selectivas sobre las moléculas de las componentes, lo que sugiere la activación **de fuerzas químicas y fuerzas térmicas**, que actúan en la escala molecular, o de otras fuerzas que también pueden actuar en el nivel molecular, como podrían ser fuerzas eléctricas aplicadas a partículas con cargas eléctricas, es decir, a materiales iónicos. Por otra parte,

EN LAS MEZCLAS HETEROGÉNEAS, LA SEPARACIÓN SE PUEDE LOGRAR APLICANDO FUERZAS MECÁNICAS, QUE ACTÚEN SOBRE LA EXTENSIÓN COMPLETA DE LOS CÚMULOS, YA SEA SOBRE SUS VOLÚMENES O SOBRE SUS SUPERFICIES.

Las mezclas heterogéneas generalmente tienen una fase continua y una o varias fases dispersas, inmersas en la fase continua. Considerando mezclas de sólo dos fases, podemos tener las compo-

siciones de fase que se muestran en la figura 11.2, donde cada una de las mezclas está señalada por la flecha de dos puntas que une las fases señaladas por sus puntas. Así hay mezclas de sólidos en sólidos, sólidos en líquidos y sólidos en gases. Además hay líquidos en líquidos y líquidos en gases. Todos los gases en contacto forman una sola fase. La separación de un gas en una mezcla gaseosa no puede ser solamente una separación mecánica, es necesario que la componente a separar sea transferida a un material distinto en otra fase, para ser luego separada y recuperada desde este material. Esto es lo que ocurre, por ejemplo en las nubes, donde al inicio, el vapor de agua forma una sola fase con el aire y asciende con él arriba de las montañas, donde se enfría y eventualmente se condensa en una finísima brisa que al coalescer, en gotitas mas grandes, se precipita en la forma de lluvia, aunque si pasa a la región del sólido de su diagrama de fases, puede precipitar en forma de nieve o de granizo, de acuerdo a la intensidad y la velocidad de los procesos de condensación y sublimación.

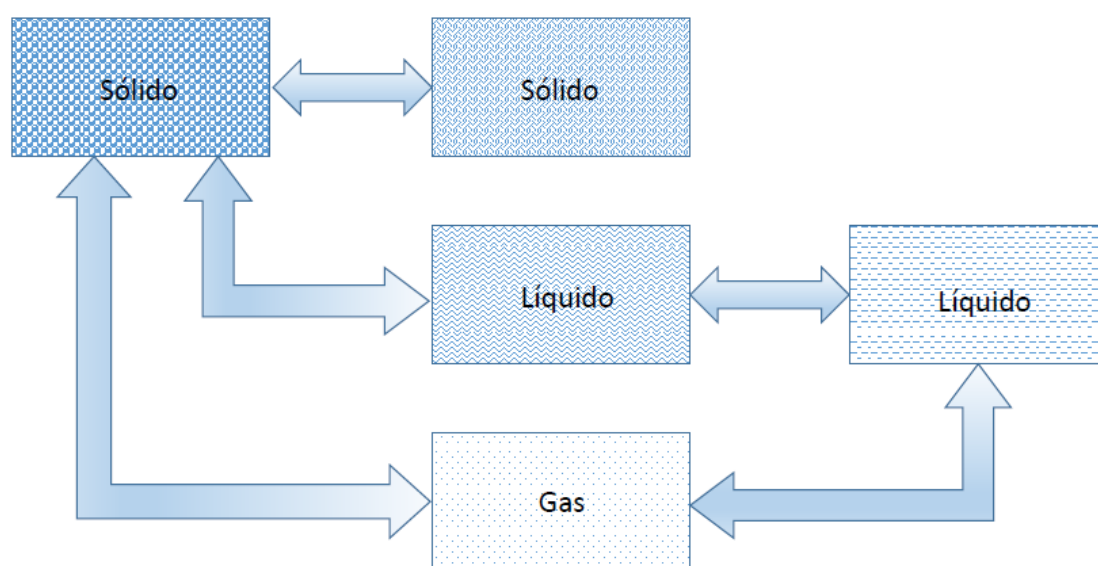


Figura 11.2: Separaciones de mezclas heterogéneas de dos fases.

11.1.4 Separaciones mecánicas

Las separaciones mecánicas se producen por la acción de fuerzas mecánicas sobre las partículas o cúmulos. Las fuerzas pueden actuar sobre las masas o sobre las superficies de los cúmulos. Las fuerzas másicas o volumétricas son, fundamentalmente la **fuerza de gravedad**, que actúa diferenciadamente sobre las componentes de **distinta densidad** con respecto a la densidad de las otras componentes. Aquí, la coordenada vertical es importante: la fuerza de flotación será ascendente para las componentes de menor densidad y será descendente para las componentes con mayor densidad, como ocurre en la **sedimentación** y en la **decantación**.

Si la diferencia de densidades entre la componente pesada y el resto de componentes es pequeña, la separación por medio de la fuerza de gravedad se hace muy lenta y requeriría equipos de separación de tamaños gigantescos, pero es posible generar otras fuerzas volumétricas que actúen, de manera diferenciada, sobre las masas de las componentes. Una es la **fuerza centrífuga**, cuya magnitud puede ser manejada a voluntad, por medio de un aparato de movimiento rotacional que induce fuerzas centrífugas de diversas magnitudes, de cuya aplicación resulta la **centrifugación** y la **sedimentación centrífuga**.

La idea de simular el campo gravitatorio con otra fuerza, como la centrífuga, puede ser

extendida a otras operaciones mecánicas, como la **precipitación electrostática**, que resulta al generar un campo eléctrico estático entre dos electrodos y hacer pasar una mezcla gaseosa, como el aire con partículas de polvos finos, por el espacio entre los electrodos. La tabla 11.1 muestra una clasificación de las operaciones mecánicas de mezclas bifásicas, de acuerdo a la fuerza que discrimina los cúmulos de la fase continua, la propiedad o atributo que hace la diferencia, el medio, agente o ayuda que favorece la separación y el nombre de la operación de separación.

Tabla 11.1. Fuerzas y propiedades de las separaciones mecánicas de dos fases				
Fases†	Fuerza	Atributo	Medio/agente	Nombre
S/S*	Gravedad	Tamaño	Mallas	Tamizado
S/S/L*‡	Gravedad vs. arrastre	Densidad/superficie	Flujo de líquido	Clasificación
S/S/G*‡	Gravedad vs. arrastre	Densidad/superficie	Flujo de aire	Clasificación neumática
S/S♣	Magnetostática	Magnetismo	Imanes	Separación magnetostática
S/S♠	Electrostática	Electricidad	Campo eléctrico	Separación electrostática
S/G	Electrostática	Electricidad	Campo eléctrico	Precipitación electrostática
S/G	Centrífuga	Densidad	Flujo de aire	Ciclones
S/L	Gravedad	Densidad	Semillas ◇	Sedimentación
S/L	Centrífuga	Densidad	Semillas ◇	Centrifugación
S/L	Centrífuga	Densidad	Flujo de líquido	Hidrociclones
S/L	Presión	Tamaño	Medios porosos, mallas y tejidos	Filtración‡
S/L	Presión	Tamaño	Membranas	Microfiltración‡
S/L	Presión	Tamaño	Membranas	Ultrafiltración‡
S/L	Presión	Tamaño	Membranas	Nanofiltración‡
S/G/L‡	Tensión superficial	Ángulo de contacto	Espumas	Flotación
L/L	Gravedad	Densidad	Coalescencia	Decantación
L/L	Centrífuga	Densidad	Coalescencia	Decantación centrífuga

† Las siglas D/C indican las iniciales de las fases discreta y continua, en ese orden.
 * Una sola fase sólida que se presenta mezclada con cierta distribución de tamaños.
 ‡ La última sigla indica la fase continua; todas las anteriores, las fases discretas.
 ♣ Ambas son fases sólidas particuladas. Una de ellas presenta actividad magnética.
 ♠ Ambas son fases sólidas particuladas. Una de ellas presenta actividad electrostática.
 ◇ Las semillas son pequeñas partículas que se agregan para favorecer la nucleación, el aglutinamiento o la precipitación en cúmulos de mayor tamaño.
 ‡ Los distintos tipos de filtración se distinguen por los tamaños de poros. Ver figura 11.3.

Además de las fuerzas que actúan sobre la diferencia de densidades, otros parámetros de la mayor importancia en las separaciones mecánicas son las fuerzas superficiales en la flotación de sólidos, así como el **tamaño y la forma** de los cúmulos. **El tamaño es muy importante, tanto en la flotación**, donde los tamaños pequeños implican grandes curvaturas, lo cual afecta los ángulos de contacto, como en la etapa de **acondicionamiento para la reacción**, donde los tamaños pequeños favorecen la magnitud de las áreas de transferencia. Así, cobra interés la **molienda**, para reducir el tamaño de las partículas sólidas a valores uniformes y pequeños. Así mismo, el tamaño determina

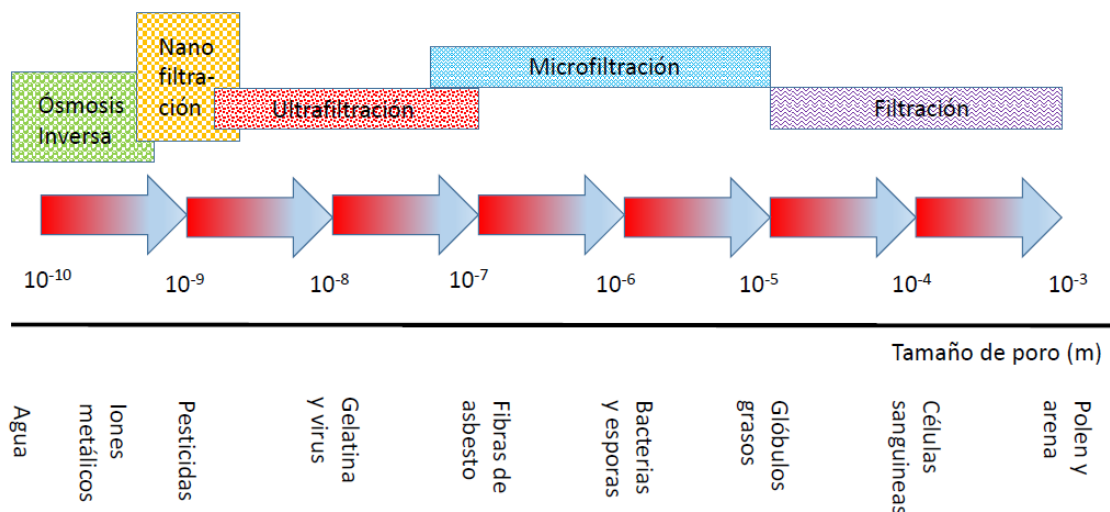


Figura 11.3: Rangos de tamaños de poro para distintos tipos de filtración.

tanto la magnitud de la superficie de los cúmulos sólidos, como su masa, de manera que los cúmulos pueden ser arrastrados por una corriente de líquido a diversas velocidades, con lo cual la fuerza de arrastre, en combinación con las masas de los cúmulos, provocan la separación por tamaños de cúmulos, llamada **clasificación**.

Relacionadas con los tamaños están las **separaciones por medio de retículas**. El **cribado o tamizado** es la separación de partículas sólidas por un conjunto de recipientes con fondo de mallas de diversas aberturas, colocadas con la más abierta en la parte superior y la más cerrada en la inferior. En el mismo sentido se usan las rejillas de desbaste y alcantarillas para impedir el paso a objetos grandes en aguas a ser tratadas.

La filtración es una operación mecánica en la cual el tamaño medio de poro y la distribución de tamaños de poros, determinan los tamaños de las partículas sólidas que quedan retenidas, y cuáles siguen su curso. La filtración, en conjunto con **la microfiltración, la ultrafiltración y la nanofiltración**, cubren una gama muy amplia de tamaños de sólidos que pueden ser retenidos. En la figura 11.3 se muestran los rangos de tamaños de poros de los diferentes conceptos de filtración, desde los amstrongs ($10^{-10}m$) hasta los milímetros ($10^{-3}m$).

Para **separar mezclas homogéneas** se pueden diseñar procesos de separación basados en la idea de **producir cambios de fase** que concentren el componente deseado en una de ellas y **separar las fases resultantes** por medio de las **operaciones mecánicas** adecuadas. Esta idea nos recuerda lo que hemos mencionado que ocurre en las nubes. También es así como funciona la **crystalización**, donde una solución líquida concentrada evapora una porción más del líquido quedando, como una solución sobresaturada, en la posibilidad de precipitar cristales de la sal, lo cual ocurre, o espontáneamente o con la ayuda de semillas de cristalización. También la destilación es un proceso con cambios de fase, donde parte del líquido se evapora, enriqueciéndose en las componentes más volátiles, para luego condensarse y recuperar mezclas enriquecidas en dichas componentes. Estos cambios de fase requieren de energía térmica, no únicamente mecánica, por lo cual no son parte del presente estudio.

11.2 Flujo alrededor de un cuerpo esférico

11.2.1 Principios de separación mecánica

En la sección anterior hemos podido notar cómo, la interacción de pequeños cúmulos o partículas de un compuesto sólido con una corriente de líquido, es muy importante para las separaciones mecánicas. También lo es el movimiento de gotas de un líquido en el seno de otro, completamente inmiscible, como ocurre en la decantación. Más aún, el conocimiento del arrastre de burbujas de aire en una tina de flotación donde una suspensión de pequeñas partículas sólidas sobrenada en un líquido, y la capacidad de estas burbujas de aglutinar estas partículas y elevarlas hasta suspenderlas en la forma de una espuma, en la parte superior de la tina, son aspectos importantes para el diseño y la operación de equipos de flotación.

LAS INTERACCIONES DE PARTÍCULAS Y FLÓCULOS SÓLIDOS, GOTAS DE LÍQUIDOS Y BURBUJAS DE GASES, EN EL SENO DE UN FLUIDO CONTINUO, LÍQUIDO O GAS, BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA MECÁNICA QUE PRODUCE UNA DIFERENCIA EN EL MOVIMIENTO DE LA COMPONENTE A SEPARAR CON RESPECTO AL RESTO, ES EL ASPECTO MÁS IMPORTANTE A CONSIDERAR EN EL DISEÑO Y LA OPERACIÓN DE LOS EQUIPOS PARA LAS SEPARACIONES MECÁNICAS.

Por ello, en esta sección nos proponemos describir el movimiento de un fluido newtoniano alrededor una partícula sólida, como el prototipo de estas interacciones, que será muy útil como una aproximación a las interacciones de una fase dispersa y una continua.

11.2.2 Planteamiento del prototipo

Como punto de partida, consideremos el **flujo incompresible de un fluido newtoniano** alrededor de una **partícula esférica estacionaria**. Son dos los casos extremos que se encuentran resueltos y se encuentran más frecuentemente reportados en los libros de texto. Uno es para flujos muy lentos, cuando las fuerzas inerciales son despreciables, comparadas con la resistencia viscosa. El otro es el caso inverso, es decir, cuando las fuerzas viscosas son despreciables, comparadas con la inercia del flujo. Trataremos ambos casos a continuación, ambos con un mismo planteamiento general, que referimos a continuación.

Consideremos una esfera sólida fija, de radio R y diámetro $D = 2R$, cuyo centro coincide con el origen de un sistema coordenado, expresado tanto en coordenadas cartesianas (x, y, z) como en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , como puede verse en la figura 11.4. La esfera se encuentra sumergida en un fluido, el cual se mueve en la dirección opuesta a la dirección de la gravedad, donde $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\delta}_z$ es la aceleración de la gravedad y $\mathbf{v}_\infty = v_\infty\boldsymbol{\delta}_z$ es la velocidad de flujo no perturbada por la presencia de la esfera, esto es la velocidad de flujo muy lejos de la esfera, o antes de colocar la esfera en este flujo. Es decir que, en el fluido estancado, definimos un sistema coordenado y lo hacemos viajar en dirección vertical descendente, con una velocidad constante, de magnitud v_∞ . Si nos imaginamos en una microcápsula viajando en el origen de este sistema coordenado sin perturbar el flujo, resulta para nosotros que es el fluido el que vemos viajando a nuestro encuentro, de la misma manera que los objetos exteriores viajan hacia nosotros cuando viajamos en un automóvil. Entonces, notamos desde el origen de coordenadas, que el fluido que vemos al frente, se dirige a nuestro encuentro con una velocidad cuya magnitud es la constante v_∞ y viaja en la dirección del eje coordenado z , cuyo vector unitario es $\boldsymbol{\delta}_z$ y satisface la transformación de coordenadas $\boldsymbol{\delta}_z = \cos\theta\boldsymbol{\delta}_r - \sin\theta\boldsymbol{\delta}_\theta$ (Bird, ecuación A.6-33).

El flujo es estacionario, es decir que no depende del tiempo. La velocidad de flujo $\mathbf{v}$ se puede expresar como una función $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(r, \theta)$. Nótese que, expresada en coordenadas esféricas, la velocidad exhibe su simetría, en cuanto a que no depende de la coordenada ϕ . Podemos expresar la

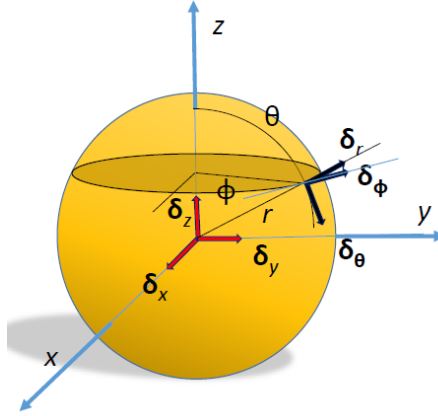


Figura 11.4: Cúmulo esférico con sistemas de coordenadas rectangulares $\{\delta_x, \delta_y, \delta_z\}$ y esféricas polares $\{\delta_r, \delta_\theta, \delta_\phi\}$.

velocidad de flujo $\mathbf{v}$ como:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty - \mathbf{u}, \quad (11.2.1)$$

donde $\mathbf{u}$ representa el cambio de la velocidad de flujo debido a la presencia de la esfera y se conoce como el defecto de la velocidad de flujo.

La aceleración $\mathbf{a}$ de una partícula material de fluido ξ es la derivada material:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (11.2.2)$$

que en los flujos estacionarios se reduce al término convectivo $\mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Así, el flujo estacionario de un fluido newtoniano incompresible, incidiendo sobre una esfera sólida, satisface la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (11.2.3)$$

y tiene por balance de momentum la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (11.2.4)$$

donde $\mathcal{P} = p + \rho g z = p + \rho g r \cos \theta$ es la presión modificada. Además del término de la presión, la ecuación (11.2.4) tiene, en su lado izquierdo el término convectivo o inercial y del lado derecho, el término viscoso. En cualquier caso, podemos estimar el tamaño de cada uno de estos dos terminos, así como el tamaño del término de la presión.

11.2.3 Adimensionalización

Para hacer estas estimaciones seguimos un procedimiento de adimensionalización de las ecuaciones (11.2.3) y (11.2.4). Lo primero es determinar las escalas que intervienen en las variables presentes en las ecuaciones de Navier-Stokes, para cada situación específica. Así, hay que considerar una escala de longitud, que es el diámetro de la esfera, D ; además hay una escala de velocidad, que es la del flujo no perturbado por la presencia de la esfera, cuya magnitud es v_∞ . Con estas dos escalas podemos definir factores de escala de las variables, es decir, de la velocidad y la presión, además de definir una longitud adimensional, de modo que

$$\mathbf{v} = v_\infty \check{\mathbf{v}}, \quad (11.2.5)$$

$$\nabla = \frac{1}{D} \check{\nabla}, \quad (11.2.6)$$

donde las variables con acento breve: $\check{v}$ y $\check{\nabla}$ son variables adimensionales, que resultan iguales a las variables dimensionales correspondientes, al ser multiplicadas por sus factores de escala correspondientes, para este problema. Al sustituir las ecuaciones (11.2.5) y (11.2.6) en (11.2.3) y (11.2.4) obtenemos:

$$\frac{v_\infty}{D} \check{\nabla} \cdot \check{v} = 0, \quad (11.2.7)$$

$$\frac{\rho v_\infty^2}{D} \check{v} \cdot \check{\nabla} \check{v} = -\frac{1}{D} \check{\nabla} \mathcal{P} + \frac{\mu v_\infty}{D^2} \check{\nabla}^2 \check{v}. \quad (11.2.8)$$

Como la razón de los factores de escala v_∞/D no puede ser cero, entonces obtenemos una ecuación de continuidad en variables adimensionales:

$$\check{\nabla} \cdot \check{v} = 0. \quad (11.2.9)$$

El siguiente paso consiste en elegir uno de los dos términos del balance del ímpetu (11.2.8), ya sea el término inercial o el término viscoso, el cual deseamos expresar como el término líder, con coeficiente de uno.

Primer caso: el término viscoso es el término principal y tiene coeficiente de uno, entonces multiplicamos la ecuación (11.2.8) por el factor $D^2/\mu v_\infty$ y encontramos:

$$\frac{\rho v_\infty D}{\mu} \check{v} \cdot \check{\nabla} \check{v} = -\frac{D}{\mu v_\infty} \check{\nabla} \mathcal{P} + \check{\nabla}^2 \check{v}. \quad (11.2.10)$$

Como el término líder tiene coeficiente de uno, el coeficiente del término inercial debe ser mucho menor que uno, es decir que el número de Reynolds, Re , satisface que

$$Re = \frac{\rho v_\infty D}{\mu} \ll 1. \quad (11.2.11)$$

Entonces, podemos despreciar el término inercial en la ecuación (11.2.8); sin embargo, el equilibrio de fuerzas requiere que los efectos viscosos sean compensados por el término de la presión, el cual debe tener también un coeficiente del orden de uno. Esto se logra introduciendo el coeficiente del término de la presión, el cual es constante, dentro del operador diferencial nabla y definiendo la presión modificada adimensional:

$$\check{\mathcal{P}} = \frac{D \mathcal{P}}{\mu v_\infty}, \quad (11.2.12)$$

con lo cual tenemos, para los flujos reptantes, que:

$$\check{\nabla} \check{\mathcal{P}} = \check{\nabla}^2 \check{v} \quad \text{si} \quad Re \ll 1, \quad (11.2.13)$$

donde la presión se ha adimensionalizado con la magnitud de los efectos viscosos.

Por otra parte, el **segundo caso es cuando el término inercial es el término principal**. Entonces se aplica el procedimiento anterior a la ecuación (11.2.8), buscando que el coeficiente del término inercial sea de uno. Para ello, la ecuación (11.2.8) se multiplica por el factor $D/\rho v_\infty^2$, para encontrar que

$$\check{v} \cdot \check{\nabla} \check{v} = -\frac{1}{\rho v_\infty^2} \check{\nabla} \mathcal{P} + \frac{\mu}{\rho v_\infty D} \check{\nabla}^2 \check{v}, \quad (11.2.14)$$

donde el coeficiente del término viscoso debe ser muy pequeño, comparado con el coeficiente del término inercial, que es uno. Es decir que

$$\frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\rho v_\infty D} \ll 1. \quad (11.2.15)$$

Así, al despreciar el término viscoso comparado con el inercial, y al definir ahora una presión modificada adimensional $\tilde{\mathcal{P}}$, tal que

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{\rho v_\infty^2}, \quad (11.2.16)$$

es decir, una presión adimensional escalada en los efectos inerciales, podemos despreciar los efectos viscosos y expresar la ecuación de los fluidos ideales, en su forma adimensional:

$$\check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{\mathbf{v}} = -\check{\nabla} \tilde{\mathcal{P}} \quad \text{si } Re \gg 1. \quad (11.2.17)$$

En algunos libros de texto no se ha insistido lo suficiente en que

LA PRESIÓN SE DEBE ADIMENSIONALIZAR DE ACUERDO CON EL EFECTO DOMINANTE, EN UNA PRESIÓN ADIMENSIONAL $\tilde{\mathcal{P}}$ ESCALADA EN LA DENSIDAD SUPERFICIAL DE LAS FUERZAS VISCOSAS $\mu v_\infty / D$ O EN UNA PRESIÓN ADIMENSIONAL $\tilde{\mathcal{P}}$, ESCALADA EN LA DENSIDAD VOLUMÉTRICA DE LA ENERGÍA CINÉTICA ρv_∞^2 , DE ACUERDO CON EL CASO LÍMITE CONSIDERADO, DE FLUJO REPTANTE O DE FLUJO IDEAL, RESPECTIVAMENTE.

11.2.4 Flujo reptante alrededor de un sólido esférico

Los flujos reptantes son flujos muy lentos; en ellos la resistencia viscosa cerca de los objetos sólidos estáticos es el aspecto dominante, que obliga al fluido a pegarse a la superficie del sólido y resbalar lentamente sobre dicha superficie, lo cual se conoce como “*reptar*” sobre la superficie del sólido. Los términos importantes de las ecuaciones de Navier-Stokes son los que corresponden a la ecuación (11.2.13), que en el sistema de coordenadas esféricas, con la velocidad dada por las componentes

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.2.18)$$

corresponde al sistema de ecuaciones:

Ecuación de continuidad (a partir de Bird, ecuación (B.4-3)):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0. \quad (11.2.19)$$

Ecuación de momentum en r (a partir de Bird, ecuación (B.6-7)):

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad (11.2.20)$$

Ecuación de momentum en θ (a partir de Bird, ecuación (B.6-8)):

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} + \frac{\mu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]. \quad (11.2.21)$$

Son tres ecuaciones independientes para las variables $\{\mathcal{P}, v_r, v_\theta\}$. Las condiciones a la frontera son:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \quad \text{para } \theta = \frac{\pi}{2}, r \geq \frac{D}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (11.2.22)$$

$$v_r = v_\theta = 0 \quad \text{para } r = \frac{D}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (11.2.23)$$

$$v_r = v_\infty \cos \theta, \quad \text{para } r \rightarrow \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (11.2.24)$$

$$v_\theta = -v_\infty \sin \theta, \quad \text{para } r \rightarrow \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (11.2.25)$$

El presente es uno de los ejemplos más frecuentemente tratados en los libros de texto, por lo cual solamente señalamos algunos libros donde se puede seguir alguno de los diversos métodos de solución¹, y a continuación expresamos la solución en la forma referida por el Bird, sección 2.6:

$$v_r = v_\infty \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \quad (11.2.26)$$

$$v_\theta = v_\infty \left[-1 + \frac{3R}{4r} + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta, \quad (11.2.27)$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 - \frac{3\mu v_\infty}{2R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta, \quad (11.2.28)$$

A partir de la solución dada en las ecuaciones (11.2.26), (11.2.27) y (11.2.28), es posible estimar cantidades importantes para el movimiento de cúmulos en un fluido. Dos de las cantidades de la mayor importancia son el coeficiente de rozamiento C_D y la velocidad terminal de una esfera en el seno de un fluido, v_∞ , como función de la diferencia de densidades entre el sólido y el fluido, así como del tamaño de la esfera. Para estimar el coeficiente de rozamiento, hemos de evaluar la fuerza del fluido sobre la esfera.

11.2.5 Fuerza del fluido sobre el cuerpo esférico

El cuerpo esférico se encuentra sujeto a las fuerzas de la gravedad, es decir, su peso, así como a las fuerzas que el fluido ejerce sobre el sólido. Podemos estimar esta última a partir del tensor de los esfuerzos moleculares $\boldsymbol{\pi} = p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}$. Dicho estimado corresponde a la integración:

$$\mathbf{F} = \oint_{\mathcal{S}} -\boldsymbol{\delta}_r \cdot \boldsymbol{\pi} dS, \quad (11.2.29)$$

donde $\mathcal{S}$ es la superficie de la esfera y $\boldsymbol{\delta}_r$ es su vector unitario normal, dirigido hacia el fluido, ver la figura 11.4. Al sustituir las particularidades del problema y estimar la componente de la fuerza en la dirección z , tenemos que:

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\delta}_z = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\boldsymbol{\delta}_r \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\delta}_z r^2 \big|_{r=R} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (11.2.30)$$

pero sabemos que $\boldsymbol{\delta}_z = \cos \theta \boldsymbol{\delta}_r - \sin \theta \boldsymbol{\delta}_\theta$, entonces

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\delta}_z = F_z = 2\pi \int_0^\pi -\boldsymbol{\delta}_r \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot (\cos \theta \boldsymbol{\delta}_r - \sin \theta \boldsymbol{\delta}_\theta) \big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta. \quad (11.2.31)$$

Finalmente, la componente z de la fuerza del fluido sobre la esfera es:

$$F_z = 2\pi \int_0^\pi (-\pi_{rr} \cos \theta + \pi_{r\theta} \sin \theta) \big|_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta. \quad (11.2.32)$$

Como fue dicho arriba, los esfuerzos moleculares corresponden a esfuerzos hidrostáticos más esfuerzos viscosos. Por otra parte, el primer sumando del término entre paréntesis, corresponde a las fuerzas normales y el segundo a las fuerzas tangenciales. Entonces

$$F_z^{(n)} = 2\pi R^2 \int_0^\pi -(p + \tau_{rr}) \big|_{r=R} \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (11.2.33)$$

¹El procedimiento de solución más antiguo es atribuido a Stokes, según Schlichting (1979). Bird (2006) y muchos otros, elaboran la solución empleando una función de corriente y el método de separación de variables. Landau y Lifshitz (1985) despliegan un procedimiento que se elabora a partir de las propiedades de los vectores axiales y polares. Levi (1965) expone la teoría de Oseen usando el método de Lamb, que consiste en proponer una solución compuesta por un campo potencial más uno rotacional. Currie (2003) superpone soluciones de un flujo uniforme, un doblete y un stokesleto para simular el flujo alrededor de una esfera.

es la componente normal y

$$F_z^{(t)} = 2\pi R^2 \int_0^\pi \tau_{r\theta}|_{r=R} \sin^2 \theta d\theta. \quad (11.2.34)$$

es la componente tangencial de la fuerza del fluido sobre la esfera. Las componentes de los esfuerzos viscosos τ_{rr} y $\tau_{r\theta}$ son funciones de las derivadas parciales de las componentes de la velocidad v_r y v_θ y están dadas por las ecuaciones (B.1-15) y (B.1-18) del Bird. Al sustituir las componentes de la velocidad y derivar las expresiones mencionadas, es posible realizar las integrales, para obtener:

$$F_z^{(n)} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 2\pi\mu R v_\infty \quad (11.2.35)$$

y

$$F_z^{(t)} = 4\pi\mu R v_\infty. \quad (11.2.36)$$

Las dos componentes son positivas, es decir, coinciden en su dirección con el eje coordenado z , que es opuesto a la acción de la gravedad. El primer término de la ecuación (11.2.35) es la fuerza que equivale al peso de fluido desplazado por la presencia de la esfera, dirigido de manera ascendente. En siguiente sumando en la ecuación (11.2.35) corresponde a la fricción de forma, asociada a la parte de la presión que depende de la velocidad v_∞ , en tanto que la integral de τ_{rr} da cero. La componente tangencial de las fuerzas superficiales sobre la esfera corresponde a la ecuación (11.2.36), es la fricción cortante o de cizalla, y es el doble de la fricción de forma. Al sumar las dos contribuciones encontramos la componente vertical de las fuerzas del fluido sobre la esfera:

$$F_z = F_b + F_k = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R v_\infty, \quad (11.2.37)$$

donde F_b es la fuerza de flotación, que equivale al peso del fluido desplazado por la presencia de la esfera y F_k es la fuerza cinética, es decir, la fuerza debida al movimiento del fluido, proporcional por lo tanto, a la velocidad de flujo.

11.2.6 Velocidad terminal de un cuerpo esférico

Consideremos ahora que soltamos una pequeña partícula esférica en un líquido. Si la partícula es más densa que el líquido, se hundirá en él y si es menos densa, flotará. Haciendo un balance de fuerzas sobre una partícula descendiendo en el seno del líquido, tenemos:

$$M \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} + M\mathbf{g}, \quad (11.2.38)$$

es decir, que la suma de las fuerzas sobre la partícula son la fuerza del fluido, $\mathbf{F}(t)$, la cual en general, es una función del tiempo, más la fuerza de la gravedad $M\mathbf{g}$, que sumadas son iguales al producto de la masa M por la aceleración de la partícula sólida, $d\mathbf{u}/dt$.

