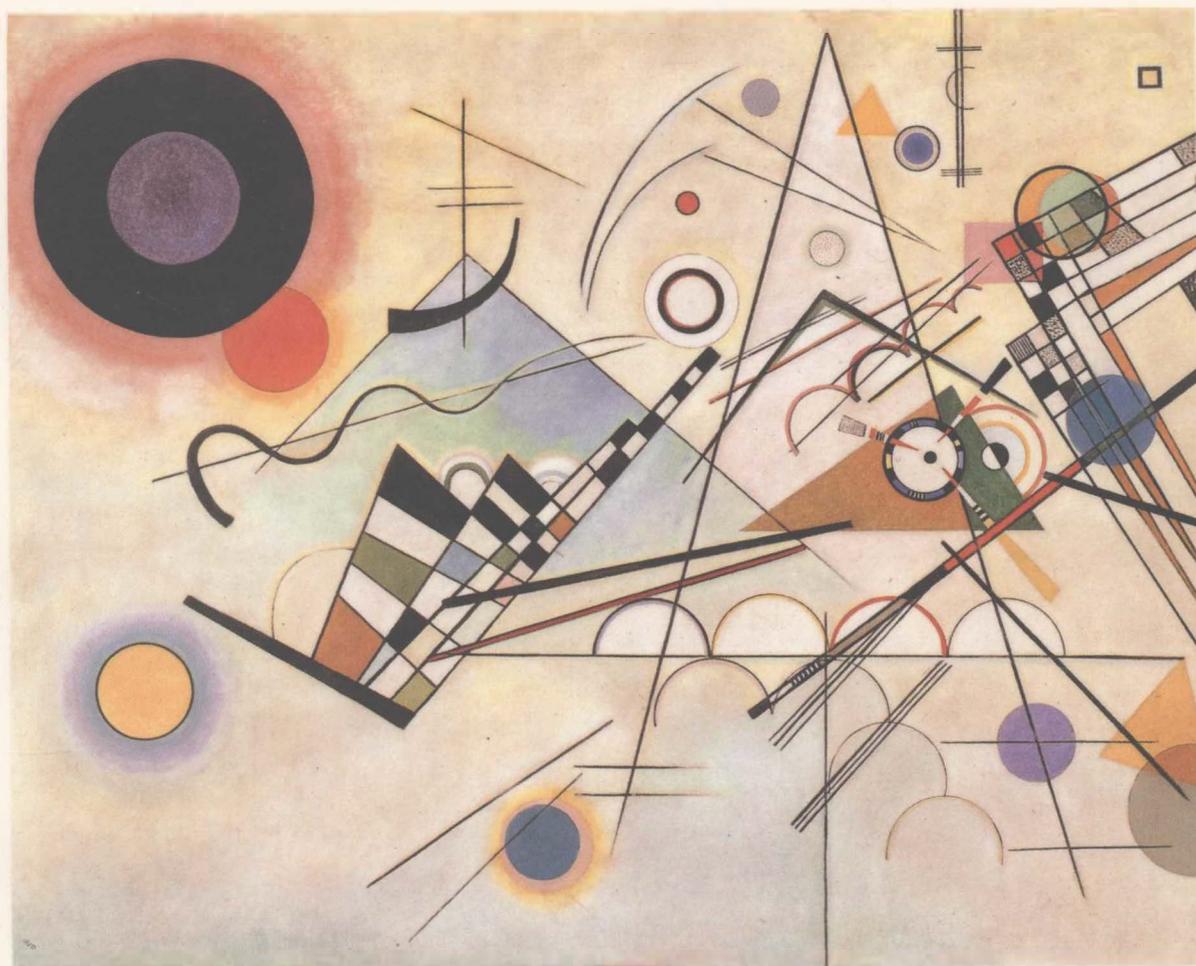


Circuitos Eléctricos II

**Ma. del Pilar Granados Trejo
Virginia González Vélez
Juan Manuel Cornejo Cruz
Miguel Cadena Méndez**



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA



Ma. Del Pilar Granados Trejo. Profesor Asociado integrante del Laboratorio de Audiología del Area de Ingeniería Biomédica de la UAM - Iztapalapa. Recibió el título de Ingeniero Biomédico (1983) y Maestría

en Ingeniería Biomédica (1994) por la Universidad Autónoma Metropolitana. Ha realizado trabajos encaminados a la obtención de un nuevo método para la evaluación electroacústica de ayudas auditivas, validados mediante mediciones electroacústicas y respuesta evocada auditiva.



Virginia González Vélez, es Ingeniero Biomédico, egresada de la UAM Iztapalapa en 1991, y actual candidata a Maestra en Ingeniería Biomédica por la misma universidad. Ha trabajado en diversas empresas privadas dando soporte a

equipo biomédico y en capacitación al personal involucrado. Desde 1992 labora como Profesor Investigador en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la UAM Iztapalapa. Ha publicado trabajos sobre aplicaciones específicas de la Electrónica en la Biomedicina. Sus intereses profesionales se centran en la computación aplicada a la Medicina, - en particular en el diseño de sistemas automatizados de apoyo en electrofisiología - y en el reforzamiento del vínculo universidad - sector salud.

Circuitos eléctricos





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Dr. Julio Rubio Oca
Rector General

M. en C. Magdalena Fresán Orozco
Secretaria General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dr. José Luis Gázquez Mateos
Rector

Dr. Antonio Aguilar Aguilar
Secretario

Dr. Luis Mier y Terán
Director de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Joaquín Azpiroz Leehan
Jefe del Departamento de Ingeniería Eléctrica

Miguel Sandoval Arana
Jefe de Producción Editorial

Circuitos eléctricos

Juan Manuel Cornejo

Ma. del Pilar Granados

Virginia González Vélez

Miguel Cadena Méndez

Primera Edición 1995

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
Av. Michoacán y La Purísima
Iztapalapa, 09340, México D.F.

ISBN: 970-620-601-9

Impreso en México

Introducción

El presente material está dirigido a los estudiantes de la Unidad de Enseñanza-Aprendizaje de Circuitos Eléctricos II del Tronco General de Ingeniería de las licenciaturas en Ingeniería Biomédica e Ingeniería Electrónica. Como tal, está organizado de acuerdo con lo expresado en el plan de estudios vigente para las licenciaturas mencionadas y tiene como objetivo “capacitar al estudiante para analizar y prever el comportamiento de redes eléctricas de primero y segundo orden mediante el uso adecuado de herramientas de análisis”(*)

El material se divide en cinco capítulos: I. Función de Transferencia; II. Transformada de Señales Diversas; III. Redes de Primer Orden; IV. Redes de Segundo Orden, y V. Convolución.

El capítulo I inicia con el concepto de “Función de transferencia” y su importancia en la caracterización de una red eléctrica al describir ésta mediante un modelo matemático en el dominio de la variable s . Se reitera la naturaleza polinomial de la función de transferencia aludiendo a sus polos y ceros y su ubicación en el plano complejo, definiendo la respuesta de una red en términos de función de transferencia como la transformada de Laplace de la respuesta entre la transformada de Laplace de la excitación. Asimismo se establece la relación existente entre la localización, en el plano s , de los polos de la respuesta y su relación con la respuesta en el tiempo.

En el capítulo II se describen diversas señales de interés en el análisis de circuitos así como la síntesis de señales complejas a partir de funciones rampa, cuadrada, senoidales e impulso.

En los capítulos III y IV se estudia la respuesta de sistemas lineales de primer y segundo orden. Se hace especial hincapié en las propiedades de los sistemas de segundo orden en relación al lugar de las raíces de la respuesta del sistema.

Finalmente el capítulo V está dedicado a Convolución, en donde para exponer este concepto se ha optado por una aproximación gráfica en aras de ganar claridad conceptual, para posteriormente emplear este concepto en la resolución de redes eléctricas.

En los cinco capítulos los conceptos se reafirman mediante la solución de ejemplos sencillos. Al final de cada capítulo se proponen ejercicios, la mayoría con solución, a fin de que el lector tenga oportunidad de confirmar el conocimiento adquirido.

Además de los cinco capítulos ya mencionados, se han incluido dos apéndices: el primero para tratar la transformada de Laplace y el segundo para mencionar algunos ejemplos y ejercicios prácticos que ponen de manifiesto la aplicación real de los conocimientos expuestos en la primera parte de este texto. La idea de dedicar una sección a la transformada de Laplace es exponer brevemente los conceptos básicos requeridos para entrar en materia durante este

(*) Programa de Estudio, licenciatura Ingeniería Electrónica. UAM Iztpalapa.

curso. El segundo apéndice constituye además una excelente oportunidad para que el lector reafirme sus conocimientos al tiempo que los aplique.

En los textos citados en la bibliografía se indican los capítulos de los cuales se tomó información para redactarlos. En el texto se menciona entre corchetes la referencia bibliográfica. Queda pues a consideración este material con la intención de que sea de utilidad en la impartición de la UEA Circuitos Eléctricos II.

Índice

I. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	1
I.1 Caracterización de una red.	1
I.2 Impedancia de los elementos R , L y C .	4
I.3 Redes de uno y dos puertos.	5
I.4 Redes escalera.	8
I.5 Funciones Racionales: Polos y Ceros.	12
I.6 Representación gráfica de polos y ceros.	14
I.7 Determinación de los polos.	14
I.8 Caracterización de la respuesta de una red.	15
I.9 Naturaleza de la respuesta.	16
I.10 Respuesta en el tiempo de un sistema y su relación con la localización de los polos.	19
I.11 Descomposición de la respuesta.	22
I.12 Ejercicios propuestos.	25
II. TRANSFORMADA DE SEÑALES DIVERSAS	33
II.1 La función escalón.	33
II.2 Funciones rampa e impulso.	38
II.3 Síntesis de señales.	42
II.4 Ejercicios propuestos.	46
III. REDES DE PRIMER ORDEN	49
III.1 Respuesta de una red RL a excitación tipo escalón.	49
III.2 Respuesta escalón de una red RC.	54
III.3 Respuesta a excitación tipo impulso.	58
III.4 Respuesta total de una red RL a excitación tipo senoidal.	59
III.5 Respuesta senoidal de estado estable.	63
III.6 Magnitud y fase de la Función de Transferencia.	64
III.7 Condiciones iniciales en una red.	66
III.8 Ejercicios propuestos.	79
IV. REDES DE SEGUNDO ORDEN	85
IV.1 Respuesta a excitación tipo escalón.	87
IV.1.1 Polos diferentes en el eje real negativo. Respuesta sobreamortiguada.	87

IV.1.2 Polos complejos conjugados. Respuesta subamortiguada.	88
IV.1.3 Polos iguales en el eje real negativo. Respuesta críticamente amortiguada.	89
IV.2 Propiedades de los sistemas de segundo orden.	100
IV.3 El lugar de los polos de Sistemas de Segundo Orden.	103
IV.3.1 Formulación general del lugar de las raíces.	105
IV.4 Ejercicios propuestos.	107
V. CONVOLUCIÓN	113
V.1 Representación de señales en términos de impulsos.	113
V.2 La Integral de convolución.	116
V.3 Convolución y la respuesta impulso.	127
V.4 Teorema de convolución en el tiempo.	129
V.5 Ejercicios propuestos.	132
APÉNDICE I. TRANSFORMADA DE LAPLACE	135
A.I.1 Definición. Tabla de transformadas.	135
A.I.2 Reglas de Operación.	136
APÉNDICE II. EJEMPLOS Y EJERCICIOS PRÁCTICOS	138
A.II.1 Impedancia de circuitos eléctricos.	138
A.II.2 Redes de primer orden.	139
A.II.3 Redes de Segundo Orden.	143
A.II.4 Respuesta Senoidal.	146
BIBLIOGRAFÍA	147

Capítulo 1

Función de transferencia

Las redes se utilizan para cambiar las características de una señal. Una red necesita estar caracterizada, a fin de determinar cuantitativamente los cambios introducidos por ella. Para este propósito se emplea la *función de transferencia*. En lo que sigue se define el concepto de función de transferencia y se demuestra su utilidad en la obtención de la respuesta de una red.

1.1 Caracterización de una red

Considere una red constituida por elementos R , L y C , lineales e invariantes en el tiempo, y fuentes dependientes lineales, conectados de forma arbitraria. *La red está muerta*, i.e. no contiene ninguna fuente independiente. Las condiciones iniciales, que pueden tratarse como fuentes independientes, también son cero. En $t = 0$ se excita la red mediante una fuente independiente, ya sea de voltaje o corriente, y observamos su respuesta en algún punto de la red.

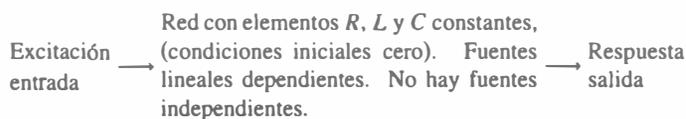


Figura I.1 Ejemplo de un sistema lineal e invariante.

Si se llama $e(t)$ a la excitación y $r(t)$ a la respuesta de la red, ambas funciones del tiempo, entonces $E(s)$ y $R(s)$ serán sus transformadas de Laplace, respectivamente, donde $E(s)$ y $R(s)$ son funciones de la variable compleja “ s ” [2].

La Función de Transferencia de un sistema, que caracteriza el comportamiento de una red, se define como la transformada de Laplace de la Respuesta entre la transformada de Laplace de la Excitación.

Sea $H(s)$ la función de transferencia de nuestro sistema ejemplo:

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{\mathcal{L}\{\text{salida}\}}{\mathcal{L}\{\text{entrada}\}} \quad \text{E.I.1}$$

Para una red cualquiera, la Función de Transferencia puede tener las siguientes variantes dependiendo de la variable que excita y de la variable que se considera como respuesta:

- | | |
|------------------------|----------------------|
| 1. Voltaje/Voltaje | 2. Voltaje/Corriente |
| 3. Corriente/Corriente | 4. Corriente/Voltaje |

donde el cociente obtenido será función de la variable "s".

Para una misma red pueden calcularse varias funciones de transferencia, dependiendo del punto en el que se excita así como del punto donde se toma la respuesta, por lo que siempre hay que especificar claramente dónde se aplica la entrada y dónde se mide la salida.

EJEMPLO I.1

En la siguiente red, la fuente de voltaje $V_1(s)$ es la transformada de Laplace de la excitación.

- Si $V_2(s)$ es la respuesta deseada, obtenga la función de transferencia.
- Si $I_1(s)$ es la respuesta deseada, obtenga la función de transferencia.
- Obtenga la relación $V_2(s)/I_1(s)$. ¿Es esta relación una función de transferencia?
- Si $V_1(s) = 1/s$, obtenga las respuestas $V_2(s)$ e $I_1(s)$.

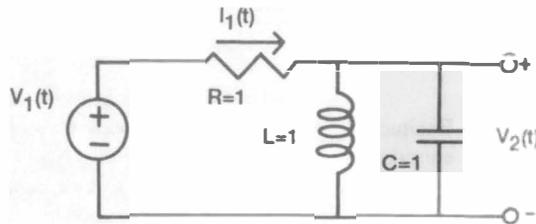


Figura I.2 Circuito del ejemplo I.1.

Solución:

- Resolviendo mediante un divisor de voltaje:

$$V_2(s) = V_1(s) = \frac{\frac{sL \left(\frac{1}{sC} \right)}{sL + \left(\frac{1}{sC} \right)}}{R + \frac{sL \left(\frac{1}{sC} \right)}{sL + \left(\frac{1}{sC} \right)}} = V_1(s) \frac{s \left(\frac{1}{s} \right)}{s + \left(\frac{1}{s} \right)} = V_1(s) \frac{s}{s^2 + s + 1} \quad (1)$$

la función de transferencia es:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

b. Dividiendo el voltaje de entrada entre la impedancia de entrada de la red.

$$I_1(s) = \frac{V_1(s)}{R + sL + \left(\frac{1}{sC}\right)} = \frac{V_1(s)}{s \left(\frac{1}{s}\right)} = V_1(s) \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1} \quad (2)$$

la función de transferencia es:

$$\frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}$$

c. Para obtener

$$\frac{V_2(s)}{I_1(s)}$$

se divide la ecuación (1) entre la ecuación (2)

$$\frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{V_1(s) \frac{s}{s^2 + s + 1}}{V_1(s) \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}}$$

puesto que I_1 no es una excitación independiente, $V_2(s)/I_1(s)$ no es una función de transferencia.

d. Se sustituye

$$V_1(s) = \frac{1}{s}$$

en (1) y en (2) y se obtienen las respuestas V_2 e I_1 .

$$V_2 = \left(\frac{1}{s}\right) \frac{s}{(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{s}\right) \frac{(s^2 + 1)}{(s^2 + s + 1)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}$$

1.2 Impedancia de los elementos R , L y C

Resistencia (R)

La expresión de la Ley de Ohm, que relaciona el voltaje con la corriente de una resistencia, está dada en el dominio del tiempo por la siguiente ecuación:

$$V(t) = Ri(t)$$

que en el dominio de la frecuencia compleja es:

$$V(s) = RI(s)$$

de donde, para obtener la Impedancia de la resistencia, se divide el voltaje entre la corriente:

$$Z_R(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R \quad \text{E.I.2}$$

en donde:

$Z_R(s)$ es la impedancia asociada a la resistencia R y R es el valor de la resistencia.

Así mismo se define la Admitancia de un elemento como el recíproco de su Impedancia, de este modo, la Admitancia de la resistencia $Y_R(s)$, es:

$$Y_R(s) = \frac{1}{R} = \frac{I(s)}{V(s)} \quad \text{E.I.3}$$

Tal resultado indica que la impedancia de la resistencia no varía con la frecuencia, incluso con la frecuencia compleja “ s ”.

Inductancia (L)

La relación en el dominio del tiempo entre el voltaje y la corriente en un inductor se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'$$

donde $i(t)$ es la corriente y $V(t')$ es el voltaje en la inductancia.

La transformada de Laplace de $v(t)$ es

$$V(s) = L[sI(s) - i(0)]$$

reagrupando los términos se tiene que

$$sLI(s) = V(s) + Li(0)$$

en esta expresión $V(s)$ es la transformada del voltaje $v(t)$ aplicado y $Li(0)$ es la transformada del voltaje que se produce debido a la corriente inicial que había en el inductor L .

Si las condiciones iniciales fuesen iguales a cero, se tendría

$$sLI(s) = V(s)$$

por lo tanto

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_L(s) = sL \quad \text{E.I.4}$$

donde $Z_L(s)$ es la Impedancia Inductiva de un inductor con condiciones iniciales cero.

Capacitancia (C)

Las relaciones en el dominio del tiempo entre el voltaje y la corriente para un capacitor son

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt + \frac{q(0)}{C}$$

donde $q(0)$ es la carga inicial del capacitor C .

La transformada de Laplace para la expresión de $i(t)$ es

$$I(s) = C[sV(s) - v(0)]$$

De esta ecuación se obtiene

$$\frac{1}{sC} I(s) = V(s) - \frac{v(0)}{s}$$

Si se tuvieran condiciones iniciales iguales a cero, la ecuación quedaría

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z_c(s) = \frac{1}{sC} \quad \text{E.I.5}$$

donde $Z_C(s)$ es la Impedancia Capacitiva de un capacitor sin carga inicial. De las definiciones $Z_L(s)$ y $Z_C(s)$ se concluye que las impedancias inductiva y capacitiva introducen a la frecuencia compleja en su valor, por lo que la respuesta de un sistema con elementos L y/o C , no es necesariamente del mismo tipo de la excitación.

1.3 Redes de uno y dos puertos

Al analizar una red es necesario determinar en qué par de puntos, pares a los que llamaremos "puertos", se aplica la excitación y en cuáles se mide la respuesta.

Redes de un puerto

Una red de un puerto es aquella en donde solamente existe un par de terminales en las cuales se excita y en las mismas se mide la respuesta; esta red se puede esquematizar así:

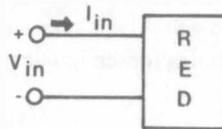


Figura I.3 Esquema de una red de un puerto.

El interior de la red puede contener resistencias, inductancias y capacitancias con condiciones iniciales iguales a cero, así como fuentes dependientes lineales.

Las posibles relaciones que se pueden encontrar entre las variables de salida y de entrada son únicamente

$$Z_{in}(s) = \text{impedancia de entrada}$$

$$Y_{in}(s) = \text{admitancia de entrada}$$

Para calcular estos valores se emplea la siguiente ecuación:

$$Z_{in}(s) = \frac{V_{in}(s)}{I_{in}(s)} = \frac{1}{Y_{in}(s)} \quad \text{E.I.6}$$

Redes de dos puertos

Una red de dos puertos es aquella donde se define un par de nodos distinto para la entrada y la salida, siendo posible medir voltaje y corriente en cada uno de ellos; esta red puede dibujarse así:

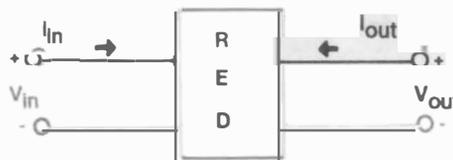


Figura I.4 Esquema de una red de dos puertos.

En este caso, al igual que las redes de un puerto, el interior de la red puede contener elementos capacitivos, inductivos y resistivos con condiciones iniciales iguales a cero, así como fuentes dependientes lineales. Las funciones de transferencia que pueden obtenerse de una red de dos puertos son las siguientes:

a) Impedancia

$$Z(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{in}(s)} \quad \text{E.I.7}$$

b) Admitancia

$$Y(s) = \frac{I_{out}(s)}{V_{in}(s)} \quad \text{E.I.8}$$

c) Ganancia de voltaje

$$G_V(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} \quad \text{E.I.9}$$

d) Ganancia de corriente

$$G_I = \frac{I_{out}(s)}{I_{in}(s)} \quad \text{E.I.10}$$

EJEMPLO I.2

Calcular la impedancia de entrada de un circuito RLC serie.

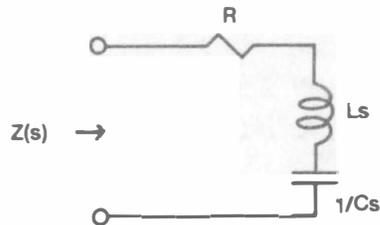


Figura I.5 Red del ejemplo I.2.

Solución:

Como los tres elementos están en serie, la impedancia total es la suma de las impedancias de cada elemento, es decir:

$$Z(s) = R + Ls + \frac{1}{sC}$$

$$Z(s) = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}$$

$$Z(s) = L \frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s}$$

EJEMPLO I.3

En la red de dos puertos que se muestra, $V_1(s)$ y $V_2(s)$ representan la transformada de Laplace del voltaje de entrada y de salida, respectivamente. Encontrar las funciones de transferencia correspondientes si la salida es: 1) $V_2(s)$ y 2) $I(s)$.

Solución:

Sabiendo que esta red actúa como divisor de voltaje,

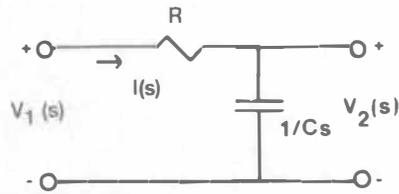


Figura I.6 Red del ejemplo I.3.

1)

$$V_2(s) = \frac{V_1(s) \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}$$

$$V_2(s) = \frac{V_1(s)}{sCR + 1}$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{CR}}{s + \frac{1}{CR}}$$

2) Como

$$V_1(s) = RI(s) + I(s) \frac{1}{Cs}$$

$$V_1(s) = I(s) \left\{ R + \frac{1}{Cs} \right\}$$

$$\frac{I(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{RCs + 1} = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{CR}}$$

1.4 Redes escalera

Las redes tipo escalera son aquellas cuya configuración típica es como se muestra a continuación:

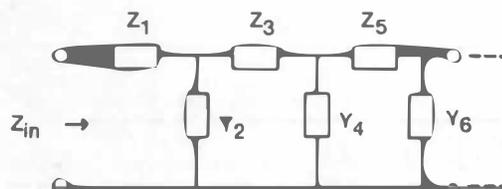


Figura I.7 Esquema de una red escalera.

Para obtener su impedancia de entrada, un buen método es representar a los elementos horizontales por su impedancia (R , sL o $1/sC$) y a los elementos verticales por su admitancia ($1/R$, $1/sL$ o sC). Posteriormente se obtiene la impedancia equivalente de los elementos, a partir del punto opuesto a los nodos desde donde se desea conocer la impedancia de entrada.

EJEMPLO 1.4

Obtener la impedancia de entrada de la siguiente red:

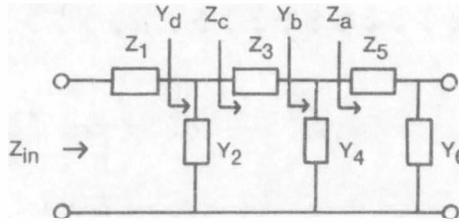


Figura I.8 Red tipo escalera.

Solución:

Se comienza por Y_6 , es decir:

$$Z_a(s) = Z_5(s) + \frac{1}{Y_6(s)}$$

$$Y_b(s) = Y_4(s) + \frac{1}{Z_5(s) + \frac{1}{Y_6(s)}}$$

$$Z_c(s) = Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s) + \frac{1}{Z_5(s) + \frac{1}{Y_6(s)}}}$$

$$Y_d(s) = Y_2(s) + \frac{1}{Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s) + \frac{1}{Z_5(s) + \frac{1}{Y_6(s)}}}}$$

$$Z_{in}(s) = Z_1(s) + \frac{1}{Y_2(s) + \frac{1}{Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s) + \frac{1}{Z_5(s) + \frac{1}{Y_6(s)}}}}}$$

La ecuación que se obtiene para $Z_{in}(s)$ se conoce como fracción continua.

EJEMPLO 1.5

Encontrar la impedancia de entrada del siguiente circuito, aplicando el método de análisis para una red escalera descrito anteriormente.

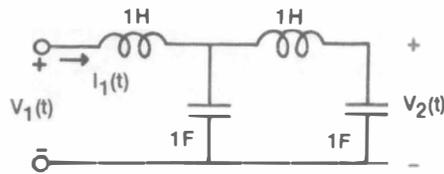


Figura 1.9 Red del ejemplo 1.5.

Solución:

Al transformar el circuito al dominio de la frecuencia aplicando la transformada de Laplace, queda:

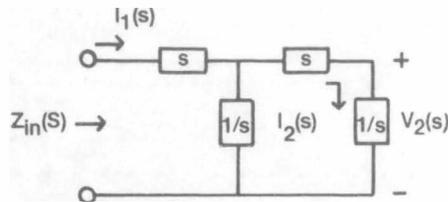


Figura 1.10 Transformación de la red al dominio de la frecuencia.

Si aplicamos el método de análisis para una red escalera:

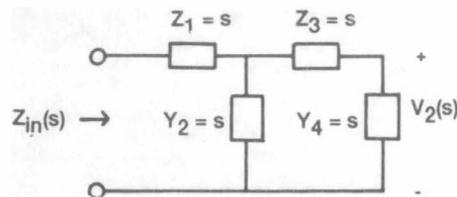


Figura 1.11 Respuesta obtenida con el método de solución para redes escalera.

$$Z_a(s) = Z_3(s) + \frac{1}{Y_4(s)} = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 1}{s}$$

$$Y_b(s) = Y_2(s) + Y_a(s) = s + \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y_b(s) = \frac{s^3 + s + s}{s^2 + 1} = \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 1}$$

$$Z_{in}(s) = Z_1(s) + Z_b(s) = s + \frac{s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

$$Z_{in}(s) = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

EJEMPLO I.6

Para la red escalera de la figura I.11, encuentre la ganancia de voltaje y la impedancia equivalente vista desde C_2 .

Solución:

Del ejemplo anterior se sabe que:

$$Z_{in}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

De las ecuaciones de malla, se obtiene $I_2(s)$:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \left\{ s + \frac{1}{s} \right\} I_1(s) - \frac{1}{s} I_2(s) \\ 0 &= -\frac{1}{s} I_1(s) + \left\{ s + \frac{2}{s} \right\} I_2(s) \\ \therefore I_2(s) &= \frac{s V_1(s)}{s^4 + 3s^2 + 1} \end{aligned}$$

Como $V_2(s) = I_2(s) \frac{1}{s}$

$$V_2(s) = \frac{V_1(s)}{s^4 + 3s^2 + 1}$$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{s^4 + 3s^2 + 1}$$

Dividiendo Z_{in} entre $\frac{V_1(s)}{V_2(s)}$ se tiene:

$$\frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s}$$

siendo esta última expresión la impedancia vista desde el capacitor C_2 .

1.5 Funciones racionales: polos y ceros

Las funciones de transferencia derivadas de redes lineales finitas y constantes con fuentes lineales dependientes son funciones racionales reales, *i.e.* el cociente de dos polinomios reales. En términos de un polinomio $N(s)$ del numerador y un polinomio $D(s)$ del denominador la función de transferencia $H(s)$ se puede escribir como:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s_{m-1} + \dots + a_1 s + b_0}{b_m s^m + b_{m-1} s_{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad \text{E.I.11}$$

en donde:

a y b son números reales, y

s es una variable de frecuencia compleja

Si se expresa la ecuación anterior en forma factorizada queda

$$H(s) = A \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)} = A \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad \text{E.I.12}$$

en donde:

$$A = \frac{a_m}{b_n}$$

es un factor de escala. Los polinomios $N_1(s)$ y $D_1(s)$ son polinomios mónicos; *i.e.* los coeficientes de los términos s^m y s^n son unitarios, y $N(s)$ es de un orden menor a $D(s)$. Los valores de s que hacen cero el polinomio del numerador se denominan ceros de $N(s)$. Si $N(s)$ es de orden m , tendrá m ceros.

La ecuación E.I.12 exhibe explícitamente los ceros: z_1, z_2, \dots, z_m . Los ceros de $N(s)$ son también los ceros finitos de $H(s)$. Los valores de s que hacen cero el polinomio del denominador se denominan ceros de $D(s)$. Si $D(s)$ es de orden n , entonces tendrá n ceros. Asimismo, la ecuación E.I.12 exhibe los ceros de $D(s)$: p_1, p_2, \dots, p_n . Los ceros de $D(s)$ también se denominan polos finitos de $H(s)$. De otra forma, los polos de $H(s)$ son aquellos valores de s que hacen infinito el valor de $H(s)$.

A los polos y ceros finitos de $H(s)$ se les denomina frecuencias críticas de $H(s)$. Para determinar por completo a $H(s)$ basta con especificar, ya sea el valor de los coeficientes a y b , o bien el valor del factor de escala A y las frecuencias características.

La función $H(s)$ también puede tener polos y ceros al infinito. Para determinar el comportamiento de $H(s)$ al infinito expresemos la E.I.11 de forma asintótica

$$H(s) \Big|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{a_m}{b_n} s^{m-n} \quad \text{E.I.13}$$

Donde:

si $m > n$, $H(s)$ tiende a infinito, por lo cual $H(s)$ tendrá $(m - n)$ polos al infinito.
 si $m < n$, $H(s)$ tiende a cero, por lo cual $H(s)$ tendrá $(n - m)$ ceros al infinito.
 si $m = n$, $H(s)$ tiende al valor (am/bn) ; entonces $H(s)$ no tiene polos ni ceros al infinito.

EJEMPLO I.7

La función de transferencia

$$H(s) = \frac{5s^4 + 1}{s^2 + s + 1}$$

tiene un polo de segundo orden al infinito ya que

$$H(s)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 5s^2$$

EJEMPLO I.8

La función de transferencia

$$H(s) = \frac{2}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

tiene un cero de tercer orden al infinito, ya que

$$H(s)|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{2}{s^3}$$

Entonces, **incluyendo los polos y ceros al infinito, toda función de transferencia tendrá tantos polos como ceros, siendo el número de éstos el mayor de m o n .**

Observe la siguiente función:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{[(s + 1)((s + 1)^2 + 1)]}$$

aquí $H(s)$ tendrá tres polos y tres ceros, dos de los cuales son finitos ($s = \pm j$) y el otro está en infinito; en contraste, los tres polos son finitos y son $s = -1$ y $s = -1 \pm j$.

1.6 Representación gráfica de polos y ceros

Atendiendo que s es una variable de tipo complejo de la forma

$$s = \sigma + j\omega$$

donde:

$$\sigma = \text{Re}\{s\}$$

$$\omega = \text{Im}\{s\}$$

$$s = \text{Re}\{s\} + \text{Im}\{s\}$$

su representación gráfica en el plano complejo s es:

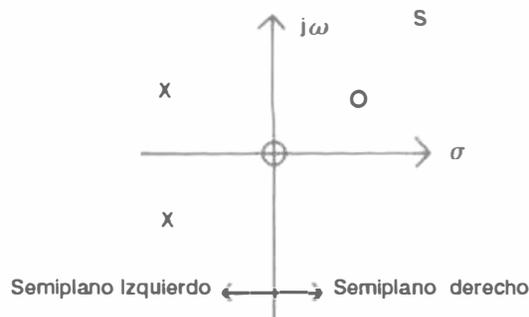


Figura I.12 Diagrama de polos y ceros en el plano complejo s .

donde se utiliza una X para designar la localización de un polo y un O para designar la localización de un cero.

1.7 Determinación de polos

Los polos finitos de la función $H(s)$ son los valores de s para los cuales $H(s)$ se hace infinita. Estos valores de s se denominan frecuencias naturales o frecuencias características de $H(s)$. En general, estas frecuencias están determinadas por la red en estado cero, *i.e.* sin condiciones iniciales, y no dependen de la ubicación tanto de la excitación como de la respuesta. Con pocas excepciones todas las funciones de transferencia de una red tienen los mismos polos finitos; *i.e.* los polinomios del denominador son idénticos. De donde los ceros del polinomio del denominador se identifican como los polos de la red. La ecuación que se obtiene al igualar a cero el polinomio del denominador se conoce como la ecuación característica de la red. Las raíces de la ecuación característica son los polos de $H(s)$.

Cualquier forma de la función de transferencia se puede utilizar para determinar los polos de la red. Primero, la red en estado cero se excita de manera adecuada; *i.e.* se inserta en cualquier rama de la red una fuente de voltaje independiente o bien entre dos nodos cualesquiera de la red se conecta una fuente de corriente independiente. Seguidamente se elige una respuesta arbitraria y se calcula la correspondiente función de transferencia, respuesta/excitación.

EJEMPLO I.9

Dada la siguiente función de transferencia de un sistema, grafique los polos y ceros en el plano complejo s .

$$H(s) = \frac{s^2(s + 3)}{(s + 1)(s + 2 + j)(s + 2 - j)}$$

Solución:

Para $H(s)$ se tiene que existe:

- Un cero en $s = 0$ de multiplicidad 2
- Un cero en $s = -3$
- Un polo en $s = -1$
- Un polo en $s = -2 + j$
- Un polo en $s = -2 - j$

cuya representación gráfica es:

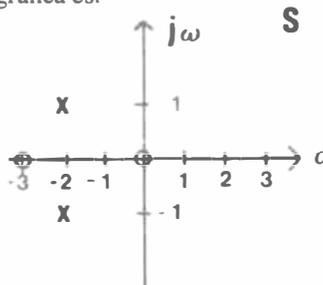


Figura I.13 Solución al ejemplo I.9.

1.8 Caracterización de la respuesta de una red

Puede aprenderse mucho acerca de una red estudiando la naturaleza de su respuesta. Aún cuando esta respuesta sólo es observable como una forma de onda en un osciloscopio, su naturaleza matemática y física se puede estudiar descomponiéndola en dos partes. Las características de una parte son directamente atribuibles a los polos de la red, mientras que las características de la otra son atribuibles a los polos de la excitación. Si bien estas dos partes no son absolutamente independientes una de otra, es posible ejercer cierto control sobre ellas mediante una adecuada selección de la excitación y la red. Por tanto, cualquiera de estas dos partes o la respuesta en su totalidad pueden hacerse cero. Asimismo, la forma de onda de una puede aproximarse a la de la otra y entonces exhibir resonancia. En la mayoría

de las aplicaciones, la parte que se debe a los polos de la red se desvanece con el tiempo, constituyendo una *respuesta transitoria*, mientras que si la entrada es una onda senoidal, la respuesta de estado permanente, respuesta de estado estable, también será una onda senoidal. Estas dos ondas senoidales tendrán la misma frecuencia pero diferirán en amplitud y fase.

1.9 Naturaleza de la respuesta

La función de transferencia $H(s)$ relaciona una excitación independiente $E(s)$ con la respuesta $R(s)$ mediante la ecuación:

$$R(s) = H(s)E(s) \quad \text{E.I.14}$$

Si el sistema está compuesto de elementos lineales y constantes, y de fuentes lineales dependientes que integran un red finita, entonces la función $H(s)$ será una función real racional, *i.e.* el cociente de dos polinomios reales en s .

Para la mayoría de los problemas, la excitación $E(s)$ también es una función racional, por ejemplo

$$E(s) = \frac{c_1s + c_0}{d_2s^2 + d_1s + d_0} \quad \text{E.I.15}$$

es una excitación comúnmente utilizada. Mediante una adecuada elección de las constantes c y d , esta $E(s)$ puede representar la transformada de Laplace de funciones en el tiempo, tales como: impulso, escalón, rampa, exponencial, senoidal, etcétera.

Si $H(s)$ y $E(s)$ son funciones racionales, entonces la respuesta, $R(s)$, será también una función racional que se puede escribir como

$$R(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad \text{E.I.16}$$

donde p_1, p_2, \dots, p_n representan los polos finitos de la respuesta.

Si se considera que todos los polos de la función $R(s)$ son simples, al desarrollar en fracciones parciales se obtendrá que

$$R(s) = \frac{K_1}{(s - p_1)} + \frac{K_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{K_i}{(s - p_i)}$$

$$R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \quad \text{E.I.17}$$

donde:

$$K_i = R(s)(s - p_i) \Big|_{s=p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{y}$$

K_i es el residuo del polo p_i

Puesto que $R(s)$ es una función racional con coeficientes reales, p_i y K_i , cuando los polos son complejos ocurren en pares conjugados. Así la forma general de un polo P_i es un número complejo:

$$P_i = \alpha_i + j\beta_i$$

donde α_i es la parte real y β_i es la parte imaginaria.

