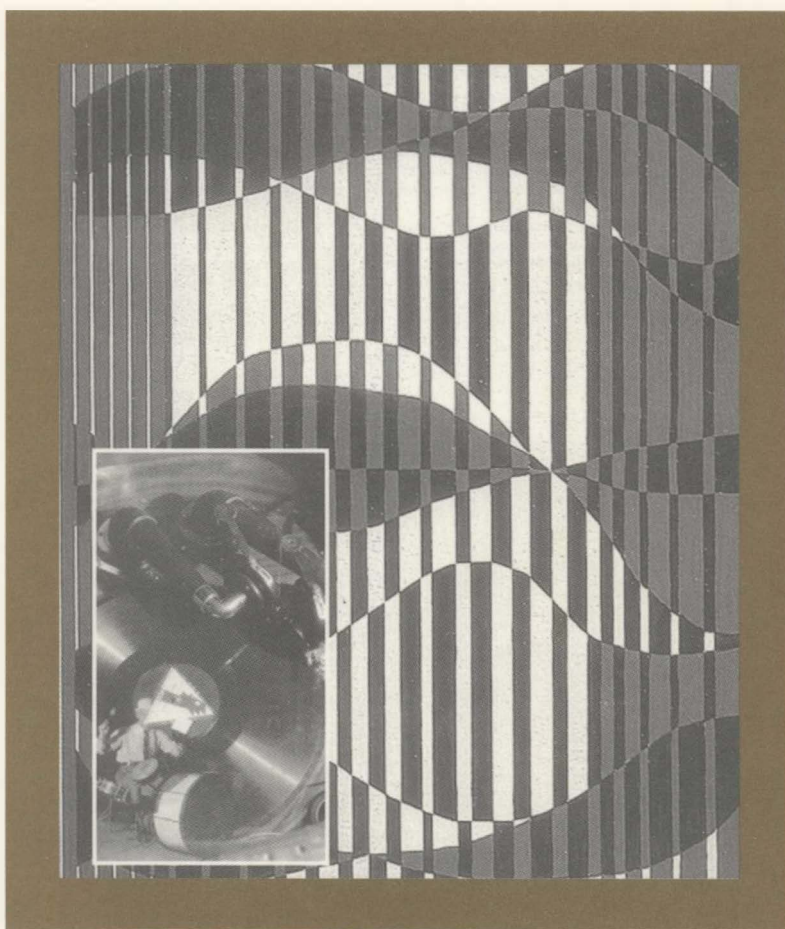


# Circuitos eléctricos III

---

•Norma Castañeda Villa •Juan Manuel Cornejo Cruz  
•Ma. del Pilar Granados Trejo





Norma Castañeda Villa, estudio la licenciatura y la maestría en ingeniería Biomédica en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Desde 1994 trabaja en el laboratorio de Audiología en la misma universidad, donde

desarrolla técnicas alternas a la adaptación de auxiliares auditivos utilizando ruido blanco. Actualmente trabaja en la detección de fuentes generadoras de potenciales relacionados a eventos. Desde su ingreso a la UAM-I imparte regularmente los cursos de Circuitos Eléctricos para las licenciaturas en Ingeniería Electrónica y Biomédica.



Juan Manuel Cornejo Cruz es profesor titular integrante del laboratorio de Audiología en el Área de Ingeniería Biomédica de la UAM-Iztapalapa, y es egresado de la misma institución con licenciatura (1984) y maestría en Ingeniería Biomédica.

Algunos de sus trabajos son: "Paquete tecnológico para la fabricación de ayudas auditivas", "Diseño preliminar de un metabolímetro para fermentadores en sustrato sólido"; "Análisis espectral de la respuesta evocada vs. estímulo acústico", "Pruebas electroacústicas de un micrófono de medida de tubo flexible para aplicaciones audiológicas".





# **Circuitos eléctricos III**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Dr. José Luis Gázquez Mateos  
*Rector General*

Dr. Antonio Aguilar Aguilar  
*Secretario General*

UNIDAD IZTAPALAPA  
Dr. Luis Mier y Terán Casanueva  
*Rector*

Dr. Eduardo Carrillo Hoyo  
*Secretario*

Dra. Ma. José Arroyo Paniagua  
*Directora de Ciencias Básicas e Ingeniería*

M. en I. Miguel Ángel Peña  
*Jefe del Departamento de Ingeniería Eléctrica*

Ma. del Rosario Hoyos Alea  
*Jefa de la Sección de Producción Editorial*

# Circuitos eléctricos III

Norma Castañeda Villa

Juan Manuel CornejoCruz

María del Pilar Granados Trejo



Primera impresión: 2001

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA

Av. San Rafael Atlixco No. 186, Col. Vicentina  
Iztapalapa, 09340, México, D.F.

ISBN: 970-654-949-8

Impreso y hecho en México / *Printed in Mexico*



# Indice

CAPÍTULO	PÁG.
<b>1. ANALISIS SENOIDAL</b> .....	13
1.1 Respuesta permanente senoidal .....	15
1.2 Los fasores y su aplicación en la representación de voltajes y corrientes .....	21
1.3 Relaciones fasoriales para elementos de circuitos .....	24
1.4 Impedancia y admitancia .....	28
1.5 Análisis básico utilizando las leyes de Kirchhoff .....	34
1.6 Análisis de circuitos mediante fasores .....	37
1.7 Método gráfico de fasores .....	43
1.7.1 Adición gráfica de fasores .....	43
1.7.2 Relaciones gráficas para R, L y C .....	43
1.7.3 Solución a redes triviales .....	46
1.7.4 Método de la fuente de prueba .....	49
1.8 Análisis de potencia en estado estable .....	50
1.8.1 Potencia instantánea .....	51
1.8.2 Potencia promedio .....	52
1.8.3 Transferencia de potencia promedio máxima .....	58
1.8.4 Valores efectivos o RMS .....	61
1.8.5 Potencia compleja .....	62
Ejercicios propuestos .....	67
<b>2. RESPUESTA EN FRECUENCIA</b> .....	71
2.1 Respuestas en frecuencia .....	71
2.2 Gráficas de magnitud y de fase .....	72
2.3 Diagramas de Bode .....	72
2.3.1 Constante k .....	74
2.3.2 Polos y ceros en el origen .....	75
2.3.3 Polos y ceros en el eje real .....	79
2.3.4 Polos y ceros complejos .....	83
2.4 Ejemplos .....	88
2.5 Gráfica de magnitud → función de transferencia .....	92

2.5.1	Ejemplos .....	95
2.5.2	Ejercicio propuesto .....	99
2.6	Sistemas de segundo orden .....	100
2.6.1	Ejemplos .....	103
2.6.2	Ejercicios propuestos .....	107
2.7	Resonancia .....	108
2.7.1	Resonancia en serie .....	109
2.7.2	Resonancia en paralelo .....	110
2.8	Ancho de banda .....	111
2.9	Factor de calidad .....	114
2.9.1	Ejemplos .....	115
2.9.2	Ejercicio propuesto .....	117
<b>3.</b>	<b>TEMAS SOBRE EL DISEÑO DE FILTROS .....</b>	<b>119</b>
3.1	Introducción .....	119
3.2	Caracterización de filtros .....	119
3.2.1	Filtros pasabajos .....	119
3.2.2	Filtros pasa-altos .....	122
3.2.3	Filtros pasabanda .....	124
3.2.4	Filtros rechazabanda .....	125
3.2.5	Ecualizadores de ganancia .....	128
3.2.6	Ecualizadores de retraso .....	128
3.3	Filtros pasivos y activos .....	131
3.4	Aproximación .....	133
3.4.1	Técnica de aproximación con diagramas de Bode .....	133
3.4.2	Aproximación Butterworth .....	135
3.4.3	Aproximación Chebyshev .....	143
3.4.4	Aproximación de Bessel .....	150
3.5	Sensibilidad .....	156
3.5.1	Sensibilidad $\omega$ y $Q$ .....	156
3.5.2	Desviaciones de varios elementos .....	161
3.6	Síntesis de la red pasiva .....	167
3.6.1	Síntesis por inspección .....	167
3.6.2	Síntesis del punto de excitación .....	170
3.6.2.1	Síntesis mediante expansión en fracciones parciales .....	170

3.6.2.2 Síntesis mediante expansión en fracciones continuas .....	175
3.7 Ejercicios propuestos.....	175
4. APÉNDICE .....	179
Tema: Análisis sinusoidal .....	179
Tema: Potencia .....	195
Tema: Respuesta en frecuencia .....	196
BIBLIOGRAFÍA.....	201



# PRÓLOGO

Uno de los métodos clásicos para el análisis de la respuesta de un circuito lo constituye el análisis con excitaciones senoidales. Este análisis permite predecir la respuesta del sistema cuando la frecuencia de la señal de excitación varía. En el presente conjunto de notas para el curso de *Circuitos Eléctricos III*, se introduce al estudiante en el uso de este tipo de análisis a partir del concepto de la *función de transferencia* de una red eléctrica.

En el primer capítulo se abordan los temas de *respuesta sinusoidal* de circuitos RLC, mediante el cálculo de la magnitud y fase de la función de transferencia, consumo de *potencia* de la red, finalizando con el concepto de *Fasor*. Este último tópico facilita el análisis de una red eléctrica e introduce al alumno en la relación que existe entre los dominios del tiempo y la frecuencia.

En el segundo capítulo se introducen los conceptos de *respuesta en frecuencia*, *resonancia*, *ancho de banda*, *factor de calidad*, y de cómo estos parámetros se observan a través de la traza o *Diagrama de Bode*. En esta parte también se revisan los *Diagramas de Bode* que representan los cambios de la magnitud y la fase, en función de la frecuencia.

