

Colección CBI

INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD

Rosa María Velasco Belmont



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA División de Ciencias Básicas e Ingeniería

El contenido de este libro muestra los elementos fundamentales en el tratamiento de la Elasticidad Clásica, campo que tiene gran relevancia en el estudio de los materiales. Desde el punto de vista conceptual y formativo, su estudio permite unificar las herramientas matemáticas para abordar problemas de interés práctico y al mismo tiempo se cultiva el desarrollo de los métodos matemáticos que son comunes a varios campos de la física. Está diseñado para los alumnos de la licenciatura en física, en los primeros 8 capítulos se trabaja el material esencial. Posteriormente se tiene material optativo a utilizar según las necesidades del profesor y los estudiantes.

Introducción a la Elasticidad

Universidad Autónoma Metropolitana

Rector General

Dr. José Lema Labadie

Secretario General

Mtro. Luis Javier Melgoza Valdivia

Unidad Iztapalapa

Rector

Dr. Oscar A. Monroy Hermosillo

Secretario

Mtro. Roberto Torres-Orosco Bermeo

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Directora

Dra. Verónica Medina Bañuelos

Secretario Académico

Dr. José Antonio de los Reyes Heredia

Introducción a la Elasticidad

Rosa María Velasco Belmont

Departamento de Física



Primera edición, 2009

Los derechos de reproducción de esta obra pertenecen al autor
© **Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa**
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Av. Michoacán y Purísima, Colonia Vicentina, Iztapalapa
C.P. 09340, México D.F.

ISBN 978-607-477-035-3

Se prohíbe la reproducción por cualquier medio, sin el consentimiento
de los titulares de los derechos de la obra

Impreso en México/Printed in Mexico

Índice general

Prólogo	1
1. Introducción	3
1.1. Antecedentes históricos	3
1.2. Panorama	4
1.3. Bibliografía general	5
2. Tensores	7
2.1. Aspectos generales	7
2.1.1. Convención de suma	8
2.1.2. Delta de Kronecker	8
2.2. Vectores contravariantes	9
2.3. Vectores covariantes	9
2.3.1. Invariantes	10
2.4. Tensores de segundo orden	10
2.4.1. Propiedades	11
2.5. Operaciones con tensores	11
2.5.1. Adición	11
2.5.2. Producto externo	12
2.5.3. Contracción	12
2.5.4. Producto interno	13
2.6. Ley del cociente	14
2.7. El tensor fundamental	15
2.8. Tensores cartesianos	16
2.9. Tensores de permutación	17
2.10. Valores y direcciones principales	18
2.11. Problemas	20
3. Esfuerzos	23
3.1. El Vector de esfuerzos	23
3.2. Esfuerzos en un cuerpo	25
3.3. El Tensor de los esfuerzos	26
3.4. Transformación	30
3.5. Esfuerzos máximo y mínimo	31

3.5.1. Caso A	34
3.5.2. Caso B	35
3.5.3. Caso C	35
3.6. Ecuaciones de equilibrio	38
3.7. Problemas	41
4. Deformación	45
4.1. Desplazamientos infinitesimales. .	45
4.2. Interpretación Geométrica	47
4.3. Interpretación Geométrica	50
4.4. Propiedades	52
4.4.1. Propiedades de transformación	52
4.4.2. Eje principales	52
4.4.3. Dilatación cúbica	52
4.4.4. Deformación cortante pura	53
4.5. Saint Venant	54
4.6. Apéndice	59
4.7. Problemas .	60
5. Ley de Hooke	61
5.1. Introducción	61
5.2. Ley de Hooke simplificada	62
5.2.1. Deformación vs. Esfuerzo	63
5.2.2. Esfuerzo vs. Deformación	66
5.3. Termodinámica de la deformación	67
5.4. Sistema isótropo . . .	70
5.5. Energía libre	76
5.6. Temperatura variable	78
5.7. Simetría tetragonal	79
5.8. Problemas	83
6. Resumen	85
6.1. Problemas estáticos.	85
6.1.1. Ecuaciones de equilibrio.	85
6.1.2. Desplazamiento y Deformación	86
6.1.3. Ley de Hooke generalizada	86
6.2. Condiciones de frontera . .	87
6.3. Problemas dinámicos	88
6.4. Principio de Saint Venant.	89
6.5. Apéndice A	89
6.6. Problemas	90

7. Extensión, Torsión y Flexión.	93
7.1. Introducción.	93
7.2. Extensión	93
7.3. Torsión	97
7.4. Flexión	103
7.5. Comentario	109
7.6. Problemas	109
8. Ondas	111
8.1. Introducción.	111
8.2. Vibraciones longitudinales y transversales	111
8.2.1. Vibraciones longitudinales	112
8.2.2. Vibraciones transversales	113
8.3. Propagación	114
8.4. Relación de Dispersión	114
8.5. Problemas	118
9. Problemas bidimensionales	119
9.1. Deformación plana	119
9.1.1. Modificación de las ecuaciones	119
9.2. Esfuerzos en un plano.	121
9.2.1. Ejercicio . . .	124
9.2.2. Ejercicio . .	125
9.3. Pared de una Presa.	126
9.4. Flexión de un soporte.	132
9.5. Problemas	138
10. Torsión de Barras	141
10.1. Introducción. . .	141
10.2. La función de Torsión	142
10.3. Método de Prandtl	143
10.4. Sección Circular	146
10.5. Sección Elíptica . .	148
10.6. Sección Triangular	152
10.7. Problemas . . .	154
11. Método Numérico	155
11.1. Clasificación de EDP	155
11.2. Diferencias Finitas . .	156
11.3. Aplicación	160
11.4. Sección transversal rectangular	163
11.5. Problemas	165

Prólogo

El objetivo fundamental de este trabajo es el de introducir al lector a los conceptos y métodos fundamentales de la Elasticidad. Este campo tiene gran relevancia práctica cuando se estudian las propiedades de los materiales y se requiere ver, entre otras cosas, su resistencia. Los aspectos prácticos pueden constituir una motivación para su estudio, pero también es interesante notar que, desde el punto de vista físico, el estudio de la Elasticidad nos permite introducir conceptos que para un estudiante de Física pueden ser muy valiosos, por ejemplo el tensor de los esfuerzos, la ley de Hooke, las relaciones dispersión en medios con simetrías específicas, etc. Otro aspecto que es importante enfatizar es el uso de los métodos matemáticos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, ya que se necesitan las condiciones de frontera para determinar la solución. Estas características del material que se presentará permiten que el alumno integre conocimientos que ha estudiado en forma seccionada. Es ésta una oportunidad para reconocer el campo de aplicación de otras materias y para utilizar sus herramientas matemáticas en la solución de problemas específicos.

Por otra parte, la Elasticidad forma parte de la Física Clásica y en algunas ocasiones se concibe como parte de la Mecánica de Medios Continuos. En este trabajo se adoptó un esquema independiente y hemos tratado de enfatizar aquellos aspectos que pueden ser de interés especial para un alumno de la licenciatura en Física.

Son muchos los textos existentes en esta materia, sin embargo presentan diversas dificultades que van desde una notación anticuada y difícil de captar hasta un enfoque sumamente práctico, que deja de lado los aspectos fundamentales. Es por ello que hemos considerado el escribir este material con una notación unificada, poniendo énfasis en aspectos conceptuales y en los métodos matemáticos apropiados. Los ejemplos que se escogieron son los más comunes, pues pensamos que el alumno debe conocer los problemas que se presentan con mayor frecuencia. Asimismo, los métodos numéricos se introducen con el objeto de señalar al alumno que hoy en día la mayor parte de los problemas no se pueden resolver con métodos analíticos y entonces se hace necesario conocer metodologías alternativas que permitan obtener una solución.

Es importante considerar que el material corresponde al temario del curso correspondiente en la licenciatura en Física en la Universidad Autónoma Metropolitana, esto significa que se pretende cubrir el material en un intervalo de once semanas. A su vez, los requisitos para estudiar este material cubren

los cursos de *Mécanica Clásica*, *Termodinámica*, *Cálculo Vectorial*, *Ecuaciones Diferenciales* y *Álgebra Lineal*.

El trabajo está separado en capítulos cortos y cada uno de ellos contiene tanto ejercicios resueltos como problemas para realizar en casa. En el primer capítulo damos una breve introducción histórica y una bibliografía general para utilizar a lo largo del trabajo. El segundo capítulo introduce el álgebra tensorial, que se convierte en la herramienta de trabajo más importante; en este caso es relevante enfatizar que es la primera vez que el alumno debe usar esta herramienta y es posible que sólo en este curso tenga la oportunidad de estudiar las bases que permiten desarrollarla. Los capítulos 3 y 4 introducen al tensor de los esfuerzos y el tensor de deformación, donde hemos considerado únicamente deformaciones pequeñas. En el capítulo 5 se discute la ley de Hooke en su forma más general y tomando en cuenta la simetría de los medios elásticos con los que se trabaja. También se introducen los conceptos de la termodinámica de las deformaciones. En el capítulo 6 se hace un resumen de las ecuaciones básicas, se señalan generalizaciones y aspectos relevantes para encontrar la solución, posteriormente se realizan algunas aplicaciones. El capítulo 7 trata los problemas de extensión, torsión y flexión en su forma más elemental. El capítulo 8 se dedica a estudiar la propagación de ondas en medios isótropos y en medios con una simetría específica. Ahora bien, en un curso introductorio a esta materia, los capítulos reseñados arriba son suficientes para que el alumno tenga una idea somera acerca de este campo. Sin embargo, hemos incluido los capítulos 9 y 10 para retomar problemas que ya se estudiaron en forma elemental y desarrollar métodos más sofisticados, pero que, a su vez, dan mayor información. Por último en el capítulo 11 se introduce un método numérico para resolver el problema de la torsión en una barra de sección transversal rectangular. Aunque este problema en particular se puede resolver en forma exacta, hemos considerado instructivo trabajarlo numéricamente a fin de que el alumno pueda empezar a familiarizarse con este tipo de métodos.

Durante el desarrollo de este trabajo he contado con el apoyo de los estudiantes que han sido alumnos del curso a lo largo de varios trimestres en los que he tenido la oportunidad de usar este material. Las figuras las realizó el alumno David Enrique Flores Jiménez a quien agradezco su dedicación. El programa para la solución numérica del último capítulo lo realizó el Dr. Juan R. Varela. Asimismo, agradezco a todos los alumnos y colegas que con sus comentarios han ayudado a la realización de este trabajo.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes históricos

El estudio de la Elasticidad se remonta a la época de Galileo y son muchos los investigadores que han desarrollado diversas partes de este campo. En este capítulo haremos un pequeño resumen de antecedentes históricos con la idea de proveer al lector de un recuento rápido acerca de los desarrollos más importantes.

Para empezar diremos que la teoría de la Elasticidad se ocupa de estudiar el estado de esfuerzos o de desplazamientos que ocurren en un cuerpo sólido, como resultado de la acción de un sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Teniendo esto en mente iniciamos nuestro resumen histórico:

1. Galileo fué el primero en considerar el comportamiento de sólidos para estudiar su resistencia a la ruptura, pero no tenía una relación entre los esfuerzos y los desplazamientos. El problema que él abordó trataba de una barra sujeta a una pared y sometida a la acción de una carga en su extremo libre y su objetivo era ver su resistencia a la ruptura (1638).
2. Hooke (1678) da la relación esfuerzo-deformación, la cual forma la base de la teoría de la Elasticidad.
3. Mariotte en 1680 también enuncia la ley de Hooke (aunque de manera independiente) y la aplica al problema de Galileo.

Desde el descubrimiento de la ley de Hooke hasta 1821 en que Navier escribe las ecuaciones generales de la Elasticidad, los matemáticos interesados en esta materia se dedicaron a la solución del problema de Galileo, además estudiaron vibraciones en placas, estabilidad de columnas y problemas similares. Varias personalidades importantes estudiaron el problema de la flexión de barras, entre ellos podemos mencionar a Bernoulli, Euler, Lagrange, Coulomb quienes además dieron los primeros pasos en el tema de la estabilidad elástica. Coulomb también inició el estudio de la torsión de barras. El trabajo de Thomas Young (Lord Kelvin) marca un paso muy importante en la teoría, ya que considera

esfuerzos cortantes y además introduce el llamado módulo de Young como una característica del material.

Euler fue quien se ocupó de estudiar el sonido de campanas considerándolas formadas por anillos delgados que se comportan como barras curvas. La vibración en placas la estudió Germain (1821). A pesar de que una gran parte de los resultados concretos obtenidos hasta 1820 eran incorrectos, se habían introducido conceptos que hasta la fecha se siguen utilizando. Navier (1827) fue el primero en investigar las ecuaciones generales para el equilibrio y la vibración de cuerpos elásticos.

En 1822 Cauchy introdujo la noción de esfuerzos en un punto y de hecho introduce dos constantes para especificar las características elásticas de un cuerpo. Muchos otros personajes han contribuido, sin embargo recomendamos al lector interesado consultar la literatura correspondiente [1].

1.2. Panorama

Aún cuando en el prólogo hemos hecho una pequeña reseña de los temas a tratar en el este trabajo, es conveniente tener un panorama un poco más específico. En este trabajo iniciamos el estudio de la Elasticidad repasando las herramientas matemáticas necesarias para el tratamiento adecuado de los tensores de esfuerzos y deformación. Así, en el capítulo 2 se introduce de manera general el concepto de un tensor a través de las leyes de transformación, prestando atención especial a los tensores de segundo orden. Posteriormente se particulariza el tratamiento para tensores cartesianos, debido a que sólo se utilizarán este tipo de tensores a lo largo del resto de este trabajo. En la última parte se repasan las ideas asociadas a la obtención de valores y vectores propios de tensores de segundo orden.

El capítulo 3 trata con el concepto del tensor de esfuerzos y sus propiedades, como esfuerzos principales y esfuerzos cortantes máximo y mínimo alrededor de un punto en el medio continuo.

En el capítulo 4 se discute el desplazamiento, y los tensores de deformación y rotación, asimismo se ilustra su interpretación geométrica. Es de suma importancia enfatizar que el tratamiento de este capítulo sólo contempla el caso de deformaciones pequeñas. A su vez, el capítulo 5 relaciona el tensor de esfuerzos con el tensor de deformación a través de la ley de Hooke generalizada. Se discuten varios casos particulares para medios elásticos con isotropía total y con diversas simetrías especificadas de antemano. Esto permite ver cual es el número de módulos elásticos independientes para cada tipo de sistema. Por otra parte, en este capítulo se introduce la energía libre para las deformaciones y con ello tenemos el desarrollo de la termodinámica de la deformación.

En el capítulo 6 tenemos un resumen del conjunto completo de ecuaciones, donde hemos generalizado al caso dinámico para los desplazamientos. También se discute la necesidad de tener las condiciones iniciales y de frontera para una posible solución. Una vez que se han introducido todas las ecuaciones de la Elasticidad, empezamos con las aplicaciones más simples. Para iniciar, en el capítulo

7 se estudian los problemas más usuales de extensión, flexión y torsión, desde un punto de vista elemental. En este caso, ya sean las componentes del tensor de esfuerzos o del tensor de deformación, se pueden construir con argumentos geométricos sencillos, para entonces obtener una solución aproximada del problema. En el capítulo 8 se estudia la propagación de ondas en un medio elástico. En un primer ejemplo se trabaja con medios isótropos y posteriormente consideramos la propagación en medios con simetría específica, con el fin de calcular y analizar las relaciones de dispersión correspondientes.

En el capítulo 9 retomamos los problemas de extensión, flexión y torsión para casos bidimensionales a través de la función de Airy. A su vez, esto permite dar ejemplos donde el uso de las condiciones de frontera determinan la solución detallada del problema.

El capítulo 10 trata con la torsión de barras de secciones transversales específicas, se introducen la función de esfuerzos y la función de torsión del problema. Por último, en el capítulo 11 se trabaja la torsión de barras usando un método de diferencias finitas para resolver numéricamente en términos de la función de esfuerzos.

Es muy importante notar que en este trabajo se introducen los conceptos necesarios para manejar problemas en Elasticidad y, a su vez, se estudian las herramientas matemáticas necesarias no sólo para trabajar con tensores cartesianos, sino también para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

1.3. Bibliografía general

1. A.E.H. Love; *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover (1944). Libro de consulta clásico pero con una notación muy antigua.
2. M. Filonenko-Borodich; *Theory of Elasticity*, Mir (1968). Cubre todo el material del curso y mis notas toman muchos aspectos de él, sin embargo la notación que utiliza es muy antigua y confusa. Para la redacción he cambiado toda la notación de acuerdo con la notación que se introduce en el capítulo 2.
3. R.L. Bisplinghoff, J.W. Mar, T.H.H. Pian; *Statics of deformable solids*, Dover (1990). El programa del curso está en los capítulos 5 a 7.
4. P.C. Chou, N.J. Pagano; *Elasticity*, Dover (1992). El programa está en los capítulos 1 a 6 sin notación tensorial, ésta la introduce en el capítulo 8 y en los capítulos 9 y 10 regresa al material anterior, en el capítulo 11 usa diadas.
5. V.G. Rekach; *Manual of the Theory of Elasticity*, Mir (1979). Problemas resueltos.
6. L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie de l'Elasticité*, Mir (1967). Libro de consulta clásico, algunas secciones se asignan en los problemas del final de

capítulo. En este libro se sigue su tratamiento en la ley de Hooke generalizada, simetrías, termoelasticidad y ondas en medios elásticos.

7. G.E. Masse; *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Schaum's (1970). La parte teórica la trata de manera muy somera y se dedica a problemas resueltos, es muy útil para hacer ejercicios.
8. A.E. Green, W. Zerna; *Theoretical Elasticity*, Dover (1992). Trata tres temas que sería interesante incluir quizá en un curso posterior al básico, para los alumnos interesados. Estos son: Deformaciones elásticas finitas, métodos de variable compleja para problemas bidimensionales y cascarones.
9. I.S. Sokolnikoff; *Mathematical Theory of Elasticity*, Mc Graw Hill (1956). Libro de consulta clásico.
10. Yu A. Amenzade; *Theory of Elasticity*, Mir (1979).
11. J.E. Marsden, T.J.R. Hughes; *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover (1993). Texto avanzado.
12. G. Arfken; *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press (1970).
13. B. Spain; *Tensor Calculus*, Oliver and Boyd (1965).
14. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery; *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge (1992).

Capítulo 2

Cálculo Tensorial.

2.1. Aspectos generales

El cálculo tensorial tiene como objetivo principal encontrar relaciones que se mantienen invariantes cuando se efectúa una transformación del sistema de coordenadas. De manera un poco más general se puede decir que su objetivo consiste en encontrar cuáles son las leyes de transformación de los objetos matemáticos definidos en el espacio, es por ello que se utiliza en varias ramas de la física teórica. Para los propósitos de este libro sólo se necesita trabajar en un espacio de 3-dimensiones; la generalización a N -dimensiones es inmediata y no nos ocuparemos de ella.

Sean x^1, x^2, x^3 las coordenadas de un punto en el espacio de 3-dimensiones. Los puntos correspondientes a todos los valores posibles de las coordenadas forman el espacio 3-dimensional.

Se considera ahora una transformación en dicho espacio, de tal manera que

$$\tilde{x}^i = \phi^i(x^1, x^2, x^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

donde las funciones ϕ^i son univalueadas, continuas y definen un nuevo sistema de coordenadas $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$, además las funciones ϕ^i son independientes. Se requiere también que la transformación tenga inverso, y la condición necesaria y suficiente para que ello ocurra es que el Jacobiano de la transformación no se anule, es decir

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \right| \neq 0, \quad (2.2)$$

si se cumple la ecuación (2.2) podemos estar seguros de que se puede escribir,

$$x^i = \psi^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

A continuación se usarán algunas definiciones que nos serán útiles para trabajar, a reserva de que más adelante se justifiquen apropiadamente algunas de sus propiedades.

2.1.1. Convención de suma

Los índices latinos toman valores $i = 1, 2, 3$ y, si un índice está repetido en un término dentro de una expresión matemática, ésto indica que hay una suma sobre todos valores de dicho índice. Como ejemplo tomemos la expresión

$$a^i x_i = \sum_{i=1}^{i=3} a^i x_i = a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 \quad (2.4)$$

Un índice repetido se llama índice mudo y puede reemplazarse por cualquier otro, esto es

$$a^i x_i = a^m x_m \quad (2.5)$$

2.1.2. Delta de Kronecker

Se define la delta de Kronecker como un objeto matemático que tiene las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \delta_j^k &= 1, & j &= k \\ \delta_j^k &= 0, & j &\neq k \end{aligned} \quad (2.6)$$

de manera inmediata vemos que:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^k \quad (2.7)$$

ya que las coordenadas son independientes, también

$$\delta_j^k A^j = A^k \quad (2.8)$$

Ejemplos

Ejercicios con la delta de Kronecker y la convención de suma

$$1. \delta_i^i = \sum_{i=1}^3 \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3$$

$$2. \delta_j^i \delta_k^j = \delta_1^i \delta_k^1 + \delta_2^i \delta_k^2 + \delta_3^i \delta_k^3 = \delta_k^i$$

3. Mostrar que:

$$\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^j} + \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^3} \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^j} = \delta_j^k$$

esta última expresión se obtiene haciendo uso de la regla de la cadena.

2.2. Vectores contravariantes

Se dice que un conjunto de 3 funciones A^i de las coordenadas x^i son las componentes de un vector contravariante si, al efectuar una transformación del sistema de coordenadas, las funciones A^i se transforman de acuerdo con la regla siguiente:

$$\tilde{A}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} A^j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Como ejemplo se calcula la diferencial $d\tilde{x}^i$ y vemos que

$$d\tilde{x}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j \quad (2.10)$$

y de inmediato notamos que dx^i forman las componentes de un vector contravariante. (Vector tangente a una curva).

2.3. Vectores covariantes

Un conjunto de 3 funciones A_i de las coordenadas x^i son las componentes de un vector covariante si, al efectuar una transformación de coordenadas, se transforman de acuerdo con la regla siguiente:

$$\tilde{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} A_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

un ejemplo de este tipo de vector lo da el gradiente de una función escalar f , ya que

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} (\nabla f)_j = (\tilde{\nabla} f)_i. \quad (2.12)$$

Utilizando las propiedades de la delta de Kronecker, las ecuaciones anteriores pueden invertirse, por ejemplo si tomamos la ecuación (2.9) y la multiplicamos por $\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}$ y sumamos sobre i , tenemos

$$\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{A}^i = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} A^j = \delta_j^k A^j = A^k \quad (2.13)$$

En resumen, para un vector contravariante tenemos que:

$$\tilde{A}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} A^j, \quad A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{A}^i. \quad (2.14)$$

A su vez, para un vector covariante multiplicamos la ecuación (2.11) por $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}$ y sumamos sobre i ,

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \tilde{A}_i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} A_j = \delta_k^j A_j = A_k \quad (2.15)$$

con esto se tiene como resumen:

$$\tilde{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} A_j, \quad A_k = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \tilde{A}_i. \quad (2.16)$$

Las transformaciones de vectores contravariantes y covariantes forman grupo.

2.3.1. Invariantes

Es posible que existan funciones de las coordenadas que ante una transformación permanezcan invariantes $I = \tilde{I}$ y se llaman escalares. Algunos ejemplos son:

Sean A^i y B_i las componentes de un vector contravariante y uno covariante respectivamente, la cantidad $A^i B_i$ que se conoce como producto escalar es un invariante. Para demostrar esta afirmación hacemos lo siguiente

$$\tilde{A}^i \tilde{B}_i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} B_k = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} A^j B_k = \delta_j^k A^j B_k = A^j B_j \quad (2.17)$$

es decir que, al sustituir las reglas de transformación, se obtiene:

$$\tilde{A}^i \tilde{B}_i = A^i B_i \implies \text{queda invariante} \implies \text{es un escalar} \quad (2.18)$$

2.4. Tensores de segundo orden

Si se tienen 3^2 (N^2 para un espacio N -dimensional) funciones A^{ij} que, ante una transformación de las coordenadas, se transforman de acuerdo con la regla:

$$\tilde{A}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} \quad (2.19)$$

se dice que forman las componentes de un tensor contravariante de segundo orden. De manera similar, A_{ij} forman las componentes de un tensor covariante de segundo orden si se transforman de acuerdo con:

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} A_{kl} \quad (2.20)$$

Para tensores de segundo orden también es posible definir un tensor mixto, en este caso la regla de transformación es:

$$\tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} A_l^k \quad (2.21)$$

Notemos que la delta de Kronecker, que se introdujo en la ec. (2.6), es un tensor mixto de segundo orden, para mostrarlo se usan las reglas de transformación, si $A_l^k = \delta_l^k$ se tiene que

$$\tilde{A}_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \delta_l^k = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{\delta}_j^i = \delta_j^i \quad (2.22)$$

Es decir, la delta de Kronecker es un tensor mixto de segundo orden y además en cualquier sistema de coordenadas sigue formando una delta. Dadas las reglas de transformación, vemos que es posible construir tensores de orden superior en la forma

$$\tilde{A}_{r_1 r_2 \dots r_p}^{u_1 u_2 \dots u_s} = \frac{\partial \tilde{x}^{u_1}}{\partial x^{t_1}} \frac{\partial \tilde{x}^{u_2}}{\partial x^{t_2}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{u_s}}{\partial x^{t_s}} \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \tilde{x}^{r_1}} \frac{\partial x^{q_2}}{\partial \tilde{x}^{r_2}} \dots A_{q_1 q_2 \dots q_p}^{t_1 t_2 \dots t_s}, \quad (2.23)$$

de manera que $\tilde{A}_{r_1 r_2 \dots r_p}^{u_1 u_2 \dots u_s}$ es un tensor de orden $s + p$ mixto contravariante en s índices y covariante en p índices.

2.4.1. Propiedades de simetría en tensores de segundo orden

El orden en que se colocan los índices de un tensor es importante, ya que depende de las propiedades del tensor el que dichos índices puedan o no intercambiarse. Un tensor de segundo orden es simétrico si $A^{ij} = A^{ji}$ y es antisimétrico cuando $A^{ij} = -A^{ji}$. Vamos a demostrar que las propiedades de simetría se preservan al efectuar una transformación del sistema de coordenadas

$$\tilde{A}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} A^{kl} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} (\pm A^{lk}) = \pm \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} A^{lk} = \pm \tilde{A}^{ji}. \quad (2.24)$$

Lo mismo sucede para un tensor covariante en los dos índices. Usualmente no se pueden definir propiedades de simetría para tensores mixtos, sin embargo la delta de Kronecker sí es un tensor simétrico respecto de sus índices. En el caso de tensores de segundo orden el número máximo de componentes diferentes es: $\frac{1}{2}N(N+1)$ para un tensor simétrico en N -dimensiones y $\frac{1}{2}N(N-1)$ para un tensor antisimétrico. Si un tensor está definido para todos los puntos de una curva, una región o para todo el espacio, se dice que se tiene un campo tensorial.

Ejercicio

A_{ij} es un tensor antisimétrico, probar que se cumple la relación siguiente:

$$(\delta_j^i \delta_l^k + \delta_l^i \delta_j^k) A_{ik} = 0 \quad (2.25)$$

Solución: La antisimetría nos dice que $A_{ik} = -A_{ki}$.

$$\begin{aligned} (\delta_j^i \delta_l^k + \delta_l^i \delta_j^k) A_{ik} &= \delta_j^i A^{il} + \delta_l^i A^{ij} = \\ &= A^{jl} + A^{lj} = A^{jl} - A^{jl} = 0. \end{aligned}$$

En el primer paso se realizó la suma sobre el índice k y se tomó en cuenta la ec. (2.8). Posteriormente se realizó la suma sobre el índice i y al final se utilizó la propiedad de antisimetría del tensor.

2.5. Operaciones con tensores

A continuación se definen algunas de las operaciones que pueden realizarse con los tensores.

2.5.1. Adición

Una combinación lineal de tensores del mismo tipo y orden multiplicados por escalares es un tensor del mismo orden y tipo. Si A_{jk}^i , B_{jk}^i son dos tensores mixtos contravariantes de primer orden y covariantes de segundo orden y λ y μ son escalares, entonces el tensor formado por:

$$\lambda A_{jk}^i + \mu B_{jk}^i = C_{jk}^i \quad (2.26)$$

también es un tensor del mismo orden y tipo. Esto puede hacerse con cualquier tipo de tensor siempre y cuando todos los términos sean del mismo tipo y orden. Como caso especial de esta operación vemos que al utilizar la ecuación (2.26) y las propiedades de simetría, podemos decir que un tensor covariante o contravariante de segundo orden se escribe como una combinación de un tensor simétrico y uno antisimétrico, es decir

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) \quad (2.27)$$

donde el primer sumando es un tensor simétrico y el segundo es antisimétrico.

2.5.2. Producto externo

Se tienen dos tensores A_{mn}^{ijk} y B_{qp}^r , con ellos se puede formar el producto externo de la manera siguiente:

$$C_{mnqp}^{ijk r} = A_{mn}^{ijk} B_{qp}^r \quad (2.28)$$

que es un tensor cuyo orden es la suma de los órdenes de los tensores factores y el tipo (o caracter) de sus índices se toma de acuerdo con el tipo de los tensores factores. Para el ejemplo escrito en la ecuación (2.28) el primer factor es un tensor de orden 5 con tres índices contravariantes y dos covariantes; el segundo factor es un tensor de tercer orden con un índice contravariante y dos covariantes. El producto es un tensor de orden 8 con cuatro índices contravariantes y cuatro covariantes. Para demostrar que efectivamente el tensor producto cumple con estas características, se utilizan las reglas de transformación correspondientes.

2.5.3. Contracción

Se tiene un tensor mixto cualquiera A_{lmn}^{ij} , la contracción se forma tomando la suma sobre un par de índices, uno contravariante y uno covariante, A_{lmj}^{ij} es un tensor de dos órdenes menos que el original. Debemos notar que con el tensor que hemos dado también se pueden formar las contracciones A_{lij}^{ij} , A_{ijl}^{ij} , etc. Cada uno de estos tensores corresponde a una contracción de los factores y son tensores diferentes. Vamos a tomar un caso y demostrar que efectivamente el tensor resultado de una contracción es un tensor de orden menor. Para ello se escribe la ley de transformación del tensor original

$$\tilde{A}_{pqr}^{st} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^r} A_{lmn}^{ij}. \quad (2.29)$$

Ahora vamos a tomar la contracción tomando $r = t$ y sumando sobre t ,

$$\tilde{A}_{pqt}^{st} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^q} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^t} A_{lmn}^{ij}, \quad (2.30)$$

pero sabemos que

$$\frac{\partial \tilde{x}^t}{\partial x^j} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^t} = \delta_j^n, \quad (2.31)$$

con lo cual

$$\tilde{A}_{pqt}^{st} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^q} \delta_j^n A_{lmn}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^q} A_{lmj}^{ij} = \tilde{C}_{pq}^{s} \quad (2.32)$$

El tensor que ha resultado de la contracción obedece una ley de transformación que corresponde a un tensor dos ordenes menor. En general, si se tiene un tensor mixto de orden r , la contracción es un tensor de orden $r - 2$. El tensor que nos ha resultado de la contracción con la que se ha ejemplificado esta operación todavía puede contraerse, llamemos C_{lm}^i al tensor resultante y lo contraemos una vez más haciendo $i = m$ y sumando sobre i , aplicando el mismo método vemos que:

$$\tilde{C}_{pq}^{s} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^q} C_{lm}^i \quad (2.33)$$

es la ley de transformación, ahora contraemos haciendo $q = s$ y sumando,

$$\tilde{C}_{ps}^{s} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^s} C_{lm}^i = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} \delta_i^m C_{lm}^i = \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^p} C_{li}^i \quad (2.34)$$

ya que

$$\frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^s} = \delta_i^m \quad (2.35)$$

La ecuación (2.34) nos muestra que el tensor resultante de la nueva contracción se transforma como un tensor de primer orden covariante. Esto significa que, después de dos contracciones, el tensor de orden 5 se ha reducido a un tensor de orden uno. Éste ya no puede contraerse, puesto que para efectuar la contracción necesitamos al menos un tensor mixto de segundo orden. Si el tensor que se contrae es de orden par es posible llegar por medio de contracciones hasta un escalar (tensor de orden cero). Por ejemplo, $\delta_i^i = 3$ es un escalar que se ha formado al contraer una vez el tensor mixto δ_j^i (ver el ejercicio 1). Ciertamente, la forma en que hemos escogido hacer la contracción no es única; a partir del tensor A_{lmn}^{ij} se pueden formar los tensores siguientes: A_{lmj}^{ij} , A_{ljn}^{ij} , A_{jmn}^{ij} , A_{lmi}^{ij} , A_{lin}^{ij} , A_{imn}^{ij} , etc, efectuando una sola contracción.

2.5.4. Producto interno

El producto interno resulta de combinar una multiplicación o producto externo con una contracción. Se tienen dos tensores A_k^{ij} , B_{mns}^l ; al multiplicarlos externamente se tiene $C_{kmns}^{ijl} = A_k^{ij} B_{mns}^l$. Si ahora efectuamos una contracción de un índice del tensor A_k^{ij} con uno del tensor B_{mns}^l , se forma un tensor de menor orden que se llama producto interno; existen varias opciones:

$$A_k^{ij} B_{mnj}^l, \quad A_k^{ij} B_{mjs}^l, \quad A_k^{ij} B_{jns}^l, \quad A_k^{ij} B_{mns}^k, \text{ etc.} \quad (2.36)$$

También pueden hacerse dos contracciones, por ejemplo:

$$A_k^{ij} B_{ijs}^l, \quad A_k^{ij} B_{mij}^l, \quad A_k^{ij} B_{mnj}^k, \text{ etc.} \quad (2.37)$$

Si el número de índices contravariantes y covariantes es el mismo, se puede formar un escalar al efectuar el número necesario de contracciones. Dos índices del mismo tipo no pueden contraerse, ya que en este caso el resultado no sería necesariamente un tensor.

2.6. Ley del cociente

Escencialmente establece un criterio mediante el cual podemos ver si un conjunto de funciones forman las componentes de un tensor. Ésto puede hacerse directamente usando las reglas de transformación, pero no siempre resulta práctico. Veamos qué nos dice la ley del cociente: Si se tienen N^p (N dimensiones del espacio en el cual se está trabajando) funciones de las x^i , éstas formarán las componentes de un tensor de orden p si el producto interno de ellas por un tensor arbitrario es un tensor. Para ejemplificar consideramos N^3 funciones A^{ijk} y queremos ver si forman las componentes de un tensor, de acuerdo con la ley del cociente si se cumple que

$$A^{ijk} B_{ij}^p = C^{kp} \quad (2.38)$$

donde C^{kp} es un tensor del orden indicado y B_{ij}^p es un tensor arbitrario, entonces efectivamente A^{ijk} es un tensor de tercer orden contravariante.

Vamos a mostrarlo:

En el sistema transformado tendremos que

$$\tilde{A}^{ijk} \tilde{B}_{ij}^p = \tilde{C}^{kp}, \quad (2.39)$$

ahora sustituimos las reglas de transformación de los tensores conocidos, con el objeto de investigar cuáles son las reglas de transformación de las cantidades A^{ijk} .

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{ij}^p &= \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} B_{lm}^q \\ \tilde{C}^{kp} &= \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^s} C^{rs}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Se sustituye en la ecuación (2.39) y se iguala a cero

$$\tilde{A}^{ijk} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} B_{lm}^q - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^s} A^{ijr} B_{ij}^s = 0. \quad (2.41)$$

En el último término se cambian los índices mudos $s \rightarrow q$, $i \rightarrow l$ y $j \rightarrow m$, de manera que

$$\tilde{A}^{ijk} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} B_{lm}^q - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} A^{lmr} B_{lm}^q = 0. \quad (2.42)$$

Ahora se factoriza la cantidad $\frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} B_{lm}^q$

$$\frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} \left[\tilde{A}^{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr} \right] B_{lm}^q = 0. \quad (2.43)$$

Multiplicamos por $\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^p}$ y sumamos sobre p

$$\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} \left[\tilde{A}^{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr} \right] B_{lm}^q = 0. \quad (2.44)$$

Nos damos cuenta de que: $\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^q} = \delta_q^n$ y sumamos sobre q

$$\left[\tilde{A}^{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr} \right] B_{lm}^n = 0. \quad (2.45)$$

Ahora bien, como el tensor B_{lm}^n es completamente arbitrario, la ecuación solamente se satisface si el paréntesis es nulo

$$\tilde{A}^{ijk} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} - \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr} = 0, \quad (2.46)$$

multiplicamos por el producto $\frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m}$ y sumamos sobre los índices l, m

$$\frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{A}^{ijk} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr}, \quad (2.47)$$

pero $\frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^i} = \delta_i^s$ y $\frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} = \delta_j^p$, de manera que

$$\delta_i^s \delta_j^p \tilde{A}^{ijk} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr}. \quad (2.48)$$

En el primer miembro sumamos sobre los índices i, j , con lo cual obtenemos

$$\tilde{A}^{spk} = \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^m} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^r} A^{lmr}, \quad (2.49)$$

que es la regla de transformación de un tensor de tercer orden contravariante en todos sus índices.

2.7. El tensor fundamental

Si se consideran 2 puntos vecinos en el espacio $P(x^i)$ y $Q(x^i + dx^i)$, la distancia ds entre ellos está definida por

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.50)$$

donde g_{ij} son funciones de las x^i con la condición de que $g = |g_{ij}| \neq 0$. Además $(ds)^2$ es un invariante y de acuerdo con la ley del cociente aplicada a la ecuación (2.50) tendríamos que $(ds)^2$ es un tensor de orden cero y $dx^i dx^j$ forma un tensor contravariante de orden 2, por lo cual g_{ij} es un tensor covariante de segundo orden, simétrico y se llama tensor fundamental del espacio; la forma cuadrática

de la ecuación (2.50) se llama métrica. Para el caso del espacio euclideo tridimensional se tiene

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.51)$$

de donde obtenemos que las componentes del tensor fundamental g_{ij} son $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$ y $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

La teoría de los tensores puede elaborarse aún más de lo que hemos hecho en esta introducción, pero para el objetivo de este libro introductorio de Elasticidad no es necesario y entonces comenzaremos a particularizar nuestro tratamiento.

2.8. Tensores cartesianos

En primer lugar se limita el tipo de transformaciones que pueden efectuarse en el sistema de coordenadas al caso de transformaciones ortogonales, que están definidas por las ecuaciones siguientes:

$$\tilde{x}^i = a_m^i x^m + b^i, \quad (2.52)$$

donde las cantidades a_m^i y b^i son constantes, que no necesariamente forman tensores y satisfacen la relación siguiente:

$$a_r^i a_m^i = \delta_m^r. \quad (2.53)$$

A continuación se demostrará que para este tipo de transformaciones las componentes contravariantes y covariantes de un tensor coinciden. Para mostrarlo es necesario usar la transformación inversa de (2.52); con el objeto de construirla se toma la ec.(2.52), se multiplica por a_r^i y se suma sobre el índice i ,

$$a_r^i \tilde{x}^i = a_r^i a_m^i x^m + a_r^i b^i \quad \text{pero} \quad a_r^i a_m^i = \delta_m^r \quad (2.54)$$

de manera que

$$a_r^i \tilde{x}^i = \delta_m^r x^m + a_r^i b^i = x^r + a_r^i b^i \quad (2.55)$$

de donde resulta

$$x^r = a_r^i \tilde{x}^i - a_r^i b^i, \quad (2.56)$$

a partir de la transformación directa dada en la ecuación (2.52) se calcula

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = a_m^i \delta_j^m = a_j^i, \quad (2.57)$$

y de la transformación inversa (2.56), tenemos

$$\frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^j} = a_r^i \delta_j^i = a_r^j, \quad (2.58)$$

si ahora se cambian los índices $j \rightarrow i$ y $r \rightarrow j$, se obtiene que

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = a_j^i \quad \text{por lo cual} \quad \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = a_j^i. \quad (2.59)$$

Esta ecuación dice que las leyes de transformación contravariantes y covariantes coinciden, de manera que si se usan transformaciones ortogonales no tiene sentido distinguir componentes contravariantes y covariantes. De ahora en adelante sólo consideraremos este tipo de transformaciones y, por lo tanto, ya no haremos la distinción entre componentes contravariantes y covariantes. Cuando ésto sucede se dice que los tensores son “Tensores Cartesianos”. En este caso las ecuaciones de transformación del sistema de coordenadas se pueden escribir como sigue:

$$\tilde{x}_i = a_{ij}x_j + b_j. \quad (2.60)$$

La transformación (2.60) se puede ver como dos transformaciones, una en la que $\tilde{x}_i = x'_i + b_i$ y entonces b_i corresponde a una traslación. Por otra parte, la transformación $x'_i = a_{ij}x_j$ sujeta a las condiciones $a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$ nos permite distinguir dos opciones descritas por $|a_{ij}| = \pm 1$ ¹. Éstas corresponden a rotaciones e inversiones, cuando el determinante es positivo la transformación es propia y cuando es negativo es impropia; en este caso la ley de transformación de los tensores se acompaña del valor del determinante.

Los tensores cartesianos pueden representarse de manera matricial, esto hace que el trabajar con ellos se facilite con el uso del Álgebra Lineal. Tomemos el caso de tensores cartesianos de segundo orden en el espacio 3-dimensional, entonces las nueve componentes del tensor se representan por una matriz 3×3 donde las componentes A_{ij} del tensor pasan a ser las componentes de la matriz que etiquetaremos como $\underline{A}$. A su vez, para los tensores de primer orden (vectores) se puede usar la notación vectorial que es bien conocida. Tomando esto en cuenta, ahora pueden escribirse las reglas de transformación correspondientes a vectores cartesianos en la forma

$$\mathbf{x}' = \underline{A} \cdot \mathbf{x} \quad \text{o bien} \quad x'_i = A_{ij}x_j, \quad (2.61)$$

y para los tensores cartesianos de segundo orden se tiene que

$$\underline{T}' = \underline{A} \cdot \underline{T} \cdot \underline{A}^t \quad \text{o bien} \quad T'_{ij} = A_{ik}T_{kl}A^t_{lj}, \quad (2.62)$$

donde A^t_{lj} corresponden a los elementos de la matriz transpuesta de $\underline{A}$.

2.9. Tensores de permutación

Para un espacio tridimensional y tensores cartesianos es conveniente definir el tensor de permutación como sigue:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{los valores de } ijk \text{ son una permutación par de } 123 \\ -1, & \text{los valores de } ijk \text{ son una permutación impar de } 123 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.63)$$

¹ la notación $|a_{ij}|$ significa tomar el determinante de la matriz cuyos elementos son los a_{ij}

de acuerdo con esta definición tenemos que:

$$\begin{aligned}\epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1, \\ \text{todos los demás elementos se anulan.}\end{aligned}\tag{2.64}$$

Usando las reglas de transformación es posible demostrar que las componentes de ϵ_{ijk} forman un tensor de tercer orden y debemos notar que es completamente antisimétrico, ya que cualquier intercambio de dos de sus índices causa un cambio de signo. Utilizando este tensor pueden reescribirse varias de las expresiones conocidas en el cálculo vectorial, por ejemplo

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \longrightarrow c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k,\tag{2.65}$$

notemos que c_i resulta de contraer dos veces el tensor ϵ_{ijk} con el producto externo $a_j b_k$ de los vectores a_j y b_k . También

$$\lambda = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \longrightarrow \lambda = \epsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \epsilon_{ijk} c_i a_j b_k,\tag{2.66}$$

donde tenemos 3 contracciones del tensor ϵ_{ijk} con el producto externo del tensor $a_j b_k c_i$, para formar el escalar λ . Queda al lector verificar explícitamente que estas relaciones son válidas.