La aceleración de la partícula es importante en el intervalo inicial de tiempo. Más adelante, cuando la partícula se aproxima a una velocidad constante, $\mathbf{u}_\infty$, propia del equilibrio de fuerzas, la aceleración tiende a cero y la suma de las fuerzas es igual a cero, es decir, hay equilibrio mecánico:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} + M\mathbf{g}. \quad (11.2.39)$$

En esta situación, vemos que la partícula sólida cae en el fluido con velocidad constante $\mathbf{u}_\infty = u_\infty(-\delta_z)$, es decir, en la dirección de la gravedad, que es opuesta a la dirección del eje coordenado z , ver figura 11.4. Si consideramos un sistema coordenado sujeto al centro de la esfera,

en lugar de ver el desplazamiento del sólido, veremos que el fluido se aproxima al sólido con una velocidad constante $\mathbf{v}_\infty = v_\infty(\boldsymbol{\delta}_z)$, de modo que $\mathbf{u}_\infty = -\mathbf{v}_\infty$, y también $u_\infty = v_\infty$. Podemos entonces sustituir la ecuación (11.2.37) en la componente vertical de la ecuación (11.2.39), sustituyendo la masa del sólido por $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$:

$$0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 6\pi\mu R v_\infty - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g, \quad (11.2.40)$$

La ecuación (11.2.40) puede ser muy útil para medir la viscosidad del fluido o para encontrar la velocidad terminal del sólido, dependiendo de la **ecuación de trabajo** que se despeje para el efecto. Así, tenemos:

$$\mu v_\infty = \frac{2}{9}R^2 (\rho_s - \rho) g. \quad (11.2.41)$$

De acuerdo a los propósitos que se presenten, esta relación puede permitir la estimación de la viscosidad, midiendo la velocidad terminal del sólido, o se puede estimar la velocidad terminal, si se conoce la viscosidad del fluido. En ambos casos es necesario conocer las densidades de ambos componentes, así como el diámetro de la esfera.

11.2.7 Coeficiente de rozamiento con flujo reptante

Con respecto a la ecuación (11.2.37), hemos dicho que la fuerza cinética es el término proporcional a la velocidad de flujo, es decir,

$$F_k = 6\pi\mu R v_\infty, \quad (11.2.42)$$

en tanto que la fuerza cinética por unidad de área, F_k/A , debe ser proporcional a la energía cinética por unidad de volumen $\frac{1}{2}\rho v_\infty^2$. Definimos el coeficiente de rozamiento, C_D , como el factor de proporcionalidad entre las dos cantidades anteriores, es decir:

$$\frac{F_k}{A} = C_D \frac{1}{2}\rho v_\infty^2. \quad (11.2.43)$$

Claramente, las dimensiones de fuerza entre área son equivalentes a las dimensiones de energía entre volumen, puesto que las dimensiones de energía son las mismas que las de trabajo, es decir, fuerza por desplazamiento. Entonces C_D es adimensional. Despejando C_D en la ecuación (11.2.43), y sustituyendo la ecuación (11.2.42):

$$C_D = \frac{12\pi\mu R}{A\rho v_\infty}. \quad (11.2.44)$$

Aún falta definir A , el área más apropiada para la representación de la proporcionalidad propuesta en la ecuación (11.2.43), una sería el área de la superficie de la esfera; otra, el área proyectada por la esfera en la dirección del flujo. La primera da mayor importancia a la fricción cortante o de cizalla, la cual es proporcional a la superficie de la esfera. La segunda, por el contrario, toma en cuenta el área mayormente relacionada con la fricción de forma, es decir, las fuerzas de presión. Sin embargo, entre ellas dos no hay mayor diferencia que un factor numérico de cuatro y la costumbre es considerar el área proyectada por la esfera en la dirección de flujo, es decir que $A = \pi R^2$. Sustituyendo esta área en la ecuación (11.2.44), llegamos a la **relación para flujo reptante**:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}; \quad \text{donde} \quad \text{Re} = \frac{\rho v_\infty D}{\mu} \quad (11.2.45)$$

es el número de Reynolds para el flujo alrededor de cuerpos esféricos.

11.2.8 Coeficiente de rozamiento vs. número de Reynolds

La ecuación (11.2.45) pone en evidencia que el coeficiente de rozamiento es una función del número de Reynolds, es decir que $C_D = C_D(\text{Re})$. Además, esa función es $24/\text{Re}$ para los flujos reptantes. La representación gráfica de la función $C_D(\text{Re})$ se encuentra en la mayoría de los textos de mecánica de fluidos, generalmente en escalas logarítmicas. Bird presenta también, expresiones de C_D que ajustan en determinadas zonas de la función Re , como sigue:

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{24}{\text{Re}} && \text{para } \text{Re} < 10^{-1} \\ C_D &= \left(\sqrt{\frac{24}{\text{Re}}} + 0.5407 \right)^2 && \text{para } \text{Re} < 6 \times 10^3 \\ C_D &\approx 0.44 && \text{para } 5 \times 10^2 < \text{Re} < 10^5. \end{aligned} \quad (11.2.46)$$

Una recomendación para el uso de las expresiones en (11.2.46) es utilizar la segunda ecuación para $\text{Re} < 1.6 \times 10^3$ y la tercera ecuación para $1.6 \times 10^3 \leq \text{Re} < 10^5$.

11.2.9 Flujo potencial alrededor de una esfera

Los flujos potenciales son aquellos flujos cuya velocidad es un vector que se puede representar como el gradiente de una función escalar, el potencial de la velocidad, es decir, cuando

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi \quad (11.2.47)$$

Los flujos que admiten esta representación son flujos irrotacionales, ya que una propiedad vectorial es que

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\nabla \times \nabla\phi = 0, \quad (11.2.48)$$

es decir que, **el rotacional de un gradiente es cero**. Además, aquí resultan útiles otras propiedades de los vectores: las ecuaciones (A4-22) y (A.4-23) del Bird, que son:

$$\nabla \cdot \nabla\mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (11.2.49)$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}, \quad (11.2.50)$$

y se aplican de modo que, por una parte la ecuación (11.2.50), a la aceleración de una partícula material de fluido, que es la derivada material de la velocidad:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}, \quad (11.2.51)$$

y por la otra parte, la ecuación (11.2.49), al término viscoso de un fluido newtoniano, que se puede expresar también como:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \mu \nabla \cdot \nabla\mathbf{v} = \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (11.2.52)$$

Considerando flujos irrotacionales e incompresibles, las ecuaciones (11.2.51) y (11.2.52) conducen, respectivamente, a las igualdades simplificadas:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (11.2.53)$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = 0, \quad (11.2.54)$$

de modo que las ecuaciones de Navier-Stokes son, para los flujos irrotacionales e incompresibles:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11.2.55)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P}, \quad (11.2.56)$$

que se pueden expresar, igualmente, para un potencial de velocidad (11.2.47):

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (11.2.57)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + \frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P} = 0. \quad (11.2.58)$$

Esta última ecuación es la **ecuación de Bernoulli transitoria**, la cual puede, finalmente, expresarse como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) + \frac{\mathcal{P}}{\rho} = \left(\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) + \frac{p}{\rho} + gh(\mathbf{x}), \quad (11.2.59)$$

donde p es la presión interna, g es la constante gravitacional y $h(\mathbf{x})$ es la altura vertical, como función de las tres coordenadas espaciales.

El aspecto más importante a considerar, en los flujos potenciales, es que **el potencial de velocidad $\phi(\mathbf{x})$ se encuentra resolviendo la ecuación de continuidad**, expresada como la ecuación de Laplace (11.2.57) para el potencial de velocidad. Una vez encontrado el potencial, se puede utilizar la ecuación de Bernoulli (11.2.59) para encontrar la presión. El problema matemático a resolver es $\nabla^2 \phi = 0$, que en coordenadas esféricas, cuando la velocidad tiene dos componentes distintas de cero, como se ha establecido en la ecuación (11.2.18), corresponde a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas (Bird, Tabla A.7-3, ecuación B):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (11.2.60)$$

sujeta a las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \text{flujo no perturbado :} & \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty, \quad \mathbf{v} \rightarrow v_\infty \boldsymbol{\delta}_z, \quad \phi \rightarrow -v_\infty z = -v_\infty r \cos \theta, \\ \text{impenetrabilidad :} & \quad \text{cuando } r = R, \quad v_r = 0, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (11.2.61)$$

El método para resolver la EDP por separación de variables con funciones de Legendre, conduce a la solución:²

$$\phi = -v_\infty \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta, \quad (11.2.62)$$

de modo que las componentes de la velocidad son:

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \\ v_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -v_\infty \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta, \\ v_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (11.2.63)$$

Debemos señalar que $v_\theta(r=R, \theta) \neq 0$, es decir, que no cumple la condición de no-deslizamiento. Recordemos que no hemos empleado la ecuación de momentum para encontrar v_θ , sino la de continuidad, y que las únicas condiciones a la frontera, necesarias para obtener una solución única

²Ver, por ejemplo, Slattery (1980), pp. 136-139. Currie (2003) elabora una solución en términos de la función de corriente, la cual es ortogonal con respecto a líneas equipotenciales: $\phi = \text{constante}$.

para el potencial de velocidad $\varphi(r, \theta)$, son las de (11.2.61). Comparando los valores de $\varphi(r, \theta)$ de la solución de flujo reptante, ecuación (11.2.27), con la de flujo potencial, ecuación (11.2.63), encontramos los valores reportados en la tabla 11.2.

Tabla 11.2. Valores del factor $f(r) = \frac{v_\theta}{v_\infty \sin \theta}$		
r/R	Flujo reptante	Flujo potencial
1	0.0000	-1.5000
1.5	-0.4259	-1.1481
2	-0.5938	-1.0625
3	-0.7407	-1.0185
4	-0.8085	-1.0078
10	-0.9248	-1.0005
20	-0.9625	-1.0000

En la tabla 11.2 se nota cómo, la consideración de irrotacionalidad que requiere la inexistencia de superficies generadoras de vorticidad, como sería la superficie de la esfera sólida, conduce la solución a tomar valores mayores en las proximidades de la esfera, en tanto que, considerando la naturaleza viscosa de las fuerzas en la superficie de la esfera, los flujos reptantes se adhieren a dicha superficie, llegando a satisfacer la condición de no-deslizamiento al alcanzar la superficie, que actúa como una hoja vorticiosa, induciendo giro sobre las partículas de fluido más cercanas.

11.3 Separación de fases dispersas

11.3.1 Dispersiones en dos fases

En las subsecciones que preceden ésta, hemos desarrollado los elementos básicos del flujo alrededor de un cuerpo esférico en flujo reptante. Los resultados más notables son un procedimiento para determinar la viscosidad del fluido o la velocidad terminal de la esfera y un coeficiente de rozamiento, que se ha extendido a flujos no-reptantes. Estos resultados son importantes; sin embargo, son insuficientes para posibles aplicaciones de la teoría, las cuales rebasan, por mucho, la simplicidad del movimiento alrededor de una sola esfera.

En efecto, cuando tenemos, por ejemplo, un número considerable de corpúsculos sólidos, es posible que las interacciones entre ellos, y las interacciones con el fluido continuo en el que están inmersos, modifiquen significativamente las predicciones teóricas para una sola esfera que, sin embargo, seguirán siendo indicaciones muy importantes, en cuanto a las fuerzas y movimientos alrededor de los objetos, los cuales se encuentran dispersos en el medio fluido.

UNA DISPERSIÓN CONSTA DE UNA FASE DISPERSA, QUE ES UN CONJUNTO DE CORPÚSCULOS DE UN MATERIAL EN UNA FASE DADA, INMERSOS EN UN FLUIDO COMO FASE CONTINUA, CON EL CUAL FORMA UNA MEZCLA HETEROGÉNEA.

El tamaño de cada corpúsculo rebasa la escala de las descripciones locales, podemos decir que cada corpúsculo es un continuo. Por ejemplo, un tamaño razonable de un corpúsculo sería una décima o una centésima de milímetro, es decir, un granito sólido de 10^{-5} m a 10^{-4} m de diámetro, aunque hay mezclas con partículas mucho más grandes y en el otro extremo, las dispersiones coloidales tienen partículas inferiores a los 200 nm .

Al tratarse de mezclas heterogéneas, en las dispersiones existen, como mínimo, dos fases: el fluido continuo y la fase dispersa. Ambas se distribuyen complementariamente en el espacio, determinando una nueva variable que no existe cuando fluye una sola fase, la densidad volumétrica

o fracción volumen $\varepsilon_k(\mathbf{x}, t) \left[\frac{m^3 \text{ fase } k - \text{ésima}}{m^3 \text{ mezcla}} \right]$, donde el subíndice k indica la k -ésima fase.

Existen teorías de mezclas y métodos de promediado para obtener representaciones de los flujos en mezclas heterogéneas, que no es necesario desarrollar aquí, puesto que solo nos interesa aclarar la importancia de los conceptos y métodos de la mecánica de fluidos para la descripción y el diseño de equipos de separaciones mecánicas. Para este propósito, seguiremos de cerca un desarrollo de Garrido *et al.*,³ que permite reunir el sentido de las principales separaciones mecánicas en una descripción básica con sus particularidades. A manera de introducción, establecemos los balances de masa y elementos de cinemática de la sedimentación por lotes, par luego establecer los balances de masa y de momentum, de acuerdo con el trabajo referido de Garrido *et al.* (2003).

11.3.2 Cinemática de la sedimentación

Zonas de sedimentación

Así, por ejemplo, la sedimentación normal es una operación basada en la acción de la gravedad, que actúa en proporción a la diferencia de densidades entre un enorme número de cúmulos o partículas sólidas y el líquido. La atracción de la gravedad promueve el asentamiento de las partículas, cuando son más densas que el sustrato líquido, **provocando un flujo ascendente de líquido**, que es motivado por la ocupación de un volumen inferior mayor, por el asentamiento de los sólidos. El flujo ascendente de líquido genera fricción adicional, con respecto al asentamiento de una sola partícula, que es la fuerza dominante que hace que las partículas se retarden con respecto a su asentamiento individual en el líquido estancado.

Una manera de considerar las características particulares de la depositación de sólidos es realizar experimentos de sedimentación transitoria en una probeta. En el instante inicial, ver figura 11.5(a), se produce en la probeta una mezcla heterogénea bien agitada, de sólidos en el líquido. A continuación se nota la formación, casi simultánea, de cuatro zonas de asentamiento: Al fondo una zona *D* donde las partículas sólidas se encuentran asentadas, en reposo y en contacto múltiple de unas con otras. Se le llama zona de compresión. Arriba de ella se forma una zona *C* con una concentración de sólidos mayor a la inicial, pero menor que la de la zona *D*, que cambia continuamente de tamaño, como función de la altura y del tiempo. La zona superior a la anterior, la zona *B*, tiene una concentración de sólidos similar a la concentración de la alimentación, ϵ_{s0} . Finalmente, en la capa superior se forma una zona sin sólidos, clarificada, la zona *A*.

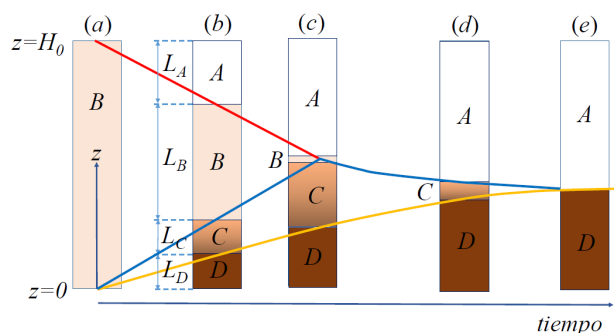


Figura 11.5: Sedimentación por lotes en una probeta.

Las cuatro zonas existen en una etapa inicial y evolucionan conforme transcurre el tiempo. La zona *A* de líquido claro y sin partículas sólidas, así como la zona *D*, que es la zona de compresión, con la máxima concentración de sólidos, se forman desde el inicio del proceso de sedimentación, a partir de la suspensión de composición inicial ϵ_B y ambas aumentan continuamente con el tiempo.

³Garrido, Concha y Bürger (2003) elaboran un modelo unificado con las ecuaciones de gobierno para la sedimentación, la centrifugación y la filtración y las relaciones de comportamiento específicas de cada una de estas operaciones, como veremos en la siguiente subsección.

La zona B se distingue porque su composición permanece igual a la de la suspensión uniforme inicial, aunque su volumen disminuye (ver figura 11.5) conforme el sólido baja a la zona C . En esta zona C , la concentración de sólidos aumenta hacia abajo y la velocidad de sedimentación disminuye, principalmente porque al disminuir el espacio entre las partículas sólidas, el fluido desplazado por el incremento de volumen ocupado por partículas, debe fluir hacia arriba, a contracorriente del movimiento descendente de los sólidos, ejerciendo fricción en las superficies. Podemos decir que la zona B es una región de equilibrio mecánico, en tanto que la zona C es una región de desaceleración de las partículas sólidas, las cuales finalmente llegan al reposo en la zona D , al fondo de la probeta, para concluir así, el proceso de la sedimentación de un lote.

Como se ha dicho arriba, existe intercambio de masa entre las zonas, aunque la masa total de cada componente, el sólido y el líquido, una vez sumado para las cuatro zonas, es constante.

Sean ε_j ; $j = A, B, C, D$, las fracciones volumen de sólido en las zonas A, B, C, D , respectivamente. La fracción volumen de sólidos en la zona A es cero, puesto que esta zona es de líquido puro. La fracción volumen de sólidos en la zona B permanece constante, $\varepsilon_B = \varepsilon_0$, e igual a la concentración inicial, mientras la zona B no desaparece. En la zona C esta fracción volumen cambia continuamente en función de la altura $\varepsilon_C(z)$ y finalmente, en la zona de compresión, la fracción volumen de sólidos es también constante, de modo que $\varepsilon_D = \varepsilon_{D0} > \varepsilon_C(z) > \varepsilon_B = \varepsilon_0 > \varepsilon_A = 0$.

El proceso de sedimentación transitoria tiene dos etapas, una **etapa inicial** o de cuatro zonas, cuando la zona B existe todavía, y una **etapa avanzada**, cuando la zona B se ha agotado y sólo existen las zonas A, C y D . En la etapa avanzada, o de tres zonas, la zona A está en contacto con la zona C en la superficie común AC .

Velocidad y densidad de flujo de sedimentación

La masa total de sólidos, M_s , en la probeta, es constante en cualquier instante de la sedimentación, y puede evaluarse por la suma:

$$M_s = \rho_s S \int_{z=0}^{H_0} \varepsilon(z) dz = \rho_s S \left(\varepsilon_D L_D + \int_{z=L_D}^{L_D+L_C} \varepsilon_C(z) dz + \varepsilon_B L_B \right), \quad (11.3.1)$$

donde ρ_s es la densidad del sólido y S es el área transversal de la probeta. La función $\varepsilon(z)$ corresponde, por tramos, a ε_j ; $j = A, B, C, D$, y L_j ; $j = A, B, C, D$ son las longitudes de cada una de las zonas correspondientes, ver figura 11.5.

Sea w_{jk} ; $jk = AB, BC, AC, CD$, la **rapidez de desplazamiento, o componente vertical de la velocidad de desplazamiento de la superficie** de separación entre dos zonas adyacentes, indicadas por los subíndices j y k . Nótese que w_{jk} puede ser positiva o negativa, dependiendo de su coincidencia u oposición a la dirección de la coordenada z . Sea v_s^j la componente vertical de la velocidad de sedimentación de los cúmulos sólidos en el límite de la zona j -ésima, acercándose a la superficie de separación con la zona k -ésima, donde la zona j -ésima está situada arriba de la zona k -ésima. Nótese que $v_s^j < 0$, porque la sedimentación se dirige en el sentido negativo del eje coordenado z , como se aprecia en la figura 11.5. Entonces los *fluxes, densidades de flujo* o flujos de sólidos por unidad de área, a través de estas superficies son:

$$N_s^{jk} = -\varepsilon_j \rho_s (v_s^j - w_{jk}), \quad (11.3.2)$$

donde la velocidad de sedimentación está relacionada con la velocidad terminal de una sola partícula sólida, ecuación (11.2.41), a través de la ecuación siguiente:

$$v_s^j = -v_\infty (1 - \varepsilon_{j0})^n, \quad (11.3.3)$$

donde $n = 4.6$ de acuerdo a un ajuste de Richardson-Zaki y ε_{j0} es la fracción volumen de sólidos en una mezcla uniforme al inicio del experimento. La velocidad terminal, expresada por la ecuación

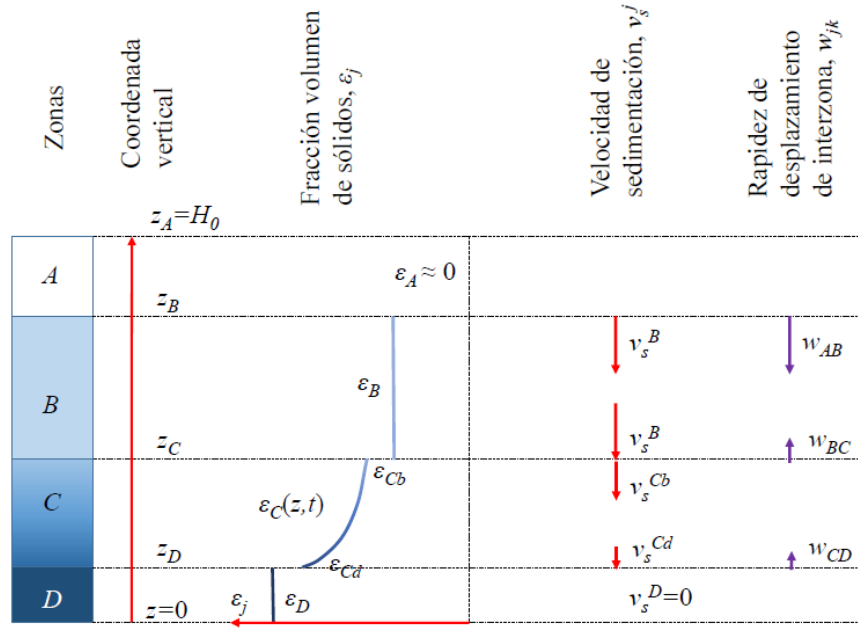


Figura 11.6: Cantidades cinemáticas de la sedimentación transitoria.

(11.2.41) es positiva. Por este motivo en la aplicación que nos ocupa, es necesario expresar el sentido negativo de la velocidad de sedimentación anteponiendo un signo negativo explícito. La fórmula (11.3.3) es útil para estimar la velocidad de sedimentación de la región B; en cambio, no se aplica estrictamente en las regiones C y D, que al inicio son inexistentes. Podemos notar, cualitativamente, que conforme aumenta la fracción volumen de sólidos, disminuye el factor en el paréntesis, que es equivalente a la porosidad o fracción volumen no ocupada por sólidos, la cual, elevada al exponente 4.6 da un factor multiplicativo que disminuye la velocidad de sedimentación conforme la concentración de sólidos aumenta.

Balances integrales de masa en la etapa inicial

Al descender las partículas, al inicio del proceso de sedimentación, se forma la zona C en el fondo de la probeta, mientras en la parte superior se forma también la zona A. Esta zona A se reconoce porque carece de sólidos y la interzona AB se desplaza en la misma medida que se desplazan las partículas sólidas de la parte superior de la probeta. Más aún, la velocidad de sedimentación de los sólidos en la zona B equivale a la velocidad de desplazamiento de la interzona AB, es decir que

$$w_{AB} = v_s^B. \quad (11.3.4)$$

Dicha velocidad de desplazamiento de la interzona AB es negativa, $w_{AB} < 0$, de la misma manera que la velocidad de sedimentación, que se desplaza en la dirección opuesta a la del la coordenada vertical z . Ver la figura 11.6.

Podemos elaborar un **balance integral de masa de sólidos en la zona B** que, dividido entre el factor $\rho_s S \epsilon_B$, conduce a la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \int_{z_C}^{z_B} dz = \frac{d}{dt} (z_B - z_C) = -\frac{N_s^{BC}}{\rho_s \epsilon_B} = (v_s^B - w_{BC}), \quad (11.3.5)$$

cuya consecuencia es la igualdad (11.3.4), que se propuso por su significado físico y que se puede comprobar al notar que $w_{AB} = dz_B/dt$ y $w_{BC} = dz_C/dt$ en la etapa inicial de tiempo, cuando

existen las cuatro zonas A, B, C y D . En esa misma etapa inicial, la interzona BC es una frontera bidimensional entre las zonas B y C , donde no puede haber acumulación de sólidos, por tratarse de una superficie.

Un **balance de masa de sólidos en la interzona BC** , conocido como la **condición de salto de masa de sólidos en la superficie BC** , significa que el flujo de sólidos que entra es igual al flujo de sólidos que sale. Si dividimos esta condición entre el factor $\rho_s S$, tenemos:

$$\varepsilon_B (v_s^B - w_{BC}) = \varepsilon_{Cb} (v_s^{Cb} - w_{BC}), \quad \text{o bien} \quad \varepsilon_{Cb} v_s^{Cb} = \varepsilon_B w_{AB} + (\varepsilon_{Cb} - \varepsilon_B) w_{BC}, \quad (11.3.6)$$

donde ε_{Cb} y v_s^{Cb} son la fracción volumen de sólidos y la velocidad de sedimentación que le corresponde, en el límite acercándose a la interzona BC desde la zona C . Cantidades similares para el límite de la interzona CD desde la zona C pueden definirse y denotarse por los símbolos ε_{Cd} y v_s^{Cd} , respectivamente. En la segunda forma de la ecuación (11.3.6) se ha sustituido la ecuación (11.3.4).

Un **balance integral de masa de sólidos en la zona C** , dividido por el factor constante $\rho_s S$ resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{z_D}^{z_C} \varepsilon_C(z, t) dz = \frac{1}{\rho_s} (N_s^{BC} - N_s^{CD}) = -\varepsilon_{Cb} (v_s^{Cb} - w_{BC}) + \varepsilon_{Cd} (v_s^{Cd} - w_{CD}). \quad (11.3.7)$$

En la interzona CD , tampoco puede haber acumulación de sólidos, de modo que un **balance de masa de sólidos en la superficie de interzona CD** , similar a la condición de salto (11.3.6), conduce a la igualdad de flujos:

$$\varepsilon_{Cd} (v_s^{Cd} - w_{CD}) = \varepsilon_D (v_s^D - w_{CD}). \quad (11.3.8)$$

Si ε_D es la fracción volumen de sólidos de un sedimento incompresible, es constante: $\varepsilon_D = \text{constante}$, y corresponde al sólido asentado en el fondo de la probeta, cuya velocidad de sedimentación es cero, $v_s^D = 0$. Entonces

$$\varepsilon_{Cd} (v_s^{Cd} - w_{CD}) = -\varepsilon_D w_{CD}, \quad \text{o bien} \quad \varepsilon_{Cd} v_s^{Cd} = -(\varepsilon_D - \varepsilon_{Cd}) w_{CD}. \quad (11.3.9)$$

Además, un **balance de masa para el sedimento de la zona D** , una vez dividido entre $\rho_s S \varepsilon_D$ resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{z_D} dz = \frac{dz_D}{dt} = \frac{N_s^{CD}}{\rho_s \varepsilon_D} = w_{CD}, \quad (11.3.10)$$

que coincide con la definición de w_{CD} .

Balances de masa en la etapa avanzada

En la etapa avanzada la zona A está en contacto con la zona C y ésta con la zona D , en la configuración que se muestra en la figura 11.5(d). Los balances de masa de sólidos son semejantes a los de la etapa inicial, a excepción de que no existen ya los balances que implican a la zona B y que existe una interzona AC .

El **balance integral de masa de sólidos en la zona C** , dividido por el factor constante $\rho_s S$ es:

$$\frac{d}{dt} \int_{z_D}^{z_C} \varepsilon_C(z, t) dz = \frac{1}{\rho_s} (N_s^{AC} - N_s^{CD}) = -\varepsilon_{Ca} (v_s^{Ca} - w_{AC}) + \varepsilon_{Cd} (v_s^{Cd} - w_{CD}), \quad (11.3.11)$$

en tanto que la interzona AC podemos proponer la condición de salto de masa:

$$\varepsilon_A (v_s^A - w_{AC}) = \varepsilon_{Ca} (v_s^{Ca} - w_{AC}), \quad \text{o bien} \quad v_s^{Ca} = w_{AC}, \quad (11.3.12)$$

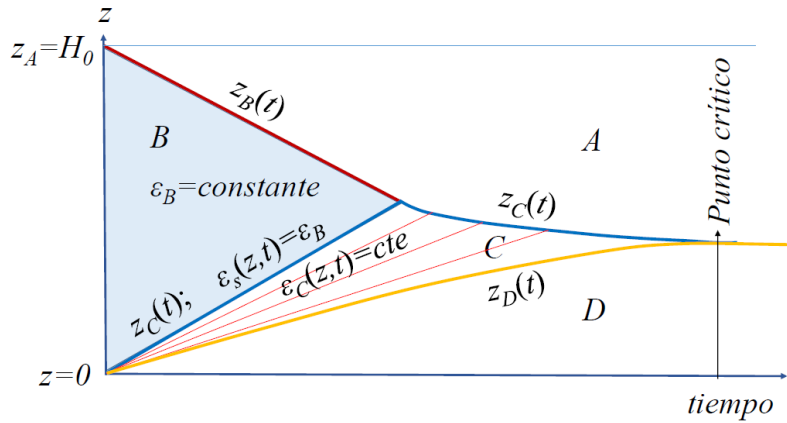


Figura 11.7: Evolución de las zonas de sedimentación, con líneas características de fracción volumen de sólidos constantes, $\varepsilon_C(z, t) = cte$.

debido a que $\varepsilon_A = 0$. La segunda forma de la condición de salto (11.3.12) nos permite simplificar la expresión (11.3.11), de modo que resulta:

$$\frac{d}{dt} \int_{z_D}^{z_C} \varepsilon_C(z, t) dz = \varepsilon_{Cd} \left(v_s^{Cd} - w_{CD} \right), \quad (11.3.13)$$

Un **balance de masa de sólidos en la superficie de la interzona CD** conduce a la condición de salto de masa de sólidos (11.3.8) y un balance de masa de sólidos en la zona D conduce a la ecuación (11.3.10).

Ondas de fracción volumen de sólidos en la zona C

Una vez elaborado el conjunto de balances de masa de sólidos en la etapa avanzada, así como las condiciones de salto en las interzonas AC y CD, vamos a desarrollar un procedimiento para tratar la región C, cuya concentración volumétrica de sólidos, ε_C , es una función de la coordenada vertical y del tiempo, $\varepsilon_C(z, t)$.