En el plano s , el polo de $R(s)$ puede estar en el origen, $\alpha_i = \beta_i = 0$; en el eje real, $\beta_i = 0$; en el eje imaginario $\alpha_i = 0$, en la parte izquierda del plano s , $\alpha_i < 0$, o en la parte derecha del plano s , $\alpha_i > 0$. Lo anterior se puede sintetizar en la siguiente tabla:

- a) $s = 0$
- b) $s = -\alpha_1$ si ($\alpha_1 > 0$)
- c) $s = \alpha_2$ si ($\alpha_2 > 0$)
- d) $s = \pm j\beta_0$ si ($\beta_0 > 0$)
- e) $s = -\alpha_3 \pm j\beta_3$ si ($\alpha_3 > 0, \beta_3 > 0$)
- f) $s = \alpha_4 \pm j\beta_4$ si ($\alpha_4 > 0, \beta_4 > 0$)

de esta manera la E.I.16 y E.I.17 quedan como sigue

$$R(s) = \frac{N(s)}{s(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s - j\beta)(s + j\beta)(s + \alpha_3 - j\beta_3)(s + \alpha_3 + j\beta_3)(s - \alpha_4 - j\beta_4)\dots} \tag{E.I.18}$$

y expandiendo en fracciones parciales se obtiene como resultado

$$R(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \alpha_1} + \frac{k_3}{s - \alpha_2} + \frac{k_4}{s - j\beta} + \frac{k_4^*}{s + j\beta} + \frac{k_5}{s + \alpha_3 - j\beta_3} + \frac{k_5^*}{s + \alpha_3 + j\beta_3} + \frac{k_6}{s - \alpha_4 - j\beta_4} + \frac{k_6^*}{s - \alpha_4 + j\beta_4} + \text{otros términos ya incluidos} \tag{E.I.19}$$

Si se obtiene ahora la transformada inversa de la ecuación E.I.17, y recordamos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_i}{s - p_i} \right\} = K_i e^{p_i t}$$

se obtendrá

$$r(t) = k_1 + k_2 e^{-\alpha_1 t} + k_3 e^{\alpha_2 t} + k_4 e^{j\beta t} + k_4^* e^{-j\beta t} + k_5 e^{-\alpha_3 t} e^{j\beta_3 t} + k_5^* e^{-\alpha_3 t} e^{-j\beta_3 t} + k_6 e^{\alpha_4 t} e^{j\beta_4 t} + k_6^* e^{-\alpha_4 t} e^{j\beta_4 t} + \text{otros términos}$$

es decir

$$r(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t} \tag{E.I.20}$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} \quad (t > 0) \tag{E.I.21}$$

si K_i es compleja, puede escribirse como

$$|K_i| e^{j\theta_i}$$

donde:

$|K_i|$ es la magnitud de K_i
 θ_i es el ángulo correspondiente

Por lo que para k polos complejos y $(n - k)$ polos reales, $r(t)$ se transforma en

$$r(t) = \sum_{i=1}^k |K_i| e^{\alpha_i t} e^{j\beta_i t} + \sum_{i=k+1}^n k_i e^{\alpha_i t} \quad \text{E.I.22}$$

donde la primera suma considera todos los polos complejos y la segunda suma considera todos los polos reales.

Considérese lo siguiente:

$$\begin{aligned} k_0 &= \sigma_0 + j\omega_0 \quad \text{y} \quad k_0^* = \sigma_0 - j\omega_0 \\ k_0 e^{j\beta t} &= \sigma_0 e^{j\beta t} + j\omega_0 e^{j\beta t} \\ k_0 e^{j\beta t} &= \sigma_0 (\cos \beta t + j \operatorname{sen} \beta t) + j\omega_0 (\cos \beta t + j \operatorname{sen} \beta t) \\ k_0 e^{j\beta t} &= \sigma_0 \cos \beta t - \omega_0 \operatorname{sen} \beta t + j(\sigma_0 \operatorname{sen} \beta t + \omega_0 \cos \beta t) \\ &\vdots \\ k_0 e^{j\beta t} + k_0^* e^{-j\beta t} &= (\sigma_0 + j\omega_0) e^{j\beta t} + (\sigma_0 - j\omega_0) e^{-j\beta t} \\ &= 2\sigma_0 \cos \beta t - 2\omega_0 \operatorname{sen} \beta t \\ k_0 e^{j\beta t} + k_0^* e^{-j\beta t} &= 2 \operatorname{Re}\{k_0 e^{j\beta t}\} + \text{otros términos} \end{aligned}$$

Entonces $r(t)$ se vería como

$$\begin{aligned} r(t) &= k + k_2 e^{-\alpha_1 t} + k_3 e^{\alpha_2 t} + 2 \operatorname{Re}\{k_4 e^{j\beta_1 t}\} + 2 e^{-\alpha_3 t} \operatorname{Re}\{k_5 e^{j\beta_3 t}\} \\ &\quad + 2 e^{\alpha_4 t} \operatorname{Re}\{k_6 e^{j\beta_4 t}\} + \text{otros términos} \end{aligned}$$

si representamos a

$$k_0 = |k_0| e^{j\phi_0}$$

entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{k_0 e^{j\beta t}\} &= \operatorname{Re}\{|k_0| e^{j\phi_0} e^{j\beta t}\} = |k_0| \cos(\beta t + \phi_0) \\ &\vdots \\ r(t) &= k_1 + k_2 e^{-\alpha_1 t} + k_3 e^{\alpha_2 t} + 2|k_4| \cos(\beta t + \phi_4) \\ &\quad + 2|k_5| e^{-\alpha_3 t} \cos(\beta_3 t + \phi_5) + 2|k_6| e^{\alpha_4 t} \cos(\beta_4 t + \phi_6) \\ &\quad + \text{otros términos} \end{aligned}$$

Esto es, si combinamos los polos complejos conjugados de la ecuación anterior, ésta se simplificaría en

$$r(t) = \sum_{i=1}^{k/2} 2|K_i| e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t + \theta_i) + \sum_{i=k+1}^n K_i e^{\alpha_i t} \quad \text{E.I.23}$$

donde $2 \cos(\beta_i t + \theta_i) = e^{j(\beta_i t + \theta_i)} + e^{-j(\beta_i t + \theta_i)}$.

La E.I.23 muestra que si un sistema se excita mediante una fuente que varía con el tiempo y cuya transformada de Laplace es una función racional y si los polos y ceros de la respuesta son simples, *i.e.* no hay polos de orden múltiple, entonces la respuesta en el dominio del tiempo es la suma de dos clases de forma de onda: senoides de amplitud exponencial y exponenciales.

1.10 Respuesta en el tiempo de un sistema y su relación con la localización de los polos

En el tiempo, las senoides de la respuesta en el dominio del tiempo pueden aumentar de amplitud (si $\alpha_i > 0$), decrecer de amplitud (si $\alpha_i < 0$) o mantener una amplitud constante (si $\alpha_i = 0$). Asimismo, las exponenciales también pueden crecer, decrecer o reducirse a una constante. De todo esto, se concluye que existe una relación estrecha entre la localización de los polos en el plano s con la forma de onda de la respuesta en el dominio del tiempo. Dicha relación se resume en el siguiente cuadro, en donde el factor de escala K puede ser negativo.

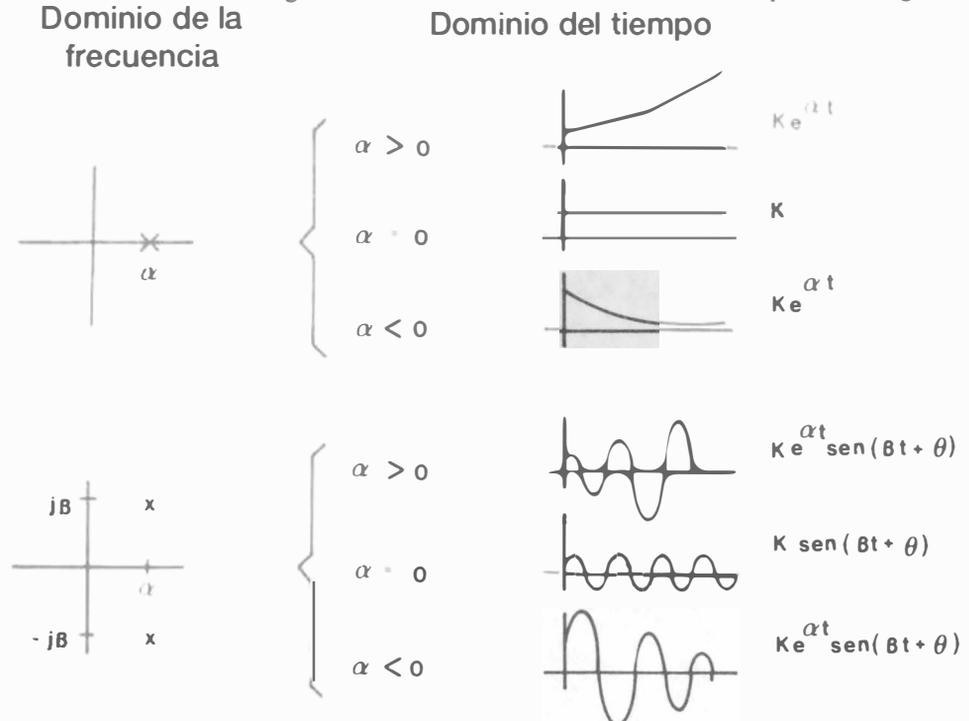


Figura I.14 Localización de los polos en el plano imaginario y la función en el tiempo a la que dan origen.

Debe entenderse que este conjunto de formas de onda puede combinarse y generar una variedad innumerable de formas de onda de la respuesta. Consecuentemente un polo

contenido en la respuesta de la forma $s = \alpha$ en el dominio de la frecuencia compleja nos remite a una forma de onda exponencial en el dominio del tiempo; así como un par de polos en $\pm j\beta$ implica una forma de onda senoidal en el dominio del tiempo. Si la respuesta $R(s)$ tiene polos de orden k (polos múltiples), entonces la respuesta contiene formas de onda dadas por $t^{(j-1)}e^{j\alpha t} \cos(\beta_j t + \theta_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$. Estas formas de onda pueden obtenerse multiplicando por $t^{(j-1)}$ las formas de onda de la figura anterior.

Puede concluirse entonces que los polos de la función $R(s)$ determinan la forma de onda de cada término en la respuesta, mientras que los ceros dan la amplitud y punto de inicio de las distintas formas de onda, ya que únicamente afectan la magnitud y ángulo de K_i (obsérvese la ecuación E.I.19).

EJEMPLO I.10

Encontrar la $r(t)$ asociada a siguiente función $R(s)$

$$R(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)^2}$$

Esta función tiene 6 polos

$$R(s) = \left\{ \frac{K_{11}}{s^2} + \frac{K_{12}}{s} \right\} + \left\{ \frac{K_{21}}{(s-j)^2} + \frac{K_{22}}{(s-j)} \right\} + \left\{ \frac{K_{31}}{(s+j)^2} + \frac{K_{32}}{(s+j)} \right\}$$

$$K_{11} = \frac{1}{(s-j)^2(s+j)^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s^2+1)^2} \Big|_{s=0} = 1$$

$$K_{12} = \left\{ \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)^2} \right\} \right\}_{s=0} = \left\{ \frac{-4s}{(s^2+1)^3} \right\}_{s=0} = 0$$

$$K_{21} = \frac{1}{s^2(s+j)^2} \Big|_{s=j} = \frac{1}{j^2(2j)^2} = \frac{1}{4}$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{s^2(s+j)^2} \right\}_{s=j} = \frac{-2}{s^2(s+j)^3} + \frac{-2}{s^3(s+j)^2} \Big|_{s=j} = j\frac{3}{4}$$

$$K_{31} = K_{21}^* = \frac{1}{4}$$

$$K_{32} = K_{22}^* = -j\frac{3}{4}$$

entonces

$$R(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(s-j)^2} + \frac{j\frac{3}{4}}{s-j} + \frac{\frac{1}{4}}{(s+j)^2} - \frac{j\frac{3}{4}}{s+j}$$

Al obtener su antitransformada

$$r(t) = t + \frac{1}{4}te^{jt} + j\frac{3}{4}e^{jt} + \frac{1}{4}te^{-jt} - j\frac{3}{4}e^{-jt}$$

$$r(t) = t + \frac{t}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{jt} + e^{-jt}\right\} - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2j}e^{jt} - e^{-jt}\right\}$$

$$r(t) = t + \frac{t}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t$$

EJEMPLO I.11

Dada

$$R(s) = \frac{s + \alpha}{s(s^2 + 4)}$$

- (a) ¿Qué formas de onda están presentes en $r(t)$?
- (b) ¿Qué efecto sobre la respuesta tiene la localización del cero?

Solución:

a) Los polos de $R(s)$ están en $s = 0$ y en $s = \pm 2j$. El polo en cero produce un término constante en $r(t)$ y el conjunto de $\pm 2j$, provocar una respuesta de tipo senoidal.

b) Para determinar cuantitativamente el efecto del cero, se expande a la función $R(s)$ en fracciones parciales y se obtiene la transformada inversa.

$$R(s) = \frac{s + \alpha}{s(s - 2j)(s + 2j)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s - 2j} + \frac{K_3}{s + 2j}$$

Determinando el valor de las constantes

$$K_1 = \left. \frac{s + \alpha}{s^2 + 4} \right|_{s=0} = \frac{\alpha}{4}$$

$$K_2 = \left. \frac{s + \alpha}{s(s + 2j)} \right|_{s=2j} = \frac{2j + \alpha}{2j(4j)} = -\frac{j + \frac{\alpha}{2}}{4} = -\frac{1}{4}\sqrt{1 + \left\{\frac{\alpha}{2}\right\}^2} e^{j(\arctan \frac{\alpha}{2})}$$

$K_3 =$ conjugado de K_2

La expansión en fracciones parciales de la respuesta es:

$$R(s) = \frac{\alpha}{4} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + \left\{\frac{\alpha}{2}\right\}^2} \left\{ \frac{e^{j \arctan \frac{\alpha}{2}}}{s - 2j} + \frac{e^{-j \arctan \frac{\alpha}{2}}}{s + 2j} \right\}$$

La transformada inversa de $R(s)$ es

$$r(t) = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\alpha}{2} \right\}^2} \left\{ e^{j2t} e^{j \arctan \frac{2}{\alpha}} + e^{-j2t} e^{-j \arctan \frac{2}{\alpha}} \right\}$$

puesto que

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta$$

$r(t)$ queda como

$$r(t) = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 + \left\{ \frac{\alpha}{2} \right\}^2} \cos \left\{ 2t + \arctan \frac{2}{\alpha} \right\}$$

Nótese que el efecto del cero es el de controlar el valor del término constante, la amplitud y la fase de la senoide.

1.11 Descomposición de la respuesta

Los polos de la respuesta de un sistema incluyen a los polos de la función de transferencia y los polos de la excitación. Esto puede verse en la siguiente ecuación:

$$R(s) = E(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D_n(s)D_f(s)} \quad \text{E.I.24}$$

Si se considera que todos los polos son simples y que $N(s)$ es de menor orden que $D(s)$, $R(s)$ puede expandirse en fracciones parciales. Separando los términos debidos a los polos de la función de transferencia, de los debidos a los polos de la excitación, $R(s)$ puede escribirse como

$$R(s) = \frac{N(s)}{(s - p_{n1})(s - p_{n2}) \dots (s - p_{f1})(s - p_{f2})} \quad \text{E.I.25}$$

donde el subíndice n se emplea para denotar los polos de la función de transferencia (**polos naturales**) y el subíndice f para los polos de la excitación (**polos forzados**). Cada polo en $R(s)$ contribuye a un término en la expansión. Separando los términos asociados a los polos de la función de transferencia de los asociados a la excitación, $R(s)$ se puede escribir como:

$$R(s) = \left\{ \frac{K_{n1}}{s - p_{n1}} + \frac{K_{n2}}{s - p_{n2}} + \dots \right\} + \left\{ \frac{K_{f1}}{s - p_{f1}} + \frac{K_{f2}}{s - p_{f2}} + \dots \right\}$$

$$R(s) = R_n(s) + R_f(s) \quad \text{E.I.26}$$

en donde se observa que los polos asociados a la función de transferencia se combinan para formar $R_n(s)$, y los polos asociados a la excitación se combinan para formar $R_f(s)$. $R_n(s)$ se define como la parte natural de la respuesta, puesto que los polos asociados con $R_n(s)$

proviene de la red misma y sus valores no tienen que ver con la excitación; son naturales o característicos de la red. $Rf(s)$ es la parte forzada de la respuesta, puesto que sus polos dependen de los polos de la excitación y no tienen nada que ver con la red; los polos de la excitación forzan a la red a producir la respuesta. En el dominio del tiempo la ecuación anterior queda

$$r(t) = (K_{n1}e^{p_{n1}t} + K_{n2}e^{p_{n2}t} + \dots) + (K_{f1}e^{p_{f1}t} + K_{f2}e^{p_{f2}t} + \dots)$$

$$r(t) = r_n(t) + r_f(t) \tag{E.I.27}$$

Los términos individuales de la componente natural, $r_n(t)$, tienen formas de onda determinados solamente por la red misma, mientras que los términos individuales en $r_f(t)$ tienen formas de onda idénticas en forma con las componentes individuales que conforman la función de excitación.

Para tener una respuesta cualquiera el sistema debe excitarse, sabiendo que *al excitar una red, ésta responde en dos formas: revela su comportamiento propio en la forma de la respuesta natural, y exhibe las características de la excitación en la forma de la respuesta forzada*. De ahí que sea un error pensar que una senoide que excita una red lineal siempre produzca una respuesta senoidal. De hecho, la respuesta es senoidal solamente cuando los términos debidos a los polos de la red se anulen; esto ocurre cuando los polos se encuentran en el semiplano complejo izquierdo (partes reales negativas), pues así la respuesta natural tiende a desaparecer.

EJEMPLO I.12

Obtener la respuesta $v(t)$, natural y forzada, del siguiente circuito:

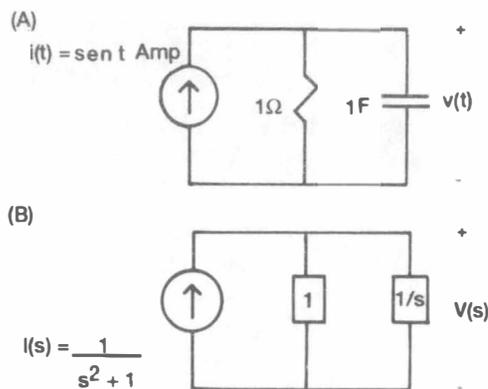


Figura I.15 (A) Circuito original del ejemplo I.12 en el dominio del tiempo; (B) Circuito transformado al dominio de la frecuencia.

Solución:

La función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Despejando $V(s)$

$$V(s) = \frac{I(s)}{s+1}$$

Sustituyendo $I(s)$

$$V(s) = \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\}$$

De la ecuación anterior vemos que la respuesta tiene tres polos: El polo $s = -1$ de la función de transferencia y dos polos en $s = \pm j$, debidos a la excitación.

Expandiendo en fracciones parciales se tiene:

$$V(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+j} + \frac{K_2^*}{s-j}$$

donde

$$K_1 = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = -\frac{1}{4}(1-j)$$

$$K_2^* = -\frac{1}{4}(1+j)$$

$$V(s) = V_n(s) + V_f(s)$$

$$V(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1-j}{2} \frac{1}{s+j} + \frac{(1+j)}{2} \frac{1}{s-j} \right\}$$

por lo tanto

$$V_n(t) = \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$V_f(t) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1-j}{2} e^{-jt} + \frac{1+j}{2} e^{jt} \right\}$$

$$V_f(t) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (e^{-jt} + e^{jt}) + \frac{j}{2} (e^{jt} - e^{-jt}) \right\}$$

$$V_f(t) = -\frac{1}{2} (\cos t - \text{sen } t)$$

$$V_f(t) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cos(t + 45^\circ)$$

para finalmente obtener la respuesta total

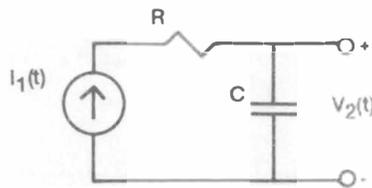
$$V(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - \sqrt{2} \cos(t + 45^\circ))$$

Este circuito está excitado por una fuente senoidal. La respuesta contiene una componente senoidal debido a la excitación de la entrada, además de contener también una exponencial amortiguada, la cual caracteriza el comportamiento natural de la red. Si hubiéramos excitado con una función escalón, la respuesta contendría este mismo término exponencial amortiguado, con una amplitud diferente, además del término constante de la nueva función de excitación.

1.12 Ejercicios propuestos. Función de transferencia

1. Determinar la función de transferencia de los siguientes circuitos:

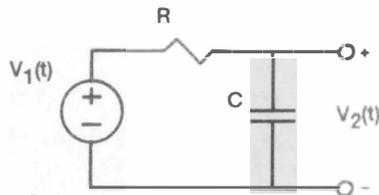
a.



Solución:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{sC}$$

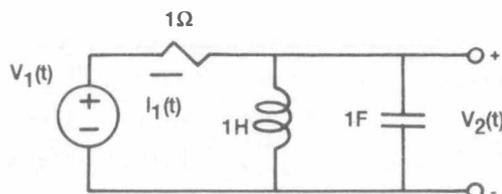
b.



Solución:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

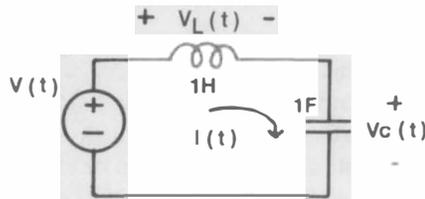
c.



Solución:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

d.



Solución:

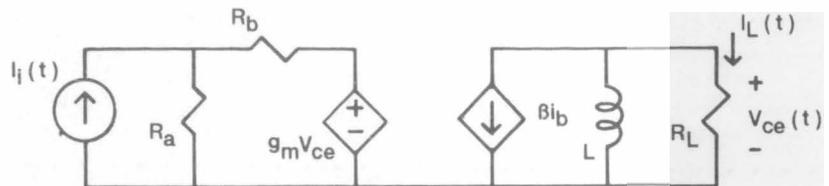
$$H_1(s) = \frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

$$H_2(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$H_3(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

Observe que el polinomio del denominador se conserva en las tres funciones de transferencia.

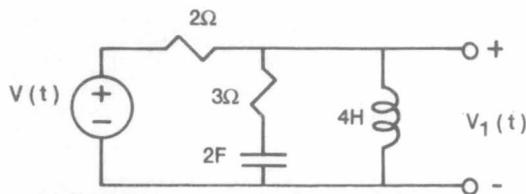
e.



Solución:

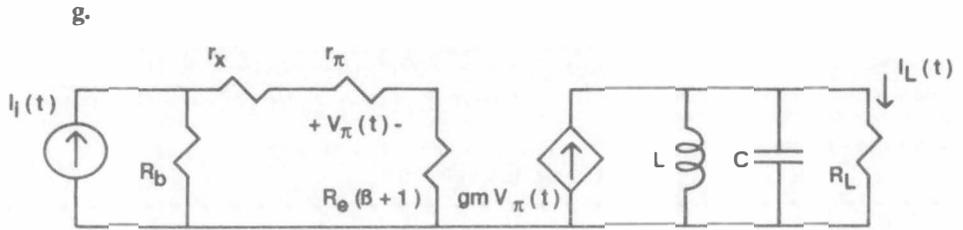
$$H(s) = \frac{I_L(s)}{I_i(s)} = \frac{\beta R a}{g_m \beta R_L - (R_L + 1)(R a + R b)}$$

f.



Solución:

$$H(s) = \frac{V_1(s)}{V(s)} = \frac{12s^2 + 2s}{20s^2 + 8s + 1}$$

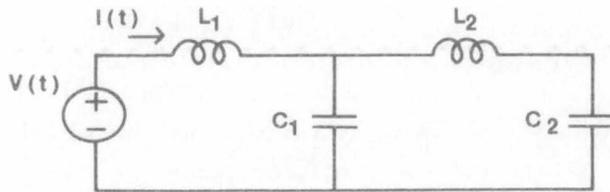


Solución:

$$H(s) = \frac{I_L(s)}{I_i(s)} = \frac{g_m r_\pi R_b}{R_b + r_x + r_\pi + (\beta + 1) R_e} \frac{s}{R_L C} \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{R_L C} s + \frac{1}{LC}}$$

2. Encuentre la impedancia de entrada de los siguientes circuitos:

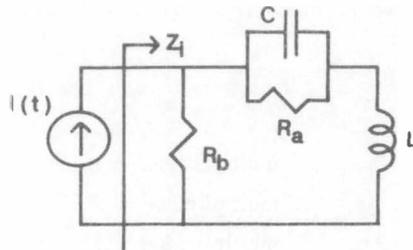
a.



Solución:

$$Z_i(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{s^4 + 3s^2 + 1}{s^2 + 2s}$$

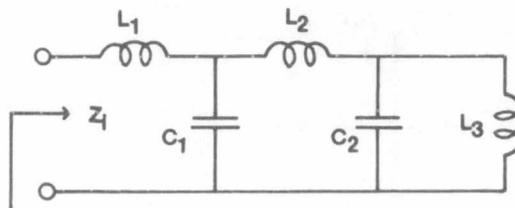
b.



Solución:

$$Z_i(s) = \frac{s^2(R_a R_b L C) + s(R_b L) + R_a R_b}{s^2(R_a L C) + s(L + R_a R_b C) + R_a + R_b}$$

c.



Solución:

$$Z_i(s) = \frac{s^5(C_1C_2L_1L_2L_3) + s^3[C_1L_1(L_2 + L_3) + C_2L_3(L_1 + L_2)] + s(L_1 + L_2 + L_3)}{s^4(C_1C_2L_2L_3) + s^3(C_2L_3) + s^2C_1(L_2L_3) + 1}$$

Respuesta total de un sistema

3. Graficar en el plano imaginario los polos y ceros de la función de transferencia e indicar la multiplicidad de los polos.

a. $H(s) = \frac{s + 3}{s^3(s + 1)^2}$

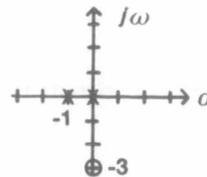
Solución:

Polos:

$$\begin{aligned} s = 0, & \quad \text{multiplicidad} = 3 \\ s = -1, & \quad \text{multiplicidad} = 2 \\ \text{Total} & = 5 \text{ polos reales} \end{aligned}$$

Ceros:

$$\begin{aligned} s = -3, & \quad \text{multiplicidad} = 1 \\ s = \infty, & \quad \text{multiplicidad} = 4 \\ \text{Total} & = 5 \text{ ceros} \end{aligned}$$



b. $H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+9)}$

Solución:

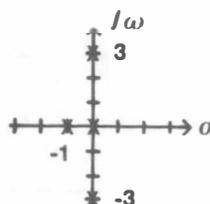
Polos:

$$\begin{aligned} s = 0, & \quad \text{multiplicidad} = 1 \\ s = -1, & \quad \text{multiplicidad} = 1 \\ s = 3j, & \quad \text{multiplicidad} = 1 \\ s = -3j, & \quad \text{multiplicidad} = 1 \end{aligned}$$

Total = 4 polos, 2 reales y 2 complejos conjugados.

Ceros:

$$s = \infty, \text{ multiplicidad} = 4$$



4. Encontrar el valor de la respuesta completa en el dominio del tiempo para la función de transferencia del inciso b) del punto anterior, si el sistema es excitado por un escalón unitario en $t = 0$.

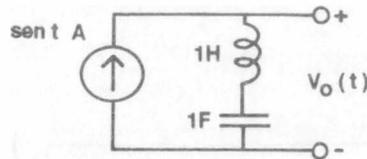
Solución:

$$r(t) = \left[\frac{1}{9}t + \frac{1}{10}e^{-t} + 0.032 \cos 3t - 0.005 \sin 3t \right] u(t)$$

Nótese que el polo en el origen, al ser multiplicado por el polo introducido por la excitación, introduce una rampa en la respuesta. El polo real determina la constante de tiempo de la exponencial y, finalmente, los polos complejos conjugados producen una senoide.

5. Encontrar la respuesta completa (distinguir parte forzada y parte natural) de los siguientes circuitos. Grafique la respuesta en el dominio del tiempo, y asóciela con la localización de los polos y ceros de la función de transferencia.

a.



Solución:

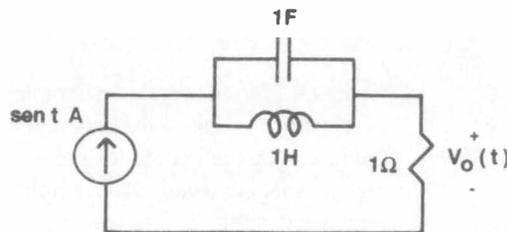
No existe respuesta forzada

$$V_o(t) = 1 = V_{0n}(t)$$

Existe solamente un polo en $s = 0$

\therefore la respuesta es constante en todo tiempo.

b.



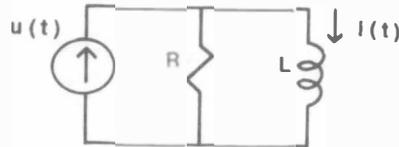
Solución:

No existe la respuesta forzada o de estado estable, es decir,

$$V_o = V_{0n}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)u(t)$$

Los polos de $H(s)$ son complejos conjugados de valor $s = -1 \pm \sqrt{3}j$ y la respuesta es una onda senoidal que decrece de manera exponencial con el tiempo.

c.



Solución:

$$i(t) = [1 - e^{-(R/L)t}]$$

$$\ni$$

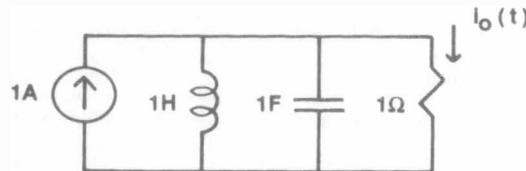
$$i_n(t) = -e^{-(R/L)t} u(t)$$

$$i_r(t) = u(t)$$

El único polo de $H(s)$ es real, negativo y de valor $s = -R/L$

\therefore la respuesta es una exponencial cuyo valor tiende al de la excitación $i(t) = ut(t)$.

d.



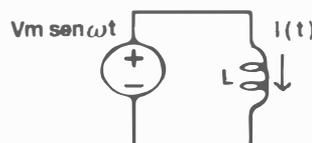
Solución:

No existe la respuesta forzada por lo que

$$i_0(t) = i_{0n}(t) = \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{3}{2}t\right) u(t)$$

Como los polos de $H(s)$ son complejos conjugados de valor $s = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}j$, la respuesta es una señal senoidal que decrece exponencialmente con el tiempo. La parte real de los polos determina la constante de tiempo de la exponencial cuyo valor da la amplitud de la senoide, mientras que la parte imaginaria define la frecuencia de la senoidal, así como la amplitud de la respuesta total.

e.

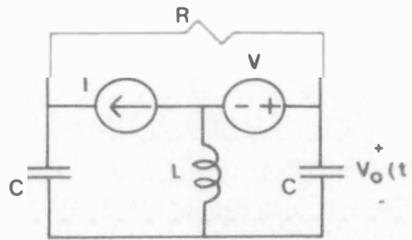


Solución:

$$i(t) = \underbrace{\frac{V_m}{\omega L}}_{\text{forzada}} - \underbrace{\frac{V_m}{\omega L}}_{\text{natural}} \cos \omega t$$

Observe que aunque la red únicamente introduce un polo en el origen, $s = 0$, debido a que la excitación es de tipo senoidal, la respuesta no sigue el criterio establecido para la excitación del tipo escalón.

f.

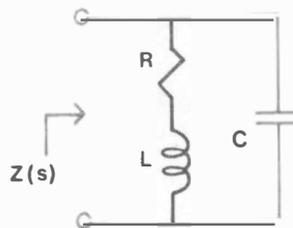


Solución:

$$V_0 = \underbrace{Vu(t)}_{\text{forzada}} - v \underbrace{[0.27e^{-0.38t} + 0.72e^{-2.62t}]}_{\text{natural}} u(t)$$

Aquí los polos de $H(s)$ son reales, diferentes y negativos, con valor $s = -0.38$ y $s = -2.62$, de donde la respuesta es la suma de dos exponenciales decrecientes cuyas constantes de tiempo quedan determinadas por los polos. Observe que la respuesta forzada sigue al voltaje de excitación.

4. La red que se muestra a continuación se conoce como red de compensación en paralelo. Demuestre que el valor de su impedancia tiene la forma



$$Z(s) = \frac{K(s - Z_1)}{(s - P_1)(s - P_2)}$$

y determine los valores de Z_1 , P_1 y P_2 en función de R , L y C . Si los polos y los ceros de $Z(s)$ tienen las ubicaciones que se indican, donde $Z(0j) = 1$, determine los valores de R , L y C .

Capítulo 2

Transformada de señales diversas

2.1 La función escalón

La función escalón es una función discontinua, representada como $u(t)$ [6]:

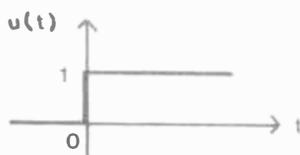
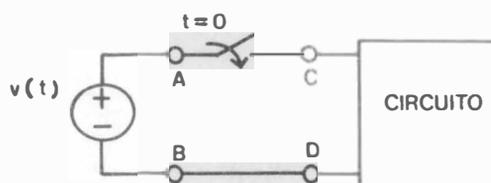


Figura II.1 La función escalón unitario iniciada en cero.

Esta función encuentra utilidad si consideramos el caso práctico de un circuito cualquiera al que se le conecta una fuente de voltaje, pero cuya aplicación está controlada por un interruptor. Siendo así se tendría:



donde:

$$v_{AB} = v(t)$$
$$v_{CD} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ v(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Figura II.2 Representación real de un voltaje $v(t)$ tipo escalón.

Si se supone ahora que $v(t) = \cos t$, las formas de onda para v_{AB} y v_{CD} se verán como en la figura II.3. Frecuentemente, la aplicación de la excitación no se hace en $t = 0$ sino en un tiempo diferente, por ejemplo $t = t_0$, en cuyo caso para poder representarlo, se utilizaría la función escalón trasladada en t_0 :

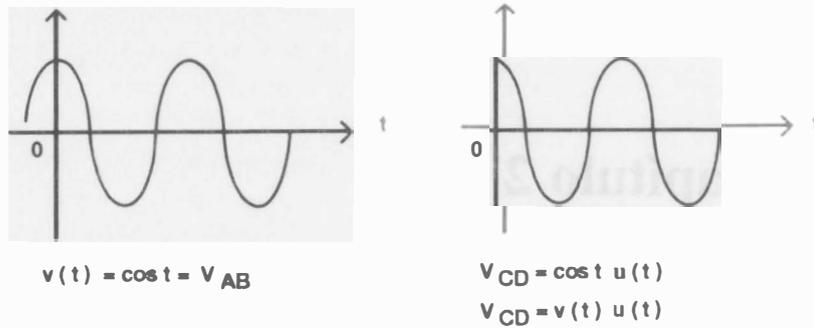
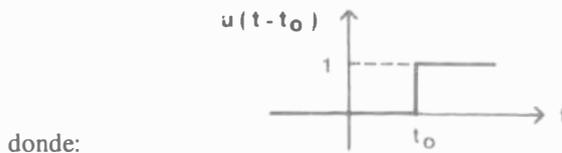


Figura II.3 Función $\cos t$ y función $\cos t u(t)$.



$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

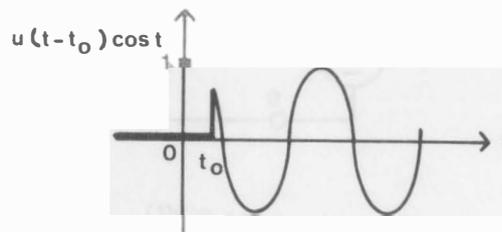
Figura II.4 Función escalón unitario trasladada en t_0 .

Si se considera ahora a esta nueva función, el voltaje anterior v_{CD} podría ser representado, de manera más general, como

$$v_{CD} = v(t)u(t - t_0)$$

$$v_{CD} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ v(t) & t \geq t_0 \end{cases}$$

y su gráfica se vería, suponiendo a $v(t) = \cos t$, como



$$V_{CD}(t) = \cos t u(t - t_0)$$

Figura II.5 Función $\cos t u(t)$ trasladada a $t = t_0$.

Hasta ahora sólo se ha visto la función escalón en el dominio del tiempo; ahora se ilustrará qué sucede en el dominio de la frecuencia compleja s [16]. En primer lugar se obtendrá la transformada de Laplace de $u(t)$:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

por lo cual

$$\mathcal{L}\{V_0 u(t)\} = \frac{V_0}{s} \tag{E.II.1}$$

con $V_0 = \text{constante}$.

Análogamente, para $u(t - t_0)$ se tiene

$$\mathcal{L}\{u(t - t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t_0}^{\infty} = \frac{1}{s} e^{-st_0}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{u(t - t_0)\} = \frac{1}{s} e^{-st_0} \tag{E.II.2}$$

La expresión anterior está compuesta de dos factores: el factor $1/s$, que corresponde a la transformada de Laplace del escalón unitario iniciado en cero, y el factor e^{-st_0} , que es una función que se introduce en la respuesta cuando el escalón es trasladado a $t = t_0$.

Este ejemplo que se dio para la función escalón unitario se puede generalizar para cualquier función $f(t)$ que inicia en un tiempo distinto de cero. Veamos:

Una función $f(t)u(t)$ trasladada hasta un tiempo $t = a$, se puede representar como $f(t - a)u(t - a)$.

Para encontrar la transformada de Laplace de esta función, se define en términos de una variable t' ,

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t') e^{-st'} dt'$$

tal que $t' = t - a$; entonces,

$$F(s) = \int_a^{\infty} f(t - a) e^{-(t-a)s} dt$$

$$F(s) = \int_a^{\infty} f(t - a) e^{-ts} e^{as} dt$$

obteniendo de la integral el término $e^{as} = \text{constante}$, y multiplicando por $u(t - a)$ para cambiar el límite inferior por cero, quedaría:

$$F(s) = e^{as} \int_0^{\infty} f(t - a) u(t - a) e^{-st} dt$$

La ecuación anterior es la transformada de Laplace de una función $f(t - a)u(t - a)$, ya que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{as} \mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\}$$

y por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} F(s) \tag{E.II.3}$$

o bien

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t - a)u(t - a) \tag{E.II.4}$$

La ecuación E.II.3 indica que *la transformada de una función recorrida en $t = a$, es e^{-as} veces la transformada de la función iniciada en cero*. A este resultado se le conoce como **teorema de translación**.

A continuación se mostrará que las funciones escalón unitario, mediante una traslación adecuada, se pueden utilizar como base para representar otras señales.

Sea la señal $v(t)$ formada por la diferencia de dos funciones escalón:

$$v(t) = u(t) - u(t - a)$$

entonces,

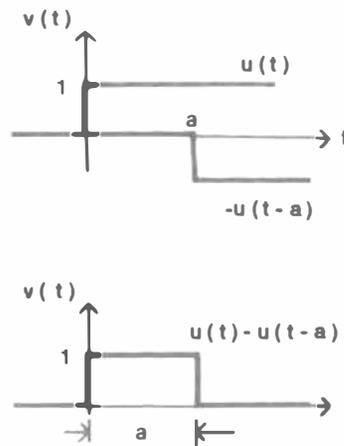


Figura II.6 Formación de un pulso unitario a partir de dos escalones unitarios.

Nótese cómo se ha generado una señal que toma valor unitario entre $t = 0$ y $t = a$; a esta función se le conoce como pulso unitario (figura II.6) [16]. Su ecuación general puede escribirse como

$$v(t) = V_0 [u(t - t_0) - u(t - t_1)] \quad \text{E.II.5}$$

donde:

V_0 es la magnitud del pulso, y

$t_1 - t_0$ es su duración, con inicio en $t = t_0$

que para el caso mostrado en la figura II.6, $t_0 = 0$, $t_1 = a$ y $V_0 = 1$.

EJEMPLO II.1

Para $t = 0$, se aplica un pulso de voltaje de duración “a”, a la red RL que se muestra abajo. Determinar la ecuación para $i(t)$.