Finalmente en el capítulo tres se conduce al estudiante en el tema de *filtrado* y se le dan las herramientas para el análisis de circuitos RLC –filtros pasivos– y con amplificadores operacionales –filtros activos.

La intención de estas notas de Circuitos Eléctricos III es proveer al estudiante de una guía en el estudio del análisis senoidal de un sistema eléctrico, mediante una exposición teórica breve apoyada en ejercicios resueltos y con la incorporación de problemas propuestos acompañados de solución. Los autores agradecen a los revisores del texto sus aportaciones para el mejoramiento del presente material, así como a la Ing. Nohra Beltrán V. por su ayuda en la conformación del capítulo III de estas notas de curso.

Los autores



# Capítulo 1

## ANÁLISIS SENOIDAL

La función senoidal describe una señal de gran importancia, ya que la naturaleza posee numerosos ejemplos de fenómenos senoidales. Además, esta forma de onda es dominante en la industria de potencia eléctrica. La señal presente en las tomas de corriente alterna (ca) en nuestra casa, oficina, laboratorio, etc., es senoidal. Es posible, también, representar cualquier señal periódica mediante una suma de senoidales (análisis de Fourier). En este capítulo nos concentraremos en estudiar la respuesta forzada ante excitaciones de tipo senoidal, ignorando las condiciones iniciales y la respuesta transitoria o natural, estudiada en los cursos I y II de esta serie, que finalmente desaparece en un tiempo muy corto.

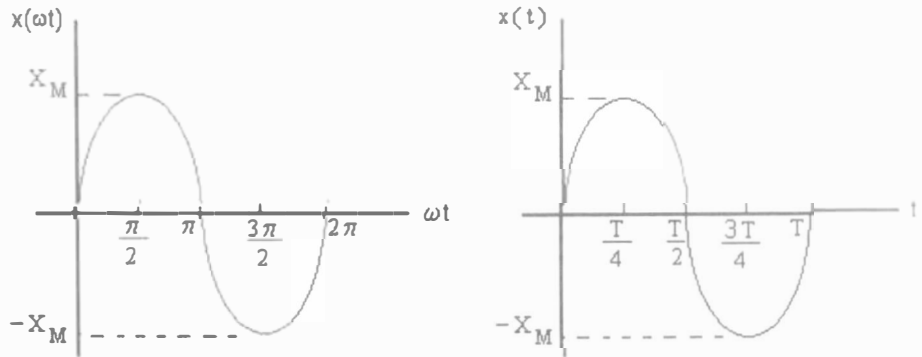
Consideremos una onda senoidal dada en la siguiente forma:

$$x(\omega t) = X_M \text{ sen } \omega t \quad (1.1)$$

donde  $x(\omega t)$  puede representar cualquier voltaje o corriente de la red.  $X_M$  es la amplitud o valor máximo,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\omega t$  es el argumento de la función seno. La gráfica de la función seno se muestra en la figura 1.1, y la función se repite cada  $2\pi$  radianes. Esta condición se describe matemáticamente como  $x(\omega t + 2\pi) = x(\omega t)$ , o, en general, para el periodo  $T$  como

$$x[\omega(t + T)] = x(\omega t) \quad (1.2)$$

lo que quiere decir que la función tiene el mismo valor en el tiempo  $t + T$  que en el tiempo  $t$ .



**Figura 1.1** Gráfica de una onda senoidal como función de  $\omega t$  y  $t$ .

La forma de onda también puede graficarse como función del tiempo, como se muestra en la figura 1.1. Adviértase que esta función recorre un periodo cada  $T$  segundos, es decir, en un segundo recorre  $\frac{1}{T}$  periodos o ciclos. El número de ciclos por segundo, denominados hertz, es la frecuencia  $f$  donde

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

Ahora, como  $\omega = 2\pi$  encontramos que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.4)$$

es la relación general entre el periodo en segundos, la frecuencia en hertz y la frecuencia en radianes.

Consideremos ahora la siguiente expresión general para una función senoidal

$$x(t) = X_M \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (1.5)$$

donde  $\omega t + \theta$  es el argumento de la función seno y  $\theta$  es el ángulo de fase. El ángulo de fase normalmente se expresa en grados más que en radianes; sin embargo, es una práctica común y conveniente usar grados para la fase.



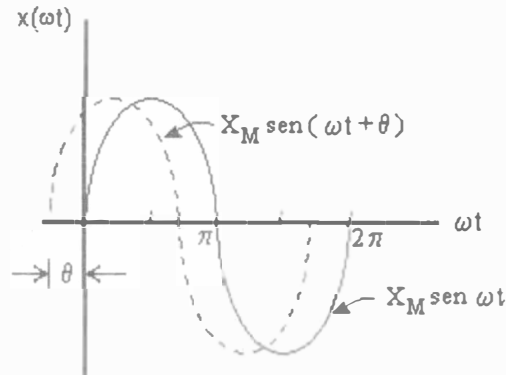


Figura 1.2 Señal senoidal que adelanta a  $X_M \text{ sen } \omega t$  por  $\theta$  radianes.

En la gráfica de la figura 1.2 cualquier punto en la forma de onda  $X_M \text{ sen}(\omega t + \theta)$  ocurre  $\theta$  radianes antes que el punto correspondiente en la forma de onda  $X_M \text{ sen } \omega t$ . Decimos que  $X_M \text{ sen } \omega t$  se retrasa de  $X_M \text{ sen}(\omega t + \theta)$  en  $\theta$  radianes. De una forma más general, si

$$x_1(t) = X_{M_1} \text{ sen}(\omega t + \theta)$$

y

$$x_2(t) = X_{M_2} \text{ sen}(\omega t + \varphi) \quad (1.6)$$

entonces  $x_1(t)$  adelanta a  $x_2(t)$  en  $\theta - \varphi$  radianes. Si  $\theta = \varphi$ , las formas de onda están en fase. Si  $\theta \neq \varphi$ , las funciones están fuera de fase.

## 1.1 RESPUESTA PERMANENTE SENOIDAL

Si se aplica una excitación de tipo senoidal a una red lineal, los voltajes y corrientes de estado estable en la red también serán senoidales. Esto se aplica, por supuesto, a las ecuaciones de las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff (LVK y LCK). Si un voltaje de rama es una senoide de al-

guna frecuencia, los otros voltajes de rama deben ser senoides de la misma frecuencia cuando la LVK se aplica alrededor de cualquier trayectoria cerrada. Esto significa que las soluciones forzadas de las ecuaciones diferenciales que describen una red con una excitación senoidal son funciones senoidales en el tiempo. Por ejemplo, si suponemos que nuestra función de entrada es un voltaje  $v(t)$  y nuestra respuesta de salida es una corriente  $i(t)$ , entonces si  $v(t) = A \text{ sen}(\omega t + \theta)$ ,  $i(t)$  será de la forma  $i(t) = B \text{ sen}(\omega t + \varphi)$ . El punto crítico aquí es que conocemos la forma de la respuesta de salida, y, por tanto, la solución simplemente implica determinar los valores de los dos parámetros  $B$  y  $\varphi$ .

### Ejemplo 1.1

Considerar el circuito de la figura 1.3 y obtener la expresión para la corriente  $i(t)$ .

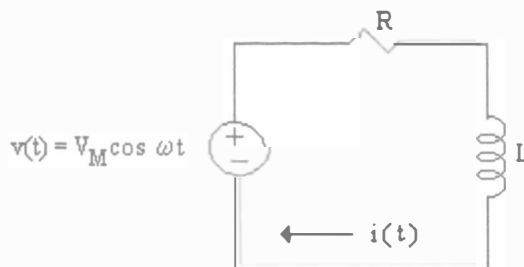


Figura 1.3 Circuito RL para el ejemplo 1.1.

La ecuación de la LVK para este circuito es

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t$$

Como la excitación es  $V_M \cos \omega t$ , suponemos que la componente de la respuesta forzada de la corriente  $i(t)$  es de la forma

$$i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

y puede escribirse como

$$\begin{aligned} i(t) &= A \cos \omega t \cos \varphi - A \sin \omega t \sin \varphi \\ i(t) &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

de acuerdo con las relaciones de suma y resta de ángulos para senos y cosenos:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (1.7)$$

Al sustituir la corriente  $i(t)$  en la ecuación diferencial precedente se obtiene

$$L \frac{d[(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) + R(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)]}{dt} = V_M \cos \omega t$$

Evaluando la derivada indicada se produce

$$-A_1 \omega L \sin \omega t + L A_2 \omega \cos \omega t + R A_1 \omega \cos \omega t + R A_2 \omega \sin \omega t = V_M \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes de las funciones seno y coseno, obtenemos

$$\begin{aligned} -A_1 \omega L + R A_2 &= 0 \\ A_1 R + A_2 \omega L &= V_M \end{aligned}$$

y al resolver estas dos ecuaciones simultáneas en las incógnitas  $A_1$  y  $A_2$  se obtiene

$$A_1 = \frac{R V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A_2 = \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Por tanto,

$$i(t) = \frac{R V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

donde  $i(t)$  puede escribirse como

$$i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

donde  $A$  y  $\varphi$  se determinan como sigue:

$$A \cos \varphi = \frac{R V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A \sin \varphi = \frac{-\omega L V_M}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

De aquí,  $\tan \varphi = \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = -\frac{\omega L}{R}$  y, por tanto,  $\varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$  como

$$(A \cos \varphi)^2 + (A \sin \varphi)^2 = A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2$$

$$A^2 = \frac{R^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{(\omega L)^2 V_M^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_M^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$A = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Entonces, la expresión final para  $i(t)$  es

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

Con este ejemplo se puede percibir que resolver cualquier circuito por este método es muy complicado. Para evitar este método, se puede establecer una correspondencia entre funciones senoidales temporales y números complejos. Se observará que esta relación conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas para corrientes y voltajes en una red en las que los coeficientes de las variables son números complejos. De aquí encontraremos que determinar las corrientes o voltajes en un circuito puede realizarse resolviendo un conjunto de ecuaciones algebraicas; sin embargo, su solución es complicada por el hecho de que las variables de las ecuaciones tienen coeficientes complejos en lugar de reales.