Primero aplicamos la regla de Leibniz para derivar bajo la integral de la ecuación (11.3.13):

$$\frac{d}{dt} \int_{z_D}^{z_C} \varepsilon_C(z, t) dz = \int_{z_D}^{z_C} \frac{\partial \varepsilon_C}{\partial t} dz + \varepsilon_{Ca} \frac{dz_C}{dt} - \varepsilon_{Cd} \frac{dz_D}{dt} = \varepsilon_{Cd} \left(v_s^{Cd} - w_{CD} \right). \quad (11.3.14)$$

Sabemos que para un tiempo fijo el valor de ε es constante a un valor dado de z . El lugar geométrico de una **superficie de isofracción volumen de sólidos** esta dada por la igualdad

$$\varepsilon_s(z, t) = \varepsilon_{s0},$$

que corresponde a superficies planas horizontales que se desplazan conforme transcurre el tiempo. Estas líneas de isofracción volumen son llamadas **líneas características**. Por ejemplo, en la figura 11.7, la línea recta que separa la zona B de la zona C es la línea característica $\varepsilon_s(z, t) = \varepsilon_B$, la cual es una constante. Entonces, la derivada temporal $d\varepsilon_s/dt$ de una línea de isofracción, resulta:

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt}(z, t) = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} = 0, \quad \text{para } z_D < z < z_C, \quad (11.3.15)$$

la cual representa una onda cinemática de primer orden, que podemos referir como la **ecuación topológica de la sedimentación**⁴. Se puede despejar la derivada temporal, de modo que

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = -C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z}, \quad (11.3.16)$$

⁴Sobre ecuaciones topológicas, ver *p.ej.* Soria y de Lasa, 1992, y las referencias que ahí se mencionan.

donde $C_\varepsilon = \frac{dz}{dt}$ es la rapidez de propagación de la onda de concentración, o una onda de fracción volumen de sólidos, la cual se puede sustituir, para la derivada parcial con respecto al tiempo, de la igualdad del lado derecho de la ecuación (11.3.14), que resulta:

$$\int_{z_D}^{z_C} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} dz = \int_{z_D}^{z_C} -C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial z} dz = - \int_{\varepsilon_s(z_D)}^{\varepsilon_s(z_C)} C_\varepsilon(\varepsilon_s) d\varepsilon_s, \quad (11.3.17)$$

es decir que, al considerar que **la rapidez de propagación de las ondas de fracción volumen de sólidos depende solamente de la fracción volumen de sólidos**, en la zona C, podemos expresar la ecuación (11.3.14) como:

$$\int_{\varepsilon_s(z_D)}^{\varepsilon_s(z_C)} -C_\varepsilon(\varepsilon_s) d\varepsilon_s + \varepsilon_{Ca} \frac{dz_C}{dt} - \varepsilon_{Cd} \frac{dz_D}{dt} = \varepsilon_{Cd} (v_s^{Cd} - w_{CD}). \quad (11.3.18)$$

Pero las derivadas $dz_C/dt = w_{AC}$ y $dz_D/dt = w_{CD}$, es decir, equivalen a las rapideces de desplazamiento de las superficies de interzona, lo cual nos permite reducir la ecuación (11.3.18) a

$$\int_{\varepsilon_s(z_D)}^{\varepsilon_s(z_C)} C_\varepsilon(\varepsilon_s) d\varepsilon_s = \varepsilon_{Ca} w_{AC} - \varepsilon_{Cd} v_s^{Cd}. \quad (11.3.19)$$

Ahora podemos sustituir la segunda forma de la ecuación (11.3.9) en la ecuación (11.3.19). Al hacerlo obtenemos la igualdad:

$$\int_{\varepsilon_s(z_D)}^{\varepsilon_s(z_C)} C_\varepsilon(\varepsilon_s) d\varepsilon_s = \varepsilon_{Ca} w_{AC} + (\varepsilon_D - \varepsilon_{Cd}) w_{CD}. \quad (11.3.20)$$

Podemos ver en la ecuación (11.3.20), que cada superficie de discontinuidad en ε_s contribuye a la integral de la rapidez de propagación de la onda de fracción volumen de sólidos. Con relación al primer término del lado derecho, en el ánimo de generalizar la expresión, podemos introducir la fracción volumen ε_A , que es igual a cero, para llegar a la siguiente forma de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_s(z_D)}^{\varepsilon_s(z_C)} C_\varepsilon(\varepsilon_s) d\varepsilon_s &= (\varepsilon_{Ca} - \varepsilon_A) w_{AC} + (\varepsilon_D - \varepsilon_{Cd}) w_{CD} \\ &= \sum_{jk} \Delta \varepsilon_{jk} w_{jk}, \end{aligned} \quad (11.3.21)$$

donde $\Delta \varepsilon_{jk} = \varepsilon_k - \varepsilon_j$ son cantidades mayores que cero, porque la concentración de sólidos aumenta verticalmente hacia abajo. Entonces, el signo de cada sumando coincide con el de la rapidez de desplazamiento de la superficie de discontinuidad correspondiente, donde $w_{AC} < 0$ y $w_{CD} > 0$.

Teoría cinemática de Kynch

Kynch (1952) desarrolla una teoría cinemática basada en **ecuaciones de continuidad locales**, en función de la fracción volumen de sólidos $\varepsilon_s(\mathbf{x}, t)$ utilizando la teoría de mezclas para elaborar los balances, que son:

Balance de masa para la fase sólida dispersa:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (11.3.22)$$

Balance de masa para la mezcla incompresible:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad (11.3.23)$$

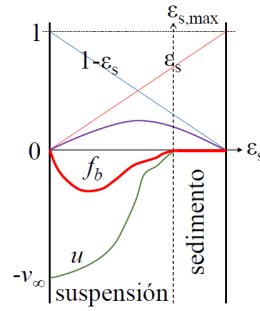


Figura 11.8: Densidad de flujo derivado, $f_b(\epsilon_s)$, y sus componentes.

donde

$$f(\epsilon_s) = \epsilon_s v_s \quad (11.3.24)$$

es la **densidad de flujo de sólidos**, también,

$$q(\epsilon_s) = \epsilon_s v_s + (1 - \epsilon_s) v_f = v_s - (1 - \epsilon_s)(v_s - v_f) = v_s - (1 - \epsilon_s)u, \quad (11.3.25)$$

es la **velocidad de la mezcla**, la cual está expresada en función de

$$u(\epsilon_s) = v_s - v_f, \quad (11.3.26)$$

que es la **velocidad relativa de los sólidos con respecto al líquido**.

Las definiciones (11.3.24), (11.3.25) y (11.3.26), nos permiten buscar la relación $f(q, u, \epsilon_s) = 0$ entre ellas, de la cual resulta

$$f(\epsilon_s) = \epsilon_s q + \epsilon_s (1 - \epsilon_s) u = \epsilon_s q + f_b, \quad (11.3.27)$$

donde

$$f_b(\epsilon_s) = \epsilon_s (1 - \epsilon_s) u \quad (11.3.28)$$

es la **densidad de flujo derivado**. Es importante destacar que, en la búsqueda de relaciones de comportamiento para la sedimentación, encontrar la forma funcional de la densidad de flujo derivado, $f_b(\epsilon_s)$, es la clave para conocer la densidad de flujo de los sólidos, $f(\epsilon_s)$ pues, de acuerdo con (11.3.27), la relación entre ellas es directa y su diferencia es únicamente el sumando $\epsilon_s q$, que se reduce a cero en el caso de los ensayos de **asentamiento por lotes**, que corresponde a la sedimentación en una probeta, cuando dicha diferencia es nula y $f = f_b$.

Los tres factores que contribuyen a la función de densidad de flujo derivado y su composición en $f_b(\epsilon_s)$ se muestran en la figura 11.8

Un tema sensible en cuanto a las formas funcionales de $f(\epsilon_s)$, es la existencia de uno o dos puntos de inflexión de $f_b(\epsilon_s)$, porque se vinculan a la rapidez de propagación de las ondas de fracción volumen. En efecto, la ecuación (11.3.22) es equivalente a

$$\frac{\partial \epsilon_s}{\partial t} + f'(\epsilon_s) \frac{\partial \epsilon_s}{\partial z} = 0, \quad (11.3.29)$$

que corresponde a una ecuación de onda de primer orden, cuya rapidez de propagación es $f'(\epsilon_s)$, y equivale al término C_ϵ , de la ecuación (11.3.16). Las ecuaciones (11.3.22) y (11.3.23), se cumplen en las zonas continuas A, B, C y D del espesador, ver figura 11.6, pero deben suplementarse por condiciones de salto apropiadas en los límites de estas zonas; límites que son superficies de discontinuidades de salto en las propiedades; específicamente en la fracción volumen de sólidos, ϵ_s .

En la figura 11.9 se ve cómo es posible, dada una fracción volumen, $\epsilon_C(z, t) = cte$, encontrar gráficamente el valor de la rapidez de propagación de una onda de fracción volumen, así como el valor de la rapidez de desplazamiento de las interzonas AC y CD. Este procedimiento implica

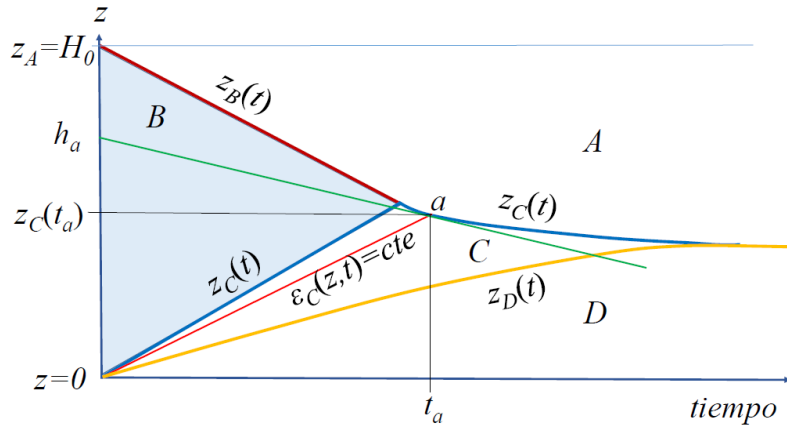


Figura 11.9: Rapidez de desplazamiento de interzonas y rapidez de propagación de ondas de fracción volumen de sólidos.

LA FORMACIÓN, EN EL FONDO DE LA COLUMNA, DE UNA INFINIDAD DE CAPAS (HORIZONTALES) DE CONCENTRACIÓN DE SÓLIDOS (FRACCIÓN VOLUMEN) INTERMEDIA, ENTRE DOS LÍMITES; EL INFERIOR ES LA CONCENTRACIÓN INICIAL UNIFORME ε_B Y EL SUPERIOR ES LA CONCENTRACIÓN MÁXIMA QUE SE PUEDE ALCANZAR EN CONTACTO CONTINUO, $\varepsilon_D = \varepsilon_{s,\max}$. CERCA DE ESTA CONCENTRACIÓN MÁXIMA, LA VELOCIDAD DE SEDIMENTACIÓN TIENDE A CERO.

La rapidez de propagación de una onda de fracción volumen de sólidos, marcada con una línea roja y la etiqueta $\varepsilon_C(z,t) = cte$, se puede estimar al evaluar la tangente del triángulo $(0, t_a, a)$. Entonces, en esta línea isofracción volumen,

$$C_\varepsilon(a) = \frac{z_C(t_a)}{t_a}, \quad (11.3.30)$$

en tanto que, la rapidez de desplazamiento de la interzona AC, en el mismo punto a , es:

$$w_{AC}(a) = -\frac{h_a - z_C(t_a)}{t_a}. \quad (11.3.31)$$

11.3.3 Procesos dinámicos de dispersiones

Diversas separaciones de sólidos y líquidos pueden ser tratadas con un modelo básico, que consiste de los balances de masa y de momentum, tanto para el conjunto de corpúsculos como para el fluido continuo. Las dispersiones a las cuales se aplica este modelo generalizado, deben cumplir ciertas condiciones, que mencionamos a continuación:

1. Los corpúsculos sólidos son mucho más pequeños que el equipo donde fluyen, y todos ellos tienen la misma densidad ρ_s .
2. Los corpúsculos sólidos y el fluido son incompresibles.
3. No hay transferencia de masa entre los sólidos y el fluido.
4. Todos los corpúsculos han floculado, antes de que inicie el proceso de compresión,
5. Los flóculos tienen un tamaño uniforme.

Definimos el proceso dinámico de un sistema particulado como el conjunto de cuatro variables: la fracción volumen de sólidos, ε_s , la velocidad promedio en volumen $\mathbf{q}$, la presión de exceso de poro, p_e y la velocidad de la fase sólida $\mathbf{v}_s$. En cualquier punto de una zona continua, estas cuatro variables están relacionadas por las ecuaciones:

Ecuación de continuidad de los sólidos dispersos:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (11.3.32)$$

Ecuación de continuidad de la mezcla:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (11.3.33)$$

Balance reducido de momentum lineal del fluido continuo:

$$\nabla p_e = -\nabla \sigma_e + \Delta \rho \varepsilon_s \mathbf{b}, \quad (11.3.34)$$

Balance reducido de momentum lineal de los sólidos dispersos:

$$\nabla \sigma_e = \Delta \rho \varepsilon_s \mathbf{b} - \frac{\alpha(\varepsilon_s)}{(1 - \varepsilon_s)^2} (\mathbf{v}_s - \mathbf{q}), \quad (11.3.35)$$

donde $\mathbf{q} = \varepsilon_s \mathbf{v}_s + (1 - \varepsilon_s) \mathbf{v}_f$ es la velocidad media de la mezcla, $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_f$ son la velocidad promedio de los sólidos y del fluido, respectivamente, $\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_s)$ es la función de esfuerzos efectivos de la fase sólida, $\Delta \rho = \rho_s - \rho_f$ es la diferencia de densidades máscas del sólido y del fluido, como compuestos puros, $\alpha(\varepsilon_s)$ es el coeficiente de resistencia y $\mathbf{b}$ son las fuerzas externas que actúan localmente sobre el sistema, por unidad de masa.

En las interzonas es necesario proponer otros balances, conocidos como sus condiciones de salto, los cuales no tienen términos de acumulación, porque consideran las interzonas como superficies de discontinuidad, incapaces de contener e incrementar o reducir, en cantidad, los materiales.

El coeficiente $\alpha(\varepsilon_s)$ se compone de una parte hidrostática y una parte hidrodinámica. La parte hidrodinámica se modela con un enfoque de tipo Stokes o Darcy, como una función lineal, $\mathbf{m}_d$, de la velocidad relativa de los sólidos con respecto al fluido, es decir, $\mathbf{m}_d = -\alpha(\varepsilon_s)(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f)$.

La función $\sigma_e(\varepsilon_s)$ toma diversas formas dependiendo del caso y tiene, básicamente, dos regiones de operación, que dependen de un valor $\varepsilon_{s,c}$, que corresponde al punto de gelación de los flóculos, que es aquel valor de la fracción volumen de sólidos, cuando las partículas sólidas comienzan a estar en contacto mutuo. Una de las expresiones más usadas de los esfuerzos efectivos de los sólidos es conocida como una correlación de potencias:

$$\sigma(\varepsilon_s) = \begin{cases} 0, & \text{para } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s,c} \\ \sigma_0 \left[\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s,c}} \right)^n - 1 \right], & \text{para } \varepsilon_s > \varepsilon_{s,c}, \end{cases} \quad (11.3.36)$$

donde $\sigma_0 > 0$ y $n > 1$.

Sedimentación y espesamiento

Consideremos un *espesador ideal continuo*, que se distingue por ser un concepto que facilita el tratamiento de un modelo de sedimentación. Consiste en proponer que el movimiento está determinado exclusivamente por la gravedad, se elige un sistema coordenado con la coordenada z en la **dirección vertical ascendente**, cuyo vector unitario es δ_z , de modo que la fuerza de la gravedad es tal que $\mathbf{g} = -g\delta_z$. Conviene expresar la gravedad como el gradiente de un potencial gravitacional Φ , de modo que $\Phi = gz$, y definimos la densidad de las fuerzas externas por unidad de masa, por la relación $\mathbf{b} = -\nabla \Phi$. Asociamos movimientos verticales al espesador ideal continuo, y despreciamos efectos de las paredes laterales, como la fricción. En consecuencia, formulamos el

modelo local unidimensional transitorio:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (11.3.37)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (11.3.38)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} - \Delta \rho g \varepsilon_s \quad (11.3.39)$$

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = -\Delta \rho g \varepsilon_s + \frac{\alpha}{\varepsilon_s(1-\varepsilon_s)^2} (f - \varepsilon_s q), \quad (11.3.40)$$

donde $f = \varepsilon_s v_s$, la densidad de flujo de sólidos, se ha definido en la ecuación (11.3.24) y se relaciona con la densidad de flujo derivado por medio de la ecuación (11.3.27). Aún más, en la sedimentación por lotes, debido a que el flujo medio de la mezcla es cero, $q = 0$, la densidad de flujo de sólidos coincide con la densidad de flujo derivado, $f = f_b$.

El modelo dinámico de sedimentación incluye, no solamente las ecuaciones de continuidad, como los modelos cinemáticos, sino también los balances del ímpetu, que son las ecuaciones (11.3.39) y (11.3.40), y se completa cuando proporcionamos las relaciones de comportamiento y las condiciones iniciales y de frontera suficientes para la búsqueda de soluciones, generalmente numéricas. Las relaciones de comportamiento incluyen la función densidad de flujo de sólidos $f(\varepsilon_s)$, que puede estimarse con ayuda de experimentos de probeta, mediante los cuales se puede estimar la **función densidad de flujo por lote de Kynch**:

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = -\frac{\Delta \rho g \varepsilon_s^2 (1 - \varepsilon_s)^2}{\alpha(\varepsilon_s)}, \quad (11.3.41)$$

un **coeficiente de difusión**

$$a(\varepsilon_s) = -\frac{f_{bk}(\varepsilon_s) \sigma'_e(\varepsilon_s)}{\Delta \rho g \varepsilon_s}, \quad (11.3.42)$$

y su primitiva

$$A(\varepsilon_s) = \int_0^{\varepsilon_s} a(s) ds, \quad (11.3.43)$$

que dan lugar, a partir de la ecuación (11.3.40) a

$$f = \varepsilon_s q + f_{bk}(\varepsilon_s) - \frac{\partial A(\varepsilon_s)}{\partial z}. \quad (11.3.44)$$

Esta ecuación para f puede derivarse con respecto a z y sustituirse en la ecuación (11.3.37), para llegar finalmente, a la ecuación cuasilineal de convección-difusión:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} [\varepsilon_s q(t) + f_{bk}(\varepsilon_s)] = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}(\varepsilon_s). \quad (11.3.45)$$

El espacio para la sedimentación por lotes es un continuo; se interrumpe en superficies de discontinuidad donde las ecuaciones de gobierno se sustituyen por condiciones de salto. La condición inicial es la uniformidad del medio, es decir,

$$\varepsilon_s(z, 0) = \varepsilon_B, \quad \text{para } 0 < z < H_0, \quad (11.3.46)$$

y las dos condiciones a la frontera se proponen sobre $f(z, t)$:

$$f(0, t) = f(H_0, t) = 0. \quad (11.3.47)$$

Las simulaciones numéricas conducen a un conjunto de resultados que se pueden consultar en Garrido *et. al.* (2003).

Centrifugación

La centrifugación, como la mayoría de las operaciones unitarias mecánicas, es ahora una aplicación específica de los balances de masa y del ímpetu, de sistemas en dos fases, ecuaciones (11.3.32), (11.3.33), (11.3.34) y (11.3.35). El aspecto especial a considerar es que la fuerza centrífuga actúa como un campo externo sobre la dispersión de sólidos, aumentando las capacidades de separación, es decir, que la densidad de las fuerzas externas por unidad de masa es:

$$\mathbf{b} = -\nabla \left(gz + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right), \quad (11.3.48)$$

la presión de exceso de poro es:

$$p_e = p + \rho_f \left(gz + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right), \quad (11.3.49)$$

de modo que su gradiente es:

$$\nabla p_e(\varepsilon_s) = -\nabla \sigma_e(\varepsilon_s) + \Delta \rho \varepsilon_s (\mathbf{g} + \omega^2 r \boldsymbol{\delta}_r) \quad (11.3.50)$$

la densidad de flujo de sólidos, $\mathbf{f}$, resulta:

$$\mathbf{f} = \varepsilon_s \mathbf{q} - f_{bk}(\varepsilon_s) \frac{\omega^2 r}{g} \left(-\frac{g}{\omega^2 r} \boldsymbol{\delta}_z + \boldsymbol{\delta}_r - \frac{\sigma'_e(\varepsilon_s)}{\Delta \rho g \varepsilon_s} \nabla \varepsilon_s \right). \quad (11.3.51)$$

En la mayoría de los casos, la fuerza centrífuga es, por mucho, mayor que la gravitacional. Es posible simplificar las ecuaciones despreciando la contribución gravitacional y luego, expresando por componentes las ecuaciones del ímpetu, que conducen, finalmente, a la expresión:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(-f_{bk}(\varepsilon_s) \frac{\omega^2 r}{g} - \gamma \frac{A(\varepsilon_s)}{r} \right) = \frac{\partial^2 A(\varepsilon_s)}{\partial r^2} + \gamma \left(f_{bk}(\varepsilon_s) \frac{\omega^2}{g} + \frac{A(\varepsilon_s)}{r^2} \right), \quad (11.3.52)$$

donde el parámetro γ vale cero cuando se modela un tubo giratorio y vale uno para el caso de una canasta giratoria. La presión de exceso de poro es:

$$\frac{\partial p_e}{\partial r} = \Delta \rho \varepsilon_s \omega^2 r - \frac{\partial \sigma_e(\varepsilon_s)}{\partial r} \quad (11.3.53)$$

Las ecuaciones (11.3.52) y (11.3.53) se aplican en las regiones continuas y se sustituyen por condiciones de salto apropiadas en las superficies de discontinuidad.

Filtración

Es usual expresar las ecuaciones de la filtración en los términos de la descripción de medios porosos, es decir, utilizando la definición de porosidad, más que la de fracción volumen de sólidos, que es su complemento. Aquí, sin embargo, para ilustrar cómo las mismas ecuaciones que modelan la sedimentación y la centrifugación, también lo hacen con la filtración, expresaremos las ecuaciones de la filtración con las mismas variables y funciones con las cuales se han elaborado las otras dos operaciones unitarias.

La expresión apropiada a la filtración, de las ecuaciones (11.3.32), (11.3.33), (11.3.34) y (11.3.35) es el conjunto:

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_s v_s) = 0, \quad (11.3.54)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad (11.3.55)$$

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\Delta \rho g \varepsilon_s + \frac{\alpha(\varepsilon_s)}{(1 - \varepsilon_s)^2} (v_s - q), \quad (11.3.56)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} - \Delta \rho g \varepsilon_s, \quad (11.3.57)$$

que puede combinarse, proponiendo que $v_s = 0$, para representar los flujos en una matriz porosa que no se desplaza. Aplicando este valor y combinando las ecuaciones (11.3.56) y (11.3.57), tenemos:

$$\frac{\partial p_e}{\partial z} = \frac{\alpha(\varepsilon_s)}{(1 - \varepsilon_s)^2} q, \quad (11.3.58)$$

en tanto que, la consecuencia de eliminar la velocidad del sólido en (11.3.54) y tomar en cuenta la ecuación (11.3.55), nos lleva a concluir que $\varepsilon_s = \varepsilon_s(z)$ y que $q = q(t)$. La ecuación (11.3.58) coincide con la ecuación de Darcy si hacemos que

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\mu_f \varepsilon^2}{k(\varepsilon)} = \frac{\mu_f (1 - \varepsilon_s)^2}{k(\varepsilon_s)}, \quad (11.3.59)$$

donde $\varepsilon = 1 - \varepsilon_s$ es la porosidad del lecho o de la torta filtrada. La última expresión de $\alpha(\varepsilon_s)$ se puede utilizar en la ecuación (11.3.41) para la densidad de flujo derivado, $f_{bk}(\varepsilon_s)$:

$$f_{bk}(\varepsilon_s) = -\frac{\Delta \rho g \varepsilon_s^2 k(\varepsilon_s)}{\mu_f}, \quad (11.3.60)$$

también, de la ecuación (11.3.56) tenemos:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\Delta \rho g \varepsilon_s + \frac{\mu_f}{k(\varepsilon_s)} (v_s - q). \quad (11.3.61)$$

Con esta relación (11.3.61) y con la densidad de flujo derivado, (11.3.60), podemos elaborar modelos de filtros particulares, como está detallado en la referencia base que hemos seguido, de Garrido *et al.* (2003).

Instrumentos

12	Descarga de tanques	199
12.1	Descripción	
12.2	Operación	
12.3	Principios físicos del funcionamiento	
12.4	Algunos objetivos de las experiencias	
13	Sedimentación por lotes	203
13.1	Descripción	
13.2	Operación	
13.3	Principios físicos del funcionamiento	
13.4	Algunos objetivos de las experiencias	
14	Viscosímetros capilares	207
14.1	Descripción	
14.2	Operación	
14.3	Principios físicos del funcionamiento	
14.4	Algunos objetivos de las experiencias	
15	Viscosímetro de Brookfield	211
15.1	Descripción	
15.2	Operación	
15.3	Principios físicos del funcionamiento	
15.4	Algunos objetivos de las experiencias	
16	Tanques agitados	217
16.1	Descripción	
16.2	Operación	
16.3	Principios físicos del funcionamiento	
16.4	Algunos objetivos de las experiencias	
17	Bombas de ariete	221
17.1	Descripción	
17.2	Operación	
17.3	Principios físicos del funcionamiento	
17.4	Algunos objetivos de las experiencias	
17.5	Construcción	
18	Redes de tuberías	231
18.1	Descripción	
18.2	Operación	
18.3	Principios físicos del funcionamiento	
18.4	Algunos objetivos de las experiencias	

12. Descarga de tanques

12.1 Descripción

Un tanque (para el estudio del proceso de descarga) es un recipiente cilíndrico, cónico, esférico, o de otra forma geométrica regular, con un indicador de nivel y un juego de tubos de descarga intercambiables, de diversas longitudes y diámetros. La figura 12.1 es la fotografía de un tanque ligeramente cónico. A la izquierda se le ve montado en su estructura, con una cubeta donde descarga el líquido que sale por el tubo; a la derecha se aprecia el tubo de nivel, conectado hacia arriba desde el fondo del recipiente.



Figura 12.1: Tanque con tubo de desfogue y tubo medidor de nivel.

12.2 Operación

1. Se coloca uno de los tubos de descarga enroscándolo en el fondo del recipiente.
2. Se carga el recipiente con agua, para lo cual se tapa la salida del tubo (con un tapón o con la mano).
3. Se verifica que el nivel del recipiente esté en la posición de la marca superior seleccionada, $H(t = 0) = H_0$.
4. Se prepara el cronómetro y se dispara al tiempo $t = 0$, destapando simultáneamente la salida del tubo.
5. Se mide el nivel del agua a diversos tiempos $\{t_j, H_j\}$, ver figura 12.2.
6. Se detiene el cronómetro cuando se vacía el recipiente, al tiempo de descarga $t = t_D$, tal que $H(t_D) = 0$.
7. Se realiza el proceso de carga/descarga tres veces, capturando la información de las repeticiones, para estimar errores de operación y medición.
8. Se cambia el tubo de descarga y se repite el procedimiento anterior.

12.3 Principios físicos del funcionamiento

En la sección 4.2 se elaboran cuidadosamente los aspectos teóricos a considerar para obtener ecuaciones de trabajo correspondientes al presente instrumento del laboratorio, bajo distintas consideraciones que se manifiestan en sus aproximaciones correspondientes. Los principales parámetros se describen a continuación y aparecen en el diagrama 12.2:

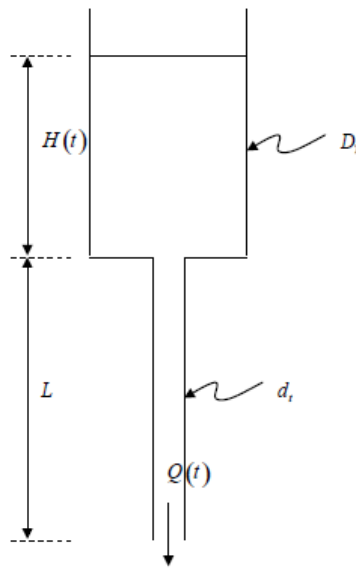


Figura 12.2: Diagrama del recipiente con un tubo de descarga.

donde

- d_t = diámetro interno del tubo,
- D_T = diámetro interno del recipiente,
- $H(t)$ = altura del nivel del tanque (es dependiente del tiempo),
- L = longitud del tubo y
- $Q(t)$ = flujo volumétrico de la descarga del recipiente (es dependiente del tiempo).

Durante la operación del instrumento, al realizar una experiencia, ocurren las siguientes etapas, de las cuales resaltamos sus principios físicos:

1. Al llenar (cargar) el recipiente, suministramos al agua energía potencial en una cantidad equivalente al peso del agua elevada hasta su posición en el conjunto recipiente-tubo. La palma de la mano que tapa la salida del tubo ejerce una presión ascendente de magnitud p_L , equivalente a la presión de la columna de agua, desde la salida del tubo (tapada por la mano) hasta su nivel en el tanque (donde la presión es atmosférica, p_a), es decir,

$$p_L(v_z = 0) = p_a + \rho g(H_0 + L). \quad (12.3.1)$$

Por lo cual, la diferencia de presión que causa el flujo de agua saliendo del recipiente-tubo es:

$$p_L - p_a = \rho g(H(t) + L). \quad (12.3.2)$$

- a) Reduce las ecuaciones de Navier-Stokes a un caso general hidrostático.
 - b) Aplica las ecuaciones del caso hidrostático a la situación del punto 3 de la Sección Operación, es decir, cuando la mano tapa la salida del tanque y el nivel del agua ha llegado a la marca superior. La coordenada z es vertical ascendente y el origen está a la salida del tubo.
 - c) ¿Qué cambia si el origen se sitúa a la entrada del tubo y z es vertical, pero descendente?
 - d) Comprueba que el mismo resultado se obtiene aplicando el operador gradiente a la ecuación (1), donde en lugar de L se incorpora la coordenada z . ¿Por qué se llega al mismo resultado? ¿Qué significa físicamente sustituir L por z ?
 - e) Define la presión modificada en cada uno de los dos casos anteriores, es decir, cuando z es ascendente y cuando es descendente.
 - f) Verifica que la solución de la hidrostática equivale a decir que la presión modificada permanece constante.
2. Al retirar la mano de la salida del tubo se produce un desequilibrio en la fuerza de presión,
 - a) Al retirar la mano, ¿cuál es la presión a la salida del tubo?
 y en consecuencia, el agua escurre por la salida del tubo, generando un flujo.
3. La fuerza de gravedad por unidad de volumen, que equivale al gradiente de la presión, es la fuerza impulsora en tanto que las paredes del tubo, la entrada y salida del mismo y las paredes del recipiente (en mínima proporción) ofrecen la resistencia viscosa al flujo (fricción).
4. Dicho flujo, cuya magnitud se establece, por lo tanto, como resultado del balance entre la fuerza de gravedad (descendente) y la resistencia viscosa (ascendente), produce un perfil de velocidad en el tubo, que puede ser laminar o turbulento, indicado por su número de Reynolds.
5. El balance de momentum es en rigor transitorio, puesto que, al bajar el nivel del recipiente con el tiempo, el gradiente de la presión modificada disminuye, proporcionalmente a la altura de la columna de agua, provocando la disminución del flujo volumétrico o gasto y en general, un perfil de velocidad en el tubo, dependiente del tiempo.
 - a) En el curso del proceso de descarga la presión modificada cambia con el tiempo. ¿Cómo afecta esto la definición del número de Reynolds?
6. Además, al momento de iniciar el experimento, al retirar la mano de la salida del tubo, el agua se precipita en un escurrimiento, aumentando su perfil de velocidad en el tubo a partir del reposo, hasta llegar a un máximo que luego irá decreciendo, debido como se dijo arriba, a la disminución del gradiente de presión modificada o carga gravitacional.
 - a) Imagina tres aplicaciones donde te serviría saber estimar el tiempo en el que se vacía un recipiente
 - b) Dos recipientes idénticos están llenos, uno de agua y otro de miel, ¿Cómo escogerías dos tubos de descarga (sus diámetros y sus longitudes), para intentar que se vacíen en un tiempo lo más parecido posible? Indica tus razones.

12.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Estimar el tiempo de descarga de un tanque en función de la longitud y el diámetro del tubo de salida.
2. Estimar el ritmo (la evolución) de la descarga de un tanque.
3. Comparar las estimaciones del tiempo y el ritmo de descarga de diversos modelos teóricos con los resultados experimentales.
4. Estimar el ritmo y el tiempo de descarga de glicerol desde un embudo de separación destapado y comparar las alturas medidas con las que corresponden a los modelos, considerando la forma del embudo.
5. Repetir el objetivo anterior con mezclas de agua, etilenglicol y glicerol.
6. Repetir el objetivo 4 para suspensiones de harina de maíz de concentraciones inferiores al 51 % en masa (que se pueden preparar siguiendo el procedimiento de la subsección 15.3.2), elaborando la teoría del tiempo de descarga de un FNG, para efectuar las estimaciones.