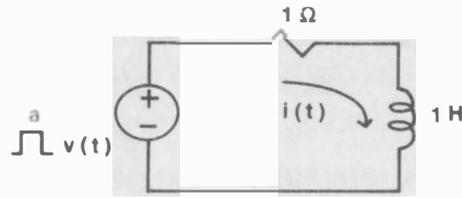


Figura II.7 Red del ejemplo II.1.

Solución:

La excitación en el dominio del tiempo es:

$$v(t) = u(t) - u(t - a)$$

si se transforma al dominio de Laplace se convierte en:

$$v(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-as})$$

La ecuación de malla, en el dominio de la frecuencia, es:

$$V(s) = I(s)R + L[sI(s) - i(0)]$$

Si $i(0) = 0$, es decir, condiciones iniciales a cero

$$I(s) = \frac{1 - e^{-as}}{s^2L + sR} = \frac{1 - e^{-as}}{s(s + 1)}$$

$$I(s) = \frac{1}{s(s + 1)} - \frac{e^{-as}}{s(s + 1)}$$

La antitransformada de Laplace de $I(s)$ se va a obtener en dos partes de la siguiente forma:

$$\frac{1}{s(s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1}$$

$e^{-as} \left\{ \frac{1}{s(s + 1)} \right\}$ es de l tipo $e^{-as} F(s)$ donde

$$F(s) = \frac{1}{s(s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1}$$

esto es:

$$e^{-as} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} \right\}$$

entonces

$$I(s) = \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} \right\} - \left\{ e^{-as} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} \right\} \right\}$$

sabiendo que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

$$i(t) = u(t) - u(t)e^{-t} - u(t-a) + e^{-(t-a)}u(t-a)$$

$$\therefore i(t) = u(t)[1 - e^{-t}] - u(t-a)[1 - e^{-(t-a)}]$$

es decir, $i(t)$ es la suma de dos funciones exponencialmente decrecientes: una que inicia en $t = 0$, y otra que lo hace en $t = a$.

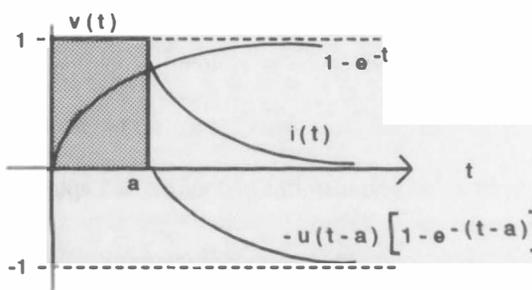


Figura II.8 Gráfica de la corriente $i(t)$ debida a una excitación tipo pulso de duración "a" en una red RL .

2.2 Funciones rampa e impulso

Para iniciar el estudio de estas funciones se utilizan los conocimientos sobre el escalón unitario. Por ejemplo, se le aplica un voltaje tipo escalón a un inductor de valor L , el cual tiene condiciones iniciales iguales a cero. La corriente que se generará en el inductor aumentará linealmente con el tiempo mientras se siga aplicando voltaje constante a él. En términos matemáticos,

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(t) dt = \frac{1}{L} \left\{ \int_{-\infty}^0 v_L(t) dt + \int_0^t v_i(t) dt \right\} = \frac{1}{L} \int_0^t dt = \frac{t}{L} \quad \text{E.II.6}$$

A la manera como crece la corriente en la inductancia se le llama función rampa.

Si la función escalón representa ahora la corriente, es decir, $i(t) = u(t)$, el voltaje creado en el inductor será cero para cualquier tiempo diferente de cero, ya que

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{du(t)}{dt}$$

En la ecuación anterior se observa que en $t = 0$ la pendiente (derivada) es infinita debido a la discontinuidad de la función, lo que le hace tener un voltaje de valor infinito a un solo tiempo. A la función que representa este voltaje se le llama función impulso.

La representación gráfica de las dos funciones anteriores es la siguiente:

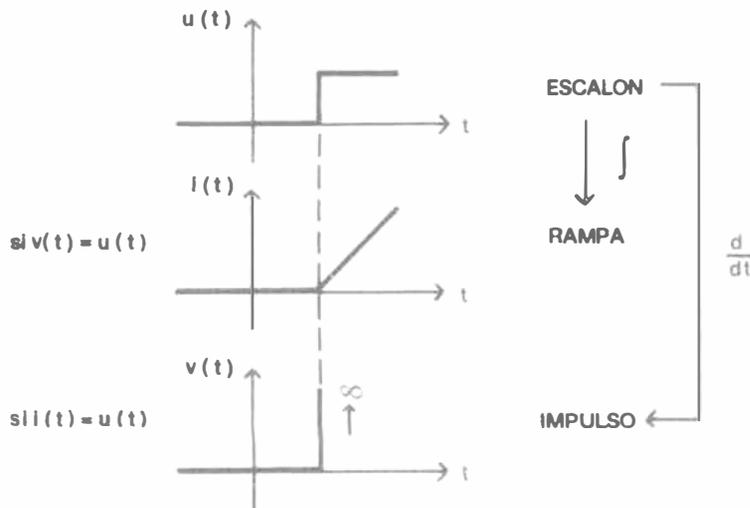


Figura II.9 Funciones rampa e impulso y su relación con la función escalón.

Para definir lo que es un impulso unitario obsérvese la siguiente función:

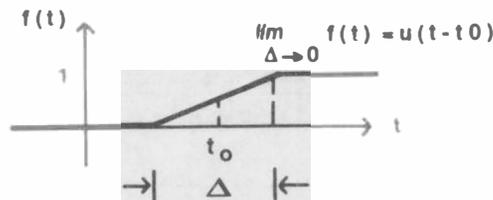


Figura II.10 Función rampa unitaria truncada.

tal que

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 - \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta} & t_0 - \frac{\Delta}{2} \leq t < t_0 + \frac{\Delta}{2} \\ 1 & t \geq t_0 + \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

y cuya derivada sería

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 - \frac{\Delta}{2} \\ \frac{1}{\Delta} & t_0 - \frac{\Delta}{2} \leq t < t_0 + \frac{\Delta}{2} \\ 0 & t \geq t_0 + \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

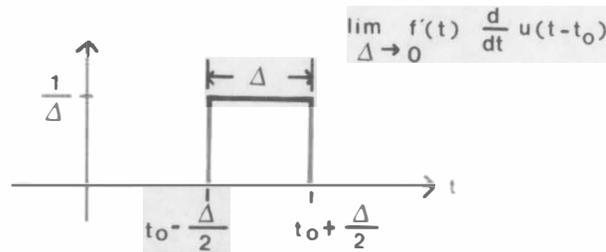


Figura II.11 Derivada de la función de la figura II.10.

donde $f'(t)$ es un pulso unitario de ancho Δ y área = 1:

Si se disminuye progresivamente el valor de Δ , el ancho del pulso se reduciría y la altura aumentaría, conservando un área de valor 1. De hecho, en el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$, la amplitud del pulso tiende a infinito, su duración tiende a cero, pero sigue conservando un área bajo el pulso de valor 1. Esto se puede expresar como

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f'(t) = \frac{d}{dt} u(t - t_0) \triangleq \delta(t - t_0) \quad \text{E. II.7}$$

donde esta ecuación es la definición del **impulso unitario**.

La delta de Dirac o impulso unitario $\delta(t - t_0)$ es, por lo tanto, una función de amplitud infinita en $t = t_0$ y de duración "nula". Gráficamente se representa con una flecha como se muestra a continuación:

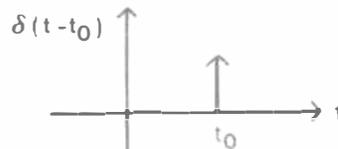


Figura II.12 Función impulso unitario.

El área bajo el pulso $f'(t)$ es siempre igual a 1 y, por lo tanto, independiente del valor de Δ .

Usando esta afirmación se puede decir que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{t_0 - \Delta/2}^{t_0 + \Delta/2} f'(t') dt' = \int_{t_0 - \Delta/2}^{t_0 + \Delta/2} \frac{du(t' - t_0)}{dt'} dt' = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t' - t_0) dt'$$

y sabiendo que

$$f(t_0^-) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t_0 - \Delta)$$

$$f(t_0^+) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t_0 + \Delta)$$

que aplicado al escalón nos da sus valores en $t=0$, referidos por sus límites por la izquierda y por la derecha, respectivamente, y cuyos valores son:

$$u(0^-) = 0$$

$$u(0^+) = 1$$

La transformada de Laplace de un impulso unitario, se obtiene a partir de la ecuación

$$\delta(t - b) = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a} [u(t - b) - u(t - b - a)] \right\} \quad \text{E.II.8}$$

la cual describe el límite cuando la base de valor a del pulso formado entre los escalones 1 y 2, tiende a cero.

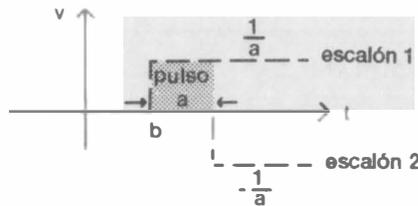


Figura II.13 Pulso de ancho a formado por dos escalones.

La transformada de esta ecuación es

$$\mathcal{L}\{\delta(t - b)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-bs} - e^{-(b+a)s}}{as} = e^{-bs}$$

donde b es el tiempo en el cual aparece el impulso, es decir, si $b = 0$, el impulso aparece en $t = 0$.

Ahora bien,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\} = s\mathcal{L}\{u(t)\} = 1$$

Análogamente, para la función rampa $r(t)$ se tiene que

$$\mathcal{L}\{r(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t u(t)dt\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

y en consecuencia, se puede generar la siguiente tabla:

Función	Representación en el tiempo	Transformada de Laplace
Parábola Unitaria	$t^2u(t)$	$1/s^3$
Rampa Unitaria	$tu(t)$	$1/s^2$
Escalón Unitario	$u(t)$	$1/s$
Impulso Unitario	$\delta(t)$	1
Doblete Unitario	$\delta'(t)$	s
Triplete Unitario	$\delta''(t)$	s^2

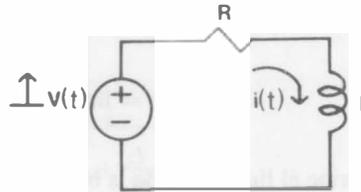


Figura II.14 Red del ejemplo II.2.

EJEMPLO II.2.

Suponga que la siguiente red se excita mediante una fuente de impulsos en vez de pulsos. En este caso, $V(s) = 1$ con $i(0^-) = 0$.

Solución:

Planteando la ecuación de malla:

$$LsI(s) + RI(s) = V(s) = 1$$

$$I(s) = \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

De este ejemplo se puede ver que el comportamiento de la red en respuesta a un impulso queda determinado únicamente por las constantes de la red. *Es por esto que la función impulso es utilizada para identificar un sistema desconocido.*

2.3 Síntesis de señales

La función escalón así como otras funciones derivadas de ella, son útiles para generar otras formas de onda más complejas.

EJEMPLO II.3.

Por ejemplo, para construir un pulso de ancho $(b - a)$ se pueden usar dos funciones escalón de tres diferentes maneras, a saber:

$$V(t) = u(t - a) - u(t - b)$$

$$V(t) = u(b - t) - u(a - t)$$

$$V(t) = u(b - t)u(t - a)$$

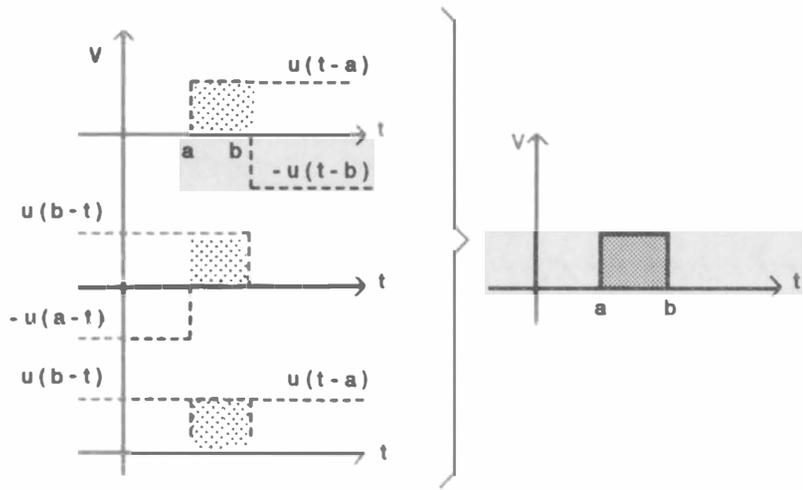


Figura II.15 Generación de un pulso unitario de tres formas diferentes.

lo cual se puede representar de la siguiente manera

EJEMPLO II.4.

Otro ejemplo es tratar de generar la señal $v(t)$ que se muestra abajo y que es medio ciclo de una onda senoidal. Para ello se usarán dos senoidales sumadas, es decir

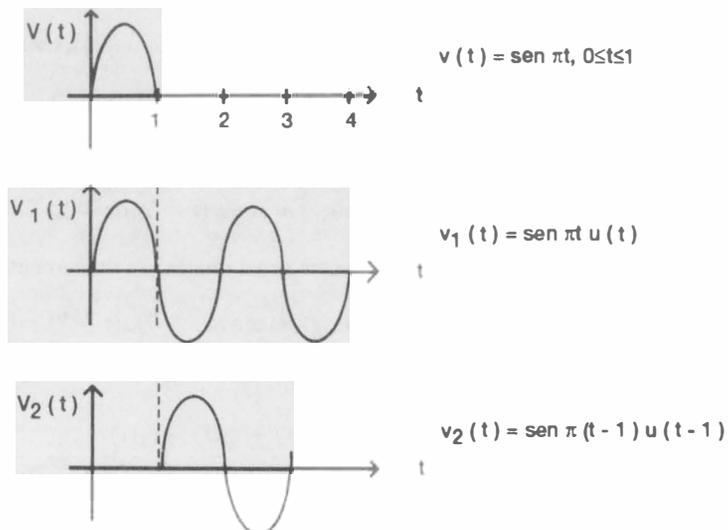


Figura II.16 Síntesis de señales.

como se observa en las gráficas,

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$v(t) = \text{sen } \pi t u(t) + \text{sen } \pi(t - 1)u(t - 1)$$

de donde

$$V(s) = \frac{\pi}{s^2 + \pi^2}(1 + e^{-s})$$

EJEMPLO II.5.

Un ejemplo más complejo de síntesis de señales es tratar de generar la siguiente forma de onda:

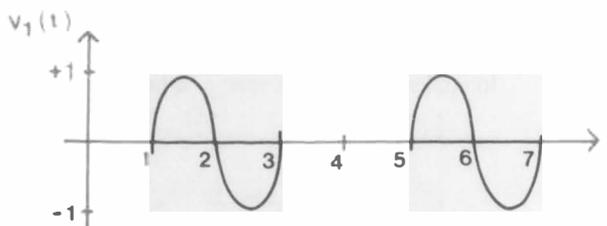


Figura II.17 Síntesis de señales.

Se utilizará primeramente una senoide tal que su valor sea cero antes de $t = 1$, es decir

$$v_1(t) = \text{sen } \pi(t - 1)u(t - 1)$$

Posteriormente se le resta una onda senoidal que exista solamente a partir de $t = 3$:

$$v_2(t) = \text{sen } \pi(t - 3)u(t - 3)$$

Luego se suma otra que exista a partir de $t=5$,

$$v_3(t) = \text{sen } \pi(t - 5)u(t - 5)$$

y finalmente se le resta otra señal que exista únicamente después de $t = 7$,

$$v_4(t) = \text{sen } \pi(t - 7)u(t - 7)$$

lo que nos da

$$v(t) = v_1(t) - v_2(t) + v_3(t) - v_4(t)$$

$$v(t) = \text{sen } \pi(t - 1)u(t - 1) - \text{sen } \pi(t - 3)u(t - 3)$$

$$+ \text{sen } \pi(t - 5)u(t - 5) - \text{sen } \pi(t - 7)u(t - 7)$$

EJEMPLO II.6.

Finalmente se planteará el problema de cómo determinar la transformada de Laplace de una función periódica con periodo T .

Un ejemplo de señal de este tipo es la llamada onda cuadrada, la cual se puede escribir como la suma infinita de funciones escalón:

$$v(t) = u(t) - 2u(t - a) + 2u(t - 2a) - 2u(t - 3a) + \dots$$

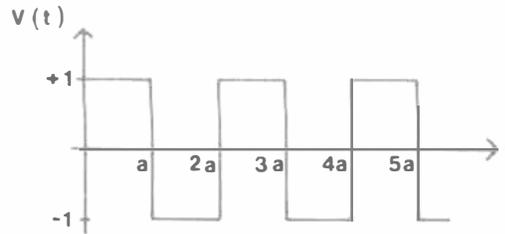


Figura II.18 Onda cuadrada.

cuya transformada de Laplace es

$$V(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-as} + e^{-2as} - \frac{2}{s}e^{-3as} + \dots$$

$$V(s) = \frac{1}{s} \{ 1 - 2e^{-as} + 2e^{-2as} - 2e^{-3as} + \dots \}$$

$$V(s) = \frac{2}{s} \left\{ \frac{1}{2} - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \dots \right\}$$

y sabiendo que

$$\frac{1}{1 + e^{-as}} = 1 - e^{-as} + e^{-2as} - e^{-3as} + \dots$$

el resultado es

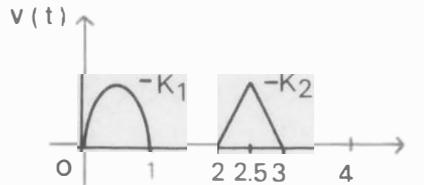
$$V(s) = \frac{2}{s} \left\{ \frac{1}{1 + e^{-as}} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$V(s) = \frac{1}{s} \left\{ -1 + \frac{2}{1 + e^{-as}} \right\}$$

2.4 Ejercicios propuestos

1. Escriba una ecuación para $V(t)$ utilizando las funciones escalón, rampa y senoidales.

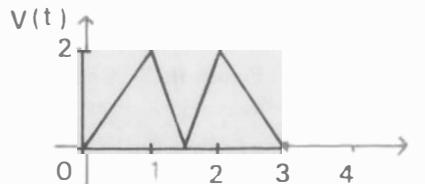
a.



Solución:

$$V(t) = K_1 \operatorname{sen}(t)u(t) - K_1 \operatorname{sen}(t-1)u(t-1) + 2K_2(t-2)u(t-2) - 2K_2(t-2.5)u(t-2.5) - 2K_2(t-2.5)u(t-2.5) + 2K_2(t-3)u(t-3)$$

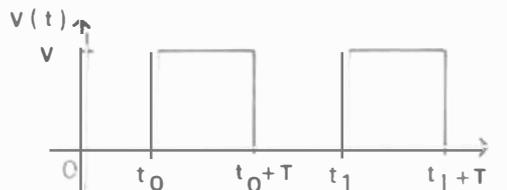
b.



Solución:

$$v(t) = 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1) - 4(t-1)u(t-1) + 4(t-1.5)u(t-1.5) + 4(t-1.5)u(t-1.5) - 4(t-2)u(t-2) - 2(t-2)u(t-2) + 2(t-3)u(t-3)$$

c.

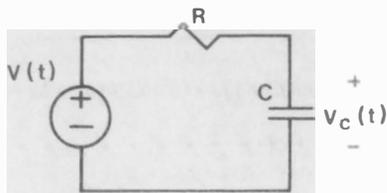


Solución:

$$v(t) = V(u(t-t_0) - u(t-(t_0+T))) + u(t-t_1) - u(t-(t_1+T))$$

2. En $t = 0$ a la red RC que se muestra, se le aplica un pulso de 10 V con duración de $5 \mu\text{seg}$. Determinar el valor de V_c y de la corriente de malla y graficarlos, para

$R = 100 \text{ ohms}$ y $C = 0.05 \mu\text{F}$.

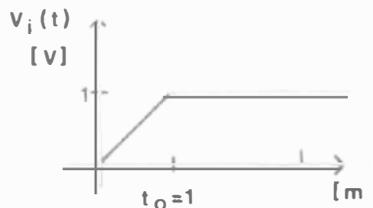
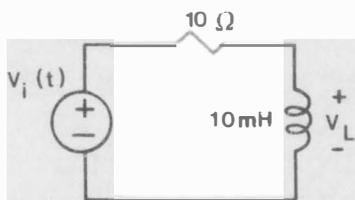


Solución:

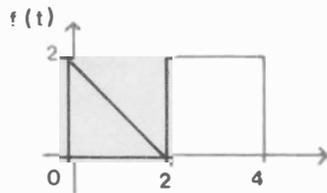
$$i(t) = \frac{10}{R} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) - \frac{10}{R} e^{-\frac{(t-5\mu)}{RC}} u(t - 5\mu)$$

$$V_C(t) = 10 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t) - 10 \left(1 - e^{-\frac{(t-5\mu)}{RC}} \right) u(t - 5\mu)$$

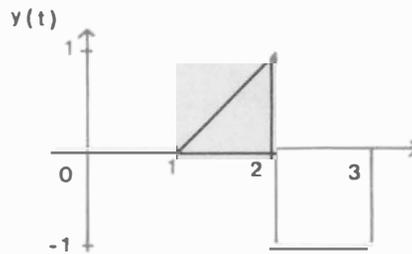
3. Para la red mostrada encontrar el valor de $i(t)$, si la excitación tiene la forma de onda siguiente:



4. Determine la transformada de Laplace y escriba una expresión en el tiempo para cada una de las formas de onda que se muestran:



(A)



(B)

Solución:

A)

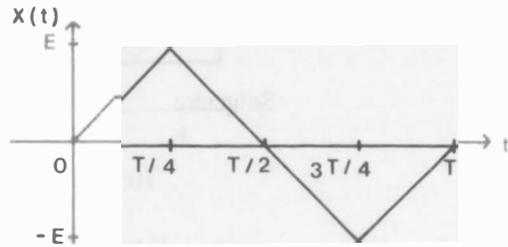
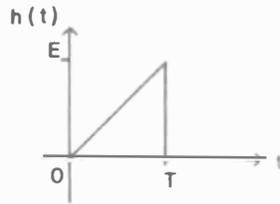
$$F(s) = \frac{-1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-4s}}{s}$$

$$f(t) = 2u(t) - tu(t) + (t - 2)u(t - 2) + 2u(t - 2) - 2u(t - 4)$$

B)

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}$$

$$g(t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - 2u(t-2) + u(t-3)$$



(C)

Solución:

C)

$$H(s) = \frac{E}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{E}{T} \frac{e^{-sT}}{s^2} - \frac{E}{s} e^{-sT}$$

$$h(s) = \frac{E}{T} t u(t) - \frac{E}{T} (t-T) u(t-T) - E u(t-T)$$

D)

$$X(s) = \frac{4E}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{8E}{T} \frac{e^{-sT/4}}{s^2} + \frac{8E}{T} \frac{e^{-s3T/4}}{s^2} - \frac{4E}{T} \frac{e^{-sT}}{s^2}$$

$$x(s) = \frac{4E}{T} t u(t) - \frac{4E}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right) u\left(t - \frac{T}{4}\right) - \frac{4E}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right) u\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

$$+ \frac{4E}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right) u\left(t - \frac{T}{4}\right) + \frac{4E}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right) u\left(t - \frac{T}{4}\right) - \frac{4E}{T} (t-T) u(t-T)$$

Capítulo 3

Redes de primer orden

El propósito de este capítulo es utilizar la técnica de la transformada de Laplace para analizar el comportamiento de sistemas de primer orden que en cursos pasados se analizaron en el dominio del tiempo. Con esto podremos apreciar las ventajas y desventajas que nos presentan ambos métodos. Al final, se ilustra el manejo de las condiciones iniciales que nos ayudarán a conocer la respuesta de circuitos con elementos almacenadores de energía y cuyas condiciones iniciales no son cero [4].

3.1 Respuesta de una red RL a excitación tipo escalón

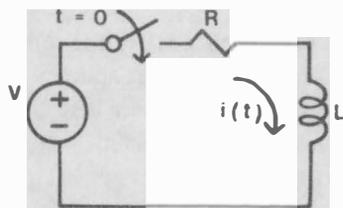


Figura III.1 Circuito RL serie.

En la figura III.1 se muestra un circuito inicialmente desenergizado, en donde se encuentra un inductor en serie con una resistencia. Se desea encontrar la respuesta total $i(t)$ después de que el interruptor ha sido cerrado. La ecuación diferencial que gobierna el circuito, cuando se aplica la ley de voltajes de Kirchhoff, es

$$V = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

donde:

la corriente $i(t)$ es la solución de la ecuación y V es el voltaje aplicado que causa que la respuesta $i(t)$ exista.

Para enfatizar que V existe únicamente cuando el interruptor se cierra, es útil asociarlo con la función escalón unitario $u(t)$, con lo que una formulación más completa de la ecuación diferencial correspondiente es

$$Vu(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{E.III.1}$$

La ecuación E.III.1 es una ecuación diferencial de primer orden ya que el circuito contiene únicamente un elemento almacenador de energía, como se evidencia por el término de la primera derivada.

El primer paso para resolver la ecuación E.III.1 por el método de Laplace, es realizar la transformación al dominio de la frecuencia en ambos lados de la ecuación:

$$V \mathcal{L}\{u(t)\} = R \mathcal{L}\{i(t)\} + L \mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} \quad \text{E.III.2}$$

No debe perderse de vista que la solución deseada es en el dominio del tiempo y se identifica por $i(t)$. La correspondiente función en el dominio de s es llamada $I(s)$, que es

$$I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación E.III.2 y usando las tablas de transformadas, se tiene,

$$\frac{V}{s} = RI(s) + L\{sI(s) - i(0^-)\} \quad \text{E.III.3}$$

En este caso, $i(0^-)$ se escribió para enfatizar que la información acerca del valor inicial de la corriente, inmediatamente antes de la aplicación de la función forzada V , es necesaria para poder obtener una solución formal para la respuesta $I(s)$.

A causa de que el interruptor inicialmente está abierto, se deduce que $i(0^-)=0$, por lo que la ecuación E.III.3 puede escribirse

$$\frac{V}{s} = I(s)(R + sL)$$

de donde la respuesta se vuelve

$$I(s) = \frac{\frac{V}{L}}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} \quad \text{E.III.4}$$

Para conocer la solución en el tiempo de la ecuación anterior, se debe llevar a cabo la transformada inversa de Laplace, lo cual requiere poner a $I(s)$ en una forma tal que sus términos sean identificables en tablas de antitransformadas. Esto puede lograrse mediante la expansión por fracciones parciales; esto es:

$$I(s) = \frac{\frac{V}{L}}{s\left\{s + \frac{R}{L}\right\}} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{R}{L}}$$

donde:

$$K_0 = \left. \left\{ \frac{\frac{V}{L}}{s + \frac{R}{L}} \right\} \right|_{s=0} = \frac{V}{R}$$

$$K_1 = \left. \left\{ \frac{\frac{V}{L}}{s} \right\} \right|_{s=-R/L} = -\frac{V}{R}$$

De esta manera, la solución en el dominio de la frecuencia puede ser escrita de manera más conveniente como

$$I(s) = \frac{V}{R} \frac{1}{s} - \frac{V}{R} \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

Con las tablas de transformadas se puede saber que el equivalente en el dominio del tiempo de $1/s$ es un escalón unitario, y el de $1/(s + R/L)$ es $e^{-(R/L)t}$, y entonces se escribe a la ecuación anterior como

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{V}{R} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{V}{R} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{R}{L}}\right\} \quad \text{E.III.5}$$

o bien,

$$i(t) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{para } t > 0 \quad \text{E.III.6}$$

En la ecuación E.III.5 el símbolo \mathcal{L}^{-1} se utiliza para denotar la transformada inversa de Laplace, la cual puede conocerse mediante tablas, y llegar directamente a la solución en el dominio del tiempo, E.III.6.

La ecuación diferencial que modela el circuito RL fue escrita en la ecuación E.III.1, de donde, asumiendo condiciones iniciales iguales a cero y aplicando la transformada de Laplace se tiene

$$V(s) = I(s)(R + sL)$$

Aquí, $V(s)$ es la representación general de la transformada de Laplace de la función excitación, sin ser especificada su forma, pudiendo ser la transformada de cualquier función determinística. Ahora bien, si se arregla la ecuación anterior, se podrá reescribir de la manera siguiente:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = R + sL = Z(s) \quad \text{E.III.7}$$

Ya que el lado izquierdo de la ecuación E.III.7 comprende la relación voltaje/corriente, la expresión a la que se iguala en el lado derecho, es la impedancia de entrada, denotada como $Z(s)$.

Esta impedancia de entrada nos permite escribir la respuesta $I(s)$ del sistema, causada por la función de entrada $V(s)$, aplicando simplemente la ley de Ohm en su forma más general; así, podemos expresar la respuesta en el dominio de la frecuencia compleja como

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{V(s)}{R + sL}$$

Un aspecto interesante y muy significativo de esta formulación es que ambas, la respuesta forzada y natural del sistema es posible obtenerlas de la ecuación anterior, si las condiciones iniciales son iguales a cero. Por ejemplo, si la función de entrada es un escalón de magnitud V , es decir, $V(s) = V/s$, entonces

$$I(s) = \frac{V}{s} \frac{1}{R + sL} = \frac{\frac{V}{L}}{s \left\{ s + \frac{R}{L} \right\}} \quad \text{E.III.8}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación E.III.4, se ve que son idénticas, lo cual fue posible gracias a que en ambos casos las condiciones iniciales son nulas. Sin embargo, es interesante notar que en la última ecuación la presencia de s en el denominador está asociada con la función escalón de entrada, y será por lo tanto, responsable de la solución de estado permanente, cosa que se nota claramente en la ecuación E.III.6. Asimismo, la impedancia de entrada está asociada con la respuesta natural del sistema [4], lo cual también se observa en la misma ecuación.

En muchas circunstancias en ingeniería eléctrica, particularmente en control, es muy útil formular la relación salida contra entrada, en el dominio de la frecuencia, lo cual, como vimos en el capítulo I, representa la función de transferencia que modela el comportamiento que observa el sistema. En el ejemplo con el que estamos trabajando, la función de transferencia sería:

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R + sL}$$

Nótese que no es necesario especificar qué forma tendrá la excitación, ya que como el lado derecho de la ecuación indica, la función de transferencia indirectamente proporciona información acerca de la respuesta natural del circuito ya que envuelve únicamente los parámetros proporcionados por los elementos que conforman el sistema.

EJEMPLO III.1.

En el circuito que se muestra a continuación, la fuente de voltaje ha estado conectada por un largo tiempo antes de que el interruptor se cerrara. Para los valores que se indican, encuentre la expresión completa para la corriente de malla que se genera después de que el interruptor se cierra, removiendo a R_1 del circuito.

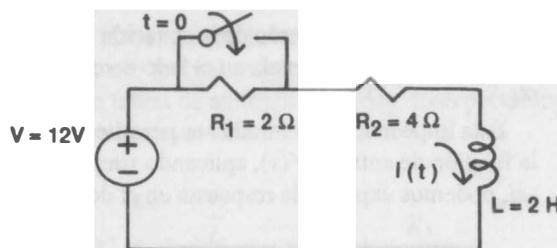


Figura III.2 Circuito del ejemplo III.1.

Solución:

Para $t > 0$:

$$\frac{V}{s} = R_2 I(s) + sLI(s) - Li(0^-)$$

$$\frac{V}{s} + Li(0^-) = I(s)(R_2 + sL)$$

Esta ecuación muestra en el lado izquierdo a la función de entrada junto con las condiciones iniciales, y en la derecha a la transformada de la respuesta y a la impedancia de entrada. Esta formulación indica que la impedancia de entrada puede ser extraída fácilmente aún en condiciones iniciales diferentes de cero. Si se reformula la ecuación, la respuesta podrá escribirse así:

$$I(s) = \frac{V + sLi(0^-)}{s(R_2 + sL)} = \frac{\frac{V}{L} + si(0^-)}{s\left\{s + \frac{R_2}{L}\right\}}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación E.III.8 se ve cómo el término correspondiente a las condiciones iniciales tiene cabida en la solución buscada: se combina con la excitación, alterando la magnitud de la respuesta forzada.

Ahora bien, para encontrar el valor de $I(s)$, expandemos en fracciones parciales, de modo que se logre expresar como:

$$I(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + \frac{R_2}{L}}$$

$$K_0 = \left\{ \frac{\frac{V}{L} + si(0^-)}{s + \frac{R_2}{L}} \right\} \Big|_{s=0} = \frac{V}{R_2} = \frac{12}{4} = 3 \text{ Amperios}$$

$$K_1 = \left\{ \frac{\frac{V}{L} + si(0^-)}{s} \right\} \Big|_{s=-\frac{R_2}{L}} = -\frac{V}{R_2} + i(0^-)$$

El valor de la corriente, justo antes de cambiar la posición del interruptor, está dado por

$$i(0^-) = \frac{V}{R_1 + R_2} = 2 \text{ Amperios}$$

Si se sustituye este resultado en la ecuación obtenida para K_1 ,

$$K_1 = -\frac{V}{R_2} + i(0^-) = -1$$

finalmente se obtiene

$$I(s) = \frac{3}{s} - \frac{1}{s + \frac{R_2}{L}} = \frac{3}{s} - \frac{1}{s + 2}$$

Ahora aplicamos la transformada inversa de Laplace en ambos sumandos, para encontrar la respuesta en el dominio del tiempo:

$$i(t) = (3 - e^{-2t}) \text{ Amperios}$$

forzada natural

Para comprobar este resultado debe hacerse notar que en $t = 0^-$, el valor de $i(t)$ es dos Amperios, y conforme la respuesta natural (transiente) desaparece, la corriente tiende al valor de tres Amperios.

La constante de tiempo de este problema es

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{2H}{4\Omega} = \frac{1}{2} \text{ seg}$$

de modo que después de 2.5 seg., la respuesta natural tendrá un valor menor en 1% a su valor final de tres Amperios.

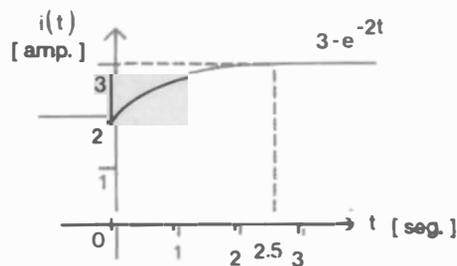


Figura III.3 Respuesta $i(t)$ del ejemplo III.1.

III.2 Respuesta escalón de una red RC

En la figura III.4 se muestra un arreglo RC en serie. Observe que el capacitor tiene una carga inicial de valor q_0 debida a la aplicación previa de una cierta corriente. Encuéntrese la expresión para la corriente de malla después de que el interruptor S ha sido cerrado.

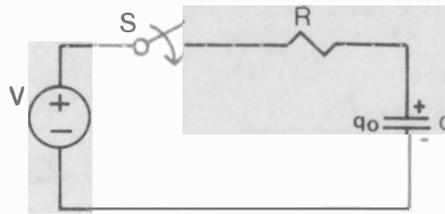


Figura III.4 Circuito RC serie, con q_0 , condición inicial del capacitor.

La ecuación diferencial que gobierna el circuito, obtenida mediante la aplicación de la ley de voltajes de Kirchhoff, es

$$V(t)u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt$$

Si se aplica transformada de Laplace en ambos lados

$$V(s) = RI(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{I(s)}{s} + \frac{i^{-1}(0)}{s} \right\}$$

donde:

$$i^{-1}(0) = \int_{-\infty}^0 i dt = q_0$$

representa la acumulación de carga en el capacitor debida a la aplicación previa de una corriente en el circuito; esta acción se enfatiza en la última ecuación al tomar los límites de la integral desde $-\infty$ hasta 0, donde 0 se refiere al instante justo después de haber cerrado el interruptor.

Combinando las dos últimas ecuaciones podemos escribir

$$V(s) = RI(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{I(s)}{s} + \frac{q_0}{s} \right\}$$

o bien

$$V(s) - \frac{q_0}{Cs} = I(s) \left(R + \frac{1}{sC} \right) \tag{E.III.9}$$

Obsérvese que del lado izquierdo aparece la función de entrada sumada al efecto de la condición inicial, mientras que del lado derecho aparece la impedancia de entrada del circuito RC.

Para una excitación tipo escalón, $V(s) = V/s$, la ecuación E.III.9 se convierte en:

$$\frac{1}{s} \left(V - \frac{q_0}{C} \right) = I(s) \left\{ R + \frac{1}{sC} \right\}$$

donde el término izquierdo representa el voltaje que efectivamente actúa en el circuito para producir una cierta corriente $i(t)$. La solución en el dominio de la frecuencia de esta corriente

es entonces,

$$I(s) = \frac{V - \frac{q_0}{C}}{s + \left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{V - \frac{q_0}{C}}{R \left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

siendo su correspondiente en el dominio del tiempo,

$$i(t) = \left\{ \frac{V}{R} - \frac{q_0}{RC} \right\} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{E.III.10}$$

La gráfica de esta ecuación como función del tiempo se muestra en la figura III.5. Nótese el hecho de que en $t = 0^-$ ocurre un cambio brusco en el valor de la corriente del circuito; su magnitud es igual a la diferencia entre el voltaje aplicado V y el voltaje inicial a través del capacitor q_0/C , dividido entre la resistencia del circuito. Conforme el tiempo transcurre, la corriente decae gradualmente hasta cero.

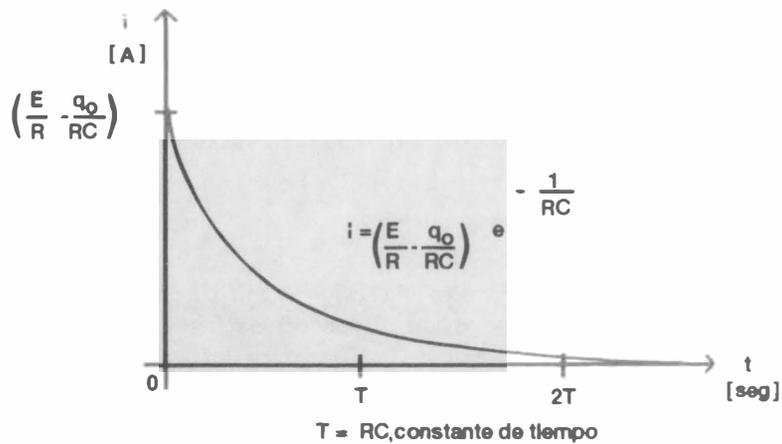


Figura III.5 Corriente generada en un circuito RC serie.

El observar el término exponencial de la ecuación E.III.10 nos revela que el valor de la constante de tiempo de un circuito RC serie es

$$\tau = RC \text{ seg} \quad \text{E.III.11}$$

Se puede decir entonces que *la solución completa a la corriente de un circuito RC serie simple consiste únicamente de un término transitorio ya que el capacitor se comporta como un circuito abierto conforme pasa el tiempo, siendo la respuesta forzada igual a cero.*

EJEMPLO III.2.

En el circuito de la figura III.6 el capacitor fue inicialmente cargado de modo que presenta un voltaje de 40 Voltios en sus terminales. Para los valores de los

parámetros que se indican, encuentre la expresión para la corriente que fluye por la malla después de que el interruptor ha sido cerrado. También determine la energía inicial almacenada en el capacitor.