La ecuación de Euler establece una relación entre funciones senoidales variables en el tiempo:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \operatorname{sen} \omega t \quad (1.8)$$

Esta función tiene una parte real y una imaginaria:

$$\begin{aligned} \text{donde} \quad \operatorname{Re}(e^{j\omega t}) &= \cos\omega t \\ \operatorname{Im}(e^{j\omega t}) &= \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Si seleccionamos como función de excitación el voltaje  $v(t) = V_M e^{j\omega t}$ , el cual, debido a la identidad de Euler, se puede escribir como

$$v(t) = V_M \cos\omega t + jV_M \operatorname{sen} \omega t$$

Las partes real e imaginaria de esta función son factibles, de tal manera que la excitación compleja se puede expresar como dos excitaciones, una real y otra imaginaria, y como consecuencia de la linealidad de estos

sistemas aplicamos el principio de superposición y así la corriente puede escribirse como

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi) + jI_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (1.9)$$

donde  $I_M \cos(\omega t + \varphi)$  es la respuesta debida a  $V_M \cos \omega t$  y  $jI_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$  es la respuesta debida a  $jV_M \operatorname{sen} \omega t$ . Esta expresión para la corriente que contiene un término real y uno imaginario puede escribirse vía la ecuación de Euler como

$$i(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (1.10)$$

Debido a las relaciones anteriores encontramos que más que aplicar la excitación  $V_M \cos \omega t$  y calcular la respuesta  $I_M \cos(\omega t + \varphi)$ , podemos aplicar la excitación  $V_M e^{j\omega t}$  y calcular la respuesta  $I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$ , cuya parte real es la respuesta deseada  $I_M \cos(\omega t + \varphi)$ .

### **Ejemplo 1.2**

Determinar la corriente en el circuito RL ya analizado en el ejemplo 1.1.

En lugar de aplicar  $V_M \cos \omega t$  aplicamos  $V_M e^{j\omega t}$ . La respuesta forzada será de la forma  $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$ , donde sólo se desconocen  $I_M$  y  $j$ . Sustituyendo  $v(t)$  e  $i(t)$  en la ecuación diferencial para el circuito, obtenemos

$$RI_M e^{j(\omega t + \varphi)} + L \frac{d}{dt} (I_M e^{j(\omega t + \varphi)}) = V_M e^{j\omega t}$$

derivando

$$RI_M e^{j(\omega t + \varphi)} + j\omega LI_M e^{j(\omega t + \varphi)} = V_M e^{j\omega t}$$

y dividiendo entre  $e^{j\omega t}$ ,

$$RI_M e^{j\varphi} + j\omega LI_M e^{j\varphi} = V_M$$

Esta ecuación se puede escribir como  $I_M e^{j\varphi} = \frac{V_M}{R + j\omega L}$

Si convertimos el segundo miembro de la ecuación a forma exponencial o polar tenemos

$$I_M e^{j\varphi} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j\left[-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]}$$

Igualando miembro a miembro,

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}; \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Sin embargo, como la excitación original era  $V_M \cos \omega t$  en lugar de  $V_M e^{j\omega t}$ , la respuesta es la parte real de la respuesta compleja

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

## 1.2 LOS FASORES Y SU APLICACIÓN EN LA REPRESENTACIÓN DE VOLTAJES Y CORRIENTES

Supongamos que la excitación de una red lineal es de la forma

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} \quad (1.11)$$

Todo voltaje o corriente de estado estable en la red tendrá la misma forma y la misma frecuencia  $\omega$ ; por ejemplo, una corriente  $i(t)$  será de la forma  $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

Conforme se proceda al análisis en los circuitos, se anotará la frecuencia y omitiremos el factor  $e^{j\omega t}$  ya que éste es común a todos los términos en las ecuaciones descritas. Omitir el término  $e^{j\omega t}$  indica que todo voltaje o corriente puede describirse completamente mediante una magnitud y una fase. Por supuesto, se sabe también que  $\omega$  se mantiene constante. Por ejemplo, un voltaje  $v(t)$  puede escribirse en forma exponencial como

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}\left[V_M e^{j(\omega t + \theta)}\right] \quad (1.12)$$

y como un número complejo

$$v(t) = \operatorname{Re}(V_M \angle \theta e^{j\omega t}) \quad (1.13)$$

Como se trabaja con una excitación compleja, cuya parte real es la respuesta deseada, y cada término en la ecuación contendrá  $e^{j\omega t}$ , se puede omitir  $\operatorname{Re}(\cdot)$  y  $e^{j\omega t}$  y trabajar sólo con el número complejo  $V_M \angle \theta$ . Esta representación compleja se conoce comúnmente como fasor.

Un voltaje  $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = \operatorname{Re}\left[V_M e^{j(\omega t + \theta)}\right]$  y una corriente  $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\left[I_M e^{j(\omega t + \varphi)}\right]$  se escriben en notación fasorial como  $V = V_M \angle \theta$  e  $I = I_M \angle \varphi$ , respectivamente.

### **Ejemplo 1.3**

Considerar el mismo circuito de los ejemplos I.1 y I.2. Se usarán fasores para determinar la expresión para la corriente.

La ecuación diferencial es

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = V_M \cos \omega t$$



La excitación se puede reemplazar por una excitación compleja que se describe como  $V e^{j\omega t}$  con el fasor  $V = V_M \angle 0^\circ$ . De manera similar, la componente de la respuesta forzada de la corriente  $i(t)$  puede reemplazarse por una función compleja que se escribe  $I = I_M \angle \phi$ .

Utilizando la excitación compleja encontramos que la ecuación diferencial se convierte en

$$L \frac{d}{dt} (I e^{j\omega t}) + R I e^{j\omega t} = V e^{j\omega t}$$

$$j\omega L I e^{j\omega t} + R I e^{j\omega t} = V e^{j\omega t}$$

Como  $e^{j\omega t}$  es un factor común, se puede eliminar y dejar sólo los fasores

$$\omega L I + R I = V$$

Por tanto,

$$I = \frac{V}{R + j\omega L} = I_M \angle \theta = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Así,

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

Definimos como “*análisis fasorial*” o del dominio de la frecuencia las relaciones entre fasores después de eliminar  $e^{j\omega t}$ . Así, transformamos un conjunto de ecuaciones diferenciales con excitaciones senoidales en el dominio del tiempo, en un conjunto de ecuaciones algebraicas que contienen números complejos en el dominio de la frecuencia. En efecto, nos enfrentamos ahora con la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas para los fasores desconocidos. Los fasores se transforman de manera inversa al dominio del tiempo para obtener la solución del conjunto original de ecuaciones diferenciales. La solución de circuitos senoidales en estado estable sería relativamente simple si se pudiera escribir la ecuación fasorial directamente de la descripción del circuito.

Mientras que  $v(t)$  representa un voltaje en el dominio del tiempo, el fasor  $V$  representa el voltaje en el dominio de la frecuencia. El fasor contiene sólo información de magnitud y fase, y la frecuencia está implícita en esta representación. En la tabla 1.1 se muestran la transformación del dominio del tiempo en el dominio de la frecuencia, así como la transformación inversa. Recuerde que el ángulo de fase se basa en una función coseno y, por tanto, si se incluye una función seno se debe emplear un factor de corrimiento de  $90^\circ$ .

**TABLA 1.1. REPRESENTACIÓN FASORIAL**

DOMINIO DEL TIEMPO	DOMINIO DE LA FRECUENCIA
$A \cos(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm \theta$
$A \sin(\omega t \pm \theta)$	$A \angle \pm (\theta - 90^\circ)$

### 1.3 RELACIONES FASORIALES PARA ELEMENTOS DE CIRCUITOS

Establezcamos las relaciones fasoriales entre voltaje y corriente para los elementos R, L y C.

Para el caso de una resistencia, la relación voltaje a corriente está dada por

$$v(t) = R i(t) \quad (1.14)$$

Si se aplica el voltaje complejo  $V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$ , la ecuación (1.14) se reproduce en la corriente compleja  $I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$  y se convierte en

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = R I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad (1.15)$$

la cual se reduce a

$$V_M e^{j\theta_v} = R I_M e^{j\theta_i} \quad (1.16)$$

y escrita en forma fasorial queda como

$$V = RI \quad (1.17)$$

donde

$$V = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v \text{ e } I = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i \quad (1.18)$$

De la ecuación 1.16 vemos que  $\theta_v = \theta_i$ , por lo que la corriente y el voltaje para este circuito están en fase.

Tradicionalmente los números complejos se representan como puntos en un espacio de dos dimensiones, donde el eje “x” representa al eje real y el eje “y” al eje imaginario. El segmento de línea que conecta el origen con el punto proporciona una representación adecuada de la magnitud y el ángulo cuando los números complejos se escriben en forma polar. Como los fasores son números complejos, es conveniente representar gráficamente el voltaje y la corriente fasorial como segmentos de línea. Una gráfica de los segmentos de línea que representan fasores se denomina diagrama fasorial. Esta representación pictórica de los fasores proporciona información inmediata de la magnitud relativa de un fasor con otro, el ángulo entre dos fasores y la posición relativa de un fasor con respecto a otro (adelanto o atraso).