2.10. Valores y direcciones principales

Consideraremos tensores simétricos de segundo orden en un espacio tridimensional. Sea T_{ij} un tensor simétrico de segundo orden y sea n_j un vector unitario, si sucede que

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i,\tag{2.67}$$

entonces n_i es una dirección principal de T_{ij} y corresponde al valor principal λ . Un tensor de segundo orden en un espacio tridimensional tiene tres direcciones principales asociadas a tres valores principales, que en algunos casos pueden ser iguales. La ecuación que define a las direcciones principales puede escribirse en la forma siguiente

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0.\tag{2.68}$$

Para que esta ecuación tenga solución no trivial necesitamos que el determinante del sistema se anule, determinando con ello a los valores principales, es decir

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0,\tag{2.69}$$

vamos a desarrollar el determinante usando el resultado de los ejercicios; primero se escribe el determinante como una contracción triple de ϵ_{ijk} con $A_{1i} A_{2j} A_{3k}$,

$$\det(A_{ij}) = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}\tag{2.70}$$

y ahora se aplica esta expresión al cálculo de la ec. (2.70), entonces

$$\begin{aligned}
 \det(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) &= \epsilon_{ijk} (T_{1i} - \lambda \delta_{1i}) (T_{2j} - \lambda \delta_{2j}) (T_{3k} - \lambda \delta_{3k}) = \\
 &= \epsilon_{ijk} (T_{1i} - \lambda \delta_{1i}) (T_{2j} T_{3k} - \lambda T_{2j} \delta_{3k} - \lambda \delta_{2j} T_{3k} + \lambda^2 \delta_{2j} \delta_{3k}) = \\
 &= \epsilon_{ijk} \left[T_{1i} T_{2j} T_{3k} - \lambda (T_{1i} T_{2j} \delta_{3k} + T_{1i} \delta_{2j} T_{3k} + \delta_{1i} T_{2j} T_{3k}) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^2 (T_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} + \delta_{1i} T_{2j} \delta_{3k} + \delta_{1i} \delta_{2j} T_{3k}) - \lambda^3 \delta_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} \right], \quad (2.71)
 \end{aligned}$$

agrupamos en potencias de λ

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon_{ijk} \left[T_{1i} T_{2j} T_{3k} - \lambda (T_{1i} T_{2j} \delta_{3k} + T_{1i} \delta_{2j} T_{3k} + \delta_{1i} T_{2j} T_{3k}) \right. \\
 &\quad \left. + \lambda^2 (T_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} + \delta_{1i} T_{2j} \delta_{3k} + \right. \\
 &\quad \left. \delta_{1i} \delta_{2j} T_{3k}) - \lambda^3 \delta_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} \right]. \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

Desarrollamos las sumas indicadas por los índices repetidos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &= \det(T_{ij}) - \lambda [\epsilon_{ij3} T_{1i} T_{2j} + \epsilon_{i2k} T_{1i} T_{3k} + \epsilon_{i1k} T_{2j} T_{3k}] \\
 &\quad + \lambda^2 [\epsilon_{i23} T_{1i} + \epsilon_{1j3} T_{2j} + \epsilon_{12k} T_{3k}] - \lambda^3.
 \end{aligned}$$

Notar que el término en λ^3 queda multiplicado por el determinante de un tensor unidad, entonces

$$\begin{aligned}
 &= \det(T_{ij}) - \lambda [\epsilon_{1j3} T_{11} T_{2j} + \epsilon_{2j3} T_{12} T_{2j} + \epsilon_{i21} T_{1i} T_{31} \\
 &\quad + \epsilon_{i23} T_{1i} T_{33} + \epsilon_{1j2} T_{2j} T_{32} + \epsilon_{1j3} T_{2j} T_{33} +] \\
 &\quad + \lambda^2 [T_{11} + T_{22} + T_{33}] - \lambda^3
 \end{aligned}$$

además en estas expresiones sólo se han escrito los términos que no se anulan

$$\begin{aligned}
 &= \det(T_{ij}) - \lambda [T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} - T_{13} T_{31} + T_{11} T_{33} - T_{23} T_{32} + \\
 &\quad T_{22} T_{33}] + \lambda^2 Tr(T_{ij}) - \lambda^3. \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

En resumen tenemos

$$\det(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = -\lambda^3 + \lambda^2 Tr(T_{ij}) - \lambda \underbrace{(T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji})}_{\Delta} + \det(T_{ij}), \quad (2.74)$$

donde $Tr(T_{ij}) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ es la traza del tensor, que está definida como la suma de los elementos diagonales. Las cantidades

$$I_1 = Tr(T_{ij}) \quad (2.75)$$

$$I_2 = T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji} \quad i \neq j \quad (2.76)$$

$$I_3 = \det(T_{ij}), \quad (2.77)$$

son cantidades escalares, invariantes ante transformaciones y se llaman “Invariantes del tensor T_{ij} ”. Esto significa que la ecuación que determina los valores propios del tensor se puede escribir en términos de sus invariantes

$$\lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3 = 0. \quad (2.78)$$

De esta manera vemos que los valores principales, soluciones de la ec. (2.78), son combinaciones de los invariantes del tensor. La solución de esta ecuación nos da los tres valores propios y además, usando la ec. (2.68), podemos encontrar las direcciones principales.

Ahora bien, una vez que se han encontrado los valores principales es posible, mediante una transformación ortogonal, escribir al tensor en una representación diagonal, donde sus elementos diagonales son precisamente los valores principales, de manera que

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

donde $\mathcal{T}$ indica al tensor T_{ij} escrito en su forma diagonal.² Debido a que cada una de las raíces λ satisfacen la ec.(2.78), el tensor en su forma diagonal satisface la ecuación

$$\mathcal{T}^3 - I_1 \mathcal{T}^2 + I_2 \mathcal{T} - I_3 \mathcal{I} = 0, \quad (2.80)$$

donde $\mathcal{I}$ es el tensor unidad y la ecuación (2.80) se conoce como “Ecuación de Hamilton-Cayley”. La ecuación de Hamilton-Cayley nos permite escribir $\mathcal{T}^3 = I_1 \mathcal{T}^2 - I_2 \mathcal{T} + I_3 \mathcal{I}$, es decir, la tercer potencia del tensor en su forma diagonal es una combinación de $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}$ y el tensor unidad $\mathcal{I}$. Si ahora se multiplica la ecuación (2.80) por $\mathcal{T}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^4 - I_1 \mathcal{T}^3 + I_2 \mathcal{T}^2 - I_3 \mathcal{T} &= 0 \\ \text{y sustituyendo } \mathcal{T}^3, \\ \mathcal{T}^4 - I_1(I_1 \mathcal{T}^2 - I_2 \mathcal{T} + I_3 \mathcal{I}) + I_2 \mathcal{T}^2 - I_3 \mathcal{T} &= 0, \\ \text{nos queda} \\ \mathcal{T}^4 = (I_1^2 - I_2) \mathcal{T}^2 + (-I_1 I_2 + I_3) \mathcal{T} + I_1 I_3 \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

La ec. (2.81) nos indica que la cuarta potencia del tensor en forma diagonal también queda escrita en términos de $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{I}$. Cuando esto se hace repetidas veces vemos que cualquier potencia positiva de $\mathcal{T}$ se puede expresar en términos de $\mathcal{T}^2$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{I}$ y los invariantes del tensor T_{ij} .

2.11. Problemas

- 1.- A partir del análisis del comportamiento de un tensor de segundo orden ante rotaciones de $\frac{\pi}{2}$ y π alrededor de los ejes coordenados, mostrar que un tensor

²A partir de este punto usaremos esta notación para indicar un tensor escrito en forma diagonal.

“isótropo” de segundo orden debe ser un múltiplo del tensor δ_{ij} .

- 2.- Demostrar que las propiedades de simetría de un tensor covariante de segundo orden se preservan al efectuar una transformación del sistema de coordenadas, es decir que si $A_{ij} = \pm A_{ji}$ entonces $\tilde{A}_{ij} = \pm \tilde{A}_{ji}$.
- 3.- Utilizando las reglas de transformación de los tensores demuestre que en la ec. (2.26) C_{jk}^i es un tensor contravariante en i y covariante en j, k .
- 4.- Mostrar que el tensor producto externo de los tensores A_{ijk}^l con B_p^q ; C_{ijkp}^{lq} forma un tensor con dos índices contravariantes y 4 covariantes.
- 5.- Demuestre que la contracción A_{ijk}^{lm} del tensor A_{ijkl}^{nm} es un tensor de orden 4 con 3 índices covariantes y un índice contravariante.
- 6.- Demuestre que la contracción A_{ijk}^{ijk} del tensor A_{ijk}^{lmn} es un escalar.
- 7.- La ecuación $K_{ij}A_{jk} = B_{ik}$ ocurre para dos tensores de segundo orden, A_{ij} y B_{ik} arbitrarios. Mostrar que K_{ij} también es un tensor de segundo orden (Ver sección 2.6).
- 8.- Mostrar que un arreglo cuadrado antisimétrico de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & -C_{13} \\ -C_{12} & 0 & C_{23} \\ -C_{13} & -C_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

define al pseudovector $C_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}C_{jk}$.

- 9.- Encontrar los valores propios de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

- 10.- Calcular $\nabla \cdot \underline{T}$ para el tensor $\underline{T} = \frac{1}{r} \left(\underline{I} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right)$, donde $\underline{I}$ es un tensor unidad, $\mathbf{r}$ el vector de posición y r su magnitud. La divergencia del campo tensorial $\underline{T}$ es un operador que se escribe como: $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$, el tensor $T_{ij} = \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right)$ y por último $r^2 = x_i x_i$.

- 11.- Para el tensor

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

encuentre $\underline{T}'$ en un sistema rotado $\frac{\pi}{4}$ con respecto al eje x .

- 12.- Para un tensor $\underline{T}$ arbitrario, demostrar que $Tr(\underline{T}^2)$ y $Tr(\underline{T}^3)$ son combinaciones de los invariantes I_1, I_2, I_3 de $\underline{T}$.

Capítulo 3

Análisis de los Esfuerzos

En este capítulo iniciaremos propiamente el estudio de la Elasticidad, caracterizando los elementos con los cuales se va a describir el comportamiento de un medio continuo.

3.1. El Vector de esfuerzos

En Elasticidad los sistemas que se estudian son macroscópicos y están formados por moléculas, es decir por elementos discretos. Sin embargo, los detalles del comportamiento de estos elementos discretos no interesan en la descripción fenomenológica que vamos a realizar y entonces consideramos los sistemas como medios continuos. Esto significa que al hablar de un punto en el sistema de hecho estamos refiriéndonos a un elemento de volumen ó de área, según el caso, que es grande comparado con el tamaño de las moléculas y pequeño desde el punto de vista macroscópico.

Para comenzar vamos a estudiar la Estática, es decir las condiciones de equilibrio de un cuerpo o sistema de cuerpos. Consideramos que entre los elementos de un medio continuo están presentes las fuerzas internas; ahora bien, por la tercera ley de Newton, si el cuerpo está en equilibrio todas las fuerzas internas se equilibran. Las fuerzas internas representan la interacción entre moléculas del cuerpo y de hecho aseguran la existencia del cuerpo como tal, además también están presentes cuando no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. Bajo la acción de fuerzas externas el cuerpo se deforma y ello da lugar a fuerzas internas adicionales.

La Estática trabaja con fuerzas externas aplicadas a un cuerpo y entonces vamos a convertir las fuerzas internas en externas. Para ello vamos a imaginar un cuerpo cortado en dos partes, una de las cuales (B) se separa del resto (A); cuando lo hacemos las fuerzas internas quedan desbalanceadas, de manera que si queremos recuperar el equilibrio debemos aplicar una fuerza externa igual a la suma de todas las fuerzas que quedaron desbalanceadas. En la figura 3.1 se muestra la separación del cuerpo en cuestión y prestamos atención a la situación

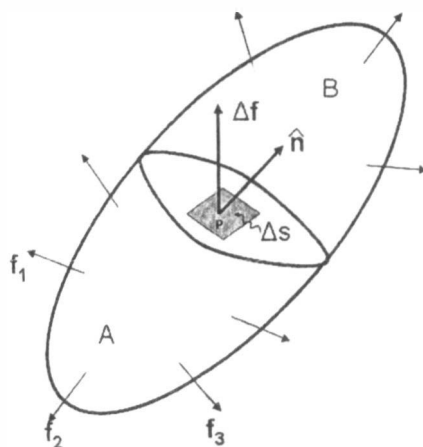


Figura 3.1: Elemento de volumen que al ser seccionado presenta fuerzas internas desbalanceadas.

en el punto P que está en la sección A del cuerpo. Para este punto consideramos el área ΔS , la normal representada por $\hat{n}$ y Δf es la resultante de las fuerzas que quedaron desbalanceadas como consecuencia del corte y de haber retirado la sección B del cuerpo. Ahora consideramos la componente $(\Delta f)_i$ de la fuerza total que actúa sobre el elemento de área ΔS , cuya normal exterior es $\hat{n}$, entonces $\frac{(\Delta f)_i}{\Delta S}$ es la componente i del esfuerzo promedio producido por las fuerzas internas en el área ΔS . Si tomamos el límite en que $\Delta S \rightarrow 0$, vamos a definir al vector de esfuerzos como

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{(\Delta f)_i}{\Delta S} = t_i^{\hat{n}}. \quad (3.1)$$

El vector resultante de este procedimiento se llama “Vector de los esfuerzos” y el Principio de esfuerzos de Cauchy establece que dicho límite existe y, por lo tanto, el vector de esfuerzos está bien definido. Es importante notar que el vector de los esfuerzos corresponde al punto P y el área alrededor del punto P queda indicada a través del vector unitario $\hat{n}$. El vector de esfuerzos en P depende del área de corte, por lo tanto, dicho vector adquiere valores diferentes dependiendo de la orientación del corte. A su vez esto permite hablar de la distribución del vector de esfuerzos alrededor del punto P .

Unidades:

$$\text{Vector de esfuerzos} [t_i^{\hat{n}}] = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{M}{Lt^2}, \quad (3.2)$$

donde M , L y t indican unidades de masa, longitud y tiempo respectivamente.

3.2. Esfuerzos en un cuerpo

Consideremos un medio continuo y lo seccionamos cortando con un plano como se muestra en la figura (3.2). Separamos una de las partes y entonces las fuerzas internas quedan desbalanceadas; para recuperar el equilibrio necesitamos introducir fuerzas externas. Vamos a expresar el vector de los esfuerzos en

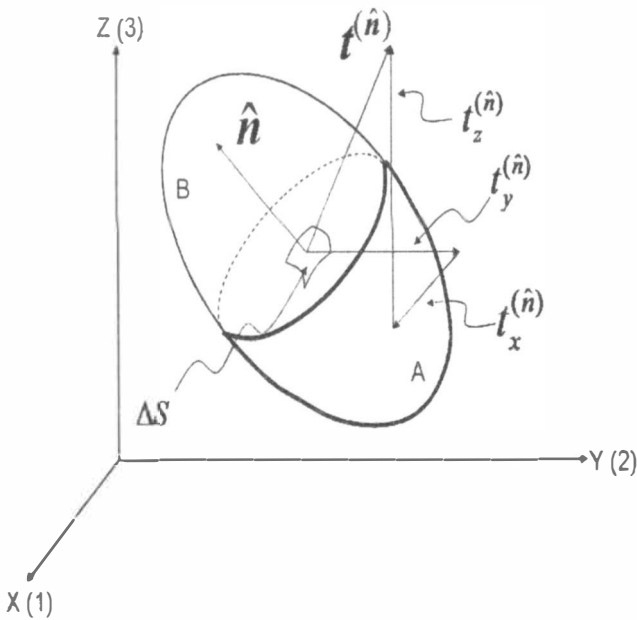


Figura 3.2: Vector de esfuerzos y sus componentes.

términos de sus componentes en un sistema de coordenadas rectangulares. En la figura 3.2 se separa la parte B del cuerpo y el vector $\hat{n}$ apunta hacia afuera; como ejemplo hemos dibujado el vector de esfuerzos y sus componentes en los ejes (x, y, z) . Es muy importante notar que tanto el vector de esfuerzos $\mathbf{t}^{\hat{n}}$ como sus componentes $t_x^{\hat{n}}, t_y^{\hat{n}}, t_z^{\hat{n}}$ están asociadas al área sobre la cual están actuando y, a su vez, ésta depende del corte que hicimos al separar la sección B del cuerpo. Si efectuamos un corte que pase por el mismo punto P del cuerpo, pero con otra inclinación, tanto el vector $\hat{n}$ como $\mathbf{t}^{\hat{n}}$ son diferentes.¹

En la figura 3.3 vemos la situación de los esfuerzos en la sección B del cuerpo con el que estamos trabajando. También hemos escrito las componentes del vector de los esfuerzos correspondiente. Debemos notar que si reunimos nuevamente a las secciones A y B del cuerpo original, éste deberá seguir en equilibrio; es por ello que para la sección B el vector de esfuerzos es el negativo del que corresponde a la sección A . Generalmente los cortes se hacen con planos

¹A lo largo de este libro se usará la notación (x, y, z) de manera equivalente a $(1, 2, 3)$ con el objeto de que el lector se familiarice con las notaciones usuales en este campo.

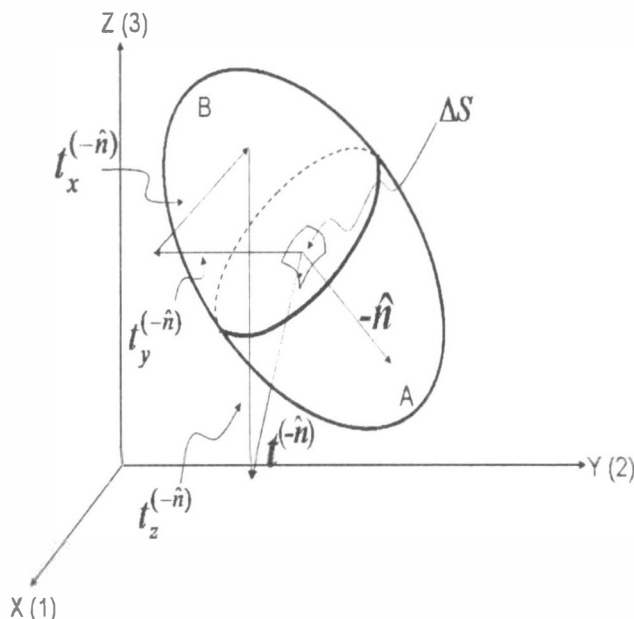


Figura 3.3: Vector de esfuerzos en la sección B del cuerpo.

paralelos a los planos del sistema de coordenadas y en este caso el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ coincidirá con $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ según el caso ó bien $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$. En las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se muestran los cortes y la notación que utilizaremos para las componentes correspondientes. En particular, en la figura 3.4 el corte es paralelo al plano (1, 3) y entonces $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_2$, a su vez el vector de esfuerzos tiene las componentes $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} = (t_1^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}, t_2^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}, t_3^{(\hat{\mathbf{e}}_2)})$. En este caso, la componente $t_2^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$ se llama esfuerzo “normal” y las componentes $t_1^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$ y $t_3^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$ son esfuerzos “cortantes”. A partir de las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 vemos que se están estableciendo notaciones equivalentes, de hecho los índices (1, 2, 3) podemos escribirlos como (x, y, z) . Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}}$. También estamos definiendo la notación en que $t_j^{\hat{\mathbf{e}}_i} = \sigma_{ij}$ y en la sección 3.3 discutiremos con detalle su significado.

En la figura 3.5 realizamos el corte con un plano paralelo al plano (2, 3), la sección transversal es perpendicular al vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_1$ y ahora el esfuerzo normal es $t_1^{\hat{\mathbf{e}}_1}$ y los esfuerzos cortantes son $t_2^{\hat{\mathbf{e}}_1}$ y $t_3^{\hat{\mathbf{e}}_1}$. De manera semejante hacemos un corte paralelo al plano (1, 2) y el resultado se muestra en la figura 3.6.

3.3. El Tensor de los esfuerzos

Todas las componentes del vector de esfuerzos y que corresponden a los diferentes vectores unitarios marcados en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se pueden arreglar

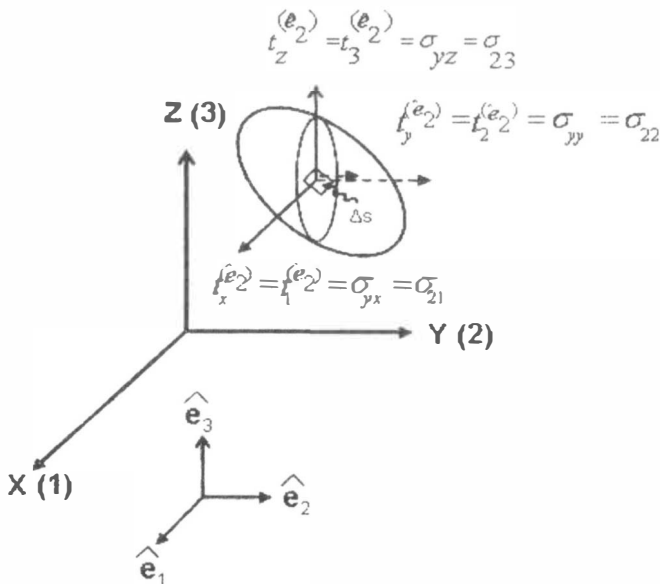


Figura 3.4: Las componentes marcadas son perpendiculares a la sección correspondiente y se llaman esfuerzos normales. Todos los demás son esfuerzos cortantes y están en el plano de ΔS . La sección se corta perpendicular a $\hat{e}_2$; esto significa que $\hat{n} \rightarrow \hat{e}_2$ y $\mathbf{t}^{(\hat{e}_2)}$ tiene tres componentes.

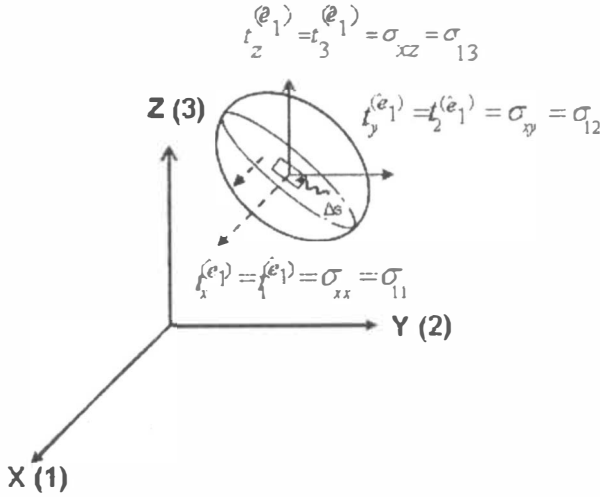


Figura 3.5: La sección se corta perpendicular al vector $\hat{e}_1$, esto significa que $\hat{n} \rightarrow \hat{e}_1$ y $\mathbf{t}^{(\hat{e}_1)}$ tiene tres componentes.

en un tensor de segundo orden, de la manera siguiente:

$$t_j^{\hat{e}_i} \equiv \sigma_{ij}, \quad (3.3)$$

donde σ_{ij} son las componentes de un tensor cartesiano que se conoce como “Tensor de esfuerzos” $\underline{\sigma}$, que en su representación matricial se escribe en la forma:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Los elementos de la diagonal reciben el nombre de “esfuerzos normales” y los elementos de fuera de la diagonal se conocen como “esfuerzos cortantes”. La figura 3.7 muestra las componentes de este tensor para un elemento de volumen en el medio continuo.

Si $t_j^{\hat{e}_i}$ apunta en la dirección positiva de $\hat{e}_i$, σ_{ij} es positiva. Note que $t_i^{\hat{e}_j}$ es la fuerza por unidad de área (esfuerzo) que actúa sobre un área perpendicular a $\hat{e}_j$ en la dirección de $\hat{e}_i$. Ahora nos preguntamos ¿Cuál es la relación entre el vector de esfuerzos $\mathbf{t}^{\hat{n}}$ y el tensor de esfuerzos $\underline{\sigma}$?

Con el objeto de ver con claridad la relación existente entre ellos considere-

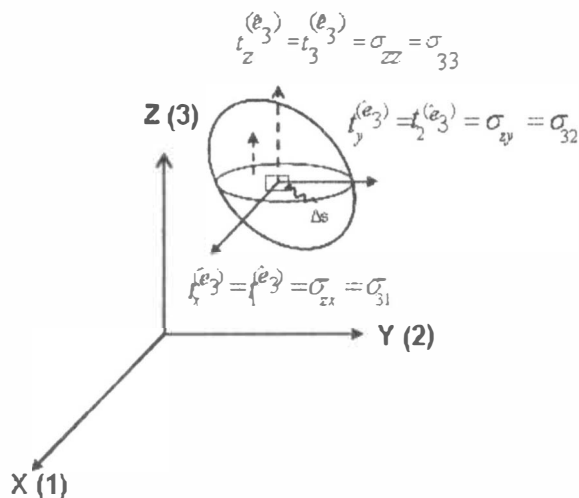


Figura 3.6: La sección se corta perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_3$; esto significa que $\hat{\mathbf{n}} \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_3$ y el vector $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_3)}$ tiene tres componentes.

mos el tetraedro de la figura 3.8. Las áreas de cada triángulo son:

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC &\longrightarrow dS \\
 \triangle CPB &\longrightarrow dS_1 = n_1 dS \\
 \triangle APC &\longrightarrow dS_2 = n_2 dS \\
 \triangle APB &\longrightarrow dS_3 = n_3 dS
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

o bien

$$dS_i = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) dS = \cos(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) dS = n_i dS. \tag{3.6}$$

Si ahora consideramos equilibrio de fuerzas escrito en términos del vector de esfuerzos, en la dirección del eje x , simplemente sumamos todas las componentes de la fuerza en la dirección x , es decir

$$t_x^{\hat{\mathbf{n}}} dS + t_x^{(-\hat{\mathbf{e}}_1)} dS_1 + t_x^{(-\hat{\mathbf{e}}_2)} dS_2 + t_x^{(-\hat{\mathbf{e}}_3)} dS_3 = 0. \tag{3.7}$$

Si recordamos que $\mathbf{t}^{(-\hat{\mathbf{n}})} = -\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}}$, la ecuación se puede escribir en la forma siguiente:

$$t_x^{\hat{\mathbf{n}}} dS = t_x^{\hat{\mathbf{e}}_1} dS_1 + t_x^{\hat{\mathbf{e}}_2} dS_2 + t_x^{\hat{\mathbf{e}}_3} dS_3, \tag{3.8}$$

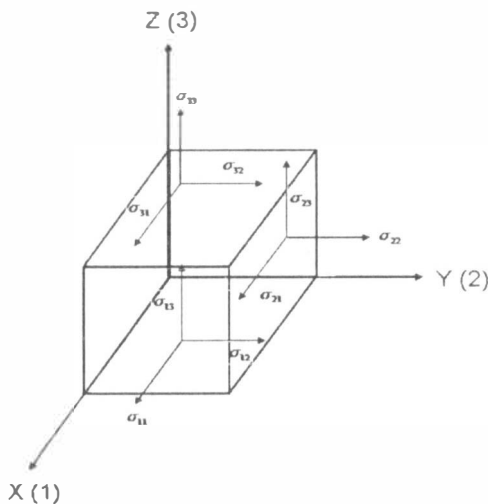


Figura 3.7: Componentes del tensor de los esfuerzos.

y entonces nos resulta que:

$$\begin{aligned} t_x^{\hat{n}} dS &= t_x^{(\hat{e}_1)} n_1 dS + t_x^{(\hat{e}_2)} n_2 dS + t_x^{(\hat{e}_3)} n_3 dS = \\ &= \left(t_x^{(\hat{e}_1)} n_1 + t_x^{(\hat{e}_2)} n_2 + t_x^{(\hat{e}_3)} n_3 \right) dS = t_x^{(\hat{e}_i)} n_i dS = \sigma_{ix} n_i dS. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Es claro que se pueden escribir relaciones semejantes para las otras componentes, de manera que

$$t_j^{\hat{n}} dS = (t_j^{(\hat{e}_i)} n_i) dS = \sigma_{ij} n_i dS, \quad (3.10)$$

por lo tanto, podemos escribir que

$$\mathbf{t}^{\hat{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\sigma}. \quad (3.11)$$

Vemos que si tenemos el tensor de esfuerzos podemos construir el vector de esfuerzos mediante una contracción del vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ con el tensor de esfuerzos que corresponde.

3.4. Leyes de transformación para el tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos es un tensor cartesiano de segundo orden y, por lo tanto, se transformará como tal, pero ahora lo vamos a poner en forma matricial para hacer el álgebra más fácil y directa. Supongamos que efectuamos una transformación del sistema de coordenadas $Ox_1x_2x_3$ al $Ox'_1x'_2x'_3$ caracterizada

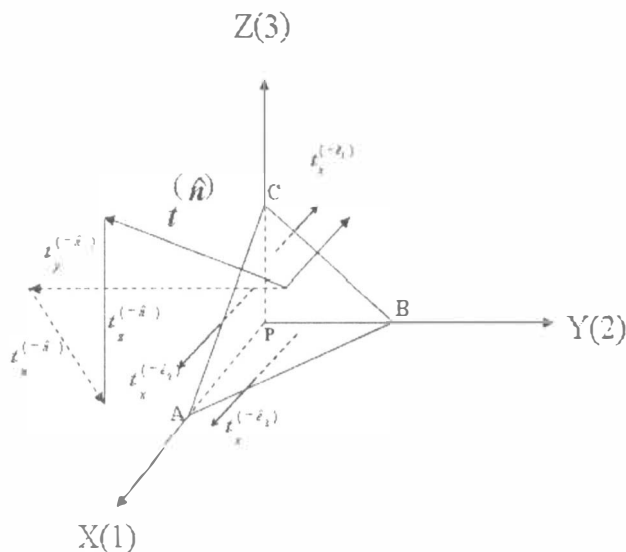


Figura 3.8: Relación entre el vector de esfuerzos y el tensor de esfuerzos.

por una matriz asociada a la transformación

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

El vector de esfuerzos por ser un tensor cartesiano de primer orden se transforma como:

$$\mathbf{t}'^{\hat{n}} = \underline{A} \cdot \mathbf{t}^{\hat{n}} \quad \text{o bien} \quad (t')_i^{\hat{n}} = a_{ij} t_j^{\hat{n}} \quad (3.13)$$

A su vez, el tensor de esfuerzos se transforma como:

$$\underline{\sigma}' = \underline{A} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{A}^t \quad (3.14)$$

donde $\underline{A}^t$ es la matriz traspuesta de $\underline{A}$, la transformación (3.14) también puede escribirse como

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} \sigma_{pq} a_{qj} \quad (3.15)$$

Recuerde que la transformación debe ser ortogonal.

3.5. Esfuerzos máximo y mínimo

Vamos a considerar que tenemos el tensor de los esfuerzos para un sistema, como función de las coordenadas de los puntos de dicho sistema. Queremos analizar los esfuerzos en un punto, en particular usando los valores del tensor

de esfuerzos en ese punto. Para el análisis evaluamos el tensor en el punto en consideración (P). Una vez que lo hacemos, calculamos sus valores principales que llamaremos $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$, los ordenamos de manera que $\sigma^{(1)} > \sigma^{(2)} > \sigma^{(3)}$ y llamamos x_1, x_2, x_3 a las direcciones principales correspondientes. Ahora nos fijamos en el punto P y en el área dS con el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ normal al área en cuestión. El vector de los esfuerzos $\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}}$ que resulta puede descomponerse en sus componentes normal y tangencial, la componente normal es

$$\sigma_N = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}}. \quad (3.16)$$

La componente tangencial (cortante) está en el plano perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$; para calcularla escribimos el vector de esfuerzos $\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}}$ en la forma

$$\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_N \hat{\mathbf{n}} + \sigma_T \hat{\mathbf{e}}_T, \quad (3.17)$$

donde el vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_T$ es perpendicular al vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$, de manera que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_T = 0$, por lo tanto

$$\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_N^2 + \sigma_T^2, \quad (3.18)$$

ahora despejamos la magnitud de la componente cortante

$$\sigma_T^2 = \mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} - \sigma_N^2 = t_i t_i - \sigma_N^2. \quad (3.19)$$

En la figura 3.9 se muestran las componentes del vector de esfuerzos y los vectores unitarios correspondientes, en el sistema de coordenadas donde los ejes están a lo largo de los ejes principales del tensor de esfuerzos en el punto P . Puesto que x_1, x_2, x_3 son los ejes principales del tensor, el vector de esfuerzos se

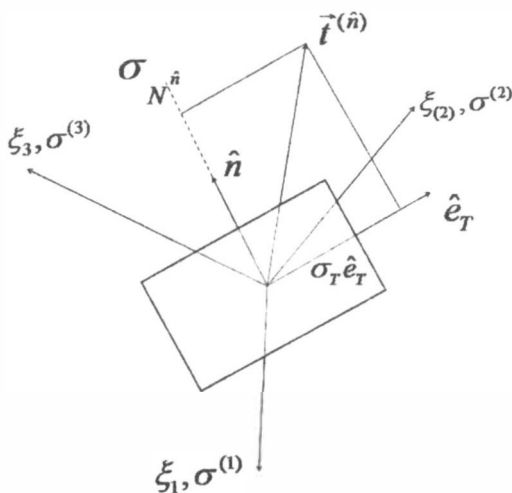


Figura 3.9: Componentes normal y tangencial del vector de los esfuerzos.

puede escribir como:

$$\begin{aligned} t_1^{\dot{\mathbf{n}}} &= \sigma^{(1)} n_1 \\ t_2^{\dot{\mathbf{n}}} &= \sigma^{(2)} n_2 \\ t_3^{\dot{\mathbf{n}}} &= \sigma^{(3)} n_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

y además

$$\sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma^{(1)} n_1^2 + \sigma^{(2)} n_2^2 + \sigma^{(3)} n_3^2 \quad (3.21)$$

si ahora sustituimos en el esfuerzo cortante, ec.(3.19), tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= (\sigma^{(1)})^2 n_1^2 + (\sigma^{(2)})^2 n_2^2 + (\sigma^{(3)})^2 n_3^2 - \\ &\quad - (\sigma^{(1)} n_1^2 + \sigma^{(2)} n_2^2 + \sigma^{(3)} n_3^2)^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

o bien

$$\sigma_T^2 = (\sigma^{(i)})^2 n_i^2 - (\sigma^{(i)} n_i^2)^2. \quad (3.23)$$

Ahora nos interesa calcular los valores máximo y mínimo de σ_T y ver en que direcciones están esos esfuerzos. Esto significa que debemos maximizar σ_T^2 con la restricción de que el vector $\dot{\mathbf{n}}$ sea unitario. Para hacerlo se va a utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange y entonces construimos la función

$$F = \sigma_T^2 - \lambda(n_i n_i - 1), \quad (3.24)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción. Primero tomamos las derivadas de F respecto a n_i

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0, \quad \text{con } n_i n_i = 1, \quad (3.25)$$

y obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial n_j} &= \frac{\partial}{\partial n_j} \left\{ \left[(\sigma^{(i)})^2 n_i^2 - (\sigma^{(i)} n_i^2)^2 \right] - \lambda n_i n_i \right\} \\ &= (\sigma^{(i)})^2 2 n_i \delta_{ij} - 2 (\sigma^{(i)} n_i^2) \sigma^{(k)} 2 n_k \delta_{jk} - 2 \lambda n_i \delta_{ij} \\ &= 2 (\sigma^{(j)})^2 n_j - 4 (\sigma^{(i)} n_i^2) \sigma^{(j)} n_j - 2 \lambda n_j \\ &= 2 n_j \left[(\sigma^{(j)})^2 - 2 (\sigma^{(i)} n_i^2) \sigma^{(j)} - \lambda \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Vamos a escribir explícitamente estas ecuaciones

$$j = 1, \quad n_1 \left[(\sigma^{(1)})^2 - 2 \sigma^{(1)} \left(\sigma^{(1)} n_1^2 + \sigma^{(2)} n_2^2 + \sigma^{(3)} n_3^2 \right) - \lambda \right] = 0 \quad (3.27)$$

$$j = 2, \quad n_2 \left[(\sigma^{(2)})^2 - 2 \sigma^{(2)} \left(\sigma^{(1)} n_1^2 + \sigma^{(2)} n_2^2 + \sigma^{(3)} n_3^2 \right) - \lambda \right] = 0 \quad (3.28)$$

$$j = 3, \quad n_3 \left[(\sigma^{(3)})^2 - 2 \sigma^{(3)} \left(\sigma^{(1)} n_1^2 + \sigma^{(2)} n_2^2 + \sigma^{(3)} n_3^2 \right) - \lambda \right] = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{además } n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (3.30)$$

Debemos resolver estas ecuaciones para las cantidades n_1, n_2, n_3 y λ . Sin embargo, debido a que la solución de las ecuaciones es un tanto elaborada, vamos a considerar casos especiales.

Primero consideramos las ecuaciones (3.27), (3.28) y (3.29) con $n_1 = n_2 = 0, n_3 \neq 0$ y resulta $n_3 = \pm 1$ y $\lambda = -(\sigma^{(3)})^2$.

Tomando las ecuaciones (3.27), (3.29) y (3.30) con $n_1 = n_3 = 0$ se obtiene $n_2 = \pm 1$ y $\lambda = -(\sigma^{(2)})^2$.

De las ecuaciones (3.28), (3.29) y (3.30) con $n_2 = n_3 = 0$ se obtiene $n_1 = \pm 1$ y $\lambda = -(\sigma^{(1)})^2$. Aunque los valores de λ no se necesitan explícitamente, los hemos calculado para completar el esquema.

Ahora bien, tomando en cuenta estos resultados y la ecuación (3.23) obtenemos el valor del esfuerzo cortante y vemos que en todos los casos $\sigma_T = 0$,² de tal manera que estas soluciones triviales nos llevan al valor mínimo de σ_T . Es claro que para cada uno de estos casos se obtiene el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ correspondiente a las direcciones principales y entonces $\sigma_T = 0$, ya que, por definición, para una dirección principal $\mathbf{t}^{\mathbf{n}}$ está a lo largo de la normal $\hat{\mathbf{n}}$. Sin embargo, hay otro conjunto de soluciones que ahora calcularemos.

3.5.1. Caso A

Consideramos $n_1 = 0$ con $n_2 \neq 0, n_3 \neq 0$, las ecuaciones (3.28)-(3.30) nos quedan como

$$\begin{aligned} (\sigma^{(2)})^2 (1 - 2n_2^2) - 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}n_3^2 - \lambda &= 0, \\ (\sigma^{(3)})^2 (1 - 2n_3^2) - 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}n_2^2 - \lambda &= 0, \\ n_2^2 + n_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

restando se obtiene

$$\begin{aligned} (\sigma^{(2)})^2 (1 - 2n_2^2) - 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}n_3^2 - (\sigma^{(3)})^2 (1 - 2n_3^2) + 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}n_2^2 &= 0, \\ (\sigma^{(2)})^2 (1 - 2n_2^2) - 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}(1 - n_2^2) - (\sigma^{(3)})^2 (-1 + 2n_2^2) + 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}n_2^2 &= 0, \\ (1 - 2n_2^2) \left[(\sigma^{(2)})^2 + (\sigma^{(3)})^2 \right] + 2\sigma^{(3)}\sigma^{(2)}(2n_2^2 - 1) &= 0, \\ (2n_2^2 - 1) \left[2\sigma^{(3)}\sigma^{(2)} - (\sigma^{(2)})^2 - (\sigma^{(3)})^2 \right] &= 0, \\ -(2n_2^2 - 1) [\sigma^{(2)} - \sigma^{(3)}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Cuando los valores principales $\sigma^{(2)}$ y $\sigma^{(3)}$ son diferentes la ec. (3.33) nos conduce a que $(2n_2^2 - 1) = 0$ y entonces obtenemos el resultado siguiente:

$$n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.33)$$

²Recordar que σ_T es la magnitud del esfuerzo cortante, por lo tanto $\sigma_T \geq 0$.

El valor de λ para este caso es $\lambda = -\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}$ y ahora procedemos a calcular el esfuerzo cortante

$$\begin{aligned}
 \sigma_T^2 &= (\sigma^{(2)})^2 n_2^2 + (\sigma^{(3)})^2 n_2^2 - \left[\sigma^{(2)} n_2^2 + \sigma^{(3)} n_3^2 \right]^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[(\sigma^{(2)})^2 + (\sigma^{(3)})^2 \right] - \frac{1}{4} \left[\sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} \right]^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[(\sigma^{(2)})^2 + (\sigma^{(3)})^2 \right] - \frac{1}{4} \left[(\sigma^{(2)})^2 + (\sigma^{(3)})^2 + 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)} \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \left[(\sigma^{(2)})^2 + (\sigma^{(3)})^2 - 2\sigma^{(2)}\sigma^{(3)} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left(\sigma^{(2)} - \sigma^{(3)} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

con lo cual se tiene

$$\sigma_T = \frac{1}{2} (\sigma^{(2)} - \sigma^{(3)}). \tag{3.35}$$

3.5.2. Caso B

De manera semejante se demuestra que $n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_2 = 0$, $n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ es solución y además el esfuerzo cortante es $\sigma_T = \frac{1}{2} (\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)})$.

3.5.3. Caso C

También $n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_3 = 0$ es solución y en este caso el esfuerzo cortante es $\sigma_T = \frac{1}{2} (\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)})$.

A partir de estas soluciones vemos que el esfuerzo cortante máximo actúa en el plano que bisecta el ángulo recto entre las direcciones de los esfuerzos principales máximo y mínimo (caso B). En el cuadro 3.1 se hace un resumen de las soluciones que hemos encontrado y hemos agregado una columna para escribir el esfuerzo normal correspondiente.

La figura 3.10 muestra de manera esquemática el lugar donde se encuentra el esfuerzo máximo.

Ahora bien, para demostrar que el valor calculado efectivamente corresponde al valor máximo del esfuerzo debemos calcular la segunda derivada y ver su signo. Este cálculo, aunque es directo, resulta pesado algebraicamente y no lo haremos en este libro. Queda al lector calcularlo y demostrar con ello que, efectivamente, se trata de un máximo.

Componentes de $\hat{\mathbf{n}}$	σ_T	σ_N	λ
$(0, 0, \pm 1)$	0	$ \sigma^{(3)} $	$-(\sigma^{(3)})^2$
$(0, \pm 1, 0)$	0	$ \sigma^{(2)} $	$-(\sigma^{(2)})^2$
$(\pm 1, 0, 0)$	0	$ \sigma^{(1)} $	$-(\sigma^{(1)})^2$
$(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{2} \sigma^{(2)} - \sigma^{(3)} $	$\frac{1}{2} \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} $	$-\sigma^{(2)}\sigma^{(3)}$
$(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{2} \sigma^{(1)} - \sigma^{(3)} $	$\frac{1}{2} \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} $	$-\sigma^{(1)}\sigma^{(3)}$
$(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$\frac{1}{2} \sigma^{(1)} - \sigma^{(2)} $	$\frac{1}{2} \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} $	$-\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}$

Cuadro 3.1: Resumen de valores máximo y mínimo del esfuerzo cortante

Ejemplo

El tensor de esfuerzos en el punto P (en las unidades que correspondan, $\frac{\text{esfuerzo}}{\text{área}}$), está dado por

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar el esfuerzo tangencial (cortante) máximo y mostrar que actúa en el plano que bisecta los planos de esfuerzos principales máximo y mínimo.