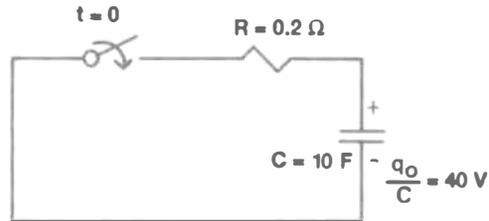


Figura III.6 Circuito del ejemplo III.2.

Solución:

Si en dirección de las manecillas del reloj, aplicamos a la corriente la ley de voltajes de Kirchhoff, después de que el interruptor S ha sido cerrado, se obtiene:

$$0 = Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

con la transformada de Laplace,

$$0 = RI(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{I(s)}{s} + \frac{q_0}{s} \right\}$$

o bien

$$-\frac{q_0}{Cs} = I(s) \left\{ R + \frac{1}{sC} \right\}$$

Del planteamiento del problema sabemos que $q_0/C = 40$ v, entonces,

$$I(s) = \frac{-40}{s \left\{ R + \frac{1}{sC} \right\}} = -\frac{40}{R} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right\}$$

Finalmente regresando al dominio del tiempo, se encuentra que

$$i(t) = -\frac{40}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -2 \times 10^{-4} e^{-\frac{t}{2}} \text{ Amperios}$$

El signo negativo en la respuesta nos indica que la corriente fluye realmente en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir, opuesto a como se supuso en un principio.

Por otro lado, la cantidad de energía disipada en el resistor es

$$\begin{aligned} W_{dis} &= \int_0^{\infty} i^2(t)R dt = \int_0^{\infty} (4 \times 10^{-8})2 \times 10^5 e^{-t} dt \\ &= -8 \times 10^{-3} [e^{-t}]_0^{\infty} = 8 \times 10^{-3} \text{ Julios} \end{aligned}$$

y la cantidad de energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor se encuentra mediante la ecuación

$$W_a = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} 10 - 5(40)^2 = 8 \times 10^{-3} \text{ Julios}$$

Una comparación de las dos últimas formulaciones nos muestra que toda la energía almacenada en el capacitor se disipa en forma de calor a través del resistor, una vez que el interruptor se cierra.

III.3 Respuesta a excitación tipo impulso

Una solución directa de la respuesta impulso de un circuito RC serie puede obtenerse de la transformada de Laplace de su ecuación diferencial, es decir,

$$V = RI(s) + \frac{1}{C} \left\{ \frac{I(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} i dt}{s} \right\}$$

Si la condición inicial del capacitor fuese cero, esta expresión se convierte en:

$$V \left\{ R + \frac{1}{sC} \right\} I(s) = \frac{R}{s} \left\{ s + \frac{1}{RC} \right\} I(s)$$

o bien

$$I(s) = \frac{V}{R} \left\{ \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = \frac{V}{R} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} \right\}$$

donde la expresión de la derecha es la solución expresada como una fracción propia (después de haber aplicado el método de fracciones parciales), de aquí que usando tablas de transformadas inversas, se puede encontrar la respuesta $i(t)$:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} I(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V}{R} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{V}{R} \frac{1}{\tau s + \frac{1}{\tau}} \right\}$$

donde $\tau = RC$.

La corriente queda como

$$i(t) = \frac{V}{R} \delta(t) - \frac{V}{R\tau} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

E.III.12

o bien

$$i(t) = Q\delta(t) - R \frac{V}{R\tau} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \tag{E.III.13}$$

donde $\tau = RC$ seg.

Si se observa la ecuación E.III.13 notará que la corriente total consiste de un impulso de corriente de magnitud $Q = V/R$, el cual ocurre en el intervalo de tiempo entre 0^- y 0^+ , y de un segundo componente $-(Q/\tau)e^{-t/\tau}$, el cual existe para todo tiempo después de 0^- . Es muy instructivo notar la consistencia de este resultado con el que se obtendría al resolver la ecuación diferencial.

III.4 Respuesta total de una red RL a excitación tipo senoidal

Se determinará ahora la respuesta de un circuito RL serie cuando se aplica una entrada tipo senoidal. Sea el circuito de la figura III.7. Encontrar la solución total del circuito, para lo cual se deberá conocer tanto la parte natural como la forzada de la misma. Nótese que la fuente de voltaje variará su magnitud de manera cosenoidal.

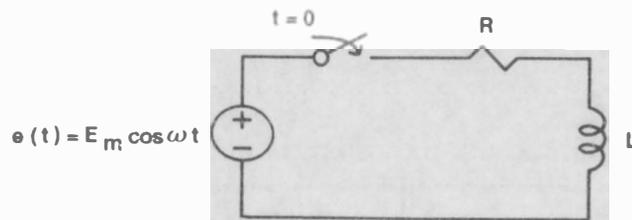


Figura III.7 Circuito RL serie con entrada tipo senoidal.

Cuando el interruptor se cierra, la ecuación diferencial del circuito es

$$[E_m \cos \omega t] u(t) = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Como el interruptor está inicialmente abierto, el valor inicial de la corriente a través del inductor es cero; con esto, y aplicando la transformada de Laplace, se tiene que

$$\frac{E_m s}{s^2 + \omega^2} = I(s)(R + sL)$$

De aquí se sigue que la solución en el dominio de la frecuencia es

$$I(s) = \frac{E_m}{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

Nótese que los polos o raíces del denominador, se pueden conocer fácilmente de la expresión de $I(s)$, por lo que se escribirá esta ecuación expandida en fracciones parciales:

$$I(s) = \frac{s(E_m/L)}{(s^2 + \omega^2)(s + \frac{R}{L})} = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} + \frac{K_2}{s + \frac{R}{L}}$$

Observe cómo la función cosenoidal de entrada es responsable de la presencia de polos complejos conjugados en la ecuación. Los coeficientes asociados a estos términos podrán ser también números complejos conjugados, hecho que se resalta al representarlos por K_1 y K_1^* .

Para conocer el valor de K_1 usemos el método usual:

$$K_1 = \left\{ (s - j\omega) \frac{s(E_m/L)}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + R/L)} \right\}_{s=j\omega}$$

$$K_1 = \frac{E_m}{L} \frac{j\omega}{j2\omega(j\omega - \frac{R}{L})} = \frac{E_m}{2} \frac{1}{Rj\omega L}$$

$$K_1 = \frac{E_m}{2} \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Como K_1^* debe ser su complejo conjugado, puede ser expresado como

$$K_1^* = \frac{E_m}{2} \frac{R + j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Para K_2 ,

$$K_2 = \left\{ \left(s + \frac{R}{L} \right) \frac{s \left(\frac{E_m}{L} \right)}{(s^2 + \omega^2)(s + R/L)} \right\}_{s=-\frac{R}{L}}$$

$$= \left\{ \frac{E_m}{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\}_{s=-\frac{R}{L}} = -\frac{E_m R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \theta$$

$$K_2 = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \times \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = -\frac{E_m R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \theta$$

donde θ se define, gracias al triángulo mostrado en la figura III.8, como $\tan^{-1}(\omega L/R)$.

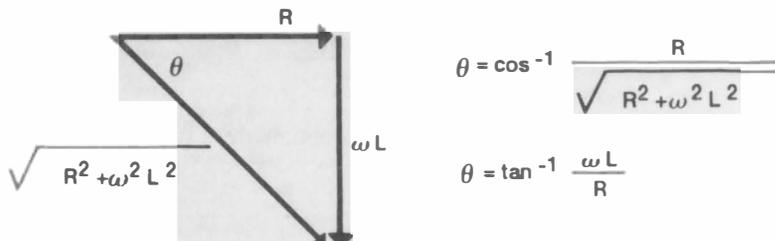


Figura III.8 Definición de θ para un circuito RL serie.

La introducción del término θ , y la manipulación algebraica que lleva a su definición tienen el propósito de expresar a la solución final en una forma más sencilla. De hecho, para llegar a una correcta solución del problema, se podría haber trabajado con K_2 de forma que no envolviera a la raíz.

Si se sustituyen los valores de las K 's en la ecuación de $I(s)$, se obtiene una expresión que puede ser transformada al tiempo con mucha facilidad:

$$I(s) = \frac{E_m}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} \left\{ (R - j\omega L) \frac{1}{s - j\omega} + (R + j\omega L) \frac{1}{s + j\omega} \right\} - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \theta \left\{ \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right\}$$

Cuya correspondiente en el tiempo es

$$i(t) = \frac{E_m/2}{R^2 + \omega^2 L^2} [(R - j\omega L)e^{j\omega t} + (R + j\omega L)e^{-j\omega t}] - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \theta (e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Al reordenar términos se obtiene,

$$i(t) = \frac{E_m/2}{R^2 + \omega^2 L^2} [R(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) + j\omega L(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})] - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \theta (e^{-\frac{Rt}{L}})$$

como sabemos que

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos \omega t \quad \text{y} \quad e^{-j\omega t} - e^{j\omega t} = -2j \sin \omega t$$

se puede escribir

$$i(t) = \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} [R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t] - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \theta (e^{-\frac{Rt}{L}}) \quad \text{E.III.14}$$

Debido a que la función cosenoidal está adelantada en 90° a la función senoidal, la cantidad entre paréntesis en la última ecuación se puede encontrar con la ayuda del triángulo de la figura III.8. Si la línea horizontal representa el coseno con magnitud R , entonces la línea vertical, la cual está desplazada 90° de la línea del coseno, representa la función seno con magnitud ωL . Claramente de aquí se deduce que la adición de ambos términos al cuadrado es la hipotenusa del triángulo, de valor $(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$ y de fase θ grados atrás de la línea horizontal que denota el coseno.

Basado en el razonamiento anterior, se sigue que

$$[R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t] = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cos(\omega t - \theta)$$

donde θ se definió en la figura III.8.

Nótese que el signo menos que precede a θ muestra que la hipotenusa, o bien el resultado, está por debajo de la línea horizontal o coseno.

Si se sustituye la fórmula anterior en la ecuación E.III.14, obtenemos la forma final de la corriente total que fluye por un circuito RL serie cuando se le aplica una entrada tipo senoidal, esto es

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left\{ \cos(\omega t - \theta) - e^{-\frac{R}{L}t} \cos \theta \right\} \quad \text{E.III.15}$$

cuya gráfica se muestra en la figura III.9.

Si revisamos la ecuación E.III.15 y la figura III.9, comprobamos que la solución completa se compone de una parte forzada y de una transitoria, siendo la primera de ellas representada por el primer término cosenoidal entre paréntesis, o sea,

i_s = respuesta de estado permanente o respuesta forzada

$$i_s = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta)$$

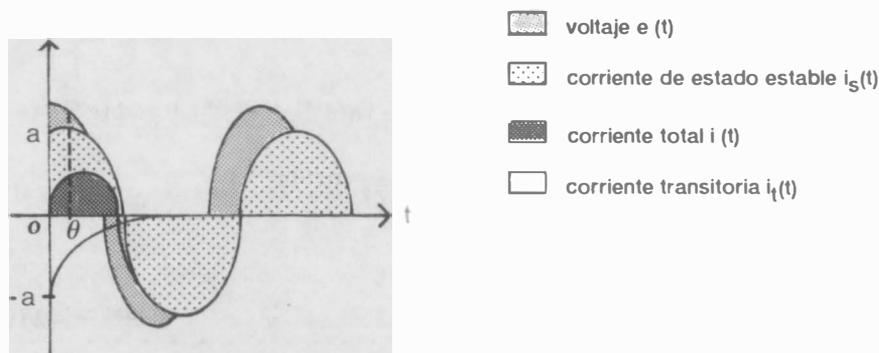


Figura III.9 Gráfica de la corriente que fluye por un circuito RL serie cuya excitación es una onda senoidal.

Debido a que se trabaja con sistemas lineales, la respuesta forzada tiene la misma forma que la excitación, es decir, es cosenoidal. Sin embargo, la respuesta difiere de ella en dos aspectos principales: su amplitud es modificada por el factor $1/(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$ y su argumento o fase se ve alterada por el ángulo $-\theta$.

En primer lugar la respuesta transitoria provee una corriente de magnitud igual y de sentido opuesto al valor instantáneo de la corriente de estado permanente, justo en el momento del cambio en el interruptor. Nótese que en la figura III.9 se asumió que el interruptor fue cerrado en el instante en que el voltaje tenía su valor positivo máximo y la respuesta forzada no es cero en ese instante, sino que tiene el valor “ a ”, y como las condiciones de frontera exigen que la corriente total en ese instante sea cero, la corriente transitoria debe tomar el valor “ $-a$ ”. Conforme el tiempo transcurre, la respuesta natural decae hacia cero a una tasa determinada por la constante de tiempo, siendo entonces la corriente total igual a la respuesta forzada.

III.5 Respuesta senoidal de estado estable

Al excitar un sistema cuyos polos se encuentran en el semiplano imaginario izquierdo con una onda senoidal, la parte forzada de la respuesta permanecerá, mientras que la parte natural se desvanecerá con el tiempo.

La figura III.10 muestra a manera de bloques la relación entre la entrada y la componente forzada de la salida:

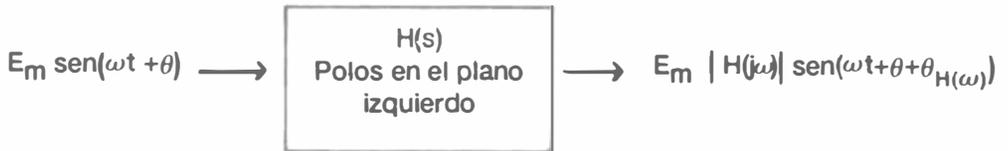


Figura III.10 Relación entre entrada y respuesta forzada de un sistema lineal excitado con una señal senoidal.

Para demostrar la anterior relación, suponga que la excitación tiene un valor pico E_m y un ángulo de fase θ , es decir,

$$E(t) = E_m \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

entonces, la respuesta sería

$$R(s) = H(s)E(s)$$

$$R(s) = H(s) \left\{ \frac{E_m(s \text{ sen } \theta + \omega \text{ cos } \theta)}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

$$R(s) = H(s) \left\{ \frac{E_m(s \text{ sen } \theta + \omega \text{ cos } \theta)}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \right\}$$

donde:

- $E(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $E(t)$,
- $H(s)$ es la función de transferencia, y
- $R(s)$ es la respuesta del sistema.

Como únicamente nos interesa conocer la parte forzada de la respuesta, sólo se tomarán en cuenta los polos correspondientes a la función excitación, es decir, los polos ubicados en $\pm j\omega$:

$$R_f(s) = \frac{K}{s - j\omega} + \text{conjugado}$$

donde

$$K = (s - j\omega)R(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) \left\{ \frac{E_m(j\omega \text{ sen } \theta + \omega \text{ cos } \theta)}{2j\omega} \right\}$$

$$R_f(s) = E_m \frac{H(j\omega)}{2j} (\text{cos } \theta + j \text{ sen } \theta) \frac{1}{s - j\omega} + \text{conjugado}$$

$$R_f(s) = \left\{ E_m \frac{|H(j\omega)|}{2} e^{j[\theta + \theta_c(\omega) - \frac{\pi}{2}]} \right\} \frac{1}{s - j\omega} + \text{conjugado}$$

Nótese que

$|H(j\omega)|$ es la magnitud y
 $\theta_H(\omega)$ es el ángulo de $H(j\omega)$

obtenidos por las fórmulas

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re} H(j\omega)^2 + \operatorname{Im} H(j\omega)^2}$$

$$\theta_H(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im} H(j\omega)}{\operatorname{Re} H(j\omega)} \right\}$$

De este modo, la transformada inversa de Laplace de la respuesta forzada, es decir, $r_f(t)$ quedaría

$$r_f(t) = \left\{ E_m \frac{|H(j\omega)|}{2} e^{j(\theta + \theta_H(\omega) - \frac{\pi}{2})} \right\} e^{j\omega t} + \text{conjugado}$$

Sabiendo que la suma de un número imaginario más su complejo conjugado es igual a dos veces la parte real del mismo, el resultado anterior quedaría

$$r_f(t) = 2 \operatorname{Re} \left\{ E_m \frac{|H(j\omega)|}{2} e^{j\{\omega t + \theta + \theta_H(\omega) - \pi/2\}} \right\}$$

$$r_f(t) = E_m |H(j\omega)| \cos \left\{ \omega t + \theta + \theta_H(\omega) - \pi/2 \right\}$$

$$r_f(t) = E_m |H(j\omega)| \operatorname{sen} \omega t + \theta + \theta_H(\omega)$$

E.III.16

La ecuación E.III.16 muestra cómo opera la función de transferencia en la señal de entrada para producir la componente forzada de la respuesta:

$H(s)$ modifica la amplitud de la entrada $e(t)$ multiplicándola por su magnitud y le introduce un defasamiento de valor $\theta_H(j\omega)$.

Para poder conocer la magnitud y el defasamiento de la función de transferencia se evalúa en $s = j\omega$, o sea, en el valor del polo de la función excitación.

III.6 Magnitud y fase de la función de transferencia

La respuesta senoidal de estado estable, o respuesta forzada, depende en gran medida del valor de la función de transferencia evaluada en la frecuencia de excitación. Esto quiere decir que al ir cambiando la frecuencia de la señal de entrada, la magnitud y la fase de la función de transferencia también se modifican, implicando que la respuesta de estado estable sea distinta.

Los cambios que la función de transferencia introduce sobre la respuesta forzada, debido a las variaciones en la frecuencia de la entrada, se pueden observar si se grafica su magnitud y su fase contra la frecuencia. Estas curvas, una para la magnitud y otra para la fase, son suficientes para caracterizar la respuesta senoidal de estado estable del sistema, o dicho de otra forma, la respuesta en frecuencia del sistema.

EJEMPLO III.3.

Grafique la respuesta en frecuencia de la siguiente red:

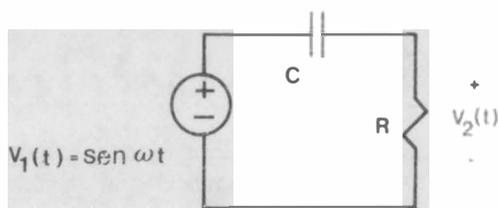


Figura III.11 Red del ejemplo III.3.

Solución:

La función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{CR}}$$

Al evaluar s en $s = j\omega$

$$H(s = j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{CR}}$$

Su magnitud y fase son, respectivamente:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{C^2R^2}}}$$

$$\theta_H(\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega CR) = \frac{\pi}{2} - \theta_p$$

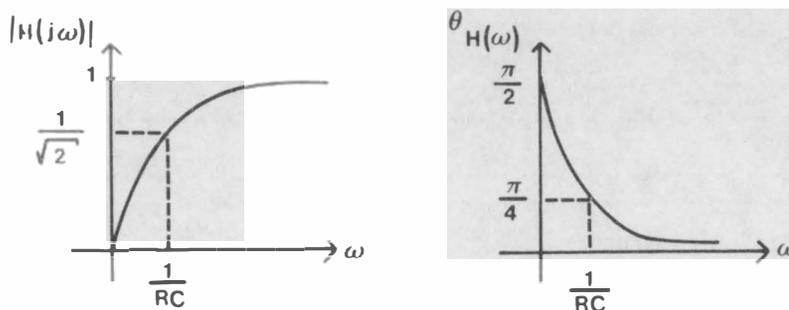


Figura III.12 Gráficas de magnitud y fase de la función de transferencia de un circuito RC serie excitado con una onda senoidal.

De las gráficas obtenidas para este ejemplo, se observa que el sistema discrimina las bajas frecuencias, atenuándolas, mientras que para frecuencias mayores a $1/RC$, la entrada y la salida tienen prácticamente la misma amplitud.

III.7 Condiciones iniciales en una red.

El método que a continuación se describe permite tratar a un elemento almacenador de energía, el cual tiene una condición inicial, como si fuese un elemento desenergizado. Para ello, la condición inicial será reemplazada por una fuente de voltaje o corriente de valor adecuado, la cual establecerá el estado inicial del elemento almacenador de energía.

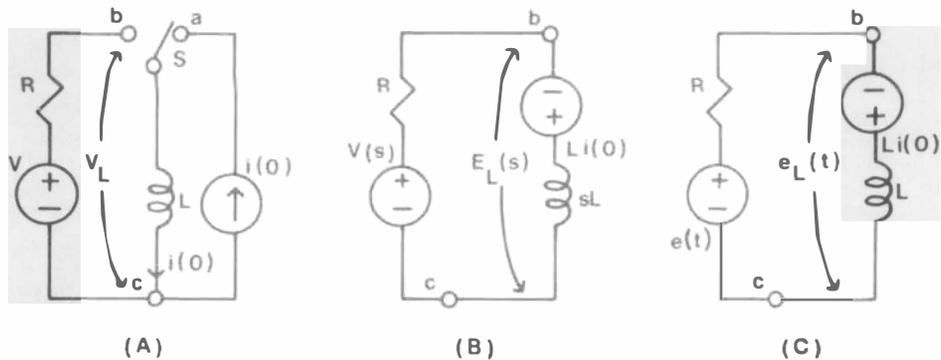


Figura III.13 Reemplazo de una corriente inicial en un inductor por una fuente de voltaje. (A) circuito original; (B) representación equivalente con el interruptor S en la posición b , y considerando a L desenergizada en el dominio de s ; (C) representación de (B) en el dominio del tiempo.

Considérese primero el caso de un inductor de valor L el cual posee una corriente inicial de valor $i(0)$. Un arreglo típico que nos permite generar esto se muestra en la figura III.13(A), donde el circuito a la derecha del inductor sirve únicamente para generar la $i(0)$ de la manera indicada. Cuando el interruptor S se mueve de la posición "a" hacia "b", el voltaje a través del inductor es:

$$V_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{E.III.17}$$

Entonces, por medio de la transformada de Laplace, se puede escribir:

$$V_L(s) = sLI(s) - Li(0)$$

en donde:

$I(s)$ es la transformada de $i(t)$ y

$V_L(s)$ es la transformada de $v_L(t)$.

Una interpretación de la ecuación anterior nos lleva a la configuración mostrada en la figura III.13 (B), donde se ha reemplazado un inductor con una corriente inicial $i(0)$ por

un circuito que comprende una fuente de voltaje de valor $Li(0)$ en serie con un inductor desenergizado de valor L . Más aún, la polaridad de la fuente de voltaje es opuesta a la caída de voltaje asociada con la inductancia, como se muestra en la figura. Conviene hacer notar que el circuito entre las terminales b y c de la fig.III.13 (A) equivale al del inciso (B) en el dominio de la frecuencia, y al del inciso (C) en el dominio del tiempo. Los valores de este último se obtienen al realizar la transformada inversa de Laplace; nótese que como $Li(0)$ es una constante, se asocia con la función impulso en el tiempo, la cual nos da idea de que en el tiempo $t = 0^+$, se origina instantáneamente el valor inicial de la corriente.

Ahora bien, el equivalente en fuente de corriente de la fig.III.13(B) se obtiene con una transformación a fuente de voltaje, dando por resultado el circuito de la fig.III.14(A). Este equivalente se sigue de la ecuación E.III.16 sólo si se resuelve para $I(s)$, es decir,

$$I(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$$

La representación correspondiente en el dominio del tiempo viene de una transformación inversa de Laplace término a término de la ecuación anterior, de donde se obtiene:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V_L dt + i(0)u(t)$$

Obsérvese que para el circuito de fuente de corriente, la condición inicial en el dominio del tiempo toma la forma de una fuente escalón, en contraste con la función impulso asociada a la fuente de voltaje.

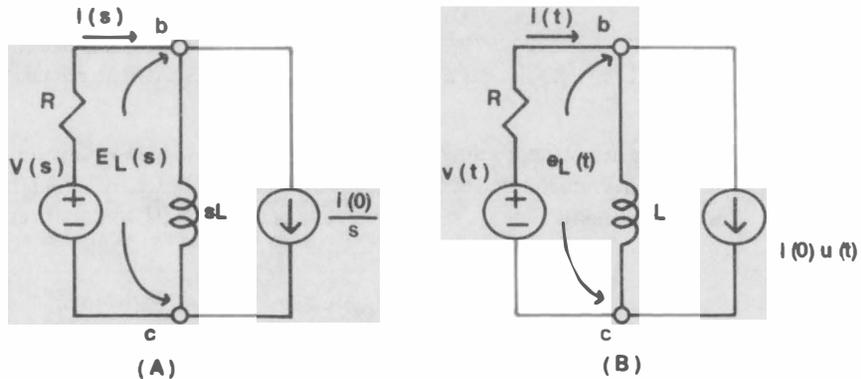


Figura III.14 Reemplazo de una corriente inicial en un inductor por una fuente de corriente. (A) Representación en el dominio de s con el inductor desenergizado; (B) el equivalente en el dominio del tiempo.

En el caso de un capacitor como elemento almacenador de energía la relación en el tiempo que representa la situación de la figura III.15(A) es

$$V_c = \frac{1}{C} \int i dt$$

que en el dominio de s se expresa como

$$V_c(s) = \frac{1}{C} \frac{I_c(s)}{s} + \frac{V_c(0)}{s} \quad \text{E.III.18}$$

representado en el circuito de la fig.III.15(B).

Obsérvese que para un capacitor, la polaridad de la fuente de voltaje es la misma que se asocia con la caída de voltaje generada en el elemento. Recuérdese también que el circuito equivalente en el dominio del tiempo surge de realizar la transformada inversa de Laplace de la última ecuación.

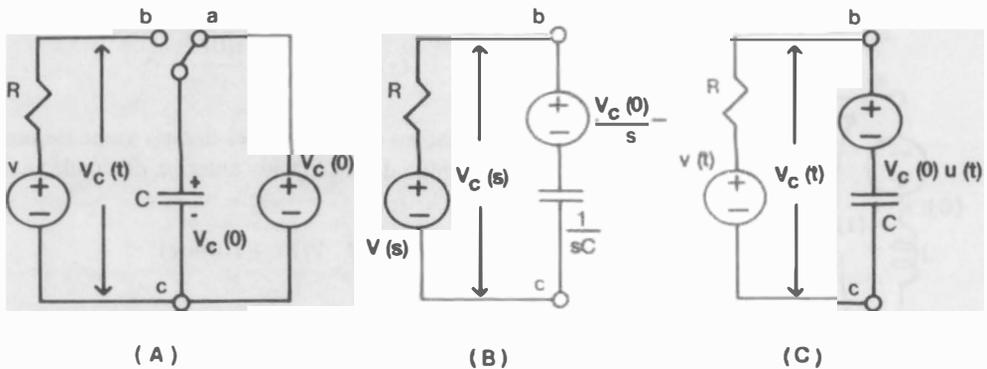


Figura III.15 Reemplazo de un voltaje inicial en un capacitor por una fuente de voltaje. (A) circuito que establece la condición inicial; (B) equivalente en el dominio de s con C desenergizado; (C) la versión correspondiente en el dominio del tiempo. Nótese que en (B) y (C) el capacitor está desenergizado.

La fuente de corriente equivalente para un capacitor con un voltaje inicial se obtiene mediante una transformación de fuentes, como se ilustra en la fig.III.16(A). Este resultado se puede encontrar analíticamente si se resuelve la ecuación E.III.18 para la corriente, es decir,

$$I(c)(s) = \frac{V_c(s)}{\frac{1}{sC}} - CV_c(0)$$

La expresión correspondiente en el dominio del tiempo se obtiene realizando la transformada inversa de Laplace, lo cual da como resultado

$$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} - CV_c(0)\delta(t)$$

La representación de esta ecuación se muestra en el circuito de la fig.III.16 (B). Note la necesidad de una fuente de corriente tipo impulso como condición inicial para reemplazar el voltaje inicial en el capacitor cuando se hace la formulación en el dominio del tiempo.

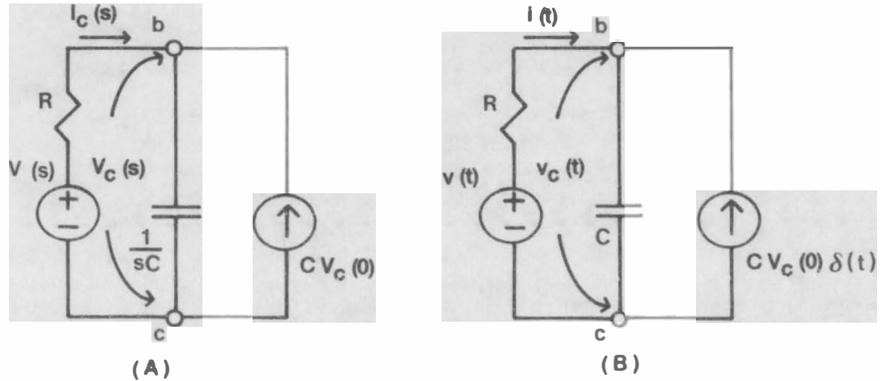


Figura III.16 Reemplazo de un voltaje inicial en un capacitor por una fuente de corriente. (A) Descripción en el dominio de s con C desenergizado; (B) el arreglo correspondiente en el dominio del tiempo.

EJEMPLO III.4.

Tomando en cuenta las condiciones iniciales de la red del ejemplo III.1, obtener la solución para la corriente en el circuito RL después de que el interruptor ha sido cerrado.

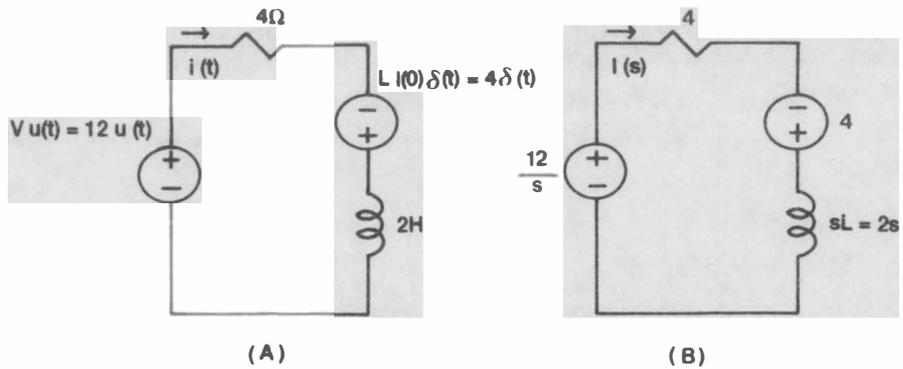


Figura III.17 Circuitos para el ejemplo III.4.

Solución:

Antes de que el interruptor se cierre, se establece una corriente inicial de dos Amperes en el inductor, esto es, $i(0) = 2$ Amperios. Una vez cerrado el interruptor, el circuito resultante es como el que se muestra en la fig.III.17(A). Nótese que se escogió un circuito de fuente de voltaje. La solución en el dominio de s puede ser obtenida aplicando teoría de circuitos a la fig.III.17(B). De este modo, por ley de voltajes en una malla, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{12}{s} &= 4I(s) + 2sI(s) - 4 \\ I(s) &= \frac{2(s+3)}{s(s+2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+2} \\ K_0 &= \left\{ \frac{2(s+3)}{s+2} \right\}_{s=0} = 3 \\ K_1 &= \left\{ \frac{2(s+3)}{s} \right\}_{s=-2} = -1 \\ I(s) &= \frac{3}{s} - \frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

que mediante la aplicación de la transformada inversa de Laplace, nos da como resultado final,

$$i(t) = (3 - e^{-2t})u(t) \text{ Amperios}$$

EJEMPLO III.5.

En el circuito de la fig.III.18 (A) el interruptor S ha estado abierto por una largo periodo de tiempo. Encuentre la solución completa para la corriente y el voltaje en el capacitor después de que el interruptor ha sido cerrado.

Solución:

El primer paso para conocer la solución es determinar el voltaje que reside en el capacitor antes de que el interruptor se cierre. Para ello obtenemos el equivalente de Thévenin visto desde las terminales *c* y *d*:

$$V_c(0^-) = \frac{6}{12}(12) = 6 \text{ Voltios} = V_c(0^+)$$

La fig.III.18 (B) muestra el arreglo cuando el interruptor ha sido cerrado, y en el inciso (C) se ilustra el mismo circuito reducido a un simple circuito serie gracias a la transformación del equivalente de Thévenin. Debido a que el capacitor posee un voltaje inicial, la rama de la derecha entre las terminales *c* y *d* será reemplazada por una fuente de voltaje de valor $V_c(0)u(t)$, seguido de un capacitor desenergizado, en el dominio del tiempo, como se muestra en la fig.III.18 (D). Su equivalente en el dominio de *s* se muestra en el inciso (E) de la misma figura.

Ahora ya se pueden aplicar los conocimientos de teoría de circuitos sin reparar más en la condición inicial del capacitor. De acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff, para el circuito del inciso (E) se tiene

$$\frac{8}{s} = 2I(s) + \frac{I(s)}{s} + \frac{6}{s}$$

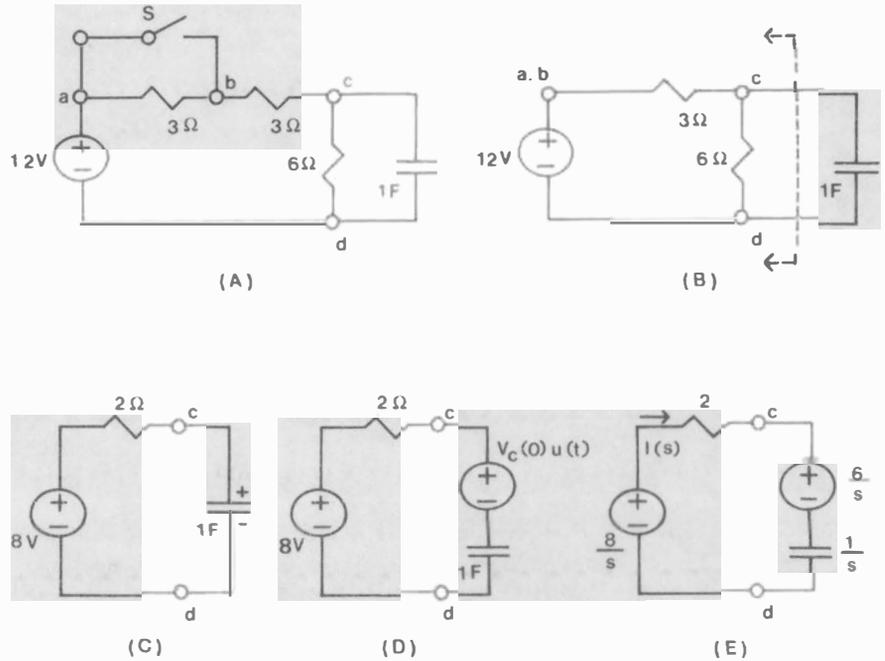


Figura III.18 Circuito del ejemplo III.5. (A) circuito original, el cual establece un voltaje inicial en C; (B) circuito del inciso (A) con S cerrado; (C) circuito resultante cuando la sección a la izquierda de las terminales c y d se reemplaza por su equivalente de Thévenin; (D) reemplazo del voltaje inicial en el capacitor por su condición inicial; (E) la versión en el dominio de s del inciso (D).

El valor de $I(s)$ es

$$I(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

que en el dominio del tiempo se transforma en

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} I(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \right\} = e^{-\frac{t}{2}}$$

Por lo tanto, la corriente del capacitor decae exponencialmente de un valor inicial de un Amperio, a razón de un factor de tiempo de dos seg., con lo cual en 10 seg. la corriente disminuirá a menos de 0.01 Amperios.

Para determinar el voltaje en el capacitor, es importante entender que las terminales c y d representan las terminales del capacitor en sí mismo, como se ve claramente en la fig.III.18(A). Esto es, si se está resolviendo para el circuito de la fig.III.18(E), el voltaje que se busca es justamente la caída existente entre esas mismas dos terminales, el cual se compone de dos partes: el voltaje en el capacitor desenergizado y el proporcionado por la condición inicial en forma de fuente de

voltaje; esto puede escribirse como:

$$V_c(s) = \frac{6}{s} + I(s)\frac{1}{s}$$

Si se inserta la expresión que se encontró anteriormente para $I(s)$ en la ecuación anterior, la solución en el dominio de s para el voltaje del capacitor es,

$$V_c(s) = \frac{6}{s} + \frac{1}{s(s + \frac{1}{2})} = \frac{6s + 4}{s(s + \frac{1}{2})}$$

Aplicando el método de expansión en fracciones parciales, seguido de una transformación inversa de Laplace término a término, la solución final en el tiempo es

$$V_c(t) = 8u(t) - 2e^{-\frac{1}{2}t} \text{ Voltios}$$

Comprobando para $t = 0$, se ve que efectivamente el voltaje en ese momento tiene el valor de 6V, lo cual coincide con la condición de frontera que previamente habíamos establecido. Por otro lado, cuando el tiempo transcurre, el voltaje representado por esta ecuación tiende a tomar el valor de 8V. Examinando la circuitería de la fig.III.18(A), con el interruptor cerrado y que se haya alcanzado un nuevo estado estable, el resultado también es congruente. El inciso (C) de la misma figura hace este hecho aún más obvio.

Para finalizar este capítulo y con el objetivo de reafirmar los conocimientos sobre los métodos aquí propuestos, a continuación se muestran algunos ejemplos de circuitos de primer orden en donde las condiciones iniciales de los elementos almacenadores de energía no son cero.

EJEMPLO III.6.

Para el circuito mostrado en la fig.III.15.

- Determine la corriente en la inductancia cuando el interruptor S está abierto, asumiendo que el circuito se encuentra en estado estable.
- Encuentre la expresión completa para la corriente del inductor una vez que S se ha cerrado.
- Estime el tiempo que le tomará a la respuesta natural o transitoria disminuir a menos del 1% del valor que tenía cuando se dio el cambio en el interruptor.

Solución:

- Será útil para encontrar la solución de este problema reemplazar la porción de la fig.III.19(A) colocada a la izquierda de las terminales a y b por su equivalente de

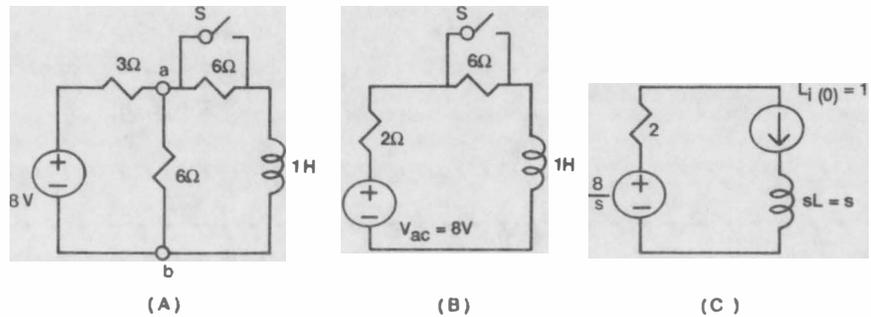


Figura III.19 Circuito del ejemplo III.6. (A) circuito original; (B) equivalente de Thévenin visto a la izquierda de *ab*; (C) representación de (B) en forma operacional con *S* cerrado y considerando la corriente inicial en el inductor.