La relación voltaje-corriente para una bobina, como se muestra en la figura 1.4, es

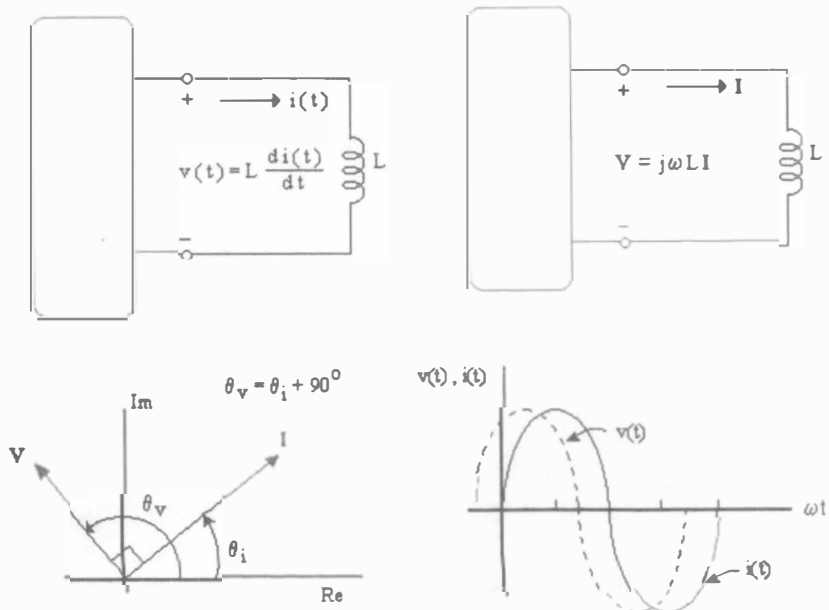
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.19)$$

Sustituyendo el voltaje y la corriente complejos en esta ecuación se obtiene

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = L \frac{d}{dt} I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad (1.20)$$

la cual se reduce a

$$V_M e^{j\theta_v} = j\omega L I_M e^{j\theta_i} \quad (1.21)$$



**Figura 1.4** Relaciones de voltaje-corriente para un inductor: a) relaciones en el tiempo, b) representación fasorial, c) diagrama fasorial y d) formas de onda.

La ecuación anterior en notación fasorial es

$$V = j\omega LI \tag{1.22}$$

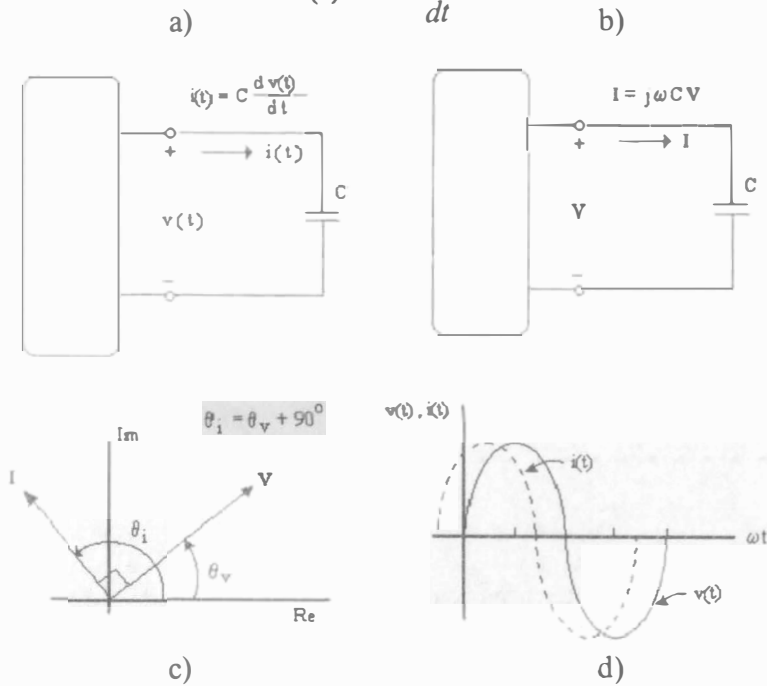
Obsérvese que la ecuación diferencial en el dominio del tiempo (1.19) se convirtió en una ecuación algebraica con coeficientes complejos en el dominio de frecuencia. Esta relación se muestra en la figura 1.4b. Como el operador imaginario  $j = e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ = \sqrt{-1}$  la ecuación (1.22) puede escribirse

$$V_M e^{j\theta_v} = \omega LI_M e^{j(\theta + 90^\circ)} \tag{1.23}$$

Por tanto, el voltaje y la corriente están fuera de fase  $90^\circ$ , y en particular el voltaje se adelanta a la corriente por  $90^\circ$  o la corriente está retrasada  $90^\circ$  respecto al voltaje. El diagrama fasorial y la forma de onda senoidales para el circuito de la bobina se muestran en la figura 1.4 (c) y (d).

Como se muestra en la figura 1.5, la relación voltaje-corriente para nuestro último elemento pasivo, el capacitor, es

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.24)$$



**Figura 1.5** Relaciones voltaje-corriente para un capacitor:  
 a) relaciones de tiempo, b) representación fasorial,  
 c) diagrama fasorial y d) formas de onda.

Una vez más, empleando el voltaje y la corriente complejos obtenemos

$$I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} = C \frac{d}{dt} V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$$

la cual se reduce a

$$I_M e^{j\theta_i} = j\omega C V_M e^{j\theta_v} \quad (1.25)$$

En notación fasorial esta ecuación se convierte en

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (1.26)$$

La ecuación diferencial (1.24) en el dominio del tiempo se transformó en la ecuación (1.26), una ecuación algebraica con coeficientes complejos en el dominio de la frecuencia. Sustituir  $e^{j90^\circ}$  en la ecuación (1.25) da

$$I_M e^{j\theta_i} = \omega C V_M e^{j(\theta_v + 90^\circ)} \quad (1.27)$$

El voltaje y la corriente están  $90^\circ$  fuera de fase. La ecuación (1.27) establece que la corriente se adelanta  $90^\circ$  al voltaje o que el voltaje se retrasa  $90^\circ$  de la corriente.

### 1.4 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

La impedancia se define como la razón del voltaje  $V$  a la corriente  $I$ :

$$Z = \frac{V}{I} \quad (1.28)$$

en las terminales del elemento, relacionados uno con otro por la convención pasiva de signos, como se ilustra en la figura 1.6.

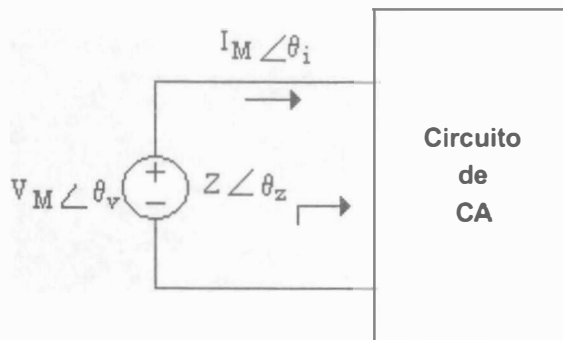


Figura 1.6 Relación de impedancia en general.

Como  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  son complejos, la impedancia  $\mathbf{Z}$  es compleja y

$$\mathbf{Z} = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_M \angle \theta_i} = \frac{V_M}{I_M} \angle \theta_v - \theta_i = Z \angle \theta_z \quad (1.29)$$

Como  $\mathbf{Z}$  es la razón de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$ , las unidades de  $\mathbf{Z}$  son ohms ( $\Omega$ ). Así, la impedancia en un circuito de corriente alterna (ca) es análoga a la resistencia en un circuito de corriente directa (cd). En forma rectangular la impedancia se expresa como

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (1.30)$$

donde  $R(\omega)$  es la componente real, o resistiva, y  $X(\omega)$  es la componente imaginaria o reactiva. En general, simplemente nos referimos a  $R$  como resistencia y a  $X$  como reactancia. Es importante notar que  $R$  y  $X$  son funciones reales de  $\omega$ , y por consiguiente  $\mathbf{Z}(\omega)$  es dependiente de la frecuencia. La ecuación (1.30) indica que  $\mathbf{Z}$  es un número complejo; sin embargo, no es un fasor.

Las ecuaciones (1.31) y (1.32) indican que  $Z \angle \theta_z = R + jX$

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + X^2} \\ \theta_z &= \tan^{-1} \frac{X}{R} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R &= Z \cos \theta_z \\ X &= Z \sin \theta_z \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde

Para los elementos pasivos individuales, la impedancia es como se muestra en la tabla.

TABLA 1.2. IMPEDANCIA DE ELEMENTOS PASIVOS.

ELEMENTOS PASIVOS	IMPEDANCIA
R	$Z = R$
L	$Z = j\omega L = jX_L = \omega L \angle 90^\circ, X_L = \omega L$
C	$Z = \frac{1}{j\omega C} = jX_c = -\frac{1}{\omega C} \angle 90^\circ, X_c = -\frac{1}{\omega C}$

La pregunta ahora es cómo encontrar la impedancia equivalente en circuitos de ca.

Las LCK y LVK son válidas en el dominio de la frecuencia. Vamos a utilizar este hecho para mostrar que las impedancias pueden combinarse usando las mismas reglas que se emplean para las combinaciones de resistencias. Es decir, si  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$  están conectadas en serie, la impedancia equivalente  $Z_s$  es

$$Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n \quad (1.33)$$

y si están conectadas en paralelo, la impedancia equivalente es

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (1.34)$$

#### **Ejemplo 1.4**

Determinar la impedancia equivalente de la red que se muestra en la figura 1.7 si la frecuencia es  $f = 60\text{Hz}$ . Calcular la corriente  $i(t)$  si la fuente de voltaje es  $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$ . Calcular la impedancia equivalente si la frecuencia es  $f = 400\text{Hz}$ .