Solución

Primero se calcularán los esfuerzos principales del tensor, para ello se resuelve la ecuación secular

$$\begin{aligned} \det(\sigma - \sigma \mathcal{I}) &= \begin{vmatrix} 5 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -6 - \sigma & -12 \\ 0 & -12 & 1 - \sigma \end{vmatrix} = (5 - \sigma)[(-6 - \sigma)(1 - \sigma) - 144] \\ &= (5 - \sigma)(-6 - \sigma + 6\sigma + \sigma^2 - 144) = (5 - \sigma)(\sigma^2 + 5\sigma - 150) = 0 \end{aligned}$$

a partir de esta expresión obtenemos tres raíces y las ordenamos tomando en cuenta que $\sigma^{(1)} > \sigma^{(2)} > \sigma^{(3)}$,

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= 10 \\ \sigma^{(2)} &= 5 \\ \sigma^{(3)} &= -15 \end{aligned}$$

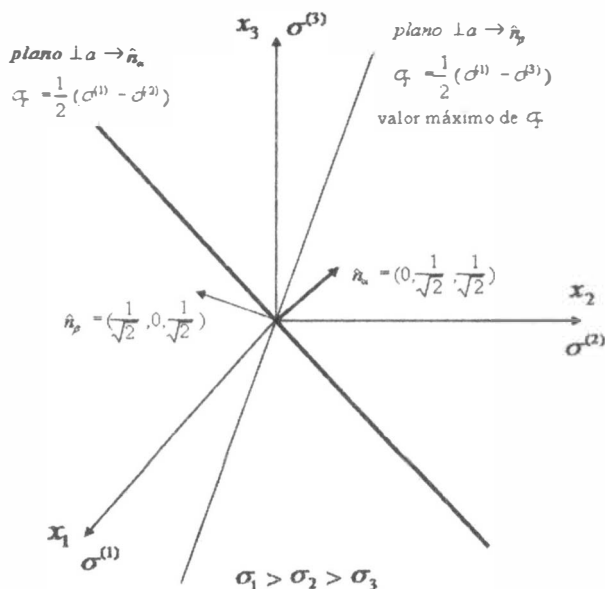


Figura 3.10: Plano donde se encuentra el esfuerzo cortante máximo.

Sabemos que en el sistema de ejes principales el esfuerzo cortante máximo es

$$\sigma_{T_{max}} = \frac{1}{2}(\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)}) = \frac{25}{2}$$

además está en el plano perpendicular al vector unitario $\hat{n}_\beta = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

En el sistema de ejes principales, el tensor de esfuerzos se puede escribir en su forma diagonal

$$\underline{\sigma}^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Con el objeto de mostrar explícitamente la dirección del esfuerzo máximo, vamos a realizar una transformación del sistema de ejes principales, de manera que vamos de (x_1, x_2, x_3) a los ejes (x'_1, x'_2, x'_3) mediante una rotación de $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje principal marcado con x_2 , como se señala en la figura 3.11

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El tensor de esfuerzos $\underline{\sigma}^*$ se transforma como

$$\underline{\sigma}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

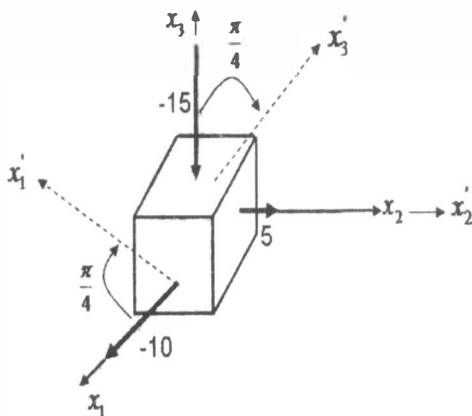


Figura 3.11: Rotación de los ejes.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{10}{\sqrt{2}} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{15}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{15}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{25}{2} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{25}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En el tensor $\underline{\sigma}'$ vemos que los elementos σ_{xz} y σ_{zx} , que representan esfuerzos cortantes tienen el valor del esfuerzo cortante máximo que hemos calculado a partir de la teoría general desarrollada en el capítulo. También obtenemos el signo, que en este caso resultó negativo, indicando con ello que el esfuerzo cortante máximo apunta en dirección opuesta al eje z , como se muestra en la figura 3.12.

Nota.- En este ejercicio únicamente se manejaron los valores numéricos del tensor de esfuerzos; es preciso recordar que todas sus componentes deben tener las mismas unidades y éstas deben corresponder a esfuerzos. Los elementos de la matriz de rotación son adimensionales.

3.6. Ecuaciones de Equilibrio

Hasta el momento solamente nos hemos ocupado de las fuerzas que actúan sobre elementos de superficie en un cuerpo; sin embargo, también puede haber fuerzas que actúan sobre todo el cuerpo y que se llaman “fuerzas de volumen”, como ejemplo de este tipo de fuerzas tenemos a la fuerza gravitatoria. En general las etiquetaremos como $\rho \mathbf{b}$, donde ρ es la densidad y $\mathbf{b}$ la fuerza por unidad de masa. Las unidades de $\rho \mathbf{b}$ son entonces de $\frac{\text{fuerza}}{\text{volumen}} = \frac{M}{L^3 L^2}.$

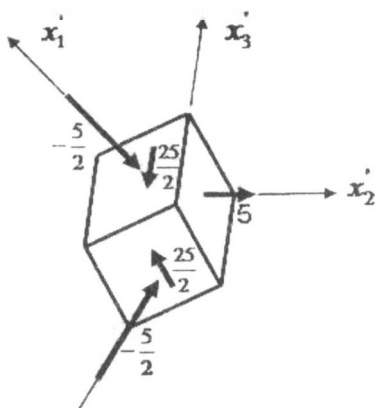


Figura 3.12: Sistema de ejes donde se muestra el esfuerzo cortante máximo.

Para escribir las ecuaciones de equilibrio necesitamos hacer un balance de fuerzas y además debemos recordar que las fuerzas de superficie (esfuerzos) dependen de las coordenadas de los puntos en el sistema que estamos considerando.

Supongamos que tomamos un elemento de volumen V del sistema, sobre él actúan las fuerzas de superficie $\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}}$ y las fuerzas de volumen $\mathbf{b}$; la condición de equilibrio será que la fuerza total que actúa sobre el volumen V se anule,

$$\int_S \mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0, \quad (3.36)$$

pero

$$\mathbf{t}^{\hat{\mathbf{n}}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\sigma} \quad \text{también} \quad t_i^{\hat{\mathbf{n}}} = n_j \sigma_{ji}, \quad (3.37)$$

de manera que la ecuación (3.36) puede escribirse como

$$\int_s \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = 0, \quad (3.38)$$

con el teorema de la divergencia, podemos escribir que $\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV$, de manera que la ecuación (3.38) ahora se escribe en la forma

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0. \quad (3.39)$$

Puesto que el volumen V es arbitrario obtenemos

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0, \quad \text{también} \quad \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0. \quad (3.40)$$

Esta ecuación constituye una de las ecuaciones fundamentales en Elasticidad y enfatizamos que se trata de un balance de fuerzas; de hecho hemos puesto

la condición de que la fuerza total se anule. En el caso de que dicha fuerza sea diferente de cero será necesario igualarla con la aceleración del elemento de volumen considerado. Este procedimiento nos lleva a una generalización de la segunda ley de Newton.³

Ahora bien, debemos notar que las fuerzas de superficie no son uniformes, es decir que pueden variar punto a punto en el sistema. Esto significa que podrá existir una torca interna y, a su vez, podrá actuar sobre el sistema una torca externa. Podemos tomar la torca externa como cero y lo haremos de este modo, pero ¿qué sucede con la torca interna ?. De hecho no podemos controlar a la torca interna, entonces estudiaremos su posible contribución al equilibrio del sistema. Vamos a imponer la condición de equilibrio rotacional y ello nos dice que la torca total deberá anularse, para ello escribimos la componente i en términos de índices,

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k^{\hat{n}} dS + \int_V \epsilon_{ijk} \rho x_j b_k dV = 0, \quad (3.41)$$

sustituimos $t_k^{\hat{n}} = \sigma_{mk} n_m$ y nos queda

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk} n_m dS + \int_V \epsilon_{ijk} \rho x_j b_k dV = 0, \quad (3.42)$$

con el teorema de la divergencia aplicado al primer término de la ecuación (3.42) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_S \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk} n_m dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_m} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{mk}) dV \\ &= \int_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial (x_j \sigma_{mk})}{\partial x_m} dV = \int_V \epsilon_{ijk} \left(\delta_{jm} \sigma_{mk} + x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} \right) dV \\ &= \int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} dV \end{aligned}$$

usamos la ecuación (3.42) en el segundo término y vemos que:

$$= \int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV - \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV. \quad (3.43)$$

sustituyendo en la ecuación (3.42) tenemos que

$$\int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV + \int_V \epsilon_{ijk} x_j (-\rho b_k) dV + \int_V \epsilon_{ijk} \rho x_j b_k dV = 0,$$

que, a su vez, implica que

$$\int_V \epsilon_{imk} \sigma_{mk} dV = 0, \quad (3.44)$$

³Ver capítulo 6.

y como el volumen V es arbitrario obtenemos

$$\epsilon_{imk}\sigma_{mk} = 0. \quad (3.45)$$

Si recordamos que ϵ_{imk} es un tensor completamente antisimétrico, vemos que σ_{mk} deberá ser un tensor simétrico para que se cumpla la ecuación (3.42), esto es

$$\sigma_{mk} = \sigma_{km}. \quad (3.46)$$

Insistimos en que esta condición se obtiene al pedir que la torca se anule, o bien pedir equilibrio rotacional.

En Elasticidad generalmente se considera que el tensor de esfuerzos es simétrico, de manera que se está suponiendo que el equilibrio rotacional está garantizado. Tomando en cuenta la simetría del tensor de esfuerzos, ahora sabemos que sólo tendrá seis componentes independientes. Se acostumbra separar el tensor de esfuerzos en dos partes, una con simetría esférica (isótropa) y otra que represente la desviación correspondiente. A la parte isótropa la etiquetaremos como $\underline{\sigma}_M = \sigma_M \underline{I}$, donde $\underline{I}$ es un tensor unitario y $\sigma_M = \frac{\sigma_{jj}}{3}$, es el esfuerzo normal promedio. A su vez la desviación de la parte esférica, en su representación matricial sería

$$\underline{\sigma}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix} = (S_{ij}). \quad (3.47)$$

Ecuación que puede escribirse de manera alternativa como: $\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} + S_{ij}$, $\underline{\sigma} = \sigma_M \underline{I} + \underline{S}_D$; S_{ij} es un tensor simétrico de segundo orden. De acuerdo con la definición de σ_M es inmediato que la traza de S_{ij} es nula.

Las direcciones principales de S_{ij} son las mismas que las de σ_{ij} , pero los valores principales se desplazan $S^{(k)} = \sigma^{(k)} - \sigma_M$.

3.7. Problemas

1.- El tensor de los esfuerzos en un punto P de un medio elástico está dado por:

$$\underline{\sigma}(P) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar: a) el vector de los esfuerzos en el punto P para un plano cuya normal unitaria es: $\hat{\mathbf{n}} = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}$,

b) el esfuerzo normal correspondiente.

2.- El estado de esfuerzos en un punto de un medio elástico está dado por el tensor de esfuerzos siguiente:

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

donde a, b, c son constantes adimensionales y σ el valor del esfuerzo. determinar las constantes a, b y c de tal manera que el vector de esfuerzos en el plano $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{k}}$ se anule.

- 3.- Los esfuerzos principales en un punto P de un cuerpo elástico son $\sigma^{(1)} = 5 \text{ N/cm}^2$, $\sigma^{(2)} = -5 \text{ N/cm}^2$ y $\sigma^{(3)} = -8 \text{ N/cm}^2$. Encontrar el vector de los esfuerzos $\mathbf{t}^{(n)}$, el esfuerzo normal σ_N y el esfuerzo cortante σ_T para un plano que está inclinado igualmente con respecto a los ejes principales. Ver figura 3.13.

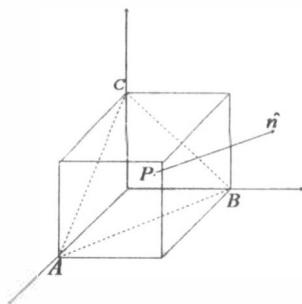


Figura 3.13: Problema 3.

- 4.- Los esfuerzos $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ y σ_{21} están actuando en un punto de un cuerpo elástico ($\sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$). Encontrar los esfuerzos principales y los esfuerzos para un plano perpendicular al plano $x-y$ cuya normal forma un ángulo α con el eje x . Ver figura 3.14.

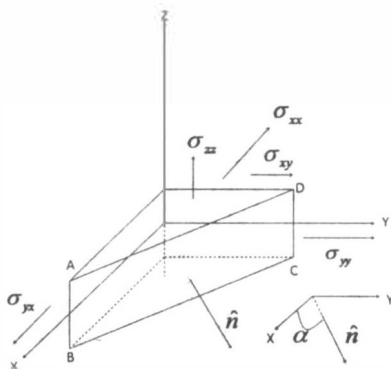


Figura 3.14: Problema 4.

- 5.- En la figura 3.15 se presenta la sección transversal yOA de la pared de una presa que está sujeta a la presión del agua en la cara Oy , la cara OA

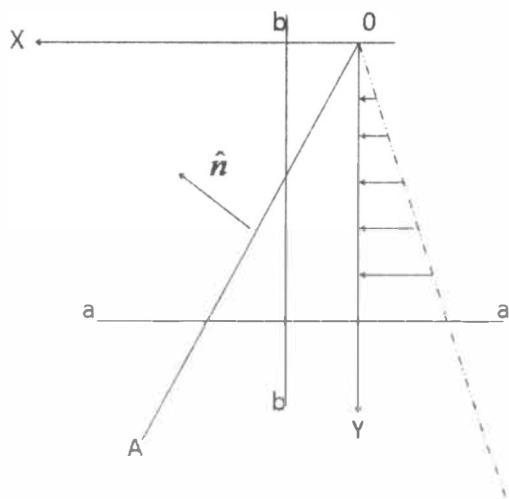


Figura 3.15: Problema 5

no soporta carga (el vector de esfuerzos es nulo). Identificar los esfuerzos cortantes y normales sobre la cara Oy (Prestar atención a la dirección de la presión, la dirección del eje Ox y el signo de la proyección). Designar también las componentes del esfuerzo sobre la cara OA (normal exterior $\hat{n}$ y escribir la condición de que esté libre de carga (esfuerzo). Designar los esfuerzos en las caras aa y bb cuando una parte de la pared se remueve al efectuar los cortes correspondientes.

6.- El estado de esfuerzos en un cuerpo está dado por el tensor

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar el vector de esfuerzos que actúa en el punto $P = (2, 1, \sqrt{3})$, para un área determinada por el plano tangente en P a la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 4$. Encontrar cuáles deben ser las fuerzas volumétricas para que se satisfagan las condiciones de equilibrio.

7.- En la pared de la presa de la figura 3.15, se inducen los esfuerzos siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\gamma y \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{p}{\tan \beta} - \frac{2\gamma}{\tan^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\tan^2 \beta} \right) y \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\gamma}{\tan^2 \beta} x \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{zz} = 0 \end{aligned}$$

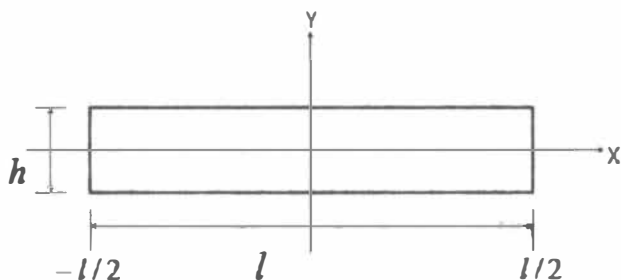


Figura 3.16: Problema 8.

Sustituir en las ecuaciones de equilibrio y ver para qué casos se cumplen. Encontrar el esfuerzo que actúa sobre la cara Oy y sobre la cara OA .

- 8.- En algunos casos de flexión de una barra de sección transversal rectangular, se tienen los esfuerzos siguientes:

$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3} \left(M_0 + \frac{ql^2}{8} - \frac{qh^2}{20} \right) y - \frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) x$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{6q}{h^3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y + \frac{h^3}{12} \right)$$

Verificar que se cumplen las condiciones de equilibrio y encontrar las cargas (esfuerzos) sobre las caras de la barra. En la figura 3.16 se ven las dimensiones de la barra y las cantidades q y M_0 son constantes. Diga cuáles deben ser sus unidades.

Capítulo 4

Análisis de la deformación

4.1. Desplazamientos infinitesimales.

Vamos a considerar un cuerpo elástico y eliminamos el movimiento que corresponde a un cuerpo rígido (es decir, traslación y rotación sin movimiento relativo entre sus partes), de tal manera que los desplazamientos entre puntos diferentes del cuerpo serán causados únicamente por las deformaciones.

Tomemos dos puntos P_0 y Q_0 en una configuración anterior a la deformación, después estarán en P y Q , sus desplazamientos están señalados en la figura 4.1.

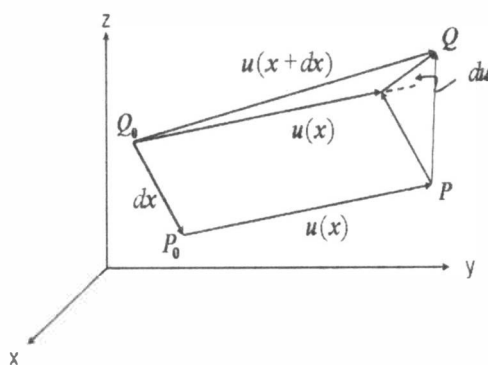


Figura 4.1: Vector de desplazamiento.

Consideramos ahora la componente i del desplazamiento relativo du

$$u_i(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}) = du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \dots \quad (4.1)$$

Es importante decir que nos limitaremos a desplazamientos infinitesimales y por ello en la ecuación (4.1) sólo tenemos los términos proporcionales a dx_j . En la

ecuación (4.1) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ es un tensor de segundo orden que se puede descomponer en una parte simétrica y una antisimétrica

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.2)$$

Ahora definimos el tensor de deformación

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3)$$

y el tensor de rotación Ω_{ij} . Recordemos que hemos considerado que la rotación rígida está ausente, de manera que Ω_{ij} representará rotación relativa, diferente en puntos diferentes del cuerpo

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.4)$$

de manera que la ecuación (4.1) puede escribirse en la forma siguiente:

$$du_i = e_{ij} dx_j + \Omega_{ij} dx_j, \quad (4.5)$$

donde la primera contribución proviene del tensor de deformación y la segunda se debe al tensor de rotación. Con el objeto de ver con claridad las implicaciones de estas afirmaciones vamos a transformar el segundo término y ver que efectivamente representa rotaciones, posteriormente también daremos una interpretación geométrica de ambos términos.

Primero vamos a definir el vector de rotación,¹

$$\Omega_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_{jk} \quad (4.6)$$

y sustituyendo la ecuación (4.4), tenemos

$$\begin{aligned} \Omega_i &= -\frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{se intercambia } j \rightarrow k \text{ en el segundo término} \\ &= -\frac{1}{4} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{1}{4} \epsilon_{ikj} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{se cambia de nombre a índice mudos} \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u})_i, \end{aligned}$$

¹ Ver problema 3 del capítulo 2.

donde en la última igualdad se ha hecho uso el resultado de la ec. (2.65), usando las componentes del vector $a\mathbf{J}$ como las componentes del operador ∇ . De manera que en resumen podemos escribir que

$$\Omega_i = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u})_i \quad (4.7)$$

Por otra parte, usando la ecuación (4.7) vamos a construir la cantidad siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\Omega_j dx_k &= \epsilon_{ijk} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{jlm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) dx_k \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} dx_k, \\ \text{pero } \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} &= (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}), \\ \text{de donde } \epsilon_{ijk}\Omega_j dx_k &= \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) \frac{\partial u_m}{\partial x_l} dx_k \\ &= \left(\delta_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \delta_{il} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) dx_k \\ &= \Omega_{ik} dx_k. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En resumen

$$\Omega_{ij} dx_j = \epsilon_{ijk} \Omega_j dx_k, \quad \Omega_{ij} dx_j = (\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{x})_i \quad (4.9)$$

de donde podemos ver que el término en cuestión representa una rotación caracterizada por $\boldsymbol{\Omega}$; en la ecuación (4.5) ahora podemos escribir el desplazamiento en la forma siguiente

$$du_i = e_{ij} dx_j + \epsilon_{ijk} \Omega_j dx_k. \quad (4.10)$$

Notemos que los desplazamientos du_i son longitudes y los elementos dx_j también, esto implica que las componentes de los tensores de deformación y rotación son adimensionales. A continuación vamos a dar una interpretación geométrica para cada uno de estos términos.

4.2. Interpretación geométrica de las componentes del tensor de deformación

Hemos visto que el desplazamiento relativo du puede escribirse en términos del tensor de deformación e_{ij} y un tensor de rotación. El término asociado con el tensor de rotación ya lo reescribimos en términos del vector de rotación y entonces lo hemos identificado como tal. Por el momento a nosotros nos interesa solamente la deformación, de manera que supondremos que no hay rotación; en este caso, el vector de desplazamiento nos queda escrito como

$$du_i = e_{ij} dx_j \quad (4.11)$$

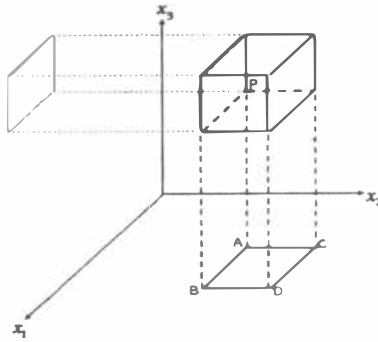


Figura 4.2: Elemento de volumen en el medio y sus proyecciones.

Configuración inicial	Configuración final
$AB \rightarrow dx_1$	$A'B'$
$AC \rightarrow dx_2$	$A'C'$

Cuadro 4.1: Configuraciones inicial y final.

y representa a una deformación pura. Ahora nos interesa dar una interpretación geométrica de las componentes del tensor e_{ij} .

Para hacerlo consideramos un elemento de volumen con la forma de un paralelepípedo de tamaño $dx_1 dx_2 dx_3$ alrededor del punto P y proyectamos en los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 4.2. Se van a examinar los cambios en dx_1, dx_2, dx_3 y la distorsión de los ángulos $1P2, 1P3, 3P2$; las primeras corresponden a deformaciones lineales o elongaciones y las segundas a deformaciones angulares o cortantes. Supongamos que ocurre una deformación en el volumen de la figura 4.2 y estudiamos la proyección del elemento deformado en el plano x_1, x_2 . Marcamos en la figura 4.3 todos los desplazamientos y en el cuadro 4.1 se especifican las configuraciones inicial y final; asimismo, en el cuadro 4.2 se señalan los desplazamientos correspondientes.

Tomando en cuenta lo explicado en la figura 4.3, vemos que la elongación del segmento AB en el eje x_1 es

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11} \tag{4.12}$$

que se identifica con la componente e_{11} del tensor de deformación. Haciendo un análisis semejante se puede ver que las componentes de la diagonal del tensor de deformación nos dan las elongaciones correspondientes.

Ahora analizamos la deformación angular del segmento AB en la figura 4.3. Primero calculamos la tangente del ángulo α_{21}

$$\tan \alpha_{21} = \frac{B''B'}{A'B''} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1} = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}. \tag{4.13}$$

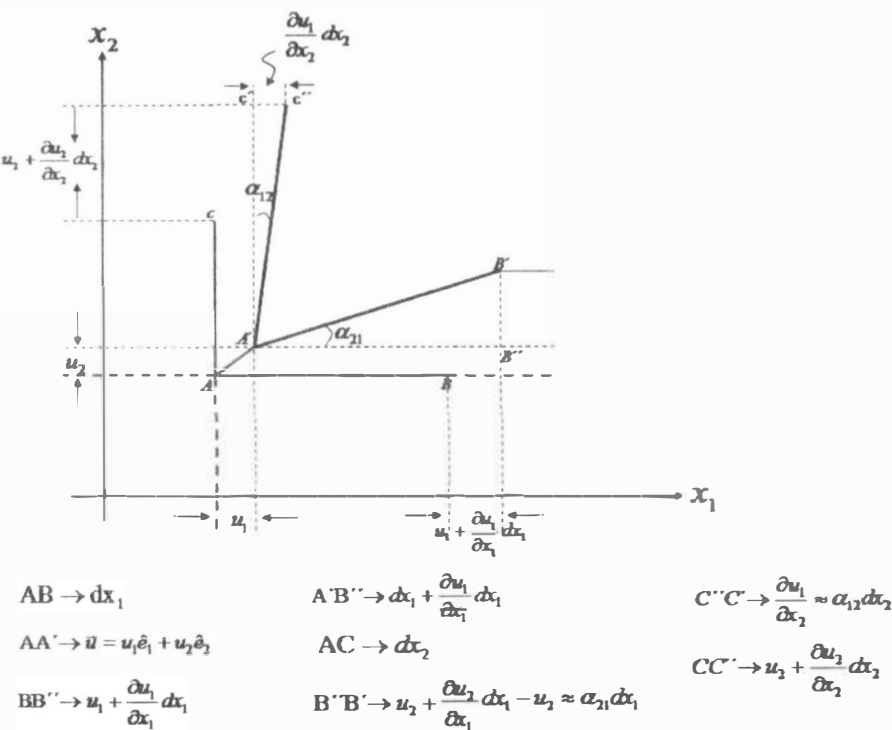


Figura 4.3: Porción del elemento de volumen deformado.

Desplazamiento	
A sobre el eje x_1	u_1
B sobre el eje x_1	$u_1 + du_1 = u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1$
A sobre el eje x_2	u_2
B sobre el eje x_2	$u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1$

Cuadro 4.2: Desplazamientos sobre los ejes.

Si nos limitamos a considerar deformaciones pequeñas

$$\tan \alpha_{21} \sim \alpha_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^{-1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots \right), \quad (4.14)$$

de manera que al orden más bajo tenemos

$$\alpha_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (4.15)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \tan \alpha_{12} \sim \alpha_{12} &= \frac{C''C'}{A'C'''} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 - u_2} \\ &= \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2}}{1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} \sim \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\alpha_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad (4.16)$$

vemos que

$$\frac{1}{2}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = e_{12}, \quad (4.17)$$

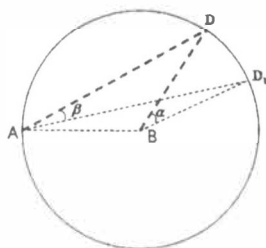
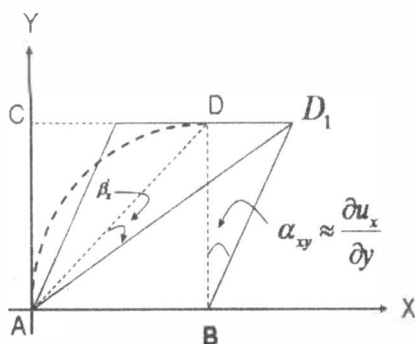
de manera que las componentes no diagonales del tensor de deformación nos dan una medida de la deformación angular.

En resumen, las componentes diagonales del tensor de deformación corresponden a “elongaciones” y las componentes fuera de la diagonal nos dan información acerca de la deformación angular y se llaman “deformaciones cortantes”. Recordemos que el tensor de deformación es simétrico por definición, de manera que la deformación cortante e_{ij} es igual a la deformación cortante e_{ji} .

4.3. Interpretación del tensor de rotación

Con el objeto de hacer la interpretación de una manera sencilla tomemos el caso en que las elongaciones se anulan, es decir $e_{11} = e_{22} = e_{33} = 0$; ésto significa que solamente habrá deformaciones cortantes. También tomemos un cubo como el volumen a analizar y sus proyecciones en los planos coordenados, como se observa en la figura 4.2. Por otra parte, en la figura 4.4 se muestra una relación entre ángulos que nos será de utilidad al aplicarla a nuestras deformaciones en el sistema en cuestión.² Primero hacemos una deformación cortante paralela al eje x y llamamos β'_z al ángulo que gira la diagonal AD , como se muestra en la figura 4.5. Ahora hacemos uso de la demostración geométrica que se ve en la figura 4.4 y trazamos un círculo con centro en B y radio AB , éste pasa por D

²En el apéndice de este capítulo se hace la demostración.

Figura 4.4: Relación entre ángulos, $\alpha = 2\beta$.Figura 4.5: Deformación cortante paralela el eje x .

y para deformaciones pequeñas podemos considerar que el punto D_1 también está sobre la circunferencia, entonces $\beta'_z \sim \frac{1}{2} \alpha_{xy}$ y

$$\beta'_z \sim -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (4.18)$$

donde el signo menos da cuenta de que el ángulo $\beta'_z < 0$ y $\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0$, ésto en vista de que el desplazamiento del elemento dy en el eje x es positivo.

Como segundo paso hacemos una deformación cortante paralela al eje y , como se muestra en la figura 4.6. Ahora el círculo se traza con centro en C , radio CA y se considera que D_2 también está sobre la circunferencia, por lo tanto

$$\beta''_z \sim \frac{1}{2} \alpha_{yx} \sim \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \beta''_z > 0. \quad (4.19)$$

De manera que en una deformación cortante general, la diagonal del elemento proyectado en el plano gira una cantidad $\beta_z = \beta'_z + \beta''_z$, entonces

$$\beta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \Omega_z. \quad (4.20)$$

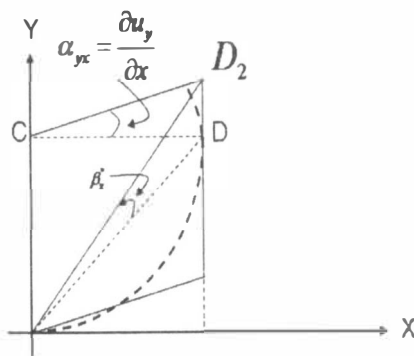


Figura 4.6: Deformación cortante paralela al eje y .

Observemos que $\beta_z = \Omega_z$, la componente z del vector de rotación definido en la ec.(4.7). De manera semejante se obtienen las otras componentes del tensor de rotación.

4.4. Algunas propiedades de e_{ij} .

4.4.1. Propiedades de transformación

El tensor de deformación es un tensor cartesiano de segundo orden, por lo tanto se transforma siguiendo las reglas de tensores de segundo orden. En el caso de representarlo matricialmente tomamos la matriz y su transpuesta para efectuar la transformación del tensor.

4.4.2. Ejes principales

El tensor de deformación es simétrico³, por lo cual se pueden encontrar sus valores y direcciones principales, además puede diagonalizarse. Los valores principales representan elongaciones a lo largo de los ejes principales.

4.4.3. Dilatación cúbica

Vamos a considerar el cambio de volumen que ocurre en una deformación arbitraria, para ello veamos un elemento de volumen de tamaño $dx_1 dx_2 dx_3$. Al efectuar la deformación, cada lado del volumen cambia de acuerdo con: $dx_1 \rightarrow (1 + e_{11})dx_1$, $dx_2 \rightarrow (1 + e_{22})dx_2$, ..., de manera que el cambio de volumen

³Por definición, ver ec. (4.3).

es

$$\begin{aligned}\Delta V &= dx_1(1 + e_{11})dx_2(1 + e_{22})dx_3(1 + e_{33}) - dx_1dx_2dx_3 \\ &= dx_1dx_2dx_3(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + \dots\end{aligned}$$

de donde $\frac{\Delta V}{V} = e_{11} + e_{22} + e_{33}.$ (4.21)

Esta ecuación nos da el cambio relativo de volumen y se conoce como dilatación cúbica. Debemos notar que esta cantidad ha quedado expresada en términos de la traza del tensor de deformación, cantidad que es un invariante. Esto significa que, si durante la deformación hay un cambio de volumen, éste será el mismo en cualquier sistema de coordenadas, y es claro que se puede escribir en términos de las elongaciones principales.⁴

4.4.4. Deformación cortante pura

Al igual que el tensor de esfuerzos, el tensor de deformación puede separarse en una parte simétrica sin traza y la traza multiplicada por el tensor unidad

$$e_{ij} = (e_{ij} - I_e \delta_{ij}) + I_e \delta_{ij} \quad (4.22)$$

donde $I_e = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33})$ es proporcional a la traza del tensor, como ya vimos en la sección anterior nos da la dilatación cúbica. El tensor $e_{ij} - I_e \delta_{ij}$ representa un tensor de deformación en el cual no hay cambio de volumen, sino solamente un cambio en la forma, por ello le estamos llamando deformación cortante pura.

Ejercicio

Para una deformación homogénea de la forma $u_i = A_{ij}w_j$, con A_{ij} = constante, determinar la expresión para el cambio de volumen y mostrar que si $A_{ij} \ll 1$ se convierte en la dilatación cúbica.

Solución.

El volumen original es $V_0 = dw_1dw_2dw_3$ y las coordenadas del punto $P = (w_1, w_2, w_3)$ después de la deformación son $x_i = w_i + u_i = (A_{ij} + \delta_{ij})w_j$, de manera que el volumen después de la deformación será

$$\begin{aligned}V' &= (A_{1j} + \delta_{1j})dw_j (A_{2k} + \delta_{2k})dw_k (A_{3m} + \delta_{3m})dw_m \\ &= (A_{1j} + \delta_{1j})dw_j (A_{2k}A_{3m} + A_{2k}\delta_{3m} + \delta_{2k}A_{3m} + \delta_{2k}\delta_{3m})dw_kdw_m \\ &= (A_{1j}A_{2k}A_{3m} + A_{1j}A_{2k}\delta_{3m} + A_{1j}A_{3m}\delta_{2k} + A_{1j}\delta_{2k}\delta_{3m} + \delta_{1j}A_{2k}A_{3m} + \\ &\quad + \delta_{1j}\delta_{3m}A_{2k} + \delta_{1j}\delta_{2k}A_{3m} + \delta_{1j}\delta_{2k}\delta_{3m})dw_jdw_kdw_m,\end{aligned}$$

⁴Enfatizamos que este cálculo es válido para deformaciones pequeñas.

si despreciamos términos no lineales en A_{ij} , tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta V = V' - V_0 &= (A_{1j}\delta_{2k}\delta_{3m} + \delta_{1j}A_{2k}\delta_{3m} + \delta_{1j}\delta_{2k}A_{3m})dw_jdw_kdw_m \\ &\sim (A_{11} + A_{22} + A_{33})V_0\end{aligned}\quad (4.23)$$

y por lo tanto

$$\frac{\Delta V}{V_0} = A_{11} + A_{22} + A_{33}\quad (4.24)$$

es lo que se debía demostrar.

4.5. Condiciones de compatibilidad

Supongamos que después de efectuar una deformación queremos especificar el desplazamiento de un punto en un cuerpo elástico. Para hacerlo podemos dar las tres componentes del vector de desplazamiento, o bien podríamos dar las seis componentes independientes del tensor de deformación y de él extraer el desplazamiento. Visto de esta forma tendríamos 6 funciones (e_{ij}) para determinar 3 (u_i) y claramente el sistema está sobredeterminado. Ésto implica que las componentes del tensor de deformación no son del todo independientes y, de hecho, ahora pasaremos a discutir las llamadas condiciones de compatibilidad. Físicamente podemos entenderlas si imaginamos que cortamos en paralelepípedos a un cuerpo elástico. Para cada uno especificamos las componentes del tensor de deformación; es claro que las componentes de dicho tensor deberán estar conectadas, ya que, si no lo estuvieran, sería imposible reconstruir el cuerpo deformado y mantenerlo continuo a partir de los paralelepípedos deformados.

Consideremos las componentes diagonales del tensor de deformación

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.\quad (4.25)$$

derivamos a e_{11} dos veces respecto de x_2 y a e_{22} dos veces respecto de x_1

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_2^2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial x_2},$$

sumando tenemos que

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} e_{12},\quad (4.26)$$

cambiando cíclicamente los índices 1, 2, 3 tenemos otras dos relaciones

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}\quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}.\quad (4.28)$$

Si ahora tomamos los elementos fuera de la diagonal y hacemos las operaciones marcadas, tenemos

$$\frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (4.31)$$

Ahora tomamos las ecuaciones (4.30) y (4.31) las sumamos y luego restamos la ecuación (4.29) para obtener

$$\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (4.32)$$

derivamos respecto de x_3 y además identificamos $e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$, de manera que

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial e_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.33)$$

y cambiando cíclicamente los índices tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (4.35)$$

Las ecuaciones (4.26)-(4.28) y (4.33) a (4.35) forman el conjunto de ecuaciones que se conocen como ecuaciones de compatibilidad o bien “Ecuaciones de Saint-Venant”. Es conveniente notar que este conjunto de ecuaciones también se puede escribir en términos de índices, de hecho

$$\frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 e_{jm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \quad (4.36)$$

donde es necesario dar valores a los diferentes índices para obtener las ecuaciones que corresponden. Como un ejercicio, el lector puede verificarlo.

Ejercicio 1.

El tensor de deformación e_{ij} está dado por la siguiente expresión

$$e_{ij} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1 x_3 & x_3^2 & 5a^2 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

donde $\mathfrak{a}^2$ es una constante con unidades de longitud al cuadrado. Mostrar que se satisfacen las ecuaciones de compatibilidad.

Solución.

Sustituimos en las ecuaciones (4.26)-(4.28)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} x_3 = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} x_2^2 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} x_3 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} 5a^2 = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} x_1 x_3 \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} 5 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} x_1^2 = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} x_1 x_3. \quad (4.40)$$

En las ecuaciones (4.38) y (4.39) todos los términos se anulan, pero la ecuación (4.40) no se satisface. Es inmediato que va a satisfacerse si tomamos otros valores para la componente e_{13} . Las ecuaciones (4.33)-(4.35) se satisfacen de inmediato.

Ejercicio 2.

El vector de desplazamiento es una combinación lineal de las coordenadas:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x_0} + C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z \\ u_y &= u_{y_0} + C_{21}x + C_{22}y + C_{23}z \\ u_z &= u_{z_0} + C_{31}x + C_{32}y + C_{33}z. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Calculemos el tensor de deformación y el de rotación

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = C_{11} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = C_{12} \quad \text{en general} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = C_{ij},$$

de manera que:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (C_{ij} + C_{ji}), \\ \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (C_{ij} - C_{ji}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ambos tensores son constantes y entonces el conjunto de desplazamientos de la ecuación (4.41) define una “deformación homogénea”. En este caso una línea recta se transforma en una línea recta, un plano en un plano, etc.

Si $C_{ij} = C_{ji}$ hay una deformación pura y la rotación es nula, en cambio si $C_{ij} = -C_{ji}$ hay rotación sin deformación.

Ejercicio 3.

Una barra se sujeta a una deformación cuyo vector de desplazamiento está dado por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{xz}{\rho}, \\u_y &= \frac{\nu yz}{\rho}, \\u_z &= \frac{1}{2\rho} \left(x^2 + \nu(z^2 - y^2) \right),\end{aligned}\tag{4.43}$$

donde ρ y ν son constantes, ν es adimensional (razón de Poisson) y ρ tiene unidades de distancia (es el radio de curvatura del eje de una barra doblada). Encontrar las componentes del tensor de deformación e_{ij} .

Solución.

Componentes de la diagonal (elongaciones):

$$\begin{aligned}e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{z}{\rho}, \\e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\nu}{\rho} z, \\e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\nu z}{\rho}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Elementos cortantes:

$$\begin{aligned}e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0, \\e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{\rho} + \frac{x}{\rho} \right), \\e_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu y}{\rho} + \frac{(-2y)\nu}{2\rho} \right) = 0.\end{aligned}\tag{4.45}$$

Por lo tanto, el tensor se puede escribir en la forma

$$\underline{e} = \frac{z}{\rho} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.\tag{4.46}$$

Verificar si se cumplen las ecuaciones de Saint Venant.

Al sustituir en las ecuaciones (4.26) a (4.28) vemos que se cumplen trivialmente y en las ecuaciones (4.33) a (4.35) el primer miembro siempre es nulo, mientras que el segundo término se anula al tomar las segundas derivadas.

Los desplazamientos corresponden a curvar una barra, la deformación ocurre en el plano zOx y el eje de la barra se mantiene en ese plano. Antes de la deformación el eje de la barra coincide con el eje Ox y está caracterizado por

$x = w_1, y = w_2 = 0, z = w_3 = 0$.⁵ Después de la deformación la ecuación que caracteriza al eje es:

$$\begin{aligned} x^* &= w_1 + u_x = w_1 + u_1 \Big|_{y=0, z=0} = x, \\ y^* &= w_2 + u_y = u_2 \Big|_{z=0, y=0} = 0, \\ z^* &= w_3 + u_z = u_3 \Big|_{z=0, y=0} = \frac{x^2}{2\rho}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Calculamos ahora la dilatación cúbica:

$$\frac{\Delta V}{V} = Tr(e_{ij}) = \frac{z}{\rho}(2\nu - 1) \quad (4.48)$$

Posteriormente estudiaremos la interpretación física de este problema.

Ejercicio 4.

La torsión de una barra de sección transversal circular corresponde a los desplazamientos siguientes:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tau x_2 x_3 + a x_2 + b x_3 + c \\ u_2 &= \tau x_1 x_3 - a x_1 + e x_3 + f \\ u_3 &= -b x_1 - e x_2 + k \end{aligned} \quad (4.49)$$

Seleccionar los coeficientes a, b, c, e, f, k de tal manera que la sección que pasa por $x_3 = 0$ esté fija en la forma:

1. El punto $O = (0, 0, 0)$ no tenga desplazamiento.
2. El elemento del eje dx_3 no rote en el plano $x_1 O x_3$, ni en el plano $x_2 O x_3$.
3. El elemento del eje dx_2 no rote en el plano $x_1 O x_2$.

Encontrar el tensor de deformación.

Verificar que se cumplan las ecuaciones de Saint Venant.

Para el punto 1 debemos pedir que el origen $O = (0, 0, 0)$ no tenga desplazamiento, lo cual nos indica inmediatamente que $c = f = k = 0$, ya que $u_1(0, 0, 0) = c, u_2(0, 0, 0) = f, u_3(0, 0, 0) = k$.

Con el objeto de imponer las otras dos condiciones necesitamos calcular las componentes del tensor de rotación $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -\tau x_3 + a, & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \tau x_3 - a, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= -b, & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= -e, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\tau x_2 + b, & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= \tau x_1 + e, \end{aligned} \quad (4.50)$$

⁵Los detalles de este problema se tratarán en la sección 7.4.

con estas derivadas calculamos el tensor de rotación

$$\Omega_{12} = -\tau x_3 + a, \quad \Omega_{13} = -\frac{\tau x_2}{2} + b, \quad \Omega_{23} = \frac{\tau x_1}{2} + e. \quad (4.51)$$

Estas componentes del tensor de rotación se relacionan con las componentes del vector de rotación de manera que: $\Omega_1 = \Omega_{23}$, $\Omega_2 = \Omega_{13}$, $\Omega_3 = -\Omega_{12}$. Ahora bien, la condición 2 implica que el vector de rotación debe estar sobre el eje x_3 , por lo tanto necesitamos que $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ para x_3 arbitraria y $x_1 = x_2 = 0$. De acuerdo con los valores que obtuvimos para las componentes del vector de rotación tenemos que $\Omega_{32} = \Omega_{13} = 0$ y esto nos da como resultado que $e = b = 0$.

La condición 3 implica que el vector de rotación esté en el eje x_2 , por lo cual $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$ y entonces $a = e = 0$.

Ahora el vector de desplazamiento queda como:

$$u_1 = -\tau x_2 x_3, \quad u_2 = \tau x_1 x_3, \quad u_3 = 0. \quad (4.52)$$

Con este vector de desplazamiento calculamos el tensor de deformación, que resulta:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\tau x_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\tau x_1}{2} \\ -\frac{\tau x_2}{2} & \frac{\tau x_1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Las ecuaciones de Saint Venant se cumplen trivialmente.

4.6. Apéndice

En este apéndice vamos a demostrar la relación entre los ángulos que aparece en la figura 4.4, es decir que $\alpha = 2\beta$,

El $\triangle ABD$ es isósceles, por lo tanto

$$2\angle DAB + \angle ABD = \pi \quad (4.54)$$

de donde el $\angle ABD = \pi - 2\angle DAB$. También el $\triangle ABD_1$ es isósceles y entonces

$$2\angle D_1AB + \alpha + \angle DBA = \pi \quad (4.55)$$

pero $\angle DBA = \angle ABD$ y sustituyendo obtenemos

$$2\angle D_1AB + \alpha + \pi - 2\angle DAB = \pi$$

de manera que $2\angle D_1AB - 2\angle DAB + \alpha = 0$, por lo tanto

$$\alpha = 2\angle DAB - 2\angle D_1AB = 2(\angle DAB - \angle D_1AB) \quad (4.56)$$

de la figura 4.4 vemos que

$$\angle DAB = \beta + \angle D_1AB \implies \beta = \angle DAB - \angle D_1AB \quad (4.57)$$

al sustituir la ec. (4.56) en la ec. (4.57) obtenemos de inmediato que

$$\alpha = 2\beta \quad (4.58)$$

4.7. Problemas

Calcular los tensores de deformación y rotación, la dilatación cúbica y las deformaciones principales para los casos siguientes:

1.- Dilatación uniforme

$$u_x = ex, \quad u_y = ey, \quad u_z = ez$$

donde e es una constante adimensional.