Thévenin. El resultado se muestra en el inciso (B) de la misma figura. Para este último circuito, la corriente del inductor, en estado estable con *S* abierto, es

$$i_L = \frac{8 \text{ Voltios}}{8 \Omega} = 1 \text{ Amperios}$$

b. un Amperio es el valor de la corriente que existe cuando *S* se cierra, removiendo la resistencia de seis ohms del circuito de la fig. III.15(b); de este circuito sabemos que cuando el sistema llegue a estar nuevamente en estado estable, la corriente asumirá el valor de $i_{SS} = (8/2)A = 4$ Amperios. Es decir, después de un cierto tiempo, la parte transitoria decaerá haciendo que la corriente del inductor se incremente de uno a cuatro Amperios; por supuesto, esto no ocurrirá instantáneamente. El cambio será suave gracias a la acción de la respuesta natural, la cual desaparecerá lentamente conforme transcurre el tiempo.

La fig. III.19(C) muestra la forma como queda el circuito una vez que se cierra el interruptor, tomando en cuenta la corriente inicial de 1 Amperio. Observe que la condición inicial reemplaza el efecto de dicha corriente por lo cual se puede tratar a la inductancia como si estuviese desenergizada. Con la ley de voltajes de Kirchhoff, se puede expresar la corriente de malla en el dominio de *s* como

$$\frac{8}{s} + 1 = (2 + s)I(s)$$

o bien

$$I(s) = \frac{8 + s}{s(s + 2)}$$

La solución correspondiente en el dominio del tiempo para la corriente del inductor, la encontraremos haciendo una expansión en fracciones parciales, como se muestra a continuación:

$$I(s) = \frac{s + 8}{s(s + 2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s + 2}$$

donde:

$$K_0 = \left\{ \frac{S+8}{s+2} \right\}_{s=0} = 4$$

y

$$K_1 = \left\{ \frac{s+8}{s} \right\}_{s=-2} = -3$$

Si se sustituyen estos valores, se tiene

$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{3}{s+2}$$

por lo tanto,

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1} I(s) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s+2} \right\} = 4 - 3e^{-2t} \text{ Amperios}$$

c. El resultado mostrado en la última ecuación, nos deja ver que el circuito presenta una constante de tiempo de 0.5 seg. Como sabemos que el tiempo necesario para que el valor decrezca en 99% es de cinco constantes de tiempo, se puede decir que

$$t_s = 5t = 5(0.5 \text{ seg}) = 2.5 \text{ seg}$$

EJEMPLO III.7.

Para el circuito que se muestra en la fig.III.20(A),

- Encuentre el voltaje en el capacitor cuando S está abierto y el circuito se asume en estado estable.
- Determine la solución completa para la corriente del capacitor después de que S ha sido cerrado.
- Obtenga la expresión total para el voltaje del capacitor después de cerrado el interruptor.

Solución:

- Cuando S está abierto, el voltaje en el capacitor es el mismo voltaje que cae en la resistencia de 2 Ohms, según se muestra en la fig.III.20(B), debido a que para fuentes de corriente directa el capacitor se comporta como un circuito abierto, una vez que se ha llegado al estado estable.

Como el voltaje entre a y c es 9 Voltios, el voltaje total que cae en el capacitor es

$$v_c = (9 \text{ Voltios})(2/6) = 3 \text{ Voltios}$$

Este voltaje es la condición inicial de la expresión que se obtenga para el inciso c., una vez que S haya sido cerrado.

b. Cuando se cierra S , el circuito de la fig.III.20(A) se convierte en el mostrado en la parte (C) de la misma figura. Si se reemplaza la parte izquierda de las terminales b y c por su equivalente de Thévenin, se obtiene la configuración del inciso (D) de la figura. Finalmente, en la parte (E) de la figura mostramos la versión operacional de la parte (D), incluyendo el uso de una fuente de voltaje como condición inicial y cuyo valor se determinó anteriormente en el inciso a.

La ecuación que describe la corriente en el capacitor en el dominio de s , se obtiene escribiendo la ecuación de malla del circuito de la fig.III.20(E), aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$\frac{6}{s} - \frac{3}{s} = \left\{ 1 + \frac{1}{s} \right\} I(s)$$

o bien

$$I(s) = \frac{3}{s + 1}$$

por lo tanto,

$$i(t) = 3e^{-t} \text{ Amperios}$$

De acuerdo con este resultado, una vez que se cierra el interruptor, la corriente inicialmente tiene un valor de 3 Amperios, el cual disminuirá a menos del 1% (0.03 Amperios) en aproximadamente 5 seg.

c. El voltaje total en el capacitor es el voltaje que cae entre las terminales b y c , como se ve claramente en la fig.III.20 (C) y (D). Esto significa que se debe incluir la condición inicial en la evaluación del voltaje total del capacitor. Entonces, del circuito de la fig.III.20 (E), se puede decir que el voltaje total o bien el voltaje entre las terminales b y c , es

$$V_c(s) = \frac{6}{s} - I(s) = \frac{6}{s} - \frac{3}{s + 1} = \frac{3(s + 2)}{s(s + 1)}$$

que mediante una expansión en fracciones parciales nos lleva a

$$V_c(s) = \frac{6}{s} - \frac{3}{s + 1}$$

que en el dominio del tiempo es

$$V_c(t) = 6 - 3e^{-t} \text{ Voltios}$$

Esta ecuación nos indica que el valor de estado estable (respuesta forzada) del voltaje en el capacitor una vez que el interruptor ha sido cerrado, es de 6 V, lo cual puede verse fácilmente en el circuito de la figura III.20(D).

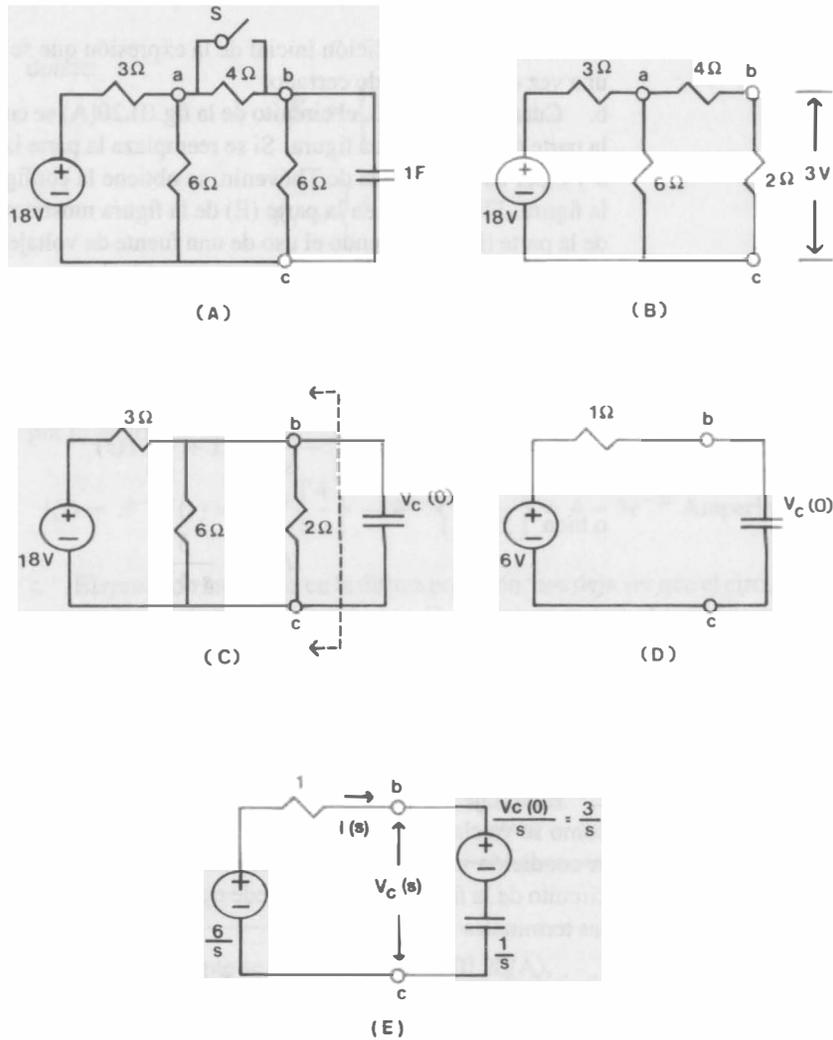
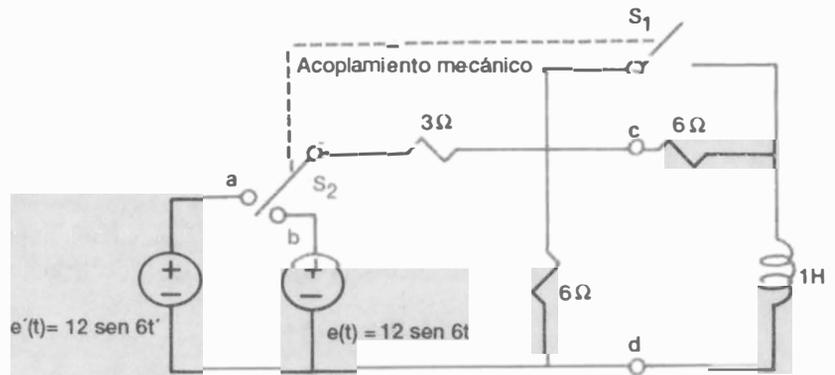


Figura III.20 Circuito del ejemplo III.7. (A) configuración original; (B) circuito para evaluación del voltaje en el capacitor con S abierto; (C) configuración con S cerrado; (D) equivalente de Thévenin del inciso (C); (E) forma operacional del inciso (D), la cual ya incluye una fuente de voltaje como condición inicial del capacitor.

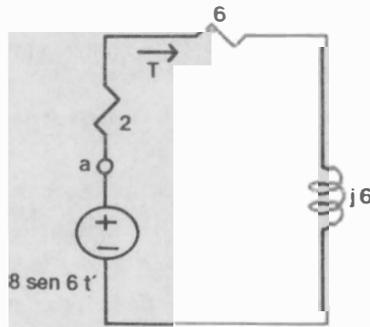
EJEMPLO III.8.

El circuito RL que se muestra en la figura III.21 tiene a S_1 inicialmente abierto, y a S_2 conectando a la fuente $e'(t)$ a la terminal a . Asumiendo que este circuito está en estado estable, los interruptores enganchados son operados a su otra posición (S_1 cerrado y S_2 en la terminal b) en $6t' = 66.9^\circ$. Encuentre la solución completa

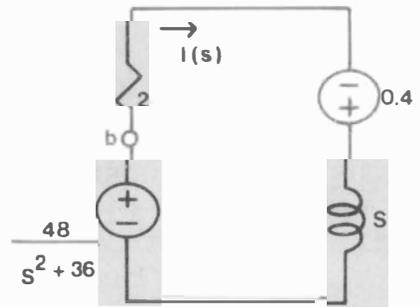
para la corriente del inductor después de que se ha dado este cambio de posición en los interruptores. Asuma que el tiempo cero del generador $e'(t)$ corresponde a $6t' = 66.9^\circ$ para la fuente principal $e(t)$.



(A)



(B)



(C)

Figura III.21 (A) Circuito original del ejemplo III.8; (B) circuito resultante cuando S_1 se cierra y S_2 está en la posición b , reemplazando la porción a la izquierda de c y d por su equivalente de Thévenin; (C) circuito del inciso (B) en el dominio de la frecuencia compleja. Nótese que existe una fuente extra debido a la corriente almacenada en la inductancia antes del momento del cambio de los interruptores.

Solución:

Lo primero que ha de hacerse es encontrar el valor instantáneo de la corriente senoidal de estado estable justo antes del cambio ocurrido en $6t' = 66.9^\circ$. La fig.III.21(B) muestra el circuito que se usará para hacer este cálculo; observe que la porción original del circuito que está a la izquierda de las terminales c y d se reemplazó por su equivalente de Thévenin. Es importante hacer notar que la impedancia del inductor para señales senoidales es $j\omega L$, la cual toma el valor de $j6$ en este caso específico.

Así, la expresión general para la amplitud de la corriente senoidal de estado estable correspondiente a la posición inicial de los interruptores, es

$$\bar{i} = \frac{8}{8 + j6} = 0.8 \angle -36.9^\circ$$

La expresión asociada en el dominio del tiempo es

$$i(t) = 0.8 \text{ sen}(6t' - 36.9^\circ) \text{ Amperios}$$

El valor inicial de la corriente del inductor depende del valor de $6t'$ en el instante en que ocurre el cambio de posición de los interruptores. Si usamos la información que nos proporciona el problema, la corriente inicial es

$$i(0^-) = i(0^+) = 0.8 \text{ sen}(66.9^\circ - 36.9^\circ) \text{ Amperios} = 0.4 \text{ Amperios}$$

A continuación se encontrará la expresión completa para la corriente del inductor mediante el análisis del circuito modificado, el cual corresponde a la nueva posición de los interruptores, y se muestra en la fig.III.21(C). Nótese que la corriente inicial ha sido sustituida por una condición inicial.

Si aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito de la fig.III.21(C), se tiene

$$\frac{48}{s^2 + 36} = 2I(s) - sI(s) - 0.4$$

que nos lleva a

$$I(s) = \frac{62.4 + 0.4s^2}{(s^2 + 36)(s + 2)}$$

De nuevo, usando el método de expansión en fracciones parciales para evitar trabajar con números complejos, se puede escribir

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{0.4s^2 + 62.4}{(s^2 + 36)(s + 2)} = \frac{As + B}{s^2 + 36} + \frac{C}{s + 2} \\ &= \frac{(A + Cs)s^2 + (2A + B)s + 2B + 36C}{(s^2 + 36)(s + 2)} \end{aligned}$$

Después de comparar los coeficientes de los términos cuadráticos en el numerador de la primera y última expresión, se llega al planteamiento de ecuaciones simultáneas:

$$A + C = 0.4$$

$$2A + B = 0$$

$$2B + 36C = 62.4$$

que nos lleva a

$$A = -1.2, \quad B = 2.4 \quad \text{y} \quad C = 1.6$$

que sustituidas en la ecuación de $I(s)$ nos da

$$I(s) = \frac{2.4}{s^2 + 36} - \frac{1.2s}{s^2 + 36} + \frac{1.6}{s + 2}$$

$$= \frac{2.4}{6} \left\{ \frac{6}{s^2 + 36} \right\} - 1.2 \left\{ \frac{s}{s^2 + 36} \right\} + 1.6 \left\{ \frac{1}{s + 2} \right\}$$

que corresponde a

$$i(t) = 0.4 \text{ sen } 6t - 1.2 \text{ cos } 6t + 1.6e^{-2t} \text{ Amperios}$$

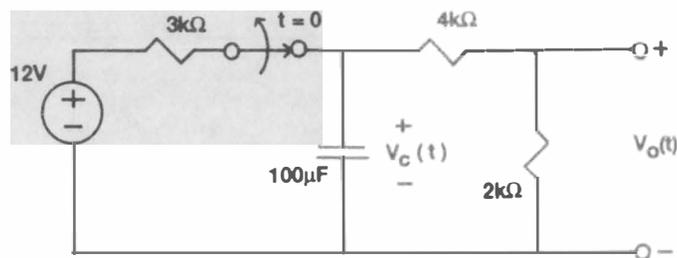
Al combinar los términos de seno y coseno, $i(t)$ queda representada como

$$i(t) = 1.26 \text{ sen}(6t - 71.6^\circ) + 1.6e^{-2t} \text{ Amperios}$$

donde el primer término del lado derecho de la ecuación nos da el nuevo valor que tomará la corriente cuando se alcance el estado estable.

III.8 Ejercicios propuestos. Sistemas de primer orden.

1. Para los problemas siguientes considere que cuando los interruptores cambian de posición, ya habían estado mucho tiempo en la posición anterior; es decir, asuma estado estable para la red en $t = 0$:
 - a. Encontrar el voltaje en el capacitor y en la resistencia indicada, para $t > 0$.

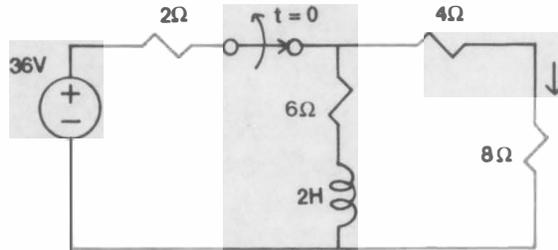


Solución:

$$V_c(t) = 8e^{-t/0.6} \text{ Voltios}$$

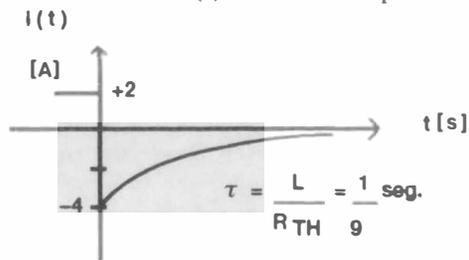
$$V_o(t) = \frac{8}{3}e^{-t/0.6} \text{ Voltios}$$

- b. Encuentre $i(t)$ para $t > 0$ y gráfiquela en el dominio del tiempo.

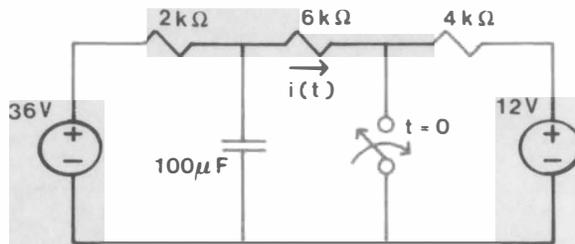


Solución:

$$i(t) = -4e^{-9t} \text{ Amperios}$$

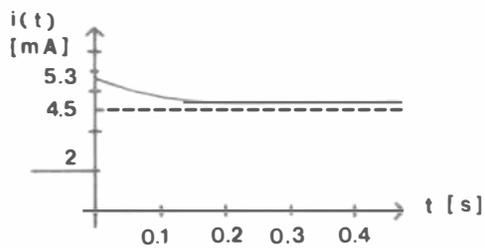


- c. Encuentre $i(t)$ para $t > 0$ y gráfiquela en el dominio del tiempo.

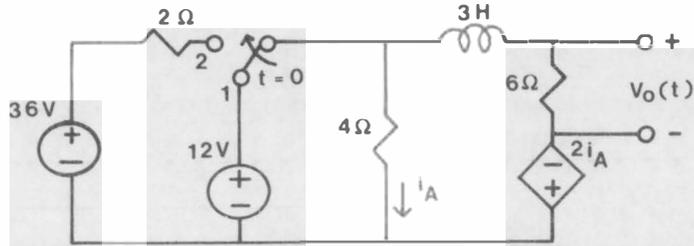


Solución:

$$i(t) = \left[\frac{36}{8} + \frac{5}{6}e^{-t/0.15} \right] \text{ m Amperios}$$



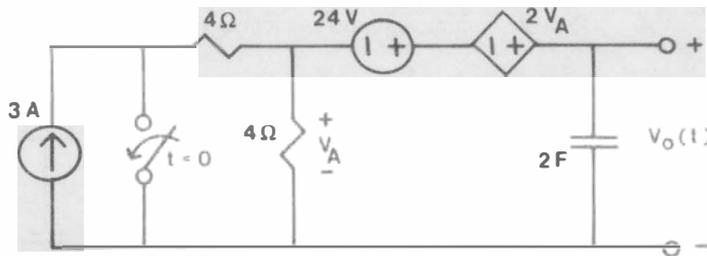
- d. Calcular $V_0(t)$ para $t > 0$.



Solución:

$$V_0(t) = [27 - 9e^{-2.66t}] \text{ Voltios}$$

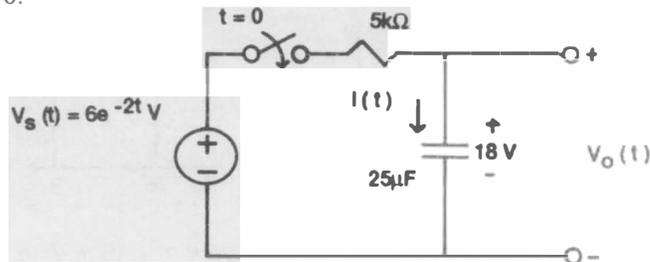
- e. Encontrar $V_0(t)$ para $t > 0$.



Solución:

$$V_0(t) = [24 + 36e^{-t/12}] \text{ Voltios}$$

2. En el circuito mostrado, el capacitor tiene una carga inicial de 18 Voltios, y se excita con una fuente exponencial como se indica, en $t = 0$. Determine $V_0(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$.

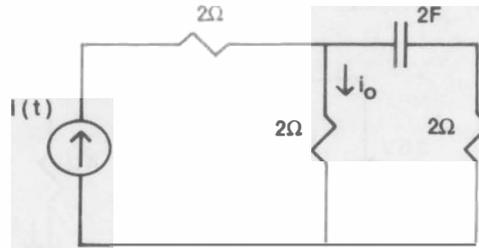


Solución:

$$V_0(t) = [8e^{-27} - 26e^{-8t}] \text{ Voltios}$$

$$i(t) = [-0.4e^{-2t} + 5.2e^{-8t}] \text{ m Amperios}$$

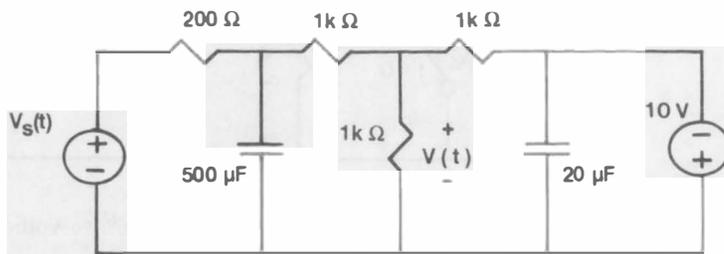
3. El circuito siguiente es excitado por una fuente de corriente tipo pulso, de amplitud igual a 6 Amperes y ancho de 4.5 s. Sabiendo que el capacitor está descargado para $t = 0$, determine $i_0(t)$ para $t > 0$.



Solución:

$$i(t) = \begin{cases} 6 - 3e^{-t/8} \text{ Amperios} & \forall t \in [0, 4.5] \text{ seg} \\ 1.29e^{-(t-4.5)/8} \text{ Amperios} & \forall t > 4.5 \text{ seg} \end{cases}$$

4. Para el siguiente circuito encuentre $V(t)$ para $t > 0$, si:

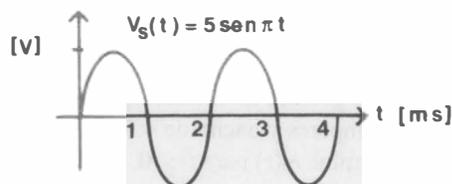


a.



b. $V_s(t) = 10 \text{ V}$

c.



Solución:

$$\text{a. } V(t) = \frac{25}{17} \left[(1 - e^{-11.3t})u(t) - (1 - e^{-11.3(t-1)})u(t-1) + (1 - e^{-11.3(t-2)})u(t-2) - (1 - e^{-11.3(t-3)})u(t-3) + \dots \right] \text{ Voltios}$$

$$\text{b. } V(t) = \left[\frac{50}{17} (1 - e^{-11.3t})u(t) \right] \text{ Voltios}$$

$$\text{c. } V(t) = [0.38e^{-11.3t} - 0.38 \cos(\pi t) - 0.68 \operatorname{sen}(\pi t)]u(t) \text{ Voltios}$$

Capítulo 4

Redes de segundo orden

Sea un sistema de dos puertos:



Figura IV.1 Sistema de dos puertos.

tal que

$$R(s) = H(s)E(s)$$

donde:

$R(s)$ es la transformada de la respuesta del sistema,

$E(s)$ es la transformada de la excitación y

$H(s)$ es la función de transferencia.

La forma más general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden es la siguiente:

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad \text{E.IV.1}$$

donde los a_i y b_i dependen del valor de los elementos L , C y R de la red [3].

Ahora bien, los polos de la función $H(s)$ se obtienen de la ecuación

$$s^2 + b_1 s + b_0 = 0$$

donde:

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2} \quad \text{E.IV.2}$$

dando por resultado que los polos sean

$$p_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2} \quad \text{E.IV.3}$$
$$p_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}$$

con lo que

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad \text{E.IV.4}$$

Por otra parte, si se supone que se trata de un *sistema estable, lo cual implica que los polos deben estar en el semiplano imaginario izquierdo*, se tendrán tres posibles distribuciones de ellos. A saber:

1. Polos en el eje real negativo, diferentes entre sí.

$$p_1 = -\alpha_1 \quad \& \quad p_2 = -\alpha_2$$

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2)$$

2. Polos complejos conjugados.

$$p_1 = -\alpha + j\beta \quad \& \quad p_2 = -\alpha - j\beta$$

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

3. Polos en el eje real negativo, iguales.

$$p_1 = -\alpha \quad \& \quad p_2 = -\alpha$$

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^2}$$

A continuación se enuncia la manera como responde un sistema de segundo orden que es excitado por una función tipo escalón, con diferentes funciones de transferencia:

Forma general de $H(s)$	Condición coeficiente	Naturaleza de los polos	Forma general de la Respuesta	Tipo de Respuesta
$\frac{N(s)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$	$b_1^2 > 4b_0$	Reales negativos diferentes	$r(t) = k_0 + k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$	Sobreamortiguada
$\frac{N(s)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$b_1^2 < 4b_0$	Conjugados complejos	$r(t) = k_0 + k_1 e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t) + \phi$	Sobreamortiguada
$\frac{N(s)}{(s + \alpha)^2}$	$b_1^2 = 4b_0$	Reales negativos iguales	$r(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$	Críticamente amortiguada

Tabla IV.1 Respuesta de sistemas de segundo orden en función de los coeficientes de la ecuación característica.

IV.1 Respuesta a excitación tipo escalón

La figura IV.2 resume las posibles respuestas que se pueden esperar de un sistema de segundo orden a partir de su función de transferencia.

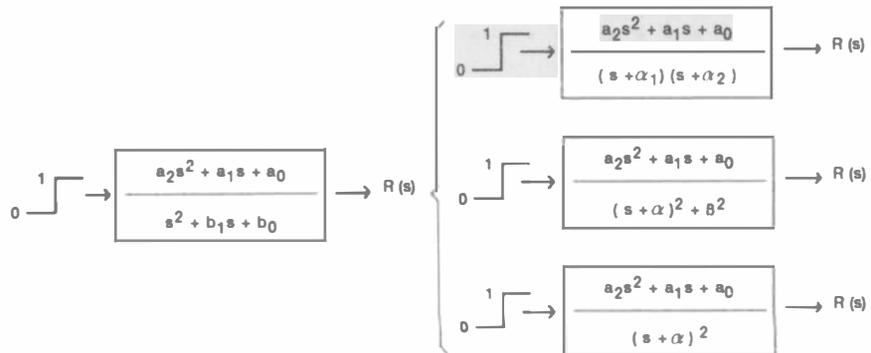


Figura IV.2 Respuesta de sistemas de segundo orden a excitación tipo escalón.

IV.1.1 Polos diferentes en el eje real negativo. Respuesta sobreamortiguada

Sea

$$H(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad \text{y} \quad E(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{s(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha_1} + \frac{C}{s + \alpha_2}$$

$$A = R(s)s \Big|_{s=0} = \frac{a_0}{\alpha_1\alpha_2}$$

$$B = R(s)(s + \alpha_1) \Big|_{s=-\alpha_1} = \frac{a_2\alpha_1^2 - a_1\alpha_1 + a_0}{(-\alpha_1 + \alpha_2)(-\alpha_1)}$$

$$C = R(s)(s + \alpha_2) \Big|_{s=-\alpha_2} = \frac{a_2\alpha_2^2 - a_1\alpha_2 + a_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)(-\alpha_2)}$$

entonces, la respuesta general en el dominio del tiempo será,

$$r(t) = \frac{a_0}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{a_2\alpha_1^2 - a_1\alpha_1 + a_0}{(-\alpha_1 + \alpha_2)(-\alpha_1)} e^{-\alpha_1 t} - \frac{a_2\alpha_2^2 - a_1\alpha_2 + a_0}{(\alpha_2 - \alpha_1)(-\alpha_2)} e^{-\alpha_2 t}; \quad (\alpha_2 \neq \alpha_1; t > 0)$$

De la ecuación anterior, y por facilidad se hace que

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_1\alpha_2 \\ a_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_2 &= 1 \end{aligned}$$

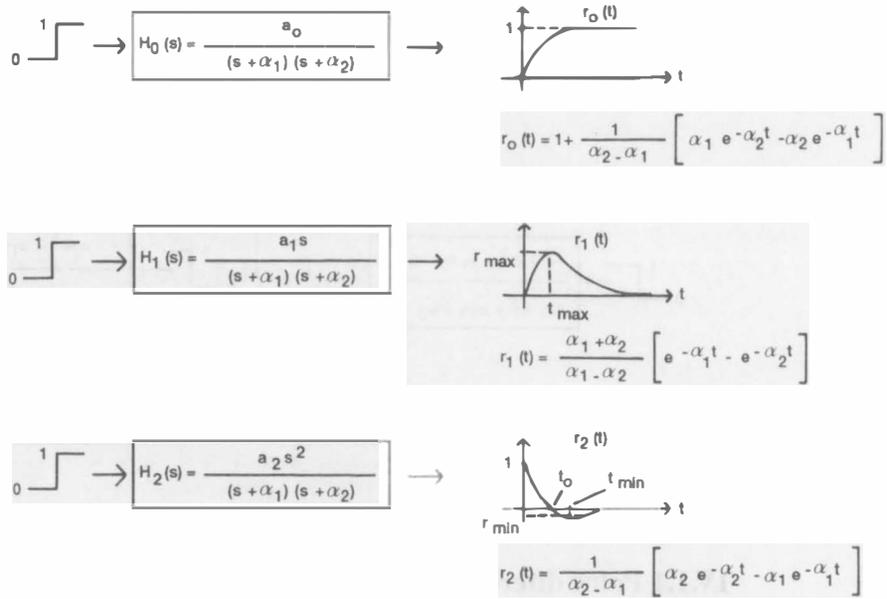


Tabla IV.2 Diferentes tipos de respuestas sobreamortiguadas.

se puede escribir la tabla IV.2, la cual trata de generalizar las diferentes respuestas que se esperan de un sistema sobreamortiguado ante una excitación de tipo escalón.

IV.1.2 Polos complejos conjugados. Respuesta subamortiguada

Sea

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad \text{y} \quad E(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha + j\beta)(s + \alpha - j\beta)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha + j\beta} + \frac{B^*}{s + \alpha - j\beta}$$

$$A = R(s)s|_{s=0} = \frac{a_0}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$B = R(s)(s + \alpha + j\beta)|_{s=-\alpha-j\beta}$$

$$= \frac{a_2(-\alpha - j\beta)^2 + a_1(-\alpha - j\beta) + a_0}{(-\alpha - j\beta)(-2j\beta)} \left\{ \frac{(\beta + j\alpha)}{(-\beta - j\alpha)} \right\}$$

$$B = -\frac{\beta[a_2\alpha^2 - a_2\beta^2 - a_1\alpha + a_0] - \alpha[2a_2\alpha\beta - a_1\beta]}{2\beta[\alpha^2 + \beta^2]} +$$

$$-j\frac{\alpha[a_2\alpha^2 - a_2\beta^2 - a_1\alpha + a_0] + \beta[2a_2\alpha\beta - a_1\beta]}{2\beta[\alpha^2 + \beta^2]} = C + jD$$

$$B^* = C - jD$$

$$R(s) = \frac{a_0}{(\alpha^2 + \beta^2)s} + \frac{C + jD}{s + \alpha + j\beta} + \frac{C - jD}{s + \alpha - j\beta}$$

y como

$$\frac{C + jD}{s + \alpha + j\beta} + \frac{C - jD}{s + \alpha - j\beta} = C \left\{ \frac{2(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\} + D \left\{ \frac{2\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\}$$

$$C = \frac{a_2\alpha^2\beta + a_2\beta^3 - a_0\beta}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{a_2\beta(\alpha^2 + \beta^2) - a_0\beta}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$D = -\frac{a_2\alpha\beta^2 + a_2\alpha^3 - a_1\alpha^2 - a_1\beta^2 + a_0\alpha}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{a_1}{2\beta} - \frac{a_0\alpha}{2(\alpha^2 + \beta^2)\beta} - \frac{a_2\alpha}{2\beta}$$

con lo cual

$$R(s) = \frac{a_0}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{1}{s} + \left\{ a_2 - \frac{a_0}{\alpha^2 + \beta^2} \right\} \left\{ \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\beta} \left\{ a_1 - \frac{a_0\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - a_2\alpha \right\} \left\{ \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \right\}$$

entonces, la respuesta en el tiempo será,

$$r(t) = \frac{a_0}{\alpha^2 + \beta^2} + \left\{ a_2 - \frac{a_0}{\alpha^2 + \beta^2} \right\} e^{-\alpha t} \cos \beta t + \frac{1}{\beta} \left\{ a_1 - \frac{a_0\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - a_2\alpha \right\} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

De la ecuación anterior, y haciendo por facilidad que

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_0 = \alpha^2 + \beta^2$$

se puede escribir la tabla IV.3, la cual trata de generalizar las diferentes respuestas que se esperan de un sistema subamortiguado ante una excitación de tipo escalón.

IV.1.3 Polos iguales en el eje real negativo. Respuesta críticamente amortiguada

Sea

$$H(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{(s + \alpha)^2} \quad \text{y} \quad E(s) = \frac{1}{s}$$

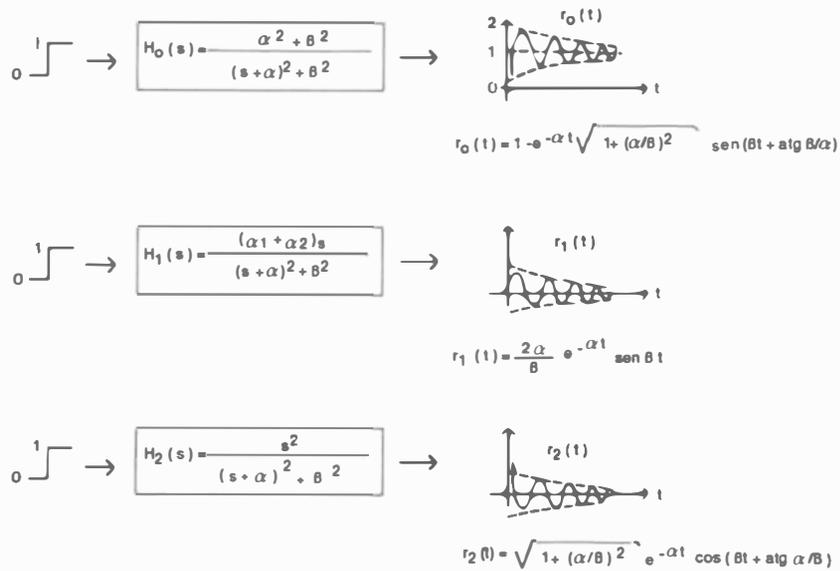


Tabla IV.3 Diferentes tipos de respuestas subamortiguadas.

$$R(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s(s + \alpha)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \alpha} + \frac{C}{(s + \alpha)^2}$$

$$A = R(s)s \Big|_{s=0} = \frac{a_0}{\alpha^2}$$

$$B = \frac{d(R(s)(s + \alpha)^2)}{ds} \Big|_{s=-\alpha} = \frac{s(2a_2 s + a_1) - (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}{s^2} \Big|_{s=-\alpha}$$

$$= \frac{a_2 s^2 - a_0}{s^2} \Big|_{s=-\alpha} = \frac{a_2 \alpha^2 - a_0}{\alpha^2}$$

$$C = R(s)(s + \alpha)^2 \Big|_{s=-\alpha} = \frac{a_2 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{-\alpha}$$

$$R(s) = \frac{a_0}{\alpha^2} \frac{1}{s} + \frac{a_2 \alpha^2 - a_0}{\alpha^2} \frac{1}{s + \alpha} - \frac{a_2 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha} \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

entonces, la respuesta en el tiempo será,

$$r(t) = \frac{a_0}{\alpha^2} + \frac{a_2 \alpha^2 - a_0}{\alpha^2} e^{-\alpha t} - \frac{a_2 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha} t e^{-\alpha t}$$

$$= \frac{a_2}{\alpha^2} + \left\{ a_2 - \frac{a_0}{\alpha^2} \right\} e^{-\alpha t} - (a_2\alpha - a_1 + a_0/\alpha) t e^{-\alpha t}$$

A partir de la ecuación anterior se puede prever que la gráfica de $r(t)$ no tendrá una morfología específica, además de que no es posible manipularla de la manera como se hizo en los casos anteriores, para poder esbozar su gráfica. Entonces, con el fin de tener una idea del comportamiento gráfico de esta respuesta, arbitrariamente se tomarán los siguientes valores para los coeficientes de $r(t)$, para simplificar la ecuación.

Sea

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_0 = \alpha^2$$

ahora ya se puede escribir la tabla IV.4, la cual nos brinda una idea de las diferentes respuestas que se esperan de un sistema críticamente amortiguado ante una excitación de tipo escalón.

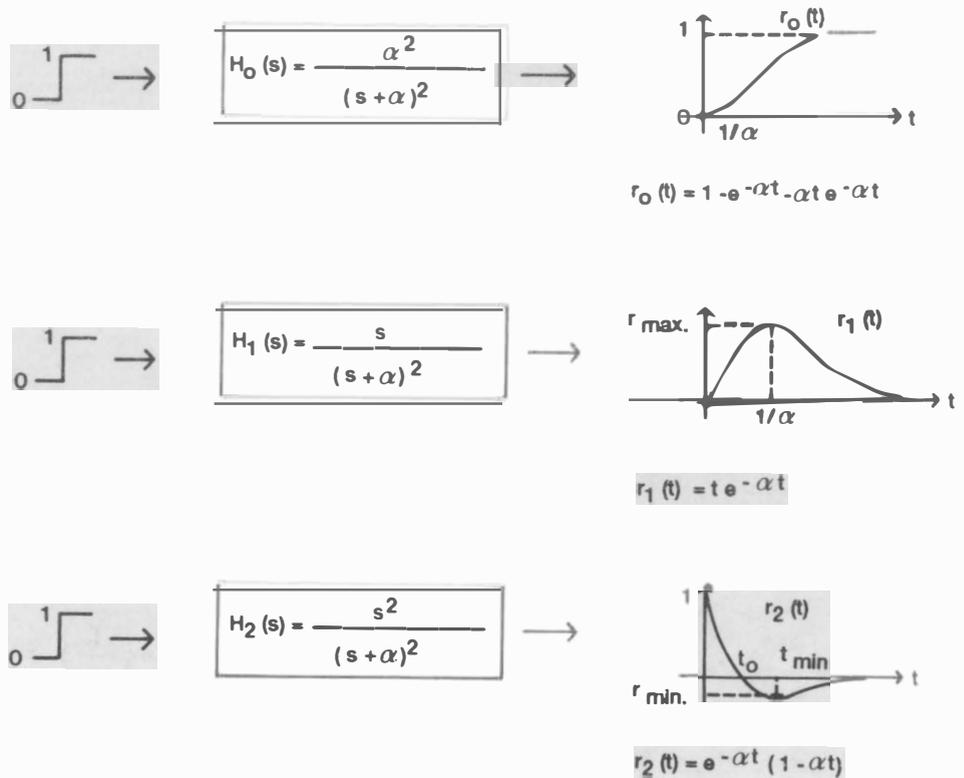


Tabla IV.4 Diferentes tipos de respuestas críticamente amortiguadas.