13. Sedimentación por lotes

13.1 Descripción

Una probeta de un litro de capacidad es el principal instrumento para llevar a cabo ensayos de sedimentación en el laboratorio. El otro instrumento indispensable es un cronómetro. Las suspensiones a sedimentar pueden ser pulpa de tamarindo, preparada en una licuadora y filtrada, para homogeneizar el tamaño, puede ser chia y también los materiales que se usan para tener un mejor control durante el proceso de sedimentación, como son sustancias coagulantes, como el cloruro férrico $FeCl_3$, el sulfato de aluminio, $Al_2(SO_4)_3$, sulfato férrico $Fe_2(SO_4)_3$ o sulfato ferroso $FeSO_4$ y floculantes como la sílice activada y algunos almidones, fécula de maíz, etc. Estas sustancias pueden usarse en experiencias de sedimentación con agua corriente de fuentes naturales, que generalmente tienen sólidos suspendidos.

En la sección 11.3 se refiere la experiencia de sedimentación por lotes, en una probeta. La figura 11.5 es una gráfica de asentamiento, que repetimos aquí, por facilidad de consulta, donde se identifican las zonas A, de líquido clarificado, la zona B, de asentamiento obstaculizado, a la concentración inicial ε_B , la zona C, de espesamiento con concentración variable y la zona D de sedimentos a concentración máxima $\varepsilon_{s,max}$. Las interzonas AB, BC, AC y CD son líneas que deben definirse con precisión, para relacionar mejor la teoría con la práctica.

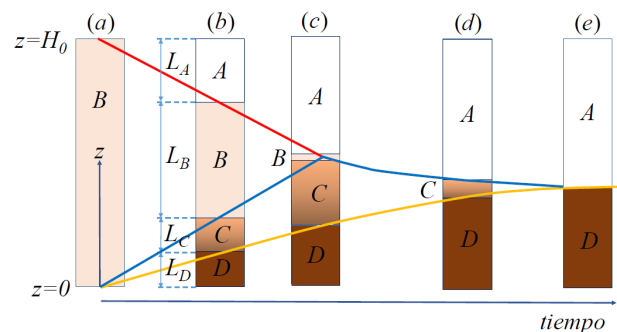


Figura 13.1: Sedimentación por lotes en una probeta.

13.2 Operación

1. Preparar un litro de una suspensión de concentración conocida ε_B , agregando sustancias floculantes o coagulantes, si es el caso.
2. Verter la suspensión en la probeta de un litro.
3. Agitar la suspensión antes de iniciar el proceso de sedimentación, a modo de poder aproximar a una concentración uniforme en la probeta.
4. Hacer algunas pruebas de iluminación para distinguir, con mayor claridad, las interzonas bidimensionales que sean distinguibles.
5. Agitar nuevamente la suspensión en la probeta, para garantizar su concentración uniforme.
6. Hacer una grabación del proceso de asentamiento, con dos repeticiones.
7. Identificar las interzonas y la coordenada vertical del desplazamiento de cada una de ellas.
8. Elaborar una gráfica del proceso de asentamiento, en coordenadas de *tiempo* vs. *altura*.
9. Encontrar las concentraciones medias de cada zona, mediante balances de masa.
10. Proponer líneas rectas características de concentración constante, en la zona C.
11. Determinar la rapidez de propagación de un conjunto de líneas características
12. Determinar la rapidez de desplazamiento de las interzonas AB, BC, AC y CD, si dichas zonas son distinguibles.

13.3 Principios físicos del funcionamiento

El comportamiento de una suspensión en proceso de asentamiento, hasta la completa sedimentación, está fundamentalmente ligado a su **función de densidad de flujo derivado**, $f_b(\varepsilon_s)$, que se define por la ecuación (11.3.28):

$$f_b(\varepsilon_s) = \varepsilon_s(1 - \varepsilon_s)(v_s - v_f), \quad (13.3.1)$$

y se emplea en la evaluación de la **función de densidad de flujo de sólidos**, $f(\varepsilon_s)$, de acuerdo a la ecuación (11.3.27):

$$f(\varepsilon_s) = \varepsilon_s q + f_b(\varepsilon_s). \quad (13.3.2)$$

En el proceso de asentamiento de las partículas sólidas en el fondo de la probeta, hay reacomodos que las sitúan a menores distancias de otras partículas, que aquellas distancias que las separaban anteriormente. Esto implica que un mayor volumen, en el fondo de la probeta, es ocupado por los sólidos, haciendo necesario expulsar al líquido que ocupaba anteriormente ese volumen. No hay, para el líquido, otra vía de evacuación, que ascender a contracorriente de las partículas sólidas, a través de la probeta, produciendo en su ascenso una fuerza de fricción en la superficie de las partículas, que las frena parcialmente en su descenso. Esta fuerza de fricción también actúa sobre la masa de fluido que es arrastrada hacia abajo, por el movimiento de las partículas sólidas. Esta masa de líquido se conoce como la masa agregada y ocupa un volumen igual a la mitad del que ocupa la partícula sólida. La masa agregada desciende junto con la partícula, principalmente adherida a la cauda o estela de la partícula. Así, la fricción tiene el efecto de frenar el movimiento descendente de las partículas, reduciendo la diferencia entre la velocidad de los sólidos y la del fluido, es decir, disminuyendo la velocidad de los sólidos relativa al movimiento del líquido, conocida como la **velocidad de deriva o velocidad derivada** $\mathbf{u} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f$, como se aprecia en la figura 11.8, y que es uno de los factores de la función de densidad de flujo derivado, $f_b(\varepsilon_s)$.

A los efectos de interacción entre las partículas sólidas y el líquido se agregan los efectos de las interacciones partícula-partícula, que adquieren mayor importancia conforme el contacto directo entre las partículas se vuelve más frecuente, conforme su concentración aumenta, hasta valores semejantes a la concentración de máximo empaquetamiento $\varepsilon_{s,\max}$, que vale alrededor de

0.67. Cuál sea este valor, depende de la forma y deformabilidad de las partículas. Es por esto que las suspensiones floculantes, que tienen mayor capacidad para deformarse, una vez que han sedimentado, continúan su proceso de compactación, haciendo que la zona D disminuya su volumen a tiempos mayores. Una vez alcanzada la concentración $\varepsilon_{s,\max}$, los sólidos quedan inmóviles en el fondo de la probeta ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), formando el sedimento. Además, los factores ε_s y $(1 - \varepsilon_s)$, en la ecuación (13.3.1), ponderan la velocidad de deriva en la proporción de ambas fases, lo que da cierta simetría a la relación de comportamiento para $f_b(\varepsilon_s)$.

13.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. A partir del conocimiento de los datos obtenidos en la operación de la probeta de sedimentación, sección 13.2, elaborar una gráfica de la función de densidad de flujo derivado, $f_b(\varepsilon_s)$. Ver figura 11.8 y la discusión correspondiente en el capítulo 11.
2. Diseñar un espesador de sección circular para el tratamiento de aguas residuales, a partir del caudal que debe ser tratado y la sedimentación en probeta de una muestra del agua a ser alimentada. Conseguir la muestra de agua en una planta de tratamiento de aguas residuales (PTAR) a la entrada del espesador. Comparar el diámetro y la profundidad del espesador diseñado con los que existen en el mismo equipo de la PTAR.
3. Diseñar un espesador de placas inclinadas para el tratamiento de agua en una planta potabilizadora (PTAP). Conseguir agua de pozo y agregar un floculante antes de realizar experimentos de sedimentación en probeta. Proponer un caudal de agua potable suficiente para una población de tres mil personas, a razón de 120 *litros/persona-día*. Este objetivo puede requerir la fabricación de un prototipo de placas inclinadas. Los floculantes más usados son algunas sales metálicas como el alumbre, los sulfatos férrico y ferroso, el aluminato sódico, el cloruro férrico y el carbonato de magnesio.

14. Viscosímetros capilares

14.1 Descripción

El viscosímetro de Cannon-Fenske está hecho en un tubo en U de vidrio pyrex, con su sector inferior inclinado y el superior vertical. En una de las ramas se encuentra un tubo capilar R en el sector inferior, conectado a un bulbo superior C , ver la figura 14.1, con **dos marcas de nivel**: una superior (E) y otra inferior (F). Este es el **bulbo de medida**, el cual está conectado en serie a otro bulbo superior D , llamado **bulbo de carga**, ambos en el sector vertical del tubo en U. En la parte inferior de la otra rama se encuentra un bulbo más grande que los anteriores, llamado bulbo de descarga A , unido a dos tubos de mayores diámetros, que sigue la inclinación de la otra rama en ambos sectores, el inferior inclinado y el superior vertical, como se muestra en la figura 14.1.

14.2 Operación

El viscosímetro de Cannon-Fenske puede operar a temperatura ambiente o controlada. Para lo último se requiere sumergirlo en un baño térmico a temperatura controlada, que se aprecia en la figura 14.2. Se introducen 10 ml del líquido por el extremo amplio, que conecta al bulbo de descarga A en la sección inferior. Con una perilla se succiona el líquido por el extremo de la rama de los dos bulbos en serie $N-8$, hasta que el nivel del líquido se encuentra llenando, o cerca de llenar el bulbo de carga (bulbo D , figura 14.1). Entre tanto, el nivel del líquido en el bulbo de descarga (bulbo A) habrá descendido hasta cerca del fondo del mismo. Se retira la perilla para provocar un flujo por gravedad. **Se mide el tiempo** en el que se vacía el bulbo de medida (bulbo C), desde su marca superior hasta su marca inferior a la entrada al capilar. Este tiempo es básico para determinar el coeficiente de viscosidad del líquido newtoniano y debe ser **al menos de 200 segundos**; ver en la tabla 14.1 las dimensiones, rangos de medición y la identificación por medio de un código, de los viscosímetros de Cannon-Fenske.

través del capilar.

6. La fuerza impulsora cambia en la medida que descende el nivel en la rama de los bulbos *C* y *D* y asciende el nivel en la rama del bulbo *A*.
7. Por lo anterior vemos que el proceso es transitorio. ¿Cómo podría justificarse tratarlo con un modelo cuasi-estacionario?



Figura 14.2: Viscosímetro de Cannon-Fenske y baño de temperatura controlada.

Tabla 14).1. Dimensiones y rangos de viscosímetros de Cannon-Fenske				
No.	K_v (cSt/s)	v_{min} / v_{max} (cSt)	$d_{tc} \pm 2\%$ (mm)	$V_C \pm 5\%$ (mL)
25	0.002	0.5 / 2	0.30	1.6*
50	0.004	0.8 / 4	0.44	3.1
75	0.008	1.6 / 8	0.54	3.1
100	0.015	3 / 15	0.63	3.1
150	0.035	7 / 35	0.78	3.1
200	0.1	20 / 100	1.01	3.1
300	0.25	50 / 250	1.27	3.1
350	0.5	100 / 500	1.52	3.1
400	1.2	240 / 1200	1.92	3.1
450	2.5	500 / 2500	2.35	3.1
500	8	1600 / 8000	3.2	3.1
600	20	4000 / 20000	4.2	3.1

* 250 s tiempo mínimo de flujo. 200 s tiempo mínimo de flujo para todos los demás.

14.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Encontrar la viscosidad de mezclas homogéneas de dos o tres líquidos newtonianos puros completamente solubles, como agua-etilenglicol, agua-glicerol y agua-etilenglicol-glicerol. Determinar experimentalmente la viscosidad de dichas mezclas de diversas composiciones, y desarrollar ajustes en función de la composición, a diversas temperaturas constantes.

2. A partir de los métodos existentes para estimar la viscosidad de mezclas líquidas¹, elaborar procedimientos para estimar la viscosidad de las mezclas medidas y compararlas con los resultados experimentales.
3. Proponer otras mezclas homogéneas binarias y ternarias de líquidos, que no sean dañinos para la salud, y repetir con ellos los dos objetivos anteriores.

Consideraciones y recomendaciones

1. Es necesario medir la densidad y es conveniente elaborar gráficas de concentración vs. densidad.
2. Determinar experimentalmente el volumen del bulbo C .
3. Disponer un conjunto de baños térmicos a diferentes temperaturas, para la determinación de la viscosidad como función de la temperatura.
4. Lavar y limpiar el viscosímetro con un solvente adecuado, como acetona, y secarlo con aire limpio.
5. Cuando se introduce el viscosímetro en un baño térmico, se debe esperar unos 10 minutos a que la temperatura se equilibre, antes de hacer el experimento.
6. Repetir las mediciones para confirmar la reproducibilidad de los resultados, en caso de duda hacer más repeticiones y **reportarlas todas**.
7. Calibrar el viscosímetro con un líquido de viscosidad conocida, para **encontrar la constante de calibración a diferentes temperaturas**, si es el caso. En esta constante se aglutina la influencia de todos los parámetros geométricos y suposiciones del modelo. Se aconseja tratar la densidad separadamente, pues influye en la carga gravitacional, que determina la diferencia de presión como fuerza impulsora.

¹Ver, por ejemplo, la teoría de Eyring usada por Méndez Mandujano (2014) y las referencias mencionadas allí.

15. Viscosímetro de Brookfield

15.1 Descripción

El viscosímetro de Brookfield es un viscosímetro rotatorio. Consta de un cabezal con motor y un elemento giratorio en el que se sujeta un disco o un cilindro que llamamos *aguja o malacate*. Esta aguja tiene la forma de una varilla que atraviesa un disco o campana. También consta de una horquilla que enmarca la zona de la aguja. Ambos elementos, la aguja y la horquilla, se sumergen en el líquido hasta el nivel marcado en la aguja. Al funcionar, el cabezal rotatorio y la aguja giran con una velocidad angular constante que se fija con el dado selector, situado en el cabezal. La torca o par generado por la resistencia viscosa del líquido se puede leer en una escala situada también en el cabezal, para lo cual se presiona una palanca llamada *clutch*, la cual acopla una aguja deflectora a la escala que determina la resistencia viscosa como un esfuerzo de torsión. Por lo tanto, la deflexión leída es proporcional a la torca. En la figura 15.1 se muestran los principales elementos del viscosímetro de Brookfield.

15.2 Operación

1. Al inicio se elige una aguja del conjunto mostrado en la figura 15.2 y se asegura al eje inferior, levantando ligeramente el eje y sosteniéndolo firmemente con una mano, mientras la aguja se enrosca con la otra.
2. Se introduce la aguja en el líquido de prueba hasta que su nivel esté en la marca que la aguja tiene para este propósito. Puede ser más conveniente introducir primero la aguja en el líquido, antes de asegurarla al eje inferior del cabezal. Se debe cuidar que no queden burbujas atrapadas entre la aguja y el líquido.
3. Se **selecciona la velocidad angular más baja** en el dado selector que se muestra en la figura 15.3(b) o en la perilla indicadora, de acuerdo al modelo de viscosímetro que se esté operando.
4. Se verifica que el viscosímetro esté nivelado, mediante la burbuja de nivel que se muestra en la Figura 15.3(a).
5. Se enciende el aparato y se espera que alcance el régimen estacionario. El tiempo requerido para esta operación depende de la velocidad angular, por arriba de 4 rpm bastarán unos 20

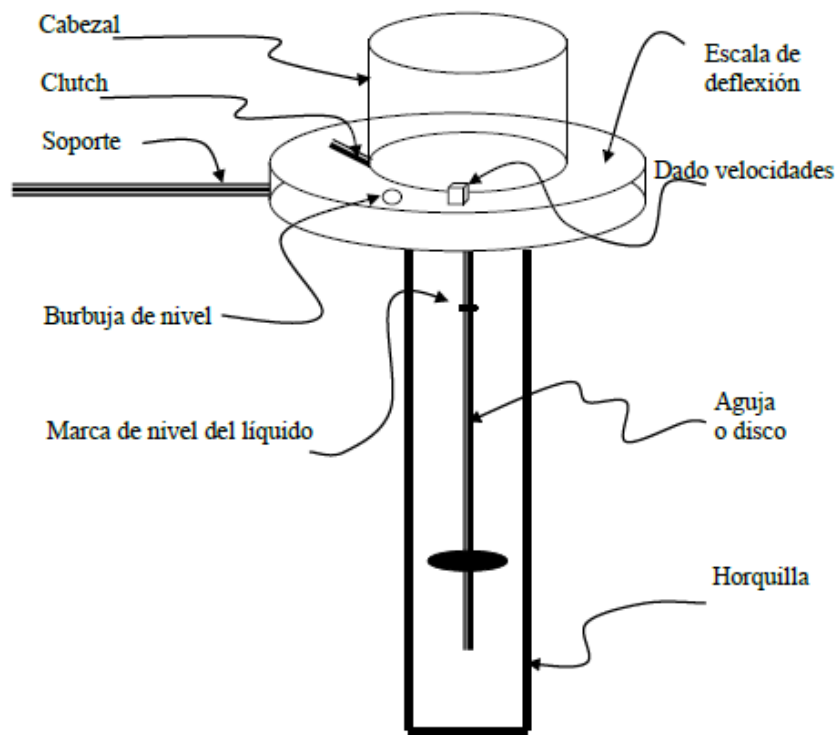


Figura 15.1: Esquema del viscosímetro de Brookfield.

ó 30 segundos, a velocidades menores es recomendable esperar una vuelta completa de la escala de deflexión, para verificar que el indicador que se ve en la escala, permanece en la misma lectura de la vuelta anterior.

6. Se presiona el *clutch*, que se ve arriba de la varilla que sostiene el cabezal, en la figura 15.3(b), eligiendo el momento de hacerlo, de manera que la aguja indicadora quede en la zona visible de la mirilla de la escala. Si la aguja rebasa el 100 % de la escala, se debe reducir la velocidad angular o cambiar la aguja por una de **menor superficie de contacto** con el fluido.
7. Cuando la aguja marca un valor en la escala, se toman los datos de (1) la deflexión, (2) la velocidad angular, en rpm y (3) el disco usado.
8. Se repiten los pasos 5, 6 y 7 dos veces, para tener una estimación estadística del error en la lectura.
9. Se cambia el disco por el siguiente y se repiten los pasos 1 a 8.

En la siguiente liga hemos videograbado un instructivo sobre el manejo adecuado del viscosímetro de Brookfield:

<https://www.dropbox.com/s/7yp7oqrs9ln1rg5/brok.mp4?dl=0>

15.3 Principios físicos del funcionamiento

El viscosímetro de Brookfield es un viscosímetro rotatorio cuyas agujas tienen geometrías complejas. No obstante, el viscosímetro de Brookfield comparte los principios de operación de otros viscosímetros rotatorios, entre los cuales los de cilindros concéntricos se han usado frecuentemente para el análisis y desarrollo de procedimientos. Algunas referencias hacen distinción entre dos tipos de viscosímetro de cilindros concéntricos, así Dealy(1982) indica que en un viscosímetro de Couette gira el cilindro interno, en tanto que en uno de Searle, gira el cilindro externo. Bird en cambio, llama viscosímetro de Couette a éste último y no indica otro nombre para el primero.



Figura 15.2: Viscosímetro de modelo VC y conjunto de agujas intercambiables.

En el viscosímetro de Brookfield gira el elemento interno, que sujeta la aguja, en tanto que los elementos externos: el vaso y la horquilla, permanecen fijos. Al conectar el motor del viscosímetro, la aguja gira a la velocidad angular seleccionada y su superficie ejerce una fuerza cortante sobre el fluido adyacente, que gira en consecuencia. La cantidad necesaria de fluido es de 450 o 500 *ml*. El vaso y la horquilla impiden que el fluido adyacente a ellos se ponga en movimiento. El resultado neto de estas dos fronteras, la interna rotatoria y la externa fija, sobre el fluido, es una distribución de esfuerzos viscosos en todo el espacio ocupado por él. Cuando se alcanza el régimen estacionario, las fuerzas viscosas multiplicadas por el brazo de palanca desde el eje axial, integradas sobre la superficie de la aguja, da el torque del fluido sobre la aguja, el cual se mide en la posición de la flecha sobre la escala situada en el cabezal, como una deflexión en porcentaje de la escala. Los tres datos importantes para determinar la viscosidad, mencionados en el punto 7 de la Sección anterior, son (1) el porcentaje de la deflexión, (2) la velocidad angular en rpm y (3) la aguja usada.

Para determinar la viscosidad efectiva se puede utilizar una plantilla que los fabricantes envían con el instrumento. Esta plantilla no es más que una regla de cálculo que facilita las operaciones aritméticas que se deben realizar, y consta de una parte fija con una abertura o ventana y una reglilla móvil, que se desliza hasta ver en la ventana el modelo de viscosímetro usado y el número de la



Figura 15.3: Detalles del cabezal del viscosímetro de Brookfield. (a) Nivel de burbuja y escala del torquímetro. (b) Dado selector de velocidad angular y *clutch*.

aguja empleada en esa medición. Debajo de estos datos, en la ventana aparecen dos columnas, la izquierda corresponde a la velocidad angular utilizada y la derecha al factor por el que se ha de multiplicar el porcentaje de deflexión para obtener la viscosidad en centipoises (cp).

En el capítulo 5 se describe un procedimiento para encontrar los parámetros reológicos de un fluido newtoniano generalizado, utilizando un viscosímetro de Brookfield, que permite conocer pares de valores de la viscosidad efectiva y el parámetro de esfuerzos viscosos. La idea fundamental del método tiene dos argumentos: por una parte, la proporcionalidad directa entre la deflexión y la fuerza aplicada sobre la superficie de la aguja y por la otra el valor de la viscosidad efectiva que puede leerse con ayuda de la plantilla descrita arriba. Esta viscosidad se considera entonces como una función del parámetro de la rapidez de deformación, $\dot{\gamma}$. A partir de estas consideraciones es posible encontrar las constantes reológicas del fluido de potencias, así como el esfuerzo de fluencia, ver los diagramas de flujo que aparecen en las figuras 5.1 y 5.2.

15.3.1 Determinación de la magnitud de los esfuerzos y de la viscosidad efectiva

Consideremos la determinación de los parámetros reológicos de un FNG con un **viscosímetro de Brookfield**. Con este viscosímetro se determinan cuatro datos para cada punto experimental: (1) la **aguja** que se utiliza, la cual tiene asignado un número (del 1 al 7) para identificarla, (2) la **velocidad angular** N que se fija a un valor constante, (3) el **porcentaje de deflexión** α que se lee en la escala del viscosímetro y (4) la **viscosidad efectiva** η_{ef} que se evalúa con los tres datos anteriores.

El porcentaje de deflexión α está relacionado con el **torque total** efectuado sobre la aguja correspondiente. Dicho torque es proporcional a la magnitud de los esfuerzos, de modo que para cada aguja se ha encontrado la relación proporcional:

$$\tau = k_{\tau} \alpha, \quad (15.3.1)$$

donde k_{τ} es una constante para cada aguja, que convierte el porcentaje de deflexión en la magnitud de los esfuerzos, dada en Pascales, Pa . En la tabla 15.1 se encuentran los valores de la constante k_{τ} para cada aguja.

Tabla 15.1 Valores de las constantes k_{τ} y c_{η} para cada aguja							
Aguja #	1	2	3	4	5	6	7
k_{τ}	0.035	0.119	0.279	0.539	1.05	2.35	8.4
c_{η}	0.1	0.4	1	2	4	10	40

Por otra parte, la viscosidad efectiva η_{ef} , en unidades de $Pa \cdot s$, se encuentra al multiplicar el porcentaje de deflexión α , por un factor dado para cada aguja usada, que puede ser leído en una plantilla que viene como accesorio del viscosímetro. Los factores de dicha plantilla resultan de dividir las constantes c_{η} de la tabla 15.1 entre la velocidad angular N , en rpm, de modo que

$$\eta_{ef} = \frac{c_{\eta}}{N} \alpha \quad (15.3.2)$$

La aplicación de las ecuaciones (15.3.1) y (15.3.2) y de los valores de la tabla 15.1, es equivalente al uso de la plantilla mencionada. Al hacerlo con todas las lecturas de todas las agujas, se obtienen pares de valores, correspondientes a la relación (η_{ef}, τ) .

15.3.2 Preparación de muestras de un FNG

Uno de los materiales más ilustrativos de un comportamiento reológico complejo, aunque muy fácil de preparar, son las mezclas de harina de maiz o maicenas con agua. Su comportamiento se

puede caracterizar como el de un fluido newtoniano generalizado (fluido de Bingham-Ostwald) a concentraciones bajas y torques bajos. A concentraciones intermedias y torques bajos el modelo de FNG sigue siendo adecuado, pero a torques mayores se evidencia un comportamiento viscoelástico que no es posible analizar con el viscosímetro de Brookfield.

La preparación de mezclas de diversas concentraciones permite habilitarse en el manejo de mezclas y posteriormente ver cómo cambian los parámetros reológicos con la composición. A continuación proponemos la preparación de una tabla para hacer mezclas de harina de maíz de composición intermedia, para su posterior empleo en el viscosímetro de Brookfield, para encontrar los parámetros reológicos de cada muestra, en el intervalo reológicamente más interesante.

Tabla 15.2 Cantidades en muestras de 500 ml de suspensiones de harina de maíz *							
% masa	Harina [g]	Agua [g]	Detergente [g]	ρ [g/cm ³]*♣	τ_0 [Pa]	m [♠]	n
0.49			0.5				
0.50			0.5				
0.51			0.5				
0.515			0.5				
0.52			0.5				
* La densidad aproximada de estas suspensiones es de 1200 kg/m ³ . ♣ Determinar por pesada la densidad de la muestra y elaborar una gráfica de la densidad como función del porcentaje de harina. ♠ Sus unidades dependen del valor de n .							

15.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Determinar los parámetros reológicos de un FNG, como las suspensiones de harina de maíz, en el rango de concentraciones másicas del 48 – 51.5 % en masa.
2. Elaborar gráficos de los parámetros reológicos de suspensiones de harina de maíz, en función de su concentración másica.
3. Repetir los dos objetivos anteriores para otros FNG como el cemento Portland, almidones crudos o cocidos y mezclas de fluidos newtonianos como agua-etilenglicol-glicerol, representando las concentraciones ternarias en gráficas triangulares y completando la información obtenida en viscosímetros capilares.

16. Tanques agitados

16.1 Descripción

Un tanque agitado es un recipiente, generalmente cilíndrico, con o sin un conjunto de placas transversales a la pared, llamadas **deflectores** o **desviadores** de flujo, que sirven para aumentar el mezclado promovido por el movimiento giratorio de un impulsor, ver figura 16.1 y revisar el capítulo 8. El impulsor se hace girar con un motor que consume una potencia efectiva dada, dependiente de la viscosidad del fluido y de las velocidades angulares que se elijan, ver figura 16.2. Los elementos de agitación son propelas, paletas, impulsores, turbinas, etc, ver figura 16.3. Estos elementos, situados en el extremo de un eje, vástago o flecha, giran provocando agitación en el fluido y dependiendo de la orientación de las aspas producen un flujo principalmente radial o axial. Los parámetros geométricos de los tanques y sus agitadores, pueden ser muy variables; con todo existen algunos diseños que se han aceptado ampliamente, con sus características y proporciones específicas. Entre ellos se encuentran las proporciones del tanque agitado de Rushton. El instrumento tiene además del controlador de velocidad angular, un medidor del torque.

Dos tipos de experimentos resultan especialmente ilustrativos: por una parte, la agitación de glicerina permite una caracterización sencilla de la potencia de agitación. Además, permite observar un vórtice que se forma en el eje del agitador; este vórtice succiona aire de la superficie libre del líquido, introduciéndolo helicoidalmente, sobre la superficie de la varilla del agitador, hasta llegar a las hojas o paletas, por las que se desliza hasta la punta y se desprende, finalmente, hacia la masa de líquido en movimiento giratorio en el recipiente.

Otra experiencia interesante es preparar una suspensión de harina de maíz al 50 %m (50 % en masa). Tener presente el comportamiento reológico de estas suspensiones, para no dañar el equipo y para diseñar estrategias adecuadas de incorporación de la harina en la suspensión.

16.2 Operación

1. Se vierte el líquido seleccionado hasta determinada altura del tanque.
2. Se introduce el agitador seleccionado, fijando la profundidad de su inserción.
3. Se acciona el agitador y se espera a alcanzar el régimen estacionario. ¿Cómo se sabe que se

ha alcanzado?

4. Se toman lecturas de la velocidad angular (rpm) y el torque (mV = milivolts).
5. Se cambia la velocidad angular y se repite el paso 4.
6. Se cambia de agitador y se repiten los pasos 2 a 5.

16.3 Principios físicos del funcionamiento

El motor eléctrico proporciona la energía necesaria para el movimiento.

1. El movimiento rotacional del impulsor, transmitido desde el motor por la flecha, impulsa al fluido de sus alrededores, provocando el flujo.
2. El fluido es impulsado en la dirección normal a la superficie de las hojas o paletas del impulsor. Dependiendo de la orientación de éstas, el flujo puede presentar importantes componentes de velocidad radial y axial.
3. La pared lateral del recipiente o tanque imprime al flujo su carácter circulatorio, imponiendo al fluido la dirección de la componente angular de la velocidad.
4. El aumento de la presión cerca de la pared lateral, por el efecto de la aceleración centrífuga y de la velocidad radial del fluido, genera un flujo secundario ascendente y descendente en las proximidades de dicha pared, en una proporción semejante a la cantidad de fluido arriba y debajo de la zona horizontal del impulsor.
5. Los deflectores tienen el propósito de incrementar la agitación turbulenta, rompiendo la regularidad del movimiento angular del fluido, mediante su acción obstructiva.
6. La región frontal de cada hoja o paleta del impulsor es una zona de alta presión, en tanto que la región posterior es de baja presión, con flujo de estela. La región frontal de los deflectores

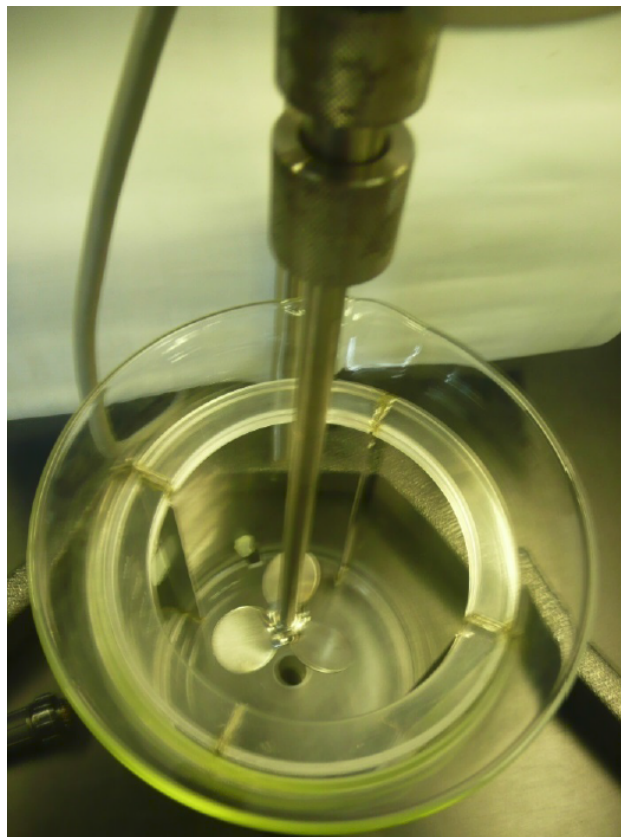


Figura 16.1: Vista superior de tanque agitado mostrando sus desviadores y un impulsor de propela.



Figura 16.2: (a) Equipo de agitación instalado. (b) Vaso con desviadores de flujo.

es la que obstruye el movimiento angular del fluido y es también de alta presión, en tanto que la región posterior es también de baja presión con flujo de estela.