2.- Extensión simple

$$u_x = ex, \quad u_y = u_z = 0.$$

3.- Deformación cortante

$$u_x = 2sy, \quad u_y = u_z = 0.$$

4.- Deformación plana

$$u_x = u_x(x, y), \quad u_y = u_y(x, y), \quad u_z = 0.$$

Capítulo 5

Ley de Hooke Generalizada

5.1. Introducción

Hasta ahora hemos estudiado el estado de esfuerzos en un cuerpo y las deformaciones que ocurren en él; sin embargo, lo hemos hecho separadamente sin que existan relaciones entre el esfuerzo y las deformaciones. Cada uno de estos estudios separadamente no permiten resolver problemas en Elasticidad, es necesario tener una ley fenomenológica que los relacione. En Elasticidad esta ley fenomenológica se trabaja con la mayor generalidad posible y la podríamos escribir en la forma siguiente:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(e_{mn}), \quad (5.1)$$

es decir que los esfuerzos están escritos en términos de las deformaciones (también podría escribirse al revés, es decir deformaciones en términos de los esfuerzos).

En el caso de deformaciones pequeñas, la forma más simple y con intervalo de validez relativamente amplio es una forma lineal, donde

$$\sigma_{11} = \alpha_1 e_{11} + \beta_1 e_{22} + \gamma_1 e_{33} + \alpha_2 e_{12} + \beta_2 e_{13} + \gamma_2 e_{23}, \quad (5.2)$$

es un ejemplo de la ecuación (5.1) para el caso lineal. Es muy importante notar que en la ecuación (5.2) está implícito el “principio de superposición”, es decir que los efectos producidos por una fuerza son independientes de la existencia de otras fuerzas. Además no hay deformación o esfuerzos residuales,¹ esto significa que la existencia de una deformación es consecuencia de la presencia de un esfuerzo en el sistema.

En un caso más general las ecuaciones (5.1) podrían llegar a ser muy complicadas ya que podrían ser no-lineales, sin embargo en este curso nos limitaremos al estudio de los casos lineales y no sólo eso, sino que haremos algunas simplificaciones que son válidas en los problemas más sencillos.

¹De manera formal, esto significa que $\sigma_{ij}(e_{ij} = 0) = 0$ y también $e_{ij}(\sigma_{ij} = 0) = 0$.

5.2. Caso simplificado

Consideremos los tipos de sistemas que podemos estudiar:

1. Homogéneos: Su estructura y composición son los mismos en todos sus puntos.
2. No-homogéneos: Si no se cumple la condición inmediata anterior.
3. Isótropos o Anisótropos: Los isótropos serán sistemas homogéneos cuyas propiedades son iguales en todas direcciones, y anisótropos si hay alguna o algunas direcciones en las cuales las propiedades sean diferentes, como sucede en el caso de sistemas cristalinos que tienen propiedades elásticas y ópticas diferentes en distintas direcciones.

En el caso de las relaciones lineales del tipo de la ecuación (5.2), los coeficientes de las componentes del tensor de deformación están relacionados con las propiedades elásticas de un cuerpo en diferentes direcciones. Dichos coeficientes se conocen con el nombre de módulos elásticos.

Con el objeto de iniciar nuestro estudio acerca de la Ley de Hooke tomamos un caso sencillo y lo vamos a manejar de una manera simple, para después considerar la demostración completa.

Consideramos el caso de un cuerpo isótropo y entonces el número de módulos elásticos que necesitaremos será el menor posible. Para deformaciones pequeñas casi siempre es posible tener una región lineal en la gráfica “esfuerzo-deformación”, como se muestra en la figura 5.1. Específicamente para la figura tendríamos

$$\sigma_{11} = E e_{11}, \quad (5.3)$$

que nos relaciona el esfuerzo normal σ_{11} con la elongación e_{11} , el coeficiente E se llama “módulo longitudinal” o “módulo de Young”, es independiente de σ_{11} y e_{11} , pero podría ser función de la temperatura. Además es importante enfatizar que sólo es válida en la región de comportamiento lineal.

Unidades: Las componentes del tensor de deformación son adimensionales, por lo tanto las unidades del módulo de Young deben ser las mismas que el esfuerzo, es decir

$$[E] = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{M}{Lt^2}. \quad (5.4)$$

Experimentalmente puede demostrarse que a una elongación como la de la ecuación (5.3) corresponden elongaciones en los otros ejes, además son proporcionales en magnitud y de signo opuesto, de manera que, si solamente está presente e_{11} , entonces

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}, \quad (5.5)$$

donde ν es una constante adimensional que se conoce con el nombre de “razón de Poisson”. Tanto E como ν dependen del material, como por ejemplo

$$E = \begin{cases} 2,14 \times 10^3 \frac{kg}{cm \cdot s^2}, & \text{acero} \\ 1,09 \times 10^2 \frac{kg}{cm \cdot s^2}, & \text{madera} \end{cases}$$

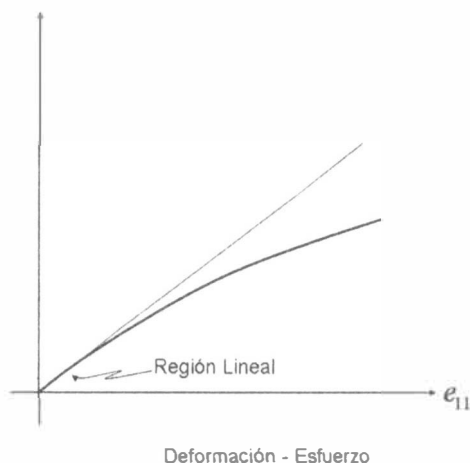


Figura 5.1 Relación esfuerzo-deformación.

La razón de Poisson, ν , siempre es menor que $\frac{1}{2}$.

Los experimentos demuestran que cuando hay una relación lineal como en la ecuación (5.3) entre la elongación y el esfuerzo normal, también hay proporcionalidad entre los esfuerzos cortantes y las deformaciones cortantes de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= 2Ge_{12}, \\ \sigma_{13} &= 2Ge_{13}, \\ \sigma_{23} &= 2Ge_{23}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

que constituye la ley de Hooke para los esfuerzos cortantes, la propiedad G se conoce con el nombre de “módulo de elasticidad cortante” y tiene unidades $[G] = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}}$. El módulo cortante depende del material pero es independiente de la deformación y del esfuerzo, aunque puede depender de la temperatura. Las tres propiedades que hemos definido no son independientes y demostraremos más adelante que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.\tag{5.7}$$

5.2.1. Deformaciones expresadas en términos de los esfuerzos

Consideremos un paralelepípedo con caras paralelas a los planos coordenados como se muestra en la figura 5.2. Veamos la deformación producida por los diferentes esfuerzos normales posibles. Empezamos con el análisis de la elongación e_{11} . Cuando sólo existe esfuerzo σ_{11} la deformación del plano perpendicular a Ox_1 es proporcional a σ_{11} , como se muestra en la figura 5.3a, y es igual a $e'_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}$. Cuando sólo existe el esfuerzo σ_{22} hay una deformación en el plano

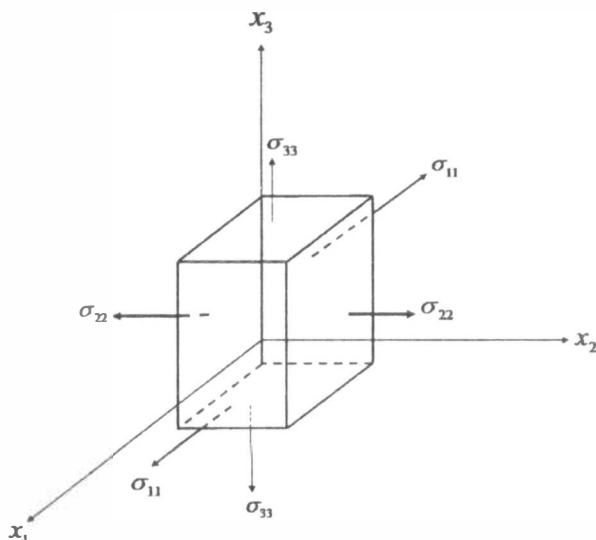


Figura 5.2: Esfuerzos normales que actúan sobre un elemento de volumen.

perpendicular a Ox_1 que tiene la forma $e''_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{22}$ y se muestra en la figura 5.3b.

A su vez, cuando sólo existe el esfuerzo σ_{33} , la deformación del plano perpendicular a Ox_1 es $e'''_{11} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{33}$, como se muestra en la figura 5.3c.

Esto significa que la deformación total del plano perpendicular a Ox_1 producida por la presencia de los tres esfuerzos normales es

$$e_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad (5.8)$$

de manera semejante podemos analizar las otras elongaciones y mostrar que

$$\begin{aligned} e_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], \\ e_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11})]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Estas ecuaciones también se pueden escribir en términos de la traza del tensor de esfuerzos, por ejemplo

$$e_{11} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{11} - \nu Tr(\sigma_{ij})], \quad (5.10)$$

de manera general se tiene

$$e_{ii} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ii} - \nu Tr(\sigma_{ij})], \quad \text{no hay suma sobre } i. \quad (5.11)$$

Deformación del plano $\perp$ a Ox_1 , producida por los esfuerzos normales

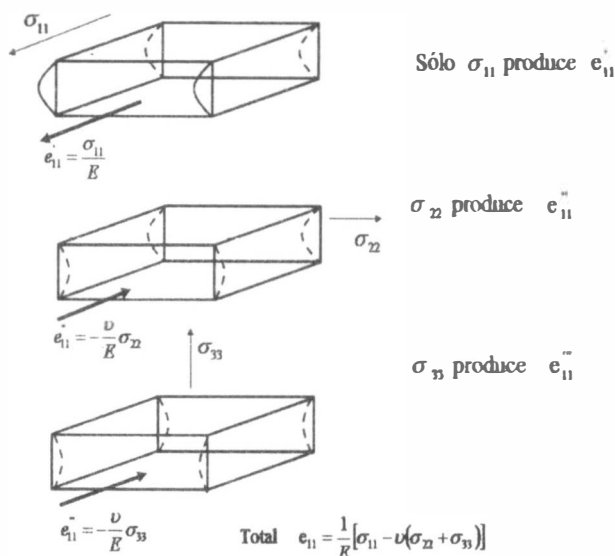


Figura 5.3: Elongaciones producidas por esfuerzos normales. La figura superior corresponde a la figura 5.3a, la intermedia a la 5.3b y la inferior a la figura 5.3c, a las que hace referencia el texto.

Para las deformaciones cortantes tenemos

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (5.12)$$

donde también se puede utilizar la relación del coeficiente cortante G con el módulo de Young y la razón de Poisson.

Ahora vamos a encontrar la dilatación cúbica; sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \sum_i e_{ii} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \sum_i \sigma_{ii} - 3\nu \text{Tr}(\sigma_{ij}) \right] \\ &= \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \text{Tr}(\sigma_{ij}), \quad \text{o bien} \\ \text{Tr}(e_{ij}) &= \frac{1 - 2\nu}{E} \text{Tr}(\sigma_{ij}), \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{1 - 2\nu}{E} \text{Tr}(\sigma_{ij}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Entonces, la deformación volumétrica es proporcional a la suma de los esfuerzos normales y, de hecho, corresponde a la ley de Hooke en forma volumétrica.

Puesto que la traza del tensor de esfuerzos es un invariante, vemos que la dilatación cúbica es independiente del sistema de ejes coordenados.

Ahora supongamos que el volumen del sistema que estamos considerando se ve sometido a la acción de esfuerzos normales de tensión únicamente, esto es

$$\sigma_{11} > 0, \quad \sigma_{22} > 0, \quad \sigma_{33} > 0, \longrightarrow Tr(\sigma_{ij}) > 0,$$

en este caso el volumen no puede decrecer, entonces

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1 - 2\nu)}{E} Tr(\sigma_{ij}) > 0 \longrightarrow 1 - 2\nu > 0, \quad (5.14)$$

y, por lo tanto

$$\nu < \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

5.2.2. Esfuerzos en términos de las deformaciones

Ahora vamos a escribir los esfuerzos en términos de las deformaciones, para ello invertimos las ecuaciones (5.11)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33} &= Ee_{11} \\ -\nu\sigma_{11} + \sigma_{22} - \nu\sigma_{33} &= Ee_{22} \\ -\nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} + \sigma_{33} &= Ee_{33}. \end{aligned}$$

Llamamos A al determinante de este sistema de ecuaciones

$$|\underline{A}| = \det \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ \nu & -\nu & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

desarrollamos para obtener

$$\begin{aligned} |\underline{A}| &= (1 - \nu^2) + \nu(-\nu - \nu^2) - \nu(\nu^2 + \nu) = \\ &= 1 - \nu^2 + \nu^2(-1 - \nu) - \nu^2(1 + \nu) \\ &= 1 - \nu^2 - 2\nu^2(1 + \nu), \\ \text{entonces } |\underline{A}| &= (1 + \nu)(1 - \nu - 2\nu^2). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Usando la regla de Cramer tendremos que

$$\sigma_{11} = \frac{1}{|\underline{A}|} \begin{pmatrix} Ee_{11} & -\nu & -\nu \\ Ee_{22} & 1 & -\nu \\ Ee_{33} & -\nu & 1 \end{pmatrix} = \frac{E}{|\underline{A}|} [e_{11}(1 - \nu - 2\nu^2) + (\nu^2 + \nu)I_e], \quad (5.18)$$

sin embargo $|\underline{A}| = (1 + \nu)^2(1 - 2\nu)$, de manera que

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1 + \nu} e_{11} + \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} I_e, \quad (5.19)$$

donde $I_e = \text{Tr}(e_{ij})$ que es un invariante del tensor de deformación. De forma semejante se obtienen las otras componentes y entonces podemos escribir que

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1+\nu} e_{ii} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} I_e, \quad \text{no hay suma sobre } i, \quad (5.20)$$

y, por otra parte, para los esfuerzos cortantes tenemos:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad \text{donde} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (5.21)$$

a su vez

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (5.22)$$

las cantidades λ y μ se conocen como coeficientes de Lamé y nos damos cuenta que, en términos de estos coeficientes, los esfuerzos normales quedan escritos de manera más simple, puesto que

$$\sigma_{ii} = 2\mu e_{ii} + \lambda I_e, \quad \text{sin suma sobre } i \quad (5.23)$$

si ahora sumamos sobre i obtendremos la traza del tensor de esfuerzos

$$I_\sigma = (2\mu + 3\lambda) I_e, \quad (5.24)$$

$\frac{1}{3} I_\sigma$ se llama esfuerzo octaédrico y además $\frac{1}{3} I_e$ es la deformación cúbica promedio. Es claro que todos estos coeficientes están relacionados entre ellos, de hecho

$$E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad y \quad (5.25)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (5.26)$$

Además resulta que $\lambda > 0$ y $\mu > 0$.

5.3. Termodinámica de la deformación

Antes de trabajar con la generalización de la ley de Hooke vamos a pensar en el medio continuo como un sistema termodinámico y entonces nos ocuparemos del trabajo realizado por las fuerzas elásticas. Supongamos que se tiene un cuerpo sobre el cual actúan los esfuerzos $\mathbf{t}^{\dot{n}}$ y las fuerzas de volumen $\rho \mathbf{b}$, y éstas se incrementan por una cantidad $d\mathbf{t}^{\dot{n}}$ y $\rho d\mathbf{b}$ para densidad ρ constante. Como resultado se produce un desplazamiento relativo $\mathbf{u} \rightarrow d\mathbf{u}$ y el trabajo realizado será

$$\bar{d}W = \int_V (\rho b_i du_i) dV + \int_S (t_i^{\dot{n}} du_i) dS, \quad (5.27)$$

pero $t_i^{\dot{n}} = \sigma_{ij} n_j$ y, al sustituir en la ec. (5.27), tenemos

$$\bar{d}W = \int_V (\rho b_i du_i) dV + \int_S (\sigma_{ij} n_j du_i) dS, \quad (5.28)$$

por el teorema de la divergencia, la integral de superficie se transforma a una integral de volumen

$$\begin{aligned}\bar{d}W &= \int_V \left(\rho b_i du_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} du_i) \right) dV \\ &= \int_V \left(\rho b_i du_i + \sigma_{ij} \frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] du_i \right) dV,\end{aligned}\quad (5.29)$$

ahora para el segundo término tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} &= d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \\ \text{con lo cual} \quad &= \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \sigma_{ij} d(e_{ij} + \Omega_{ij}) = \sigma_{ij} de_{ij},\end{aligned}\quad (5.30)$$

donde la última igualdad en la ecuación (5.30) se obtiene recordando que la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico se anula. Ahora sustituimos la ec. (5.30) en la ec. (5.29) y en el último término se sustituye la condición de equilibrio, ec. (3.31), por lo tanto

$$\bar{d}W = \int_V \left[\rho b_i du_i + \sigma_{ij} de_{ij} - \rho b_i du_i \right] dV, \quad (5.31)$$

de donde

$$\bar{d}W = \int_V \sigma_{ij} de_{ij} dV, \quad (5.32)$$

ahora el trabajo por unidad de volumen será

$$\bar{d}w = \sigma_{ij} de_{ij}. \quad (5.33)$$

Supongamos ahora que la deformación de un cuerpo elástico es un proceso reversible termodinámicamente, lo que implica que el estado del cuerpo estará determinado de forma única por variables termodinámicas. Tomemos a la energía interna (U) por unidad de volumen y a la entropía $\mathcal{S}$ por unidad de volumen, entonces la primera ley nos permite escribir que:

$$dU = Td\mathcal{S} + \bar{d}w \quad (5.34)$$

y sustituyendo el trabajo tendremos

$$dU = Td\mathcal{S} + \sigma_{ij} de_{ij}, \quad U = U(\mathcal{S}, e_{ij}). \quad (5.35)$$

Ahora vamos a escoger como variables independientes a la temperatura T y al tensor de deformación e_{ij} , de manera que la energía libre de Helmholtz (F)

será el potencial termodinámico adecuado para la descripción del sistema

$$F = U - TS, \quad F = F(e_{ij}, T),$$

$$dF = \sigma_{ij} de_{ij} - SdT \quad y \quad (5.36)$$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_T de_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{e_{ij}} dT,$$

$$\text{de donde } \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_T, \quad S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{e_{ij}} \quad (5.37)$$

que también podrían escribirse en términos de la energía interna

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \right)_S, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{e_{ij}}. \quad (5.38)$$

Para el caso de un proceso isotérmico ($T = \text{constante}$) tenemos que

$$dF = \sigma_{ij} de_{ij} \quad \text{coincide con el trabajo,}$$

$$\text{a su vez } dF = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_T de_{ij}. \quad (5.39)$$

Ahora bien, si σ_{ij} es una función lineal de e_{ij} tenemos

$$dF = [\sigma_{ij} \text{ (lineal en } e_{ij})] de_{ij}, \quad (5.40)$$

implica que F es una función homogénea de orden 2 en las variables e_{ij} , por lo tanto

$$\left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_{e_{ij}} = 2F, \quad (5.41)$$

esto significa que si $\sigma_{ij} = C_{ij}^{mn} e_{mn}$ también se puede escribir que

$$2F = C_{ij}^{mn} e_{mn} e_{ij}, \quad (5.42)$$

de manera que

$$F = \frac{1}{2} C_{ij}^{mn} e_{mn} e_{ij}. \quad (5.43)$$

¿Cuál es el significado de esta expresión ?

Nos garantiza la existencia del potencial elástico, es decir existe una función F cuadrática en las componentes del tensor de deformación y es una función que solamente depende de las deformaciones y NO de la forma en la que se llegó al estado deformado. Dicho de otra forma, la energía libre no depende de la trayectoria seguida por el proceso entre dos estados del sistema. Como hemos visto, dicha función es la energía libre de Helmholtz.

¿Cuáles son las consecuencias de ello ?

Puesto que F sólo depende de las componentes del tensor de deformación y además es una función continua y diferenciable, las segundas derivadas cruzadas deben ser iguales, ésto es

$$\frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{mn}} = \frac{\partial^2 F}{\partial e_{mn} \partial e_{ij}} \longrightarrow C_{ij}^{mn} = C_{mn}^{ij}. \quad (5.44)$$

También nos permite reducir el número de cantidades C_{ij}^{mn} , veamos como.

Para empezar nos damos cuenta de que la determinación del tensor de esfuerzos σ_{ij} , como una función lineal de las componentes del tensor de deformación, requiere de 81 cantidades C_{ij}^{mn} . De hecho, este tensor es de cuarto orden y por ello tiene en principio 81 componentes, que podemos acomodar en una matriz 9×9 donde están agrupados los índices ij para etiquetar los renglones y los índices mn para etiquetar las columnas. La simetría que hemos obtenido implica que de los elementos fuera de la diagonal $81 - 9 = 72$ sólo la mitad son independientes, de manera que la existencia del potencial nos ha reducido a 36 el número de módulos independientes. Los 36 módulos independientes los arreglamos en una matriz 6×6 y, nuevamente, apartando la diagonal tenemos $36 - 6 = 30$ módulos. Debido a la simetría del tensor

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{mn} e_{mn} = \sigma_{ji} = C_{ji}^{mn} e_{mn} \rightarrow C_{ij}^{mn} = C_{ji}^{mn}. \quad (5.45)$$

A su vez, la simetría del tensor e_{ij} nos dice que

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{mn} e_{mn} = C_{ij}^{mn} e_{nm} = C_{ij}^{nm} e_{nm} \rightarrow C_{ij}^{mn} = C_{ij}^{nm}. \quad (5.46)$$

de manera que solamente $\frac{30}{2} = 15$ son diferentes, éstas, agregadas a las 6 componentes de la diagonal, nos da 21 módulos independientes. Éste es el número máximo de módulos independientes que puede tener un cuerpo elástico, cada uno de estos módulos debe obtenerse experimentalmente y dentro de la región lineal de la gráfica esfuerzo-deformación.

5.4. Reducción del número de módulos para un sistema isótropo.

Vamos a considerar la ley de Hooke generalizada, que ahora sabemos que sólo puede contener 21 módulos independientes y vamos a suponer que nuestro sistema es isótropo. ¿Qué significa ésto? La propiedad de isotropía de un sistema significa que no distingue dirección alguna, de manera equivalente podemos decir que sus propiedades son las mismas en todas las direcciones. Vamos a demostrar que en este caso el número máximo de módulos elásticos independientes es de 2. Para hacerlo escribimos las seis componentes independientes del tensor de esfuerzos como combinaciones lineales de las 6 componentes del tensor

de deformación.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{xz} + C_{16}e_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= C_{21}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{xz} + C_{26}e_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= C_{31}e_{xx} + C_{32}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{xz} + C_{36}e_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= C_{41}e_{xx} + C_{42}e_{yy} + C_{43}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{xz} + C_{46}e_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= C_{51}e_{xx} + C_{52}e_{yy} + C_{53}e_{zz} + C_{54}e_{yz} + C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{61}e_{xx} + C_{62}e_{yy} + C_{63}e_{zz} + C_{64}e_{yz} + C_{65}e_{xz} + C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Al tomar en cuenta la existencia del potencial elástico se tienen $36 - 15 = 21$ módulos independientes, en el arreglo que tenemos arriba esta condición implica que: $C_{ij} = C_{ji}$ y escribo explícitamente el resultado,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{xz} + C_{16}e_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{xz} + C_{26}e_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{xz} + C_{36}e_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= C_{14}e_{xx} + C_{24}e_{yy} + C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{xz} + C_{46}e_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= C_{15}e_{xx} + C_{25}e_{yy} + C_{35}e_{zz} + C_{45}e_{yz} + C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{16}e_{xx} + C_{26}e_{yy} + C_{36}e_{zz} + C_{46}e_{yz} + C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Para una demostración general debemos tomar el conjunto de las ecuaciones (5.48) y efectuar una rotación arbitraria. Aplicar las reglas de transformación de tensores de segundo orden y pedir que el resultado sea independiente de la rotación. Si bien esto nos daría un resultado muy general, para medios isótropos es muy ilustrativo hacer la demostración con rotaciones particulares. Esto es debido a que entonces podemos considerar medios elásticos con simetrías específicas y aplicar nuestros resultados a medios cristalinos.

De acuerdo con esta estrategia, hacemos una inversión del eje x , ¿cómo se transforman los tensores σ_{ij} y e_{ij} ?

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{xx} & e_{xx} &\rightarrow e_{xx} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{yy} & e_{yy} &\rightarrow e_{yy} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{zz} & e_{zz} &\rightarrow e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow \sigma_{yz} & e_{yz} &\rightarrow e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow -\sigma_{xz} & e_{xz} &\rightarrow -e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow -\sigma_{xy} & e_{xy} &\rightarrow -e_{xy}.
 \end{aligned}$$

Aplicamos esta transformación a las ecuaciones (5.48) y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} - C_{15}e_{xz} - C_{16}e_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} - C_{25}e_{xz} - C_{26}e_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} - C_{35}e_{xz} - C_{36}e_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= C_{14}e_{xx} + C_{24}e_{yy} + C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} - C_{45}e_{xz} - C_{46}e_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= C_{15}e_{xx} + C_{25}e_{yy} + C_{35}e_{zz} + C_{45}e_{yz} + C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{16}e_{xx} + C_{26}e_{yy} + C_{36}e_{zz} + C_{46}e_{yz} + C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}, \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

al igualar las ecs.(5.45) con las ecuaciones (5.48) tenemos que

$$C_{15} = C_{16} = 0, \quad C_{25} = C_{26} = 0, \quad C_{35} = C_{36} = 0 \quad C_{45} = C_{46} = 0, \quad (5.50)$$

el número de módulos que quedan es $21 - 8 = 13$. Las ecuaciones nos quedan en la forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{14}e_{xx} + C_{24}e_{yy} + C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}. \quad (5.51)
 \end{aligned}$$

En estas ecuaciones hacemos una inversión del eje y , la tranformación implica que $y \rightarrow -y$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{xx} & e_{xx} &\rightarrow e_{xx} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{yy} & e_{yy} &\rightarrow e_{yy} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{zz} & e_{zz} &\rightarrow e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow -\sigma_{yz} & e_{yz} &\rightarrow -e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow \sigma_{xz} & e_{xz} &\rightarrow e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow -\sigma_{xy} & e_{xy} &\rightarrow -e_{xy}, \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

aplicando estas transformaciones a las ecuaciones (5.51) tendremos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} - C_{14}e_{yz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} - C_{24}e_{yz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} - C_{34}e_{yz} \\
 \sigma_{yz} &= -C_{14}e_{xx} - C_{24}e_{yy} - C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{55}e_{xz} - C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= -C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}, \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

de donde es inmediato que:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{56} = 0, \quad (5.54)$$

y nos quedan $13 - 4 = 9$ módulos, las ecuaciones que ahora resultan son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{55}e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &= C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Si hacemos una inversión del eje z no nos da algo nuevo, queda al lector verificarlo.

Como paso siguiente realizamos una rotación de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje z , esto es equivalente a $x \rightarrow y$, las componentes de los tensores se transforman como sigue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{yy} & e_{xx} &\rightarrow e_{yy} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{xx} & e_{yy} &\rightarrow e_{xx} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{zz} & e_{zz} &\rightarrow e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow \sigma_{xz} & e_{yz} &\rightarrow e_{xz} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow \sigma_{yz} & e_{xz} &\rightarrow e_{yz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow \sigma_{yx} & e_{xy} &\rightarrow e_{yx}.
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Veamos con detalle el efecto de esta transformación, para lo cual tomamos el elemento σ_{xx} de la ecuación (5.55)

$$\sigma_{xx} = C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz},$$

hacemos el cambio propuesto en la ecuación (5.56), entonces nos queda

$$\sigma_{yy} = C_{11}e_{yy} + C_{12}e_{xx} + C_{13}e_{zz},$$

comparamos e igualamos con

$$\sigma_{yy} = C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz},$$

lo cual implica que

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}. \tag{5.57}$$

Ahora tomamos $\sigma_{yz} = C_{44}e_{yz}$, hacemos el cambio y nos da que $\sigma_{xz} = C_{44}e_{xz}$, y ahora igualamos con $\sigma_{xz} = C_{55}e_{xz}$, de donde obtenemos que $C_{44} = C_{55}$. Tendremos entonces 3 relaciones adicionales, de manera que ahora tenemos $9 - 3 = 6$ módulos independientes. Las relaciones esfuerzo-deformación nos quedan

ahora como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{11}e_{yy} + C_{13}e_{zz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{13}e_{yy} + C_{33}e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{44}e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &= C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Hacemos una rotación de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje y , esto significa $x \rightarrow z$, la transformación de las componentes de los tensores es

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{zz} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{yy} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{xx} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow \sigma_{yx} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow \sigma_{xz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow \sigma_{zy}.
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Con el mismo procedimiento obtenemos que

$$C_{11} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{13}, \quad C_{44} = C_{66}. \tag{5.60}$$

Hasta aquí tenemos 3 módulos independientes y las ecuaciones para los esfuerzos son:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}(e_{yy} + e_{zz}) \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}(e_{xx} + e_{zz}) + C_{11}e_{yy} \\
 \sigma_{zz} &= C_{12}(e_{xx} + e_{yy}) + C_{11}e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{44}e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &= C_{44}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Por el momento hemos llegado a tres módulos elásticos independientes, pidiendo invariancia ante inversiones y rotaciones de $\frac{\pi}{2}$, sin embargo esto no es suficiente para garantizar la isotropía total del sistema. Necesitamos hacer una rotación adicional en un ángulo y dirección arbitrarias. Con el objeto de no efectuar toda el álgebra involucrada tomaremos una rotación de $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje y . La matriz de rotación correspondiente es

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{5.62}$$

El tensor de esfuerzos transformado lo construimos con

$$\underline{\sigma}' = \underline{\mathcal{B}} \underline{\Sigma} \underline{\mathcal{B}}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (5.63)$$

hacemos el primer producto

$$\underline{\sigma}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{11} + \sigma_{13}) & \sigma_{12} & \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_{11} + \sigma_{13}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{12} + \sigma_{23}) & \sigma_{22} & \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_{12} + \sigma_{23}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{13} + \sigma_{33}) & \sigma_{23} & \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_{13} + \sigma_{33}) \end{pmatrix}, \quad (5.64)$$

realizamos el producto indicado y simplificamos

$$\underline{\sigma}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33} + 2\sigma_{13}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{12} + \sigma_{23}) & \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{12} + \sigma_{23}) & \sigma_{22} & \frac{1}{2}(\sigma_{23} - \sigma_{12}) \\ \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{23} - \sigma_{12}) & \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{13}) \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Por otra parte el tensor de deformación también se transforma, de manera que podemos escribir

$$\underline{e}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e_{11} + e_{33} + 2e_{13}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{12} + e_{23}) & \frac{1}{2}(e_{33} - e_{11}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{12} + e_{23}) & e_{22} & \frac{1}{2}(e_{23} - e_{12}) \\ \frac{1}{2}(e_{33} - e_{11}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{23} - e_{12}) & \frac{1}{2}(e_{11} + e_{33} - 2e_{13}) \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Ahora bien, para exigir la invariancia debemos pedir que en el nuevo sistema de coordenadas las relaciones esfuerzo-deformación permanezcan igual, esto significa que:

$$\sigma'_{11} = c_{11}e'_{11} + c_{12}(e'_{22} + e'_{33}) \quad (5.67)$$

que al sustituir las cantidades transformadas nos da lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{33} + 2\sigma_{13}) &= c_{11}\frac{1}{2}(e_{11} + e_{33} + 2e_{13}) + \\ &+ c_{12}\left[e_{22} + \frac{1}{2}(e_{11} + e_{33} - 2e_{13})\right] \\ &= \frac{1}{2}e_{11}(c_{11} + c_{12}) + \frac{1}{2}e_{33}(c_{11} + c_{12}) + e_{13}(c_{11} - c_{12}). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Por otra parte, en el primer miembro tenemos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[c_{11}e_{11} + c_{12}(e_{12} + e_{33}) + c_{11}e_{33} + c_{12}(e_{11} + e_{22}) + 4c_{44}e_{13}\right] = \\ &= \frac{1}{2}e_{11}(c_{11} + c_{12}) + \frac{1}{2}e_{33}(c_{11} + c_{12}) + e_{13}(c_{11} - c_{12}). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Al comparar término a término vemos que hay una relación nueva

$$c_{11} - c_{12} = 2c_{44}, \quad (5.70)$$

además podemos ver fácilmente que es la única. De hecho, podemos tomar cualquier otra componente del tensor de los esfuerzos y, mediante un procedimiento similar, llegaremos a la misma relación. Por lo tanto, de los tres módulos que teníamos sólo dos de ellos son independientes. Debemos notar que la demostración que hemos hecho no es del todo general, pues deberíamos haber realizado una rotación arbitraria desde el principio, pero también es claro que el álgebra se habría complicado más sin obtener por ello mayor información. Los dos módulos independientes reciben nombres diferentes, $c_{44} = \mu$ y $c_{12} = \lambda$, ($c_{11} = \lambda + 2\mu$) se llaman coeficientes de Lamé y en la sección 2 hemos visto su relación con los otros módulos elásticos del caso simplificado.

5.5. Energía libre para un sistema homogéneo e isótropo.

Regresamos ahora a la ecuación (5.43) donde tenemos escrita la energía libre en su forma más general.

De acuerdo con la ecuación (5.37), las componentes del tensor de los esfuerzos son

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_T, \quad (5.71)$$

entonces

$$F = \sigma_{ij} e_{ij}. \quad (5.72)$$

Ahora bien, para un sistema homogéneo e isótropo ya tenemos las expresiones del esfuerzo en términos de la deformación, de manera que vamos a sustituirlas para encontrar la forma de la energía libre en este caso particular,

$$\begin{aligned} 2F &= \sum_i \left(\frac{E}{1+\nu} e_{ii} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} I_e \right) e_{ii} + \sum_{i,j,i \neq j} \mu e_{ij} e_{ij} \\ &= 2\mu \sum_i (e_{ii})^2 + \lambda I_e^2 + \mu \sum_{i,j,i \neq j} e_{ij} e_{ij} \\ &= 2\mu (e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + \lambda I_e^2 + \mu (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2), \end{aligned} \quad (5.73)$$

a partir de esta ecuación vemos de inmediato que $F > 0$ si los coeficientes de Lamé $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ son positivos.

Si ahora utilizamos la relación de las deformaciones en términos de los esfuerzos tendremos la expresión siguiente para la energía libre:

$$2F = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E} I_\sigma^2 + \frac{1}{G} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2). \quad (5.74)$$

Tomando en cuenta las expresiones que hemos obtenido podemos tomar otro enfoque para construir la energía libre del sistema. Para un medio homogéneo y con total isotropía, en el caso de deformaciones pequeñas, se hace un desarrollo

de la energía en potencias de e_{ij} y por el momento consideramos una situación isotérmica, entonces

$$F = F_0 + \gamma e_{ii} + \delta (e_{ii})^2 + \beta I_2 + \dots \quad (5.75)$$

donde I_2 es el segundo invariante del tensor de deformación, recordemos

$$I_2 = e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz} - e_{xy}^2 - e_{xz}^2 - e_{yz}^2$$

$$e_{ii} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

Las cantidades γ , δ y β son cantidades independientes de e_{ij} , pero podrían ser funciones de la temperatura y caracterizar a las propiedades térmicas del medio en cuestión. Ahora bien

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right) \bigg|_{T, e_{ij}=0} = 0, \quad (5.76)$$

por lo cual

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right) \bigg|_{T, e_{ij}} = \gamma \longrightarrow \gamma = 0 \quad (5.77)$$

es decir, la energía libre no puede contener términos de primer orden en e_{ij} , por lo tanto

$$F = F_0 + \delta (e_{ii})^2 + \beta I_2 = F_0 + \delta I_1^2 + \beta I_2, \quad (5.78)$$

ya que, para un medio isótropo, I_1^2 e I_2 son los únicos invariantes que se pueden formar hasta segundo orden en las componentes del tensor de deformación. Es conocido que, en el estado de equilibrio termodinámico, la energía libre tiene un mínimo y si no hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema, el mínimo ocurre cuando $e_{ij} = 0$. Esto significa que la energía libre debe ser una forma cuadrática positiva definida, y para ver lo que esto significa sustituimos los invariantes en la expresión de la energía. Primero la reescribimos en la forma siguiente:

$$F = F_0 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu \right) I_1^2 - 2\mu I_2, \quad (5.79)$$

ahora calculamos

$$\begin{aligned} I_1^2 - 2I_2 &= e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{xx}e_{yy} + 2e_{xx}e_{zz} + 2e_{zz}e_{yy} - \\ &\quad - 2e_{xx}e_{yy} + 2e_{xx}e_{zz} + 2e_{zz}e_{yy} + 2e_{xy}^2 + 2e_{xz}^2 + 2e_{yz}^2 = \\ &= e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{xy}^2 + 2e_{xz}^2 + 2e_{yz}^2 = \\ &= e_{ij}e_{ij}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

de manera que regresando a la ecuación (5.79) tenemos que

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu e_{ij}e_{ij}, \quad (5.81)$$

es claro que la forma de la energía libre es positiva definida si los coeficientes λ y μ son positivos; notemos que estos coeficientes corresponden a los coeficientes de Lamé de los que ya habíamos hablado.

El tensor de deformación se separa en una parte isótropa y un tensor sin traza,

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \left(e_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \right) + \frac{I_1}{3} \delta_{ij} = e_{ij}^0 + \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \\ e_{ij} e_{ij} &= \left(e_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \right)^2 + \frac{I_1^2}{3}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

la energía libre queda entonces como

$$F = F_0 + \mu \left(e_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \right)^2 + \frac{I_1^2}{2} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right). \quad (5.83)$$

El segundo término corresponde a una deformación cortante sin cambio de volumen y el último término se llama de compresión uniforme, al módulo $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ se le conoce como módulo de compresión uniforme.

Cada uno de los términos de la energía libre recibe un nombre:

$$F_D = \frac{K}{2} I_1^2 \quad \text{energía de dilatación o de compresión uniforme} \quad (5.84)$$

$$F_C = \mu \left(e_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \right)^2 \quad \text{energía de deformación cortante.} \quad (5.85)$$

5.6. Deformación con variación de la temperatura

Ahora se va a considerar el caso en que la temperatura no es constante; dicha variación puede ser el resultado de la deformación misma o puede imponerse desde fuera. El estado inicial corresponde a una temperatura T_0 uniforme y a la ausencia de fuerzas externas. Cuando hay un cambio de temperatura es posible tener dilatación térmica aún en ausencia de fuerzas externas. La contribución a la energía libre será proporcional a I_1 que es el único escalar de primer orden que puede formarse con el tensor de deformación, por tanto

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)I_1 + \mu(e_{ij}^0 e_{ij}^0) + \frac{K}{2} I_1^2, \quad (5.86)$$

Al escribir la ec. (5.86) debemos recordar que I_1 nos mide la deformación cúbica en el sistema, el coeficiente de proporcionalidad se ha escrito como $K\alpha$, donde $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ acompaña al término en I_1 en la energía libre, como se puede ver en la ec. (5.83). De esta manera vemos que α se encarga de decirnos la respuesta ante los cambios de temperatura y se conoce con el nombre de dilatación térmica. Este coeficiente también depende del material y de la temperatura alrededor de

la cual está ocurriendo la deformación. Si ahora derivamos la ec. (5.86) respecto a las componentes del tensor de deformación se obtiene el tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right)_T = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ij} + KI_1\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^0, \quad (5.87)$$

donde el primer término nos da los esfuerzos adicionales producidos por el cambio de temperatura.

Cuando solamente consideramos la dilatación térmica, los esfuerzos internos son nulos y en este caso la deformación va a depender de la diferencia de temperatura.

$$\begin{aligned} -K\alpha(T - T_0)\delta_{ij} + KI_1\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^0 &= 0 \\ 2\mu e_{ij} &= \frac{2\mu}{3}I_1\delta_{ij} - KI_1\delta_{ij} + K\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \\ 2\mu e_{ij} &= \left(\frac{2\mu}{3} - K \right) I_1\delta_{ij} + K\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \\ 2\mu e_{ij} &= -\lambda I_1\delta_{ij} + K\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \\ e_{ij} &= -\frac{\lambda}{2\mu}I_1\delta_{ij} + \frac{K\alpha}{2\mu}(T - T_0)\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

La ecuación (5.88) nos dice que el tensor de deformación es diagonal, con un término proporcional a la diferencia de temperatura. Si ahora calculamos la traza del tensor de deformación

$$I_1 = \text{Tr}(e_{ij}) = -3\frac{\lambda}{2\mu}I_1 + \frac{K\alpha}{2\mu}3(T - T_0), \quad (5.89)$$

tenemos que

$$I_1 \left(1 + \frac{3\lambda}{2\mu} \right) = \frac{3K\alpha}{2\mu}(T - T_0),$$

y

$$I_1 = \frac{\Delta V}{V} = \alpha(T - T_0), \quad (5.90)$$

a partir de esta expresión tenemos una interpretación inmediata del coeficiente α como el "coeficiente de dilatación térmica". Cuando se trabaja con este tipo de procesos es importante distinguir los procesos adiabáticos de los isotérmicos.

5.7. Sistema con simetría Tetragonal

Demostrar que un sistema con simetría tetragonal tiene únicamente seis módulos elásticos independientes. La simetría tetragonal implica simetría respecto de las transformaciones siguientes:

$$1. \quad x \rightarrow -x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z$$

2. $x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow z$
3. rotación de $\frac{2\pi}{4}$ alrededor del eje z o bien
4. $x \rightarrow y, \quad y \rightarrow -x, \quad z \rightarrow z$ que es equivalente a la anterior.