EJEMPLO IV.1. Circuito RLC paralelo.

Sea el circuito básico RLC en paralelo que se muestra en la fig.IV.3.

- Obtégase la expresión para $H(s)$, si $v_R(t)$ es la respuesta a observarse.
- Analícese el comportamiento del sistema basándose en la localización de los polos de la función de transferencia, para diferentes valores de R , L y C .

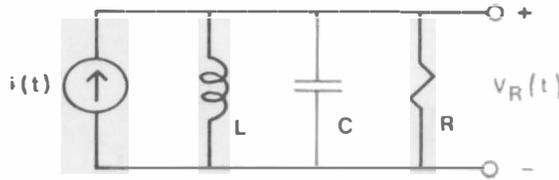


Figura IV.3 Circuito RLC en paralelo. Ejemplo IV.1.

Solución:

- Para conocer el valor de $v_R(t)$, aplicando la ley de Ohm y el método de divisor de corriente, se tiene:

$$\begin{aligned}
 V_R(s) &= R I_R(s) \\
 &= R \left\{ \frac{\frac{sL}{s^2CL + 1}}{\frac{sL}{s^2CL + 1} + R} \right\} I(s) \\
 &= \frac{sRL}{sL + s^2RLC + R} I(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{s^2 + \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} I(s) \\
 \frac{V_R(s)}{I(s)} &= H(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{s^2 + \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

- Nótese que la ecuación característica del sistema es:

$$s^2 + \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}$$

donde el valor de los polos se expresa como

$$p_{1,2}(s) = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\left\{ \frac{1}{RC} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{1}{LC} \right\}}}{2}$$

De la ecuación anterior, se observa que la localización en el plano imaginario de los polos depende del valor del radical, de modo que si

$$\left\{ \frac{1}{RC} \right\}^2 < \frac{4}{LC} \quad \text{es decir} \quad R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$v_R(t)$ será una respuesta de tipo subamortiguado, mientras que si

$$\left\{ \frac{1}{RC} \right\}^2 > \frac{4}{LC} \text{ es decir } R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$v_R(t)$ será una respuesta de tipo sobreamortiguado.

EJEMPLO IV.2. Circuito RLC serie

Sea el circuito básico RLC en serie que se muestra en la fig.IV.4.

- Obtégase la expresión para $H(s)$, si $v_C(t)$ es la respuesta a observarse.
- Analícese el comportamiento del sistema basándose en la localización de los polos de la función de transferencia, para diferentes valores de R , L y C .
- Determine $H'(s)$ si $v_R(t)$ es la respuesta a observarse. Comente las diferencias entre esta función de transferencia y la que obtuvo en el inciso a.

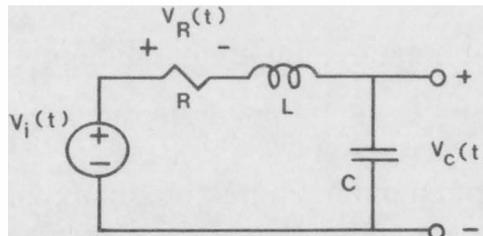


Figura IV.4 Circuito RLC en serie. Ejemplo IV.2.

Solución:

- Si la salida del sistema es vista sobre el capacitor, y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, se puede escribir:

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

- La ecuación característica del sistema es

$$s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}$$

en donde el valor de los polos se expresa como

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left\{ \frac{R}{L} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{1}{LC} \right\}}}{2}$$

De aquí se concluye que la localización en el plano imaginario de los polos del sistema depende del valor del radical, de manera análoga al ejemplo anterior. Por lo tanto, si

$$\left\{ \frac{R}{L} \right\}^2 > \frac{4}{LC} \quad \text{es decir} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

entonces la respuesta será de tipo subamortiguado, y como es de esperarse, si sucede lo contrario, a saber,

$$\left\{ \frac{R}{L} \right\}^2 < \frac{4}{LC} \quad \text{es decir} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

el sistema dará una respuesta de tipo sobreamortiguado.

c. Para una salida vista en el voltaje de la resistencia $v_R(t)$, la función de transferencia se plantea como:

$$\begin{aligned} H'(s) &= \frac{V_R(s)}{V_i(s)} \\ &= \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} \\ &= \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

Aquí vale la pena comentar que la ecuación característica del sistema es idéntica en ambas funciones de transferencia y, por lo tanto, los polos de la misma. De aquí que nuestras conclusiones respecto al comportamiento que presentará la respuesta $v_C(t)$, sean totalmente aplicables a la respuesta $v_R(t)$. Nótese que donde existe la diferencia es en el polinomio del numerador, por lo que aunque el circuito responderá de igual manera, las gráficas de $v_C(t)$ y $v_R(t)$ serán diferentes, pero seguirán las topologías descritas en las tablas IV.2 y IV.3.

EJEMPLO IV.3.

Para el circuito de la fig.IV.5,

- Determinar qué tipo de sistema es.
- Encontrar el valor de $v_C(t)$ y graficarlo.
- Encontrar el valor de $i_L(t)$ y graficarlo.

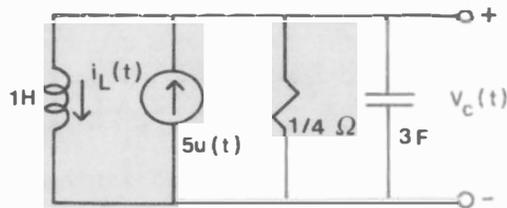


Figura IV.5 Circuito del ejemplo IV.3.

Solución:

a. Para conocer la manera como se comportará el sistema, se debe encontrar su ecuación característica, así como el valor de los polos. Para ello, escribamos la ecuación para el voltaje en el capacitor $V_C(s)$.

$$V_C(s) = \frac{5}{3} \left\{ \frac{1}{s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{3}} \right\}$$

Nótese que se eliminó el polo introducido por la señal de excitación, por lo que el voltaje del capacitor será una respuesta determinada únicamente por la red misma, es decir, solamente se tendrá la respuesta natural del sistema.

Ahora bien, la ecuación característica del circuito es

$$s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{3}$$

donde los polos de la ecuación son

$$p_1 = -\frac{1}{3}$$

$$p_2 = -1$$

que se localizan en el eje real negativo del plano imaginario, y como son diferentes, dan cabida a un comportamiento de tipo sobreamortiguado.

b. Para conocer el valor del voltaje del capacitor en función del tiempo, se aplicará el desarrollo en fracciones parciales para la ecuación de $V_C(s)$, y se encontrará la transformada inversa de Laplace del resultado obtenido:

$$V_C(s) = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{(s + \frac{1}{3})(s + 1)} \right\} = \frac{A}{s + \frac{1}{3}} + \frac{B}{s + 1}$$

$$A = \frac{5}{2}$$

$$B = -\frac{5}{2}$$

$$V_c(s) = \frac{5}{2} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{3}} - \frac{1}{s + 1} \right\}$$

$$V_c(t) = \frac{5}{2} \{ e^{-t/3} - e^{-t} \} u(t)$$

Con el fin de graficar la respuesta $v_C(t)$, es conveniente las constantes de tiempo de las dos exponenciales que la componen, es decir,

$$\tau_1 = 3 \text{ seg}$$

$$\tau_2 = 1 \text{ seg}$$

Obsérvese ahora que $v_C(t) = 0$ para $t = 0$ y para tiempos muy grandes (mayores que cinco veces la constante de tiempo τ_1), y como no puede ser una línea sobre el eje de las abscisas, forzosamente tiene que ser una función que contenga un máximo en un tiempo mayor que cero. Con el fin de encontrar ese máximo, se aplicará el criterio de la primera y segunda derivada:

$$v'_C(t) = \frac{5}{2} \left\{ -\frac{1}{3} \right\} e^{-t/3} - \frac{5}{2} \{-1\} e^{-t} = 0$$

$$\frac{1}{6} e^{-t/3} = \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$\frac{1}{3} = e^{-2/3 t}$$

$$t_{\max} = -\frac{3}{2} \ln \frac{1}{3}$$

$$t_{\max} = 1.65 \text{ seg}$$

$$v_{C \max} = 0.96$$

Como ya se sabe que en $t = 1.65$ s se tiene un máximo de valor 0.96 V, se puede esbozar la gráfica de $v_C(t)$ en función del tiempo, como se observa en la figura IV.6.

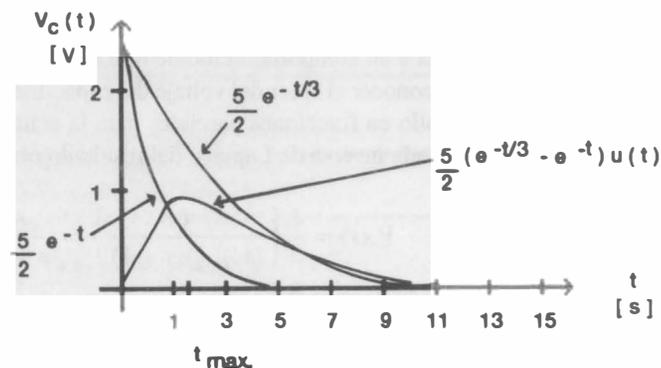


Figura IV.6 Gráfica de $v_C(t)$ para el ejemplo IV.3.

c. Finalmente nos falta conocer la expresión y gráfica para $i_L(t)$:

$$I_L(s) = \frac{5}{3} \frac{1}{s} \frac{1}{s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{3}}$$

Es importante hacer notar que, a diferencia de $V_C(s)$, $I_L(s)$ sí tiene componente forzada en su expresión, debido a la forma de la función de transferencia que resulta cuando la respuesta es la corriente en la inductancia. Entonces, $i_L(t)$ contendrá un término más que $v_C(t)$, ya que será la suma de dos términos exponenciales más un término constante, debido a que la excitación es una señal de tipo escalón.

Nótese también que, como en el ejemplo anterior, la ecuación característica que se tiene aquí es exactamente la misma, por lo tanto el comportamiento será sobreamortiguado y los valores de los polos serán los mismos.

Para conocer el valor de $i_L(t)$, se obtendrá $I_L(s)$ a partir del valor ya conocido de $V_C(s)$, aplicaremos fracciones parciales y finalmente, regresaremos al dominio del tiempo mediante la transformada inversa de Laplace:

$$i_L(t) = -\frac{15}{2}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{5}{2}e^{-t} + 5$$

Es interesante ver que las constantes de tiempo son las mismas que para el inciso anterior, ya que los polos, que son el inverso de ellas con signo contrario, son los mismos.

Asimismo, para conocer la gráfica de $i_L(t)$, observamos que para $t = 0$, $i_L(t) = 0$, y que para tiempos muy grandes (mayores a cinco veces la constante de tiempo τ_1), $i_L(t) = 5v$. Sin embargo, necesitamos más datos para poder dibujar la respuesta; encontremos pues los puntos críticos de la ecuación, usando el valor de su primera derivada igualada a cero. Es decir,

$$i'(t) = \frac{5}{2}(-1)e^{-t_m} - \frac{3}{2}(1/3)e^{-\frac{t_m}{3}} = 0$$

$$t_m = \frac{3}{2} \ln 5 = 2.41 \text{ seg}$$

Para saber si $t = 2.41$ seg es un máximo o un mínimo local de la función, aplicamos el criterio de la segunda derivada:

$$i''(t) = -\frac{5}{2}(-1)e^{-t} + \frac{1}{2}(1/3)e^{-\frac{t}{3}}$$

sustituyendo valores:

$$\frac{5}{2}(e^{-2.41}) - \frac{1}{6}(e^{-\frac{2.41}{3}}) > 0$$

por lo tanto t_m es un mínimo y el valor de $i_L(t_m)$ es 1.86 Amperios.

Con toda esta información, finalmente somos capaces de representar gráficamente a $i_L(t)$ en función del tiempo, como se observa en la fig.IV.7.

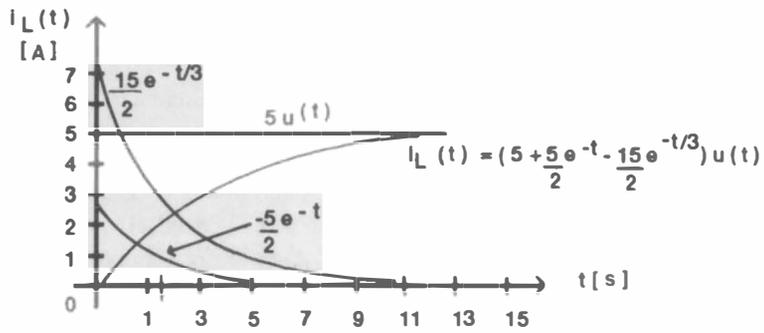


Figura IV.7 Gráfica de $i_L(t)$ para el ejemplo IV.3.

EJEMPLO IV.4.

Para el circuito de la fig.IV.8, encuentre el valor de $i(t)$, anotando qué tipo de comportamiento presenta el sistema.

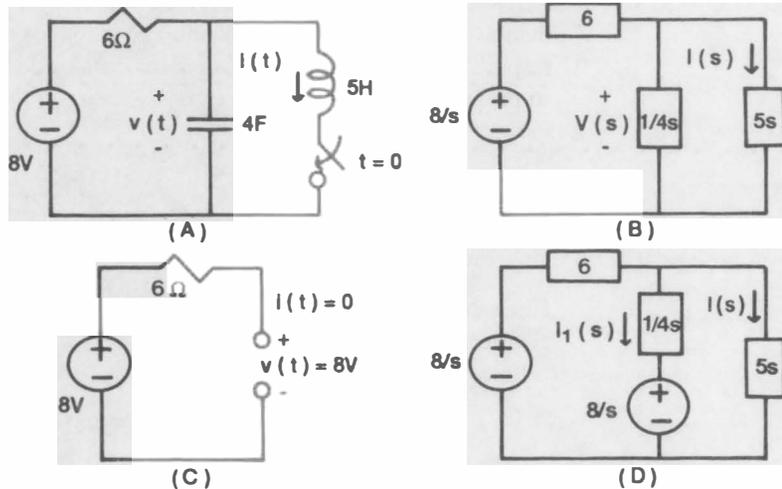


Figura IV.8 Circuito del ejemplo IV.4. (A) Circuito original; (B) Representación para tiempos mayores o iguales a cero, en el dominio de s ; (C) comportamiento para tiempos menores a cero, asumiendo estado estable; (D) equivalente final en el dominio de s , una vez que se han sustituido las condiciones iniciales por una fuente generadora de voltaje en serie con el capacitor.

Solución:

En la fig.IV.8(A) el circuito original muestra que el interruptor se cierra en un tiempo $t = 0$, punto en el que las condiciones del sistema cambian por completo. Esto implica que el análisis deberá dividirse en dos partes: qué sucede para $t < 0$ y qué valor tiene $i(t)$ para $t > 0$; para esta última parte tendremos que tomar en consideración la energía almacenada en los elementos durante el tiempo en que el interruptor estaba abierto.

Observando el circuito, se puede concluir que para $t < 0$, por la inductancia no circula corriente ya que el interruptor está abierto. Para el capacitor, asumiendo que se tiene estado estable del elemento, existe un circuito abierto en lugar de él. Esto nos lleva a concluir que el voltaje que se podría medir en la posición del capacitor es exactamente el voltaje de entrada, como se aprecia en la fig.IV.8(C). Entonces, escribimos las condiciones iniciales para $t < 0$:

$$V_C(t) = 8 \text{ Voltios}, \quad i(t) = 0$$

Ya que se tienen las condiciones iniciales del circuito, obtendremos la expresión para la corriente buscada $i(t)$, a partir de su transformada $I(s)$, como vemos en la fig.IV.8(B). Para esto, usaremos el método de reemplazo de condiciones iniciales por fuentes generadoras de condiciones iniciales, como se puede ver en la fig.IV.8(D). Nótese que el voltaje inicial en el capacitor, se reemplaza por una fuente en serie con el capacitor desenergizado; esta fuente se trata como si fuese una fuente externa de voltaje.

A partir del circuito de la fig.IV.8(D) se obtienen las ecuaciones de malla correspondientes, de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$-\frac{8}{s} + I_1 \left(6 + \frac{1}{4s} \right) - I(s) \frac{1}{4s} + \frac{8}{s} = 0$$

$$I(s) \left\{ \frac{1}{4s} + 5s \right\} - I_1(s) \frac{1}{4s} - \frac{8}{s} = 0$$

y desarrollamos para despejar $I(s)$,

$$I(s) = \frac{1.6s + 0.067}{s(s^2 + 0.042s + 0.05)}$$

la ecuación característica es

$$s^2 + 0.42s + 0.05$$

siendo el valor de los polos,

$$s_1 = -0.021 + 0.22j$$

$$s_2 = -0.021 - 0.22j$$

los cuales son números complejos conjugados; esto implica que el sistema responderá de manera subamortiguada a cualquier excitación tipo escalón que se aplique.

Para conocer el valor de $i(t)$, desarrollaremos la ecuación anterior en fracciones parciales y aplicaremos la transformada inversa de Laplace, para volver al dominio del tiempo. Es decir,

$$I(s) = \frac{A}{s + s_1} + \frac{B}{s + s_2} + \frac{C}{s}$$

$$A = \frac{0.0333 + 0.35j}{0.44j} = 0.78j + 0.81$$

$$B = -0.78j + 0.81$$

$$C = 1.34$$

$$i(t) = 1.34 + (0.78j + 0.81)e^{-0.21t}e^{0.22jt} + (-0.78j + 0.81)e^{-0.21t}e^{-0.22jt}$$

$$i(t) = 1.34 + 2.25e^{-0.021t} \cos(0.22t + 43.9)$$

IV.2 Propiedades de los sistemas de segundo orden

El estudio de los sistemas de segundo orden es importante debido a su simplicidad y utilidad. No solamente por sus propiedades matemáticas sino porque sus propiedades físicas que se obtienen fácilmente y se ajustan con sencillez; además sirven como bloques para la construcción de sistemas de orden mayor [2].

Como se enunció en la E.IV.1 la forma general de este tipo de sistemas es una función bicuadrática de la forma:

$$H(s) = \frac{a_2s^2 + a_1s + a_0}{s^2 + b_1s + b_0}$$

Las propiedades más útiles e interesantes de $H(s)$ ocurren cuando sus frecuencias críticas son complejas, siendo necesario sólo un par de variables para describirlas: ya sean (α, β) o bien (ω_0, Q) . En términos de estas variables el denominador de $H(s)$ se puede escribir como:

$$D(s) = (s + \alpha)^2 + \beta^2$$

$$D(s) = s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2$$

E.IV.5

donde:

$-\alpha$ representa la parte real de los polos y β la parte imaginaria, ω_0 representa la magnitud de los polos (la distancia del origen a los polos), y Q es una medida de la pendiente de las líneas radiales que conectan los polos al origen, sabiendo que cuando $Q \leq 1/2$ las raíces de la E.IV.5 son reales, y cuando $Q > 1/2$ las raíces son complejas. La figura IV.9 muestra la relación entre el par (α, β) y (ω_0, Q) .

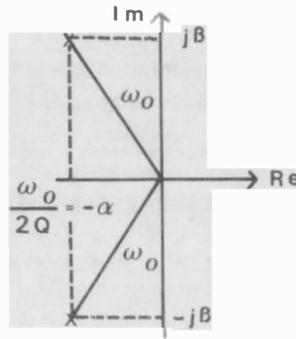


Figura IV.9 Relación entre los pares (α, β) y (ω_0, Q) como variables que definen la ecuación característica de $H(s)$.

Si α y β están dadas, ω_0 y Q se pueden encontrar de:

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad Q = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\alpha} \quad \text{E.IV.6}$$

Si ω_0 y Q son conocidas, α y β se encuentran de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{E.IV.7}$$

Ambas representaciones contienen la misma información, sin embargo, la expresión que involucra el par (α, β) lleva más rápidamente a una interpretación física cuando se utiliza una excitación de tipo escalón. Por otro lado, expresar el resultado en términos de (ω_0, Q) lleva más fácilmente a medir resultados cuando se considera la respuesta sinusoidal de estado estable. Para ilustrar estas diferencias e interpretarlas mejor, considere la respuesta a una función escalón como la esquematizada en la figura IV.10.

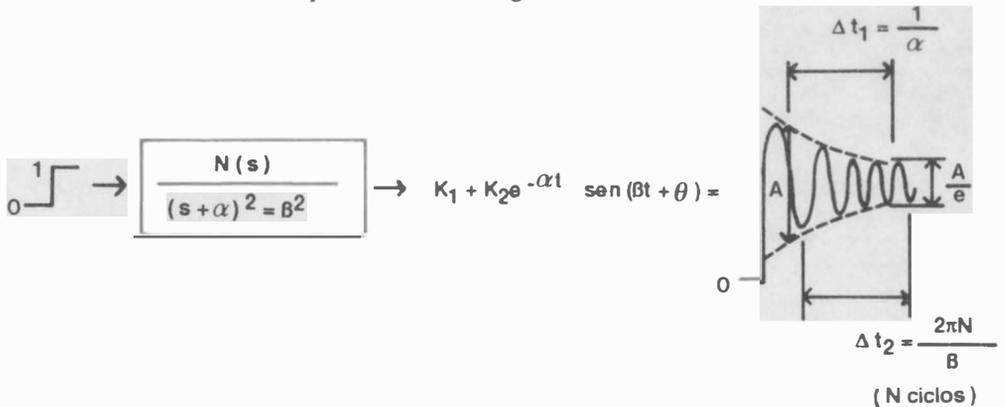


Figura IV.10 Respuesta escalón cuando los polos son complejos.

La respuesta contiene un término constante, K_1 , debido al polo de la excitación. También contiene una onda senoidal amortiguada, $K_2 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \theta)$, debida a los polos del sistema. El polinomio del numerador, $N(s)$, determina el valor de los factores de escala, K_1 y K_2 , y no tiene ninguna otra influencia. La parte real $-\alpha$ determina la tasa a la cual la amplitud de la onda senoidal decae. La parte imaginaria de los polos complejos β , determina la frecuencia de la onda senoidal. Si la relación β/α es grande, mayor que 10, los valores de α y β se pueden determinar de medidas tomadas del despliegue de la respuesta escalón desplegada en el osciloscopio, donde

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t_1} \quad \beta = N \frac{2\pi}{\Delta t_2} \quad \text{E.IV.8}$$

Considérese ahora la respuesta de estado estable de la figura IV.11. La amplitud de estado estable de la onda senoidal de la salida es proporcional a $M(\omega)$, que es la magnitud de la función de transferencia evaluada en $s = j\omega$, esto es:

$$M(\omega) = \left| \frac{N(s)}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \right| \quad \text{E.IV.9}$$

$$M(\omega) = \frac{|N(j\omega)|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}}$$

donde:

$$\text{sen } \omega t \rightarrow \frac{N(s)}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \rightarrow M(\omega) \text{ sen } (\omega t + \theta(\omega))$$

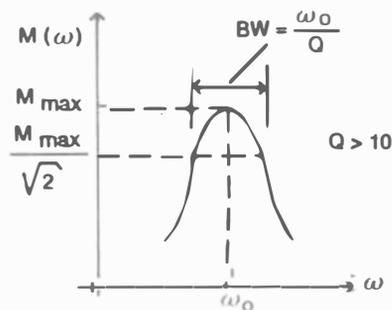


Figura IV.11 Respuesta senoidal de estado estable de un sistema de segundo orden.

Si la Q de los polos es grande, mayor que 10, y los ceros de $N(s)$ están alejados de los polos, el cual sería el caso si:

$$N(s) = H, \quad Hs, \quad Hs^2 \quad \text{o} \quad H(s + \omega_0)^2$$

entonces, para todos los propósitos prácticos, la gráfica de $M(\omega)$ -vs.- ω , alcanza un pico en $\omega = \omega_0$. Además, existen dos frecuencias, una a cada lado de ω_0 , para las cuales la magnitud es el inverso de la raíz cuadrada de dos, veces el valor pico. A estas frecuencias se les denomina **frecuencias de -3 dB**. Su diferencia se denomina BW, que es el **ancho de banda de 3 dB**, el cual está relacionado con Q mediante la siguiente expresión:

$$BW = \frac{\omega_0}{Q} \quad Q > 10 \quad \text{E.IV.10}$$

Sólo es necesario determinar dos parámetros para precisar la posición de los polos complejos, ya que la frecuencia a la cual ocurre el pico de $M(\omega)$ determina la magnitud de los polos, ω_0 , y el ancho de banda de 3 dB determina el valor ω_0/Q .

Entre mayor es Q , más estrecho es el ancho de banda y más selectivo es el sistema para señales sinusoidales. Una Q alta implica que los polos están muy cercanos al eje imaginario. Por ejemplo, un polo con una Q de 50 estará prácticamente cercano al eje imaginario, que a $\alpha \simeq 0.01\beta$. De esta manera, una Q alta resulta en una respuesta natural constituida por una onda senoidal que decae lentamente.

IV.3 El lugar de los polos de sistemas de segundo orden

Debemos recordar que la función de transferencia es una función racional que relaciona la salida con respecto a la entrada, se sabe que su realización con componentes eléctricos resulta en un sistema físico que, en general, por diversas causas se aleja de las características ideales del sistema. Entre algunas de éstas podemos citar el hecho de que los elementos reales sólo son una aproximación a un elemento ideal; no son de valor constante y debido a razones económicas, los valores de los elementos calculados en el diseño no coinciden necesariamente con los valores comerciales.

Por estas razones, un sistema diseñado con una cierta distribución de polos y ceros para lograr un determinado tipo de respuesta en el tiempo puede, en la práctica, exhibir un comportamiento diferente al esperado. De ahí la importancia de conocer la relación entre los cambios de valor de los elementos del sistema y su correspondiente efecto sobre la respuesta del sistema. **Es posible tener un control estrecho sobre el sistema si su orden no es alto, o si un par de frecuencias críticas predominan sobre una banda de frecuencias [2].**

Por ejemplo, considérese el sistema de la figura IV.12(A)

El sistema se describe por:

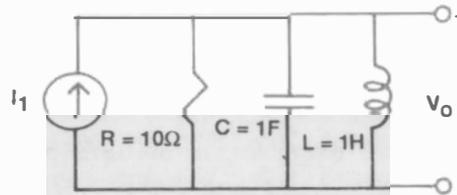
$$\frac{V_0}{I_1}(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} \quad \text{E.IV.11}$$

La posición de los polos está dada por:

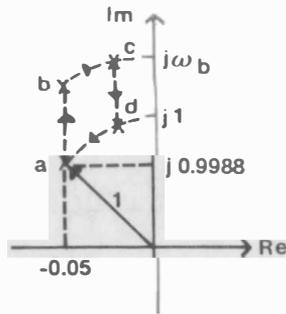
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

o por:

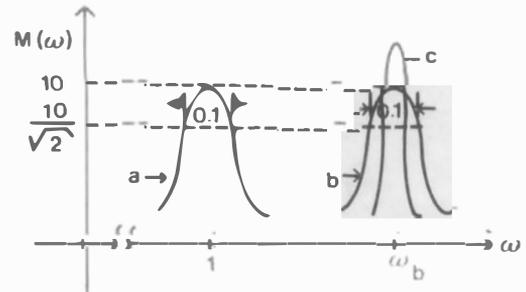
$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$



(A) Sistema



(B) Localización de Polos



(C) Características de Magnitud

Figura IV.12 Cambios de la respuesta de un sistema debido a variaciones en el valor de sus elementos.

Obsérvese que la magnitud de los polos, ω_0 , es independiente de R y la parte real de los polos, $-\alpha$, es independiente del valor de L . Por otro lado, Q y β son dependientes de los tres elementos del sistema. De esta forma, es posible variar la Q de los polos y mantener su ω_0 constante variando únicamente el valor de R ; o la β de los polos puede variar y α mantenerse constante cambiando el valor de L . Para los valores dados se muestra la ubicación en el plano en la figura IV.12(B) como el punto a. La ω_0 es 1 y su Q es 10. La característica de magnitud está representada por la curva a en la figura IV.12(C). La frecuencia del pico está en $\omega_0 = 1$ y el ancho de banda de 3 dB es $\omega_0/Q = 0.1$.

Si se decreta el valor de L a partir de su valor de uno, se obtiene un nuevo polo con una ω_0 mayor (más alejado del origen del eje coordenado) y de mayor Q ; el polo se desplazará del punto a al punto b para un valor constante de $-\alpha$, según se observa en la figura IV.12(B). El pico de la característica de magnitud se ha desplazado a la frecuencia ω_b , preservándose el ancho de banda ya que es independiente del valor de L , curva b de la figura IV.12(C).

Una vez que se entiende la relación existente entre la posición de los polos y las características de la respuesta en el tiempo, el sistema se puede sintonizar para que cumpla la respuesta deseada. Por ejemplo, suponga que la respuesta que se busca es la curva a de la figura IV.12(C) a partir de la curva c. Primero se reduciría el valor de R a fin de decrementar Q sin afectar la frecuencia del pico (desplazando el polo del punto c al b); seguidamente se

incrementaría el valor de L para mover la frecuencia de ω_b a l (desplazando el polo de b a a). Alternativamente podríamos incrementar primeramente el valor de L , desplazando el polo de c a d , moviendo con ello el pico de ω_b a l ; en seguida se decrementaría el valor de R para que el polo se desplazara del punto d a a , para obtener como resultado la curva a . En la práctica puede ser necesario repetir este procedimiento más de una vez hasta alcanzar la respuesta deseada.

Este ejemplo muestra que el corrimiento de los polos debido a cambios en el valor de R es diferente al ocurrido por cambios en el valor de L . Si C se hubiese variado, el desplazamiento de los polos habría sido distinto, puesto que C afecta al polinomio del denominador de manera distinta. Esto puede demostrarse multiplicando por RLC el numerador y denominador de la ecuación E.IV.11 y expresando el denominador de manera tal que el efecto de cada elemento se observe explícitamente:

$$D(s) = (sL) + R(LCs^2 + 1) \tag{E.IV.12a}$$

$$D(s) = (R) + L(RCs^2 + s) \tag{E.IV.12b}$$

$$D(s) = (sL + R) + C(RLs^2) \tag{E.IV.12c}$$

Si $D(s)$ se escribe como $c_2s^2 + c_1s + c_0$, entonces el conjunto de ecuaciones IV.12 muestra que R afecta a los coeficientes c_2 y c_0 , mientras que L afecta los coeficientes c_2 y c_1 . Formalmente, esto se puede expresar como:

$$D(s) = P_1(s) = q P_2(s) \tag{E.IV.13}$$

donde q representa al elemento que está variando y $P_1(s)$ y $P_2(s)$ son polinomios que no contienen a q . Si tomamos a q como R , entonces

$$P_1(s) = sL \quad \text{y} \quad P_2 = LCs^2 + 1$$

ninguno de los cuales depende de R . La ecuación E.IV.13 muestra que cada elemento de la red aparece en $D(s)$ de forma lineal; en realidad esto es cierto para polinomios de cualquier orden en el denominador. Nótese que un elemento nunca interviene más de una vez en ningún término del polinomio.

IV.3.1 Formulación general del lugar de las raíces

En general, en una función de transferencia los elementos de la red aparecen en forma lineal tanto en el numerador como en el denominador [2]. De donde la ecuación E.IV.1 puede escribirse como

$$H(s) = \frac{P_a(s) + q P_b(s)}{P_c(s) + q P_d(s)} \tag{E.IV.14}$$

donde q es un elemento en la red, y $P_a(s)$, $P_b(s)$, $P_c(s)$ y $P_d(s)$ son polinomios que no contienen a q . Un cambio en q ocasiona cambios en los polos y ceros de $H(s)$. Si $H(s)$ es

bicuatrática, la forma general de los polinomios del numerador y denominador es

$$\begin{aligned} P(s) &= P_1(s) + qP_2(s) \\ &= (a_2s^2 + a_1s + a_0) + q(b_2s^2 + b_1s + b_0) \end{aligned} \quad \text{E.IV.15}$$

donde los coeficientes a y b son independientes de q . Algunos de los coeficientes a y b en la ecuación E.IV.15 pueden ser cero, en tanto se preserve la naturaleza cuadrática de $P(s)$. Por ejemplo, cuando R es la variable en la red de la figura IV.12 y $P(s)$ es el polinomio del denominador, entonces $a_2 = a_0 = b_1 = 0$, debido a que

$$P(s) = sL + R(LCs^2 + 1)$$

pero para $q = L$, los coeficientes que toman el valor de cero son a_2 , a_1 y b_0 , debido a que

$$P(s) = R + L(RCs^2 + s)$$

Las raíces de la E.IV.15 son reales o complejas conjugadas y su posición en el plano s cambia conforme q varía. La curva resultante se denomina el lugar de las raíces. La variable q puede ser positiva, como en el caso de una resistencia, o negativa, como en el caso de la ganancia de un amplificador inversor. Las dos raíces de la E.IV.15, s_1 y s_2 , están dadas por:

$$s_{1,2} = \frac{-(a_1 + b_1q) \pm \sqrt{(a_1 + b_1q)^2 - 4(a_2 + b_2q)(a_0 + b_0q)}}{2(a_2 + b_2q)} \quad \text{E.IV.16}$$

Cuando las raíces son complejas conjugadas, el promedio aritmético de las dos raíces $(s_1 + s_2)/2$ es igual a

$$-\frac{a_1 + b_1q}{2(a_2 + b_2q)}$$

que es la parte real de las raíces. Por otra parte, el promedio geométrico, $(s_1s_2)^{1/2}$, es igual a

$$\sqrt{\frac{a_0 + b_0q}{a_2 + b_2q}}$$

que representa la magnitud de las raíces, puesto que tiene el mismo valor que ω_0 .

Si se considera que estas raíces pueden ser los polos o ceros de una función de transferencia de segundo orden, se pueden plantear las siguientes preguntas:

1. ¿Cuando las raíces son complejas, cómo se mueven cuando el valor de q se incrementa a partir de su valor nominal?
2. ¿Cuál es el lugar de las raíces conforme q varía en un amplio rango de valores?

Si una red va a sintonizarse finamente, la respuesta a la pregunta uno es esencial. Así como la pregunta 2 debe responderse para describir las propiedades de un sistema de segundo orden en forma general.

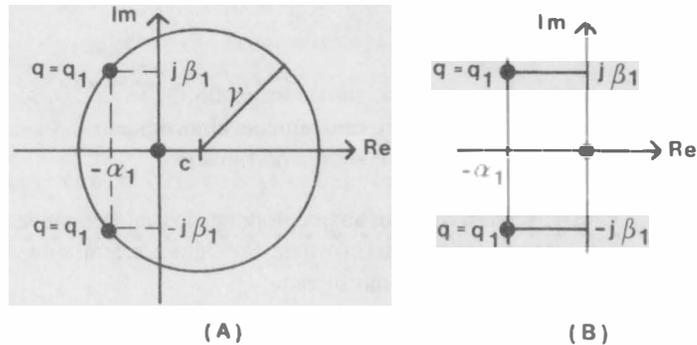


Figura IV.13 Localización de las raíces para un sistema de segundo orden.

En general, q puede asumir cualquier valor entre $-\infty$ y $+\infty$. Para considerar todos los casos posibles permitamos que q varíe entre $-\infty$ y $+\infty$. El lugar de las raíces resultante para la E.IV.16 se muestra en la figura IV.13. Si los valores de q se seleccionan apropiadamente una raíz puede colocarse en cualquier lugar del eje real. De manera similar, las raíces complejas conjugadas pueden posicionarse en cualquier lugar del círculo de radio r y centro c . Cuando c y r son infinitos, el círculo degenera hacia una línea vertical, como se muestra en la figura IV.13(B). Los coeficientes a y b de la E.IV.15 determinan r y c .

El centro c y el radio r del círculo se obtienen simultáneamente al resolver:

$$c = -\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_1 b_2 + a_2 b_1}$$

$$r = \sqrt{c^2 + c \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_0}{a_2}} = \sqrt{c^2 + c \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_0}{b_2}} \tag{E.IV.17}$$

donde la primera forma de la expresión para r debe utilizarse cuando a_2 diferente de cero, y la segunda forma si b_2 lo cumple [2].

Es importante subrayar que cuando en un sistema de segundo orden se varía un elemento, los polos y los ceros se desplazan, ya sea sobre el eje real o sobre parte del círculo que describe el lugar de las raíces.

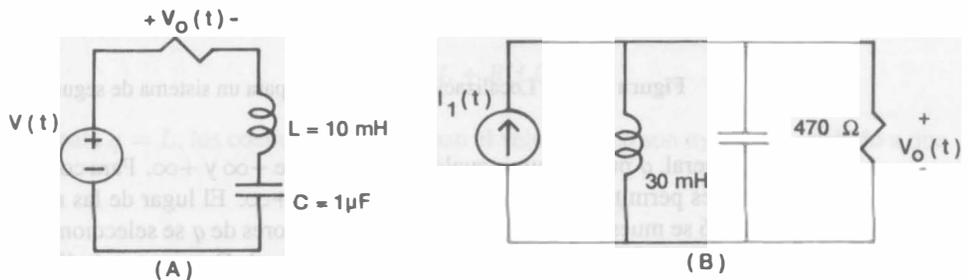
IV.4 Ejercicios propuestos. Sistemas de segundo orden

1. Un circuito RLC serie tiene los siguientes valores: $R = 2 \text{ Ohms}$ y $L = 1 \text{ H}$. Determine el tipo de respuesta exhibida por la red si:
 - a. $C = 0.5 \text{ F}$
 - b. $C = 1 \text{ F}$, y
 - c. $C = 2 \text{ F}$.

Solución:

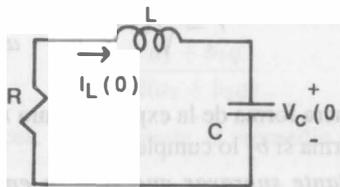
- a. subamortiguado
- b. críticamente amortiguado
- c. sobreamortiguado.

2. Para las redes mostradas abajo, proponga los valores convenientes de la resistencia y del capacitor, de manera que la respuesta exhibida sea: a. sobreamortiguada, b. críticamente amortiguada y c. subamortiguada.



Solución:

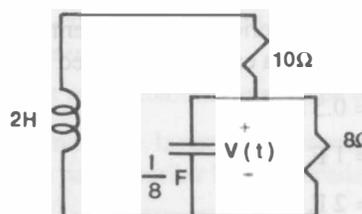
- 1. El valor umbral es en $R = 200$ Ohms.
 - 2. El valor umbral es en $C = 34$ nF.
3. El siguiente circuito RLC tiene los parámetros: $C = 0.04$ F, $L = 1$ H, $R = 6$ Ohms, $i_L(0) = 4$ A y $V_C(0) = -4$ V. Encuentre el voltaje en el capacitor para $t > 0$ y gráfíquelos.



Solución:

$$V_c(t) = [-16e^{-3t} \cos 4t + 38e^{-3t} \text{sen } 4t] \text{ Voltios}$$

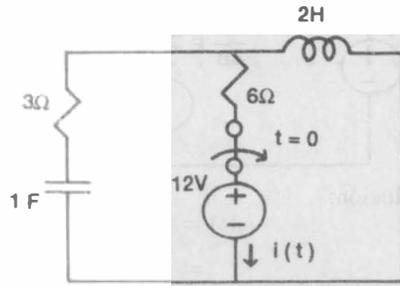
4. Para la red siguiente encuentre $V(t)$ si $V_C(0) = 1$ V y $i_L(0) = 0.5$ A. Grafique la respuesta.