7. Por lo anterior, el tamaño característico de los vórtices más grandes del flujo, está asociado al tamaño de las hojas o paletas del impulsor y hay otros vórtices en el rango de tamaño del ancho de los deflectores.
8. Dependiendo de la energía cinética transmitida por el impulsor al fluido, el movimiento de los vórtices puede dar lugar a la generación de una estructura turbulenta, de mayor o menor importancia, dependiendo de su energía turbulenta.
9. La cascada de remolinos turbulentos tiene tres rangos de tamaños; los más grandes son de los remolinos del tamaño de las hojas o paletas del impulsor, que transportan otros remolinos menores. Los remolinos en el sub-rango inercial contienen la mayor porción de la energía cinética turbulenta y en los remolinos más pequeños, generados al interior de los remolinos medianos, ocurre la disipación de energía por efectos viscosos.
10. La agitación puede producir un aumento de la temperatura, cuando la intensidad y duración del mecanismo disipativo de los remolinos más pequeños llega a ser tan importante como para poder observar su efecto.
11. La energía de agitación es proporcional a la disipación viscosa, más que a la conservación del movimiento que promueve el mezclado, por el mecanismo de difusión de los remolinos o a la masa de fluido agitado.



Figura 16.3: (a) Impulsor de propela marina. (b) Impulsor de turbina de Rushton. (c) Impulsor de paleta oblicua.

16.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Observar los patrones de flujo en el tanque sin deflectores, agitando un volumen dado de glicerol con diversos impulsores. Incorporar los deflectores y observar los cambios de los patrones de flujo.¹
2. Encontrar la potencia de agitación como se discute en la sección 8.5, adimensionalizar la expresión integral, para encontrar la funcionalidad del número de potencia con respecto al número de Reynolds, al número de Froude y a un número de Péclet de movimiento. Hacer el ajuste empírico de dicha funcionalidad, para el caso estacionario y nivel de líquido fijo, y comparar el resultado con gráficos similares de las referencias.² Ver también la figura 8.8.
3. Preparar suspensiones de harina de maíz, entre el 48 y el 52% en masa, a velocidades angulares bajas. Notar que el aumento de la velocidad de agitación no siempre es benéfico para incorporar la harina en la suspensión. Analizar las causas y los resultados, cuidando de mantener la agitación con torques moderados.
4. Determinar el tiempo de circulación t_c y el tiempo de mezclado t_m , al inyectar un pulso de una solución salina completamente miscible en el fluido agitado y elaborar una gráfica semejante a la figura 8.7, de Re_i vs. Nt_m , para un conjunto de velocidades angulares N , suficientemente bajas, utilizando un sensor de conductividad eléctrica en algún punto fijo del tanque agitado.

¹Un buen trazador para la observación de los patrones de flujo son las burbujas de aire arrastradas al seno del líquido (glicerol), desde la interface. Las burbujas se introducen en la corriente de glicerol, descendiendo desde la superficie libre, cerca del eje del impulsor cuando se opera a velocidades elevadas; para visualizarlas se recomienda alternar velocidades altas y bajas.

²Por ejemplo McCabe y Smith, 1976, figuras 9-14 y 9-15 de dicho texto.

17. Bombas de ariete

17.1 Descripción

La bomba de ariete es una máquina que utiliza la energía de un pequeño desnivel de agua, véase la altura h_A en la figura 17.1, para elevar una porción de esta agua a una altura h_D , mayor a su nivel inicial h_A . Su acción es puramente mecánica, pues no requiere de energía eléctrica o de un combustible, sino únicamente de la energía potencial de la alimentación que está ligeramente por arriba del sitio donde se instala el cabezal de la bomba. La bomba de ariete consta de dos regiones o zonas, la **zona del impulso (ZI)** y la **zona de la descarga (ZD)**. En la figura 17.1 se identifica la zona del impulso *ZI* por su color azul, y la zona de la descarga *ZD* por su color rojo.

En *ZI* se encuentra la alimentación, *A*, que en el prototipo del laboratorio es una tina de alimentación, aunque en las aplicaciones prácticas, frecuentemente, es una fuente continua de agua como un arroyo, del cual se toma la alimentación adaptando una tubería inclinada descendente *B*, en cuyo extremo hacia la bomba se coloca una llave de paso 1 y una tuerca unión 2, para separar y poder reemplazar, con facilidad, todo el cuerpo de la bomba por otro, de ser conveniente. El nivel del agua en la alimentación *A* tiene una altura h_A por arriba del cabezal *C* de la bomba, en el punto de derrame *I*, donde $h_0 = 0$ es el nivel base o altura de referencia, ver figura 17.1. El cabezal *C* consta de una entrada en la tuerca unión 2, y dos salidas *I* y *D*. En ellas se encuentran zendas válvulas de retención. Ambas están colocadas en direcciones opuestas, que se reconocen por la flecha grabada en la válvula, que indica la dirección normal del flujo. La válvula de retención que conecta el cabezal *C* con el ambiente, se conoce como la válvula de impulso *I* y su flecha debe dirigirse hacia *C*. La otra debe dirigirse en sentido inverso, apuntando hacia afuera de *C*, y se conoce como la válvula de descarga *D*. La zona de descarga *ZD* empieza en la válvula de descarga *D* y consta de la cámara de aire *E* que conecta en su base, mediante una *Te*, con la tubería de descarga *F*. Esta tiene un manómetro de carátula, con el número 3, y una llave de paso, con el número 4, hacia una manguera de jardín que se eleva hasta una altura h_D , desde el punto de derrame *I*, para descargar en el depósito superior *G*.

En el cabezal, las dos válvulas de retención son piezas claves para el funcionamiento de la bomba de ariete. Accionan como un mecanismo integrado, puesto que se colocan al mismo cabezal en direcciones opuestas. La válvula de impulso *I* cierra bajo el efecto del flujo de agua en el cabezal,

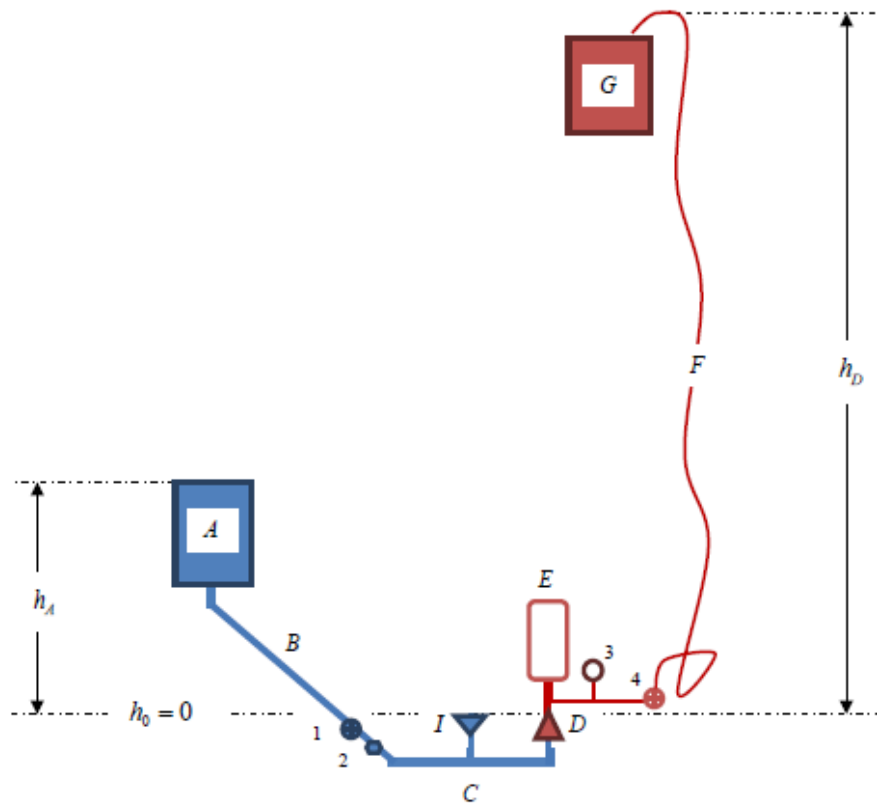


Figura 17.1: Diagrama de una bomba de ariete. La válvula de impulso (∇), en este caso, está aguas arriba con respecto a la válvula de descarga (Δ).

al pasar a través de la válvula I , en tanto que la válvula de descarga D se mantiene abierta cuando el agua del cabezal asciende a través de ella, hacia la cámara de aire E , pero se cierra cuando la presión, que se ha elevado en la cámara de aire, impulsa al agua desde la cámara E hacia el cabezal C . Este impulso cierra la válvula de retención D y obliga a la cámara E a mantener su presión elevada y buscar otro punto de desfogue, que existe cuando la llave de paso de la descarga (punto 4) se abre parcialmente para que el agua, en la parte baja de la cámara de aire, a presión elevada, ascienda por la manguera F hacia el tanque de descarga G .

17.2 Operación

1. Se verifica que la llave de paso de la alimentación (ver Figura 17.1, punto 1) esté cerrada.
2. Se carga el tanque de alimentación. En el curso de la experiencia se cuidará que este tanque tenga siempre agua en su interior, hasta un nivel aproximadamente constante.
3. Se verifica que la llave de paso del tubo de descarga (ver Figura 17.1, punto 4) esté cerrada.
4. Se abre la llave de paso de la alimentación, punto 1.
5. Si la bomba no opera automáticamente, se induce el flujo abriendo manualmente la válvula de impulso, punto I , durante unos dos a cinco segundos, ver Figura 17.2(a).
6. Cuando se ha establecido el funcionamiento cíclico de la bomba, se abre lentamente la llave de paso del tubo de descarga, cuidando que no se pierda el ritmo de los ciclos de apertura y cierre de válvulas.
7. El agua asciende por el tubo de descarga hasta que, eventualmente, llega a la salida del tubo y descarga en el recipiente G .



Figura 17.2: Operación de una bomba de ariete: (a) Inducción del flujo, abriendo manualmente la válvula de impulso I , situada aguas abajo. (b) Derrame de un pulso por la válvula de impulso I , situada aguas arriba.

17.3 Principios físicos del funcionamiento

En general, el funcionamiento de la bomba de ariete se basa en la **transformación de diversas formas de la energía total de flujo**, la cual se define en la sección 9.1.4, al desarrollar los términos del potencial de Bernoulli, ϕ_B .

En la zona del impulso (ZI) ocurre el siguiente proceso cíclico de cambios de las formas de la energía:

1. Al abrir la válvula I , la energía potencial de la alimentación A , representada por h_A , impulsa al agua por el tubo inclinado B y así, la energía potencial se transforma en energía cinética de flujo.
2. El cierre abrupto de la válvula I , debido al flujo a través de ella, suprime dicho flujo y genera **una onda de alta presión en el cabezal**. Esta onda de presión es conocida como golpe de ariete.
3. El ariete, que avanza hacia la izquierda en el cabezal, eventualmente actúa sobre la válvula D , produciendo flujo hacia la cámara de aire, ya en la zona de descarga (ZD).
4. El ariete también se propaga hacia el tanque de alimentación A (bajo el efecto mostrado en la figura 10.1.d), donde se disipa, provocando un relajamiento de la presión en el fondo del tanque, que se encuentra a su presión hidrostática.
5. En consecuencia, **una onda de presión manométrica retorna** desde el tanque A por la tubería B y el cabezal C (ver figura 10.1.e), hasta las válvulas D e I .
6. Cuando este pulso de presión manométrica llega a la válvula I , figura 10.1.f, la inercia del movimiento del fluido hacia la izquierda, obliga a continuar evacuando de líquido las proximidades de la válvula I , la presión continúa bajando y se produce una **onda de presión manométrica negativa** que actúa succionando el pistón de la válvula I y la tubería (ver figura 10.1.g).
7. La onda de baja presión regresa por el cabezal, alcanza la válvula D y la tubería B , y nuevamente llega hasta el tanque de almacenamiento A .
8. En la válvula D este pulso de presión negativa coincide con la inversión del flujo debida a la

presurización de la cámara de aire, contribuyendo al cierre abrupto de la válvula *D*.

9. Además, este pulso de presión negativa succiona la chapaleta de la válvula *I*, contribuyendo a su apertura.
10. A continuación se produce un relajamiento, ahora de la onda de presión negativa, que consiste en un aumento progresivo de la presión, que nuevamente se propaga desde el fondo del tanque a través de *B* y *C* hasta llegar a la válvula *I*, que ya se encuentra abierta, dejando escapar el agua que se derrama en el ambiente.
11. Este flujo a través de la válvula *I* provoca nuevamente su cierre abrupto y de esta manera se cierra un ciclo del proceso de la zona del impulso *ZI*.

En la zona de la descarga *ZD* también el proceso se basa en la **transformación mecánica de la energía**, sin embargo, está solo parcialmente acoplado a la *ZI*, a través de la elevación de la presión en la cámara de aire, que suministra la fuerza necesaria para que el líquido ascienda hasta el tanque de descarga. El proceso de descarga se desarrolla como sigue:

1. Al cierre de la válvula *I*, el pulso de alta presión, que recorre el cabezal, abre la válvula *D*, dejando pasar el flujo de líquido hacia la cámara de aire *E*.
2. El agua que entra a la cámara comprime el aire, aumentando su presión.
3. El aumento de la presión en *E* es tal que invierte el sentido del flujo de agua, que intenta salir por la válvula *D*, la cual se encuentra abierta, pero...
4. Este flujo ocurre en la dirección inversa, que contribuye al cierre abrupto de la válvula de retención *D*, quedando la cámara de aire presurizada.
5. Otro factor que contribuye al cierre de la válvula *D* es la presión en el cabezal, que en ese momento se aproxima a la onda manométrica negativa, succionando la chapaleta de la válvula *D* y contribuyendo a su oclusión.
6. Al cerrarse la válvula *D* el agua en la cámara de aire queda encerrada a presiones que, de pulso en pulso, se va elevando. La presión de estos pulsos puede ser medida con el manómetro colocado en 3.
7. Si la llave de paso 4 está cerrada, la operación de la bomba solamente incrementa la presión pulsante de la cámara de aire, en cierta medida, pero esta llave puede comenzar a abrirse paulatinamente, para no causar cambios demasiado abruptos en la presión de la cámara de aire, ocasionando un flujo que se eleva por la manguera *F* y eventualmente, llega a desfogar en el tanque elevado *G*.

En la Figura 10.6 se muestran gráficas cualitativas de las posiciones, de las presiones sobre las válvulas de retención *I* y *D* y de las velocidades en *ZI* y en el punto 3, durante un **ciclo estacionario** del funcionamiento de la bomba de ariete. Dicho ciclo se divide en siete etapas, de acuerdo a un análisis realizado por Krol (1951), cada una de ellas con un tiempo característico. En el capítulo 10 se identifican las etapas del ciclo de la bomba de ariete y se hace el cálculo de sus eficiencias, que se pueden evaluar a partir de las cantidades recuperadas en el tanque de descarga, respecto de las cantidades en la alimentación. Las dos eficiencias principales son la eficiencia másica, que es la relación de flujos másicos y la eficiencia energética, que es la relación de sus correspondientes energías potenciales.

Reflexiona y discute:

1. ¿Cómo afectaría el tipo de válvulas de retención al desempeño de la bomba?
2. ¿Cómo sería posible reponer un volumen de aire en la cámara *E* cuando la bomba opera tiempos prolongados y el aire en esta cámara se agota, arrastrado por el agua?
3. ¿Cómo influye la magnitud del volumen de la cámara de aire en la eficiencia y la frecuencia de bombeo?
4. ¿Cuál puede ser la importancia de que la relación de áreas transversales de las tuberías de impulso y descarga sea igual a 2?
5. Los eventos 5 y 6 del proceso de descarga, mencionados arriba, pueden contribuir para

modificar la eficiencia de la bomba, pues si ocurren en fase, simultáneamente, contribuyen a la apertura y cierre de la válvula D , pero si ocurren fuera de fase, el pulso de alta presión en la cámara E podría ocurrir simultáneamente con la ocurrencia de alta presión en el cabezal, en los alrededores de la válvula D , provocando dos fuerzas contrarias sobre la chapaleta y disminuyendo la eficiencia. ¿Qué parámetros geométricos habría que modificar para estudiar esta posibilidad?

17.4 Algunos objetivos de las experiencias

1. Elaborar gráficos de eficiencias máscas y energéticas de D'Abuissou y de Rankine, en función de la altura de descarga, h_D .
2. Invertir el orden de las válvulas de impulso y descarga en el cabezal de la bomba y estudiar los cambios dinámicos en el funcionamiento de la bomba.
3. Elaborar un modelo del ciclo de Krol y determinar los parámetros y variables a ser medidos.
4. Diseñar y construir válvulas de impulso y descarga, de mayor eficiencia.
5. Simular la apertura y cierre de las chapaletas de impulso y descarga en COMSOL, con un módulo de sólidos. Resolver simultáneamente el módulo de sólidos interactuando con el flujo a través de la válvula e incorporar el resto de las partes de la bomba para completar la simulación del funcionamiento de la bomba de ariete.

17.5 Construcción

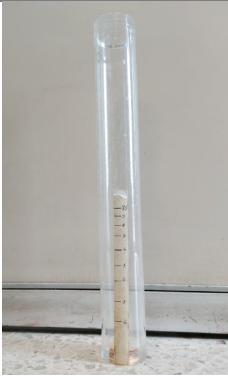
Las bombas de ariete se construyen con tuberías y accesorios de un diámetro nominal determinado, y se identifican por el diámetro de las válvulas de retención. En la figura 17.2(a) se muestra parte de una bomba de 1/2", también, en la figura 17.2(b) se muestra parte de otra de 3/4". Las bombas mayores a 1/2" tienen tubería de descarga F , de diámetro menor al del cabezal de la bomba, de modo que la relación de sus áreas transversales mayor a menor sea alrededor de 2. Algunos afirman que el orden en que se sitúan las válvulas de impulso y descarga en el cabezal no tiene importancia; así, en el diagrama de la figura 17.1 se aprecia la válvula de impulso aguas arriba de la válvula de descarga, a diferencia de la fotografía de la figura 17.2(a), la figura 10.5 y el arreglo de piezas de una bomba de ariete de 1" ϕ , en la tabla 17.1, donde el orden de las válvulas es el inverso, es decir, la válvula de descarga se encuentra en el cabezal, aguas arriba de la válvula de impulso. Ésta configuración ha mostrado mayor estabilidad, de acuerdo a nuestra experiencia.

En la figura 10.4 se muestra el corte de una válvula de retención de columpio en posición vertical. La rama lateral es una cavidad que ocupa el disco en la posición abierta y está normalmente ocluida por un tapón ciego que no se muestra en la fotografía. En ausencia de flujo la válvula, en la posición mostrada, estaría cerrada por la acción de la gravedad sobre el disco del columpio, ver Figura 10.4(a). Una presión adicional descendente aumentaría la fuerza que mantiene cerrada la válvula, en tanto que una presión ascendente, llegaría eventualmente a vencer el peso del disco y mantendría un flujo ascendente a través de la válvula. En esta última condición de flujo, la válvula se mantendría normalmente abierta y una eventual inversión de la fuerza de presión la cerraría, impidiendo el retorno del fluido al cabezal. Este funcionamiento corresponde a lo que ocurre a la válvula de descarga. La válvula de impulso se coloca en la posición inversa, es decir que su condición normalmente abierta coincide con la dirección vertical descendente (ver el arreglo de las piezas que integran la bomba de ariete en la tabla 17.1).

Tabla 17.1. Accesorios usados para la fabricación de una bomba de ariete de 1"φ.

Cant.	Nombre	Figura	Cant.	Nombre	Figura
1	Sector de alimentación: tina de alimentación, niple de cobre de 2 m de largo y 1½"φ con: dos codos de 45°, una válvula de esfera con dos niples y la parte con rosca interna de una tuerca unión.		1	Arreglo de las piezas que integran una bomba de ariete de 1"φ, desde la parte con rosca externa de la tuerca unión de 1½"φ, hasta la llave de nariz que conecta a una manguera de descarga.	
1*	Parte con rosca externa (abajo) de una tuerca unión de 1½"φ. La rosca interna, que se ve arriba, corresponde a la unión con un niple de 1½"φ.		1	Niple roscado de 5 cm de largo y 1½"φ.	
1	Campana reductora de 1½"φ a 1"φ.		2	Niple roscado de 10 cm de largo y 1"φ.	
2	Te roscada de 1"φ.		5	Niple roscado de 5 cm de largo y 1"φ.	
1	Codo roscado de 90° y 1"φ.		2	Válvula de retención de tipo columpio, 1"φ.	

* A partir de esta fila las cantidades corresponden a la bomba de ariete y no incluyen los accesorios del sector de alimentación, que ya se han descrito en la segunda columna de la fila anterior.

Tabla 17.1. Accesorios usados para la fabricación de una bomba de ariete de 1" ϕ. (Continuación)					
Cant.	Nombre	Figura	Cant.	Nombre	Figura
1	Tubo acrílico capacitor de presión, de 3" ϕ con cuerda interna de 1" ϕ .		1	Campana reductora de 1" ϕ a $\frac{1}{2}$ " ϕ , con cuerdas internas	
1	Niple roscado de 5 cm de largo y $\frac{1}{2}$ " ϕ .		1	Te roscada de $\frac{1}{2}$ " ϕ .	
1	Manómetro de carátula de 4 Kg/cm ² con un conector bushing de $\frac{1}{2}$ " ϕ .		1	LLave de nariz de $\frac{1}{2}$ " ϕ .	

17.5.1 Diseño y operación de bombas de ariete

Una vez que se ha construido y operado la bomba de ariete, la representación gráfica de las eficiencias energéticas de D'Aubuisson y de Rankine, η_{eD} y η_{eR} , respectivamente (ver subsección 10.2.4), en función del potencial gravitacional adimensional h_D/h_A y de la eficiencia másica de D'Aubuisson, que coincide con un flujo másico adimensional de la descarga, w_D/w_A , son acciones que se pueden representar directamente en un gráfico tridimensional, cuyo plano horizontal tiene las coordenadas adimensionales independientes w_D/w_A y h_D/h_A . De acuerdo con nuestra experimentación, obtenemos gráficos para las funciones η_{eD} y η_{eR} . Como resulta en el siguiente

Ejercicio

En la tabla 17.2 se reportan datos de una bomba de ariete fabricada con dos válvulas de columpio iguales, de 1" de diámetro nominal, con la válvula de impulso situada aguas abajo, como se ve en las figuras 10.5 y 17.2(a).

Tabla 17.2. Datos de bomba de ariete para determinar eficiencias.

Parámetros:	$h_I(m) =$	0.00	$h_A(m) =$	1.79	
	Variables				
#	$h_D \text{ (m)}$	$n_{golpes \text{ ariete}}$	$\tau \text{ (s)}$	$m_I \text{ (kg)}$	$m_D \text{ (kg)}$
1	3.13	1530	420	46.0	8.5
2	3.54	1638	420	48.0	9.5
3	4.51	1638	420	45.5	7.0
4	5.38	1026	273	30.5	5.0

Encuentra la frecuencias del golpe de ariete, el período de un ciclo y las eficiencias másica y energética de D'Aubuisson y de Rankine.

Respuesta: Con los datos de la tabla 17.2, elaboramos la tabla 17.3, a continuación:

Tabla 17.3. Frecuencias del ariete y eficiencias de la bomba.

Variables		Eficiencias D'Aubuisson		Eficiencias Rankine	
h_D/h_A	$\omega (s^{-1})$	η_{mD}	η_{eD}	η_{mR}	η_{eR}
1.75	3.64	0.1560	0.2730	0.1848	0.3234
1.98	3.90	0.1652	0.3271	0.1979	0.3918
2.52	3.90	0.1333	0.3359	0.1538	0.3876
3.01	3.76	0.1408	0.4238	0.1639	0.4933

La frecuencia promedio es $\bar{\omega} = 3.8\ s^{-1}$, el período de un ciclo es de $0.2632\ s$.

Sin embargo, aquí surgen preguntas relacionadas con las limitaciones que hemos impuesto al sistema, tanto en condiciones de operación como en aspectos constructivos sobre los accesorios y geometría seleccionados, es decir, en las variables de diseño, incluidas las válvulas de retención.

A continuación proponemos un conjunto de cuestionamientos, sin pretender agotar los que abren temas de interés a la ingeniería.

1. ¿Tenemos efectivamente una línea curva en el espacio de las gráficas $\{h_D/h_A, \eta_{kJ}; k = m, e; J = D, R\}$ o se trata de alguna superficie, posiblemente en forma de listón, considerando que alguna variable de operación haya sido olvidada, como el porcentaje de apertura de la llave de paso 4 hacia la manguera flexible de la descarga? Dicha apertura podría regular diversos flujos que no habrían sido discriminados y que, en caso de ser importantes, obtendríamos varios valores de las eficiencias de D'Aubuisson, para la misma coordenada h_D/h_A , con diferentes valores de m_D/m_A . También el porcentaje de apertura podría regular la frecuencia de golpeteo $n_{golpes\ ariete}$ de la válvula de impulso, provocando, o no, el cambio de la coordenada $\bar{\omega}$.
2. ¿Es posible obtener los mismos flujos a diversas alturas? ¿La bomba tiene la sensibilidad adecuada para responder esta pregunta?
3. ¿Cómo afecta la viscosidad, y por lo tanto la temperatura ambiente, la operación?
En cuanto a los parámetros de diseño:
4. ¿Cómo determinan las características de la cámara de aire E la capacidad de bombeo? Las principales características podrían ser su volumen y su material de construcción, el cual puede ser rígido o elástico.
5. ¿Cómo influyen los tipos y modelos de las válvulas de retención en la posibilidad del funcionamiento y su eficiencia? Hay muchos trabajos dedicados al diseño más adecuado de las válvulas de retención; las has de peso muerto, de resortes, de columpio, verticales y horizontales, producidas industrialmente, como las que usamos o modificadas con propósitos específicos.

6. ¿Existen longitudes del tubo de alimentación B que contribuyan a un mejor (o peor) desempeño de la bomba? Estas longitudes L_k están relacionadas con fuerzas en fase actuando sobre las válvulas de retención (fenómenos cooperativos).
7. ¿Cómo afecta el desempeño cambiar las relaciones de los diámetros de las tres zonas de la bomba de ariete? (el tubo de alimentación, la zona del impulso y la zona de la descarga) ¿Qué velocidades promedio son recomendables? ¿Se presenta o no, y cómo interviene la turbulencia?
8. Discute la afirmación: “el orden en el que se colocan las válvulas I y D en el cabezal C no tiene importancia”.
9. Encontrar la condición de equilibrio mecánico para que se inicie el movimiento del disco obturador (chapaleta) como un equilibrio de torques.
10. Establecer un balance transitorio de momento del ímpetu sobre la chapaleta, utilizando una definición de la carrera s como la longitud de arco recorrida por el centro de masa de la chapaleta en el proceso de su oclusión.

Estos y muchos otros cuestionamientos pueden ser resueltos por una combinación adecuada de aplicaciones de las teorías de la mecánica de sólidos acopladas a la mecánica de fluidos, utilizando simuladores numéricos y la realización de experiencias cuidadosamente seleccionadas. Algunas de las respuestas que ya se tienen forman conjuntos de reglas heurísticas muy incompletas, recomendadas con mayor o menor éxito por los conocedores del tema y otras que son objeto de indagación, las cuales proponen modelos que surgen de la simplificación de las teorías clásicas de la mecánica de fluidos y de la experiencia de las personas estudiosas del tema.

18. Redes de tuberías

18.1 Descripción

El instrumento es un arreglo de tuberías y accesorios que se aprecia en la figura 18.1. En el diagrama de la figura 18.2 puede verse que el aparato consta de tres regiones principales: (a) un tanque de almacenamiento con dos secciones, una de ellas para la medición del flujo volumétrico (22) y la otra (23) para la alimentación de la bomba (24). (b) el arreglo de tuberías y accesorios alimentados selectivamente desde la bomba, a través de un sistema de válvulas y (c) la región de medición de la presión, por medio de dos manómetros en U, uno de mercurio (20) y otro de agua (21), para distintos rangos de diferencia de presión, con sus conectores y válvulas de purga (A, B, C y D). A continuación se da la lista de los componentes del arreglo.

- 1 Tubería lisa de 6 mm de diámetro
- 2 Tubería lisa de 10 mm de diámetro
- 3 Tubería de rugosidad artificial
- 4 Tubería lisa de 17.5 mm de diámetro
- 5 Contracción repentina
- 6 Expansión repentina
- 7 Válvula de bola
- 8 Codo a 45 grados
- 9 Unión en Y a 45 grados
- 10 Válvula de compuerta
- 11 Válvula de globo
- 12 Bifurcación a 45 grados
- 13 Codo de 90 grados
- 14 Codo de 90 grados con curvatura pequeña
- 15 Unión en T a 90 grados
- 16 Tubo de Pitot estático
- 17 Medidor de Venturi
- 18 Medidor de orificio
- 19 Muestras de los tubos usados en el aparato

- 20 Manómetro de mercurio de 1 m de largo
- 21 Manómetro de agua presurizada de 1 m de largo
- 22 Tanque para la medición de flujo volumétrico
- 23 Tanque para la alimentación de la bomba
- 24 Bomba centrífuga de servicio
- 25 Tubo de nivel
- 26 Interruptor de la bomba
- 27 Tornillos de seguridad
- 28 Cilindro de medición
- 29 Válvula de servicio
- V1 Válvula de descarga del tanque de alimentación
- V2 Válvula de control de entrada de flujo
- V3 Válvulas de purga de aire
- V4 Válvulas de bola para la cancelación de tuberías
- V5 Válvula de control de salida de flujo (fina)
- V6 Válvula de control de salida de flujo (gruesa)
- V7 Válvulas de los manómetros

18.2 Operación

1. Se abren todas las válvulas de paso del circuito y se enciende la bomba. Parte del aire en el circuito resulta evacuado en esta operación.
2. Se cierran las válvulas de bola para cancelar el flujo por todas las tuberías, excepto una, empezando por mantener el flujo en la tubería inferior, luego en las intermedias y finalmente en la superior. En esta operación el aire remanente en las tuberías debe ser completamente evacuado. Las válvulas de purga de aire pueden auxiliar también en esta operación.
3. Como se pretende encontrar experimentalmente la relación entre el flujo volumétrico y la caída de presión, para diversos tubos y accesorios, es posible en principio, operar de dos maneras:



Figura 18.1: Banco de tuberías.