Tomamos la ley de Hooke generalizada con los 21 módulos independientes.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} + C_{15}e_{xz} + C_{16}e_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} + C_{25}e_{xz} + C_{26}e_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} + C_{35}e_{xz} + C_{36}e_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= C_{14}e_{xx} + C_{24}e_{yy} + C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} + C_{45}e_{xz} + C_{46}e_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= C_{15}e_{xx} + C_{25}e_{yy} + C_{35}e_{zz} + C_{45}e_{yz} + C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{16}e_{xx} + C_{26}e_{yy} + C_{36}e_{zz} + C_{46}e_{yz} + C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

Ahora hacemos una inversión del eje x ; ya habíamos visto que haciendo la transformación nos quedan 13 módulos independientes.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{xx} & e_{xx} &\rightarrow e_{xx} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{yy} & e_{yy} &\rightarrow e_{yy} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{zz} & e_{zz} &\rightarrow e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow \sigma_{yz} & e_{yz} &\rightarrow e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow -\sigma_{xz} & e_{xz} &\rightarrow -e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow -\sigma_{xy} & e_{xy} &\rightarrow -e_{xy}
 \end{aligned}$$

Aplicamos esta transformación a las ecuaciones (5.48) y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} - C_{15}e_{xz} - C_{16}e_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} - C_{25}e_{xz} - C_{26}e_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} - C_{35}e_{xz} - C_{36}e_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= C_{14}e_{xx} + C_{24}e_{yy} + C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} - C_{45}e_{xz} - C_{46}e_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= C_{15}e_{xx} + C_{25}e_{yy} + C_{35}e_{zz} + C_{45}e_{yz} + C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{16}e_{xx} + C_{26}e_{yy} + C_{36}e_{zz} + C_{46}e_{yz} + C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

al igualar con las ecuaciones (5.48) tenemos que

$$C_{15} = C_{16} = 0, \quad C_{25} = C_{26} = 0, \quad C_{35} = C_{36} = 0 \quad C_{45} = C_{46} = 0 \tag{5.93}$$

el número de módulos que quedan es $21 - 8 = 13$. Las ecuaciones nos quedan en la forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} + C_{14}e_{yz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} + C_{24}e_{yz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} + C_{34}e_{yz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{14}e_{xx} + C_{24}e_{yy} + C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{55}e_{xz} + C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy}
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

En estas ecuaciones hacemos una inversión del eje y , la tranformación implica que $y \rightarrow -y$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{xx} & e_{xx} &\rightarrow e_{xx} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{yy} & e_{yy} &\rightarrow e_{yy} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{zz} & e_{zz} &\rightarrow e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow -\sigma_{yz} & e_{yz} &\rightarrow -e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow \sigma_{xz} & e_{xz} &\rightarrow e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow -\sigma_{xy} & e_{xy} &\rightarrow -e_{xy},
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

aplicando estas transformaciones tendremos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} - C_{14}e_{yz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} - C_{24}e_{yz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} - C_{34}e_{yz} \\
 \sigma_{yz} &= -C_{14}e_{xx} - C_{24}e_{yy} - C_{34}e_{zz} + C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{55}e_{xz} - C_{56}e_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= -C_{56}e_{xz} + C_{66}e_{xy},
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

de donde es inmediato que:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{56} = 0, \tag{5.97}$$

y nos quedan $13 - 4 = 9$ módulos, las ecuaciones que ahora resultan son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} \\
 \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz} \\
 \sigma_{zz} &= C_{13}e_{xx} + C_{23}e_{yy} + C_{33}e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= C_{44}e_{yz} \\
 \sigma_{xz} &= C_{55}e_{xz} \\
 \sigma_{xy} &= C_{66}e_{xy}.
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

Por último se aplica la transformación en que $x \rightarrow y$, $y \rightarrow -x$, $z \rightarrow z$; las componentes de los tensores de esfuerzos y deformación se transforman como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &\rightarrow \sigma_{yy} & e_{xx} &\rightarrow e_{yy} \\
 \sigma_{yy} &\rightarrow \sigma_{xx} & e_{yy} &\rightarrow e_{xx} \\
 \sigma_{zz} &\rightarrow \sigma_{zz} & e_{zz} &\rightarrow e_{zz} \\
 \sigma_{yz} &\rightarrow -\sigma_{xz} & e_{yz} &\rightarrow -e_{xz} \\
 \sigma_{xz} &\rightarrow \sigma_{yz} & e_{xz} &\rightarrow e_{yz} \\
 \sigma_{xy} &\rightarrow -\sigma_{yx} & e_{xy} &\rightarrow -e_{yx}
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

Tomamos el elemento $\sigma_{xx} \rightarrow \sigma_{yy}$ y hacemos el cambio,

$$\sigma_{yy} = C_{11}e_{yy} + C_{12}e_{xx} + C_{13}e_{zz},$$

comparamos e igualamos con

$$\sigma_{yy} = C_{12}e_{xx} + C_{22}e_{yy} + C_{23}e_{zz},$$

lo cual implica que

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad (5.100)$$

con σ_{zz} no obtenemos relaciones nuevas. Ahora tomamos $\sigma_{yz} = C_{44}e_{yz}$, hacemos el cambio y nos da que $\sigma_{xz} = C_{44}e_{xz}$ y ahora igualamos con $\sigma_{xz} = C_{55}e_{xz}$, de donde obtenemos que $C_{44} = C_{55}$. Tenemos entonces 3 relaciones adicionales, de manera que ahora tenemos $9 - 3 = 6$ módulos independientes.

Las relaciones esfuerzo-deformación nos quedan ahora como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz} \\ \sigma_{yy} &= C_{12}e_{xx} + C_{11}e_{yy} + C_{13}e_{zz} \\ \sigma_{zz} &= C_{13}(e_{xx} + e_{yy}) + C_{33}e_{zz} \\ \sigma_{yz} &= C_{44}e_{yz} \\ \sigma_{xz} &= C_{44}e_{xz} \\ \sigma_{xy} &= C_{66}e_{xy} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Estas son las relaciones válidas para un sistema con simetría tetragonal.

Ahora vamos a construir las contribuciones a la energía libre de este sistema.

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}e_{xx} + \sigma_{yy}e_{yy} + \sigma_{zz}e_{zz} + \\ &\quad 2\sigma_{xy}e_{xy} + 2\sigma_{xz}e_{xz} + 2\sigma_{yz}e_{yz}) = \\ &= \frac{1}{2}\left[(C_{11}e_{xx} + C_{12}e_{yy} + C_{13}e_{zz})e_{xx} + (C_{12}e_{xx} + C_{11}e_{yy} + C_{13}e_{zz})e_{yy} + \right. \\ &\quad \left. + (C_{13}(e_{xx} + e_{yy}) + C_{33}e_{zz})e_{zz} + 2C_{66}e_{xy}e_{xy} + 2C_{44}e_{xz}e_{xz} + 2C_{44}e_{yz}e_{yz}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[C_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + C_{33}e_{zz}^2 + 2C_{12}e_{xx}e_{yy} + 2C_{13}(e_{xx} + e_{yy})e_{zz} + \right. \\ &\quad \left. + 2C_{44}(e_{yz}^2 + e_{xz}^2) + 2C_{66}e_{xy}^2\right] \end{aligned} \quad (5.102)$$

Si ahora separamos las partes de la energía que dependen de esfuerzos cortantes y normales, tendremos

$$F_D = \frac{1}{2}\left[C_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + C_{33}e_{zz}^2 + 2C_{12}e_{xx}e_{yy} + 2C_{13}(e_{xx} + e_{yy})e_{zz}\right] \quad (5.103)$$

$$F_C = C_{44}(e_{yz}^2 + e_{xz}^2) + C_{66}e_{xy}^2 \quad (5.104)$$

Si además pedimos que no se tenga dilatación cúbica,

$$I_e = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0 \quad e_{xx} + e_{yy} = -e_{zz} \quad (5.105)$$

y para este caso la energía de dilatación será:

$$\begin{aligned}
 F_D &= \frac{1}{2} \left[C_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) - C_{33}(e_{xx} + e_{yy})^2 + 2C_{12}e_{xx}e_{yy} - 2C_{13}(e_{xx} + e_{yy})(e_{xx} + e_{yy}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[C_{11}(e_{xx} + e_{yy}) + (C_{33} - 2C_{13})(e_{xx} + e_{yy})^2 + 2C_{12}e_{xx}e_{yy} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[(C_{11} + C_{33} - 2C_{13})(e_{xx}^2 + e_{yy}^2) + 2(C_{33} + C_{12} - 2C_{13})e_{yy}e_{xx} \right].
 \end{aligned}
 \tag{5.106}$$

Es claro que las expresiones de las energías de dilatación y cortante contienen a todos los módulos elásticos del problema, que son característicos del material en cuestión.

Con el objeto de completar el esquema de las simetrías en relación al número de módulos elásticos independientes en un medio homogéneo, hacemos un resumen de ello y en el cuadro 5.1 se indica el número de módulos para cada grupo de simetría.

- A. Triclínico: Se puede escoger la orientación de los ejes dentro del cristal, fijando con ello 3 módulos y quedando 18 como propiedades del cristal.
- B. Monoclínico: El plano $x - y$ coincide con el plano de simetría. Además se tiene invariancia con respecto a $x \rightarrow x$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow -z$.
- C. Ortorómbico: La simetría impone la orientación de los ejes coordenados. Hay simetría ante reflexión en los tres planos coordenados.
- D. Tetragonal: Simetría ante rotaciones de $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje z . Uno de los módulos se puede escoger nulo.
- E. Romboédrico: El eje de simetría se coloca en el eje z . Hay simetría respecto a rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor del eje z y reflexión en el eje y . Esto deja 7 módulos independientes, uno de ellos se puede escoger nulo.
- F. Hexagonal: Simetría ante rotaciones de $\frac{2\pi}{6}$.
- G. Cúbico: Además de la simetría tetragonal hay simetría de rotación de $\frac{\pi}{2}$.

5.8. Problemas

- 1.- Estudiar la sección 10 del libro de Landau, acerca de las propiedades elásticas de los cristales, hacer un resumen del material.
- 2.- Se tiene una placa rectangular de espesor h , limitada por los planos $z = \pm \frac{h}{2}$ y se trata de doblarla. Los esfuerzos son:

$$\sigma_{xx} = Eaz, \quad \sigma_{yy} = Ebz$$

las otras componentes del tensor de esfuerzos se anulan, a y b son constantes con las dimensiones apropiadas.

Triclínico	21 o 18
Monoclínico	13 o 12
Ortorómbico	9
Tetragonal	6 o 7
Romboédrico	6 o 7
Hexagonal	5
Cúbico	3
Isótropo	2

Cuadro 5.1: Número de módulos elásticos independientes.

- a) Verificar que se cumplen las condiciones de equilibrio.
 - b) Usando la ley de Hooke para cuerpos totalmente isótropos, calcular el tensor de deformación.
 - c) Verificar las ecuaciones de compatibilidad.
 - d) Calcular los desplazamientos.
 - e) Buscar cuales son las condiciones de frontera adecuadas o al menos razonables para determinar todas las constantes que aparecen al integrar el tensor de deformación.
- 3.- Calcular las energías de dilatación y cortante (o de distorsión) para los casos siguientes:
- i) Extensión simple.
 - ii) Dilatación uniforme.
 - iii) Deformación cortante.
 - iv) Deformación plana.
 - v) Torsión. Ver los problemas del capítulo 4.
- 4.- Calcular el número de constantes elásticas independientes para un sistema que tiene simetría ante la transformación siguiente:
- $$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow -z.$$
- 5.- Calcular la energía libre de un sistema con simetría cúbica (3 módulos independientes). Sugerencia: Tome las expresiones (5.61) para las componentes del tensor de los esfuerzos.
- 6.- Exprese la energía libre del problema anterior en términos de las componentes del tensor de los esfuerzos.
- 7.- En el problema 5 separe las energías libres de dilatación y cortante.

Capítulo 6

Aspectos generales de las ecuaciones de la Elasticidad.

En este capítulo hacemos un resumen de las ecuaciones fundamentales de la Elasticidad, con el fin de tenerlas a la mano para empezar a resolver problemas específicos. También haremos algunos comentarios acerca de las condiciones de frontera y, por último, haremos la generalización para atacar problemas dinámicos.

6.1. Problemas estáticos.

Vamos a considerar únicamente el caso de cuerpos homogéneos e isotrópos. En el texto se han tratado algunos casos más generales pero, para este resumen, no es necesario.

6.1.1. Ecuaciones de equilibrio.

Para el equilibrio de fuerzas hemos visto que entre los esfuerzos y las fuerzas volumétricas se establece un balance,¹ cuya expresión matemática es:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0. \quad (6.1)$$

Ahora bien, como consecuencia del equilibrio rotacional resulta que el tensor de esfuerzos es simétrico,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (6.2)$$

¹Ver capítulo 3.

6.1.2. Relaciones entre los desplazamientos y el tensor de deformaciones

El tensor de deformación está definido en términos de las componentes del desplazamiento,² esto es

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.3)$$

que es un tensor simétrico. Las ecuaciones de Saint Venant o de compatibilidad pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 e_{jm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \quad (6.4)$$

de donde obtenemos las 6 ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.1.3. Ley de Hooke generalizada

Nos da la relación entre los esfuerzos y la deformación; en este resumen sólo la escribimos para cuerpos homogéneos e isótropos.³

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda I_e \delta_{ij} \quad (6.7)$$

los coeficientes λ y μ son propiedades del cuerpo elástico con el que se trabaja y se conocen con el nombre de “coeficientes de Lamé”. Para un sistema isótropo tenemos que los coeficientes de Lamé están relacionados con el módulo de Young E y la razón de Poisson ν ,

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6.8)$$

²Ver capítulo 4.

³Ver capítulo 5.

Cuando la temperatura no es constante se introduce además la dilatación térmica α .

6.2. Condiciones de frontera

La solución del conjunto de ecuaciones necesita de las condiciones de frontera, que pueden especificarse de varias maneras, a saber

1. Los desplazamientos están especificados en toda la frontera.
2. Los esfuerzos están dados.
3. Esfuerzos y desplazamientos se especifican, pero sólo en porciones de la frontera.

Para resolver este conjunto de ecuaciones tenemos dos caminos posibles:

- Reescribimos todas las ecuaciones únicamente en términos de los desplazamientos; claramente ésto sólo será práctico si las condiciones de frontera están dadas en términos de los desplazamientos. Para este caso sustituimos las ecuaciones (6.3) y (6.7) y luego el resultado en (6.1).

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_k \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho b_i &= 0\end{aligned}$$

Si consideramos que los coeficientes no dependen explícitamente de las coordenadas,⁴ entonces tendremos que

$$\mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho b_i = 0 \quad (6.9)$$

Las ecuaciones (6.9) se llaman “ecuaciones de Lamé-Navier-Cauchy” y es muy importante que para utilizarlas es necesario que los desplazamientos estén especificados en toda la frontera.

- Los esfuerzos están dados en la frontera y entonces reescribimos el conjunto de ecuaciones en términos de los esfuerzos.

En este caso conviene escribir la ley de Hooke en la forma inversa, es decir

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_\sigma \delta_{ij} \quad (6.10)$$

⁴Además estamos en condiciones isotérmicas

La ecuación (6.9) se introduce en las ecuaciones de compatibilidad para las componentes del tensor de deformaciones y con ello obtenemos otro conjunto de ecuaciones. Como ejemplo tomamos $e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$ $i \neq j$ con e_{xy} como caso particular.

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= 2\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial y^2}\right) \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x^2}\right) \end{aligned}$$

sumando y simplificando

$$2\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)I_\sigma. \quad (6.11)$$

Si además utilizamos las condiciones de equilibrio se tiene que:

$$\nabla^2 \sigma_{ik} + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} I_\sigma\right) + \rho\left(\frac{\partial b_k}{\partial x_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)\rho(\nabla \cdot \mathbf{b})\delta_{ik} = 0 \quad (6.12)$$

que se llaman ecuaciones de “Beltrami - Michell”. El lector encontrará la deducción de la ecuación (6.12) en el apéndice A.

Si las condiciones de frontera son mixtas; ésto es, en una parte de la frontera las condiciones se dan en términos de los esfuerzos y en otra parte se dan los desplazamientos; entonces el problema se debe trabajar con las ecuaciones originales.

6.3. Problemas dinámicos

Cuando hay problemas dinámicos es necesario hacer intervenir el tiempo, ésto se hace fundamentalmente modificando la condición de equilibrio, que es, de hecho, el balance de fuerzas. Ahora en lugar de que los esfuerzos y las fuerzas volumétricas se equilibren, debemos considerar que su desequilibrio da lugar a la aceleración. De esta manera tendremos la generalización de la segunda ley de Newton para sistemas continuos.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (6.13)$$

Es muy importante darse cuenta de que ahora también necesitamos decir cuales son las condiciones iniciales, ya que sin ellas el esquema para obtener una solución única no está completo. Cuando se utiliza la ley de Hooke para los esfuerzos y la ec. (6.13) se escribe en términos del vector de desplazamiento, esta ecuación

se conoce con el nombre de ecuación de Lamé-Navier-Cauchy.⁵ Dentro del marco de la ley de Hooke generalizada, vemos que las ecuaciones de la Elasticidad son lineales, por lo tanto es posible utilizar el principio de superposición. También puede decirse que el uso del principio de superposición y la conservación de la energía implican que la solución de las ecuaciones sea única.

6.4. Principio de Saint Venant.

Este principio establece que para puntos de un sólido que estén a distancias suficientemente grandes de las superficies donde se aplican las fuerzas externas, los esfuerzos en dichos puntos dependen casi despreciablemente de la forma en que se apliquen las fuerzas externas. Este principio es de suma importancia en la solución de problemas prácticos, y se puede ver como una consecuencia del siguiente postulado: “Si un sistema balanceado de fuerzas se aplica sobre una parte cualquiera de un cuerpo, se inducirán esfuerzos en ese cuerpo que disminuyen rápidamente con la distancia a la región de aplicación”. En problemas prácticos es necesario ver, en cada caso, si las condiciones de aplicabilidad de dicho principio son válidas.

6.5. Apéndice A

En este apéndice se hará la deducción de las ecuaciones de Beltrami-Michell a partir de las ecuaciones de compatibilidad escritas de manera comprimida en las ec. (4.37). Reescribo dicha ecuación:

$$\frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 e_{jm}}{\partial x_k \partial x_i} = 0. \quad (6.14)$$

Para el caso de un medio homogéneo e isótropo se cumple ley de Hooke en su forma más simple, por lo tanto, el tensor de deformación se escribe en la forma siguiente:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_\sigma \delta_{ij}. \quad (6.15)$$

Ahora sustituimos la ecuación (6.15) en (6.14),

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \sigma_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \sigma_{jm}}{\partial x_k \partial x_i} \right) \\ & - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial^2 I_\sigma \delta_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 I_\sigma \delta_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 I_\sigma \delta_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 I_\sigma \delta_{jm}}{\partial x_k \partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

⁵Recordar que estamos suponiendo que el medio es homogéneo, isótropo y además que tanto la densidad como los módulos elásticos son constantes. La temperatura es constante.

hacemos $m = k$ y sumamos sobre este índice,

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\nabla^2 I_\sigma + \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x_i \partial x_j} \right) = 0. \quad (6.17)$$

En la simplificación de esta ecuación se han utilizado las igualdades $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \nabla^2$ y $\delta_{kk} = 3$. El paso siguiente consiste en utilizar la condición de equilibrio para eliminar los dos términos del tipo: $\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial \rho b_i}{\partial x_j}$, de manera que

$$\nabla^2 \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \nabla^2 I_\sigma + \frac{1}{1 + \nu} \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x_i \partial x_j} - \rho \left(\frac{\partial \rho b_i}{\partial x_j} - \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (6.18)$$

6.6. Problemas

- 1.- Generalizar las ecuaciones de Navier-Cauchy para el caso en que hay variaciones de temperatura.
- 2.- Mostrar que los ejes principales del tensor de deformación y del tensor de esfuerzos coinciden para un medio elástico homogéneo e isótropo. Use las ecuaciones constitutivas siguientes:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu e_{xx} + \lambda I_e \\ \sigma_{yy} &= 2\mu e_{yy} + \lambda I_e \\ \sigma_{xy} &= 2\mu e_{xy} \\ I_e &= e_{xx} + e_{yy} \\ II_e &= e_{xx}e_{yy} - 2e_{xy}^2 \end{aligned}$$

¿ Qué sucede si el medio es homogéneo pero tiene simetría cúbica ?

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \phi_1 e_{xx} + \phi_2 e_{yy} \\ \sigma_{yy} &= \phi_2 e_{xx} + \phi_1 e_{yy} \\ \sigma_{xy} &= \eta e_{xy} \end{aligned} \quad (6.19)$$

- 3.- Considere una barra sobre la cual actúa un esfuerzo longitudinal $\sigma_{zz} = p$. La barra está restringida a no tener contracción lateral en la dirección x , ($e_{xx} = 0$), pero se contrae libremente en la dirección y . definir el módulo de Young efectivo $E' = \frac{\sigma_{zz}}{e_{zz}}$ y una razón de Poisson efectiva $\nu' = -\frac{e_{yy}}{e_{zz}}$ y mostrar que

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E}{1 - \nu^2} \\ \nu' &= \frac{\nu}{1 - \nu} \end{aligned}$$

¿Cuál es el intervalo de valores posibles para E' y ν' ?

- 4.- Suponga que la barra del problema anterior se restringe a que no haya ninguna contracción lateral. Mostrar entonces que el módulo de Young efectivo es:

$$E' = E \frac{(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

¿Cuál es la razón de Poisson efectiva ?

- 5.- Construya explícitamente las ecuaciones de Lamé-Navier-Cauchy para un medio continuo homogéneo isótropo para el cual se satisface la ley de Hooke.
- 6.- Construya las ecuaciones de Lamé-Navier-Cauchy para un sistema con simetría cúbica.⁶

⁶Use los resultados del quinto problema del capítulo 5.

Capítulo 7

Extensión, Torsión y Flexión.

7.1. Introducción.

En este capítulo vamos a tratar los problemas de extensión, torsión y flexión de barras desde un punto de vista simplificado. Esto significa que haremos hipótesis sencillas que permitan escribir parte de la solución usando argumentos geométricos o el simple sentido común. En capítulos posteriores abordaremos estos problemas de una forma más completa. En todos los casos que trataremos, vamos a considerar medios homogéneos e isótropos, y la forma en que deformamos al sistema será uniforme.

Las deformaciones que planteamos son simples pero, a su vez, constituyen la base para situaciones más complejas.

7.2. Extensión de una barra.

Vamos a considerar la extensión de una barra formada por un medio homogéneo e isótropo. Esta deformación será causada por una fuerza uniforme aplicada a lo largo del eje y sobre el área perpendicular al mismo. Tomamos una barra de sección transversal circular de sección S , el eje z lo colocamos a lo largo del eje de la barra y el origen estará en uno de los extremos, como se muestra en la figura 7.1. En el extremo que se encuentra en L se aplica una fuerza F uniforme en la sección transversal de la barra. Suponemos que la fuerza está uniformemente distribuida en toda el área, entonces podemos escribir los esfuerzos en la forma siguiente:

$$\sigma_{33} = \frac{F}{S} = cte. \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0, \quad \text{en} \quad x_3 = L, \quad (7.1)$$

puesto que la única fuerza que se está aplicando es F , tenemos

$$\sigma_{22} = \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0, \quad (7.2)$$

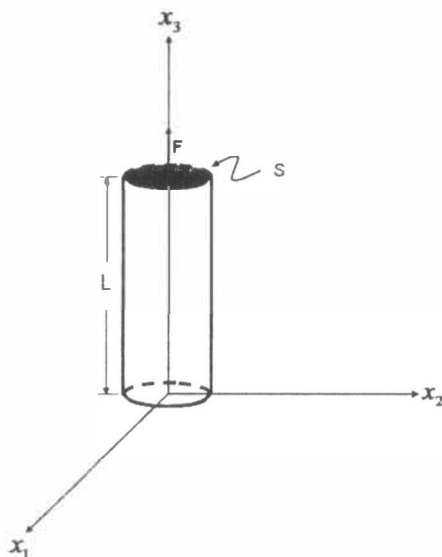


Figura 7.1: Barra de sección transversal circular a la que se aplica una fuerza uniforme.

además estas ecuaciones se cumplirán para toda la barra.

Para este caso las ecuaciones de equilibrio, ecs. (6.1), se cumplen trivialmente; las ecuaciones de compatibilidad escritas como las ecuaciones de Beltrami-Michell, ecs. (6.12), también se satisfacen, de manera que únicamente necesitamos introducir nuestros datos en la ley de Hooke y resolver para los desplazamientos.

Al sustituir en las ecs. (6.10), se obtienen las componentes del tensor de deformación

$$\begin{aligned} I_\sigma = \sigma_{33} &= \frac{F}{S}, \\ e_{12} = e_{13} = e_{23} &= 0, \quad e_{11} = -\frac{\nu I_\sigma}{E} = -\frac{\nu F}{ES} = e_{22}, \\ e_{33} &= \frac{F}{ES}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Puesto que todas las componentes del tensor de deformación son constantes, es claro que ahora los desplazamientos serán lineales en las coordenadas, es decir:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu F}{ES}x_1 + a_1x_2 + b_1x_3 + c_1 \\ u_2 &= -\frac{\nu F}{ES}x_2 + a_2x_1 + b_2x_3 + c_2 \\ u_3 &= \frac{F}{ES}x_3 + a_3x_1 + b_3x_2 + c_3 \end{aligned} \quad (7.4)$$

y todas las constantes $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ que aparecen deben determinarse a partir de las condiciones de frontera.

Primero tenemos que el origen está fijo, de manera que en $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ los desplazamientos deben anularse; esto es, $u_1(0, 0, 0) = 0, u_2(0, 0, 0) = 0, u_3(0, 0, 0) = 0$, lo cual implica que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Segundo, los desplazamientos propuestos como solución deben reproducir el valor de las componentes del tensor de deformación, con lo cual

$$\begin{aligned} e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) = 0 \rightarrow a_1 = -a_2 \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (b_1 + a_3) = 0 \rightarrow b_1 = -a_3 \\ e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (b_2 + b_3) = 0 \rightarrow b_2 = -b_3 \end{aligned} \quad (7.5)$$

Ahora los desplazamientos de las ecuaciones (7.4) quedan en la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\nu F}{ES} x_1 + a_1 x_2 + b_1 x_3, \\ u_2 &= -\frac{\nu F}{ES} x_2 - a_1 x_1 + b_2 x_3, \\ u_3 &= \frac{F}{ES} x_3 - b_1 x_1 - b_2 x_2. \end{aligned} \quad (7.6)$$

En tercer lugar, y para determinar las constantes que hacen falta, tenemos que pedir la condición de que no se tenga rotación; para ello calculamos las componentes del tensor

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (a_1 - a_1) = 0, \\ \Omega_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (b_1 + b_1) = b_1, \\ \Omega_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (b_2 - b_2) = 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

ahora pedimos que el tensor sea nulo, y ello implica que $a_1 = b_1 = b_2 = 0$, por lo tanto los desplazamientos son

$$u_1 = -\frac{\nu F}{ES} x_1, \quad (7.8)$$

$$u_2 = -\frac{\nu F}{ES} x_2, \quad (7.9)$$

$$u_3 = \frac{F}{ES} x_3 \quad (7.10)$$

y ésta es la solución del problema.

Ahora vamos a analizar algunas de sus características. Para empezar escribimos las coordenadas de los puntos del medio después de la deformación¹

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \left(1 - \frac{\nu F}{ES}\right), \\x'_2 &= x_2 + u_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 \left(1 - \frac{\nu F}{ES}\right), \\x'_3 &= x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 \left(1 + \frac{F}{ES}\right).\end{aligned}\tag{7.11}$$

Vamos a calcular el cambio en la longitud de la barra; para ello nos damos cuenta que necesitamos calcular x'_3 que corresponde al punto $x_3 = L$ antes de la deformación, entonces

$$L' = L \left(1 + \frac{F}{ES}\right), \quad \text{de donde} \quad \frac{L' - L}{L} = \frac{F}{ES},\tag{7.12}$$

o bien, el cambio de longitud respecto a la longitud inicial es $\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{ES}$ y con ello notamos que $L' > L$ para $F > 0$; es decir, la barra aumenta de longitud. El cambio de volumen correspondiente es

$$I_e = Tr(e_{ij}) = \frac{F}{ES}(1 - 2\nu).\tag{7.13}$$

que también es positivo para $F > 0$, ya que $\nu < \frac{1}{2}$, como habíamos visto en el capítulo 5.

Vamos a suponer que la sección transversal antes de la deformación es circular y queremos ver qué sucede después de la deformación. Antes de la deformación tenemos $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, donde R es el radio de la sección transversal. Vamos a calcular $x_1'^2 + x_2'^2$,

$$\begin{aligned}x_1'^2 + x_2'^2 &= x_1^2 \left(1 - \frac{\nu F}{ES}\right)^2 + x_2^2 \left(1 - \frac{\nu F}{ES}\right)^2 \\&= \left(1 - \frac{\nu F}{ES}\right)^2 (x_1^2 + x_2^2) = \left(1 - \frac{\nu F}{ES}\right)^2 R^2 \\&\text{de manera que } x_1'^2 + x_2'^2 = \alpha^2 R^2,\end{aligned}\tag{7.14}$$

donde $\alpha = 1 - \frac{\nu F}{ES}$ es constante, además $0 < \alpha < 1$. Ésto significa que la sección transversal sigue siendo circular pero el radio disminuye, ya que $\alpha R < R$. Es muy importante recordar que estamos trabajando para el caso de deformaciones pequeñas. El área inicial de la sección transversal es $S = \pi R^2$ y el área después de la deformación es $S' = \pi \alpha^2 R^2$, de manera que $\frac{S' - S}{S} = \alpha^2 - 1$.

¹Las coordenadas de los puntos en el medio, después de una deformación corresponden a la coordenada antes de la deformación más el desplazamiento relativo en la dirección correspondiente.

Si recordamos que el cambio relativo de volumen está dado por la traza del tensor de deformación tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_e &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{S'L' - SL}{SL} = \\
 &= \frac{S'L' - S'L + S'L - SL}{SL} = \frac{S'(L' - L) + L(S' - S)}{SL} \\
 &= \frac{L' - L}{L} \frac{S'}{S} + \frac{S' - S}{S} \\
 &= \frac{F}{ES} \frac{S'}{S} + \alpha^2 - 1 = \alpha^2 \frac{F}{ES} + \alpha^2 - 1 = \\
 &= \alpha^2 \left(\frac{F}{ES} - 1 \right). \tag{7.15}
 \end{aligned}$$

Queda al lector verificar que en la aproximación de deformaciones pequeñas, las dos expresiones que hemos encontrado para el cambio de volumen son equivalentes.

Ahora vamos a calcular la energía libre de este problema, para ello simplemente tomamos la expresión del tensor de deformación

$$F_D = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} e_{11} + \sigma_{22} e_{22} + \sigma_{33} e_{33} \right), \tag{7.16}$$

sustituyendo tenemos:

$$F_D = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{S} \frac{F}{ES} \right) = \frac{1}{2} \frac{F^2}{S^2 E}. \tag{7.17}$$

Esta expresión puede también escribirse de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
 F_D &= \frac{1}{2} \frac{\sigma_{33}^2}{E} \\
 &= \frac{1}{2} E e_{33}^2. \tag{7.18}
 \end{aligned}$$

Aun cuando puede parecer redundante escribir la misma energía libre en varias formas equivalentes es útil tenerlas a la mano, pues permiten identificar con facilidad la deformación que da lugar a dichas formas de la energía. Por último notamos que la energía de deformación cortante $F_C = 0$,² dado que las deformaciones cortantes en este caso se anulan.

7.3. Torsión de una barra circular.

Consideramos una barra cilíndrica de sección transversal circular y uniforme que colocamos como se muestra en la figura 7.2. En las bases de la barra se aplican fuerzas que producen únicamente esfuerzos cortantes que se reducen a un

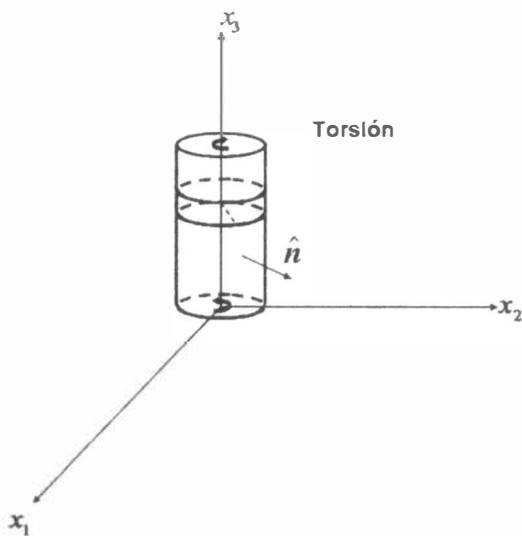


Figura 7.2: Torsión de una barra con sección transversal circular.

par de fuerzas cuyo momento es una torca que va a torcer la barra. La deformación de la barra consiste en rotaciones de las secciones transversales de la barra, una con respecto a la otra sin que exista mayor distorsión. En cada punto de las secciones transversales solamente hay esfuerzos dirigidos perpendicularmente al radio vector. Vamos a suponer que estos esfuerzos cortantes están distribuidos similarmente en todas las secciones incluyendo las bases de la barra.

Tomando en cuenta lo dicho antes, vamos a construir el tensor de esfuerzos para este problema; para hacerlo consideremos una sección de la barra y el esfuerzo cortante correspondiente, como se muestra en la figura 7.3. En esta figura se muestran los vectores unitarios correspondientes a los ejes en el plano de la sección transversal y el vector unitario normal a la superficie lateral de la barra. También se muestra el vector de esfuerzos $t^{\hat{e}_3}$ que sólo tiene componente perpendicular al vector $\hat{n}$, y en coordenadas cilíndricas sólo tendría componente a lo largo del vector $\hat{e}_\theta$, de manera que la torca es

$$N^{\hat{e}_3} = \int_S t^{\hat{e}_3}_\theta r \, dS, \quad (7.19)$$

donde la integración se realiza sobre el área de la sección transversal considerada y $t^{\hat{e}_3}_\theta r$ es la torca por unidad de área respecto al eje de la barra.³ Esta expresión para la torca nos dice cuál es el valor necesario para producir la torsión y su valor se considera constante.

Ahora nuestro problema consiste en construir $t^{\hat{e}_3}_\theta$ y sus componentes a lo largo de los ejes x_1 y x_2 . Para ello consideramos dos secciones transversales

²Ver ec. (5.85).

³Recordar que el vector de esfuerzos corresponde a una fuerza por unidad de área.

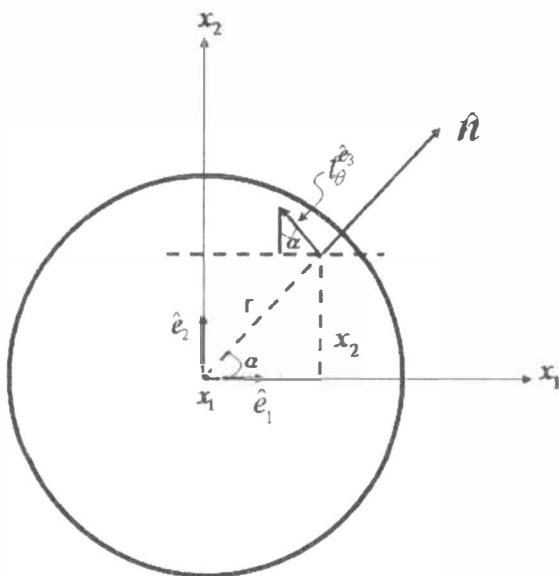


Figura 7.3: Sección transversal de la barra con el eje x_3 perpendicular al plano y apuntando hacia afuera.

separadas una distancia dx_3 a lo largo del eje de la barra y vemos cómo gira una respecto a la otra. En la figura 7.4, τ' es el ángulo de rotación entre una sección y la otra. El desplazamiento entre secciones es entonces: $dx_3 e_{\theta z} = \tau' r$ y si ahora llamamos $\tau = \frac{\tau'}{dx_3}$ al ángulo por unidad de longitud tendremos que $t_{\theta}^{\hat{e}_3} = G e_{\theta z} = G \tau r$. En resumen

$$t_{\theta}^{\hat{e}_3} = G \tau r. \quad (7.20)$$

Proyectando en los ejes x_1 y x_2 , de la figura 7.3 vemos que

$$\sigma_{13} = -G \tau r \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{x_2}{r}, \quad (7.21)$$

$$\sigma_{23} = G \tau r \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{r}, \quad (7.22)$$

de donde $\sigma_{13} = -G \tau x_2$ y $\sigma_{23} = G \tau x_1$, por las condiciones del problema vemos que las otras componentes del tensor de esfuerzos se anulan.

Podemos verificar de inmediato que:

1. Se cumplen las condiciones de equilibrio.
2. La superficie lateral de la barra está libre de esfuerzos.

Necesitamos encontrar los desplazamientos y para ello usamos la ley de Hooke, ecs. (6.10), de manera que para las elongaciones tenemos

$$e_{ii} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ii} - \frac{\nu}{E} T r(\sigma), \quad \text{no hay suma sobre } i \quad (7.23)$$

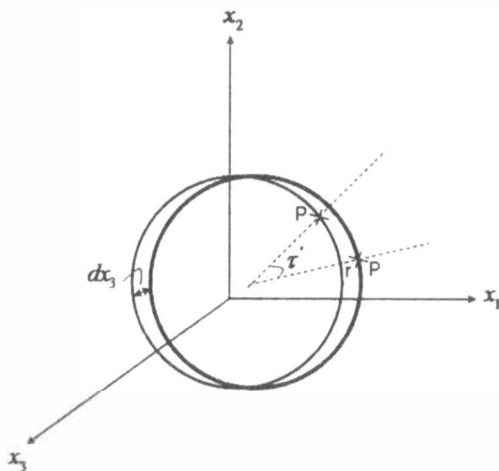


Figura 7.4: Secciones transversales contiguas, i) antes de la deformación los puntos marcados con P quedan uno arriba del otro, ii) después de la deformación el arco es $\tau'r$, iii) entonces $(dx_3)e_{\theta z} = \tau'r$.

y además tomando en cuenta las ecs. (6.3) sabemos que $e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, por lo cual

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \quad (7.24)$$

Para las deformaciones cortantes $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, entonces

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 2\tau x_1, \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -2\tau x_2. \quad (7.27)$$

Ahora vamos a integrar; de las ecuaciones (7.24)-(7.27) vemos de inmediato que

$$u_1 = u_1(x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_3) \quad \text{y} \quad u_3 = u_3(x_1, x_2). \quad (7.28)$$

Al derivar la ecuación (7.25) respecto de x_1 y x_2 y tomar en cuenta las ecuaciones (7.28) obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = 0. \quad (7.29)$$

La ecuación (7.26) se deriva respecto a x_2 y x_3 para obtener

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0. \quad (7.30)$$

Ahora tomamos la ecuación (7.27) y la derivamos respecto de x_1 y x_3

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0. \quad (7.31)$$

De manera similar podemos también calcular las segundas derivadas cruzadas; tomamos la ecuación (7.25) y la derivamos respecto a x_3 , la (7.26) la derivamos respecto a x_1 y, por último, la (7.27) la derivamos respecto a x_2 , entonces obtenemos

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 2\tau, \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} = -2\tau. \quad (7.34)$$

Tomo la combinación de ecuaciones (7.33)+(7.34)-(7.32) para obtener

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (7.35)$$

y de manera semejante se obtiene que

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1} = 2\tau, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} = -2\tau. \quad (7.36)$$

Por lo tanto, tenemos 9 ecuaciones para las segundas derivadas y ahora procedemos a integrarlas. Si vemos las segundas derivadas de u_3 todas son nulas, ésto significa que u_3 es una función lineal de sus variables

$$u_3 = a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3. \quad (7.37)$$

De las segundas derivadas de u_1 y u_2 tenemos que

$$u_1 = -2\tau x_2 x_3 + a_1 x_2 + b_1 x_3 + c_1, \quad (7.38)$$

$$u_2 = 2\tau x_1 x_3 + a_2 x_1 + b_2 x_3 + c_2. \quad (7.39)$$

Ahora tenemos 9 constantes a determinar, sin embargo no todas están completamente libres. Debemos notar que al tomar segundas derivadas, las ecuaciones que integramos son de un orden mayor que las originales, que sólo contenían primeras derivadas, entonces como un primer paso vamos a sustituir las soluciones encontradas en las ecuaciones de primer orden (7.25)-(7.27),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -2\tau x_3 + a_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= 2\tau x_3 + a_2, \end{aligned}$$

$$\text{de donde } a_1 = -a_2. \quad (7.40)$$

Similarmente tenemos que

$$b_2 = -b_3, \quad b_1 = -a_3. \quad (7.41)$$

Por lo tanto los desplazamientos quedan como

$$u_1 = -2\tau x_2 x_3 + a_1 x_2 + b_1 x_3 + c_1, \quad (7.42)$$

$$u_2 = 2\tau x_1 x_3 - a_1 x_1 + b_2 x_3 + c_2, \quad (7.43)$$

$$u_3 = -b_1 x_1 - b_2 x_2 + c_3. \quad (7.44)$$

Las seis constantes que han quedado se determinan con las condiciones de frontera. La primer condición que vamos a imponer consiste en decir que el origen está fijo. Ésto es $u_1(0, 0, 0) = u_2(0, 0, 0) = u_3(0, 0, 0) = 0$, resulta inmediato que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. La segunda condición consiste en impedir la rotación del eje, de manera que las componentes del tensor de rotación se anulen, $\Omega_{12}(0, 0, 0) =$

$\Omega_{13}(0, 0, 0) = \Omega_{23}(0, 0, 0) = 0$. Recordamos que $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= \frac{1}{2}(-2\tau x_3 - a_1 - 2\tau x_3 + b_2)|_{(0,0,0)} = \frac{1}{2}(a_1 + b_2) = 0, \\ \Omega_{13} &= \frac{1}{2}(-2\tau x - 2 + 2b_1)|_{(0,0,0)} = b_1, \\ \Omega_{23} &= \frac{1}{2}(\tau x_1 + b_2)|_{(0,0,0)} = b_2. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Por lo cual $a_1 = b_1 = b_2 = 0$ y como resultado final tenemos

$$u_1 = -2\tau x_2 x_3, \quad (7.46)$$

$$u_2 = 2\tau x_1 x_3, \quad (7.47)$$

$$u_3 = 0. \quad (7.48)$$

A su vez las coordenadas de cualquier punto en la barra, después de la deformación, son

$$x'_1 = x_1 - 2\tau x_2 x_3, \quad (7.49)$$

$$x'_2 = x_2 + 2\tau x_1 x_3, \quad (7.50)$$

$$x'_3 = x_3. \quad (7.51)$$

Supongamos que la sección transversal inicial es circular, entonces $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, donde R es el radio de la sección, queremos saber la forma de la sección transversal después de la deformación. Para hacerlo vamos a calcular las coordenadas de los puntos en el medio antes de la deformación en términos de las coordenadas después de la deformación. Invertimos las ecuaciones (7.49)-(7.51) para x_3 fijo; es decir, para una sección transversal cualquiera que escogemos. Sea

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -2\tau x_3 \\ 2\tau x_3 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 4\tau^2 x_3^2. \quad (7.52)$$

Usando la regla de Cramer tenemos que

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} (x'_1 + 2\tau x_3 x'_2) \quad (7.53)$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta} (x'_2 - 2\tau x_3 x'_1) \quad (7.54)$$

La sección transversal ahora es

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(x_1'^2 + 4\tau^2 x_3^2 x_2'^2 + 4\tau x_3 x_1' x_2' \right. \\ &\quad \left. x_2'^2 + 4\tau^2 x_3^2 x_1'^2 - 4\tau x_3 x_1' x_2' \right) \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left[x_1'^2 (1 + 4\tau^2 x_3^2) + x_2'^2 (1 + 4\tau^2 x_3^2) \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta} (x_1^2 + x_2^2) = \frac{R^2}{\Delta}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Lo cual significa que la sección transversal sigue siendo circular. Recordando que estamos trabajando en la aproximación de deformaciones pequeñas, los términos de orden τ^2 son despreciables, de manera que $\Delta \sim 1$ y la sección transversal deformada tiene el mismo radio que antes de la deformación.

Por último vamos a calcular la energía libre asociada con esta deformación. Para empezar vemos que no hay cambio de volumen, pues la traza del tensor de deformación es nula, $F_D = 0$. Debido a que solamente los esfuerzos y deformaciones cortantes son diferentes de cero, sólo tendremos energía libre de deformación cortante⁴.

$$\begin{aligned} 2F_C &= 2\sigma_{13}\epsilon_{13} + 2\sigma_{23}\epsilon_{23} \\ &= -2G\tau x_2(-\tau x_2) + 2G\tau x_1(\tau x_1) = 2G\tau^2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned} \quad (7.56)$$

7.4. Flexión de una barra

Vamos a considerar una barra de sección transversal rectangular, formada por un medio homogéneo e isótropo cuyo eje antes de la deformación coincide con el eje z , como se muestra en la figura 7.5. En el plano $x_1 - x_3$ se aplican fuerzas que van a doblarla. El eje de la barra va a permanecer en el plano $x_1 - x_3$ y además supondremos que las secciones transversales de la configuración deformada son perpendiculares al eje deformado. Esta última consideración nos va a permitir escribir las condiciones del problema. En la configuración inicial nos fijamos en una sección longitudinal (ésta coincidirá con el plano $x_2 - x_3$) y lo llamaremos “plano neutral”; ahora consideramos un plano paralelo al $x_2 - x_3$ y que está a una distancia x_1 por arriba del plano neutral. Ahora deformamos y vemos que una sección transversal, que inicialmente es perpendicular al eje

⁴También se le conoce como energía libre de distorsión.