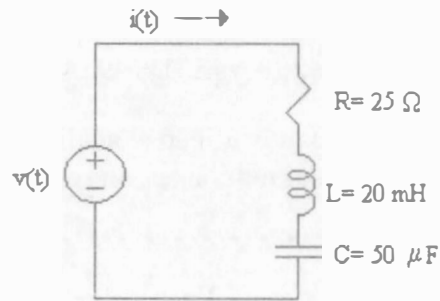


Figura 1.7 Circuito de ca en serie.

Las impedancias de cada elemento son

$$Z_R = 25\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j(2\pi \times 60)(20 \times 10^{-3}) = j7.54\Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{(2\pi \times 60)(50 \times 10^{-6})} = -j53.05\Omega$$

y la corriente en el circuito está dada por

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\angle 30^\circ}{25 - j45.51} = \frac{50\angle 30^\circ}{51.92\angle -61.22^\circ} = 0.96\angle 91.22^\circ A$$

En el dominio del tiempo,  $i(t) = 0.96 \cos(377t + 91.22^\circ) A$ .

Si la frecuencia es 400 Hz, la impedancia de cada elemento es

$$Z_R = 25\Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j50.27\Omega$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -j7.96\Omega$$

La impedancia total es

$$\mathbf{Z} = 25 + j42.31 = 49.14 \angle 59.42^\circ \Omega$$

Otra cantidad que es muy útil en el análisis de circuitos de ca es la admitancia de entrada de dos terminales, que es el recíproco de la impedancia; es decir,

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \quad (1.35)$$

Las unidades de  $\mathbf{Y}$  son siemens, y esta cantidad es análoga a la conductancia en circuitos de cd resistivos. Como  $\mathbf{Z}$  es un número complejo,  $\mathbf{Y}$  también es un número complejo:

$$\mathbf{Y} = Y_M \angle \theta_z \quad (1.36)$$

que se escribe en forma rectangular como

$$\mathbf{Y} = G + jB \quad (1.37)$$

donde  $G$  y  $B$  se llaman conductancia y susceptancia, respectivamente. Debido a la relación entre  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$ , podemos expresar los componentes de una cantidad como función de los componentes de la otra. De la expresión

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \quad (1.38)$$

podemos mostrar que

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (1.39)$$

y de una manera similar, podemos mostrar que

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (1.40)$$

Es muy importante notar que en general  $R$  y  $G$  no son recíprocas una de la otra. Lo mismo es cierto para  $X$  y  $B$ . El caso puramente resistivo es una excepción. En el caso puramente reactivo las cantidades son recíprocas negativas una de la otra. La admitancia de los elementos pasivos individuales es

$$\begin{aligned} Y_R &= \frac{1}{R} = G \\ Y_L &= \frac{1}{j\omega L} = -\frac{1}{\omega L} \angle 90^\circ \\ Y_C &= j\omega C = \omega C \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (1.41)$$

Una vez más, como la LCK y la LVK son válidas en el dominio de la frecuencia, las reglas para combinar admitancias son las mismas que aquellas para combinar conductancias; es decir, si  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  están conectadas en paralelo, la admitancia equivalente es

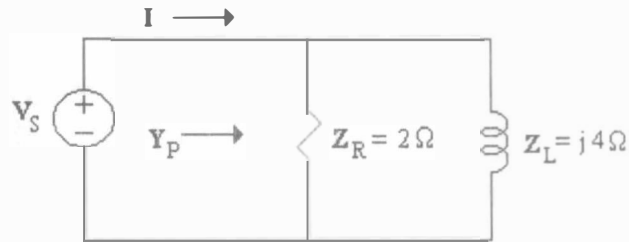
$$Y_p = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (1.42)$$

y si  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$  están conectadas en serie, la admitancia equivalente es

$$\frac{1}{Y_s} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots + \frac{1}{Y_n} \quad (1.43)$$

### **Ejemplo 1.5**

Calcular la admitancia equivalente  $Y_p$  para la red de la figura 1.8 y usarla para determinar la corriente  $I$  si  $V_s = 60 \angle 45^\circ$ .



**Figura 1.8** Ejemplo de circuito en paralelo, cálculo de la admitancia.

De la figura 1.8 se observa que

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{2}$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{-j}{4}$$

Por tanto,

$$Y_p = \frac{1}{2} - j\frac{1}{4}$$

y de aquí,

$$I = Y_p V_S$$

$$= \left( \frac{1}{2} - j\frac{1}{4} \right) (60 \angle 45^\circ)$$

$$= 33.6 \angle 18.43^\circ$$

## 1.5 ANÁLISIS BÁSICO UTILIZANDO LAS LEYES DE KIRCHHOFF

Las leyes de Kirchhoff se pueden aplicar en el dominio de la frecuencia y, por tanto, se pueden usar para calcular voltajes y corrientes de estado estable en circuitos de ca. Este método incluye expresar esos voltajes y corrientes como fasores; una vez hecho esto, el análisis de ca en estado

estable empleando ecuaciones fasoriales se lleva a cabo en forma idéntica a la utilizada en el análisis de cd de circuitos resistivos. El álgebra de números complejos es la herramienta que se utiliza para la manipulación matemática de las ecuaciones fasoriales, las cuales, por supuesto, tienen coeficientes complejos. Las técnicas que se han aplicado en la solución de circuitos resistivos de cd también son válidas en el análisis de circuitos de ca, siendo la única diferencia que en el análisis de circuitos de ca de estado estable las ecuaciones fasoriales algebraicas tienen coeficientes complejos.

### Ejemplo 1.6

Calcular todos los voltajes y corrientes en el circuito de la figura 1.9.

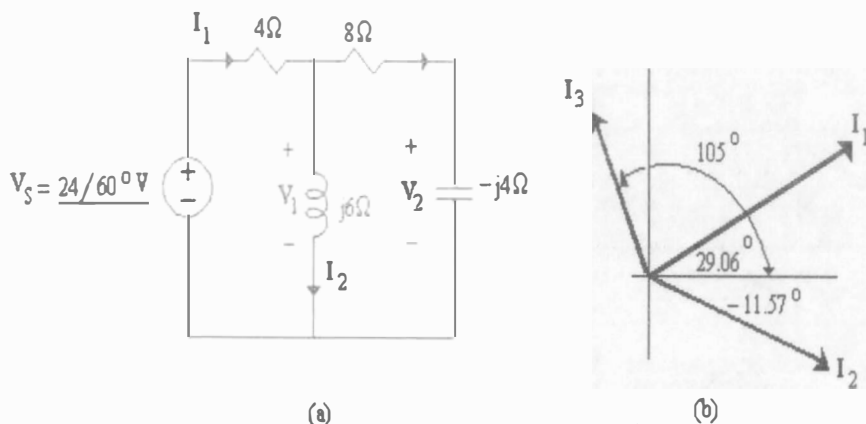


Figura 1.9 a) Ejemplo de circuito de ca y b) diagrama fasorial para las corrientes.

Se calculará la impedancia total vista por la fuente  $V_s$ . Se usará esta para determinar  $I_1$ . Si conocemos  $I_1$ , podemos calcular  $V_1$  usando la LVK.

La impedancia total vista por la fuente  $V_s$  es

$$Z_{eq} = 4 + \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4}$$

$$Z_{eq} = 4 + \frac{24 + j48}{8 + j2}$$

$$Z_{eq} = 4 + 4.24 + j4.94$$

$$Z_{eq} = 9.61 \angle 30.94^\circ \Omega$$

entonces 
$$I_1 = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{24 \angle 60^\circ}{9.61 \angle 30.94^\circ}$$

$$I_1 = 2.5 \angle 29.06^\circ$$

$V_1$  puede determinarse usando la LVK:

$$V_1 = V_s - 4I_1$$

$$V_1 = 24 \angle 60^\circ - 10 \angle 29.06^\circ$$

$$V_1 = 3.26 + j15.93 = 16.26 \angle 78.43^\circ$$

$V_1$  puede calcularse mediante el divisor de voltaje:

$$V_1 = \frac{V_s \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4}}{4 + \frac{(j6)(8 - j4)}{j6 + 8 - j4}}$$

el cual, partiendo de nuestros cálculos previos, es

$$V_1 = \frac{(24 \angle 60^\circ)(6.51 \angle 49.36^\circ)}{9.61 \angle 30.94^\circ}$$

$$V_1 = 16.26 \angle 78.42^\circ$$

Conociendo  $V_1$  se pueden calcular  $I_2$  e  $I_3$ :

$$I_2 = \frac{V_1}{j6} = \frac{16.26 \angle 78.42^\circ}{6 \angle 90^\circ}$$

$$I_2 = 2.71 \angle -11.57^\circ$$

$$I_3 = \frac{V_1}{8 - j4}$$

$$I_3 = 1.82 \angle 105^\circ$$

Finalmente,  $V_2$  puede calcularse como

$$V_2 = I_3(-j4)$$

$$V_2 = 7.28 \angle 15^\circ$$

## 1.6 ANÁLISIS DE CIRCUITOS MEDIANTE FASORES

Todos los métodos de análisis aplicables a circuitos de cd se pueden aplicar al análisis de ca en estado estable. Algunos de los métodos utilizados son: análisis por mallas, análisis nodal, divisores de corriente y voltaje, superposición, etcétera.

### *Ejemplo 1.7*

Determinar la corriente  $I_o$  en la red de la figura 1.10 usando análisis nodal.