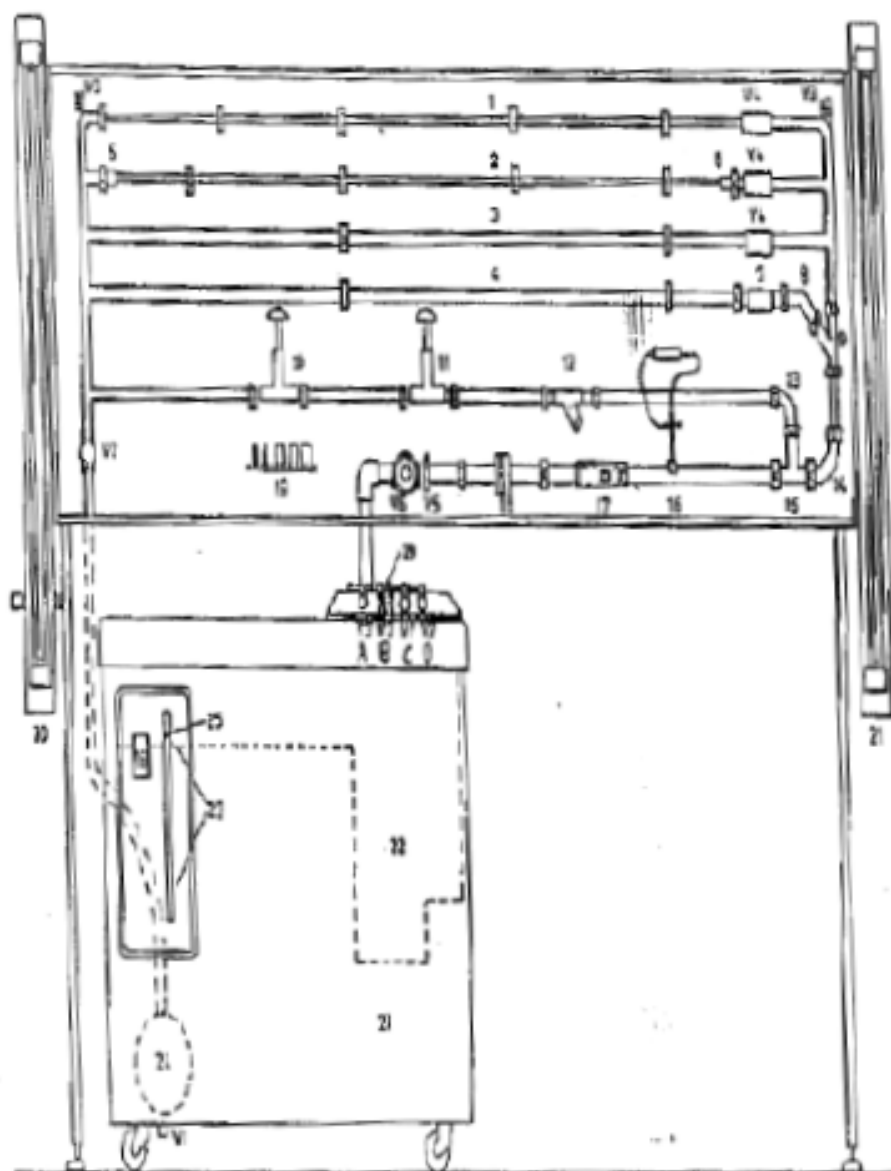


Figura 18.2: Diagrama del banco de tuberías.

- a) Conectar las tomas de presión al accesorio o tubo que se desee inspeccionar, purgar las tomas de presión y hacer las mediciones de caída de presión para diversos flujos volumétricos, midiéndolos mediante el tiempo que circula un volumen dado de fluido y cambiándolos por medio de las válvulas de control de flujo, o bien
- b) Fijar un flujo volumétrico por medio de las válvulas de control de flujo y medirlo mediante el tiempo que circula un volumen dado de fluido. Conectar las tomas de presión, purgarlas y efectuar las mediciones secuencialmente, para todos los tubos y accesorios del circuito que se desea inspeccionar, verificando de tiempo en tiempo que el flujo volumétrico permanezca constante.

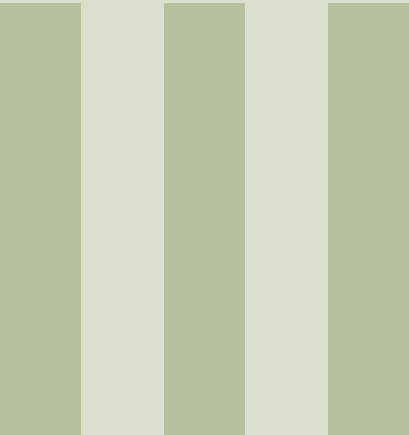
18.3 Principios físicos del funcionamiento

1. La bomba aporta la potencia necesaria para mantener el flujo a través del circuito con sus accesorios.
2. El flujo se dirige a través de uno o varios de los ramales, simultáneamente, manipulando un conjunto de llaves de paso (válvulas de esfera)
3. El flujo, medido como gasto volumétrico, es linealmente proporcional a la caída de presión en un tramo de tubería, en los flujos laminares y a la raíz cuadrada de la caída de presión en los flujos altamente turbulentos.
4. El circuito presenta resistencia al flujo, ocasionada por la fricción en la tubería y sus accesorios. Dicha resistencia se manifiesta como una pérdida de energía mecánica que se conoce como las pérdidas por fricción.
5. El flujo se regula por medio de una válvula de control (válvula de globo), que al ser abierta o cerrada parcialmente, modifica su resistencia al flujo, es decir, hace que el flujo se ajuste a la caída de presión total, que sigue siendo la diferencia desde la presión proporcionada por la bomba a la salida de la misma, hasta la presión atmosférica, en el punto de descarga al tanque de almacenamiento, incluyendo, como elemento regulador, la resistencia variable proporcionada por la válvula de control.
6. Cada accesorio y tramo de tubería tiene una toma de presión aguas arriba y otra, aguas abajo. Operando a régimen estacionario, la caída de presión equivale a las pérdidas de energía por la presencia del accesorio y se correlaciona con el flujo a través del accesorio. Dicha correlación, en términos adimensionales, es función de un coeficiente del accesorio, el cual está relacionado con el coeficiente de rozamiento de una tubería del mismo diámetro nominal que dicho accesorio y también puede expresarse como la longitud de un tramo recto de tubo del mismo diámetro, que tiene la misma caída de presión que el accesorio, con el mismo flujo. Dicha longitud se expresa tomando el diámetro como unidad de medición y se acostumbra llamar longitud equivalente.

18.4 Algunos objetivos de las experiencias

El banco de tuberías se usa para medir la diferencia de presión en dos puntos, situados aguas arriba y aguas abajo de un tramo de tubo, en donde puede estar colocado algún accesorio, de los mencionados en la sección anterior. Simultáneamente se determina el gasto o flujo volumétrico, a partir del intervalo de tiempo que ocupa en fluir, a través del circuito, un volumen dado de agua que debe ser medido. Con estos resultados para cada uno de los tramos de tubería y accesorios podemos:

1. Determinar experimentalmente, para diversos accesorios y tramos de tubo, su relación entre la caída de presión y el flujo volumétrico, usando en el análisis los dos métodos desarrollados en la subsección 9.5.2.



Métodos

19	Aprendizaje significativo	237
19.1	Qué es el aprendizaje significativo	
19.2	Construcción de conocimientos	
19.3	Mapas conceptuales	
19.4	Diagramas de flujo	
20	Modelos y experimentos	245
20.1	Estimados e incertidumbres	
20.2	Propagación de errores	
20.3	Comparación de modelos y experimentos	
21	Elaboración de proyectos experimentales	255
21.1	Proyectos para integrar la teoría y la experiencia	
21.2	Contenido de una propuesta de proyecto	
22	Elaboración de reportes experimentales	263
22.1	Introducción	
22.2	Sobre la forma de elaborar un reporte experimental	
22.3	Contenido de un reporte experimental	

19. Aprendizaje significativo

19.1 Qué es el aprendizaje significativo

Aprender es un modo de interacción del individuo con su entorno. Es estrictamente personal, en el sentido de que nadie lo puede hacer por otro, pero es un proceso social en la construcción de significados y requiere capacitación. Hay una diversidad de aprendizajes, desde un aprender mecánico que implica reaccionar de una manera programada ante un estímulo o repetir una secuencia, hasta un aprender significativo, que genera acciones y respuestas basadas en la comprensión de las observaciones, en el contexto y con el soporte de un marco de significados que va evolucionando en la medida que avanza el proceso de aprendizaje, transformando al aprendiz en una persona con más conocimientos, integrados en una estructura del pensamiento; en una manera de pensar.

La enseñanza tradicional en las universidades ha enfatizado el mostrar, discurrir, demostrar, instruir, como sus medios para la transmisión de los contenidos culturales; estas acciones han guiado la enseñanza de los buenos maestros de todas las épocas y en las diversas culturas, quienes han sabido que la enseñanza tiene que transformar al discípulo; que un buen discípulo, alumno o estudiante, es quien amplía constantemente sus horizontes con respecto al tema tratado, es decir, quien aprende, quien incorpora, quien transforma y se transforma; que esta transformación es el signo de la recepción de los mensajes, es la medida de lo que ha sido transmitido y todavía más, las técnicas culturales en una sociedad abierta implican, como parte de su transmisión, su perfeccionamiento y su cambio dialéctico o paradigmático, que ocurre como consecuencia del aprendizaje significativo. En efecto, los principios teóricos del aprendizaje significativo tienen un carácter dialéctico que puede describirse en tres etapas como:

1. **Tesis:** El conocimiento previo de las ideas socialmente aceptadas revela una estructura de significados que el sujeto es capaz de reconocer en su medio, con el propósito de elaborar aprendizajes interrelacionados con dichos saberes socialmente vigentes, como es el caso de su acercamiento al saber científico.
2. **Antítesis:** En la medida que el nuevo conocimiento es construido significativamente, los conceptos pre-existentes experimentan una diferenciación progresiva.
3. **Síntesis:** En la medida en que los significados de dos o más conceptos aparecen relacionados de una nueva manera significativa, ocurre una reconciliación integradora.

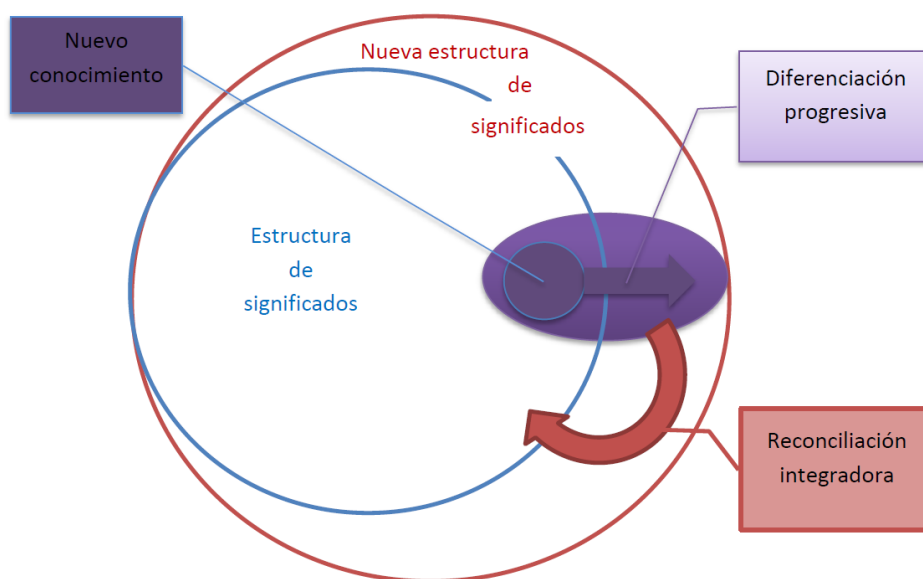


Figura 19.1: Dialéctica del aprendizaje significativo.

Este proceso dialéctico del aprendizaje significativo (ver figura 19.1) permite relacionar los conceptos por diferenciación progresiva y reconciliación integradora, en un lazo con retroalimentación positiva, en el marco de una estructura de significados que se va enriqueciendo, en la medida que dicho proceso de aprendizaje se lleva a cabo.

En contraste con la actitud pretenciosa de algunos seguidores superficiales de nuevas estrategias para la enseñanza, quienes desdeñan la enseñanza tradicional identificándola con los vicios de la mala enseñanza, de aquella enseñanza ineficaz que no logra transmitir, considero que la enseñanza tradicional de los buenos maestros ha sido fincada en elementos efectivos que promueven el aprendizaje, que facilitan la recepción de los mensajes, que elaboran, paso a paso, los signos y los lenguajes en los que se expresan los contenidos que se transmiten, que fortalecen las capacidades para el aprendizaje, aunque no se hayan sistematizado sus procedimientos, que han sido parte del encanto personal de estos buenos maestros.

Un significado reducido de lo que es la enseñanza y el aprendizaje, en contraste, está relacionado con adoptar patrones de comportamiento previstos o respuestas esperadas, a determinados estímulos o reactivos. El aprendizaje se transforma así en su versión disminuida de adiestramiento, como es evidente en la teoría de los reflejos condicionados de Pavlov. Esta versión reducida del aprendizaje, que compartimos con muchos animales, atribuye al comportamiento las características de una reacción o respuesta a los estímulos externos, negando la intervención de la conciencia o de variables internas del aprendiz. La formación del ser humano, su educación, se reduce entonces a la reproducción de los patrones culturales de la sociedad, perdiendo la potencialidad transformadora. Este tipo de aprendizaje-adiestramiento es al que se llega cuando el objetivo del aprendizaje significativo se sustituye, equivocadamente, por la adopción de estrategias que permitan resolver cuestionarios o exámenes de algún tipo estándar.

Por otra parte, la llamada educación por competencias, se enfoca exclusivamente en lo que el educando debe poder hacer como resultado de su aprendizaje, suponiendo que para evaluarlo con precisión es suficiente con establecer reactivos para valorar las metas prácticas que el estudiante es capaz de realizar, sin reparar en que muchas veces es posible inducir las mismas acciones mediante un adiestramiento suficientemente persistente aunque no llegue a incidir en una mayor comprensión e integración, propias del verdadero aprendizaje. Debido a esta ambigüedad, la educación por

competencias puede ser fácilmente usada para dirigir los objetivos de la educación en alguna dirección particular que beneficie a un sector o clase social en detrimento del crecimiento humano del educando, como cuando se le dirige a la capacitación de la fuerza laboral, descuidando las aspiraciones de toda persona a descubrir un universo cada vez más amplio y rico, a desarrollar su imaginación, su creatividad, su sentido artístico, estético, ético y epistémico, entre otros.

19.2 Construcción de conocimientos

Hay una diversidad de corrientes del desarrollo cognoscitivo, que estudian cómo se da el aprendizaje, cuyo resultado es la producción de conocimientos. Una de ellas es el constructivismo social, según el cual la persona que interactúa con su objeto de estudio, construye su conocimiento del mismo. Esto implica la comprensión de las observaciones en sus contextos, con el soporte de un marco de significados que se van profundizando e integrando en una estructura del pensamiento, en la medida que el ejercicio del aprendizaje rinde sus frutos. Esta construcción tiene que ver tanto con las representaciones y la producción de significados que genera la persona como con un marco de significados socialmente establecido, que en el caso del conocimiento científico es el marco teórico de la ciencia. Sin embargo, *“las representaciones de los alumnos están fuertemente influidas por los saberes constituidos transmitidos en la enseñanza y por la institución que se hace cargo de su transmisión.”* (Castorina, 2003, p. 17).

El descubrimiento, la profundización, la distinción y la integración de significados en una estructura de pensamiento, requiere del ejercicio y del cultivo de capacidades para un aprendizaje profundo y transformador. Capacidades que rebasan por mucho la mera memorización y la adquisición de habilidades y destrezas automatizadas. El aprendizaje significativo no concede importancia a la repetición superficial. Su punto de partida es la curiosidad natural que al ser compartida y explorada activamente, se enriquece y genera respuestas que se multiplican y que requieren profundizar las capas de detalle de los significados. Esto lleva naturalmente a que la curiosidad trascienda hacia el plano intelectual, como una etapa necesaria para que no se desperdicie en soluciones superficiales o rígidas, en indiferencia o descuido, o en enquistamiento inútil. **Cuando el aprendizaje es verdadero o significativo enfatiza la apropiación consciente, reflexiva y colaborativa de las experiencias, incorporándolas a nuestra comprensión intelectual y emocional del mundo.** Para lograrlo y disfrutarlo se requiere desarrollar capacidades para un aprendizaje imaginativo en el estudio de las ciencias y de las ingenierías. Una tarea por realizar conjuntamente, maestros y estudiantes, es descubrir cuáles son y cómo podemos desenvolver estas capacidades y aprovecharlas, modificarlas y posiblemente complementarlas, de acuerdo con los procesos de aprendizaje que vamos experimentando.

Como una guía para este descubrimiento tan importante y necesario, nos referimos a continuación a un texto desarrollado por el Lincoln Center Institute¹ (LCI), aunque modificándolo y adaptándolo para que se ajuste a nuestro trabajo y estudios de ingeniería, en vez de referirlo a la educación estética de los artistas, quienes son los destinatarios de las reflexiones del LCI. La siguiente propuesta consiste de las **capacidades para un aprendizaje imaginativo en el estudio de las ciencias y de las ingenierías**:

- **Notación profunda:** Identificar y articular capas de detalle en un trabajo o tema, a través de la interacción continua con él, conforme transcurre el tiempo.
- **Incorporación:** Explorar el trabajo o tema directamente, utilizando los materiales e instrumentos disponibles, involucrándonos tanto intelectual como emocionalmente.
- **Cuestionamiento:** Hacer preguntas que amplíen nuestro propio aprendizaje durante nuestras indagaciones. Preguntarnos ¿qué tal si...?

¹ Aesthetic education, inquiry, and the imagination. 2007. M, Fuchs Holzer, Lincoln Center for the Performing Arts.

- **Hacer conexiones:** Conectar lo que notamos y los patrones que vemos, a los conocimientos y experiencias anteriores, a los conocimientos y experiencias de otros y a los desarrollos presentes en los textos y en los recursos multimedia.
- **Identificar patrones:** Encontrar relaciones entre las capas de detalle que notamos, agruparlas y reconocer patrones.
- **Manifestar empatía:** Respetar la diversidad de perspectivas de los compañeros del grupo, entender emocionalmente e intelectualmente las experiencias de los otros.
- **Crear significados:** Crear nuestras propias interpretaciones, basadas en nuestras capacidades anteriores; verlas a la luz de otros en la comunidad. Hacer una síntesis y expresarla con nuestra propia voz.
- **Entrar en acción:** Actuar sobre la síntesis de lo que hemos aprendido en nuestras indagaciones, por medio de un proyecto específico. Esto incluye proyectos sobre el tema, así como derivaciones tecnológicas, artísticas o de otra índole.
- **Reconocer y valorar los errores:** Equivocarnos es una parte inevitable y un poderoso motor del proceso de aprendizaje, cuando el error conduce al análisis de los elementos que lo producen y probamos alternativas que pueden resultar mejores.
- **Reflexionar y evaluar:** Revisar lo que hemos aprendido, identificarlo y evaluarlo continuamente, identificar y evaluar qué retos permanecen y qué otros aprendizajes necesitan acontecer. Esto ocurre no sólo al final de una experiencia de aprendizaje, sino como parte de lo que transcurre a lo largo de dicha experiencia; tampoco es el final de nuestro aprendizaje sino parte del inicio de aprender algo más.

Hay otras clasificaciones de las habilidades cognitivas, por ejemplo, Monereo (2002) las enumera así:

En base a la revisión de las principales taxonomías existentes dentro del “dominio cognitivo”, pensamos que la mayoría de autores admitirían estos diez grupos de habilidades cognitivas: la observación, la comparación y el análisis, la ordenación, la clasificación, la representación de datos, la retención, la recuperación, la interpretación inductiva y deductiva, la transferencia y la evaluación y autoevaluación. Para cada una de estas habilidades podríamos establecer diferentes subhabilidades y para cada subhabilidad distintos procedimientos asociados.

El desarrollo de estas capacidades brinda las herramientas, que una comunidad o grupo de aprendizaje requiere, para aprender por sí mismo, para profundizar en la construcción de su conocimiento de cualquier tema u objeto de estudio. Sin embargo, *“las prácticas sociales o aún las representaciones sociales que enmarcan al conocimiento no se construyen ‘en la experiencia individual’ sino que son condiciones de la propia experiencia individual de conocimiento”* (Castorina, 2003). A estas condiciones pertenecen los saberes ya instituidos en la cultura, las verdades científicas, los valores artísticos y los principios éticos y estéticos de la sociedad, que subyacen esperando ser aprendidos. *“Es el hecho de remitirse al saber constituido lo que confiere al saber un papel organizador del sujeto conocedor (epistémico y didáctico) en una relación didáctica”* (Lemoyne, 1996).

El cultivo de las habilidades cognitivas para el aprendizaje debería también ser una componente indispensable de los procesos educativos por parte de los profesores, puesto que **nadie da lo que no tiene**. La confluencia de los objetivos particulares de profesores y alumnos en esta dirección, con toda seguridad, nos llevará a desempeños creativos, responsables, solidarios y de calidad creciente en la formación y el ejercicio de nuestras profesiones.

19.3 Mapas conceptuales

Un mapa conceptual (MC) es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones. Los mapas conceptuales proporcionan un resumen esquemático de lo aprendido, ordenado de una manera jerárquica; dan idea

clara de conceptos complejos y facilitan su enseñanza-aprendizaje. La representación más común es mediante grafías, aunque pueden incluir en su diseño imágenes para representar visualmente los conceptos elegidos. Los mapas conceptuales tienen su origen en la década de los sesenta, como estrategia para guiar el aprendizaje. Fueron desarrollados para instrumentalizar la teoría del aprendizaje significativo, en el Departamento de Educación de la Universidad de Cornell, por Novak y sus colaboradores en el marco de un programa denominado aprender a aprender, en el cual, se pretendía liberar el potencial de aprendizaje de los seres humanos, que permanece sin desarrollar, y que muchas prácticas educativas entorpecen en vez de facilitar (González Ornelas, 2001).

Los elementos básicos de un mapa conceptual son:

1. **Los conceptos:** son palabras que se emplean para designar objetos o acontecimientos, cuyas imágenes se producen en la mente del autor del mapa conceptual.
2. **Las palabras de enlace:** son palabras que se usan para establecer relaciones entre los conceptos. Estas palabras no son, ellas mismas, conceptos.
3. **Las proposiciones:** constan de dos o más términos conceptuales unidos por palabras de enlace para formar **unidades semánticas**.

La elaboración de mapas conceptuales apoya el proceso de aprendizaje significativo, pues al representar jerárquicamente los conceptos, yendo de lo general a lo específico, con los conceptos o ideas más inclusivas o generales situadas en la cúspide (o en el centro) y las más específicas o particulares en la parte inferior (o en la periferia), da lugar a visualizar las nuevas relaciones entre los conceptos críticos, manteniendo su contexto como parte de la estructura de significados más generales, lo cual facilita, aún visualmente, la dinámica del proceso dialéctico de aprendizaje. Los mapas conceptuales son un lenguaje que puede ser usado para varios propósitos, entre los que nos interesa señalar los siguientes:

- Las ideas personales con relación a la realización de un conjunto de experiencias.
- Las ideas preliminares con relación a la conexión entre los significados teóricos y las determinaciones experimentales.
- La construcción de conocimientos a partir de materiales impresos y experiencias realizadas.
- En el trabajo colaborativo para la construcción del conocimiento en equipos.
- La evaluación de la integración de conocimientos.

Operativamente, la elaboración de mapas conceptuales sigue ciertos pasos, de acuerdo a los propósitos específicos. En la página <http://aprende.cmappers.net/> hay información muy útil para aprender a elaborarlos. También los siguientes consejos pueden ayudar a los aprendices, quienes terminarán acuñando sus estilos personales de acuerdo a sus propósitos. Antes de elaborar el mapa conceptual:

1. **Hacer una lista de los conceptos más significativos del tema.** Si se trata de hacer un mapa de sus propias ideas preliminares o personales, los conceptos pueden extraerse de una serie de frases que el aprendiz elabore anteriormente sobre los aspectos más importantes del tema en cuestión.
2. **Ordenar los conceptos por su importancia para el tema.** El concepto más importante está en el tema a tratar; los demás conceptos se ordenan con respecto a éste, considerado como el más general de aquellos que corresponden al tratamiento del tema y como el más específico de aquellos que corresponden a su contexto. Así por ejemplo, el concepto colores incluye entre otros rojo, azul y amarillo, que son conceptos más específicos en un tema sobre los colores. Sin embargo, si el tema es el rojo, el concepto colores, es parte del contexto y tendría una jerarquía menor en el MC.

Al elaborar mapas conceptuales, los conceptos, ordenados jerárquicamente, se relacionan por medio de líneas en las que se especifican las palabras de enlace que los relacionan, generando frases o proposiciones que tienen, cada una, un significado especial. Estas proposiciones deben corresponder visualmente a zonas o regiones del mapa que deberían quedar fácilmente identificables,

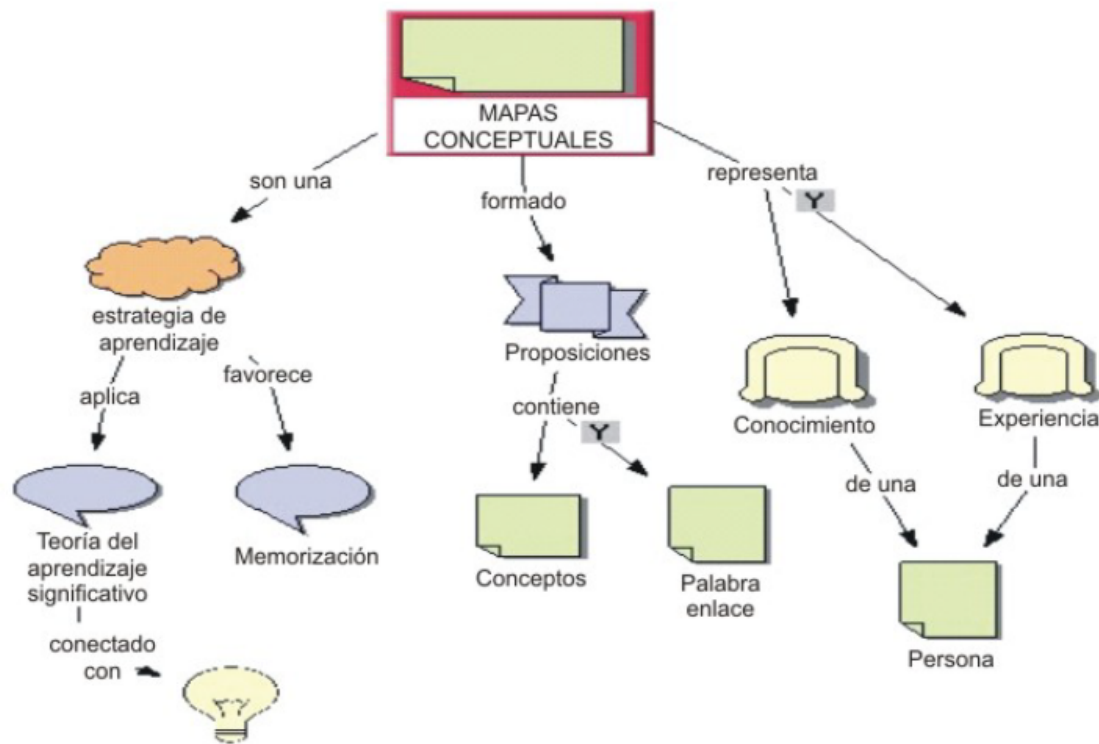


Figura 19.2: Mapa conceptual de los mapas conceptuales, primera versión, en MACOSOFT.

para lo cual puede ser necesario rehacer el mapa reordenando los conceptos de maneras apropiadas a este propósito de visualización que facilita la memorización y la síntesis.

Un buen ejemplo de mapa conceptual es el que explica qué son los mapas conceptuales. Las figuras 19.2 y 19.3 ilustran lo anterior; el primero fue hecho empleando la herramienta MACOSOFT (software cubano para la elaboración de mapas conceptuales), como parte de un proyecto de investigación acerca de la gestión del conocimiento en la universidad. El concepto principal: **mapas conceptuales**, se relaciona con tres conceptos de la siguiente jerarquía: (1) Con **Estrategia de aprendizaje**, a través del enlace **son una**, desarrolla una región relacionada con la *definición* y el *contexto* de los MC. (2) Con el concepto **Proposiciones**, a través del enlace **formado**, da origen a una región relacionada con la *estructura* de los MC. (3) Con los conceptos **Conocimiento** y **Experiencia**, a través del enlace **representa**, genera una zona relacionada con los *significados* de los MC para el aprendiz. En el tercer nivel de jerarquía están los conceptos: **Teoría del aprendizaje significativo**, **Memorización**, **Conceptos**, **Palabra enlace** y **Persona**, así como, en un cuarto nivel, el concepto **Ideas**. Los dos primeros y el último del tercer nivel, forman parte del contexto, en tanto que **Conceptos** y **Palabra enlace** son conceptos más específicos del tema. Entonces, en este tercer nivel encontramos tanto los conceptos más amplios, que abren el tema hacia el contexto, como los más específicos, que se refieren a particularidades del tema.

El segundo ejemplo de un mapa conceptual que explica lo que son los mapas conceptuales, figura 19.3, está hecho usando el software CmapTools, elaborado por el Institute for Human and Machine Cognition, que es un instituto de investigación afiliado al Sistema de Universidades de Florida. Es interesante notar cómo se distingue una región de la definición y el contexto, en el lado derecho superior de la figura 19.3, la cual se identifica por los enlaces **es**, **necesario para**, **necesario para responder** y **ayudan a responder**. Los conceptos de menor jerarquía en el tratamiento del

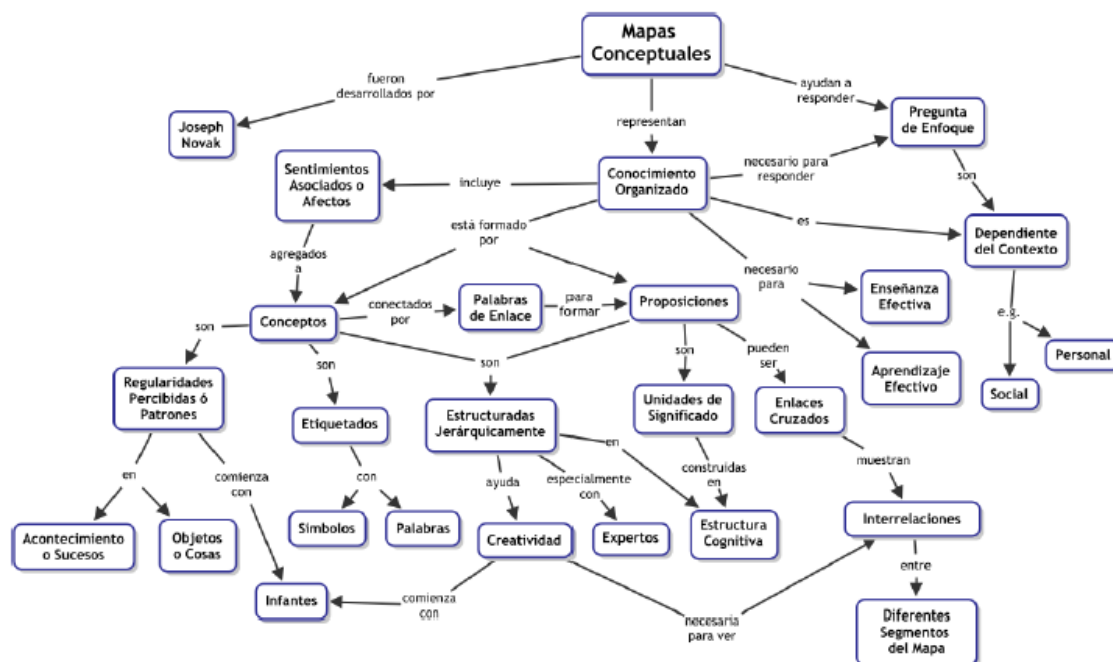


Figura 19.3: Mapa conceptual de los mapas conceptuales, segunda versión, en CmapTools.

tema, a los que se aplican estas palabras enlace, son más amplios que el tema mismo: **Aprendizaje efectivo, Enseñanza efectiva y Dependiente del contexto personal y social**. En esta figura también hay una región relacionada con la estructura de los MC y también, a semejanza del primer mapa, está conectada por medio del enlace *está formado por* a los conceptos: **Conceptos, Palabras de enlace y Proposiciones**. Sin embargo, a diferencia del primer ejemplo, no existe una única zona relacionada con los significados, sino que los conceptos relacionados se encuentran intercalados con los de la estructura y podemos reconocerlos, ya sea por el concepto o por el enlace. Así, en la más alta jerarquía después del concepto principal, encontramos el enlace *representan* aplicado al concepto **Conocimiento organizado**, que forman una proposición relacionada con la significación de los MC, que podemos leer como la unidad de significado: *Los mapas conceptuales representan conocimiento organizado*.

Así mismo, podemos reconocer relaciones del carácter que hemos llamado de los significados en los conceptos **Unidades de significado e Interrelaciones**, que se encuentran alternados con conceptos de carácter estructural, como son los conceptos **Enlaces cruzados y Diferentes segmentos del mapa**, que podemos asociar a la estructura de los MC. Estos se encuentran conectados con el concepto **Interrelaciones**, como puede apreciarse en la figura 19.3, así como dos clases distintas de conceptos: los **Objetos** y los **Acontecimientos o sucesos**, que se identifican de acuerdo con las **regularidades o patrones** encontrados. Cuando los conceptos son acontecimientos, el MC lleva un hilo histórico que puede entrecruzarse con sucesos simultáneos y en cascada.