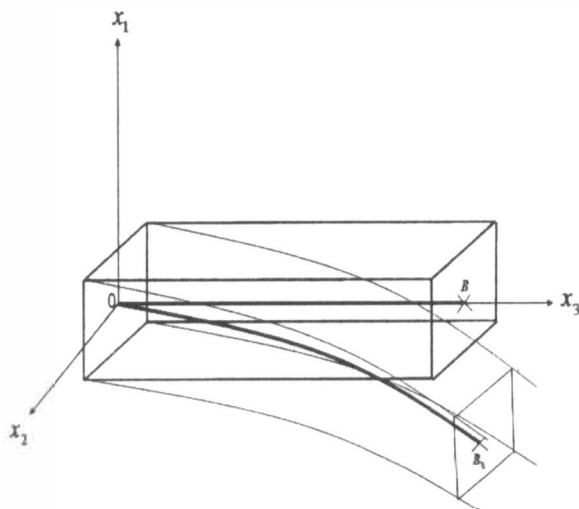


Figura 7.5: Flexión de una barra. Antes de la deformación el eje es OB , después de la deformación el eje es OB_1 .

de la barra, también debe ser perpendicular al eje deformado y, por lo tanto, la sección que está a distancia x_1 se habrá alargado y vamos a calcular la cantidad que se alarga.

Para verlo tomemos la figura 7.6, donde ρ es el radio de curvatura en la configuración deformada, L es la longitud inicial de la barra y L' la longitud final. Llamamos α al ángulo formado por BOA , que es el mismo que el formado por $B'O'A'$, el arco $L' = \alpha\rho$ y también tenemos que el arco $L' - L = \alpha x$. De manera que, si igualamos las dos expresiones para el ángulo α , tenemos $L' - L = x \frac{L'}{\rho}$ y, como la deformación debe ser pequeña, $L' \sim L$, tenemos que⁵

$$\frac{L' - L}{L} = \frac{x}{\rho}, \quad (7.57)$$

pero además podemos ver que $\frac{L' - L}{L} = e_{zz}$ será una cantidad positiva o negativa, dependiendo de que la flexión se efectúe en el sentido positivo del eje x_1 o en el negativo.

Una vez identificada la elongación e_{zz} , vamos a suponer que el tensor de esfuerzos sólo tiene la componente σ_{zz} , de manera que⁶

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E x}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (7.58)$$

⁵Con el objeto de simplificar la notación tomamos $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

⁶Recordar que $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$

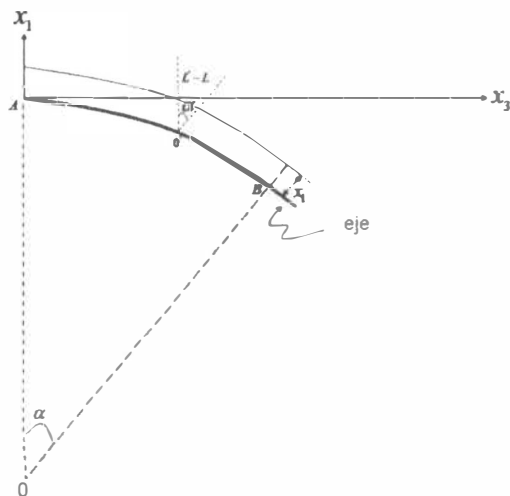


Figura 7.6: Flexión.

Es inmediato que se satisfacen las condiciones de equilibrio en ausencia de fuerzas externas. Por otra parte, es interesante calcular la torca producida por las fuerzas que causan la flexión; de hecho, la torca por unidad de área es $\frac{E}{\rho}x$, y, si integramos en el área de la sección transversal tenemos

$$N = \int_s \frac{E}{\rho} x^2 ds = \frac{E}{\rho} \int_s x^2 ds, \quad (7.59)$$

la integral $\int_s x^2 ds$ es proporcional al momento de inercia respecto al eje z .

Ahora vamos a construir el tensor de deformación usando las expresiones

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \frac{1}{2G} \sigma_{ij}, \quad i \neq j, \\ e_{ii} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ii} - \nu I_\sigma], \quad \text{no hay suma sobre } i. \end{aligned} \quad (7.60)$$

En este problema no hay esfuerzos cortantes, por tanto tampoco hay deformaciones cortantes, además $I_\sigma = \frac{E}{\rho}x$, de manera que el tensor de deformación queda en la forma

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{\rho}x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{\rho}x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{\rho} \end{pmatrix}. \quad (7.61)$$

Las ecuaciones de compatibilidad se cumplen, ya que las componentes del tensor de deformación son lineales en las coordenadas y las ecuaciones de compatibilidad involucran únicamente segundas derivadas.

A partir de los elementos diagonales del tensor de deformación tenemos

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\nu}{\rho}x, \quad u_x = -\frac{\nu}{2\rho}x^2 + f(y, z), \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\nu}{\rho}x, \quad u_y = -\frac{\nu}{\rho}xy + g(x, z), \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}x, \quad u_z = \frac{xz}{\rho} + h(x, y). \quad (7.64)$$

Ahora sustituimos estos desplazamientos en las componentes no-diagonales de (7.61)

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\nu y}{\rho} \right) = 0,$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{z}{\rho} \right) = 0,$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0,$$

de donde se obtienen las tres ecuaciones siguientes

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\nu y}{\rho}, \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{z}{\rho}, \quad (7.66)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (7.67)$$

Derivamos (7.65) respecto a x y respecto a y para obtener

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\nu}{\rho}. \quad (7.68)$$

Derivamos (7.66) respecto a x y respecto a z ,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho}. \quad (7.69)$$

Derivamos (7.67) respecto a y y respecto a z ,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \quad (7.70)$$

También derivamos (7.65) respecto a z , (7.66) respecto a y y (7.67) respecto a x para obtener

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0, \quad (7.71)$$

de donde obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0. \quad (7.72)$$

A partir de las segundas derivadas podemos ahora integrar para encontrar las funciones que nos hacen falta

$$\begin{aligned} f(y, z) &= \frac{\nu}{2\rho} y^2 - \frac{1}{2\rho} z^2 + a_1 y + b_1 z + c_1, \\ g(x, z) &= a_2 x + b_2 z + c_2, \\ h(x, y) &= a_3 x + b_3 y + c_3. \end{aligned} \quad (7.73)$$

sustituyendo en los desplazamientos tenemos

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\nu}{2\rho} (y^2 - x^2) - \frac{z^2}{2\rho} + a_1 y + b_1 z + c_1, \\ u_y &= -\frac{\nu xy}{\rho} + a_2 x + b_2 z + c_2, \\ u_z &= \frac{xz}{\rho} + a_3 x + b_3 y + c_3. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Debemos notar que el procedimiento basado en el cálculo de las segundas derivadas aumenta el orden de las ecuaciones que estamos resolviendo, de manera que una vez que tenemos una solución es necesario requerir que las ecuaciones de orden inferior se satisfagan. En este caso particular, esta condición implica que debemos sustituir las ecs. (7.74) en las ecuaciones (7.65)-(7.67) y al hacerlo obtenemos que $a_1 = -a_2$, $b_1 = -a_3$ y $b_2 = -b_3$. Los desplazamientos nos quedan entonces en la forma siguiente:

$$u_x = \frac{\nu}{2\rho} (y^2 - x^2) - \frac{z^2}{2\rho} + a_1 y + b_1 z + c_1 \quad (7.75)$$

$$u_y = -\frac{\nu xy}{\rho} - a_1 x + b_2 z + c_2 \quad (7.76)$$

$$u_z = \frac{xz}{\rho} - b_1 x - b_2 y + c_3. \quad (7.77)$$

Ahora necesitamos evaluar las constantes que nos han quedado en las ecuaciones (7.75)-(7.77) y para ello vamos a poner condiciones de frontera. Primero fijamos el origen del eje de la barra, es decir $u_x(0, 0, 0) = u_y(0, 0, 0) = u_z(0, 0, 0) = 0$ y entonces es inmediato que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Como segunda condición pedimos

que el eje no rote, así $\Omega_{xy}(0, 0, 0) = \Omega_{xz}(0, 0, 0) = \Omega_{yz}(0, 0, 0) = 0$

$$\begin{aligned}\Omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\nu y}{\rho} + a_1 - \frac{\nu x}{\rho} - a_2 \right) \Big|_{(0,0,0)} = 0 \rightarrow a_1 = a_2 = 0, \\ \Omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (b_2 - b_3) \Big|_{(0,0,0)} = 0 \rightarrow b_2 = b_3 = 0, \\ \Omega_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \left(-\frac{z}{\rho} + b_1 - \frac{z}{\rho} - a_3 \right) \Big|_{(0,0,0)} = 0 \rightarrow a_3 = b_1 = 0.\end{aligned}\tag{7.78}$$

Una vez evaluadas las constantes ya podemos escribir el resultado final para los desplazamientos

$$u_x = \frac{\nu}{2\rho} (y^2 - x^2) - \frac{z^2}{2\rho}, \tag{7.79}$$

$$u_y = -\frac{\nu xy}{\rho}, \tag{7.80}$$

$$u_z = \frac{xz}{\rho}. \tag{7.81}$$

Las coordenadas de un punto cualquiera en la barra después de la deformación ahora se escriben como

$$x' = x + \frac{\nu}{2\rho} (y^2 - x^2) - \frac{z^2}{2\rho}, \tag{7.82}$$

$$y' = y - \frac{\nu xy}{\rho}, \tag{7.83}$$

$$z' = z + \frac{xz}{\rho}. \tag{7.84}$$

Vamos a analizar este resultado calculando algunas características de la configuración deformada. Por ejemplo, los puntos del eje de la barra, que se caracterizan por las coordenadas $x = y = 0$ antes de la deformación, ahora están en

$$x' = -\frac{z^2}{2\rho}, \quad y' = 0, \quad z' = z. \tag{7.85}$$

y de hecho este conjunto de ecuaciones representan al eje deflectado. Vemos que un punto localizado en $(x = 0, y = 0, z)$, después de la deformación está en $(-\frac{z^2}{2\rho}, 0, z)$, de manera que la coordenada x' ahora está por abajo.

También podemos ver qué sucede con la distorsión de la sección transversal de la barra; para ello nos fijamos en la sección transversal que está en $z = z_0$. Antes de la flexión, la sección es rectangular y sus lados están en $(x = \pm \frac{a}{2}, y)$ y $(x, y = \pm \frac{b}{2})$. Después de la deformación tendremos que para el primero de ellos

$$x' = x + \frac{1}{2\rho} \left[\nu (y^2 - \frac{a^2}{4}) - z_0^2 \right], \tag{7.86}$$

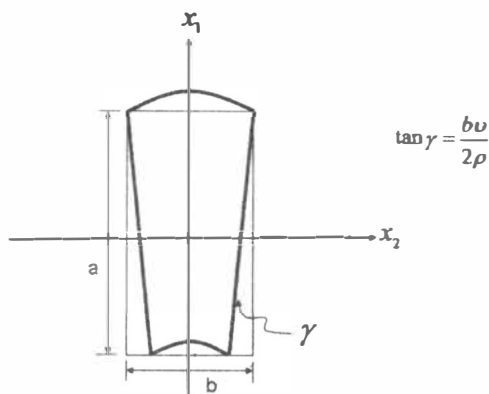


Figura 7.7: Sección transversal de la barra después de la flexión. El ángulo γ está determinado por $\tan \gamma = \frac{b\nu}{2\rho}$.

ésto significa que el perfil ahora es parabólico, como se ve en la figura 7.7. El otro lado se deforma como

$$y' = y \mp \frac{\nu}{\rho} \frac{b}{2} x, \quad (7.87)$$

de manera que el lado permanece recto después de la deformación, pero ahora forma un ángulo γ con el perfil de la sección antes de deformar, que se calcula como

$$\tan \gamma = \frac{b\nu}{2\rho}. \quad (7.88)$$

Por último la sección transversal se inclina

$$z' = z_0 \left(1 + \frac{x}{\rho}\right). \quad (7.89)$$

7.5. Comentario

En este capítulo hemos trabajado los problemas más simples de la Elasticidad y lo hemos hecho de una manera simplificada. De hecho las consideraciones geométricas nos han ayudado a escribir el tensor de esfuerzos o el tensor de deformación sin resolver completamente el conjunto de ecuaciones.

7.6. Problemas

- 1.- Mostrar explícitamente que las condiciones de equilibrio y las ecuaciones de Beltrami-Michell se cumplen, en el caso del problema de extensión de barras.
- 2.- Mostrar explícitamente que los esfuerzos $\sigma_{13} = -G\tau x_2$, $\sigma_{23} = G\tau x_1$, satisfacen las condiciones de equilibrio.

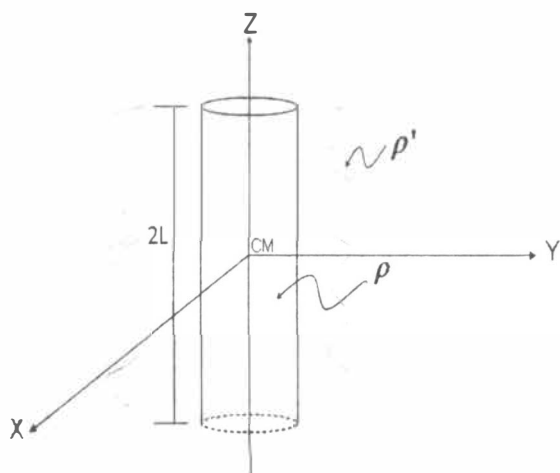


Figura 7.8: Problema 7.5.

- 3.- Mostrar que en el problema de torsión, la superficie lateral de la barra está libre de esfuerzos.
- 4.- En el problema de flexión, calcule los esfuerzos en las paredes laterales de la barra.
- 5.- Determinar el vector de desplazamiento en un cilindro de longitud $2L$ y densidad ρ cuando está sumergido en un fluido de densidad ρ' . La presión del fluido en el nivel del centro de masa del cilindro es p . Escoger el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa del cilindro y el eje z vertical. Los esfuerzos son los siguientes:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -p + \rho'gz$$

$$\sigma_{zz} = -p + (\rho - \rho')gL + \rho gz$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

Capítulo 8

Ondas en medios Elásticos.

8.1. Introducción.

Cuando se estudian vibraciones en sistemas que tienen un número finito de grados de libertad, se muestra que el movimiento más general alrededor de una configuración de equilibrio está compuesto por un número finito de modos de vibración llamados “modos normales”, y el número de dichos modos, en general,¹ es igual al número de grados de libertad del sistema. Tomemos como ejemplo dos osciladores armónicos acoplados; en este caso se obtienen dos modos de vibración con frecuencias en general diferentes. Cuando el sistema es un medio continuo, el número de grados de libertad es infinito y consecuentemente también lo es el número de modos normales. En este caso, en lugar de tener ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el comportamiento del medio, tenemos ecuaciones en derivadas parciales. Ahora vamos a estudiar algunos ejemplos de este problema.

8.2. Vibraciones longitudinales y transversales

Vamos a tomar un medio elástico sin acotar (infinito) formado por un material homogéneo e isótropo que perturbamos ligeramente,² de manera que nos interesa ver cómo son los desplazamientos producidos. Para estudiar estas perturbaciones tomamos entonces las ecuaciones de Lamé-Navier-Cauchy³

$$\mu \nabla^2 u_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial x_i} + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

donde ahora tenemos una dependencia temporal en los desplazamientos y, por consecuencia, en todas las variables del problema. Debido a que en la ecuación (8.1) las componentes del desplazamiento son funciones de las coordenadas y del

¹Puede haber degeneración.

²Por ejemplo provocando un desplazamiento pequeño respecto de la situación de equilibrio.

³Ver capítulo 6.

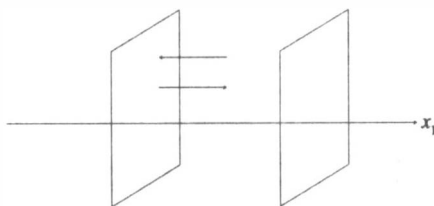


Figura 8.1: Vibración longitudinal; se propaga en la dirección x_1 y se mueve también a lo largo de x_1 .

tiempo, tenemos una ecuación diferencial parcial que además contiene información acerca de las características del material a través de los módulos elásticos (λ , μ) y la densidad (ρ).

8.2.1. Vibraciones longitudinales

Consideramos que no hay fuerza volumétrica, de manera que $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ y, como ejemplo de desplazamientos, tomaremos un caso especial donde

$$u_1 = u_1(x, t), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0. \quad (8.2)$$

Esto significa que los desplazamientos sólo están a lo largo del eje Ox_1 y, como además $u_1 \neq u(x_2, x_3)$, tendremos que un plano perpendicular al eje Ox_1 se mueve en la dirección Ox_1 sin deformarse, como se ilustra en la figura 8.1. Antes de la deformación la ecuación del plano P es $x_1 = x_{10}$, y después de la deformación $x'_1 = x_{10} + u_1(x_{10}, t)$ en cualquier tiempo t y es perpendicular al Ox_1 . En este caso el movimiento descrito por este desplazamiento se llama “vibración longitudinal” a lo largo del eje Ox_1 . Si ahora sustituimos en la ecuación (8.1), tenemos

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

que también se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad (8.3)$$

la ecuación (8.3) es una ecuación de onda, donde la cantidad

$$v_l^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\rho} \quad (8.4)$$

tiene unidades de velocidad al cuadrado y depende únicamente de las propiedades del material, como son la densidad y los coeficientes de Lamé. La cantidad v_l nos dice la velocidad de propagación de ondas longitudinales en el medio elástico.

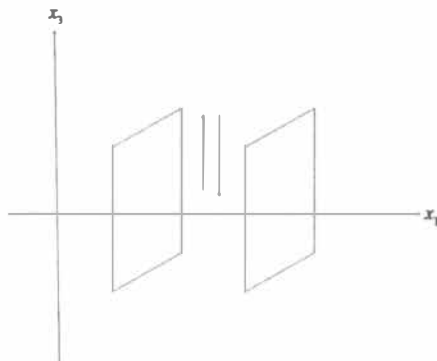


Figura 8.2: Vibración transversal; se propaga en dirección de x_1 y se mueve en dirección de x_3 .

8.2.2. Vibraciones transversales

Nuevamente estudiamos un caso especial de desplazamientos

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, t) \quad (8.5)$$

además consideramos que la fuerza volumétrica es nula $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, de manera que un plano perpendicular al eje Ox_1 se mueve a lo largo de x_3 como se ilustra en la figura 8.2. Este tipo de vibraciones se conoce como “vibración transversal” a lo largo del eje x_3 . Ahora, de acuerdo con los desplazamientos descritos en la ec. (8.1), $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y la ecuación (8.1), nos queda en la forma

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad (8.6)$$

que también es una ecuación de onda para el desplazamiento u_3 , sólo que ahora la velocidad de propagación es

$$v_t^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (8.7)$$

sólo depende de las propiedades del medio, pero es diferente de la velocidad de propagación longitudinal. Si comparamos las dos velocidades vemos que:

$$\frac{v_l}{v_t} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}}, \quad v_l > v_t, \quad (8.8)$$

sólo dependen de las propiedades elásticas (a temperatura constante). Por ejemplo, para acero $E = 2,1 \times 10^3 \text{ kg/cm s}^2$, $\rho = \frac{7,85}{10^3 \times 981} \text{ kg/cm}^3$ y $\nu = 0,3$, resulta que $\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = 3,5$, por lo cual $\frac{v_l}{v_t} < 2$. Sustituyendo los valores de los coeficientes elásticos y la densidad se obtiene que $v_l \sim 4\,677 \text{ m/s}$ y $v_t \sim 2\,500 \text{ m/s}$, corroborando que $v_l > v_t$.

8.3. Propagación de ondas

En la sección 8.2 hemos estudiado los desplazamientos más simples y ahora vamos a efectuar el tratamiento general para medios homogéneos e isotrópicos. Para este tipo de movimientos vamos a considerar situaciones adiabáticas, por lo cual utilizaremos los coeficientes medidos en condiciones adiabáticas. También vamos a suponer que no hay fuerzas volumétricas, de manera que las ecuaciones de Lamé - Navier - Cauchy quedan en la forma⁴

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (8.9)$$

Con el objeto de facilitar el análisis escribimos al vector de desplazamiento en términos de sus componentes longitudinales y transversales

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad \text{donde} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_l = 0, \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{u}_l = 0, \quad (8.10)$$

que es equivalente a que un vector se pueda escribir como la suma del rotacional de un vector y el gradiente de un escalar. Sustituimos en la ecuación (8.9)

$$\rho \frac{\partial^2 (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t)}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla^2 (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla(\nabla \cdot (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t)). \quad (8.11)$$

Al tomar la divergencia y después el rotacional de la ecuación (8.11) obtenemos dos ecuaciones independientes, de manera que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \nabla^2 \mathbf{u}_l = 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \nabla^2 \mathbf{u}_t = 0. \quad (8.13)$$

Ambas son ecuaciones de propagación de ondas, donde podemos identificar la velocidad de propagación de ondas longitudinales y transversales

$$v_l^2 = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad v_t^2 = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}. \quad (8.14)$$

En el medio elástico se propagan dos tipos de ondas independientes, una en la dirección de propagación $\mathbf{u}_l$ y que va acompañada de cambio de volumen. lo cual implica la aparición de ondas de dilatación y compresión. El otro tipo de ondas ocurre en la dirección perpendicular al vector de propagación y no llevan consigo cambios de volumen.

8.4. Relación de dispersión para un medio con simetría cúbica

Ahora consideraremos un medio elástico con simetría cúbica y estudiaremos la propagación de ondas en él. Tomamos la notación para la energía libre que usa

⁴Ver capítulo 6.

Landau para un sistema con esta simetría⁵. Este sistema tendrá tres módulos elásticos independientes

$$F(T, e_{ij}) = F_0(T) + \frac{1}{2} \lambda_{xxxx} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \lambda_{xyxy} (e_{xx} e_{yy} + e_{xx} e_{zz} + e_{yy} e_{zz}) + 2 \lambda_{xyxy} (e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2) \quad (8.15)$$

Para llegar a esta expresión es posible partir de la simetría tetragonal que se especificó en el capítulo 5 y además poner la condición de invariancia ante la transformación

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow -z, \quad z \rightarrow y \quad (8.16)$$

seguida de

$$x \rightarrow z, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow -x \quad (8.17)$$

El cálculo explícito se deja al lector y tomamos la energía libre escrita en la ec. (8.15) para calcular los esfuerzos en el caso $T = \text{constante}$.

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \right) \bigg|_T, \quad (8.18)$$

de manera que:

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{xx}} \right) \bigg|_T = \lambda_{xxxx} e_{xx} + \lambda_{xyxy} (e_{yy} + e_{zz}), \quad (8.19)$$

$$\sigma_{yy} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{yy}} \right) \bigg|_T = \lambda_{xxxx} e_{yy} + \lambda_{xyxy} (e_{xx} + e_{zz}), \quad (8.20)$$

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{zz}} \right) \bigg|_T = \lambda_{xxxx} e_{zz} + \lambda_{xyxy} (e_{xx} + e_{yy}), \quad (8.21)$$

$$\sigma_{xy} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{xy}} \right) \bigg|_T = 4 \lambda_{xyxy} e_{xy}, \quad (8.22)$$

$$\sigma_{xz} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{xz}} \right) \bigg|_T = 4 \lambda_{xyxy} e_{xz}, \quad (8.23)$$

$$\sigma_{yz} = \left(\frac{\partial F}{\partial e_{yz}} \right) \bigg|_T = 4 \lambda_{xyxy} e_{yz}. \quad (8.24)$$

Cambio la notación por: $4 \lambda_{xyxy} = 2G$, $\lambda_{xxxx} = \alpha$ y $\lambda_{xyxy} = \beta$, de manera que las ecs. (8.19)-(8.24) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\alpha - \beta) e_{xx} + \beta I_e, & \sigma_{xy} &= 2G e_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= (\alpha - \beta) e_{yy} + \beta I_e, & \sigma_{xz} &= 2G e_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= (\alpha - \beta) e_{zz} + \beta I_e, & \sigma_{yz} &= 2G e_{yz}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

⁵ Alternativamente podemos usar el método que se desarrolló en el capítulo 5.

Este conjunto de ecuaciones nos dan las ecuaciones constitutivas esfuerzo *vs.* deformación de este sistema y ahora es necesario resolver para los desplazamientos.

Primero sustituimos en la ecuación de movimiento, que nos da lo siguiente,

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \Sigma, \quad (8.26)$$

donde estamos suponiendo que no hay fuerza volumétrica. Escribo explícitamente las tres componentes de la ecuación (8.26)

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad (8.27)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad (8.28)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (8.29)$$

Para simplificar un poco el álgebra se define $\gamma = \alpha - \beta$, ahora la sustitución de las ecuaciones constitutivas, ec. (8.25), en las ecuaciones (8.27)-(8.29), es directa y sólo voy a escribir el resultado; queda al lector efectuar todos los pasos.

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - (\gamma + \beta) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = (G + \beta) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right),$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - (\gamma + \beta) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - G \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = (G + \beta) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial y} \right),$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - (\gamma + \beta) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - G \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = (G + \beta) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} \right).$$

Ahora vamos a suponer que se propaga una onda monocromática en el material, de manera que:

$$u_i = u_{0i} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \quad i = x, y, z, \quad (8.30)$$

donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, ω la frecuencia y u_{0i} la amplitud correspondiente. Sustituimos en cada una de las ecuaciones y, como son lineales, el factor exponencial se simplifica para quedar en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [-\rho\omega^2 + (\gamma + \beta)k_x^2 + G(k_y^2 + k_z^2)]u_{0x} + (G + \beta)k_x k_y u_{0y} + (G + \beta)k_x k_z u_{0z} &= 0 \\ (G + \beta)k_x k_y u_{0x} + [-\rho\omega^2 + (\gamma + \beta)k_y^2 + G(k_x^2 + k_z^2)]u_{0y} + (G + \beta)k_y k_z u_{0z} &= 0 \\ (G + \beta)k_x k_z u_{0x} + (G + \beta)k_y k_z u_{0y} + [-\rho\omega^2 + (\gamma + \beta)k_z^2 + G(k_x^2 + k_y^2)]u_{0z} &= 0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Puesto que el conjunto de ecuaciones acopladas que nos ha quedado es homogéneo, éste tiene solución no-trivial solamente si el determinante del sistema es nulo. Al anular el determinante se obtiene una relación entre ω y k . Ésta se

conoce con el nombre de “Relación de dispersión” y nos dice para qué frecuencias o vectores de onda existe la solución en forma de propagación de ondas en el sistema. De hecho, ahora la velocidad de propagación $U_i = \frac{\partial \omega}{\partial k_i}$ es una función no-trivial del vector de onda. Dicho de otra forma, la velocidad de propagación depende de la frecuencia.

Con el objeto de simplificar un poco el análisis tomamos como un primer caso el vector de onda como $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$, de manera que el conjunto de ecuaciones se reduce un poco:

$$\begin{aligned} [-\rho\omega^2 + (\gamma + \beta)k^2]u_{0x} &= 0, \\ [-\rho\omega^2 + Gk^2]u_{0y} &= 0, \\ [-\rho\omega^2 + Gk^2]u_{0z} &= 0, \end{aligned} \quad (8.32)$$

y el determinante es

$$[-\rho\omega^2 + (\gamma + \beta)k^2][-\rho\omega^2 + Gk^2][-\rho\omega^2 + Gk^2] = 0, \quad (8.33)$$

que tiene tres raíces para ω^2 ,

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma + \beta}{\rho}k^2, \quad \omega_2^2 = \omega_3^2 = \frac{G}{\rho}k^2. \quad (8.34)$$

Vemos que en este caso se tienen dos frecuencias diferentes y, por tanto, dos velocidades de propagación, una de ellas corresponde a propagación longitudinal, es decir con desplazamiento a lo largo del vector de onda, y las otras dos velocidades corresponden a propagación con desplazamiento perpendicular al vector de onda.

Como segundo caso tomamos el vector de onda $k_z = 0$, $k_x^2 + k_y^2 = k^2$, las ecuaciones (8.31) ahora quedan en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} [-\rho\omega^2 + \alpha k_x^2 + Gk_y^2]u_{0x} + \alpha k_x k_y u_{0y} &= 0, \\ \alpha k_x k_y u_{0x} + [-\rho\omega^2 + \alpha k_y^2 + Gk_x^2]u_{0y} &= 0, \\ [-\rho\omega^2 + Gk^2]u_{0z} &= 0. \end{aligned} \quad (8.35)$$

La relación de dispersión nos la da el determinante de este sistema y vemos que es

$$[-\rho\omega^2 + Gk^2] \left[\left(-\rho\omega^2 + \alpha k_x^2 + Gk_y^2 \right) \left(-\rho\omega^2 + \alpha k_y^2 + Gk_x^2 \right) - (G + \beta)^2 k_x^2 k_y^2 \right] = 0, \quad (8.36)$$

de donde inmediatamente obtenemos una de las raíces

$$\omega_1^2 = \frac{G}{\rho}k^2, \quad (8.37)$$

para el resto dividido por ρ^2 y nos queda

$$\left[-\omega^2 + \frac{\alpha}{\rho}k_x^2 + \frac{G}{\rho}k_y^2\right]\left[-\omega^2 + \frac{\alpha}{\rho}k_y^2 + \frac{G}{\rho}k_x^2\right] - \left(\frac{G+\beta}{\rho}\right)^2 k_x^2 k_y^2 = 0, \quad (8.38)$$

que es una ecuación cuadrática para ω^2 y que podemos escribir como

$$\omega^4 - \chi k^2 + \psi = 0, \quad (8.39)$$

donde

$$\chi = \frac{\alpha + G}{\rho},$$

$$\psi = \frac{\alpha G}{\rho^2}(k_x^4 + k_y^4) + \frac{\alpha^2 - \beta(\beta + 2G)}{\rho^2} k_x^2 k_y^2.$$

Ahora las tres frecuencias son diferentes y dependen fuertemente de las componentes del vector de onda,

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{\chi k^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\chi^2 k^4 - 4\psi}. \quad (8.40)$$

Queda al lector calcular las velocidades de propagación y ver cuales son las direcciones de propagación correspondientes. En este caso, es importante notar que las frecuencias dependen de las componentes del vector de onda por separado, es decir de k_x, k_y y no sólo de k^2 , como en los otros casos.

8.5. Problemas

- 1.- Estudiar la sección de Ondas de Rayleigh en el libro de Landau.
- 2.- Estudiar el problema de Ondas de Love en el ejercicio de ondas de Rayleigh del libro de Landau.
- 3.- Mostrar explícitamente que la propagación de ondas descrita por $\mathbf{u}_t$ va acompañada de un cambio de volumen.
- 4.- Mostrar explícitamente que la propagación de ondas descrita por $\mathbf{u}_t$ no provoca cambio de volumen.
- 5.- Demuestre que la energía libre para un sistema con simetría cúbica, que se obtuvo en el problema 5.5, es equivalente a la expresión (8.15).

Capítulo 9

Problemas en dos dimensiones

9.1. Deformación en un plano.

Los problemas bidimensionales se realizan cuando alguno de los ejes del sistema coordenado no interviene en el problema y todo sucede en un plano. Primero consideramos el caso en que las componentes del tensor de deformaciones están dadas. En este caso, el desplazamiento en alguno de los ejes es nulo y las otras componentes sólo son funciones de dos de las coordenadas; por ejemplo

$$u_1 = f_1(x_1, x_2), \quad u_2 = f_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0. \quad (9.1)$$

De acuerdo con la ecuación (9.1) las componentes del tensor de deformación son las siguientes:

$$\begin{aligned} e_{33} &= 0, & e_{11} &= \phi_1(x_1, x_2), \\ e_{13} &= 0, & e_{22} &= \phi_2(x_1, x_2), \\ e_{23} &= 0, & e_{12} &= \phi_3(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (9.2)$$

La deformación ocurre solamente en direcciones contenidas en el plano (x_1, x_2) y el patrón de desplazamientos y deformaciones será el mismo para todos los planos paralelos al plano (x_1, x_2) ; tal deformación se conoce con el nombre de “deformación plana”.

Un ejemplo donde se realizan estas condiciones es en una barra con su eje paralelo al eje x_3 , y las fuerzas que actúan sobre ella son perpendiculares a Ox_3 y constantes a lo largo del eje, como se ve en la figura 9.1.

9.1.1. Modificación de las ecuaciones

Veamos cómo se escriben las ecuaciones de la elasticidad en un medio homogéneo e isótropo para este caso. Recordemos que las elongaciones se pueden

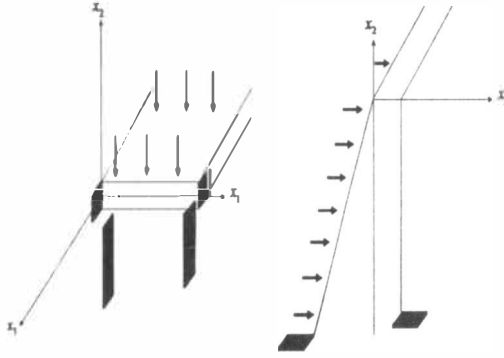


Figura 9.1: Ejemplos de problemas en un plano, el eje x_3 es perpendicular al plano.

escribir en la forma

$$e_{ii} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}I_{\sigma}, \quad \text{no hay suma sobre } i, \quad (9.3)$$

pero $e_{33} = 0$, de donde, al usar la ecuación (9.3), obtenemos que

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (9.4)$$

vemos que $\sigma_{33} \neq 0$ pero no es independiente. Tomando en cuenta la ecuación (9.4) y sustituyendo en la ec. (9.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} e_{22} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \\ &= \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}[\sigma_{11}(1+\nu) + \nu\sigma_{22}] \\ &= \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_{11} \\ &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}]. \end{aligned}$$

Para la componente e_{11} se realiza un procedimiento semejante y en resumen obtenemos

$$e_{22} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}], \quad (9.5)$$

$$e_{11} = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \quad (9.6)$$

a su vez

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2G}e_{12}. \quad (9.7)$$

También debemos notar que todas las componentes del tensor de esfuerzos son independientes de la coordenada x_3 .

Tomando en cuenta estas consideraciones, ahora hacemos un resumen de todas las ecuaciones que necesitamos para abordar problemas de deformación plana.

I) Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho b_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho b_2 &= 0, \\ b_3 &= 0.\end{aligned}\tag{9.8}$$

II) Ecuaciones de compatibilidad (Saint Venant)

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},\tag{9.9}$$

ésta es la única ecuación no-trivial.

III.a) Ley de Hooke para sistemas homogéneos e isotrópos, escrita en términos de las componentes del tensor de deformación

$$e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad e_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12},\tag{9.10}$$

$$e_{11} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}], \quad e_{22} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}].\tag{9.11}$$

III.b) En términos de las componentes del tensor de los esfuerzos

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2G} e_{12},\tag{9.12}$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}),\tag{9.13}$$

$$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)e_{11} + \lambda e_{22},\tag{9.14}$$

$$\sigma_{22} = (2\mu + \lambda)e_{22} + \lambda e_{11}.\tag{9.15}$$

IV) las condiciones de frontera deben estar especificadas en el plano.

9.2. Esfuerzos en un plano.

En los ejemplos que acabamos de describir consideremos que la dimensión de los sistemas a lo largo del eje x_3 es pequeña (h), entonces las fuerzas actúan paralelas a las caras de nuestro cuerpo. De esta manera, tendremos una placa cuyo equilibrio será estable y no se flexionará en el eje Ox_3 (ver figura 9.2).

Las caras de la placa están libres de esfuerzos y entonces se tiene la situación siguiente

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0,\tag{9.16}$$

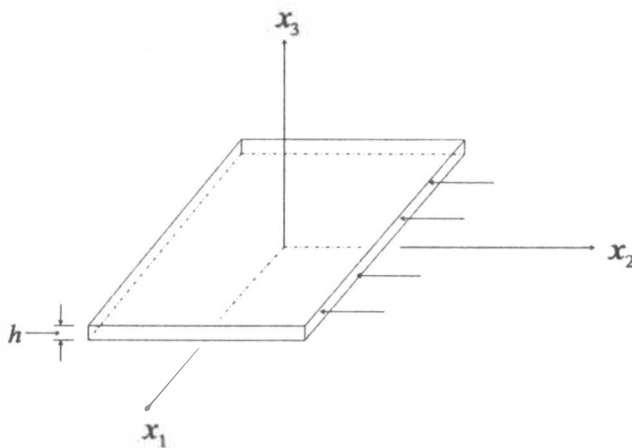


Figura 9.2: Esfuerzos en un plano.

sobre las caras; pero, como el ancho de la placa h es pequeño, esta situación será válida para toda la placa, y los otros esfuerzos prácticamente no varían con x_3 , entonces

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_{11}(x_1, x_2), \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}(x_1, x_2), \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{9.17}$$

Ahora es necesario trabajar la ecuación de compatibilidad para escribirla en términos de los esfuerzos. Primero sustituimos en la ecuación (9.3) las condiciones expresadas en la ec. (9.16) y tenemos que

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{22}, \\ e_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11}, \\ e_{33} &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ e_{12} &= \frac{1}{2G}\sigma_{12}.\end{aligned}\tag{9.18}$$

Notemos que aún cuando la cara perpendicular al eje x_3 está libre de esfuerzos, la elongación $e_{33} \neq 0$ y es causada por los esfuerzos σ_{11} y σ_{22} . Ahora tomamos la ecuación (9.9) y calculamos cada término usando la relación entre las componentes del tensor de deformación y el tensor de los esfuerzos; para el segundo

miembro tenemos

$$\begin{aligned}
 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\sigma_{12}}{2G} - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \\
 &= \frac{(1+\nu)}{E} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\rho b_1 - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\rho b_2 - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1+\nu}{E} \left[-\rho(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el primer miembro de la ec. (9.9) nos da

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \\
 = \frac{1+\nu}{E} \left[-\rho \nabla \cdot \mathbf{b} - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

de donde obtenemos

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -(1+\nu) \rho (\nabla \cdot \mathbf{b}), \tag{9.20}$$

que en ausencia de fuerzas externas nos conduce a

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \tag{9.21}$$

y se conoce como “ecuación de Levy”.

Hacemos ahora un resumen de las ecuaciones necesarias para resolver problemas con esfuerzos en un plano:

I) Ecuaciones de Equilibrio

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho b_1 &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho b_2 &= 0, \\
 b_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

II) Ecuación de Levy (compatibilidad).

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \tag{9.23}$$

III) Ley de Hooke

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \\
 e_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}), \\
 e_{12} &= \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \\
 e_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}).
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

IV) Las condiciones de frontera en el plano.

Entonces, para el problema de esfuerzos en un plano, debemos resolver el problema a partir de las ecuaciones de equilibrio, la condición de Levy y las condiciones de frontera, esto nos dará como resultado el valor de los esfuerzos σ_{11} , σ_{22} y σ_{12} . Después se utiliza la ley de Hooke para encontrar las componentes del tensor de deformación y, por integración de éstas, los desplazamientos.

Por otra parte, si sólo se requieren los esfuerzos, no es necesario usar la ley de Hooke explícitamente, y la solución no depende de los módulos elásticos del material.

Cuando las fuerzas externas se anulan la solución de las ecuaciones de equilibrio es inmediata en términos de la llamada “función de esfuerzos” o “función de Airy”, que se define como sigue:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (9.25)$$

es inmediato mostrar que las ecuaciones de equilibrio, en ausencia de fuerza volumétrica, se satisfacen sin problema alguno con esta definición. Para determinar la ecuación que debe satisfacer la función de esfuerzos ϕ se sustituye en la ecuación de Levy y obtenemos

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right) = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (9.26)$$

o bien

$$\nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (9.27)$$

Vemos que, en términos de esta función, el estado de esfuerzos del cuerpo es independiente del material. En este caso, el problema se ha reducido a resolver para la función de esfuerzos con las condiciones de frontera correspondientes¹.

9.2.1. Ejercicio

Considere la función de Airy $\phi = \frac{k}{6}x_2^3$ y calcule los esfuerzos.

Solución: Es inmediato que satisface la ecuación de Levy, pues ésta contiene cuartas derivadas y la función que se especificó es de tercer orden en la única coordenada de la que depende. Al sustituir las ecs. (9.25) obtenemos que los esfuerzos son:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = kx_2, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0. \quad (9.28)$$

entonces

$$\sigma = \begin{pmatrix} kx_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

En la figura 9.3 vemos una interpretación del resultado. Ya que sólo tenemos la componente σ_{11} , se trata de un esfuerzo de tensión aplicado sobre el área perpendicular al eje x_1 .

¹ Si hay fuerzas volumétricas externas $\rho b \neq 0$ también se puede definir la función de Airy. Ver la sección 9.3.

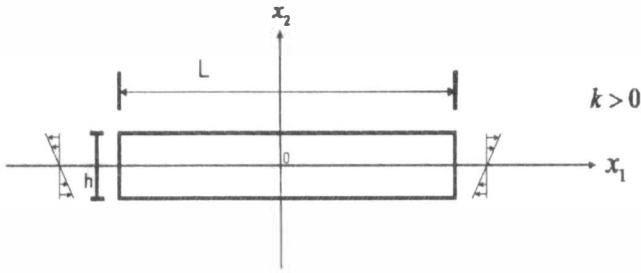


Figura 9.3: Ejercicio 2.1

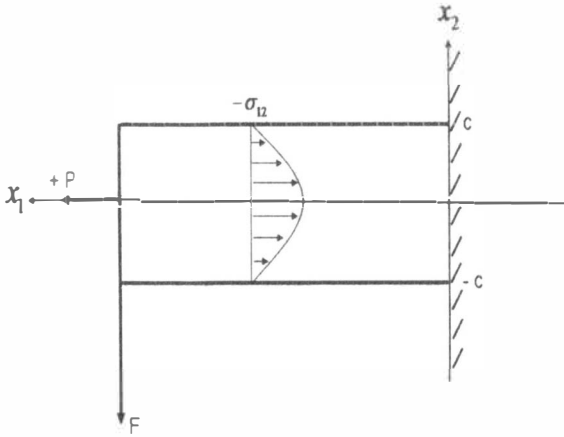


Figura 9.4: Ejercicio 2.2

9.2.2. Ejercicio

Mostrar que $\phi = \frac{3F}{4c} \left(x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{4c} x_2^2$ es una función de Airy y determinar el tensor de esfuerzos en la región $x_1 > 0$, $-c < x_2 < c$.

Solución: Para demostrar que es una función de Airy debemos ver si cumple con la ecuación de Levy,

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0. \quad (9.30)$$

Sustituimos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= \frac{3F}{4c} \left(x_2 - \frac{x_2^3}{3c^2} \right), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= \frac{3F}{4c} \left(x_1 - \frac{x_1 x_2^2}{c^2} \right) + \frac{P}{2c} x_2, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} &= \frac{3F}{4c} \left(-\frac{2x_1 x_2}{c^2} \right) + \frac{P}{2c}, & \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_2^3} &= \frac{3F}{4c} \left(-\frac{2x_1}{c^2} \right), \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} &= 0, & \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{3F}{4c} \left(-\frac{2x_2}{c^2} \right), \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= 0.\end{aligned}$$

Como todas las cuartas derivadas son cero, la ecuación de Levy se satisface para todos los puntos del intervalo.

Cálculo de los esfuerzos.