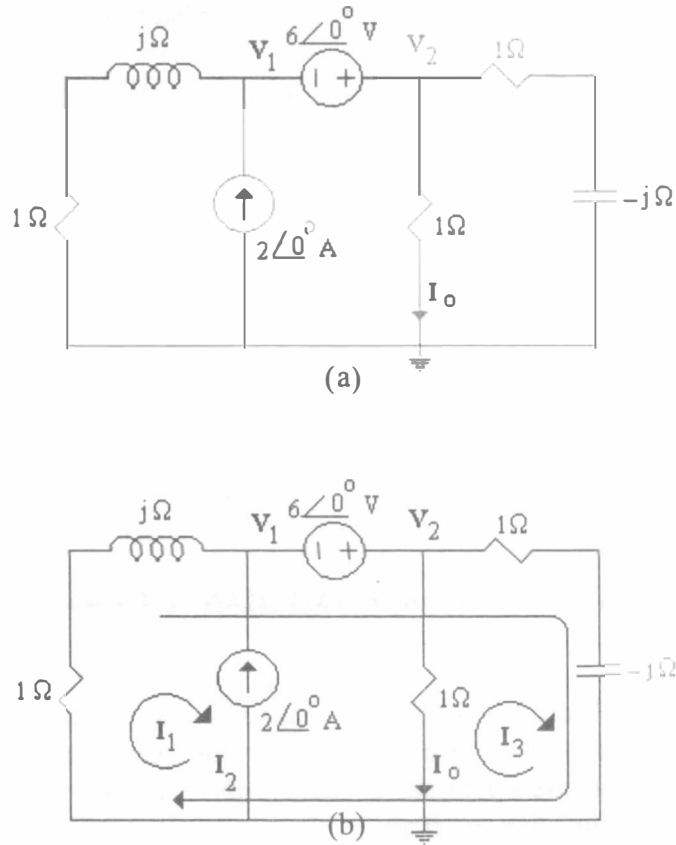


Figura 1.10 a) Análisis nodal y b) análisis de mallas para el ejemplo 1.7.

La ecuación de la LCK para el supernodo que incluye la fuente de voltaje es

$$\frac{V_1}{1+j} - 2\angle 0^\circ + \frac{V_2}{1} + \frac{V_2}{1-j} = 0$$

y la ecuación de restricción de la LVK asociada es

$$V_1 + 6\angle 0^\circ = V_2$$



Resolviendo para  $V_1$  en la segunda ecuación y utilizando este valor en la primera ecuación, se obtiene

$$\frac{V_2 - 6\angle 0^\circ}{1+j} - 2\angle 0^\circ + V_2 + \frac{V_2}{1-j} = 0$$

o

$$V_2 \left[ \frac{1}{1+j} + 1 + \frac{1}{1-j} \right] = \frac{6+2+2j}{1+j}$$

Resolviendo para  $V_2$  obtenemos

$$V_2 = \left( \frac{4+j}{1+j} \right)$$

Por tanto,

$$I_o = \frac{4+j}{1+j} = \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2}j \right)$$

### Ejemplo 1.8

Determinar el voltaje  $V_o$  en el circuito de la figura 1.11. En este circuito utilizaremos el teorema de Thévenin y el teorema de Norton.

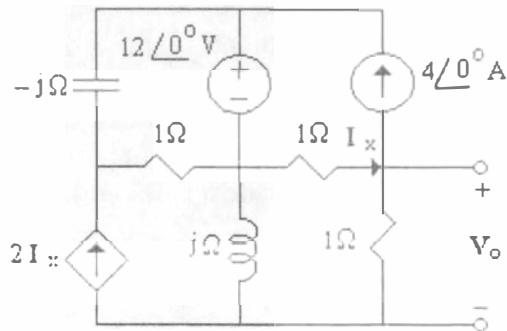
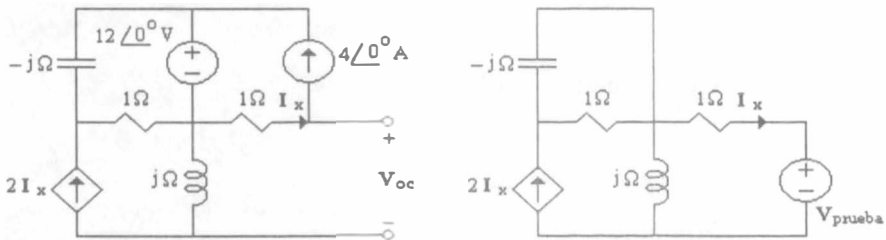


Figura 1.11 Circuito empleado en el ejemplo 1.8.

Para aplicar el teorema de Thévenin, encontraremos el voltaje de circuito abierto y entonces determinaremos la impedancia equivalente de Thévenin usando una fuente de prueba en las terminales del circuito abierto. Podemos determinar la impedancia equivalente de Thévenin calculando la corriente de cortocircuito; sin embargo, determinaremos esta corriente cuando apliquemos el teorema de Norton (Fig. 1.12).



**Figura 1.12** Circuitos utilizados en el ejemplo 1.18 cuando se aplica el teorema de Thévenin.

El voltaje de circuito abierto se determina partiendo de la red de la figura anterior. Advierta que  $I_x' = 4\angle 0^\circ$ , y como  $2I_x'$  fluye a través de la bobina, el voltaje de circuito abierto  $V_{oc}$  es

$$\begin{aligned} V_{oc} &= -1(4\angle 0^\circ) + j1(2I_x') \\ V_{oc} &= -4 + j8 \end{aligned}$$

Para determinar la impedancia equivalente de Thévenin, eliminamos las fuentes independientes, aplicamos una fuente de voltaje de prueba en las terminales de salida y calculamos la corriente que sale de la fuente de prueba. Como se muestra en la siguiente figura, ya que  $I_x''$  fluye en la fuente de prueba, la LVK requiere que la corriente en la bobina también sea  $I_x''$ . La LVK alrededor del anillo que contiene la fuente de prueba indica que

$$j1I_x'' - 1I_x'' - V_{prueba} = 0$$

Por tanto,

$$I_x'' = \frac{-V_{prueba}}{1 - j}$$

entonces

$$Z_{th} = \frac{V_{prueba}}{-I_x}$$

$$Z_{th} = 1 - j\Omega$$

Si ahora se conecta la red equivalente de Thévenin a la carga como se muestra en la figura 1.13, se encuentra que el voltaje de salida  $V_o$  es

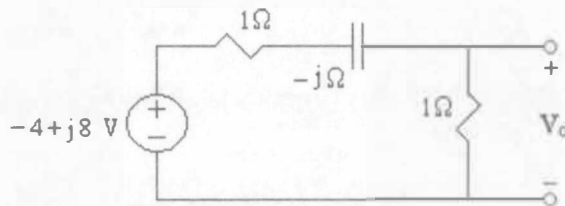


Figura 1.13 Circuito equivalente de Thévenin del ejemplo 1.8.

$$V_o = \frac{-4 + j8}{2 - j1}$$

$$V_o = -4 \angle -36.87^\circ$$

Al usar el teorema de Norton encontraremos la corriente de cortocircuito a partir de la red de la figura 1.14. Es posible usar el método de análisis por nodos.

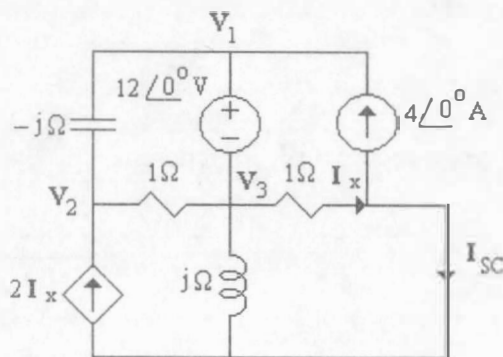


Figura 1.14 Aplicación del teorema de Norton al circuito del ejemplo 1.8.

Las ecuaciones de nodo son

$$\begin{aligned} V_3 + 12\angle 0^\circ &= V_1 \\ \frac{V_2 - V_1}{-j1} + \frac{V_2 - V_3}{1} - 2I_x''' &= 0 \\ \frac{V_1 - V_2}{-j1} + \frac{V_3 - V_2}{1} - 4\angle 0^\circ + \frac{V_3}{j1} + I_x''' &= 0 \\ I_x''' &= \frac{V_3}{1} \end{aligned}$$

Sustituyendo la primera y la última ecuaciones en las ecuaciones restantes se obtiene

$$\begin{aligned} (1 + j)V_2 - (3 + j)I_x''' &= j12 \\ -(1 + j)V_2 + (2)I_x''' &= 4 - j12 \end{aligned}$$

Resolviendo esas ecuaciones para  $I_x'''$  se obtiene

$$I_x''' = \frac{-4}{1 + j}$$

La ecuación de la LCK en el nodo de la extrema derecha en la red de figura es

$$I_x''' = 4\angle 0^\circ + I_{sc}$$

Resolviendo para  $I_{sc}$  obtenemos

$$I_{sc} = \frac{-(8 + j4)}{1 + j}$$

Se encontró con anterioridad que la impedancia equivalente de Thévenin era

$$Z_{Th} = (1 - j)\Omega$$

Usando la red equivalente de Norton, la red original se reduce a la mostrada en la figura 1.15.

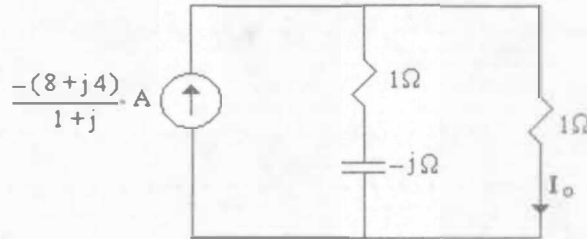


Figura 1.15 Circuito equivalente de Norton del ejemplo 1.8.