Otras herramientas para elaborar mapas conceptuales son:

Visual Understanding Environment: <http://vue.tufts.edu/>

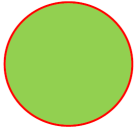
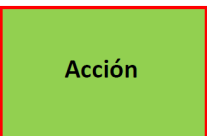
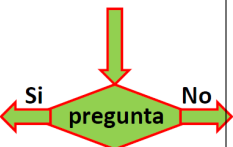
Smart Idea: <http://www.smarttech.com/smartideas> e

Inspiration: <http://www.download366.info/Inspiration>

19.4 Diagramas de flujo

Un proceso es una secuencia ordenada de acciones que se realizan en un conjunto de objetos, para transformarlos hasta convertirlos en los productos, resultados o consecuencias deseadas.

En la ingeniería, los diagramas de flujo son representaciones gráficas de los procesos. En ellos se realiza una diversidad de acciones; cada una de las cuales tiene su representación gráfica correspondiente. Algunas de las representaciones más generales y frecuentes aparecen en la tabla 19.1.

Tabla 19.1. Simbología básica de los diagramas de flujo			
Significado	Símbolo	Significado	Símbolo
Terminal: indica el inicio y el final del proceso.		Línea de flujo: indica el sentido del flujo.	
Acción: representa una actividad, cuyo nombre se escribe en el cuadro.		Conector: un punto en una parte del diagrama se identifica con otro en otra parte del mismo, en ambos se escribe el mismo número.	 = 
Decisión o alternativa: punto en el que la respuesta a una pregunta indica el camino a seguir.		Datos: indica un punto de entrada de información.	

Hay diagramas de flujo de procesos químicos o de otra índole, donde se utilizan símbolos específicos para identificar ciertos equipos usuales en la industria, como diversos tipos de intercambiadores de calor, torres de destilación o de extracción, reactores químicos, compresores y bombas centrífugas, válvulas de paso, reguladoras, de control o de no-retorno, etc. Muchos de estos símbolos se pueden encontrar en la literatura del tema, por ejemplo en².

²<http://biblio3.url.edu.gt/Publi/Libros/2013/INGPlantas/06.pdf>

20. Modelos y experimentos

... no debemos pensar que el experimento nos da un resultado “correcto” o “incorrecto”. Simplemente llevamos a cabo nuestro proceso experimental con tanto cuidado como sea posible, y presentamos luego los resultados en la forma más honrada y objetiva que podamos. No está mal recordar que de vez en cuando los modelos sólo pueden proporcionar una representación parcialmente satisfactoria del comportamiento de los sistemas. Lo más importante es que conozcamos los límites de validez de los modelos, y la forma en que éstos fallan puede proporcionar valiosas evidencias a quienes buscan mejorarlos.

David C. Baird, 1991.

20.1 Estimados e incertidumbres

20.1.1 Magnitud y cantidad

Reconocemos los cuerpos por su presencia ante nuestros sentidos. Nuestra percepción de algún cuerpo se hace posible al apreciar algunos de sus atributos. Entre estos atributos, algunos podemos medir, como su longitud, su masa y su temperatura. Estos atributos que se pueden medir, de acuerdo con su naturaleza, requieren elegir una unidad de medida con la cual se va a comparar la extensión o el tamaño de cada uno de los atributos que deseamos cuantificar. Así, el color de una flor es uno de sus atributos y así, distinguimos una flor roja de una flor azul, o de otra roja; pero si queremos comparar el color de una flor con el color de otra, necesitamos una medida de su color, es decir, una unidad de medición del color, del rojo, por ejemplo. Se nos puede ocurrir hacer un catálogo con distintos tonos de rojo, como aquellos que elaboran los fabricantes de pinturas y así tenemos un patrón de medida para asociar el tono de la flor en la escala de tonos rojos de este catálogo, pero todavía no hay una unidad de medida. Si asociamos a cada tono del catálogo un número relacionando, por ejemplo, las proporciones del pigmento puro y un diluyente que modifica su tonalidad tendremos, finalmente, una magnitud del color. Posiblemente dicho catálogo de tonos, medidos por las mezclas de dos componentes, no será la mejor manera de medir la magnitud del

color rojo. Una mejor manera se podrá encontrar al compararlo con la longitud de onda de una franja del arco iris, en sustitución del catálogo de colores.

Definición 20.1.1 — magnitud física. La magnitud física es un atributo de los cuerpos, que se determina efectuando una medición.

Definición 20.1.2 — cantidad. Una cantidad es el número, o el arreglo de números, que permite comparar una magnitud, o un conjunto de magnitudes, con la unidades elegidas para medirlas.

Definición 20.1.3 — cantidad escalar. Una cantidad escalar se determina completamente con un solo número.

Definición 20.1.4 — cantidad vectorial. Una cantidad vectorial requiere tres números o componentes,

y, en general,

Definición 20.1.5 — cantidad tensorial de orden n . Una cantidad tensorial de orden n tiene 3^n componentes y su determinación requiere de 3^n números.

Entonces, un escalar es un tensor de orden cero y un vector es un tensor de orden uno. También hay tensores de orden dos y de órdenes mayores.

20.1.2 Apreciación, estimación y valor verdadero

Definición 20.1.6 — apreciación o sensibilidad. La apreciación o sensibilidad de un instrumento de medición es la menor división de la escala de dicho instrumento.

Definición 20.1.7 — estimación. La estimación es el menor intervalo que un indagador puede distinguir, al hacer una medición con determinado instrumento.

Así,

la apreciación está determinada por el instrumento de medición, mientras que **la estimación** está determinada por un conjunto de mediciones que hace el indagador,

donde

Definición 20.1.8 — estimado. cada una de las mediciones es llamada un estimado,

y de la comparación de todos los estimados de la misma cantidad, se determina la **estimación**.

Todo lo que podemos conocer de una cantidad, utilizando un solo instrumento y procedimiento para determinar sus atributos, son nuestros estimados, pero suponemos que

la cantidad tiene un **valor verdadero**, del cual los estimados son aproximaciones.

Definición 20.1.9 — mejor aproximación. El promedio de todos los estimados es la mejor aproximación al valor verdadero de la cantidad evaluada, del cuerpo u objeto.

20.1.3 Exactitud, precisión y error

La **exactitud** es una característica del instrumento. Consiste en el grado de aproximación de la medición al valor verdadero.

Definición 20.1.10 — exactitud. La exactitud es la capacidad del instrumento, de medir un valor cercano al valor verdadero.

En consecuencia, la exactitud mejora con la calibración del instrumento.

Definición 20.1.11 — precisión. La precisión es la repetibilidad de los estimados, esto es, que varios estimados tengan valores cercanos entre sí.

Entonces, la precisión es la capacidad del indagador de determinar el mismo valor, o valores cercanos, de un conjunto de estimados de la misma cantidad.

Definición 20.1.12 — error o incertidumbre. El error o incertidumbre de una medición es la diferencia entre el valor verdadero y los estimados de la medición.

Esta diferencia tiene dos posibles causas; la falta de exactitud del instrumento y la falta de precisión de los estimados.

20.1.4 Error sistemático y error estocástico

Definición 20.1.13 — error sistemático. El error sistemático de una medición es la diferencia entre el valor verdadero y los estimados, debido a la persistente falta de exactitud o de precisión de los estimados.

El error sistemático es debido a la falta de exactitud del instrumento, o debido a la falta de precisión, por alguna deficiencia física o fisiológica del experimentador, o por alguna insuficiencia del método experimental seguido. Las causas pueden ser, por ejemplo, la falta de calibración, una manufactura inapropiada, por ejemplo el corrimiento inadvertido de la escala de medición o la imposibilidad de distinguir las diferencias en la escala. El error sistemático afecta las mediciones siempre en la misma proporción y

puede corregirse mediante una nueva calibración, que incorpore un procedimiento estandarizado para poder descartar algunas deficiencias del operador y del método de medición.

Definición 20.1.14 — error estocástico. El error estocástico tiene su origen en la operación del instrumento, desde diversas fuentes que lo generan en mediciones sucesivas realizadas por el mismo experimentador.

Las variaciones no son reproducibles y las causas son incontrolables pero, para tratarlo

es posible utilizar métodos estadísticos para encontrar el valor más probable e intervalos de valores que incluyan el valor verdadero, con una determinada probabilidad.

20.2 Propagación de errores

20.2.1 Incertidumbre menor que la apreciación

Cuando los estimados de una cantidad tienen el mismo valor, su incertidumbre es menor o igual a la apreciación del instrumento.

20.2.2 Incertidumbre mayor que la apreciación

Cuando las diferencias de los estimados de una cantidad superan la apreciación del instrumento existe una incertidumbre mayor que la apreciación. Entonces,

el valor medido de la cantidad se expresará como el valor promedio de los estimados y el error como la desviación media de los estimados.

Así, por ejemplo, un grupo de siete indagadoras reporta sus estimados individuales del intervalo de tiempo que ha transcurrido cuando el sol aparece en el horizonte, desde el primer destello de su corona hasta que el disco solar se desprende del horizonte. Sus estimados, leídos en cronómetros cuya apreciación es de una centésima de segundo (0.01 [s]), son:

Tabla 20.1. Tiempo del amanecer		
Estimados: δt_k [min: seg]	Diferencia: $\bar{\delta t} - \delta t_k$	Desviación: $ \bar{\delta t} - \delta t_k $
2:31.79	-1.60	1.60
2:28.48	1.71	1.71
2:30.04	0.15	0.15
2:29.95	0.24	0.24
2:32.07	-1.88	1.88
2:30.38	-0.19	0.19
2:28.62	1.57	1.57
Suma = 14:211.33		Suma = 7.34
$\bar{\delta t} = \frac{14:211.33}{7} = 2:30.19$		Desviación media: $\frac{7.34}{7} = 1.05$

El valor experimental representativo de la medición realizada por las siete indagadoras es, por lo tanto, de $2 \text{ minutos y } 30 \pm 1 \text{ segundos}$, es decir, *dos minutos y treinta segundos, con incertidumbre de un segundo*. El error se redondea a una cifra, que es su única cifra significativa, puesto que en esa cifra se tiene ya la incertidumbre y las siguientes cifras son aleatorias. En el experimento propuesto, esto ocurre porque las indagadoras pueden responder a sus observaciones visuales en el orden de un segundo, al disparar y detener sus cronómetros. Por ello, las cifras que corresponden a las décimas y centésimas de segundo son completamente aleatorias y sólo tienen significado los eventos generados en el orden de un segundo.

Para elevar la precisión del experimento, sería necesario mejorar la calidad de la medición, posiblemente sustituyendo la vista y la acción manual con una celda fotoeléctrica colocada en un telescopio, para disparar y parar el cronómetro mediante una señal eléctrica acoplada con la celda.

Ejercicios

20.2-1. Prescindir de las cifras aleatorias.

(i). Repetir el ejercicio de la tabla 20.1, suponiendo que el cronómetro solamente mide los segundos, sin cifras decimales. Entonces principiamos por eliminar las dos decimales de los segundos en las lecturas, redondeando los valores al valor entero más cercano. Al final, comparamos el resultado con el del ejemplo y concluimos sobre las características de la apreciación y de la incertidumbre.

(ii). Repetir y comparar el ejercicio con el de la tabla 20.1, si el instrumento de medición indica solamente hasta las décimas de segundo de los estimados.

20.2.3 Cifras significativas

Otro resultado surge al responder ¿con cuántas cifras reporto mi resultado? Por ejemplo, en el ejercicio anterior, la desviación media resulta de 1.05 segundos, el valor promedio es de 2 minutos, 30.19 segundos. Entonces el tiempo podría ser desde $2:30.19 - 1.05 \text{ s}$ hasta $2:30.19 + 1.05 \text{ s}$, es decir que, el valor verdadero debe estar entre $2:29.14 \text{ s}$ y $2:31.24 \text{ s}$. Por lo tanto, el primer dígito incierto está en las unidades y su amplitud es ligeramente superior a la unidad. Por eso, las cifras significativas son $2:30$ y el siguiente dígito, el de las unidades, es donde se dan las desviaciones de alrededor de la unidad en este caso, es decir, el valor a reportar es de $2:30 \pm 1$, en minutos y segundos. En conclusión, las cifras significativas son las posiciones de dígitos conocidos con

certeza, más el primer dígito dudoso, que es el que corresponde a la posición de la incertidumbre, y el único dígito dudoso que se debe reportar.

20.2.4 Incertidumbres de cantidades calculadas

Al emplear las mediciones en las ecuaciones de los modelos, se efectúan operaciones con cantidades que tienen sus correspondientes incertidumbres. Los resultados de estas operaciones tienen también incertidumbres, que se propagan desde las variables que les han dado origen. Aquí proponemos la manera de calcular las incertidumbres de diversas operaciones algebraicas, para dos cantidades, a y b , determinadas experimentalmente, con sus incertidumbres, como:

$$a \pm \delta a \text{ y } b \pm \delta b. \quad (20.2.1)$$

Vamos a calcular los resultados de algunas operaciones algebraicas de a y b .

Incetidumbres de sumas y restas

$$(a \pm \delta a) + (b \pm \delta b) = a + b \pm (\delta a + \delta b), \quad (20.2.2)$$

$$(a \pm \delta a) - (b \pm \delta b) = a - b \pm (\delta a + \delta b), \quad (20.2.3)$$

por ejemplo:

$$(9.25 \pm 0.03) + (120.75 \pm 0.05) = (9.25 + 120.75) \pm (0.03 + 0.05) = \mathbf{130.00 \pm 0.08}$$

$$(120.75 \pm 0.05) - (9.56 \pm 0.05) = (120.75 - 9.56) \pm (0.05 + 0.05) = 111.19 \pm 0.1 = \mathbf{111.2 \pm 0.1}$$

En el segundo ejemplo se muestra cómo, al sumarse los errores y alcanzar un dígito más, reducen el resultado en una cifra significativa. Por ello es necesario reportar el resultado redondeando en las décimas, como se expresa en el último término, que es como se reportaría.

Incetidumbres de multiplicaciones y divisiones

$$(a \pm \delta a)(b \pm \delta b) = ab \pm ab \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \right), \quad (20.2.4)$$

$$\frac{a \pm \delta a}{b \pm \delta b} = \frac{a}{b} \pm \frac{a}{b} \left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} \right), \quad (20.2.5)$$

por ejemplo:

$$\begin{aligned} (9.25 \pm 0.03)(120.75 \pm 0.05) &= (9.25 \times 120.75) \pm (9.25 \times 120.75) \left(\frac{0.03}{9.25} + \frac{0.05}{120.75} \right) \\ &= 1116.94 \pm (3.62 + 0.46) = \mathbf{1117 \pm 4} \end{aligned} \quad (20.2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{120.75 \pm 0.05}{9.56 \pm 0.05} &= \frac{120.75}{9.56} \pm \frac{120.75}{9.56} \left(\frac{0.05}{120.75} + \frac{0.05}{9.56} \right) \\ &= 12.63 \pm (0.005 + 0.066) = \mathbf{12.63 \pm 0.07}. \end{aligned} \quad (20.2.7)$$

En la ecuación (20.2.7) notamos que se ha incorporado una cifra más en los sumandos de los errores. **Es una práctica usual hacer los cálculos con una cifra adicional**, para tener seguridad de estar evaluando correctamente el error, sobre todo cuando el valor está cercano a la mitad de la incertidumbre, como aquí el valor de 0.005, ya que si el otro sumando fuera, por ejemplo 0.011 (en vez de 0.066, en este caso), tomar sólo dos cifras daría $0.00 + 0.01 = 0.01$, o bien $0.01 + 0.01 = 0.02$. Esta ambigüedad se resuelve incorporando una cifra adicional en los cálculos de cada una de las cantidades, para eliminarla en el resultado a ser reportado finalmente.

Ejercicios

20.2-2. Cálculo de errores de operaciones numéricas Encontrar el error de las operaciones:

$$(a) : (123.5 \pm 0.5) - (87.32 \pm 0.05); \quad (b) : (5.0 \pm 0.1)(200.00 \pm 0.08)$$

$$(c) : \frac{123.45 \pm 0.02}{(7.30 \pm 0.09)}; \quad (d) : (10.014 \pm 0.006)^2$$

$$(e) : \sqrt{25.03 \pm 0.03}(5.1 \pm 0.1)^2; \quad (f) : \frac{\sqrt[3]{125.0 \pm 0.5}}{10.25 \pm 0.02}$$

Incertidumbres de potencias y raíces

Se pueden considerar como extensiones de los productos:

$$(a \pm \delta a)^p = a^p \pm a^p \left(p \frac{\delta a}{a} \right), \quad (20.2.8)$$

y en general:

$$\frac{(a \pm \delta a)^p (c \pm \delta c)^q}{(b \pm \delta b)^r} = \frac{a^p c^q}{b^r} \pm \frac{a^p c^q}{b^r} \left(p \frac{\delta a}{a} + q \frac{\delta c}{c} + r \frac{\delta b}{b} \right), \quad (20.2.9)$$

Otra forma de encontrar las funciones que estiman las incertidumbres se puede encontrar observando que la expresión (20.2.8) equivale a una expansión de Taylor de la función a^p , cortada al primer término:

$$(a \pm \delta a)^p = a^p \pm \delta a \frac{d}{da} (a^p) = a^p \pm \delta a (p a^{p-1}), \quad (20.2.10)$$

Si aplicamos esta manera de calcular errores a otras funciones, podemos encontrar que:

$$\ln(a \pm \delta a) = \ln a \pm \delta a \frac{d}{da} \ln a = \ln a \pm \frac{\delta a}{a} \quad (20.2.11)$$

Ejercicios

20.2-3. Cálculo de incertidumbres de funciones

Encontrar la incertidumbre de las siguientes funciones, dada la incertidumbre de las cantidades que intervienen, como se indica:

$$(a) : \ln \frac{(H \pm \delta H) + (L \pm \delta L)}{(L \pm \delta L)}; \quad (b) : \frac{32(\mu \pm \delta \mu)(L \pm \delta L)}{g(\rho \pm \delta \rho)(d_t \pm \delta d_t)^2}$$

$$(c) : \left(\frac{D_t \pm \delta D_t}{d_t \pm \delta d_t} \right)^2; \quad (d) : (t_D \pm \delta t_D) - (t \pm \delta t)$$

20.3 Comparación de modelos y experimentos**20.3.1 Variables y parámetros del modelo**

Las cuatro expresiones del ejercicio 20.2-3 corresponden a factores de la ecuación (4.2.19), la cual es una solución para el tiempo de descarga de un tanque, que se vacía por un tubo situado en el fondo del tanque. Ver aspectos teóricos en el capítulo 4 y experimentales en el capítulo 12.

En el capítulo 4 desarrollamos cuatro modelos, dos son transitorios, el propuesto en la ecuación (4.2.10), para tubos de salida de longitud pequeña ($L \leq H_0$) y el representado por la ecuación (4.2.14), para el caso opuesto ($L \gg D$). El modelo de la ecuación (4.2.19) es cuasiestacionario y

finalmente, el representado por la ecuación (4.2.24) considera despreciable la presencia del tubo, haciendo equivalente el sistema físico a uno donde la salida del líquido se produce en un orificio al fondo del tanque. Esta es la solución de Torricelli.

En cualquiera de los modelos, hay que distinguir los parámetros de las variables del proceso. la variable independiente es el tiempo t y la dependiente es la altura del nivel de líquido, desde el fondo del tanque, $H(t)$. De los modelos, dos son relaciones cuadráticas del tipo

$$H = C_k(t_D - t)^2; \quad \text{para los modelos } k = 1, 2, \quad (20.3.1)$$

otra es una relación, también cuadrática pero más elaborada, ver adelante la ecuación (20.3.5). La cuarta relación es logarítmica, la ecuación (4.2.19):

$$\ln\left(\frac{H+L}{L}\right) = B(t_D - t). \quad (20.3.2)$$

En la ecuación (20.3.1), C_k se refiere al conjunto de parámetros de cada uno de los modelos. Así, hacemos $k = 1$ para el modelo dado por la ecuación (4.2.24), entonces

$$C_1 = \frac{g}{2} \left(\frac{d_t}{D_t}\right)^4. \quad (20.3.3)$$

Ahora definimos $k = 2$ para el modelo dado por la ecuación (4.2.10), entonces

$$C_2 = \frac{g}{2} \left(\frac{d_t}{D_t}\right)^4 \frac{d_t}{d_t + 4f_D L} = C_1 \frac{d_t}{d_t + 4f_D L}. \quad (20.3.4)$$

Sin embargo, para el modelo dado por la ecuación (4.2.14), tenemos la solución explícita para $H(t)$:

$$H = C_2 [(t_D - t) + \tau_0]^2 - L, \quad (20.3.5)$$

donde

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{L}{C_2}}. \quad (20.3.6)$$

Finalmente, el modelo cuasiestacionario, representado en la ecuación (20.3.2), agrupa en la constante B , los parámetros que dan

$$B = \left(\frac{d_t}{D_t}\right)^2 \frac{\rho g d_t^2}{32\mu L} = C_1 \frac{\rho D_t^2}{16\mu L}. \quad (20.3.7)$$

En conclusión, **hay dos tipos de parámetros, los parámetros físicos y geométricos de los modelos y los parámetros del modelo**, que engloban los efectos representados en el modelo por cada uno de sus términos o funciones.

20.3.2 Incertidumbres experimentales y parámetros ajustados

El tiempo t es la variable independiente y la altura en el tanque $H(t)$ es la variable dependiente. El tiempo se mide con un cronómetro, **con apreciación de centésimas de segundo**, y la altura con un flexómetro **con apreciación de un milímetro**.

Sin embargo, la precisión será mucho menor que los órdenes de la apreciación. Considerando la semejanza de este caso con el estudiado en la tabla 20.1, podemos ver la conveniencia de nombrar varias indagadoras que tomen, cada una, sus propios datos (H, t) , para generar una estadística con

los datos de todas ellas, de la misma manera que se hizo en la tabla mencionada, al estimar la salida del sol. Así, obtenemos los valores medidos con sus incertidumbres experimentales, en cada punto.

Deseamos ahora confrontar los resultados experimentales con los diversos modelos teóricos, lo cual tiene dos aspectos, por una parte, es posible **encontrar los valores de los parámetros** de cada modelo por mínimos cuadrados, **ajustando los datos experimentales** a cada uno de ellos. Así obtenemos el conjunto de parámetros experimentales:

$$\{C_{exp}, \tau_{0,exp}, B_{exp}\}, \quad (20.3.8)$$

20.3.3 Incertidumbres teóricas y parámetros estimados

Por otra parte, podemos **estimar los valores de los parámetros de los modelos y sus incertidumbres**, de acuerdo a los métodos de propagación de los errores, aplicados a las ecuaciones (20.3.3), (20.3.4), (20.3.6) y (20.3.7), de donde tenemos el conjunto de parámetros:

$$\{C_{1,teo}, C_{2,teo}, \tau_{0,teo}, B_{teo}\}, \quad (20.3.9)$$

donde cada parámetro consiste de su valor calculado $\pm$ su incertidumbre, $C_{teo} = C \pm \delta C$. Ahora es posible encontrar valores de $\{H_{j,teor}(t), t\}$, utilizando estos parámetros teóricos, para decidir cuál de los modelos aproxima mejor los datos experimentales. Aquí, j indica el modelo usado para el cálculo de H .

Por otra parte, podemos comparar los parámetros teóricos con los experimentales, para ver si los parámetros experimentales caen dentro del intervalo de incertidumbre de los parámetros teóricos. cuando esto ocurre, el modelo teórico corresponde a una explicación teórica del fenómeno. Cuando el valor experimental cae fuera del intervalo de incertidumbre teórico, la explicación teórica que corresponde al modelo no explica los resultados experimentales.

20.3.4 Determinación de parámetros y constantes

Un último aspecto a considerar en las comparaciones es la posibilidad de mejorar los valores de los parámetros físicos usados para calcular los parámetros teóricos de los modelos. Para ello habría que preguntarnos ¿Cuál es el parámetro físico de más dudoso valor estimado, que al ser modificado por un valor potencialmente mejor, podría dar un parámetro teórico más cercano al parámetro experimental correspondiente?

La pregunta anterior corresponde a un problema de minimización de errores, que podría abordarse sistemáticamente, como un problema de optimización, pero que aquí consideramos abierto y recomendamos solamente un elemental método de tanteos inteligentes, proponiendo valores razonables distintos a los parámetros físicos, para observar su influencia sobre la dinámica del sistema.

Ejercicios

20.3-1. Parámetros físicos y parámetros del modelo.

- (i) Elabora una lista de parámetros físicos, correspondientes al proceso de vaciado de un tanque, representando cada uno de ellos con su incertidumbre, en la forma $p \pm \delta p$. Recuerda que las constantes físicas y otras matemáticas, no tienen incertidumbres, por ejemplo la constante gravitacional o el número π .
- (ii) Encuentra las incertidumbres de los parámetros del modelo, dados en (20.3.9), a partir de las incertidumbres de sus parámetros físicos.

20.3-2. Incertidumbres experimentales del tiempo de vaciado.

A partir de conjuntos de datos $\{t_{exp}, H_{exp}\}$, tomados simultáneamente por varias personas (entre tres y cinco indagadoras), encontrar los puntos experimentales correspondientes, entendidos como el promedio y su incertidumbre, como se hizo en la tabla 20.1, es decir,

obtener pares de valores $\{t, H \pm \delta H\}$ o $\{t \pm \delta t, H\}$, de acuerdo a los intervalos elegidos constantes, ya sea en el tiempo o en la altura del nivel en el tanque.

20.3-3. Ajustes de parámetros del modelo.

Aplica un ajuste de mínimos cuadrados para encontrar valores experimentales de los parámetros del modelo, dados por el conjunto (20.3.8), para los modelos dados por las ecuaciones (20.3.1), (20.3.5) y (20.3.2). Nota que al tratarse de ajustes de datos experimentales, los modelos dados por las ecuaciones (4.2.24) y (4.2.10) son equivalentes y quedan representados por el mismo ajuste a la función cuadrática (20.3.1).

20.3-4. Ajustes de parámetros del modelo.

- (i) Compara los parámetros teóricos de los cuatro modelos con los tres parámetros experimentales correspondientes, determinando si los parámetros experimentales quedan comprendidos dentro de los límites de incertidumbre de los parámetros teóricos.
- (ii) Si los parámetros experimentales del modelo quedan dentro del intervalo de incertidumbre de los parámetros teóricos, determina cuál o cuáles son los parámetros físicos más inciertos, es decir, que tienen las mayores incertidumbres o que podrían tener valores muy distintos a los que se les ha asignado.
- (iii) Modifica los valores de los parámetros físicos más inciertos, para que los parámetros de cada uno de los modelos, por separado, tengan los valores más cercanos a los valores de los parámetros experimentales del modelo. El objetivo es mejorar el ajuste del modelo teórico correspondiente, a los datos experimentales.
- (iv) Si tu ajuste $H(t)$ se ve como una línea recta, pregunta si habrá una región no detectada, al inicio o al final del experimento, que sea no-lineal, pero que no es posible detectarla debido a que el intervalo de muestreo es demasiado grande y esto no permite observar el intervalo no lineal.
- (v) Si se invierte la toma de datos de modo que los intervalos constantes sean las alturas del nivel en vez de los intervalos de tiempo, o viceversa, ¿será posible observar el comportamiento no-lineal al inicio del experimento?

20.3-5. Parámetros reológicos de pastas de harina de maíz.

Diseña un procedimiento para evaluar las incertidumbres de los parámetros reológicos de pastas de harinas de maíz, con concentraciones del 48 % al 52 % en masa, considerando la relación de comportamiento del fluido newtoniano generalizado, ver capítulo 5, y trabajando experimentalmente con el viscosímetro de Brookfield, ver capítulo 15.

Sugerencia: sigue de cerca los desarrollos de los ejercicios 20.3-1 a 20.3-4 y toma en cuenta una diferencia importante: no se pueden tomar varias lecturas del mismo momento, pero se pueden realizar lecturas consecutivas de la misma condición de flujo, el cual debe quedar totalmente restablecido (flujo estacionario) antes de tomar una nueva lectura.

21. Elaboración de proyectos experimentales

Nunca es posible introducir solamente cantidades observables en una teoría.

Es la teoría quien decide qué se debe observar.

Albert Einstein, 1926.

21.1 Proyectos para integrar la teoría y la experiencia

21.1.1 Repetibilidad

En nuestro estudio de la mecánica de fluidos, los proyectos experimentales se proponen para indagar relaciones entre las cantidades que pueden ser medidas o estimadas en la realización de las experiencias con los fluidos, y las posibles causas de estas relaciones, de acuerdo con el conocimiento de algunos aspectos teóricos que podrían explicar los patrones de comportamiento observados. Algunas explicaciones teóricas pueden coincidir, aproximadamente, con los patrones observados; esto ocurre cuando **las diferencias de los valores medidos y los que predice una determinada teoría**, tomadas con ciertos criterios, **permanecen pequeñas en un intervalo de valores**. Los criterios a considerar para determinar si las diferencias son o no pequeñas, deben tomar en cuenta tanto la calidad de los **instrumentos de medición** como la capacidad de los experimentadores para **repetir las mediciones** de los valores observados, al momento de hacer las mediciones; esto aplica, necesariamente, a las **etapas estacionarias** de los procesos, cuando el tiempo transcurrido en el experimento ya no determina el valor de las mediciones. En las **etapas transitorias** de los procesos es importante garantizar la **repetibilidad de la evolución del experimento**, es decir, repetir el experimento desde su inicio, así como el conjunto de mediciones en el curso del mismo, para concluir sobre la repetibilidad del proceso conforme transcurre el tiempo. Además, cuando se trata de trabajos de investigación, es conveniente garantizar la repetibilidad en otros lugares, tiempos y condiciones ambientales del entorno del sistema, para poder descartar variables ocultas que podrían estar influyendo en los resultados.

21.1.2 Tipos de proyectos experimentales

Todo proyecto experimental se puede identificar de acuerdo a su propósito más general como:

Definición 21.1.1 — Proyecto de operación. que consiste en utilizar instrumentos ya existentes para determinar el comportamiento de un material

Definición 21.1.2 — Proyecto de diseño. cuando los objetivos del proyecto implican construir un instrumento para lograrlos.

Definición 21.1.3 — Proyecto de rediseño. cuando se requiere modificar un instrumento existente para lograr los objetivos.

La diferencia más notoria en el desarrollo de estos proyectos reside en **el instrumento experimental** necesario para realizarlos:

mientras que en los proyectos de operación el instrumento existe físicamente, en los proyectos de diseño no es así,

pues en éstos, el punto de partida es **una conceptualización del instrumento**, cuyo desempeño debería cumplir los objetivos propuestos; para ello se recurrirá a búsquedas bibliográficas, así como a la creatividad y a la imaginación, que se nutren de la observación de una amplia variedad de procesos naturales y de otros campos de aplicación. En los proyectos de rediseño se propone una modificación del instrumento para producir un efecto que logre el cumplimiento de los objetivos. Estos proyectos están a mitad de camino entre los de diseño y los de operación. Así pues,

ya se trate de un instrumento existente o no, definiremos su conceptualización como su **prototipo**.

Entonces,

Definición 21.1.4 — Prototipo. es la conceptualización de un instrumento físico o dispositivo experimental, cuyo desempeño permite explicar las observaciones realizadas en el curso de los experimentos a la luz de las relaciones propuestas por la teoría.

La diferencia entre un proyecto de diseño y uno de operación se refiere a la etapa de la **realización de la experiencia** y a su posterior **evaluación**, con la cual concluyen los proyectos de operación, pero es **solo una etapa iterativa** en los proyectos de diseño y de rediseño, en los cuales la evaluación de resultados puede conducir a **nuevas propuestas de modificaciones** del instrumento o de su prototipo, para lograr resultados más aproximados.