Tomamos las segundas derivadas que ya calculamos y además la segunda derivada cruzada $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{x_2^2}{c^2} \right)$, de manera que el tensor de esfuerzos es

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\frac{3F}{2c^3} x_1 x_2 + \frac{P}{2c} & -\frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{x_2^2}{c^2} \right) \\ -\frac{3F}{4c} \left(1 - \frac{x_2^2}{c^2} \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.31)$$

Veamos qué sucede con los valores de los esfuerzos en los extremos del intervalo

$$\sigma_{12}|_{(0, \pm c)} = 0, \quad \sigma_{11}|_{(0, \pm c)} = \frac{P}{2c}, \quad (9.32)$$

σ_{12} tiene un máximo en $x_2 = 0$ y tiene forma parabólica, además se anula en los extremos $\pm c$. Ahora vamos a calcular la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el área perpendicular al eje x_1 y en dirección al eje x_1

$$\int_{-c}^c \sigma_{11} dx_2 = \int_{-c}^c \left(-\frac{3F}{2c^3} x_1 x_2 + \frac{P}{2c} \right) dx_2 = P, \quad (9.33)$$

Por otra parte, el esfuerzo cortante σ_{12} da lugar a otra fuerza que actúa sobre la cara perpendicular a x_1 , pero está en la dirección de x_2 ,

$$\int_{-c}^c \sigma_{12} dx_2 = -\frac{3F}{4c} \int_{-c}^c \left(1 - \frac{x_2^2}{c^2} \right) dx_2 = -\frac{3F}{2c} \left(x_2 - \frac{x_2^3}{3c^2} \right) \Big|_0^c = -F. \quad (9.34)$$

De esta manera vemos que sobre el área perpendicular al eje x_1 actúan una fuerza de tensión P y una fuerza de tipo cortante $-F$. La interpretación de ello se ve en la figura 9.4.

9.3. Pared de una Presa.

Vamos a considerar la pared de una presa que está hecha con un medio homogéneo e isótropo; el perfil de la pared es triangular y el problema se puede

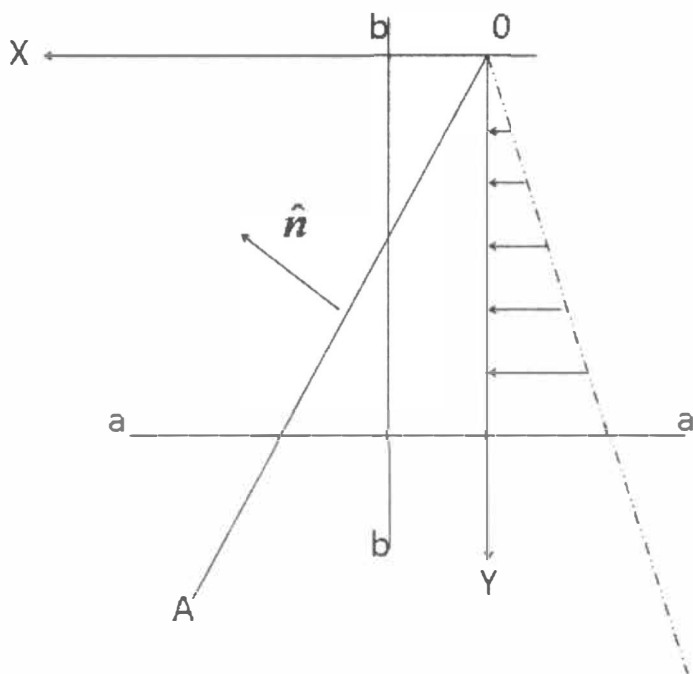


Figura 9.5: Pared de una presa con sección transversal triangular (Poner atención a la dirección de los ejes coordenados).

considerar bidimensional, ya que la situación en un corte perpendicular al eje z es la misma para cualquier valor de z . En la figura 9.5 se especifica la geometría del problema². La pared está sujeta a la presión del agua y ésta es proporcional a la profundidad³. Las condiciones de frontera son las siguientes:

i) En la cara Oy de la pared, definida por la ecuación $x = 0$, el esfuerzo cortante es nulo,

$$\sigma_{yx}(-x) = -\sigma_{yx}(x) = 0, \quad (9.35)$$

el esfuerzo normal deberá contrarrestar la presión del agua

$$\sigma_{xx}(-x) = -\sigma_{xx}(x) = \gamma y, \quad (9.36)$$

donde γ es constante, de manera que la presión aumenta con y .

ii) En la cara OA de la pared, que está caracterizada por la ecuación

$$\tan \beta = \frac{x}{y}, \quad x = y \tan \beta \quad (9.37)$$

²Observe la dirección de los ejes coordenados en la figura 9.5.

³La figura 9.5 coincide con la figura 3.15; ésto se ha hecho a fin de que el alumno pueda seguir la explicación de esta sección sin dificultades.

sucede que el esfuerzo es nulo, es decir

$$\sigma_{x\hat{n}} = 0, \quad \sigma_{y\hat{n}} = 0, \quad (9.38)$$

donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a OA .

Este problema corresponde a esfuerzos en un plano y, por lo tanto, se puede resolver en términos de la función de Airy. Se va a escoger una función de Airy con cuatro coeficientes por determinar partiendo de las cuatro condiciones de frontera que tenemos. Se propone

$$\phi(x, y) = \frac{d}{6}x^3 + \frac{e}{2}x^2y + \frac{f}{2}xy^2 + \frac{k}{6}y^3, \quad (9.39)$$

ahora construimos las componentes del tensor de esfuerzos

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \rho g x. \quad (9.40)$$

El último término $\rho g x$ se agrega porque ahora existe la fuerza gravitacional que está actuando. Sustituimos la función de Airy en la ecuación de Levy⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{d}{2}x^2 + exy + \frac{f}{2}y^2, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= dx + ey, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{ex^2}{2} + fxy + \frac{k}{2}y^2, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= fx + ky, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= ex + fy, \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} &= d, & \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} &= k, & \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} &= 0, \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial x^2} &= e, & \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &= 0, & \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones, es claro que la ecuación de Levy se satisface para cualquier valor de las constantes. Usando estos valores de las derivadas podemos escribir los esfuerzos

$$\sigma_{xx} = fx + ky, \quad (9.41)$$

$$\sigma_{yy} = dx + ey, \quad (9.42)$$

$$\sigma_{xy} = -ex - fy - \rho g x. \quad (9.43)$$

Imponemos la condición de frontera marcada con (i), ecs. (9.35), (9.36), entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x=0) &= ky = -\gamma y, \longrightarrow k = -\gamma, \\ \sigma_{xy}(x=0) &= -fy = 0, \longrightarrow f = 0. \end{aligned} \quad (9.44)$$

⁴Notar que en la ec. (9.20) está el término $\nabla \cdot \mathbf{b}$; sin embargo, en este caso, debido a que $\mathbf{b} = \mathbf{g} = \text{constante}$, este término se anula y la ecuación de Levy sigue siendo válida.

Ahora los esfuerzos quedan en la forma

$$\sigma_{xx} = -\gamma y, \quad (9.45)$$

$$\sigma_{yy} = dx + ey, \quad (9.46)$$

$$\sigma_{xy} = -ex - \rho gx. \quad (9.47)$$

Con el objeto de imponer la condición de frontera marcada con (ii), necesitamos reescribir el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y, de acuerdo con la figura tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= (\cos\beta, -\sin\beta), \quad \text{por lo cual} \\ \sigma_{x\hat{\mathbf{n}}} &= \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y = \sigma_{xx}\cos\beta - \sigma_{xy}\sin\beta, \\ \sigma_{y\hat{\mathbf{n}}} &= \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y = \sigma_{xy}\cos\beta - \sigma_{yy}\sin\beta. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Entonces la condición de frontera queda como:

$$\left[\sigma_{xx}\cos\beta - \sigma_{xy}\sin\beta \right] \Big|_{x=y\tan\beta} = 0, \quad (9.49)$$

$$\left[\sigma_{xy}\cos\beta - \sigma_{yy}\sin\beta \right] \Big|_{x=y\tan\beta} = 0. \quad (9.50)$$

Sustituimos las ecuaciones (9.45)-(9.47) en (9.49) y (9.50)

$$\begin{aligned} -\gamma\cos\beta + e\tan\beta\sin\beta + \rho g\tan\beta\sin\beta &= 0, \\ (e + \rho g)\sin\beta + (d\tan\beta + e)\sin\beta &= 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$d = \frac{\rho g}{\tan\beta} - \frac{2\gamma}{\tan^2\beta}, \quad (9.51)$$

$$e = \frac{\gamma}{\tan^2\beta} - \rho g. \quad (9.52)$$

Estos valores de las constantes se sustituyen en los esfuerzos y con ello obtenemos la distribución de esfuerzos en la pared de la presa.

$$\sigma_{xx} = -\gamma y, \quad (9.53)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\gamma x}{\tan^2\beta}, \quad (9.54)$$

$$\sigma_{yy} = \left(\rho g - \frac{2\gamma}{\tan^2\beta} \right) \frac{x}{\tan\beta} + \left(\frac{\gamma}{\tan^2\beta} - \rho g \right) y. \quad (9.55)$$

En la figura 9.6 se representan algunos valores específicos de los esfuerzos.

Con el objeto de resolver para los desplazamientos se usa la ley de Hooke para medios homogéneos e isotrópicos; la sustitución es directa y se encuentra

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[-\nu \left(\rho g - \frac{2\gamma}{\tan^2\beta} \right) \frac{x}{\tan\beta} + \left(\frac{\gamma}{\tan^2\beta} - \rho g - \gamma \right) y \right], \quad (9.56)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left[\left(\rho g - \frac{2\gamma}{\tan^2\beta} \right) \frac{x}{\tan\beta} + \nu \gamma y \right], \quad (9.57)$$

$$e_{xy} = -\frac{1}{2G} \frac{\gamma x}{\tan^2\beta}. \quad (9.58)$$

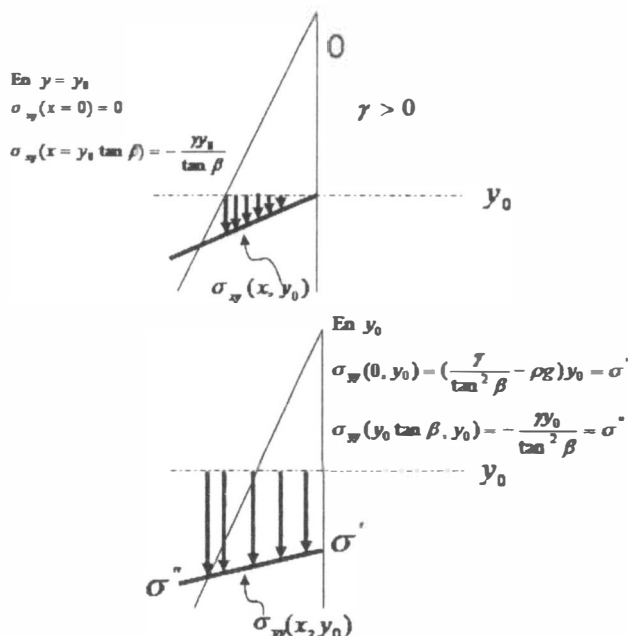


Figura 9.6: Esfuerzos en la pared de una presa de sección transversal triangular.

Partiendo de estas componentes del tensor de deformación, por integración podemos calcular los desplazamientos; veamos como⁵

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E} \left[-\nu dx + (e - \gamma)y \right] = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ e_{yy} &= \frac{1}{E} (dx + \nu \gamma y) = \frac{\partial u_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Integramos respecto de x y de y las ecuaciones anteriores

$$u_x = -\frac{\nu dx^2}{2E} + \frac{(e - \gamma)}{E} yx + f(y), \quad (9.60)$$

$$u_y = \frac{d}{E} xy + \frac{\nu \gamma y^2}{2E} + g(x). \quad (9.61)$$

Si ahora sustituimos en la componente e_{xy} tenemos

$$-\frac{\gamma}{G} \frac{x}{\tan^2 \beta} = \frac{e - \gamma}{E} x + f'(y) + \frac{d}{E} y + g'(x), \quad (9.62)$$

donde las primas significan primera derivada respecto de la variable que les

⁵Notar que en la ec. (9.59) aparecen nuevamente las constantes e y d a fin de facilitar el manejo de las expresiones.

corresponde. Separamos la dependencia en x y en y , entonces

$$-\frac{\gamma x}{G \tan^2 \beta} - \frac{e - \gamma}{E} x - g'(x) = f'(y) + \frac{d}{E} y = \lambda. \quad (9.63)$$

En esta ecuación está separada la dependencia con las dos coordenadas y entonces ambos términos se igualan con la constante de separación λ ; de esta manera obtenemos dos ecuaciones

$$f'(y) = \lambda - \frac{d}{E} y \longrightarrow f(y) = \lambda y - \frac{dy^2}{2E} + c_1, \quad (9.64)$$

$$g'(x) = -\lambda - \frac{e - \gamma}{E} x - \frac{\gamma x}{G \tan^2 \beta},$$

$$\rightarrow g(x) = -\lambda x - \frac{e - \gamma}{2E} x^2 - \frac{\gamma x^2}{2G \tan^2 \beta} + c_2. \quad (9.65)$$

Ahora los desplazamientos quedan en la forma

$$u_x = -\frac{\nu dx^2}{2E} + \frac{e - \gamma}{E} xy + \lambda y - \frac{dy^2}{2E} + c_1. \quad (9.66)$$

$$u_y = \frac{d}{E} xy + \frac{\nu \gamma y^2}{2E} - \lambda x - \frac{e - \gamma}{2E} x^2 - \frac{\gamma x^2}{2G \tan^2 \beta} + c_2. \quad (9.67)$$

Con el objeto de evaluar las constantes que nos han quedado aún sin determinar ponemos condiciones de frontera

1. Desplazamiento del origen nulo, $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$.

2. Rotación nula en el origen, $\Omega_{xy}(0, 0) = 0$.

La primera condición implica que las dos constantes $c_1 = c_2 = 0$ y para la segunda condición evaluamos la componente xy del tensor de rotación,

$$2\Omega_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} =$$

$$= \frac{e - \gamma}{E} x + \lambda + \frac{dy}{E} - \left(\frac{dy}{E} + \frac{\nu \gamma y}{E} - \lambda - \frac{e - \gamma}{E} x - \frac{\gamma x}{G \tan^2 \beta} \right) \Big|_{(0,0)} = \quad (9.68)$$

$$= 2\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0. \quad (9.69)$$

Sustituyendo todo obtenemos que

$$u_x = -\left(\rho g - \frac{2\gamma}{\tan^2 \beta}\right) \frac{(x^2 + \nu y^2)}{2E \tan \beta} + \left(\frac{\gamma}{\tan^2 \beta} - \rho g - \gamma\right) \frac{xy}{E}, \quad (9.70)$$

$$u_y = \frac{x^2}{2E} \left[\rho g + \gamma - \frac{(3 + 2\nu)\gamma}{\tan^2 \beta} \right] + \frac{\nu \gamma y^2}{2E} + \left(\rho g - \frac{2\gamma}{\tan^2 \beta}\right) \frac{xy}{E \tan \beta}. \quad (9.71)$$

Los desplazamientos son cuadráticos en las coordenadas de los puntos en el medio.

9.4. Flexión de un soporte.

Queremos resolver el problema de un soporte sometido a esfuerzos cortantes que tratan de flexionarlo. La figura 9.7 muestra una barra de ancho h y longitud L anclada a una pared; en forma esquemática, éste es el problema por resolver.

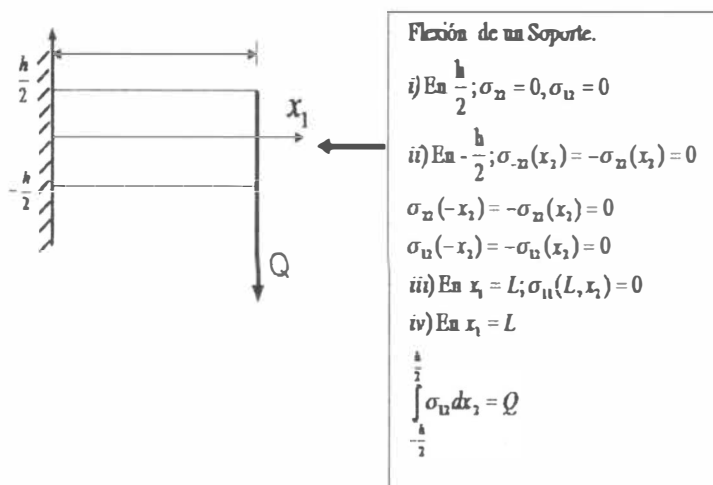


Figura 9.7: Flexión de un soporte.

A diferencia del problema de flexión que ya resolvimos en el capítulo 7 y en el cual consideramos que la sección transversal de la barra siempre permanece perpendicular al eje de la barra, ahora solamente especificamos las condiciones de frontera y supondremos que el material es homogéneo e isótropo. Es importante notar que vamos a aplicar un esfuerzo cortante en un extremo de la barra y no un esfuerzo normal. Nuestro problema consiste en encontrar la función de Airy que satisfaga las condiciones de frontera y finalmente los desplazamientos que corresponden. Posteriormente, analizamos la ecuación del eje después de la deformación y cómo se deforma la sección transversal.

Empezamos con las condiciones de frontera

1. En $x_2 = \frac{h}{2}$, $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$.
2. En $x_2 = -\frac{h}{2}$, $\sigma_{22}(-x_2) = -\sigma_{22}(x_2) = 0$, $\sigma_{12}(-x_2) = -\sigma_{12}(x_2) = 0$.

Estas dos condiciones indican que no hay esfuerzo normal ni cortante sobre las caras de la barra que son perpendiculares al eje x_2 .

3. En $x_1 = L$, $\sigma_{11}(L) = 0$, lo que significa que sobre el extremo de la barra no hay esfuerzo normal.
4. La forma en que la carga Q está distribuida sobre la sección transversal donde se aplica no está especificada, de tal manera que debe cumplirse lo siguiente: $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} dx_2 = Q$, en $x_1 = L$

Notar que por la forma en que está Q y debido a que la dirección positiva del eje x_2 está hacia arriba, la Q debe ser negativa. Veremos que para calcular los esfuerzos estas condiciones son suficientes.

La función de Airy debe satisfacer la ecuación de Levy,

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0. \quad (9.72)$$

Tomando como guía el ejemplo anterior, vamos a proponer una forma de la función de Airy ϕ y ajustar las constantes de manera que se cumplan las condiciones de frontera. Proponemos

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{(A + Bx_1)x_2^3}{6} + \psi_1(x_1)x_2 + \psi_2(x_1), \quad (9.73)$$

vamos a sustituir en la ecuación (9.72)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= \frac{B}{6} x_2^3 + \psi_1' x_2 + \psi_1', \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} &= \psi_1'' x_2 + \psi_2'', \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{B}{2} x_2^2 + \psi_1', \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= \frac{(A + Bx_1)}{2} x_2^2 + \psi_1, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} &= (A + Bx_1) x_2. \end{aligned}$$

Antes de continuar con las derivadas recordemos que las componentes del tensor de los esfuerzos están dadas en términos de las segundas derivadas, de manera que:

$$\sigma_{11} = (A + Bx_1)x_2, \quad (9.74)$$

$$\sigma_{22} = \psi_1'' x_2 + \psi_2'', \quad (9.75)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{B}{2} x_2^2 - \psi_1'. \quad (9.76)$$

Queda al lector verificar que se cumplen las condiciones de equilibrio para fuerza

volumétrica nula. Ahora continuamos con las derivadas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x_1^3} &= \psi_1''' x_2 + \psi_2''', \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_2^3} &= A + Bx_1, \\ \frac{\partial^3 \phi}{\partial x_2 \partial x_1^2} &= \psi_1'', \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_1^4} &= \psi_1^4 x_2 + \psi_2^4, \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \frac{\partial^4 \phi}{\partial x_2^2 \partial x_1^2} &= 0.\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (9.72), obtenemos que

$$\psi_1^4 x_2 + \psi_2^4 = 0, \quad (9.77)$$

donde ψ_1^4 , ψ_2^4 son las cuartas derivadas que corresponden a las funciones ψ_1 y ψ_2 . Ahora bien, debido a que las funciones ψ_1 y ψ_2 solamente son funciones de x_1 , la única forma de satisfacer la ecuación (9.77) para toda x_2 es

$$\psi_1^4 = 0, \quad \psi_2^4 = 0. \quad (9.78)$$

Con el objeto de evaluar estas funciones regresamos a los esfuerzos obtenidos en las ecuaciones (9.74)-(9.76) y vamos a aplicar las condiciones de frontera, de $\sigma_{22}(-x_2) = -\sigma_{22}(x_2)$ tenemos que

$$\sigma_{22}(x_2) = \psi_1'' x_2 + \psi_2'' = -\psi_1'' x_2 + \psi_2'' \rightarrow \psi_2'' = 0, \quad (9.79)$$

puesto que la ecuación debe cumplirse para toda x_1 , esto nos indica que $\psi_2 = \alpha x_1 + \beta$. Por otra parte, en $x_2 = -\frac{h}{2}$ la componente $\sigma_{12} = 0$ y, usando la ecuación (9.76), tenemos que

$$-\frac{B}{2} \left(\frac{h^2}{4} \right) - \psi_1' = 0 \rightarrow \psi_1' = -\frac{Bh^2}{8}, \quad (9.80)$$

por lo cual $\psi_1(x_1) = -\frac{Bh^2}{8} x_1 + \gamma$; ahora podemos reescribir los esfuerzos en la forma siguiente:

$$\sigma_{11} = (A + Bx_1)x_2, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = -\frac{B}{2}x_2^2 + \frac{Bh^2}{8}. \quad (9.81)$$

Es importante notar que las constantes α, β y γ que aparecieron en las funciones ψ_1 y ψ_2 no aparecen en los esfuerzos y, de hecho, no juegan papel alguno. En la

distribución de esfuerzos aplicamos la condición de frontera 3, para el esfuerzo normal en el extremo del soporte, de manera que

$$\sigma_{11}(L, x_2) = (A + BL)x_2 = 0 \longrightarrow A = -BL,$$

por lo tanto

$$\sigma_{11} = B(x_1 - L)x_2. \quad (9.82)$$

Ahora sólo queda por determinar la constante B , para lo cual usamos la condición de frontera 4, que aún no hemos utilizado. Ésto significa que debemos calcular la carga

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{B}{2} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) dx_2 = \frac{B}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{x_2^3}{3} \right) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\ &= B \left(\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right) = \frac{2}{3} \frac{Bh^3}{8} = \frac{Bh^3}{12} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$B = \frac{12Q}{h^3}, \quad (9.83)$$

y por último sustituimos en los esfuerzos para obtener

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{12Q}{h^3} (x_1 - L)x_2, \\ \sigma_{12} &= \frac{6Q}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right), \\ \sigma_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (9.84)$$

La figura 9.8 muestra los perfiles correspondientes a los esfuerzos. El tensor de deformación se calcula de inmediato suponiendo que el material es homogéneo e isótropo,

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} = \frac{12Q}{h^3 E} (x_1 - L)x_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \\ e_{22} &= -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\frac{12Q\nu}{Eh^3} (x_1 - L)x_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ e_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2G} = \frac{3Q}{Gh^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right). \end{aligned} \quad (9.85)$$

Debemos notar que la componente $e_{33} \neq 0$, pero, debido a que la dimensión a lo largo del eje x_3 es pequeña, no se toma en cuenta. Ahora integramos

$$u_1 = \frac{12Q}{Eh^3} \left[\left(\frac{x_1^2}{2} - Lx_1 \right) x_2 + f(x_2) \right], \quad (9.86)$$

$$u_2 = -\frac{12Q\nu}{Eh^3} \left[(x_1 - L) \frac{x_2^2}{2} + g(x_1) \right]. \quad (9.87)$$

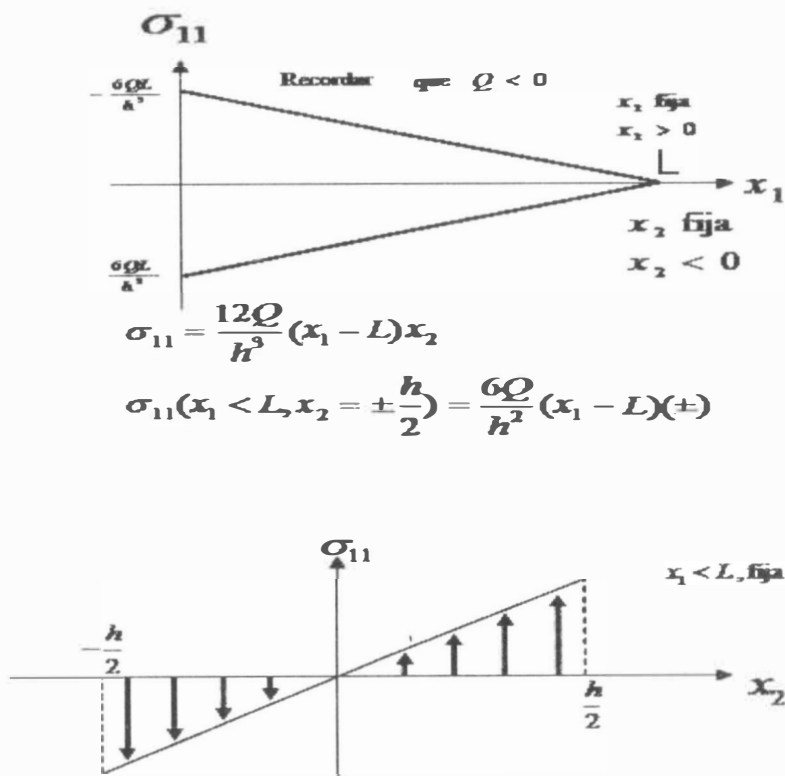


Figura 9.8: Esfuerzos que corresponden a la flexión de un soporte.

se sustituyen en la componente e_{12} , de manera que

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{12Q}{Eh^3} \left[\left(\frac{x_1^2}{2} - Lx_1 \right) + f'(x_2) \right],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{12Q}{Eh^3} \left[\frac{x_2^2}{2} + g'(x_1) \right],$$

de donde

$$\frac{12Q}{Eh^3} \left[\frac{x_1^2}{2} - Lx_1 - \frac{\nu x_2^2}{2} + f'(x_2) - \nu g'(x_1) \right] = \frac{6Q}{Gh^3} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right),$$

recordando que $\frac{2G}{E} = \frac{1}{1+\nu}$ tenemos

$$\frac{x_1^2}{2} - Lx_1 - \frac{\nu x_2^2}{2} + f'(x_2) - \nu g'(x_1) = (1 + \nu) \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right)$$

y ahora separamos la dependencia con x_1 y x_2 ,

$$\frac{x_1^2}{2} - Lx_1 - \nu g'(x_1) = (1 + \nu) \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) + \frac{\nu x_2^2}{2} - f'(x_2).$$

En esta ecuación el primer miembro sólo es función de x_1 mientras que el segundo miembro depende solamente de x_2 , de manera que deben ser iguales a una constante de separación

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{2} - Lx_1 - \nu g'(x_1) &= n, \\ (1 + \nu) \frac{h^2}{4} - (1 + \nu) x_2^2 - f'(x_2) &= n. \end{aligned}$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned} g(x_1) &= \frac{x_1^3}{6\nu} - \frac{Lx_1^2}{2\nu} - \frac{n}{\nu} x_1 + \alpha, \\ f(x_2) &= -\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \frac{x_2^3}{3} + x_2 \left[-n + (1 + \nu) \frac{h^2}{4} \right] + \beta. \end{aligned} \quad (9.88)$$

El cálculo de la constante de separación y de las constantes aditivas que surgieron al integrar se debe efectuar usando condiciones de frontera para los desplazamientos. Estas condiciones de frontera se especifican sobre el extremo fijo en la pared:

1. El origen del eje está fijo $\longrightarrow u_1 = u_2 = 0$ en $x_1 = x_2 = 0$, es inmediato que con esta condición $\alpha = \beta = 0$.
2. El origen del eje no rota, $\longrightarrow \Omega_{12}(0, 0) = 0$

Ésto significa que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \Big|_{(0,0)} &= \frac{12Q}{Eh^3} \left(x_1 \left(\frac{x_1}{2} - L \right) + \frac{2 + \nu}{2} x_2^2 - n + (1 + \nu) \frac{h^2}{4} \right) \Big|_{(0,0)} \\ &+ \frac{12Q\nu}{Eh^3} \left[\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2\nu} - \frac{L}{\nu} x_1 - \frac{n}{\nu} \right] \Big|_{(0,0)} = \\ &= \frac{12Q}{Eh^3} \left(-2n + (1 + \nu) \frac{h^2}{4} \right) = 0 \\ \text{lo cual implica } 2n &= \frac{(1 + \nu)h^2}{4}. \end{aligned} \quad (9.89)$$

Sustituyendo en los desplazamientos tenemos

$$u_1 = \frac{12Q}{Eh^3} \left[\left(\frac{x_1}{2} - L \right) x_1 x_2 - \frac{2 + \nu}{6} x_2^3 + \frac{1 + \nu}{8} h^2 x_2 \right], \quad (9.90)$$

$$u_2 = -\frac{12Q\nu}{Eh^3} \left[(x_1 - L) \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1}{\nu} \left(\frac{x_1^2}{6} - \frac{L}{2} x_1 - \frac{1 + \nu}{8} h^2 \right) \right], \quad (9.91)$$

Vamos a analizar estos resultados; para empezar consideramos la ecuación del eje antes de la deformación $x_2 = 0$ y vemos adonde va el eje después de la deformación

$$x'_2 = \left[x_2 + u_2(x_1, x_2) \right] \Big|_{(x_1, 0)} = -\frac{6Qx_1}{Eh^3} \left[\frac{x_1^2}{3} - Lx_1 - \frac{1+\nu}{4}h^2 \right]. \quad (9.92)$$

Con el objeto de ver con claridad el significado de la ec.(9.92) vamos a evaluar en $x_1 = L$, que corresponde al extremo libre de la barra. De inmediato obtenemos

$$x'_2(x_1 = L) = x'_2|_{(L, 0)} = \frac{6QL^3}{Eh^3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1+\nu}{4} \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (9.93)$$

de manera que la posición del eje en el extremo libre de la barra $x'_2 < 0$, recordando que $Q < 0$. La cantidad que desciende el eje depende de la carga impuesta (Q), la geometría de la barra (L, h) y evidentemente de las propiedades elásticas del material (E, ν).

Ahora veamos la forma de la sección transversal deformada; escogemos la sección en $x_1 = x_0$ de manera que $x'_1 = x_0 + u_1(x_0, x_2)$

$$x'_1 = x_0 + \frac{12Q}{Eh^3} \left[\left(\frac{x_0}{2} - L \right) x_0 x_2 - \frac{2+\nu}{6} x_2^3 + \frac{1+\nu}{8} h^2 x_2 \right], \quad (9.94)$$

la ecuación para la sección deformada no es lineal en x_2 ; ésto significa que la sección deja de ser plana. De hecho, se deforma como x_2^3 . Aún la sección transversal que pasa por el origen del eje y que corresponde a $x_0 = 0$ va como x_2^3 ; es decir, tampoco queda plana. En la figura 9.9 se muestra esquemáticamente esta deformación.

9.5. Problemas

- 1.- Observe que las ecuaciones (9.5) y (9.6) son diferentes a las ecs. (9.18). Explique la diferencia entre ellas y diga porqué son diferentes.
- 2.- Hacer un análisis dimensional en la función de Airy, ec. (9.25).
- 3.- Hacer el análisis dimensional en el ejercicio 9.2.2. Defina variables adimensionales y haga una gráfica de σ_{11} en dicho ejercicio.
- 4.- Realizar el análisis dimensional de los esfuerzos que resultan en la pared de la presa de sección transversal triangular ecs. (9.53)-(9.55). Defina variables adimensionales en los desplazamientos (9.70) y (9.71). Grafique $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ con las variables adimensionales adecuadas.
- 5.- En las ecs. (9.84) defina variables adimensionales adecuadas y haga las gráficas correspondientes para $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$.
- 6.- Haga el análisis dimensional de los esfuerzos (9.84) y de los desplazamientos (9.92) y (9.93).

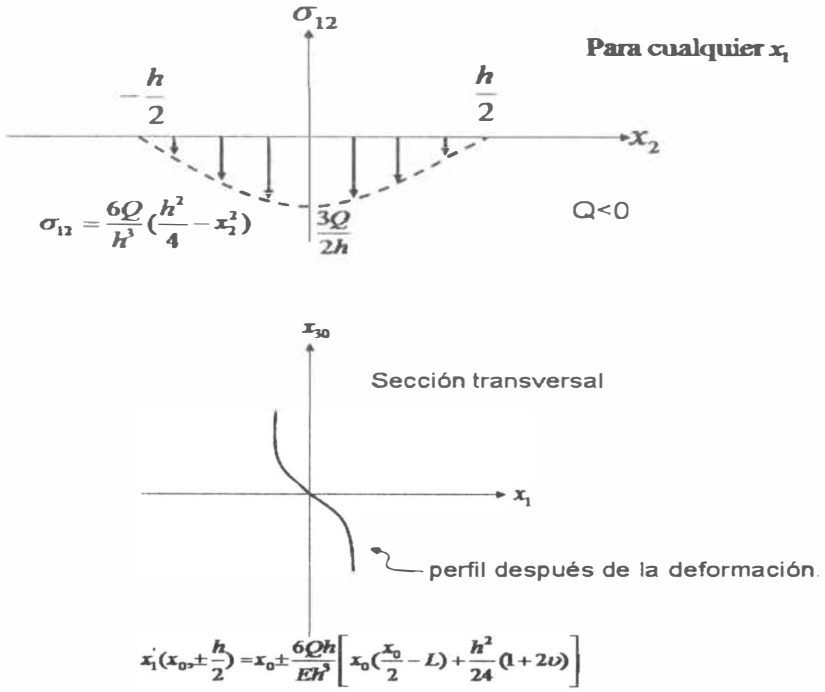


Figura 9.9: Esfuerzo en un soporte y perfil de la sección transversal deformada.

Capítulo 10

Torsión de Barras

10.1. Introducción.

En este capítulo se estudiará la deformación de barras delgadas constituidas por materiales homogéneos e isotrópicos. En este caso se presenta el problema de que el vector de desplazamiento es grande, aún cuando el tensor de deformación sea pequeño; por ejemplo, si curvamos una barra delgada y larga, sus extremos pueden estar desplazados una cantidad considerable, aún si los desplazamientos entre puntos vecinos de la barra no son grandes. La torsión y flexión de barras son de este tipo de desplazamientos, y ahora nos dedicaremos a estudiar la torsión.

Consideremos una barra recta; la torsión es una deformación para la cual cada sección transversal gira un cierto ángulo respecto de la sección vecina, de manera que las generatrices de la superficie lateral de la barra se convierten en hélices. La barra tiene sección transversal arbitraria de dimensión característica R y con su eje a lo largo del eje z . Se define el ángulo de torsión τ como el ángulo de rotación por unidad de longitud, $\tau = \frac{d\phi}{dz}$; las deformaciones pequeñas están caracterizadas por la condición $\tau R \ll 1$. La sección transversal de un extremo de la barra no se desplaza y coincide con el plano (x, y) . Ahora bien, para una rotación, el radio vector $\mathbf{r}$ cambia en la forma $\delta\mathbf{r} = \delta\phi \times \mathbf{r}$, donde la rotación se efectúa alrededor del eje z . Para el caso que nos ocupa tenemos que $\delta\phi = \tau z \hat{\mathbf{k}}$, donde τ es constante en la vecindad del origen.

Nos damos cuenta de que el desplazamiento relativo se puede escribir como:

$$\delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{u} = \tau z(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}) = \tau z \hat{\mathbf{k}} \times (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = \tau z x \hat{\mathbf{j}} - \tau z y \hat{\mathbf{i}}, \quad (10.1)$$

de manera que

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x. \quad (10.2)$$

Si nos quedamos en este paso recuperamos el problema simplificado que ya tratamos en el capítulo 7. De hecho, también pondríamos que $u_z = 0$; sin embargo estos desplazamientos sólo son válidos cuando el ángulo de torsión es prácticamente nulo. Con el objeto de tener un tratamiento más general, ahora vamos

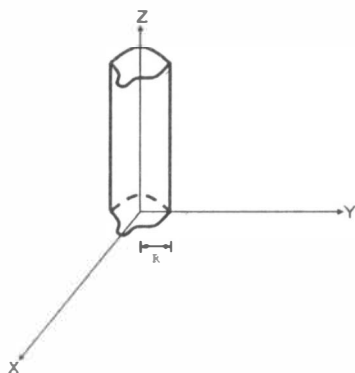


Figura 10.1: Dimensiones características en barras.

a tomar el caso en que el desplazamiento en el eje z no sea nulo y entonces se propone que

$$u_z = \tau \psi(x, y) \quad (10.3)$$

donde la función ψ se conoce como “función de torsión”. Es importante notar que la función de torsión define la forma de la sección transversal deformada y, al suponer que ésta no depende de z estamos diciendo que la deformación es la misma para todas las secciones transversales de la barra.

10.2. La función de Torsión

Vamos a utilizar los desplazamientos que ya escribimos para ver cuál es la ecuación que satisface la función de torsión; para ello calculamos los componentes del tensor de deformación

$$\begin{aligned} e_{xx} &= 0, & e_{yy} &= 0, & e_{zz} &= 0, & e_{xy} &= 0, \\ e_{xz} &= \frac{\tau}{2} \left(-y + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ e_{yz} &= \frac{\tau}{2} \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.4)$$

utilizando la ley de Hooke para medios homogéneos e isotrópos, construimos el tensor de los esfuerzos

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0, & \sigma_{yy} &= 0, & \sigma_{zz} &= 0, & \sigma_{xy} &= 0, \\ \sigma_{xz} &= 2\mu e_{xz} = \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \sigma_{yz} &= 2\mu e_{yz} = \mu\tau \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (10.5)$$

En ausencia de fuerzas externas se deben cumplir las condiciones de equilibrio, por lo cual

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0, \quad (10.6)$$

sustituyendo la expresión para los esfuerzos y considerando que τ es constante, se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \mu\tau \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \mu\tau \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (10.7)$$

Es decir, la función de torsión satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Recordemos que para resolverla necesitamos dar las condiciones de frontera y, por la forma en que la hemos definido, no tenemos una manera fácil de escribirlas.¹ Aún más, es posible que primero tengamos las condiciones de frontera sobre los esfuerzos y, dada la relación de la función de torsión con los esfuerzos, la condición de frontera para ψ resulta ser muy complicada. En vista de ello vamos a usar otra función.

10.3. Función de esfuerzos (Método de Prandtl)

En el método de Prandtl se introduce la “función de esfuerzos” $\chi(x, y)$, de manera que sus derivadas nos den directamente las componentes de los esfuerzos, ésto es

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (10.8)$$

Al utilizar la relación entre los esfuerzos y la función de torsión vemos de inmediato que ambas funciones están relacionadas; de hecho

$$\begin{aligned} \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) &= 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + y, \\ \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) &= -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} - x. \end{aligned}$$

Si ahora calculamos las segundas derivadas cruzadas de la función de torsión obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} &= 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + 1, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= -2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - 1, \end{aligned}$$

al restar y simplificar obtenemos que la función de esfuerzos satisface la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \chi(x, y) = -1, \quad (10.9)$$

¹ Escribir las condiciones de frontera para los desplazamientos en este punto no es simple. Generalmente es más fácil poner condiciones de frontera sobre los esfuerzos.

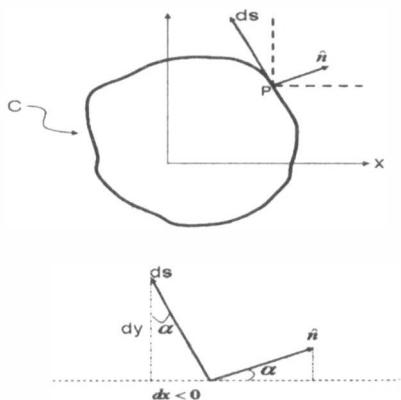


Figura 10.2: Sección transversal de la barra.

donde el operador laplaciano está escrito en dos dimensiones. Para completar esta ecuación debemos decir cuáles son las condiciones de frontera. En vista de que la barra es delgada, las fuerzas que actúan sobre la superficie lateral son despreciables comparadas con los esfuerzos internos, por lo cual se consideran nulas; es decir

$$\sigma_{ik}n_k = 0, \quad \text{sobre la superficie lateral de la barra.} \quad (10.10)$$

Ahora bien, el vector unitario normal a la superficie de la barra está en el plano (x, y) de tal manera que $\hat{n} = (n_x, n_y, 0)$ y la condición de frontera se escribe como

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0,$$

y, de acuerdo con las definiciones (10.8)

$$\frac{\partial \chi}{\partial y}n_x - \frac{\partial \chi}{\partial x}n_y = 0. \quad (10.11)$$

Para ver con claridad el significado de esta condición de frontera consideremos la sección transversal y la vemos en el plano (x, y) como se muestra en la figura 10.2. Nos damos cuenta de que $|n_x| = \cos\alpha = \frac{dy}{ds}$ y $|n_y| = \sin\alpha = -\frac{dx}{ds}$ por lo cual tendremos que $n_x = -\frac{dy}{ds}$ y $n_y = \frac{dx}{ds}$ de donde

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d\chi}{ds} = 0, \quad (10.12)$$

es decir

$$\chi = \text{constante, sobre el contorno } C \text{ de la sección transversal.} \quad (10.13)$$

A partir de la definición de la función de esfuerzos vemos que ésta está determinada hasta una constante aditiva, de manera que sin perder generalidad

podemos decir que la condición de frontera adecuada es²

$$\chi = 0, \quad \text{sobre el contorno } \mathcal{C}. \quad (10.14)$$

Entonces debemos resolver la ecuación (10.9) con la condición de frontera (10.14).

Ahora vamos a calcular la energía libre de la barra torcida; la energía libre por unidad de volumen se puede escribir en la forma

$$F = \frac{1}{2} \sigma_{ik} e_{ik} = \sigma_{xz} e_{xz} + \sigma_{yz} e_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2), \quad (10.15)$$

usando las ecuaciones (10.8) para los esfuerzos, tenemos

$$F = 2\mu\tau^2 \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right] = 2\mu\tau^2 (\nabla \chi)^2, \quad (10.16)$$

donde el operador ∇ está escrito en dos dimensiones. La energía libre por unidad de volumen dada en la ecuación (10.16) se va a integrar sobre el área de la sección transversal con el objeto de calcular la energía libre por unidad de longitud

$$f = \int_S 2\mu\tau^2 (\nabla \chi)^2 dS = 2\mu\tau^2 \int_S (\nabla \chi)^2 dS. \quad (10.17)$$

La cantidad

$$C = 4\mu \int_S (\nabla \chi)^2 dS, \quad (10.18)$$

se llama “rigidez” ante torsión de la barra; a su vez, la energía libre por unidad de longitud se puede escribir como

$$f = \frac{C\tau^2}{2}. \quad (10.19)$$

La energía elástica total de la barra se obtiene por integración a lo largo de z , es decir

$$F_{total} = \frac{1}{2} \int C\tau^2 dz, \quad (10.20)$$

recordando que en general τ puede ser una función de z . El cálculo de la rigidez se puede simplificar un poco haciendo uso de algunas propiedades de vectores, ya que $(\nabla \chi)^2 = \nabla \cdot (\chi \nabla \chi) - \chi \nabla^2 \chi$, y mediante el uso de la ecuación que satisface la función de esfuerzos tenemos que $(\nabla \chi)^2 = \nabla \cdot (\chi \nabla \chi) + \chi$, por lo tanto al sustituir en la ec. (10.18) obtenemos

$$C = 4\mu \int (\nabla \chi)^2 dS = 4\mu \int \nabla \cdot (\chi \nabla \chi) dS + 4\mu \int \chi dS, \quad (10.21)$$

²La constante se toma nula debido a que los esfuerzos se encuentran a través de derivadas de la función de esfuerzos, por lo cual el valor de la constante no interviene en el problema.

la primera integral sobre el área se convierte en una integral sobre el contorno de la sección transversal

$$C = 4\mu \int \chi \frac{\partial \chi}{\partial n} dS + 4\mu \int \chi dS, \quad (10.22)$$

al tomar en cuenta la condición de frontera tenemos que la rigidez ante torsión queda escrita en la forma:

$$C = 4\mu \int \chi dS. \quad (10.23)$$

Antes de terminar esta sección vamos a realizar algunos cálculos de las unidades de estas cantidades. El encerrar una cantidad entre paréntesis cuadrados significa tomar las unidades de la cantidad encerrada.