El voltaje  $V_o$  es entonces

$$V_o = \frac{-(8 + 4j)}{1 + j} \left[ \frac{(1)(1 - j)}{1 + 1 + j} \right]$$

$$V_o = -4 \left[ \frac{3 - j}{3 + j} \right]$$

$$V_o = -4 \angle -36.87^\circ$$

## 1.7 METODO GRÁFICO DE FASORES

### 1.7.1 Adición gráfica de fasores

Mediante el método gráfico se pueden calcular sumas de señales senoidales de la misma frecuencia con diferentes amplitudes y fases. Por ejemplo, los fasores  $Y_1$  y  $Y_2$ , los cuales representan señales senoidales

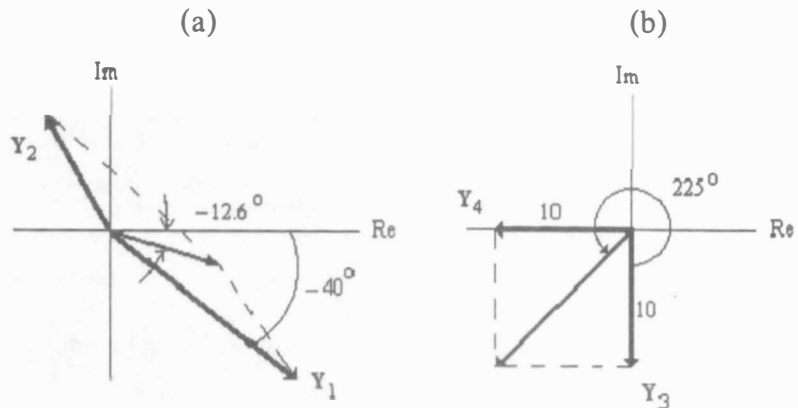
$$y_1(t) = 8 \cos(100t - 40^\circ)$$

y

$$y_2(t) = 5 \cos(100t + 120^\circ)$$

se grafican en el plano complejo de la figura 1.16 (a). La suma de los dos fasores se puede realizar mediante adición gráfica,

$$\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 = 3.7e^{-j12.6^\circ}$$



**Figura 1.16** Adición gráfica de fasores: a) suma de dos señales senoidales de la misma frecuencia y b) suma de seno y coseno.

entonces

$$y_1(t) + y_2(t) = 3.7 \cos(100t - 12.6^\circ)$$

De la figura 1.16(b) consideramos la suma

$$y_3(t) + y_4(t) = 10 \sin(10^4 t) - 10 \cos(10^4 t).$$

También sabemos que la función seno está relacionada con el coseno mediante

$$A \sin(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) \quad (1.44)$$

entonces

$$y_3(t) = 10 \sin(10^4 t)$$

tiene el fasor en el eje imaginario negativo, como se muestra en la figura 1.16b.

Del diagrama,

$$\begin{aligned} y_3(t) + y_4(t) &= 10 \operatorname{sen}(10^4 t) + 10 \cos(10^4 t + 180^\circ) \\ &= 10\sqrt{2} \cos(10^4 t + 225^\circ) \end{aligned}$$

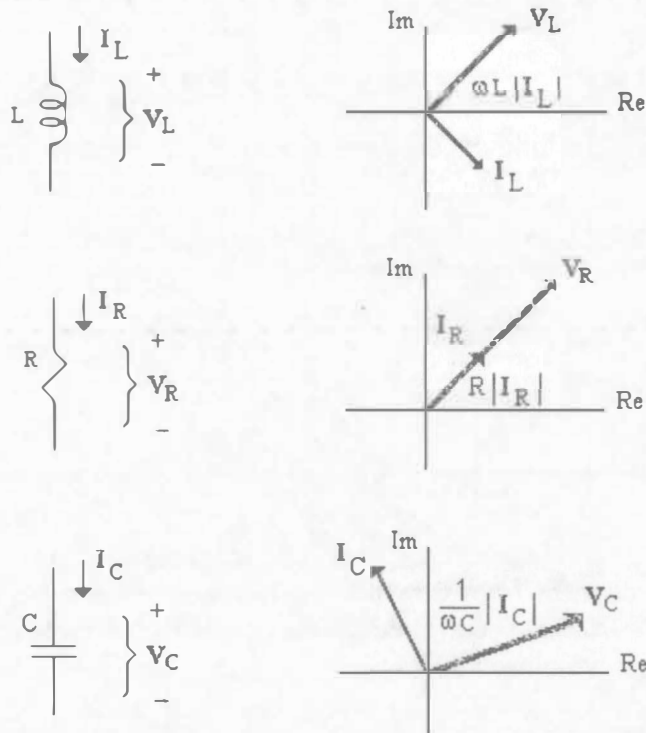


Figura 1.17 Relaciones de fasores para los elementos básicos.

### 1.7.2 Relaciones gráficas para R, L y C

La referencia para los fasores de voltaje y corriente para resistores, inductores y capacitores tiene la relación que se muestra en la figura 1.17.

Para el resistor, los fasores de voltaje y corriente tienen el mismo ángulo (se dice que el voltaje y la corriente están en fase), y la longitud del fador de voltaje es  $R$  veces la longitud (o magnitud) del fador de corriente.

Para el inductor

$$\frac{V_L}{I_L} = j\omega L$$

o

(1.45)

$$V_L = j\omega L I_L = (\omega L) e^{j90^\circ} I_L$$

La longitud del fador  $V_L$  es  $(\omega L)$  veces la longitud de  $I_L$ , y el ángulo de  $V_L$  es  $90^\circ$  mayor que el de  $I_L$ . La corriente está retrasada  $90^\circ$  respecto al voltaje.

Para el capacitor,

$$\frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{j\omega C}$$

(1.46)

$$V_C = \left( \frac{1}{\omega C} \right) e^{-j90^\circ} I_C$$

El fador de voltaje del capacitor tiene una longitud  $(1/\omega C)$  veces el fador de corriente del capacitor. La corriente del capacitor se adelanta al voltaje en  $90^\circ$ .

### 1.7.3 Solución a redes triviales

Las relaciones entre fasores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  pueden usarse para resolver gráficamente problemas de redes senoidales. Por ejemplo, para la red de la figura 1.18a el fador de la fuente se grafica en el diagrama de fasores (Fig. 1.18b).  $I$  es la corriente a través del inductor; por consiguiente, la magnitud del voltaje del inductor es  $\omega L$  veces la magnitud de la corriente. El ángulo de  $V_L$  es  $90^\circ$  mayor que el de la corriente. El fador de voltaje del resistor ( $V_R$ ) tiene el mismo ángulo de  $I$  y el doble de su magnitud.



El voltaje es

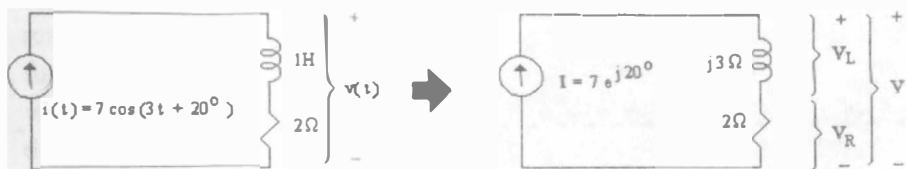
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_R$$

lo cual se obtiene gráficamente sumando  $V_L$  y  $V_R$  mediante el método del paralelogramo. Utilizando el método práctico se obtiene

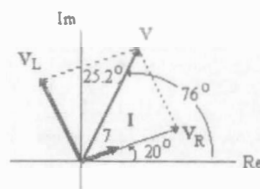
$$\mathbf{V} = 25e^{j76^\circ}$$

entonces,

$$v(t) = 25.2 \cos(3t + 76^\circ) \text{ V}$$



(a)



(b)

**Figura 1.18** Solución gráfica a redes en serie.

Para la red de la figura 1.19a, el fasor  $V$  se grafica en un plano complejo en la figura 1.19b.  $I_R$  está en la misma dirección de  $V$  y es un tercio de su magnitud. El fasor  $I_L$  es de magnitud

$$|I_L| = \left(\frac{1}{\omega L}\right)|V| = |V|$$

y retrasa a  $V$  en  $90^\circ$ . El fasor  $I_C$  tiene magnitud

$$|I_C| = \omega C |V| = \frac{1}{2} |V|$$

y el ángulo es  $90^\circ$  mayor que el de  $V$ .

La corriente neta

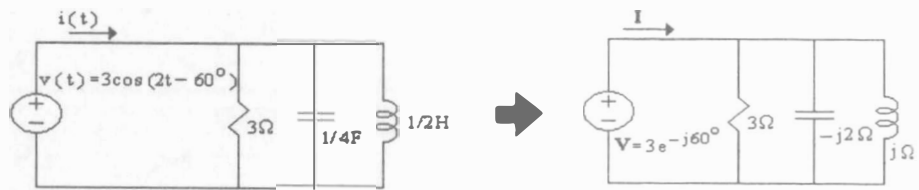
$$I = I_R + I_L + I_C$$

se construye gráficamente en el diagrama fasor y es aproximadamente

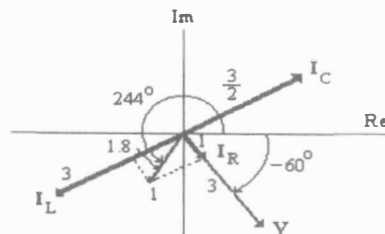
$$I = 1.8e^{j244}$$

entonces

$$i(t) = 1.8 \cos(2t + 244^\circ) A$$



(a)



(b)

**Figura 1.19** Solución gráfica a redes en paralelo.

### 1.7.4 Método de la fuente de prueba

Para resolver gráficamente redes más complejas, se parte del hecho de que la solución de una red de una sola fuente para cualquier señal fasorial es proporcional al fasor de la fuente. Además, si la magnitud de la fuente se cambia en algún factor, las magnitudes de todos los fasores de la red serán modificados por el mismo factor. Si la fase de la fuente se modifica, todos los ángulos se cambian en la misma magnitud.