Solución:

$$V(t) = [5e^{-3t} - 10te^{-3t}] \text{ Voltios}$$

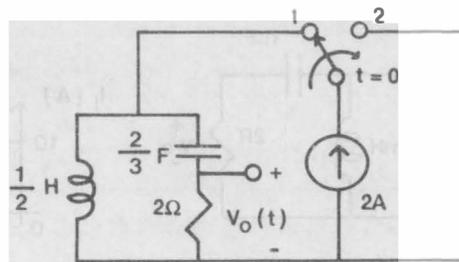
5. Encuentre $i(t)$ para $t > 0$. Asuma estado estable para $t = 0$.



Solución:

$$i(t) = [-2e^{-0.5t} + 4e^{-t}] \text{ Amperios}$$

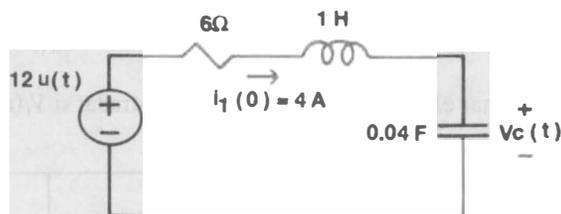
6. Sabiendo que en $t = 0$ el interruptor cambia de la posición 1, donde se había alcanzado estado estable, a la posición 2, encuentre $V_0(t)$ para $t > 0$.



Solución:

$$V_0(t) = 2(e^{-t} - 3e^{-3t}) \text{ Voltios}$$

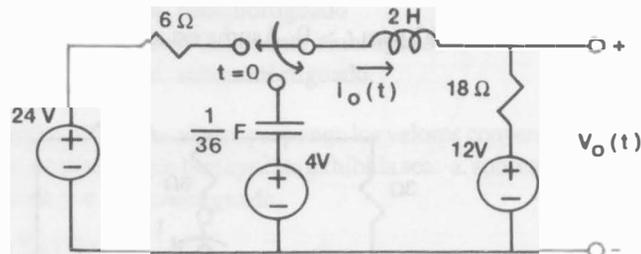
7. Encuentre la respuesta $V_C(t)$ para $t > 0$, si $V_C(0) = -4 \text{ V}$.



Solución:

$$V_C(t) \left[12 - 16e^{-3t} \cos 4t - \frac{7}{5}e^{-3t} \sin 4t \right] \text{ Voltios}$$

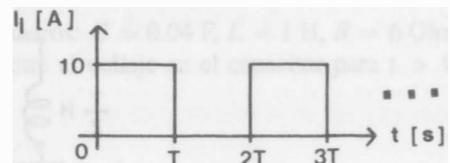
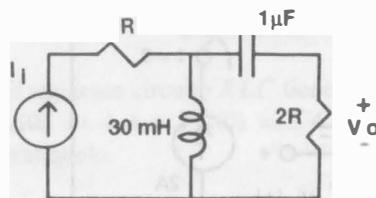
8. Si existe un estado estable para $t = 0$, cuando el interruptor se abre, encuentre $i_0(t)$ y $V_0(t)$ para $t > 0$.



Solución:

$$\begin{aligned} i_0(t) &= [-0.8e^{-3t} + 2.3e^{-6t}] \text{ Amperios} \\ &= [12 + 42e^{-6t} - 33e^{-3t}] \text{ Voltios} \end{aligned}$$

9. La red mostrada abajo, se excita con una fuente de corriente de pulsos cuadrados de periodo T y valor de 10 Amperios.
- Encuentre valores de R para que el $V_0(t)$ sea sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado.
 - Calcule el valor de $V_0(t)$ para el caso sobreamortiguado.

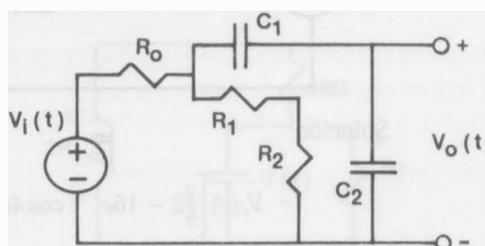


Solución:

- a. El valor umbral es en $R = 173 \text{ Ohms}$.

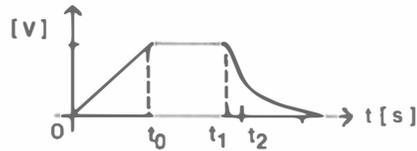
$$\begin{aligned} b. V_0(t) &= -[1368e^{-2812t} - 5768e^{-11855t}]u(t) \\ &+ [1368e^{-2812(t-T)} - 5768e^{-11855(t-T)}]u(t-T) \\ &+ [1368e^{-2812(t-2T)} - 5768e^{-11855(t-2T)}]u(t-2T) \\ &- [1368e^{-2812(t-2T)} - 5768e^{-11855(t-2T)}]u(t-2T) + \dots \end{aligned}$$

10. Determinar el valor de $V_0(t)$ en la red mostrada, si $V_i(t)$ es:



a. $V_i(t) = V u(t)$

b. $V_i(t) =$



Solución:

a. $V_0(t) = \left[\frac{V}{\beta C_2 R_0} (1 - e^{-\beta t}) \right] u(t)$

b. $V_0(t) = \frac{V}{C_2 R_0} \left\{ \frac{1}{\beta t_0} \left[\left(t + \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta} \right) u(t) - \left((t - t_0) + \frac{1}{\beta} e^{-\beta(t-t_0)} - \frac{1}{\beta} \right) u(t - t_0) \right] + \frac{1}{\alpha - \beta} [e^{-\beta(t-t_1)} - e^{-\alpha(t-t_1)}] \right\}$

donde:

$\alpha \equiv \frac{1}{t_2 - t_1} = \tau$, constante de tiempo de la exponencial de la excitación

$\beta \equiv \frac{(R_0 + R_1 + R_2)(C_1 + C_2)}{(R_0 C_1 C_2)(R_1 + R_2)}$,

constante de tiempo de la exponencial de la respuesta natural

Capítulo 5

Convolución

V.1 Representación de señales en términos de impulsos.

Las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo (comúnmente se denominan sistemas LTI; en inglés Linear Time Invariant) son importantes para el análisis de sistemas, ya que muchos procesos físicos se pueden modelar con base en este tipo de sistemas [15].

Una de las principales razones de la facilidad para analizar sistemas LTI es que poseen la propiedad de superposición. Si la entrada a un sistema LTI consiste en una combinación lineal de señales

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_3(t) + \dots$$

entonces por superposición, la salida estará dada por:

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + a_3y_3(t) + \dots$$

donde $y_k(t)$ es la respuesta a $x_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Una de las más importantes características del impulso unitario (señal definida en el capítulo II) es su utilidad como bloque para representar señales generales. Tomando en cuenta este hecho, junto con las propiedades de superposición e invarianza en el tiempo, se podrá desarrollar una caracterización completa de un sistema LTI en términos de su respuesta al impulso unitario. **Esta representación se denota como la integral de convolución.**

El impulso unitario en el tiempo continuo se puede usar como una señal básica para construir una amplia gama de señales. Considérese el pulso o la escalera de aproximación $x_a(t)$ a una señal continua en tiempo $x(t)$, como se ilustra en la figura V.1.(A). Esta aproximación se puede expresar como una combinación lineal de pulsos retrasados, como se ve en la figura V.1.(B).

Si se define

$$\delta_{\Delta}(t - k\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & k\Delta < t < (k+1)\Delta \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad \text{E.V.1}$$

entonces, ya que $\Delta\delta_{\Delta}(t)$ tiene una amplitud unitaria, se tiene la siguiente expresión:

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \quad \text{E.V.2}$$

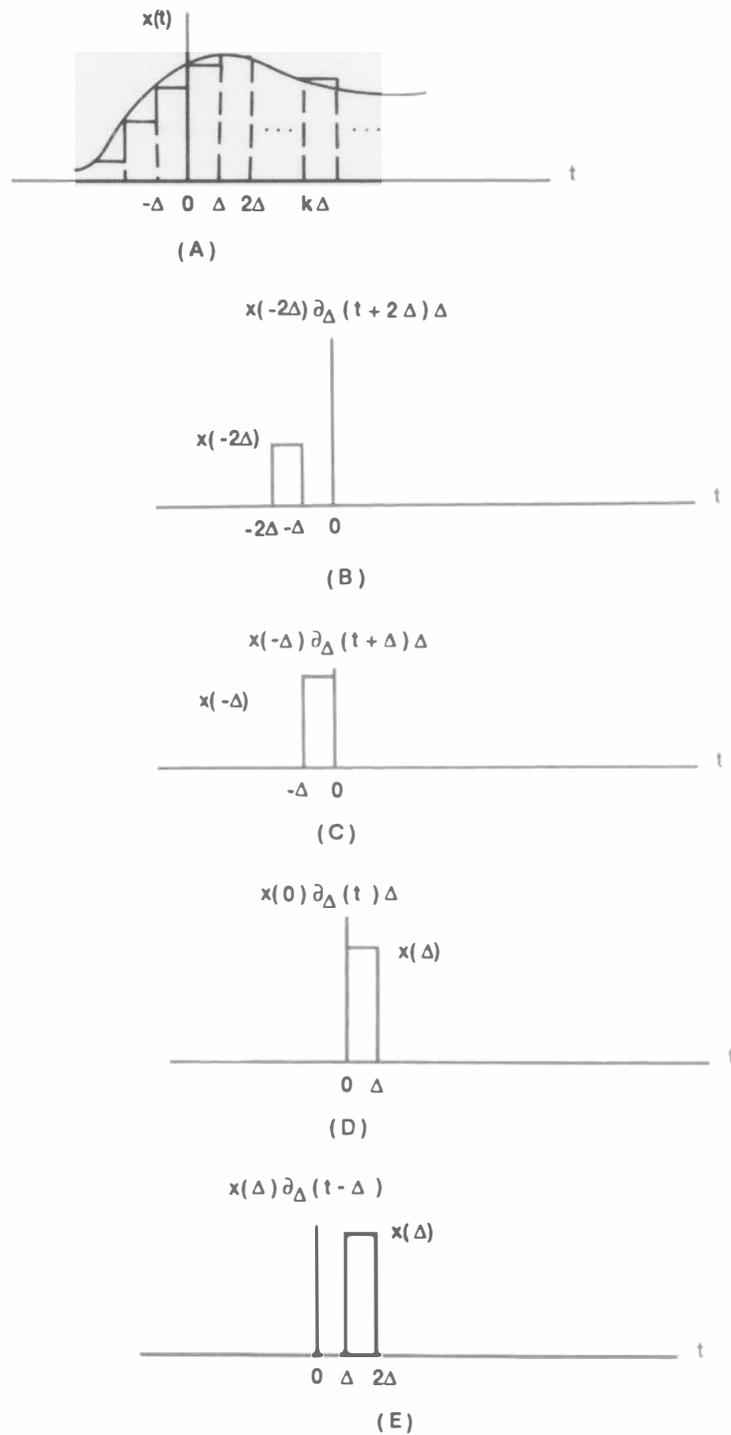


Figura V.1 Aproximación mediante escalera a una señal continua en el tiempo.

En la figura V.1 se puede observar que para un valor dado de t , un solo término en la sumatoria del lado derecho de la E.V.2 tiene un valor diferente de cero.

Conforme $\Delta \rightarrow 0$, la aproximación $x_a(t)$ se acerca cada vez más a $x(t)$, y en el límite iguala a $x(t)$, esto es:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_a(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta \tag{E.V.3}$$

Esta sumatoria se aproxima a una integral cuando $\Delta \rightarrow 0$. Obsérvese la figura V.2, donde se ejemplifica la E.V.3. Se ilustran las señales $x(\tau)$, $\delta_{\Delta}(t - \tau)$, y su producto. Se marca también una señal sombreada cuya área se aproxima al área bajo $x(\tau)\delta_{\Delta}(t - \tau)$ conforme $\Delta \rightarrow 0$. El área de la región sombreada tiene un área igual a $x(m\Delta)$ donde $t - \Delta < m\Delta < t$. Para este valor de t solamente el término con $k = m$ no es cero en la suma de la E.V.3 y de esta forma el lado derecho de esta ecuación también es igual a $x(m\Delta)$. De tal manera, se tiene que $x(t)$ es igual al límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ del área bajo $x(\tau)\delta_{\Delta}(t - \tau)$. Por otro lado, el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$ de $\delta_{\Delta}(t)$ es la función impulso unitaria $\delta(t)$.

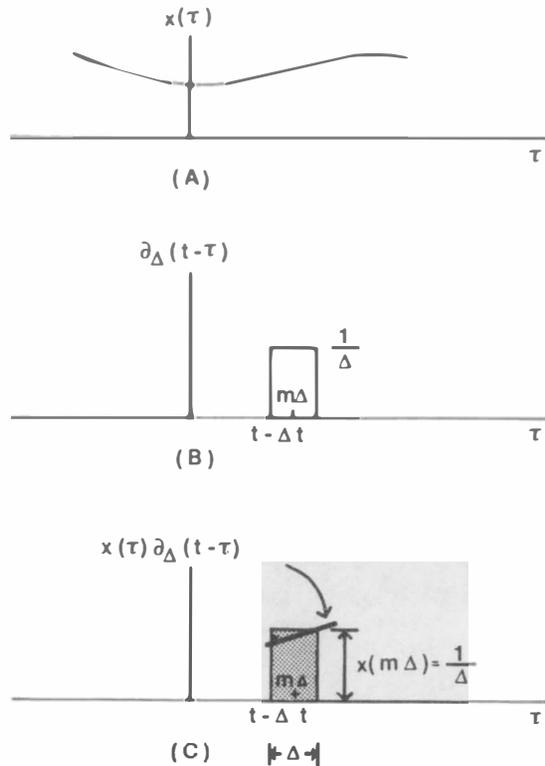


Figura V.2 Interpretación gráfica de la E.V.3.

Así:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\Delta(t - \tau)d\tau \tag{E.V.4}$$

Esta ecuación se conoce como la propiedad de corrimiento de la función impulso.

Para el caso especial cuando $x(t) = u(t)$ la ecuación E.V.4 se convierte en:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau$$

Como se ilustra en la figura V.3.(B) la señal $\delta(t - \tau)$ es un impulso localizado en $t = \tau$. Así, como se muestra en la figura V.3.(C) la señal $x(\tau)\delta(t - \tau)$ es igual a $x(t)\delta(t - \tau)$. Consecuentemente, la integral de esta señal de $t = -\infty$ a $t = +\infty$ es igual a $x(t)$, esto es:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau)d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)d\tau = x(t) \quad \text{E.V.5}$$

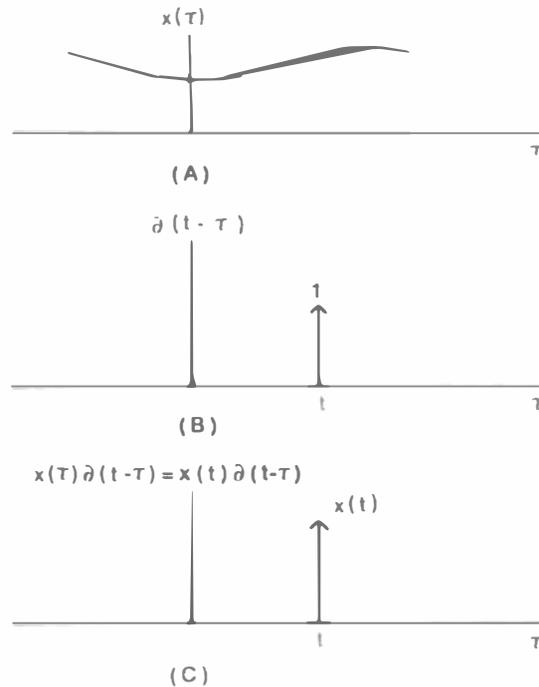


Figura V.3 (A) Señal arbitraria $x(\tau)$; (B) función impulso $\delta(t - \tau)$ como función de τ con t fija; (C) producto de estas dos señales.

V.2 La integral de convolución

Considérese un sistema lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. En la E.V.3 se expresó cómo una señal arbitraria continua en tiempo se puede representar como una combinación lineal de pulsos recorridos.

De una forma análoga definimos $h_a(t)$ como la respuesta de un LTI a la entrada $\delta_\Delta(t - k\Delta)$. De la E.V.3 y asumiendo la propiedad de superposición de los sistemas lineales se puede

escribir:

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{ak\Delta}(t)\Delta \quad \text{E.V.6}$$

Considérese la figura V.4.(A), donde están ilustradas la entrada $x(t)$ y su señal de aproximación. Las partes (B)-(D) muestran las respuestas del sistema a tres de los pulsos de $x_a(t)$.

La salida $y_a(t)$ correspondiente a la aproximación $x_a(t)$ de $x(t)$, es la superposición de todas estas respuestas, figura V.4(E).

Al obtener el límite de $y_a(t)$ cuando $\Delta \rightarrow 0$ para obtener la respuesta $y(t)$ a la entrada actual $x(t)$, figura V.4(E), se observa que mientras el pulso $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$ corresponde a un impulso unitario recorrido conforme $\Delta \rightarrow 0$, la respuesta $h_{ak\Delta}(t)$ se convierte en la respuesta del impulso en el límite. Así, si denotamos $h_{\tau}(t)$ como la respuesta en el tiempo t al impulso unitario $\delta(t - \tau)$, entonces se puede escribir lo siguiente:

$$y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta \quad \text{E.V.7}$$

Conforme $\Delta \rightarrow 0$, la sumatoria de la derecha se convierte en una integral y se puede ver gráficamente como en la figura V.5. Por lo tanto:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau \quad \text{E.V.8}$$

Ahora bien, cualquier entrada $x(t)$ se puede representar como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Esto es, se puede pensar en $x(t)$ como una suma de impulsos recorridos pesados, donde el peso del impulso $\delta(t - \tau)$ es $x(\tau)d\tau$. Con esta interpretación, la E.V.8 representa simplemente la superposición de las respuestas a cada una de estas entradas, y, por linealidad, el peso de la respuesta $h_{\tau}(t)$ al impulso $\delta(t - \tau)$ es también $x(\tau)d\tau$.

La E.V.8 representa la forma general de la respuesta a un sistema lineal de tiempo continuo. Si el sistema además de ser lineal, es invariante en el tiempo, entonces, $h_{\tau}(t) = h_0(t - \tau)$. Por conveniencia de notación definiremos $h(t) = h_0(t)$.

Así la E.V.8 se convierte en:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad \text{E.V.9}$$

Esta ecuación es la integral de convolución y corresponde a la representación de un sistema LTI en términos de su respuesta al impulso unitario. La convolución de dos señales $x(t)$ y $h(t)$ se representará simbólicamente como

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

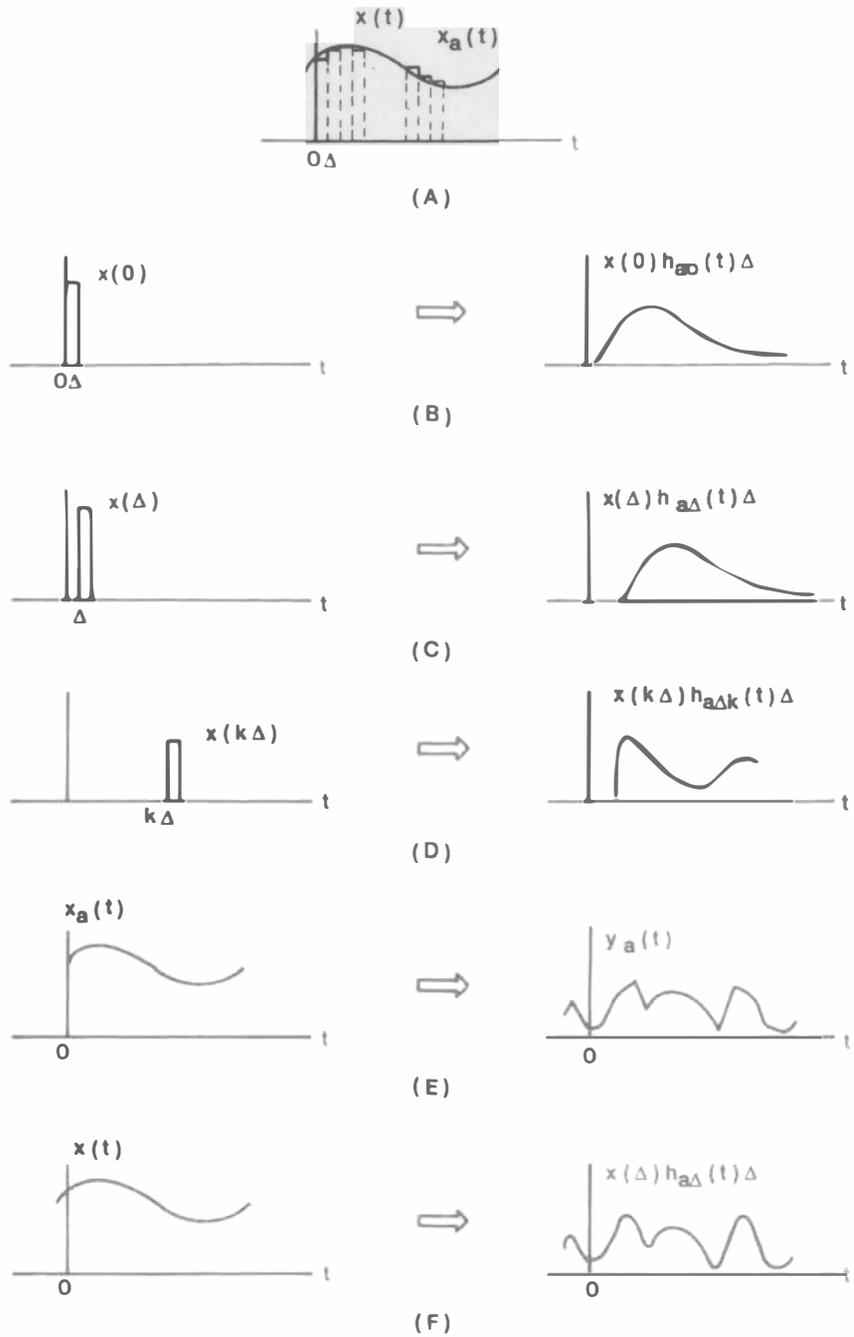


Figura V.4 Interpretación gráfica de la respuesta de un sistema lineal continuo en el tiempo como lo expresa la E.V.7.

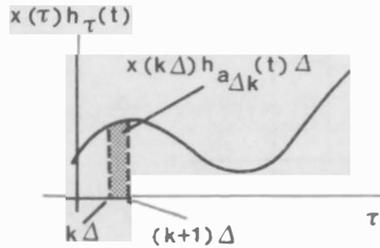


Figura V.5 Representación gráfica de la E.V.7 conforme Δ tiende a cero.

La convolución de dos señales en el tiempo continuo satisface las siguientes propiedades: (revisar la bibliografía para una demostración detallada) [15]

$$\begin{aligned}
 x(t) * y(t) &= h(t) * x(t) && \text{(Conmutatividad)} \\
 x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] &= [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) && \text{(Asociatividad)} \\
 x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] &= [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)] && \text{(Distributividad)}
 \end{aligned}$$

Como consecuencia de la propiedad conmutativa, el papel de la señal de entrada y de la respuesta al impulso son intercambiables. Por la propiedad de asociatividad, una combinación en cascada de sistemas LTI se puede condensar en un simple sistema cuya respuesta al impulso es la convolución de las respuestas al impulso individual, además de que el orden de ellas no altera la respuesta. Finalmente, como resultado de la propiedad distributiva, una combinación en paralelo de sistemas LTI es equivalente a un sistema simple cuya respuesta al impulso es la suma de las respuestas individuales.

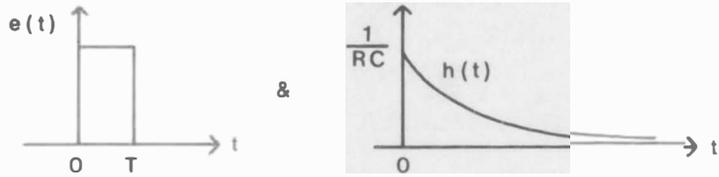
Refiriéndose a la parte práctica de la integral de convolución, en cuanto a cómo resolverla, téngase presente, se observa en la E.V.9, que para cada valor de t la salida $y(t)$ es una integral ponderada de la entrada, donde la ponderación de $x(\tau)$ es $h(t - \tau)$.

Para evaluar esta integral para un valor específico de t , deben realizarse los siguientes cuatro pasos:

1. Obtener $h(-\tau)$ de $h(t)$ con una reflexión de la señal con respecto al eje vertical.
2. Hacer un corrimiento a la derecha debido a un tiempo t si $t > 0$ o un corrimiento a la izquierda si $t < 0$.
3. Multiplicar las señales $x(\tau)$ y $h(t - \tau)$.
4. $y(t)$ se obtiene integrando el producto resultante desde $\tau = -\infty$ a $\tau = \infty$.

EJEMPLO V.1.

Sean las funciones mostradas en la fig.V.6(A). Determine la gráfica de la convolución $r(t) = e(t) * h(t)$.



donde:

$$e(t) = A(u(t) - u(t - T)), \quad y$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} (e^{-\frac{t}{RC}})$$

Figura V.6(A) Gráficas originales del ejemplo V.1.

Solución:

Por definición de la convolución, se tiene que

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e(t - \tau)d\tau$$

en donde el cambio de variable se representa gráficamente como

$$e(\tau) = A(u(\tau) - u(\tau - T))$$

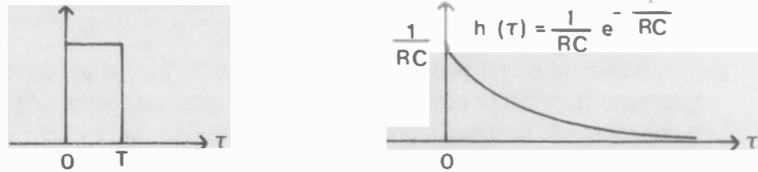


Figura V.6(B) Cambio de variable en las señales a convolucionar.

La función girada $e(-\tau)$ se muestra en la figura V.6.(C):

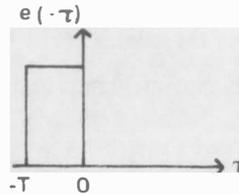


Figura V.6(C) Doblamiento de $e(-t)$.

Ahora se desplaza una distancia “ t_1 ”, para obtener $e(t_1 - \tau)$:

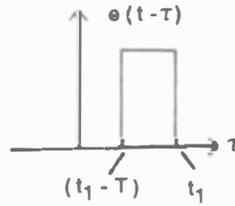


Figura V.6(D) Desplazamiento de $e(-\tau)$.

Y finalmente se trazan ambas gráficas en un mismo plano:

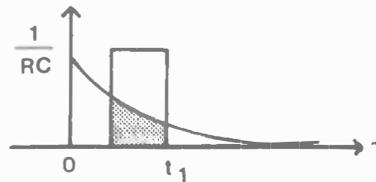


Figura V.6(E) Multiplicación de señales.

El área generada bajo las gráficas será el valor resultante de $r(t)$ en el tiempo $t = t_1$. Es así como, en general, la señal será barrida de t en t pasos desde $-\infty$ a $+\infty$.

Este barrido puede ser dividido en varios casos:

1. Para $t < 0$. La representación gráfica es:

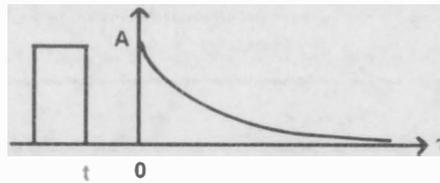


Figura V.6(F) Convolución para $t < 0$.

y por lo tanto el producto de las señales es nulo haciendo a $r(t) = 0$ en dicho intervalo.

1. Para $0 \leq t < T$

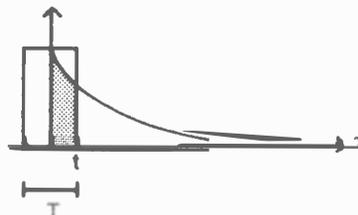


Figura V.6(G) Convolución en $0 \leq t < T$.

donde:

$$r(t) = \int_0^t h(\tau)e^{t-\tau}d\tau = \int_0^t \frac{A}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau = -A(e^{-\frac{t}{RC}} - 1)$$

$$r(t) = A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

1. Para $t \geq T$

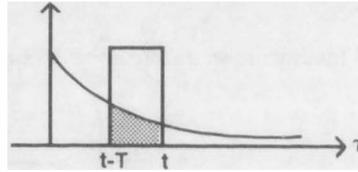


Figura V.6(H) Convolución para $t \geq T$.

donde:

$$r(t) = \int_{t-T}^t \frac{A}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau = -A(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t-T}{RC}})$$

$$r(t) = Ae^{-\left\{\frac{t-T}{RC}\right\}}(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$$

finalmente la convolución es,

$$\therefore r(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ A(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ Ae^{-\left\{\frac{t-T}{RC}\right\}}(1 - e^{-\frac{T}{RC}}) & \text{para } T \leq t \end{cases}$$

EJEMPLO V.2.

Encuentre la función resultante de la convolución de $x(t)$ con $h(t)$, tal que:

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

Solución:

De acuerdo con la integral de Convolución, la función $y(t)$ será la solución buscada si se cumple que,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

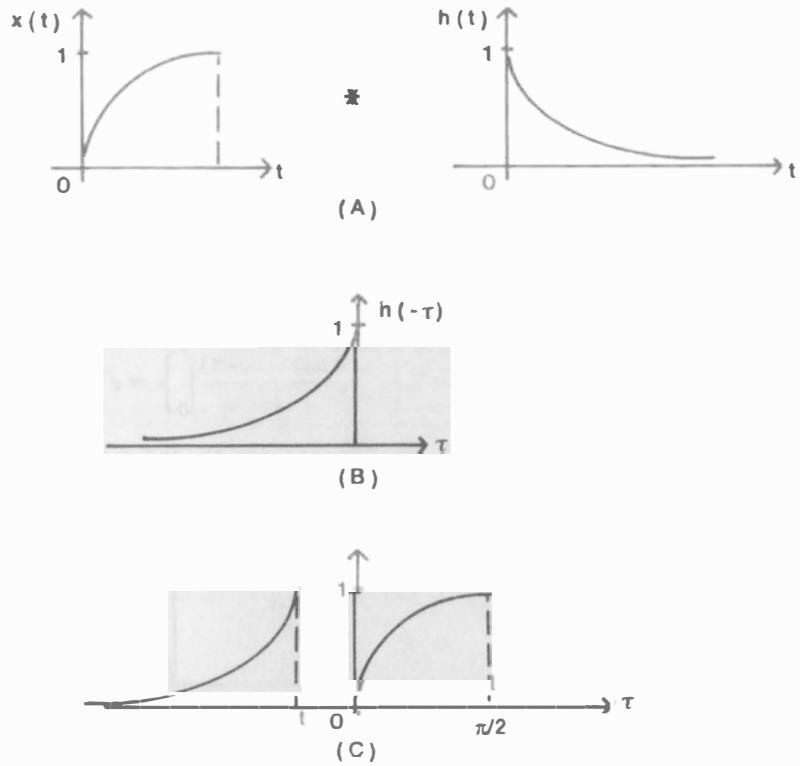


Figura V.7 (A) Funciones del ejemplo V.3; (B) doblamiento y cambio de variable de la función $h(\tau)$; (C) la función doblada $h(-\tau)$ y $x(\tau)$ graficadas juntas.

Ahora bien, en forma gráfica el problema se puede representar de la siguiente forma: De la fig.V.7(C) vemos que se deben de plantear varios intervalos, tales como:

1. Para $t \leq 0$
 Antes de 0, el producto de la multiplicación de las gráficas es nulo, es decir, $y(t) = 0$.
2. Para $0 < t \leq \pi/2$

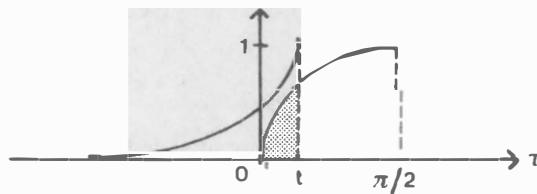


Figura V.7(D) Convolución en $0 < t \leq \pi/2$.

Donde la convolución en este intervalo, según se ve en la fig.V.7(D), debe de plantearse como la integral de la multiplicación de las funciones. Es muy importante

observar que la magnitud del área resultante depende del tamaño del paso t con el que se recorre la función $h(t - \tau)$, por lo que la integral es diferente de cero únicamente entre $\tau = 0$ y $\tau = t$. Entonces, el valor de $y(t)$ es:

$$y(t) = \int_0^t \text{sen } \tau e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \text{sen } \tau d\tau$$

como

$$\int e^{au} \text{sen } nu du = e^{au} \frac{(a \text{sen } nu - n \text{cos } nu)}{a^2 + n^2} + c$$

$$y(t) = e^{-t} \left\{ e^{\tau} \frac{(\text{sen } \tau - \text{cos } \tau)}{2} \Big|_0^t \right\} = e^{-t} \left\{ \frac{e^t}{2} (\text{sen } t - \text{cos } t) + \frac{1}{2} \right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (\text{sen } t - \text{cos } t + e^{-t}) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

3. Para $\pi/2 < t$

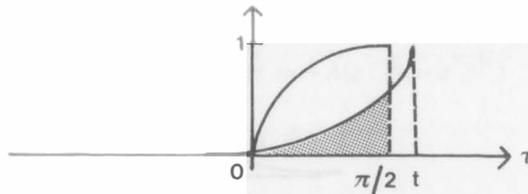


Figura V.7(E) Convolución en $\pi/2 < t$

En este intervalo la función de barrido $h(-\tau)$ tendrá una parte que se está multiplicando con la función $x(t)$, y una parte que estará fuera de ella, dando un producto de valor nulo (véase fig. V.7(E)). Nótese sin embargo, que el área que se va generando en la multiplicación siempre cae dentro del intervalo 0 a $\pi/2$, que es el tiempo definido para $x(t)$, sin importar de qué tamaño es el paso t con el que se ejecuta el barrido. Por lo tanto, y a diferencia de la integral del intervalo anterior, $y(t)$ será diferente de cero en todo el intervalo 0 a $\pi/2$. Escribimos ahora,

$$y(t) = \int_0^{\pi/2} \text{sen } \tau e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^{\pi/2} e^{\tau} \text{sen } \tau d\tau$$

$$y(t) = e^{-t} \left\{ \frac{e^{\tau}}{2} (\text{sen } \tau - \text{cos } \tau) \Big|_0^{\pi/2} \right\} = \frac{e^{-t}}{2} (e^{\pi/2} + 1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) \quad t > \frac{\pi}{2}$$

Finalmente, el valor total de la convolución entre $f(t)$ y $h(t)$ es

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ \frac{1}{2} (\text{sen } t - \text{cos } t + e^{-t}) & \text{para } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) e^{-t} & \text{par } \frac{\pi}{2} < t \end{cases}$$

EJEMPLO V.3.

El ejemplo anterior también puede resolverse de otra manera, según planteamos a continuación. Ahora piense que la señal que se va a doblar y a recorrer en el tiempo es $x(t)$; es importante recordar que no importa cuál señal se use como función de barrido, el resultado debe ser el mismo por la propiedad conmutativa de la convolución.

En consecuencia se puede escribir a $y(t)$ como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

la cual quedaría representada como

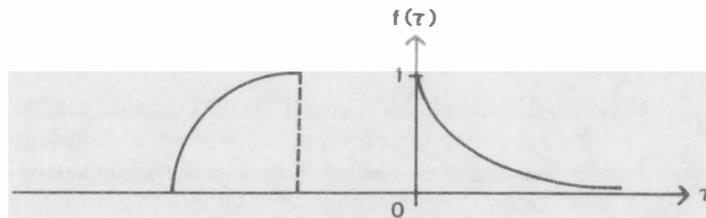


Figura V.8(A) Convolución en $t \leq 0$.

De esta figura se deduce que es conveniente escoger los siguientes intervalos:

1. Para $t \leq 0$
Este caso se ve representado en la fig.V.8(A), de donde es fácil decir que la convolución en este intervalo tiene valor cero.
2. Para $0 < t \leq \pi/2$

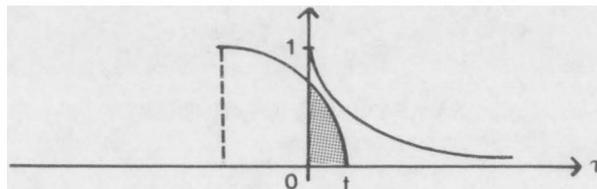


Figura V.8(B) Convolución en $0 < t \leq \pi/2$.

Después de observar la fig. V.8(B) debe ser claro que el área generada al multiplicar ambas señales, mientras que $x(t - \tau)$ recorre a $h(\tau)$, depende de la distancia que hay entre el origen y el paso t ; en otras palabras, la integral de convolución tiene valor

únicamente entre 0 y el paso escogido t , por lo que se debe definir a $y(t)$ como:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} \sin(t - \tau) d\tau = \frac{e^{-t}}{2} (-\sin(t - \tau) + \cos(t - \tau)) \Big|_0^t$$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \left(\frac{-\sin t + \cos t}{2} \right) = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t})$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t - e^{-t})$$

3. Para $\pi/2 < t$

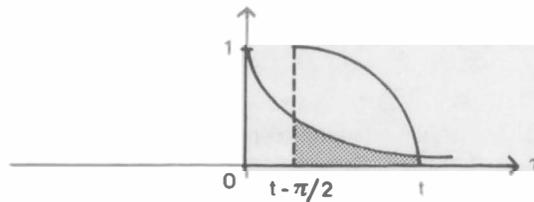


Figura V.8(C) Convolución en $\pi/2 < t$.

En este último intervalo, el cual comienza cuando ya toda la gráfica de $x(-\tau)$ cabe dentro de la de $h(\tau)$, se tienen que escoger los límites de la integral como aquellos en donde ésta es diferente de cero. Según vemos en la fig.V.8(C), esto sólo ocurre en los tiempos en que el valor de $x(-\tau)$ es diferente de cero; es decir, los límites de la integral serán los mismos que definen a $x(t)$. Esto debe percibirse al imaginar cómo $x(-\tau)$ recorre desde el origen hasta $+\infty$ el eje τ , produciendo a cada paso un área sombreada que es mayor que cero únicamente entre $(t - \pi)/2$ y t . De este razonamiento sigue escribir:

$$y(t) = \int_{t-\frac{\pi}{2}}^t e^{-\tau} \sin(t - \tau) d\tau = e^{-\tau} \frac{-\sin(t - \tau) + \cos(t - \tau)}{2} \Big|_{t-\frac{\pi}{2}}^t$$

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t} e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) e^{-t}$$

Con las últimas tres ecuaciones se tiene ya el valor final de la convolución de $h(t)$ y $x(t)$, el cual es,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) & \text{para } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} (1 + e^{\frac{\pi}{2}}) e^{-t} & \text{para } \frac{\pi}{2} < t \end{cases}$$

que coincide exactamente con el obtenido en el ejemplo anterior.