1. La energía libre por unidad de volumen $[F] = [\sigma][e] = \frac{ML}{L^2 t^2} = \frac{ML^2}{t^2} \frac{1}{L^3}$.
2. La energía libre por unidad de longitud $[f] = [F][S] = \frac{ML^2}{t^2} \frac{1}{L}$
3. La rigidez $[C] = \frac{[f]}{[\tau^2]} = \frac{ML}{t^2} L^2 = \frac{ML^3}{t^2}$
4. La función de esfuerzos $[\chi] = \frac{[\sigma L]}{[\mu \tau]} = \frac{L}{[\tau]}$, de manera que $[\chi] = L^2$.

Es importante ver que la rigidez ante torsión depende de las propiedades de la barra a través del módulo elástico y de la forma de la sección transversal.

Cabe notar que el tratamiento de este problema puede hacerse en términos ya sea de la función de torsión o en términos de la función de esfuerzos. Si lo hacemos con la función de torsión, tenemos la ecuación de Laplace en dos dimensiones, pero la condición de frontera es complicada. En cambio, si trabajamos con la ecuación de esfuerzos, la ecuación se complica un poco, pero la condición de frontera se escribe de una manera simple. En ambos procedimientos debemos resolver una ecuación en derivadas parciales con condiciones de frontera y el resultado debe coincidir. En lo que sigue haremos ejemplos donde utilizaremos la función de esfuerzos y posteriormente calcularemos la función de torsión.

10.4. Torsión de una barra de sección circular

Como un primer ejemplo vamos a determinar la rigidez ante torsión de una barra de sección transversal circular. Tomamos el eje z a lo largo del eje de la barra y la sección transversal en el plano (x, y) ; es claro que nos conviene usar coordenadas cilíndricas. Debemos resolver la ecuación

$$\nabla^2 \chi(r, \theta) = -1, \quad \text{con} \quad \chi(r, \theta) = 0 \quad \text{en} \quad r = R, \quad (10.24)$$

donde R es el radio de la sección transversal y vamos a escribir el laplaciano en coordenadas polares en el plano de la sección, entonces

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = -1. \quad (10.25)$$

Dada la simetría del problema podemos suponer que la función de esfuerzos no depende del ángulo θ y entonces podemos hacer una separación de variables de manera inmediata,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + r^2 = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = 0,$$

y con ello

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + r^2 = 0. \quad (10.26)$$

Para resolver esta ecuación buscamos una solución del tipo

$$\chi(r) = Ar^\alpha + B, \quad (10.27)$$

y debemos determinar α, A y B . Sustituimos en la ecuación (10.26)

$$r \frac{d}{dr} (r A \alpha r^{\alpha-1}) = r \frac{d}{dr} A \alpha r^\alpha = A \alpha^2 r^\alpha,$$

de donde tenemos

$$A \alpha^2 r^\alpha + r^2 = 0,$$

puesto que la solución debe ser válida para $0 \leq r \leq R$, debemos tomar

$$\alpha = 2 \quad \longrightarrow \quad A \alpha^2 = -1, \quad (10.28)$$

y, regresando a la ec. (10.27), tenemos,

$$\chi(r) = -\frac{r^2}{4} + B.$$

La constante B se determina con la condición de frontera,

$$\chi(R) = 0 = -\frac{R^2}{4} + B = 0 \longrightarrow B = \frac{R^2}{4}$$

y, por lo tanto,

$$\chi(r) = \frac{1}{4}(R^2 - r^2). \quad (10.29)$$

Recordando que $r^2 = x^2 + y^2$, resulta inmediato que los esfuerzos son $\sigma_{xz} = -\mu\tau y$ y $\sigma_{yx} = \mu\tau x$. Ahora calcularemos la energía y la rigidez, para lo cual escribimos la función de esfuerzos en coordenadas cartesianas $\chi(x, y) = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)$, el gradiente es $\nabla\chi = (-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2})$, $(\nabla\chi)^2 = \frac{r^2}{4}$, de manera que la energía libre por unidad de volumen es $F = \frac{\mu\tau^2}{2}r^2$. La rigidez es

$$\begin{aligned} C &= 4\mu \int \frac{1}{4}(R^2 - r^2)r \, dr \, d\theta = \mu 2\pi \int_0^R r(R^2 - r^2) \, dr \\ &= 2\pi\mu \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} \mu R^4, \end{aligned}$$

de manera que

$$C = \frac{\pi \mu R^4}{2}. \quad (10.30)$$

Como paso siguiente nos proponemos calcular la función de torsión y para ello usamos las ecuaciones que relacionan la función de esfuerzos y la función de torsión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + y = 2 \left(-\frac{y}{2} \right) + y = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} - x = -2 \left(-\frac{x}{2} \right) - x = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

de manera que $\psi = \text{constante}$. Este resultado es sumamente importante; recordemos que el desplazamiento $u_z = \tau \psi(x, y)$ y el hecho de que ψ sea constante implica que las secciones transversales no se deforman.³ De hecho, éste es el único caso en que las secciones no se deforman. Veremos en otros ejemplos para los cuales en general sí hay deformación. Este resultado nos indica que, en el caso de la sección transversal circular, el tratamiento simplificado que hicimos en el capítulo 7 nos da la solución.

10.5. Torsión de una barra con sección elíptica

Consideramos una barra de sección transversal elíptica; los semiejes son a, b . La ecuación por resolver es

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1 \quad \text{con} \quad \chi = 0 \quad \text{en} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10.31)$$

Tomando en cuenta la forma de la condición de frontera se propone una solución del tipo

$$\chi(x, y) = A\xi^\alpha, \quad (\alpha > 0), \quad \text{donde} \quad \xi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Debemos notar que esta propuesta automáticamente satisface la condición de frontera, ya que cuando $\xi = 0$ estamos en el contorno de la sección elíptica. Al sustituir la ecuación que debe satisfacer χ , ec. (10.9), obtendremos los valores de α y A .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= A\alpha\xi^{\alpha-1} \frac{\partial \xi}{\partial x} = A\alpha\xi^{\alpha-1} \frac{2x}{a^2}, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= \frac{2A\alpha}{a^2} \xi^{\alpha-1} + A\alpha(\alpha-1) \frac{4x^2}{a^4} \xi^{\alpha-2}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= A\alpha\xi^{\alpha-1} \frac{2y}{b^2}, \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} &= \frac{2A\alpha}{b^2} \xi^{\alpha-1} + A\alpha(\alpha-1) \frac{4y^2}{b^4} \xi^{\alpha-2}, \end{aligned}$$

³Recordar que la sección transversal para este caso es circular.

sustituyendo

$$\xi^{\alpha-1} \left(\frac{2A\alpha}{b^2} + \frac{2A\alpha}{a^2} \right) + 4\xi^{\alpha-2} A\alpha(\alpha-1) \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) = -1. \quad (10.32)$$

La solución de esta ecuación es

$$\alpha = 1, \quad y \quad \frac{2A}{b^2} + \frac{2A}{a^2} = -1 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \quad (10.33)$$

y con ello, la función de esfuerzos queda en la forma

$$\chi(x, y) = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (10.34)$$

que obviamente satisface la condición de frontera.

Ahora vamos a calcular la rigidez ante la torsión $C = 4\mu \int_S \chi(x, y) \, dx \, dy$, es decir

$$C = 4\mu A \int \int \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx \, dy. \quad (10.35)$$

Cada cuadrante del área elíptica contribuye con la misma cantidad, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{C}{4} &= 4\mu A \int_0^b dy \int_0^{\sqrt{(1-y^2/b^2)a^2}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx \\ &= 4\mu A \int_0^b \left(\frac{x^3}{3a^2} + \frac{y^2 x}{b^2} - x \right) \Big|_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} dy = \\ &= -\frac{8}{3}\mu A a \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{3}{2}} dy, \end{aligned}$$

queda al lector verificar que el resultado de la integral nos da el valor

$$C = \frac{\pi \mu a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (10.36)$$

Por último calculamos la función de torsión haciendo uso de la función de esfuerzos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + y = \left(\frac{4A}{b^2} + 1 \right) y = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} y, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} - x = -\left(\frac{4A}{a^2} + 1 \right) x = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} x. \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\psi(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy \quad (10.37)$$

y el desplazamiento de los puntos en la sección transversal está dado por

$$u_z = \tau \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy. \quad (10.38)$$

La superficie que representa esta ecuación es un paraboloides hiperbólico; es decir que un plano a la altura z_1 corta a esta superficie en hipérbolas $u_z(x, y, z_1) = \beta xy$, donde las asíntotas son los ejes de la elipse. Notemos que $\beta = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} < 0$, de manera que en el primer y tercer cuadrante del plano $x - y$, $u_z(x, y, z_1) < 0$. Mientras que el segundo y cuarto cuadrantes $u_z(x, y, z_1) > 0$. En las figuras 10.3 y 10.4 vemos esquemáticamente como se deforma la sección transversal.

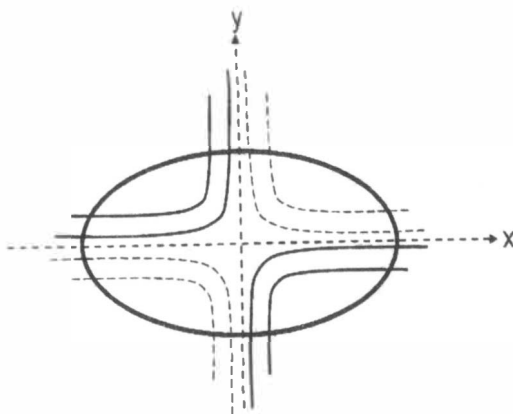


Figura 10.3: Sección transversal elíptica, semiejes a, b . La sección transversal está localizada en $z = z_0$. Los desplazamientos en el primer y tercer cuadrante son negativos, y están indicados con líneas punteadas. Mientras que en el segundo y cuarto cuadrantes son positivos y están indicados con líneas continuas.

Regresemos ahora a los esfuerzos y usamos la función de torsión

$$\sigma_{xz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) = -\frac{2\mu \tau a^2}{b^2 + a^2} y, \quad (10.39)$$

$$\sigma_{yz} = \mu \tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = \frac{2\mu \tau b^2}{b^2 + a^2} x. \quad (10.40)$$

Con estos resultados vamos a calcular la magnitud del esfuerzo cortante

$$T = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2} = \frac{2\mu \tau a^2 b^2}{b^2 + a^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}, \quad (10.41)$$

a partir de este resultado vemos que las curvas de esfuerzo cortante constante son de la forma $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = D^2 = \text{constante}$, que corresponden a elipses centradas en el origen y con semiejes dados por $a' = a^2 D$, $b' = b^2 D$, de manera que

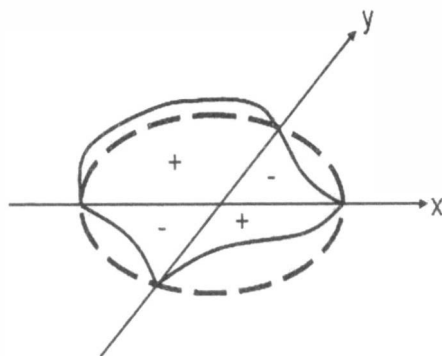


Figura 10.4: Sección elíptica deformada. Los signos indican el signo del desplazamiento.

$\frac{a'}{b'} = \frac{a^2}{b^2} > \frac{a}{b}$. Esto significa que la elipse correspondiente al esfuerzo cortante constante está más elongada que la sección transversal de la barra, como se puede ver en la figura 10.5.

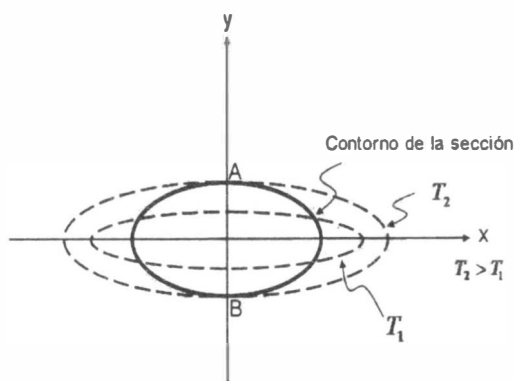


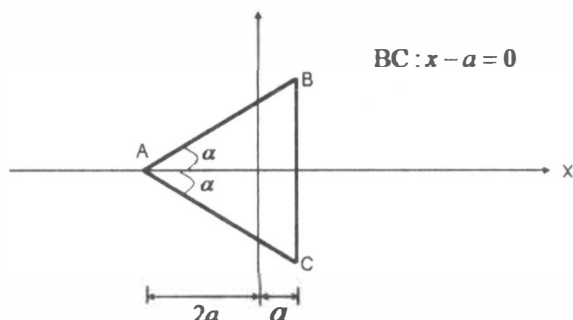
Figura 10.5: Perfil de los esfuerzos cortantes.

También podemos ver que en los puntos de la sección transversal marcados con $A = (0, b')$, $B = (0, -b')$ en la figura está el esfuerzo cortante máximo. Si tomamos en cuenta que $b' = b^2 D = b$, tenemos que $D = \frac{1}{b}$ y el valor máximo del esfuerzo cortante es

$$T_{max} = \frac{2\mu\tau a^2 b}{a^2 + b^2}. \quad (10.42)$$

10.6. Barra de sección triangular

Consideremos una barra recta formada por un medio homogéneo e isotrópico y la sección transversal es triangular. Las dimensiones de la sección y la forma de colocar el eje de la barra se especifican en la figura 10.6. El contorno de la



Sección Triangular

$$A = (-2a, 0)$$

$$B = (a, \sqrt{3}a)$$

$$C = (a, -\sqrt{3}a)$$

$$AB: y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2a)$$

$$AC: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2a)$$

Figura 10.6: Sección transversal triangular.

sección transversal corresponde a las ecuaciones siguientes

$$BC: x - a = 0,$$

$$AB: \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$$

$$\text{y pasa por } A = (-2a, 0)$$

$$\text{de manera que } b = \frac{2a}{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{3}y - (x + 2a) = 0,$$

$$AC: \sqrt{3}y + (x + 2a) = 0. \quad (10.43)$$

Con el objeto de satisfacer la condición de frontera⁴ que debe cumplir la función de esfuerzos, se propone una solución del tipo $\chi(x, y) = D(\sqrt{3}y + x + 2a)(\sqrt{3}y - x - 2a)(x - a)$, con $D = \text{constante}$, o bien

$$\chi(x, y) = D \left[3y^2 - (x + 2a)^2 \right] (x - a). \quad (10.44)$$

⁴ $\chi(x, y) = 0$ en el contorno C de la sección transversal.

Sustituimos en la ecuación (10.9) para calcular la constante D ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= -4D(x+2a) - 2D(x-a), \\ \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} &= 6D(x-a), \\ -4D(x+2a) - 2D(x-a) + 6D(x-a) &= -1 \rightarrow \\ -12Da &= -1, \rightarrow D = \frac{1}{12a} \\ \text{de donde } \chi(x, y) &= \frac{x-a}{12a} \left[3y^2 - (x+2a)^2 \right].\end{aligned}\quad (10.45)$$

Continuamos con el cálculo de la función de torsión

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + y = \frac{y}{a}(x-a) + y, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} - x = -\frac{1}{2a} [y^2 - x(x+2a)] - x,\end{aligned}\quad (10.46)$$

integrados respecto de x

$$\psi(x, y) = \frac{y}{a} \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) + yx + f(y), \quad (10.47)$$

derivamos respecto de y e igualamos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x}{a} \left(\frac{x}{2} - a \right) + x + f'(y) = -\frac{y^2}{2a} + \frac{x}{2a}(x+2a) - x,$$

de donde

$$f'(y) = -\frac{y^2}{2a}, \rightarrow f(y) = -\frac{y^3}{6a}, \quad (10.48)$$

de manera que

$$\psi(x, y) = \frac{1}{6a}(3x^2y - y^3). \quad (10.49)$$

El desplazamiento es de la forma

$$u_z = \frac{\tau}{6a}(3x^2y - y^3), \quad (10.50)$$

que se factoriza como

$$u_z = \frac{\tau}{6a}y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y). \quad (10.51)$$

Esta expresión del desplazamiento es muy importante porque nos permite ver si hay puntos y/o bien líneas cuyo desplazamiento sea nulo. Vemos que $u_z = 0$ para las tres líneas siguientes

$$y = 0, \quad y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x \quad (10.52)$$

que corresponden a las alturas del triángulo. En la figura 10.7 se muestra esquemáticamente la sección deformada. Queda al lector calcular la rigidez ante la torsión.

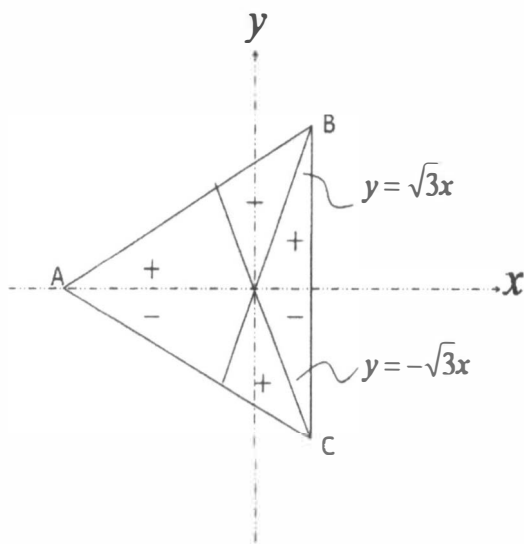


Figura 10.7: Desplazamientos de la sección transversal; los signos indican el signo del desplazamiento correspondiente a cada región y las líneas continuas (alturas del triángulo) tienen desplazamiento nulo.

10.7. Problemas

- 1.- A partir de la ecuación (10.3) diga cuales son las unidades de la función de torsión $\psi(x, y)$.
- 2.- ¿Cuáles son las unidades de la función de esfuerzos $\chi(x, y)$ en las ecs. (10.8)?
- 3.- Hacer el análisis dimensional del resultado en la ec. (10.30).
- 4.- Verificar la ecuación (10.36).
- 5.- Analizar las dimensiones de las ecuaciones (10.38)-(10.40).
- 6.- Calcular la rigidez ante torsión de la barra con sección transversal triangular.

Capítulo 11

Torsión de barras. Método Numérico

En este capítulo trataremos la torsión de barras de sección transversal arbitraria utilizando un método numérico propio para resolver la ecuación de Poisson. Esto significa que resolveremos el problema para la función de esfuerzos y después calcularemos la función de torsión. Para iniciar este trabajo, primero vamos a introducir algunos elementos generales respecto de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) y la forma de escribir las derivadas en forma discreta. Posteriormente introduciremos un método numérico para ecuaciones elípticas y lo aplicaremos para encontrar la función de esfuerzos.

11.1. Clasificación de EDP

Iniciamos con la clasificación de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden. Supongamos que se tiene una EDP de segundo orden escrita en la forma siguiente:

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + F = 0, \quad (11.1)$$

donde $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ son funciones de las variables independientes y F es una función de (x, y) que también puede contener a las primeras derivadas de la función ϕ multiplicadas por funciones de (x, y) . Se dice que la ecuación (11.1) en el punto $P(x, y)$ es de tipo

$$\begin{cases} \text{hiperbólico, si en el punto } P, & \Delta(x, y) = B^2 - 4AC > 0, \\ \text{elíptico, si en el punto } P, & \Delta(x, y) = B^2 - 4AC < 0, \\ \text{parabólico, si en el punto } P, & \Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

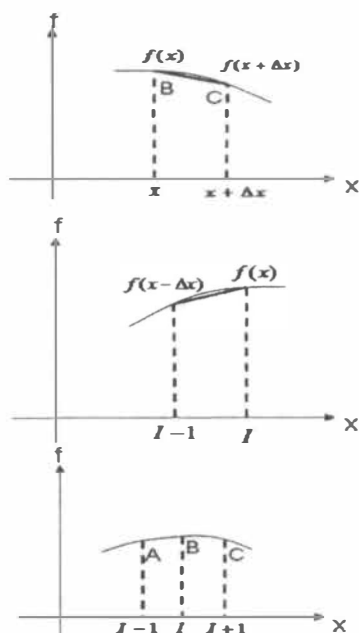


Figura 11.1: Pendiente de la función $f(x)$.

y la segunda derivada centrada

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_I = \frac{f_I - 2f_{I-1} + f_{I-2}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (11.11)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f_{I+1} - 2f_I + f_{I-1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \quad (11.12)$$

En la figura 11.2 se muestran los puntos que son necesarios para este cálculo. Es muy importante notar que hemos obtenido las aproximaciones más gruesas para cada una de las derivadas; sin embargo, es posible tener mejores aproximaciones, basta con tomar más términos en el desarrollo en serie de Taylor. Por ejemplo, para la primera derivada hacia adelante se tiene que

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_I = \frac{-f_{I+2} + 4f_{I+1} - 3f_I}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \quad (11.13)$$

Ésta es una aproximación de segundo orden y, en contraste con la de primer orden, vemos que para calcular esta primera derivada hacia adelante necesitamos la función en tres puntos. Siguiendo este procedimiento se pueden obtener aproximaciones para derivadas de orden superior y también aproximaciones mejores. Cuando se tienen funciones que dependen de dos o más variables es necesario ocuparse de las derivadas cruzadas; para ello es necesario considerar una malla

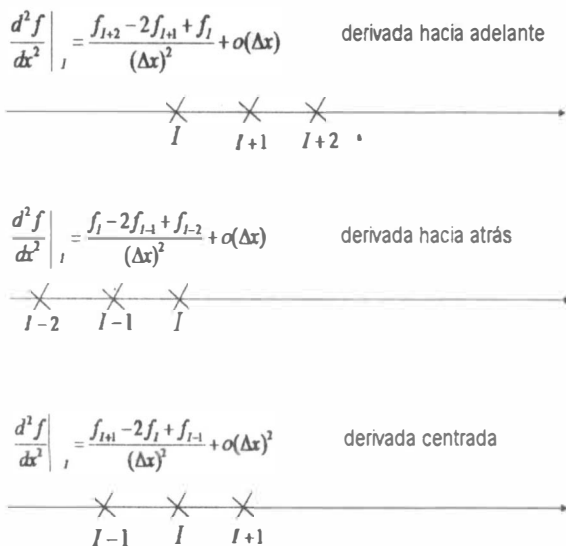


Figura 11.2: Segundas derivadas.

como la indicada en la figura 11.3 y calcular las expresiones siguientes

$$\begin{aligned}
 f_{I+1,J+1} &= f_{I,J} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + (\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3] \\
 f_{I-1,J-1} &= f_{I,J} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + (\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3]
 \end{aligned} \tag{11.14}$$

$$\begin{aligned}
 f_{I+1,J-1} &= f_{I,J} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} - \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} - (\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3] \\
 f_{I-1,J+1} &= f_{I,J} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} - (\Delta x)(\Delta y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathcal{O}[(\Delta x)^3, (\Delta y)^3].
 \end{aligned} \tag{11.15}$$

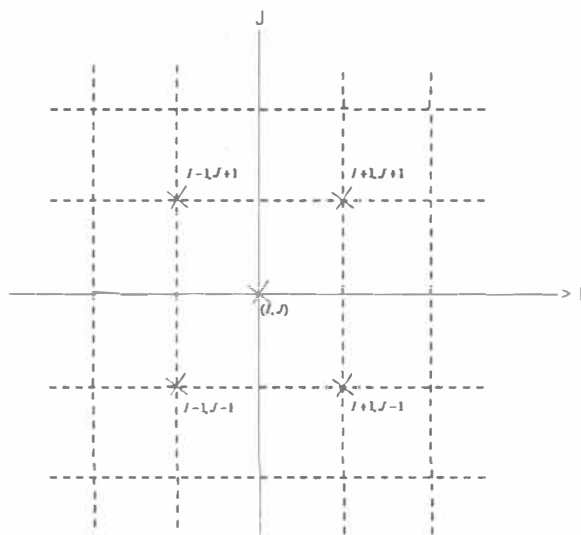


Figura 11.3: Malla para el cálculo de derivadas de funciones de dos variables.

de donde obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f_{I+1, J+1} - f_{I+1, J-1} - f_{I-1, J+1} + f_{I-1, J-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]. \quad (11.16)$$

Se deja al lector la escritura de las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

11.3. Aplicación al problema de torsión

Primero hacemos un resumen de las ecuaciones que vamos a utilizar en el problema de la torsión de barras. Vamos a trabajar con la función de esfuerzos $\chi(x, y)$ que satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1, \quad (11.17)$$

con la condición de frontera

$$\chi(x, y) = 0 \quad \text{en } \mathcal{C}, \quad (11.18)$$

donde $\mathcal{C}$ es el contorno de la sección transversal de la barra. Las componentes no triviales del tensor de los esfuerzos son

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, & \sigma_{xz} &= \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \sigma_{yz} &= -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, & \sigma_{yz} &= \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (11.19)$$

Si resolvemos la ecuación de Poisson para los esfuerzos, posteriormente podemos encontrar la función de torsión sin problema.

Como ejemplo vamos a considerar que la sección transversal de la barra es rectangular¹ y vamos a introducir un método numérico que permita encontrar una solución de la ecuación de Poisson con la condición de frontera correspondiente. Ya vimos que la ecuación de Poisson es una ecuación elíptica, entonces emplearemos un método adecuado para ecuaciones de este tipo. En particular, veremos el método que se conoce como "PGSM" por sus siglas en inglés (Point Gauss Seidel Method).

Para empezar vamos a formar una malla en el plano de la sección transversal sin deformar, como se indica en la figura 11.3. El tamaño de los intervalos en los ejes x, y será $\Delta x, \Delta y$ y cada nodo de la malla se etiquetará con índices enteros (I, J) . Escribimos la ecuación de Poisson en diferencias finitas centradas, lo cual nos da una aproximación a orden $\mathcal{O}(\Delta x)^2$, y a la función de esfuerzos la etiquetaré como $G(I, J)$, entonces se tiene

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left[G(I+1, J) - 2G(I, J) + G(I-1, J) \right] + \frac{1}{(\Delta y)^2} \left[G(I, J+1) - 2G(I, J) + G(I, J-1) \right] = -1, \quad (11.20)$$

para este ejemplo tomaremos $\Delta x = \Delta y$ y ahora multiplicamos por $(\Delta x)^2$,

$$G(I+1, J) - 2G(I, J) + G(I-1, J) + G(I, J+1) - 2G(I, J) + G(I, J-1) = -(\Delta x)^2, \quad (11.21)$$

que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -4G(I, J) + G(I+1, J) + G(I-1, J) + G(I, J+1) + \\ + G(I, J-1) &= -(\Delta x)^2 \\ G(I, J) &= \frac{1}{4} \left[G(I+1, J) + G(I-1, J) + \right. \\ &\quad \left. G(I, J+1) + G(I, J-1) + (\Delta x)^2 \right]. \end{aligned} \quad (11.22)$$

En la ecuación (11.22) ya tenemos discretizada la ecuación de Poisson que nos interesa. Notamos que en el segundo miembro de la ec. (11.22) en los dos primeros términos $J = \text{cte}$, mientras que en los dos segundos términos $I = \text{cte}$. Ahora bien, ¿cómo se resuelve esta ecuación en diferencias finitas?

Esta ecuación se resuelve proponiendo un valor de inicio para todos los puntos de la malla, a esta propuesta la llamaremos la iteración $K = 0$, al construir la iteración $K = 1$ los valores dados en $K = 0$ se toman como base, al utilizar la ecuación obtendremos los valores para $G(I, J)$ en la iteración $K = 1$, con

¹La solución de este problema se puede encontrar analíticamente y queda en forma de una serie, en la que es difícil analizar las características de la deformación.

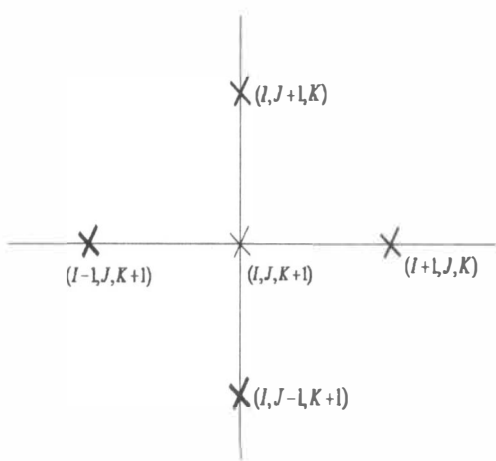


Figura 11.4: Puntos de la malla para la ecuación 11.23.

ellos se continua iterando la ecuación para construir los valores de $G(I, J)$ en la iteración $K = 2$ y así sucesivamente hasta que el error en el valor de $G(I, J)$ es menor que una cierta cantidad que se fija como criterio para aceptar la solución.

Vamos a escribir la ecuación (11.22) poniendo explícitamente el índice de la iteración, como se propone en el método numérico PGSM que hemos escogido para resolver

$$G(I, J, K + 1) = \frac{1}{4} \left[G(I + 1, J, K) + G(I, J + 1, K) + G(I - 1, J, K + 1) + G(I, J - 1, K + 1) \right] + \frac{1}{4} (\Delta x)^2. \quad (11.23)$$

Esto significa que, para calcular el valor de la función en un punto (I, J) de la malla en la iteración $K + 1$, necesitamos los valores en $(I, J + 1)$ y en $(I + 1, J)$ de la iteración K , además de los valores en $(I - 1, J)$ y $(I, J - 1)$ de la iteración $K + 1$. En la figura 11.4 se indican los valores en cuestión.

El error en la iteración $K + 1$ está dado por la siguiente expresión

$$E(K) = \sum_{I,J} \left[ABS(G(I, J, K + 1) - G(I, J, K)) \right], \quad (11.24)$$

donde $ABS()$ significa tomar el valor absoluto de la cantidad encerrada en el paréntesis.

Es sumamente importante que la condición de frontera

$$G(I, J, K) = 0, \quad \text{en el contorno } \mathcal{C}, \quad (11.25)$$

se cumpla para todas las iteraciones.

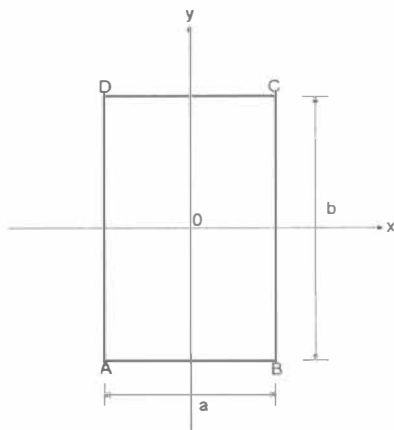


Figura 11.5: Sección transversal rectangular.

11.4. Sección transversal rectangular

La figura 11.5 muestra la sección transversal en el plano (x, y) , junto con las dimensiones que vamos a considerar. Los lados de la sección de la barra miden $a = 20 \text{ cm}$ y $b = 30 \text{ cm}$, tomaremos $\Delta x = \Delta y = 1 \text{ cm}$, de manera que necesitamos una malla de 21×31 y la ecuación (11.23) queda en la forma siguiente

$$G(I, J, K+1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left[G(I+1, J, K) + G(I, J+1, K) + G(I-1, J, K+1) + G(I, J-1, K+1) \right], \quad (11.26)$$

con la condición

$$\begin{aligned} G(I, J, K) &= 0, & AB &: \rightarrow I = (0, 20); & J &= 0 \\ & & BC &: \rightarrow I = 20, & J &= (0, 30) \\ & & CD &: \rightarrow I = (0, 20), & J &= 30 \\ & & DA &: \rightarrow I = 0, & J &= (0, 30). \end{aligned} \quad (11.27)$$

Una vez que el procedimiento satisfaga la condición dada en la ecuación (11.24) tendremos la función de esfuerzos. Posteriormente debemos calcular la función de torsión y, para ello, es necesario escribir en términos de diferencias finitas la relación entre la función de esfuerzos y la función de torsión. A partir de las ecuaciones (11.19) tenemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + y, \quad (11.28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} - x. \quad (11.29)$$

Integramos la ecuación (11.28) respecto a x

$$\psi(x, y) = 2 \int \frac{\partial \chi}{\partial y} dx + yx + f(y) \quad (11.30)$$

y derivamos respecto a y

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\int \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) + x + f'(y) = 2 \int \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} dx + x + f'(y), \quad (11.31)$$

igualando con la ecuación (11.29)

$$2 \int \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} dx + x + f'(y) = -2 \frac{\partial \chi}{\partial x} - x, \quad (11.32)$$

de donde

$$f'(y) = -2 \left(\int \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} dx + x + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \quad (11.33)$$

y se integra respecto a y ,

$$f(y) = -2 \left(\int \frac{\partial \chi}{\partial y} dx + xy + \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy \right). \quad (11.34)$$

Sustituyendo en la ecuación (11.30)

$$\psi(x, y) = -xy - 2 \int \frac{\partial \chi}{\partial x} dy + cte., \quad (11.35)$$

tomaremos la constante de integración nula. Ahora escribimos esta ecuación en forma discreta usando derivadas hacia adelante, con lo cual

$$\begin{aligned} F(I, J) &= -(-10 + I)(-15 + J) - 2 \sum_{J=0}^J \frac{\Delta y}{\Delta x} \left(G(I + 1, J) - G(I, J) \right) \\ &= (10 - I)(-15 + J) - 2 \sum_{J=0}^J \left(G(I + 1, J) - G(I, J) \right) \end{aligned} \quad (11.36)$$

y con esta ecuación calculamos la función de torsión.

El último paso de este procedimiento consiste en codificar las expresiones que hemos obtenido y graficar a fin de tener una visión clara de la solución. Se deja al lector escoger el lenguaje de programación que prefiera y en este texto damos únicamente la solución.

A partir de lo que hemos aprendido con los casos en que hemos resuelto las ecuaciones en forma analítica, podemos esperar que algunas líneas en la sección transversal no cambien de posición después de la deformación. Hemos visto que si la sección tiene algunas líneas de simetría, éstas se quedan invariantes. En el caso de la sección circular cualquier diámetro es una línea de simetría; por

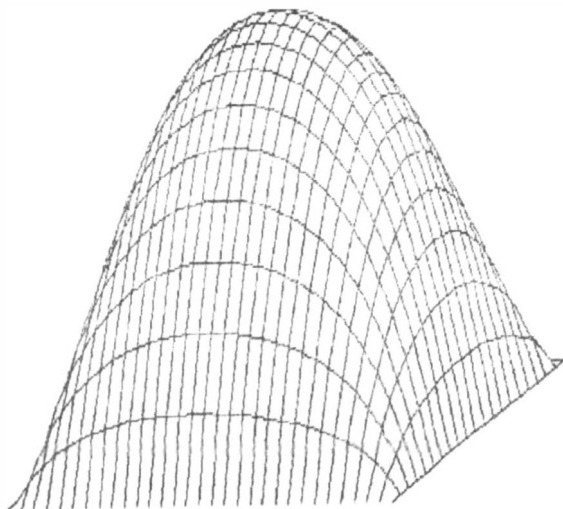


Figura 11.6: Función de esfuerzos para la sección transversal rectangular.

lo tanto, la sección no se deforma. En el caso de la sección elíptica vimos que los ejes de la elipse se quedaron sin deformar. Para la sección triangular las alturas se quedaron invariantes. En el caso de la sección rectangular podemos esperar que los ejes se queden invariantes. En las figuras 11.6 y 11.7 vemos la solución numérica correspondiente y, en el caso de la función de torsión, podemos observar que efectivamente los ejes no cambian de posición. Alternativamente, podemos definir una función de esfuerzos adimensional y entonces trabajar el método numérico en términos de variables adimensionales. En este ejemplo hemos dado los resultados para la función de esfuerzos en cm^2 . También es importante agregar que este problema se puede resolver analíticamente; sin embargo, su análisis es un tanto rebuscado y por ello hemos escogido este caso para implementar el método numérico².

11.5. Problemas

- 1.- Calcule directamente las expresiones para aproximar $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en diferencias finitas, para el orden más bajo.
- 2.- ¿Cuáles son las unidades de la función de torsión en el ejemplo tratado en este capítulo?
- 3.- Haga el código para encontrar la solución numérica del problema y compruebe que las gráficas presentadas son correctas.

²Ver el libro de Landau.

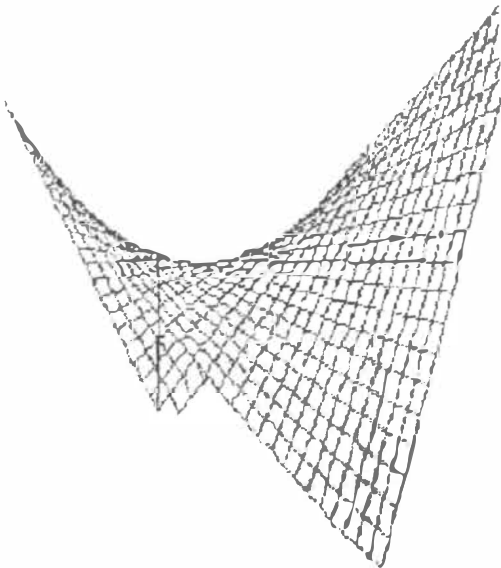


Figura 11.7: Función de torsión.

Índice de cuadros

3.1.	Resumen de valores máximo y mínimo del esfuerzo cortante	36
4.1.	Configuraciones inicial y final.	48
4.2.	Desplazamientos sobre los ejes.	49
5.1.	Número de módulos elásticos independientes.	84

Índice de figuras

3.1. Elemento de volumen que al ser seccionado presenta fuerzas internas desbalanceadas.	24
3.2. Vector de esfuerzos y sus componentes.	25
3.3. Vector de esfuerzos en la sección B del cuerpo.	26
3.4. Las componentes marcadas son perpendiculares a la sección correspondiente y se llaman esfuerzos normales. Todos los demás son esfuerzos cortantes y están en el plano de ΔS . La sección se corta perpendicular a $\hat{e}_2$; esto significa que $\hat{n} \rightarrow \hat{e}_2$ y $\mathbf{t}^{(\hat{e}_2)}$ tiene tres componentes.	27
3.5. La sección se corta perpendicular al vector $\hat{e}_1$, esto significa que $\hat{n} \rightarrow \hat{e}_1$ y $\mathbf{t}^{(\hat{e}_1)}$ tiene tres componentes.	28
3.6. La sección se corta perpendicular a $\hat{e}_3$; esto significa que $\hat{n} \rightarrow \hat{e}_3$ y el vector $\mathbf{t}^{(\hat{e}_3)}$ tiene tres componentes.	29
3.7. Componentes del tensor de los esfuerzos.	30
3.8. Relación entre el vector de esfuerzos y el tensor de esfuerzos.	31
3.9. Componentes normal y tangencial del vector de los esfuerzos.	32
3.10. Plano donde se encuentra el esfuerzo cortante máximo.	37
3.11. Rotación de los ejes.	38
3.12. Sistema de ejes donde se muestra el esfuerzo cortante máximo.	39
3.13. Problema 3.	42
3.14. Problema 4.	42
3.15. Problema 5	43
3.16. Problema 8.	44
4.1. Vector de desplazamiento.	45
4.2. Elemento de volumen en el medio y sus proyecciones.	48
4.3. Porción del elemento de volumen deformado.	49
4.4. Relación entre ángulos, $\alpha = 2\beta$	51
4.5. Deformación cortante paralela el eje x	51
4.6. Deformación cortante paralela al eje y	52
5.1. Relación esfuerzo-deformación.	63
5.2. Esfuerzos normales que actúan sobre un elemento de volumen.	64

5.3. Elongaciones producidas por esfuerzos normales. La figura superior corresponde a la figura 5.3a, la intermedia a la 5.3b y la inferior a la figura 5.3c, a las que hace referencia el texto.	65
7.1. Barra de sección transversal circular a la que se aplica una fuerza uniforme.	94
7.2. Torsión de una barra con sección transversal circular.	98
7.3. Sección transversal de la barra con el eje x_3 perpendicular al plano y apuntando hacia afuera.	99
7.4. Secciones transversales contiguas, i) antes de la deformación los puntos marcados con P quedan uno arriba del otro, ii) después de la deformación el arco es $\tau' r$, iii) entonces $(dx_3)e_{\theta z} = \tau' r$	100
7.5. Flexión de una barra. Antes de la deformación el eje es OB , después de la deformación el eje es OB_1	104
7.6. Flexión.	105
7.7. Sección transversal de la barra después de la flexión. El ángulo γ está determinado por $\tan \gamma = \frac{b\nu}{2\rho}$	109
7.8. Problema 7.5.	110
8.1. Vibración longitudinal; se propaga en la dirección x_1 y se mueve también a lo largo de x_1	112
8.2. Vibración transversal; se propaga en dirección de x_1 y se mueve en dirección de x_3	113
9.1. Ejemplos de problemas en un plano, el eje x_3 es perpendicular al plano.	120
9.2. Esfuerzos en un plano.	122
9.3. Ejercicio 2.1	125
9.4. Ejercicio 2.2	125
9.5. Pared de una presa con sección transversal triangular (Poner atención a la dirección de los ejes coordenados).	127
9.6. Esfuerzos en la pared de una presa de sección transversal triangular.	130
9.7. Flexión de un soporte.	132
9.8. Esfuerzos que corresponden a la flexión de un soporte.	136
9.9. Esfuerzo en un soporte y perfil de la sección transversal deformada.	139
10.1. Dimensiones características en barras.	142
10.2. Sección transversal de la barra.	144
10.3. Sección transversal elíptica, semiejes a, b . La sección transversal está localizada en $z = z_0$. Los desplazamientos en el primer y tercer cuadrante son negativos, y están indicados con líneas punteadas. Mientras que en el segundo y cuarto cuadrantes son positivos y están indicados con líneas continuas.	150
10.4. Sección elíptica deformada. Los signos indican el signo del desplazamiento.	151

10.5. Perfil de los esfuerzos cortantes. 151

10.6. Sección transversal triangular. 152

10.7. Desplazamientos de la sección transversal; los signos indican el
signo del desplazamiento correspondiente a cada región y las
líneas continuas (alturas del triángulo) tienen desplazamiento nulo. 154

11.1. Pendiente de la función $f(x)$ 158

11.2. Segundas derivadas. 159

11.3. Malla para el cálculo de derivadas de funciones de dos variables. 160

11.4. Puntos de la malla para la ecuación 11.23. 162

11.5. Sección transversal rectangular. 163

11.6. Función de esfuerzos para la sección transversal rectangular. . . . 165

11.7. Función de torsión. 166

Introducción a la Elasticidad

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Departamento de Física
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Impresión offset, en papel cultural de 90 grs., 184 páginas.

Portada en cartulina sulfatada 1 cara de 12 pts.

Medida final 17 x 23 cms., Encuadernación rústica cosida

Cuidado de la Edición, Diseño, impresión y acabado

Concepto impreso

Fray Bernardino de Sahagún núm 99

Col. Vasco de Quiroga, Deleg. Gustavo A. Madero

CP 07440, México DF

La edición consta de 1 000 ejemplares

mayo de 2009



La Dra. Rosa María Velasco Belmont realizó sus estudios en la Facultad de Ciencias de la UNAM y después de una estancia posdoctoral se incorporó al Departamento de Física en la UAM. Desde entonces ha impartido numerosas UEA, entre las que se cuentan Elasticidad e Hidrodinámica. Una de sus motivaciones en la escritura de este libro es la falta de material bibliográfico apropiado para los alumnos de la licenciatura en Física. Asimismo se ha dedicado a la investigación y actualmente se encuentra trabajando en problemas de tránsito vehicular, fotoquímica en la atmósfera y movimiento browniano.

ISBN 978-607-477-035-3



9 786074 770353