21.1.3 Estructura de un proyecto experimental

Un proyecto requiere elaborar **hipótesis** sobre la configuración y el comportamiento del instrumento, se define el **sistema** y se aplican los **principios o leyes generales**, así como las **relaciones de comportamiento** de los materiales, para generar un **modelo del prototipo**, cuya **solución** se use para obtener una predicción del comportamiento de las variables del sistema y para identificar los parámetros necesarios. Los resultados teóricos del modelo se desarrollan para presentarlos en la forma de **ecuaciones de trabajo**. Las variables utilizadas en estas ecuaciones son las **variables de trabajo**, que tienen su correspondencia experimental en las cantidades que se miden en el laboratorio, o una conexión directa con ellas, que generalmente se establece a través de equivalencias y calibraciones. Para facilitar la **recolección de los datos** que es necesario medir o estimar, se elabora una **hoja de datos** en la cual se concentra la información de los valores requeridos, ya sea que se obtengan en el laboratorio o que se encuentren en los manuales de estimación de propiedades. Esta hoja de datos **debe incluir las ecuaciones de trabajo**, así como

espacios para incorporar todos los valores necesarios de **los parámetros y las variables**.

Ya se trate de un proyecto de diseño o uno de operación, su propuesta gira en torno de los objetivos, el funcionamiento del dispositivo experimental, la conceptualización y manejo del modelo, el uso de la solución para establecer ecuaciones de trabajo y la hoja de datos. Esto forma la columna vertebral del proyecto, que **no deberá faltar en la propuesta**. En cambio, hay secciones alternativas que solo se deberán incluir en algunos casos, dependiendo de los objetivos del proyecto.

21.2 Contenido de una propuesta de proyecto

21.2.1 Definición e identificación del proyecto

i. Portada

Es la página frontal de la propuesta. Deberá contener la identificación completa, es decir, el nombre de la universidad, la carrera, la asignatura, las palabras *Proyecto experimental* y a continuación el nombre del proyecto, los nombres de los responsables de la propuesta, el nombre del profesor y la fecha de entrega de la propuesta.

ii. Índice

Se enumerarán las Secciones y Sub-secciones con las respectivas páginas donde inicia cada una.

iii. Objetivos

Los objetivos del proyecto a llevar a cabo deben establecerse con precisión, indicando su alcance y sus limitaciones. Por ello puede ser importante hacer referencia a los materiales a emplear, los instrumentos a usar y las propiedades o patrones de comportamiento a determinar. **Los objetivos deberán implicar la conexión de la teoría y la experiencia práctica**. Esta conexión puede ser también un objetivo explícito.

21.2.2 Indagatoria experimental

Entendemos por **indagatoria experimental** el proceso de indagación que es necesario para saber **cómo vamos a cumplir los objetivos establecidos en la sección anterior**. Los **proyectos de operación** requieren el uso de un equipo o instrumento existente en el laboratorio, por lo que **la indagatoria debe partir de la manipulación física** de dicho instrumento. Entonces,

A) En el caso de un proyecto de operación se requiere:

i. Explorar el instrumento para conocer su funcionamiento

Se requiere **observar los detalles del instrumento** y de qué manera su configuración geométrica es importante para obtener los fenómenos que van a ser medidos y las condiciones o estados de flujo que van a ocurrir.

ii. Hacer una descripción física de lo que pasa en un experimento

Se trata de **observar el desarrollo de un experimento**, destacando aquellas observaciones que pudieran estar relacionadas con las cantidades que se miden, para tomar en cuenta las observaciones relacionadas con los fenómenos que afectan las mediciones y que deberán ser considerados por un modelo matemático. Se identificarán las **etapas transitorias y estacionarias** de dicho proceso, destacando las que son de interés específico para los objetivos propuestos. **Se elaborará una descripción cuidadosa** del desarrollo del experimento, anotando las observaciones anteriores.

iii. Elaborar un bosquejo del instrumento indicando los fenómenos determinantes

Se dibujará un esquema o bosquejo del instrumento, anotando sus dimensiones principales. En este bosquejo se identificarán los flujos y las fuerzas más notorias, que pueden estar relacionadas

con los valores de las mediciones. Aquí se definirá el **término de transporte** que gobierna la ejecución de una experiencia.

Por el contrario, los proyectos de diseño requieren que la indagatoria inicie, principalmente, recabando información disponible en la red de internet y en otras fuentes, para diseñar un instrumento que de respuesta a los objetivos planteados.

B) En el caso de un proyecto de diseño se requiere:

i. Explorar la existencia de instrumentos alternativos

Dependiendo de los objetivos propuestos, se podrá encontrar en internet un conjunto de instrumentos, basados en distintos principios (por ejemplo, distintas fuerzas que generan el movimiento del fluido), que pueden dar respuesta a las necesidades planteadas. Una vez que se cuenta con información suficiente acerca de un conjunto de alternativas, se procederá a su clasificación. Sin embargo, las alternativas pudieran parecer inadecuadas o insuficientes, de modo que un recurso adicional pudiera ser recurrir a otros campos de evolución, en alguna forma similares, para mimetizar algunas posibilidades de solución.

ii. Elaborar modelos conceptuales cualitativos

Con la información del punto anterior, habría que proponer la solución más adecuada, para obtener los objetivos propuestos. Para intuir cuál podría ser esta solución, un conjunto de alternativas puede surgir del estudio de instrumentos utilizados con anterioridad, con propósitos similares.

iii. Seleccionar o modificar alternativas

se hará una descripción breve de las etapas de la propuesta hasta el cumplimiento del objetivo final. El propósito principal de una introducción es establecer un marco de referencia para contextualizar el proyecto propuesto. Puede tener sentido hacer alguna referencia histórica a la invención del instrumento o de la propiedad bajo estudio. No tiene sentido bajar a la introducción informaciones copiadas de lo extensamente disponible en el internet, y menos aún cuando, en vez de acompañar dichos párrafos por una valoración crítica, se presentan como textos atribuibles a la persona que entrega el trabajo, sin dar crédito al lugar de donde fueron tomados.

Se refiere al desarrollo conceptual de tres elementos principales: el instrumento de medición, el fluido a manipular y la interacción de estos en la operación instrumento. La construcción de un modelo puede seguir diversas trayectorias, dependiendo de las habilidades del sujeto que lo hace. Para reportarlo, en cambio, es necesario seguir un procedimiento estructurado de acuerdo a los principios físicos que gobiernan la situación física, que permita a todos los lectores seguir su desarrollo, de acuerdo a una secuencia lógica. Además es importante notar que un elemento crucial, como es la **definición del sistema**, no puede ser soslayado ni minimizado, como parece ser la tendencia del principiante, quien **se apresura a aplicar fórmulas y leyes de balance sin reparar en el objeto al que se están aplicando**.

Para elaborar un modelo teórico del flujo de algún fluido es conveniente:

en los proyectos de diseño **se describirá el prototipo propuesto** para realizarla. En los proyectos de diseño es conveniente hacer una reseña sobre el procesamiento de las ideas que llevan al desarrollo del prototipo.

21.2.3 Desarrollo teórico

i. Identificar el sistema y sus partes

Se delimitará el sistema de estudio, para lo cual se tendrá en cuenta **cómo el funcionamiento del instrumento** produce los resultados que nos permiten cumplir con los objetivos. Este sistema se representará en un diagrama incorporando **un sistema coordinado** idóneo y se identificará cada parámetro geométrico importante (con una letra o nombre). **Se identificarán las fronteras del**

sistema y los subsistemas, definidos como los elementos de una partición del sistema, que tienen estructura y comportamiento homogéneos.

ii. Establecer los términos del transporte

Se identificarán los flujos de masa y de momentum que ocurren en el sistema y sus fronteras y se hará una representación idealizada de los mismos, incorporándola al diagrama del sistema, utilizando flechas y definiendo los flujos.

iii. Enumerar las hipótesis simplificadoras que se requieren para establecer un modelo sencillo

Cada hipótesis irá seguida de su justificación. Algunas hipótesis, que no podrán justificarse *a priori*, deberán ser justificadas a partir de los resultados de la experiencia. Algunas hipótesis que pudieran ser importantes se pueden clasificar, de acuerdo a su naturaleza, como:

1. Hipótesis geométricas como cuando
 - Un conjunto de partículas sólidas se toman como esferas o cubos perfectos, con un diámetro o lado equivalente,
 - Un tubo muy largo se toma como un cilindro semi-infinito,
 - La capa límite alrededor de un cilindro con flujo transversal se considera como una capa límite sobre una pared plana, cuando el radio del cilindro es mucho mayor que el espesor de la capa límite.
2. Hipótesis sobre las condiciones iniciales y a la frontera como cuando
 - El sistema se considera cerrado (despreciando la evaporación de un líquido),
 - El sistema se considera aislado (despreciando el flujo de calor en la pared),
 - El estado inicial es de reposo, de temperatura o concentración uniforme o cuando ya se ha establecido un régimen estacionario,
 - La presión de vapor es constante en una superficie o la concentración del vapor en ella es la del equilibrio con el líquido,
 - Los flujos de momentum, de energía térmica y de masa de una especie química son constantes en una superficie.
3. Hipótesis sobre las condiciones de operación como cuando
 - El líquido en un recipiente está perfectamente agitado
4. Hipótesis sobre la extensión y la velocidad relativa de los flujos que ocurren simultáneamente como cuando
 - Una etapa del proceso de transporte puede estar gobernada (es decir, limitada) por un flujo en particular, el cual ocurre mucho más lentamente en un subsistema que en otro, o mucho más lentamente que otro flujo en el mismo subsistema o en otro, de modo que sea razonable proponer que el flujo lento es transitorio, en tanto que el flujo rápido se puede considerar estacionario.

iv. Elaborar balances de masa, de momentum y de energía, según sea necesario

Se establecerán los balances de momentum, de energía y de masa, según sea necesario. Los principios de balance o de conservación se aplicarán al sistema establecido cuando se requiere y podría bastar con una descripción integrada. Si se requiere una descripción local, se podría definir un subsistema de dimensiones infinitesimales, inmerso en el sistema original o en una porción homogénea del mismo. Esto daría lugar a un modelo en ecuaciones diferenciales, mediante el método matemático usual de tomar límites a las razones incrementales que definen las derivadas. Alternativamente se pueden simplificar las ecuaciones generales de cambio bajo las hipótesis previamente establecidas. Esto es preferible para situaciones no demasiado simples.

v. Representar los fluidos mediante relaciones de comportamiento adecuadas

Se establecen las relaciones de comportamiento específicas de los fluidos y materiales que intervienen en los balances, como las propiedades de transporte, las ecuaciones de estado y las relaciones de equilibrio.

vi. Establecer condiciones iniciales y condiciones a la frontera del sistema

Antes de encontrar una solución particular es necesario especificar condiciones conocidas. Las variables integradas en el tiempo, requieren conocer su estado a un tiempo dado, una condición por cada integración, en tanto que las variables integradas en el espacio, requieren conocer una condición en la frontera del sistema, a cualquier tiempo.

vii. Encontrar solución al problema de flujo

Se desarrolla matemáticamente lo necesario para determinar el comportamiento que resulta de las ecuaciones del modelo. Esto puede incluir simplificarlas hasta quedarnos con los rasgos fundamentales del balance, resolverlas analítica o numéricamente o transformarlas a un problema en diferencias finitas que será comparado directamente con las mediciones. Lo que se haga depende de los objetivos y de las características matemáticas del modelo, tanto como de la naturaleza y la calidad de las mediciones.

21.2.4 Diseño de la experiencia**i. Identificar las variables de trabajo**

Entendemos como *interpretación* la conexión que hacemos de los resultados del trabajo teórico con los resultados de la experiencia. Para que dicha conexión tenga características unívocas es necesario definir **unívocamente** el conjunto de variables que emplean ambos: el modelo y el experimento. Este conjunto son las **variables de trabajo**, las cuales se definen como aquellas cantidades que cambian en el espacio y/o en el tiempo, que pueden medirse en el laboratorio, o que tienen una conexión directa con las mediciones; conexión que muchas veces se establece a través de equivalencias y calibraciones. Para obtener las variables de trabajo se puede requerir de integraciones y manipulaciones de las variables originales del modelo.

Las **ecuaciones de trabajo** resultan de la manipulación de los resultados del modelo hasta obtener expresiones en las cuales sólo participen las variables de trabajo. En las ecuaciones de trabajo el logro de los objetivos propuestos se visualiza como consecuencia directa de aplicar dichas ecuaciones a la información experimental.

El orden a seguir para establecer la correspondencia entre el experimento y la teoría puede invertirse, iniciando por la definición de las variables de trabajo, para luego indagar cómo se conocerán los términos de los cuales dependen dichas variables, de acuerdo a los principios teóricos y a las relaciones de comportamiento, aplicadas en las regiones que abarca la definición de las mencionadas variables de trabajo. Este método resulta muy útil en algunos problemas complejos, en los cuales no se tiene la posibilidad, o no es, en realidad, necesario, obtener soluciones locales e instantáneas del proceso de transporte. Sin embargo todavía es posible medir algunas cantidades globales y proponer a partir de ellas un método de **análisis dimensional** para obtener correlaciones con sustento físico claro.

ii. Los parámetros

Algunas veces las variables de trabajo son directamente las que resultan conocidas de la solución del modelo, pero lo que ocurre más frecuentemente es que se miden cantidades totales, cuya definición implica la integración de cantidades locales e instantáneas. Así por ejemplo, la temperatura de un fluido que sale de un intercambiador de calor es una cantidad total. Supongamos que la temperatura se mide con un termómetro de mercurio, que se coloca en un pequeño recipiente donde descarga un flujo laminar y se mezcla la corriente de salida. La temperatura así medida se

conoce como **temperatura de copa** y se calcula integrando el perfil de temperatura en el ducto de salida, ponderado en la velocidad local del fluido.

Otras veces, se asocia a las mediciones locales un significado más amplio, por ejemplo al medir la temperatura con un termopar de punta delgada, cerca del centro de un tubo, podríamos asociar dicha temperatura a la **temperatura promedio del fluido**, es decir aquella que representa la totalidad del fluido circulando a través de la superficie transversal el tubo. Al reportar esos valores debemos tener el cuidado de evaluar el error que podría cometerse, debido a la extensión del significado del valor medido. Sin embargo, la suposición anterior nos permite tender un puente entre el valor medido y el concepto de la temperatura del fluido, que no es un solo valor sino una función de las variables independientes (el punto en el espacio y en el tiempo).

En los proyectos de diseño se puede tener la flexibilidad de elegir los materiales para realizar las experiencias, así como en cierta medida, los instrumentos de medición y su precisión. Por ejemplo una longitud puede requerirse en cm, mm, μm , u otro nivel de precisión. Esto determina el instrumento de medición requerido. También puede ser necesario definir un material de trabajo, de entre un conjunto de sustancias de interés, candidatas a ser utilizadas para este propósito, que por sus propiedades reúnan características compatibles con las hipótesis del modelo. Esto puede requerir algunas estimaciones termodinámicas, por ejemplo la densidad del aire saturado con un vapor, con relación a la densidad del aire puro, para estimar la posibilidad de un efecto de invernadero. En estas selecciones se deben cuidar además, los aspectos de seguridad, toxicología y economía. Si se requieren calibraciones, se elegirá el sistema para calibrar, indicando las razones que lo califican para ello.

iii. Ecuaciones de trabajo

Si las variables de trabajo **son los elementos** que recorren el puente entre el experimento y la teoría, las ecuaciones de trabajo **son su estructura**. Las ecuaciones de trabajo resultan de las expresiones que definen las variables de trabajo, en las que intervienen las variables de campo encontradas en la solución del modelo o que pueden encontrarse a partir de dicha solución, cuando se ha resuelto el modelo. Cuando no se ha resuelto el modelo, todavía existe la posibilidad de utilizarlo, junto con las condiciones iniciales y a la frontera, las relaciones de comportamiento y las ecuaciones de estado, para **encontrar un conjunto de parámetros adimensionales** que determinan el comportamiento de las variables de trabajo definidas por dicha expresión y expresadas también en la forma de parámetros adimensionales. El procedimiento para obtener esta formulación general se conoce como **adimensionalización**.

21.2.5 Hoja de datos

Como resultado del análisis de las ecuaciones de trabajo se elaborará una **hoja de datos**, en la que se concentrará la información que se requiere para lograr los objetivos propuestos. En una hoja completa se elaborará un formato para recabar todos los datos necesarios. Esta hoja contendrá en su encabezado:

1. El nombre del proyecto experimental.
2. Los nombres de los integrantes del equipo que realiza las experiencias y la fecha de realización.

En la parte superior se escribirán las ecuaciones de trabajo. A continuación los siguientes campos, indicando en cada caso las unidades requeridas:

1. Los parámetros estimados.
2. Los parámetros medidos.
3. Las variables medidas, con su tabulación con respecto a las variables independientes de ser necesario, así como las repeticiones de las lecturas.
4. Si se requiere una calibración, elaborar los puntos anteriores necesarios para realizarla y repetir los pertinentes para el sistema desconocido (el problema).

21.2.6 Materiales adjuntos

i. Notación

ii. Referencias

Todas las referencias **deberán estar mencionadas** en algún lugar del texto. La manera de mencionarlas será por ejemplo: ... este modelo se encuentra resuelto en Cussler (1984). Correspondiendo a esta mención, en la sección de referencias se incluirá:

Cussler, EL. 1984. *Diffusion. Mass Transfer in Fluid Systems*, Cambridge University Press (Primera edición).

Es decir que un libro referido incluye los siguientes datos en forma ordenada:

- Apellido e iniciales de los autores (o de los editores)
- Año de publicación de la edición consultada
- Título del libro (en letra itálica)
- Editorial
- Edición.

Si se trata de un libro colectivo, donde los capítulos son escritos por diversos autores y la referencia es de un capítulo en particular, se seguirá el siguiente orden:

- Apellido e iniciales de los autores del capítulo
- Año de publicación de la edición consultada
- Título del capítulo (en letra romana)
- La palabra En
- Título del libro o manual (en letra itálica)
- Apellido e iniciales de los editores del libro, seguidos de la abreviación (eds.)
- Editorial
- Edición.

iii. Apéndices

Cuando son necesarios, cada Apéndice tendrá un número consecutivo y un nombre que indique su contenido y deberá estar mencionado en el texto. Todas las ecuaciones llevarán numeración consecutiva en un paréntesis, precedida por la letra A, por ejemplo, (A.12) es la ecuación # 12 en los Apéndices.

22. Elaboración de reportes experimentales

*Al inicio, uno solamente se pregunta sobre la posibilidad de las cosas,
y luego uno les reprocha no ser imposiblemente perfectas*
Jean Rostand, 1962.

22.1 Introducción

A veces, como Rostand menciona, pretendemos pedir de nuestras experiencias que revelen una perfección que definimos como aquello que se conduce de acuerdo a nuestras teorías. Sin embargo nuestras teorías son, por lo general, incapaces de tomar en cuenta todo lo que rodea a un determinado fenómeno que observamos. El trabajo de laboratorio pretende generar las condiciones y elaborar los sistemas simplificados, donde los comportamientos que deseamos observar puedan resultar enfatizados y en lo posible liberados de otros fenómenos concurrentes, sin embargo los procesos físicos y químicos naturales **ocurren independientemente de nuestras teorías**, las cuales buscando explicaciones parciales, podrían no ajustarse a las observaciones y demandarían explicaciones más amplias y detalladas, algunas que podrían resultar aparentemente contradictorias, llevando a dilucidaciones altamente complejas. Por ello algunas veces hemos oído mencionar que **la realidad es compleja**, aunque parece más certero afirmar que **nuestra aproximación a la realidad**, nuestro pensamiento, **es lo complejo**; se torna complejo cuando quiere dar cuenta, con una visión cada vez más amplia, de las capas de detalle de los sucesos que ocurren en la naturaleza, aún en situaciones propias del laboratorio, donde pretendemos domesticar a los sistemas para realizar observaciones bajo ambientes controlados.

Afortunadamente, cuando notamos semejanzas notables entre un comportamiento observado y nuestras predicciones teóricas, adquirimos **cierto grado de certeza** para manipular los materiales y para utilizar nuestras predicciones como herramientas de trabajo, basadas en los conocimientos adquiridos. También adquirimos cierta capacidad para **determinar cuáles son los factores que influyen** - y en qué medida - en las diferencias y/o discrepancias entre nuestras teorías, nuestras operaciones de laboratorio y nuestras observaciones. Una experiencia que tenga importantes diferencias con lo que predice la teoría puede ser un excelente trabajo, si somos capaces de **identificar y evaluar las fuentes de las discrepancias**. Si es posible, una experiencia así deberá

ser modificada con las mejoras pertinentes, rediseñando también los objetivos, si es necesario.

22.1.1 Objetivo del reporte

El reporte de experimentos es el principal registro o memoria de la experiencia realizada. En el reporte se debe rescatar **el sentido, la organización, el tratamiento, los resultados, los valores y las conclusiones de la experiencia**. Elaborar el reporte es un ejercicio que nos permite reflexionar y trabajar con las observaciones y las mediciones; con la teoría, los modelos y las estimaciones de la importancia relativa de sus elementos, para clarificar su significado, sus limitaciones y su validez, en la situación concreta experimentada en el laboratorio. Por todo esto, el reporte es un elemento fundamental para el aprendizaje de la ingeniería.

El reporte forma un par complementario con el proyecto experimental. Mientras que **en el proyecto se elabora**, a partir de la teoría y los instrumentos del laboratorio, **el procedimiento que permitirá cumplir los objetivos propuestos, en el reporte se evalúa en qué medida ha sido posible alcanzar dichos objetivos** y qué cambios en el procedimiento seguido se pueden visualizar para conseguir mejor dichos objetivos, para profundizar en algunos comportamientos observados o para explorar nuevas posibilidades tanto de los modelos como de los instrumentos o de los materiales.

22.2 Sobre la forma de elaborar un reporte experimental

Si se ha realizado un proyecto experimental previo, el reporte deberá contener únicamente los materiales complementarios, partiendo de las ecuaciones de trabajo y el formato de la hoja de datos, que son el producto de la propuesta experimental. A diferencia, si la experiencia se ha realizado sin una propuesta previa de proyecto experimental, el reporte deberá incorporar los elementos fundamentales del proyecto, como son el modelo y su interpretación, los cuales se elaboran con el apoyo de las observaciones, tanto como de los elementos teóricos. Esto permite obtener las ecuaciones de trabajo y finalmente la hoja de datos, que son el punto de partida para los reportes que si cuentan con un proyecto previo. Al elaborar la hoja de datos después de realizada la experiencia, podríamos caer en la cuenta de diferencias con las cantidades medidas, ya sea porque falta información requerida por el modelo o porque se midieron cantidades que no parecen ser importantes para el mismo. Estas diferencias deben reportarse como tales, incorporándolas al proceso de nuestro conocimiento del tema. Al hacerlo habremos logrado incorporar más elementos a nuestro juicio para la toma de decisiones, además puede ser posible utilizar los nuevos elementos para realizar nuevas experiencias para alcanzar los objetivos propuestos u otros nuevos.

22.3 Contenido de un reporte experimental

Si no se realizó una propuesta de proyecto experimental previa, después de los objetivos se incorporarán las Secciones 5, el modelo; 6, la interpretación y 7, la hoja de datos, del Instructivo para la Elaboración de Proyectos Experimentales, antes de la Sección Realización de la experiencia.

22.3.1 Portada

Es la primera página del reporte. Deberá contener la identificación completa: La Universidad, la Carrera, la Asignatura, las palabras *Reporte experimental* y a continuación el nombre del proyecto, los nombres de los integrantes del equipo, el nombre del Profesor y la fecha de entrega.

22.3.2 Resumen ejecutivo

Es la segunda página del reporte. En forma muy concisa y en una sola página, se informará sobre los objetivos, los instrumentos, el modelo, las mediciones y los resultados, concluyendo con

las limitaciones a la validez de los mismos. Este resumen es lo que el ejecutivo de una empresa leería para defender el trabajo en una sesión para su aprobación.

22.3.3 Índice

Se enumerarán las Secciones y Sub-secciones con las respectivas páginas de inicio.

22.3.4 Objetivos

Se enunciarán los objetivos del trabajo, tal como fueron acordados por los integrantes del equipo y el profesor. El reporte experimental solo contendrá la información que conduce a los objetivos propuestos. Toda otra información es superflua y debería evitarse.

22.3.5 Ecuaciones de trabajo y hoja de datos

Si no se elaboró proyecto, en esta Sección se desarrolla el modelo correspondiente, para proponer luego una interpretación que conduzca a establecer las ecuaciones de trabajo y su consecuencia directa: el formato de la hoja de datos, siguiendo el instructivo de elaboración de proyectos.

Si se elaboró previamente el proyecto, esta Sección consiste del formato de la hoja de datos, que contiene en la parte superior las ecuaciones de trabajo, de acuerdo a lo establecido en el instructivo correspondiente.

22.3.6 Realización de experiencias

- Se incorporará la hoja de datos con la información completa de las mediciones primitivas y de los parámetros y/o valores de literatura, indicando si hizo falta o fue inútil algún campo de información del formato original propuesto, con sentido autocrítico.
- Se hará una lista de las observaciones de interés, a juicio de los integrantes del equipo, efectuadas durante la realización de las experiencias, indicando en qué reside su interés para la materia de estudio.

22.3.7 Análisis de datos y resultados

- La información de la hoja de datos se verterá en una hoja de Excel y se realizarán las operaciones pertinentes, de acuerdo a las expresiones desarrolladas a partir del modelo, para encontrar los resultados.
- De acuerdo con las escalas de los instrumentos, se incluirán solamente las cifras significativas en los resultados. Se hará un análisis estadístico, considerando las repeticiones, para reportar los resultados finales con sus incertidumbres, bajo una prueba de límites de confianza del 95 %.
- Si es el caso, se elaborarán gráficas en Excel para las variables dependientes, como funciones de las independientes (coordenadas espaciales y/o el tiempo). Entonces se graficarán los valores experimentales con sus incertidumbres y se incluirá la estimación teórica del modelo. También se incorporarán otras gráficas requeridas, a juicio de los alumnos o solicitadas específicamente.

22.3.8 Conclusiones y sugerencias

- Se compararán los resultados obtenidos con otros conocidos. Con esta información los integrantes del equipo elaborarán sus conclusiones, con una actitud crítica y autocrítica.
- Como resultado de su experiencia, los integrantes del equipo propondrán aquí lo que consideran que puede mejorar la realización de la experiencia.

22.3.9 Referencias y apéndices

Se tomará en cuenta lo dicho para la elaboración de propuestas de proyectos experimentales.

Bibliografía

- **Abbagnano, N. 2004.** *Diccionario de Filosofía*, Fondo de Cultura Económica, Ciudad de México.
- **Aris, R. 1962.** *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, N.J.
- **Arquímedes, 2009.** *Sobre los Cuerpos Flotantes*. Biblioteca Clásica Gredos, Gredos.
- **Baird, D.C. 1991.** *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, Segunda edición. Prentice.Hall Hispanoamericana, México.
- **Bertalanffy, L. 1986.** *Teoría General de los Sistemas. Fundamentos, desarrollo, aplicaciones*, Fondo de Cultura Económica, Ciudad de México.
- **Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N. 2012.** *Fenómenos de Transporte*, Segunda edición. Limusa-Wiley. Ciudad de México.
- **Borishenko, A.I.; Tarapov, I.E. 1968.** *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Prentice Hall (Reproducido por Dover, Toronto. 1979).
- **Brodkey, R.S. 1967.** *The Phenomena of Fluid Motions*, Addison Wesley (Reproducido por Dover, N.Y. 1995).
- **Caso, A. 1966.** *Reyes y reinos de la mixteca*, Fondo de Cultura Económica, Ciudad de México.
- **Concha, F.; Bustos, M.C. 1991.** Settling velocities of particulate systems: 6. Kynch sedimentation processes: batch settling. *Int. J. Miner. Process*, **32**, 193-212.
- **Currie, I.G. 2003.** *Fundamental Mechanics of Fluids*, Tercera edición. Marcel Dekker, N.Y.
- **CRANE CO. 1986.** *Flow of fluids through valves, fittings and pipe*. Technical paper No. 410 M. Crane Co, N.Y.
- **Dealy, J.M. 1982.** *Rheometers for Molten Plastics*. Van Nostrand Reinhold, N.Y.
- **Garrido, P.; Concha, F.; Bürger, R. 2003.** Settling velocities of particulate systems: 14. Unified model of sedimentation, centrifugation and filtration of flocculated suspensions. *Int. J. Miner. Process*, **72**, 57-74.
- **Krol, J. 1951.** The Automatic Hydraulic Ram. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 165 (1), 53-73.

- **Lamb, H. 1932.** *Hydrodynamics*, Cambridge (Reproducido por Dover, N.Y. 1945).
- **León Portilla, M. 1980.** *Toltecáyotl. Aspectos de la cultura náhuatl*. Fondo de Cultura Económica. Ciudad de México.
- **Levenspiel, O. 1993.** *Flujo de Fluidos e Intercambio de Calor*, Barcelona.
- **Levi, E. 1965.** *Mecánica de los Fluidos. Introducción teórica a la hidráulica moderna*, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.
- **Luhmann, N. 2006.** *La Sociedad de la Sociedad*, Herder, Ciudad de México.
- **Lydersen, A.L. 1979.** *Fluid Flow and Heat Transfer*, John Wiley, Surrey.
- **Martinelli, R.C.; Nelson, D.B. 1948.** Prediction of Pressure Drop During Forced Circulation Boiling of Water, *Trans. ASME* **70**, 695.
- **McCabe, W.L.; Smith, J.C. 1976.** *Unit Operations of Chemical Engineering*, Tercera edición. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.
- **Méndez Mandujano, C. 2014.** Modelamiento de viscosidades de mezclas líquidas de n-alcanos (n-pentano a n-dodecano) a altas presiones utilizando la Teoría de Eyring. *Proyecto de integración en ingeniería química*. Repositorio institucional de UAM Azcapotzalco.
- **Morin, E. 1990** *Introducción al Pensamiento Complejo*, Gedisa, Barcelona.
- **Pope, S.B. 2000.** *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge.
- **Poskett, J. 2022.** *Horizontes. Una historia global de la ciencia*. Crítica, Paidós, Ciudad de México.
- **Rodríguez Sierra, J.C. 2016.** *Caracterización e Implementación de un Sensor por Impedancia Eléctrica para la Medición de la Fracción Volumen en una Columna de Burbujeo*. Tesis de Doctorado en Ciencias (Ingeniería Química), Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, Ciudad de México.
- **Schlichting, H. 1979.** *Boundary Layer Theory*, séptima edición. McGraw-Hill, N.Y.
- **Sociedad Americana de Química (ACS). 2003.** *Seguridad en los Laboratorios Químicos Académicos. Volumen 1*. Prevención de accidentes para estudiantes universitarios. Séptima edición. ACS, Comité de seguridad química, Washington, DC.
<https://www.acs.org/content/dam/acsorg/about/governance/committees/chemicalsafety/publications/seguridad-en-los-laboratorios-quimicos-academicos-academicos.pdf>
- **Soria, A. 2022.** *Fundamentos del Flujo de Fluidos*, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Ciudad de México, CDMX.
- **Soria, A. 2026.** *Indagaciones sobre el calentamiento y el transporte de especies químicas*, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Ciudad de México, CDMX.
- **Soria, A.; de Lasa, H.I. 1992.** Averaged topological equations for dispersed two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 943-963.
- **Taitel, Y.; Barnea, D.; Dukler, A.E. 1980.** Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes, *AIChE J.* **26**, 345-354.
- **Truesdell, C. 1973.** *Termodinámica Racional*, Barcelona.
- **Truesdell, C.; Toupin, R. 1960.** *The classical field theories*, en *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, editado por S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- **Whitaker, S. 1968.** *Introduction to Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, N.J.