V.3 Convolución y la respuesta impulso

Se sabe que en el dominio de la frecuencia compleja s , es válido decir que para una red de dos puertos



Figura V.9 Red de dos puertos.

se tiene que

$$V_0(s) = V_i(s)H(s)$$

donde $H(s)$ representa la función de transferencia del sistema.

Supóngase que

$$V_i(t) = \delta(t) \Rightarrow V_i(s) = 1$$

en cuyas circunstancias,

$$V_0(s) = H(s)$$

o bien, si se obtiene la antitransformada,

$$v_0(t) = h(t)$$

donde $v_0(t)$ es la respuesta al impulso de la red.

Al igual que la función de transferencia caracteriza a la red, la respuesta al impulso es intrínseca al sistema. Si se conoce la respuesta al impulso $h(t)$, únicamente se necesita especificar el voltaje de entrada $v_i(t)$ para conocer la respuesta $v_0(t)$, utilizando convolución para resolverlo.

Cabe remarcar que el hecho de multiplicar $h(t - \tau)$ por $v_i(t)$, equivale gráficamente a hacer un barrido de $h(t - \tau)$ sobre la señal $v_i(t)$, lo cual dio origen al nombre de función de barrido que suele darse a la función que se traslada.

EJEMPLO V.4.

Encuentre la respuesta $V_0(t)$ del siguiente circuito:

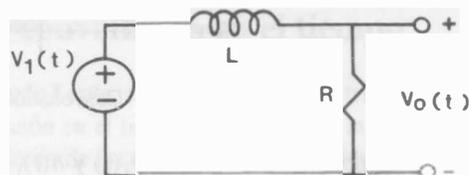
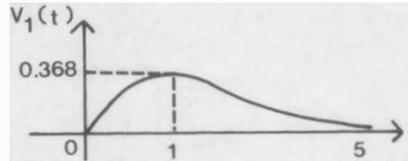


Figura V.10(A) Circuito del ejemplo V.4.

si la entrada tiene la siguiente gráfica:



donde:

$$v_1(t) = te^{-t} \quad t > 0$$

Figura V.10(B) Excitación del circuito del ejemplo V.4.

Solución:

Primero, encontremos la función de transferencia de la red,

$$H(s) = \frac{R}{R + sL} = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

de modo que aplicando la transformada inversa de Laplace, se pueda conocer su respuesta al impulso, $h(t)$:

$$h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Por otro lado, se sabe que

$$v_0(t) = v_1(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

cuya representación gráfica se observa en la figura V.10(C):

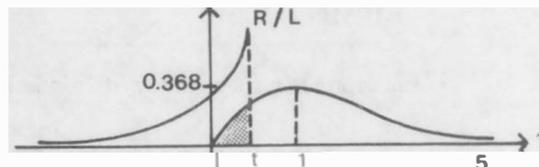


Figura V.10(C) Convolución de $v_1(t)$ con $h(t)$ para el ejemplo V.4.

Como ambas funciones, $v_1(t)$ y $h(t)$, son infinitas, se pueden plantear únicamente dos intervalos: para tiempos menores que cero y para tiempos mayores o iguales a cero:

1. Para $t < 0$

Véase en la fig.V.10(C) que antes de cero las gráficas no se tocan, por lo que la convolución tendrá valor cero.

2. Para $t \geq 0$

Para el tiempo $t = 0$, y de ahí en adelante, las funciones se tocan y se traslapan, produciendo un área bajo ellas. Dicha área está en función del valor de t con el cual se efectúa el barrido. Es muy importante que el lector se asegure de comprender que para todo tiempo mayor a cero las gráficas se sobreponen generando un área mayor que cero aun en tiempos muy grandes, obviamente a medida que el tiempo aumenta, el producto de las funciones tiene un valor cada vez mas pequeño.

Entonces, para lograr la suma de todas las áreas resultantes de barrer con la función $h(-\tau)$, se debe plantear la integral de convolución, cuyos límites deben ser 0 para el límite inferior y t para el superior. Esto es,

$$v_0(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} d\tau = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t \tau e^{-\tau(1-\frac{R}{L})} d\tau$$

como $\int t e^{-ta} dt = -\frac{t}{a} e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at} + c$

con $a = 1 - \frac{R}{L} = \frac{L-R}{L}$

$$v_0(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left\{ -\frac{\tau}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t - \frac{1}{a^2} e^{-a\tau} \Big|_0^t \right\}$$

$$v_0(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left\{ -\frac{t}{a} e^{-at} - \frac{1}{a^2} e^{-at} + \frac{1}{a^2} \right\}$$

$$v_0(t) = \frac{R}{R-L} \left\{ t e^{-t} - \frac{L}{R-L} e^{-t} \right\} + \frac{RL}{(R-L)^2}$$

Por lo tanto, el resultado final es

$$v_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \frac{RL}{(L-R)^2} + \frac{R}{R-L} \left\{ t e^{-t} - \frac{L}{R-L} e^{-t} \right\} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

V.4 Teorema de convolución en el tiempo

Sea $F_1(s)$ la transformada de Laplace de $f_1(t)$, y $F_2(s)$ la transformada de Laplace de $f_2(t)$.

El teorema de convolución en el tiempo establece que la transformada de la convolución de $f_1(t)$ y $f_2(t)$ es el producto de las transformadas individuales:

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

Demostración:

Se sabe que

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Si se consideran funciones causales (no tienen condiciones iniciales), es decir,

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) * f_2(t - \tau) d\tau$$

su transformada de Laplace es,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^{\infty} f_1(\tau) * f_2(t - \tau) d\tau\right\} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau e^{-s\tau} dt$$

Ahora, sea

$$\begin{aligned} x &= t - \tau \\ t &= x + \tau \\ dt &= dx \end{aligned}$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(x) d\tau e^{-s(x+\tau)} dx \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} \int_0^{\infty} f_2(x) e^{-sx} dx = F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) F_2(s)$$

EJEMPLO V.5.

Sea $F_1(s) = 1/s$ y $F_2(s) = 1/(s + 1)$, de modo que $f_1(t) = u(t)$ y $f_2(t) = e^{-t}$. Se desea encontrar $v(t) = f_1(t) * f_2(t)$ por método gráfico y por método analítico.

Solución:

a. Método gráfico

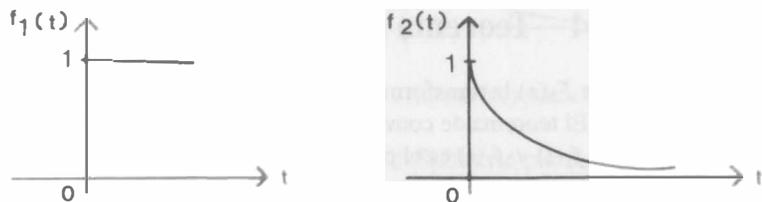


Figura V.11(A) Gráficas del ejemplo V.5.

Se debe reflejar o doblar, respecto al eje de las ordenadas, alguna de las señales; por ejemplo $f_1(t)$:



Figura V.11(B) Reflexión de $f_1(t)$.

Ahora se trasladará la función de t en t pasos, recorriendo o barriendo el eje del tiempo desde $-\infty$, pasando incluso sobre la otra función:

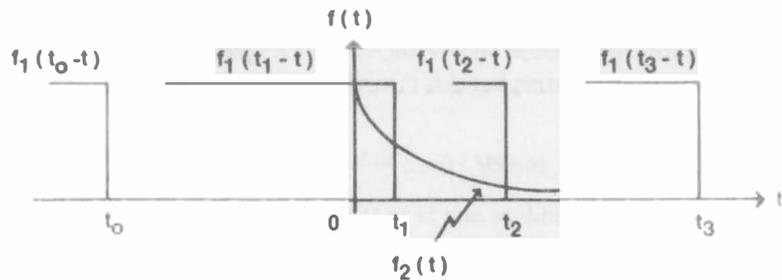
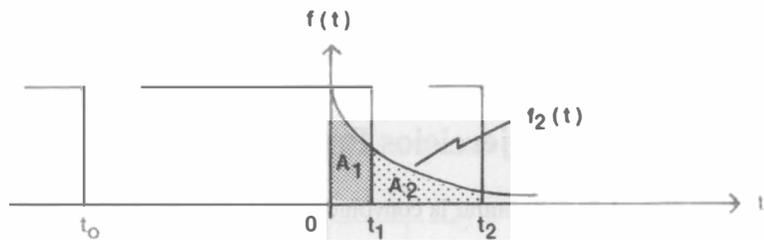


Figura V.11(C) Traslación o barrido de $f_1(t)$ en el eje t .

Al ir barriendo con la señal $f_1(t)$ debe observarse la multiplicación de áreas que se tiene, es decir, el área que se forma al verse superpuestas las dos señales, de manera parcial o total:



Área en $t_0 = 0$
 Área en $t_1 = A_1$
 Área en $t_2 = A_2$

Para $A_2 > A_1 > 0$

Figura V.11(D) Multiplicación gráfica de señales.

Se hará una integración o suma de las áreas obtenidas al barrer en el tiempo. Es decir, la gráfica de la convolución de $f(t)$ con $g(t)$ estará formada por la suma punto a punto del producto de ellas. Para nuestro ejemplo, esto es:

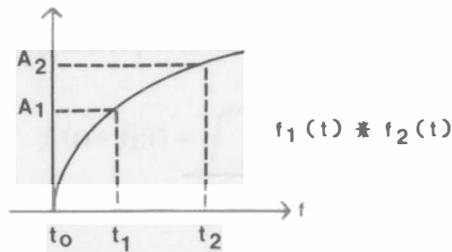


Figura V.11(E) Integración de las áreas generadas.

b. Método analítico

Con las transformadas de Laplace de ambas señales, simplemente se hace una multiplicación de ellas, se desarrolla en fracciones parciales y se aplica la transformada inversa para conocer el resultado en el dominio del tiempo. Esto es:

$$F(s) = F_1(s)F_2(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s+1}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\therefore f(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

que es la expresión que representa la gráfica obtenida en la fig.V.11(E).

Para este ejemplo en particular fue mucho más fácil usar el método analítico que el gráfico para obtener el resultado, debido a la sencillez de las transformadas. Sin embargo, si la entrada fuese una señal muy difícil de expresar analíticamente, el método gráfico resulta ser una excelente opción para conocer la respuesta del sistema.

V.5 Ejercicios Propuestos. Convolución

1. Encontrar la convolución de las siguientes funciones, recordando que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\}$$

a. $F_1(s) = 1/(s - a)$ y $F_2(s) = 1/(s - a)$

Solución:

$$f(t) = te^{at}u(t)$$

b. $F_1 = 1/s^2$ y $F_2(s) = s/(s^2 + 4)$

Solución:

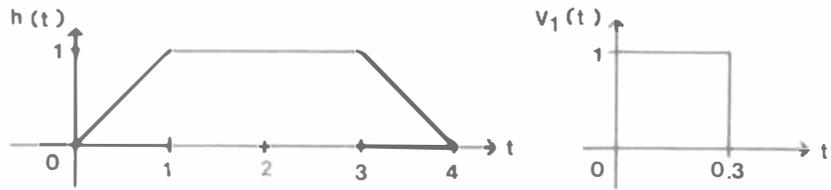
$$f(t) = ((1 + \cos 2t)/4)u(t)$$

c. $F_1(s) = 1/s$ y $F_2(s) = 1/(s + 1)$

Solución:

$$f(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

2. Determine usando convolución, el voltaje de salida de la red cuya respuesta al impulso y voltaje de entrada son los siguientes:

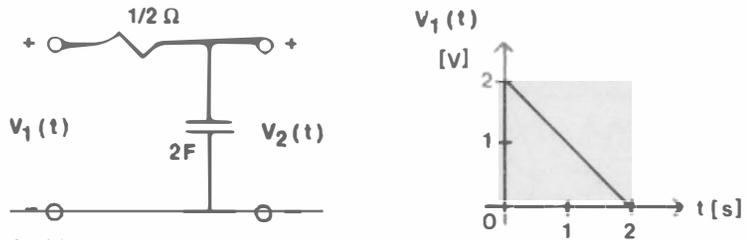


3. Se sabe que la corriente de salida de una red es $i(t) = (-2e^{-t} + 4e^{-3t})u(t)$ cuando la entrada fue un impulso unitario en $t = 0$. Qué voltaje deberá aplicarse para obtener una corriente de salida de valor $i(t) = 2e^{-t}u(t)$ si la red permanece igual?

Solución:

$$v(t) = (4e^t - 3)u(t) \text{ Voltios}$$

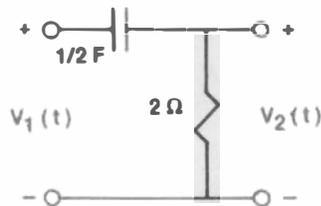
4. Sea la red RC mostrada abajo, donde $v_1(t)$ es el que se dibuja. Determine $v_2(t)$ por medio de convolución.



Solución:

$$v_2(t) = (2 - t - 3e^{-t})u(t) \text{ Voltios}$$

5. Repita el problema anterior para la red que se muestra a continuación:



Solución:

$$v_2(t) = (3e^{-t} - 1)u(t) \text{ Voltios}$$

Apéndice I

Transformada de Laplace

Las variables $v(t)$ e $i(t)$ son variables en el dominio del tiempo, se pueden desplegar en un osciloscopio como función del tiempo. El trabajo experimental nos da información acerca de $v(t)$ e $i(t)$. No importa en qué forma se resuelva el problema si al final del resultado nos lleva a visualizar la respuesta en el dominio del tiempo. Con el fin de obtener una solución, nos podemos alejar del dominio del tiempo por un momento, pero nuestro propósito es regresar a él para interpretar resultados. En tanto nos ofrece opciones para resolver problemas con menor dificultad, se usará la transformada de Laplace.

A.I.1 Definición

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad \text{E.A.I.1}$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ no es una función del tiempo, es una función de “ s ”, que se introduce vía el factor e^{-st} . La variable s se nombra variable de frecuencia compleja.

La función transformada $F(s)$ es una función en el dominio de la frecuencia compleja o en el dominio de la frecuencia.

Para que una función sea transformable al dominio de Laplace, debe ser continua y de orden exponencial. Si $f(t)$ contiene solamente un número finito de discontinuidades, se puede considerar transformable. Si para M una constante positiva y g un número real

$$|f(t)|, Me^{gt} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty \quad \text{E.A.I.2}$$

$f(t)$ es de orden exponencial

Las dos variables eléctricas $v(t)$ e $i(t)$ haciendo una transformación se convierten en:

$$V(s) = \int_0^{\infty} v(t)e^{-st} dt$$
$$I(s) = \int_0^{\infty} i(t)e^{-st} dt$$

EJEMPLO A.1

Encontrar la transformada de Laplace de e^{kt} .

Solución:

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{kt} e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{(k-s)t} dt = \left. \frac{e^{(k-s)t}}{k-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-k}$$

La transformada de Laplace de funciones comúnmente usadas está en la tabla A.I.1.

TABLA A.I.1
Transformadas directas e inversas de algunas funciones

$f(t)(t \geq 0)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \text{ sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \text{ cos } \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$

A.I.2. Reglas de operación

Si se usa la transformada de Laplace definida en la ecuación E.A.I.1 se pueden desarrollar cinco reglas operacionales necesarias para obtener la solución en el dominio de la frecuencia de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En este caso se asume que las funciones consideradas son transformables.

1. Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos funciones en el tiempo, entonces

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

2. Si a es una constante, entonces

$$\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} = aF(s)$$

3. Si la derivada de $f(t)$ es transformable entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

4. Si la segunda derivada de $f(t)$ es transformable, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

5. La transformada de la integral de una función entre 0 y t es $F(s)$ multiplicada por la transformada de una función escalón:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t')dt'\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

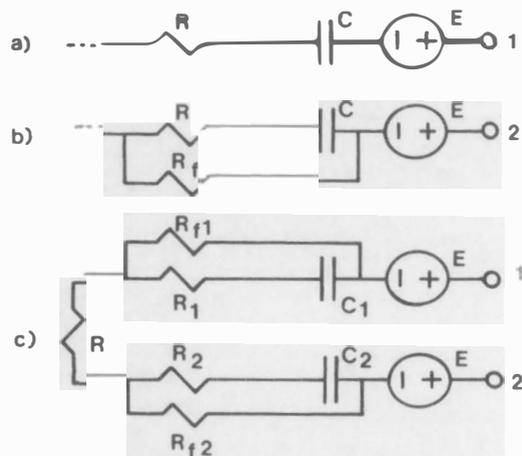
Apéndice II

Ejemplos y ejercicios prácticos

A continuación se presentan algunos casos prácticos en donde pueden aplicarse los conocimientos adquiridos a lo largo de este libro, con lo cual el lector puede evaluar la importancia de los mismos.

A.II.1 Impedancia de circuitos eléctricos

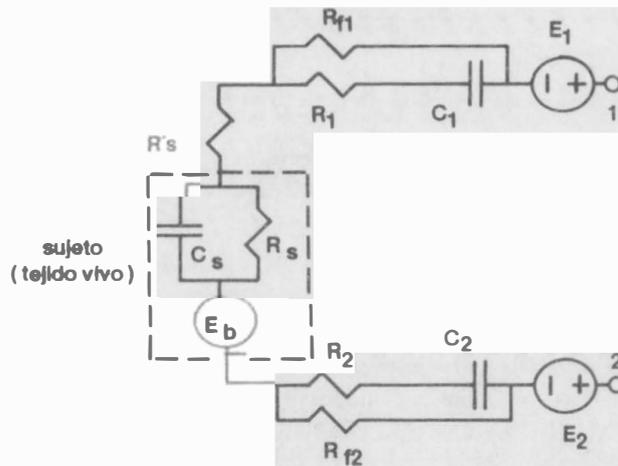
1. Circuito equivalente que modela un par de electrodos en contacto electrolítico con un sujeto. Como observamos, el circuito contiene dos potenciales de media celda (E_1, E_2), dos impedancias electrodo-sujeto (R_1, C_1, R_{f1} y R_2, C_2, R_{f2}), así como un modelo de sujeto (R_s, C_s, R_s'). También se muestra el efecto bioeléctrico E_b en caso de que esté presente.



2.
 - a. Equivalente de Warburg para la interfase electrodo-electrolito, incluido el potencial de media celda E .
 - b. Equivalente que modela el comportamiento en bajas frecuencias; añade una resistencia de fuga R_f .

- c. Circuito equivalente de dos electrodos en un electrolito de resistencia R , en tanto que estos se comportan de manera resistiva en bajas frecuencias, la impedancia entre las terminales 1 y 2 es

$$Z_1 = R + R_{f1} + R_{f2}$$



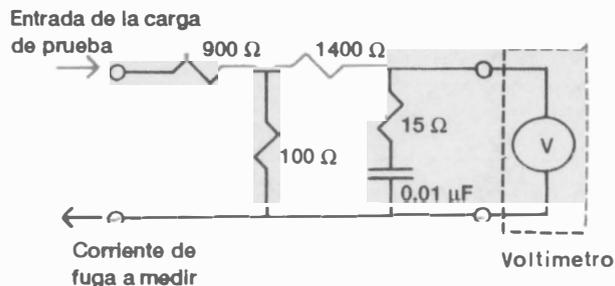
3. La impedancia debida a la combinación de ciertos elementos es de la forma

$$Z(s) = \frac{a_1 s}{a_2 s + 3}$$

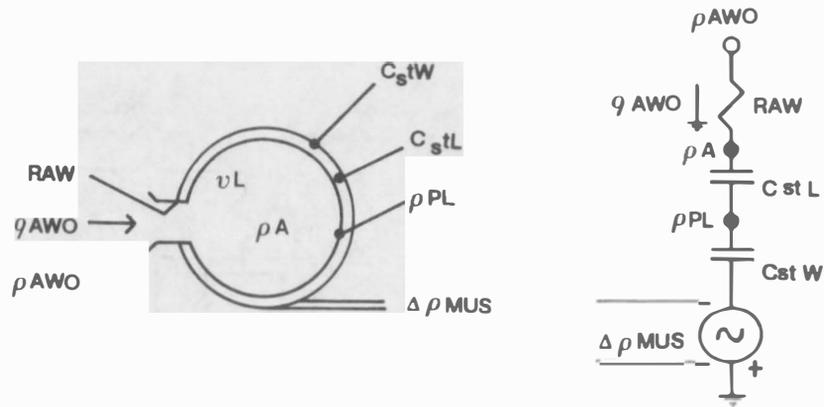
donde a_1 y a_2 son constantes desconocida. Encuentra $Z(s)$ si se sabe que una corriente $i(t) = 3e^{-t}$ y que una corriente $i(t) = -4e^t$ produce el voltaje $v(t) = -2e^t$.

A.II.2 Redes de primer orden

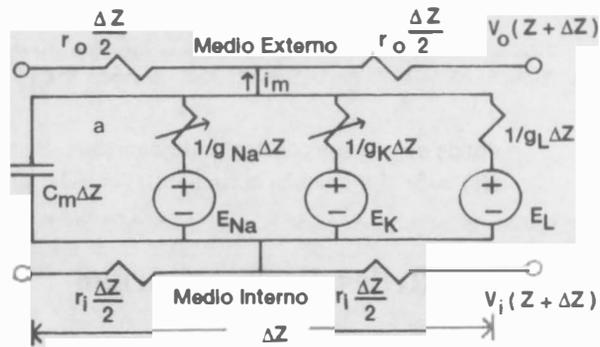
1. Circuito medidor de corriente de fuga. Posee una impedancia de entrada de 1 kW y respuesta en frecuencia plana hasta 1 kHz.



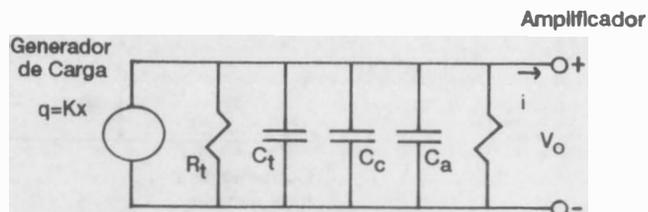
2. Modelo de la mecánica ventilatoria normal para respiraciones de baja amplitud y frecuencia (pulmones normales, en reposo). Unidad mecánica incluida en la pared del tórax.



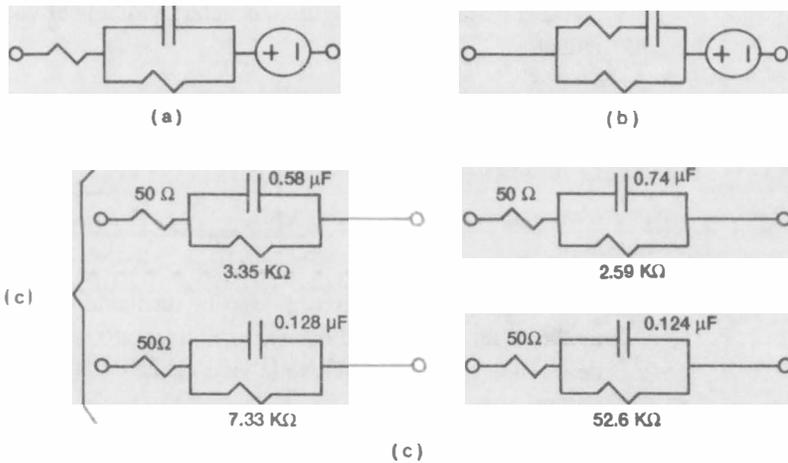
3. Red eléctrica equivalente a una pequeña longitud Δz de un nervio o músculo, representando sus propiedades pasivas y activas. C_m es la capacitancia de la membrana, y g_{Na} , g_K , g_{Cl} son las conductancias específicas de la membrana. Por otro lado i_m es la corriente de transmembrana y v_i y v_o son los potenciales interno y externo en el punto z , respectivamente.



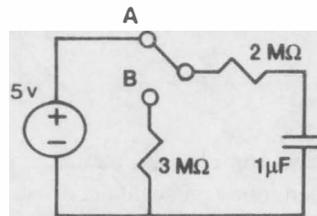
4. Circuito equivalente de un transductor piezoeléctrico, donde R_t = resistencia de fuga del transductor, C_t = capacitancia del transductor, C_c = capacitancia del cable, C_a = capacitancia del amplificador de entrada, R_a = resistencia del amplificador de entrada, y q = generador de carga.



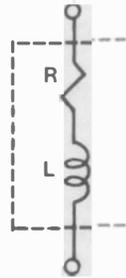
5. Posibles circuitos equivalentes que modelan la interfase electrodo-tejido cuando se mide con un puente de C.A.
 - a. El comportamiento de la unión electrodo-tejido puede ser simulado con una capacitancia en paralelo con una resistencia, en serie con una batería que represente el potencial de media celda del electrodo.
 - b. Circuito alternativo.
 - c. Algunos valores típicos.



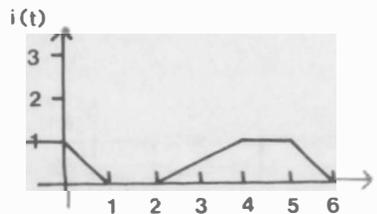
6. Ejemplo que nos muestra cómo una capacitancia, igual a la de la membrana celular, se carga y se descarga. Al principio el interruptor ha estado en la posición B por un largo tiempo, de manera que no existe carga almacenada en el capacitor. En $t = 0$, el interruptor es colocado en la posición A, y es mantenido allí por 20 segundos, para luego volver a la posición B.
 - a. Escriba una ecuación diferencial para el voltaje en el capacitor, como una función del tiempo, cuando el interruptor está en la posición A, y resuélvala.
 - b. Repita el inciso a) para la posición B.
 - c. Grafique sus resultados.



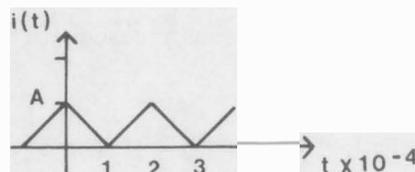
7. Los inductores físicos están contruidos de alambre enrollado. La resistencia de ese alambre, llamada resistencia del devanado, a temperatura normal, puede ser significativa. Un modelo para un inductor físico que toma en cuenta esa resistencia se muestra en la siguiente figura:



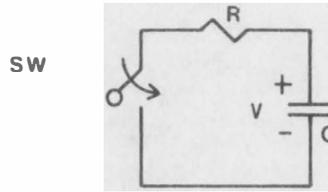
Si un inductor de 3 H tiene una resistencia de devanado de 10 ohms y una corriente como la de la siguiente figura, encuentra y dibuja el voltaje que se mide a través del inductor.



8. El decaimiento radioactivo se describe mediante una función exponencial, y la vida media de un material radioactivo es el intervalo de tiempo en el que decae a la mitad de su valor inicial. Relaciona la vida media de una exponencial con su constante de tiempo.
9.
 - a. Encuentre reglas de divisor de voltaje y divisor de corriente para inductores.
 - b. Encuentre reglas de divisor de voltaje y divisor de corriente para capacitores.
10. Los inductores se pueden usar para producir muy altos voltajes ante cambios rápidos de corriente a través de ellos. Este método se usa en muchos receptores de televisión para producir un voltaje de 15 a 30 Kv para el tubo de rayos catódicos. Si la corriente a través de un inductor de 90 mH es de forma triangular como se muestra en la siguiente figura, ¿cuál debe ser la amplitud A con el fin de generar un voltaje de inductor con pulsos que tengan una amplitud de 10 Kv.



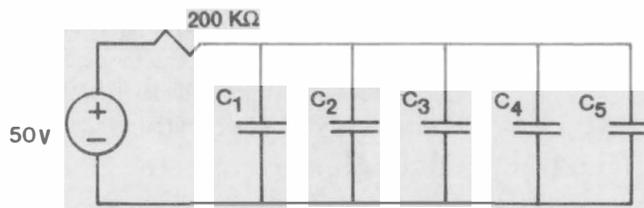
11. Cuando un capacitor se descarga por cortocircuito con un *switch* (véase figura), se deben tomar en cuenta la resistencia de los alambres y del interruptor para resultados más precisos. Para un voltaje inicial v en el capacitor, la corriente que fluye en el instante en el cual se cierra el *switch* es V/R , ya que el voltaje en el capacitor es continuo. La corriente inicial puede ser muy grande si R es suficientemente pequeña. de 10 microfaradios, ¿cuál será la magnitud de la corriente inicial si el capacitor se descarga a través de 0.3 ohms?



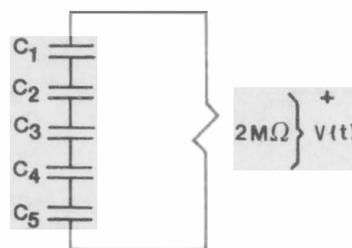
12. Bajos voltajes se pueden convertir momentáneamente a altos voltajes cargando varios capacitores en paralelo y conectando los capacitores en serie para su descarga. Esta técnica se usa frecuentemente en contadores “geiger” y unidades de *photoflash*, en los cuales se necesitan altos pulsos de voltaje los cuales sería inconveniente obtenerlos directamente de una batería.

Inicialmente cinco capacitores descargados de un microfaradio se cargaron durante un segundo, como se muestra en la figura (a). ¿Cuál es el voltaje a través de los capacitores?

Si ahora los capacitores se conectan como en la figura (b), ¿Cuál es el voltaje v después de un décimo de segundo de descarga?



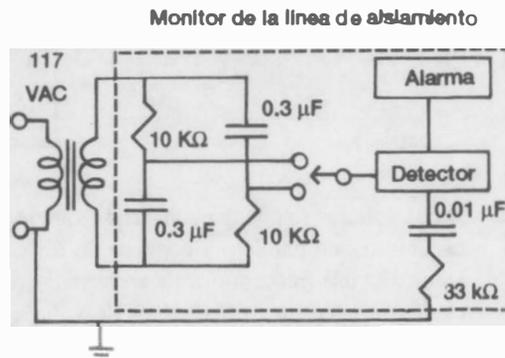
(a)



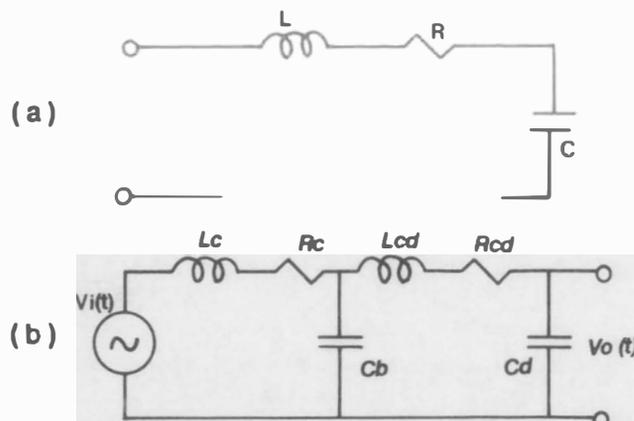
(b)

A.II.3 Redes de segundo orden

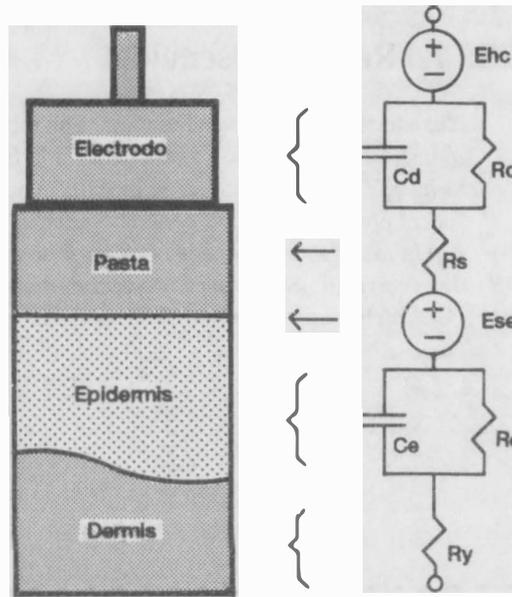
1. Monitor de aislamiento de línea (LIM). También llamado detector dinámico de tierra, debe ser usado con transformadores de aislamiento para detectar la primera falla de cualquier conductor a tierra. Este monitor mide alternadamente la corriente de fuga total, tanto resistiva como capacitiva (corriente peligrosa) que podría fluir a través de una baja impedancia entre un conductor aislado y tierra.



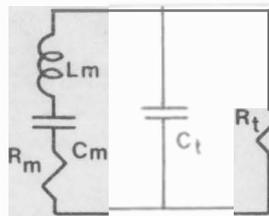
2. Modelo del sistema catéter transductor.
 - a. Circuito RLC serie en donde L representa la inercia del líquido en el catéter, R la resistencia del catéter, y C la distensibilidad del diafragma del transductor.
 - b. Circuito análogo cuando existe una burbuja en el catéter, tal que L_c y R_c son la inercia y la resistencia del catéter cerca de la burbuja, respectivamente. L_{cd} y R_{cd} son las mismas propiedades pero lejos de la burbuja. C_b y C_d representan las distensibilidades de la burbuja y del diafragma, respectivamente.



3. Circuito equivalente que modela el comportamiento de un electrodo de superficie en contacto con la piel. C_d y R_d representan al electrodo, R_s al electrolito, E_{se} al potencial generado entre el electrolito y la piel, R_e y C_e a la epidermis, y R_u , a las capas subcutáneas.

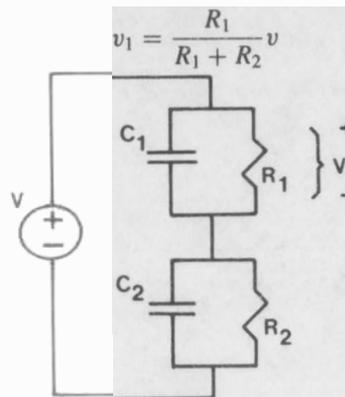


4. Modelo en altas frecuencias de un transductor piezoeléctrico donde R_t = Resistencia de fuga del transductor C_t = capacitancia de fuga del transductor. L_m , R_m y C_m representan el sistema mecánico



5. El problema de encontrar cómo un voltaje constante se divide a través de dos capacitores es determinante. Un modelo más exacto de un capacitor físico incluye una resistencia grande en paralelo representando la corriente de fuga entre las placas del capacitor.

Muestra que con este modelo (véase figura) un voltaje constante es eventualmente distribuido como



A.II.4 Respuesta senoidal

1. Cuando se aplica una señal senoidal a un medidor de dc como lo sería un vólmetro, el instrumento responderá solamente si la frecuencia es baja. A mayores frecuencias, la inercia de los movimientos mecánicos resultan en una deflexión proporcional a la fuerza promedio, la cual, para una senoide, es cero.

Un medidor ac responde con una deflexión proporcional al promedio del cuadrado de la corriente. Si se aplica una corriente constante de 10 A, se produce una deflexión. ¿Cuál debe ser la amplitud de la corriente senoidal para producir la misma deflexión?

Bibliografía

1. Bobrow, L. S. *Análisis de Circuitos Eléctricos*. Ed. Interamericana. México, 1986. (Capítulos 2, 3 y 4).
2. Budak, Aram. *Passive and Active Network Analysis*. Ed. Houghton Mifflin Co. 1974. (Capítulos 1 y 4).
3. Budak, Aram. *Circuit Theory Fundamentals and Applications*. Ed. Prentice Hall, Inc. 1978. (Capítulos 3 y 4).
4. Del Toro, Vincent. *Engineering Circuits*. Ed. Prentice Hall. (Capítulo 3).
5. Geddes, Leslie A. *Principles of Applied Biomedical Instrumentation*. John Wiley & Sons, 1975. (Apéndice II).
6. Gerez, Greiser V. *Teoría de Sistemas y Circuitos*. Tomo 1. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A. México, 1972. (Capítulos 2 y 5).
7. Hobbie, Russell K. *Intermediate Physics for Medicine and Biology*. University of Minnesota. John Wiley & Sons, 1978. (Apéndice II).
8. Hostetter, Gene H. *Engineering Network Analysis*. Ed. Harper & Row, 1984. (Capítulos 1 y 3).
9. Hostetter, Gene H. *Fundamentals of Network Analysis*. Ed. Harper & Row, 1980. (Capítulos 1, 3 y 4).
10. Hyatt, W. H. *Análisis de Circuitos en Ingeniería*. Ed. Mc. Graw Hill. México, 1975. (Capítulos 1, 3, 4 y 5).
11. Huelsman, Lawrence P. *Basic Circuit Theory*. Ed. Prentice Hall, Inc. 1988. (Capítulos 1, 3 y 4).
12. Jiménez Garza, F. *Análisis de Circuitos Eléctricos*. Ed. Limusa. México, 1983. (Capítulos 1, 2 y 5).
13. Johnson, David E. *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. 1987. (Capítulos 3 y 4).
14. Kuo, Franklin F. *Network Analysis and Synthesis*. Ed. John Wiley & Sons, Inc. 1966. (Capítulos 1, 2, 3 y 5).
15. Oppenheim, Shaffer. *Digital Signal Processing*. Ed. Prentice Hall. (Capítulo 5).
16. Valkenburg, V. *Análisis de Redes*. Ed. Limusa. 1979. (Capítulos 1, 2, 3 y 5).
17. Walter H., Dennis. *Electronic Techniques in Anesthesia and Surgery*. Butterworths, 2nd. Edition, 1973. (Apéndice II)
18. Webster, John G. *Medical Instrumentation: Application and Design*. Houghton Mifflin, 1978. (Apéndice II)

Circuitos eléctricos se terminó de imprimir el
15 de octubre de 1995 en Editorial Marsa, S.A. de C.V.
La edición consta de 1 000 ejemplares



Juan Manuel Cornejo Cruz. Profesor Titular integrante del Laboratorio de Audiología del Area de Ingeniería Biomédica de la UAM - Iztapalapa. Recibió el título de Ingeniero Biomédico (1983) y Maestría en Ingeniería Biomédica (1990), por

la Universidad Autónoma Metropolitana. Profesor de la materia de Circuitos Eléctricos en la UAM - I. Su interés actual es la caracterización e identificación del contenido espectral de la respuesta evocada auditiva al empleo de prótesis auditivas.



Miguel Cadena Méndez, Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica por el Instituto Politécnico Nacional en 1968. Obtuvo el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Biomédica en la Universidad de Washington en St. Louis

Missouri, E.U.A., en 1980. Miembro fundador de la Licenciatura y de la Maestría en Ingeniería Biomédica, Profesor Titular del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Autónoma Metropolitana. Su especial campo de interés son los algoritmos de reconstrucción de imágenes tomográficas.

El análisis del comportamiento de los sistemas lineales constituye parte importante en la formación del estudiante de ingeniería eléctrica, quien se enfrentará a problemas reales del mundo de la electrónica, la mecánica o la biomédica, y que deberá saber evaluar el desempeño de tales sistemas.

Asumiendo un conocimiento previo de los elementos fundamentales que constituyen una red eléctrica, así como de los métodos empleados para su análisis, se aborda el problema de determinar la respuesta de un sistema cuando se le somete a excitaciones diversas (funciones rampa, senoidales, impulso y escalón), recurriendo a herramientas como la **Transformada de Laplace** y valiéndonos del concepto de **Función de Transferencia de un Sistema** como elemento central que describe las relaciones entrada - salida.

El material se acompaña de numerosos ejemplos y problemas, tanto propuestos como de aplicación, en su mayoría con solución, persiguiendo en todo momento contribuir a la mejor comprensión del comportamiento de la respuesta de un sistema.