En la red de la figura 1.20a, los voltajes  $V_R$  y  $V_L$  no están simplemente relacionados con la fuente  $V$ . Mediante el método gráfico se trata de suponer una corriente  $I$  y encontrar el voltaje  $V$  utilizando las relaciones de fasores. El  $V$  encontrado, que no necesariamente es el valor correcto, es la fuente de voltaje que produciría la corriente asumida. Luego se busca el valor verdadero de la corriente y de los otros fasores considerando cómo deben cambiarse la magnitud y el ángulo de  $I$  para encontrar el verdadero valor de  $V$ .

Por ejemplo, una corriente de prueba podría ser  $I = e^{j0^\circ}$ .

Los fasores de voltaje del resistor y del inductor con esta corriente son

$$\mathbf{V}_R = 2e^{j0^\circ} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_L = 3e^{j90^\circ}$$

como se grafican en el diagrama de fasores de prueba de la figura 1.20b. La suma de los voltajes del resistor y del inductor es la fuente de voltaje  $V$ , la cual tendría el valor de

$$\mathbf{V} = 3.6e^{j56.3^\circ}$$

si la corriente fuese la corriente de prueba.

Si  $I$  estuviese a  $-56.3^\circ$ , todos los fasores rotarían, en el sentido de las manecillas del reloj,  $56.3^\circ$ , y  $V$  estaría en  $0^\circ$ . Si  $I$  estuviese a  $5/3.6$  unidades de longitud en lugar de una unidad de longitud, todos los demás fasores serían  $5/3.6$  veces la longitud y la magnitud de  $V$  sería de 5 unidades en lugar de 3.6 unidades. El diagrama corregido de la red se muestra en la figura 1.20c.

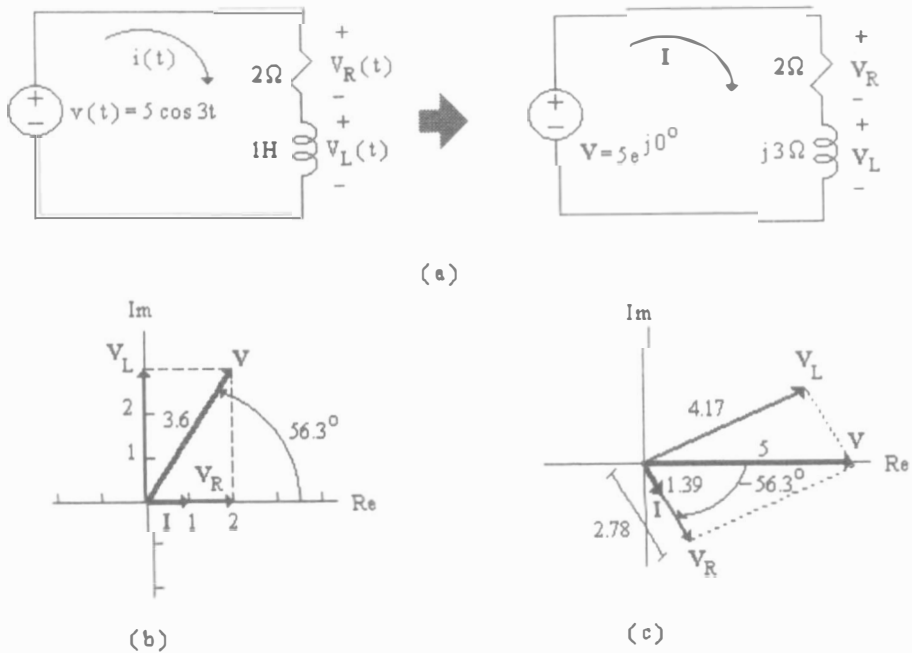


Figura 1.20 Usando el método de fuente de prueba: a) red y fasor equivalente, b) diagrama del fasor de prueba y c) diagrama de fasor corregido.

### 1.8 ANÁLISIS DE POTENCIA EN ESTADO ESTABLE

Típicamente, los dispositivos eléctricos y electrónicos tienen condiciones normales de funcionamiento de potencia instantánea máxima o de potencia pico que no pueden excederse sin dañar los dispositivos.

Podemos definir la potencia instantánea como el producto del voltaje y la corriente. La potencia promedio, obtenida al promediar la potencia instantánea, es la razón promedio a la cual la energía es absorbida o suministrada. En el caso de cd, donde la corriente y el voltaje son constantes, la potencia instantánea es igual a la potencia promedio. Sin embargo, éste no es el caso cuando las corrientes y voltajes son funciones senoidales del tiempo.

### 1.8.1 Potencia instantánea

Empleando la convención de signos, podemos calcular la potencia instantánea suministrada o absorbida por algún dispositivo como el producto del voltaje instantáneo a través del dispositivo y la corriente instantánea a través de él.

Consideremos el circuito de la figura 1.21. En general, el voltaje y la corriente en estado estable para la red pueden escribirse así:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \theta_v) \\ i(t) &= I_M \cos(\omega t + \theta_i) \end{aligned} \quad (1.44)$$

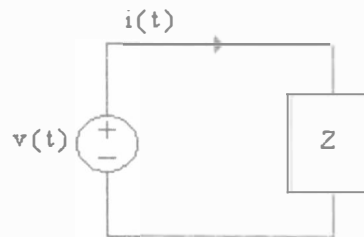


Figura 1.21. Red de ca simple.

La potencia instantánea es

$$\begin{aligned} p(t) &= i(t)v(t) \\ p(t) &= V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Empleando la identidad trigonométrica

$$\cos\phi_1 \cos\phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2)] \quad (1.46)$$

encontramos que la potencia instantánea puede escribirse como

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] \quad (1.47)$$

La potencia instantánea consta de dos términos. El primer término es una constante (es decir, es independiente del tiempo) y el segundo término es una onda coseno de dos veces la frecuencia de excitación.

### 1.8.2 Potencia promedio

El valor promedio de cualquier forma de onda puede calcularse integrando la función en un periodo completo y dividiendo este resultado entre el periodo. Si el voltaje y la corriente tienen la forma  $v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta_v)$ ,  $i(t) = I_M \cos(\omega t + \theta_i)$ , la potencia promedio es

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad (1.48)$$

donde  $t_0$  es arbitrario,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  es el periodo del voltaje o la corriente, y  $P$  se mide en watts. Realmente podemos promediar la forma de onda sobre un número entero de periodos de modo que la ecuación pueda escribirse como

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} V_M I_M \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) dt \quad (1.49)$$

donde  $n$  es un entero positivo.

Empleando la identidad trigonométrica en la expresión anterior, obtenemos

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_M I_M}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] dt \quad (1.50)$$

Al analizar la integración se puede determinar el resultado por inspección. El primer término es independiente de  $t$ , y por tanto es una constante en la integración. Integrando las constantes en el periodo y dividiendo entre el periodo, resulta simplemente la constante original. El segundo

término es una onda coseno. El valor promedio de una onda coseno en un periodo completo o un número entero de periodos es cero; por tanto, el segundo término desaparece. En consecuencia, la ecuación se reduce a

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (1.51)$$

Como  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ , el argumento para una función coseno puede ser  $\theta_v - \theta_i$  ó  $\theta_i - \theta_v$ . Además, nótese que  $\theta_v - \theta_i$  es el ángulo de la impedancia del circuito. Si analizamos un circuito puramente resistivo,

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \quad (1.52)$$

Debido a que las impedancias puramente reactivas no absorben potencia promedio, con frecuencia reciben el nombre de elementos sin pérdidas. La red puramente reactiva opera en una forma tal que almacena energía en una parte del periodo y la libera en otra.

### Ejemplo 1.9

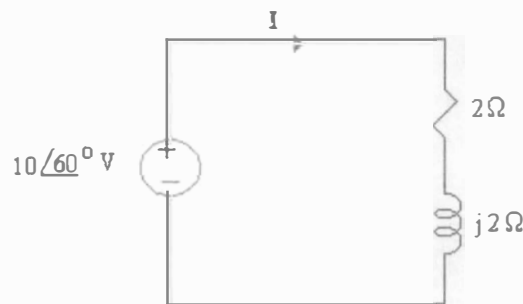


Figura 1.22 Ejemplo de circuito RL.

Determinar la potencia promedio absorbida por la impedancia que se muestra en la figura 1.22.

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V_M \angle \theta_v}{2 + 2j} = \frac{10 \angle 60^\circ}{2.83 \angle 45^\circ} = 3.53 \angle 15^\circ$$

Por tanto,  $I_M = 3.53$  y  $\theta_i = 15^\circ$

$$P = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i)$$

De aquí,

$$P = \frac{1}{2} (10)(3.53) \cos(60^\circ - 15^\circ)$$

$$P = 12.5W$$

Como la bobina no absorbe potencia, podemos emplear la ecuación para potencia en una resistencia; para ello encontramos el voltaje en la resistencia

$$V_R = \frac{(10 \angle 60^\circ)(2)}{2 + 2j} = 7.07 \angle 15^\circ$$

y, por tanto,

$$P = \frac{1}{2} (7.07)(3.53)$$

$$P = 12.5W$$

Además, usando la ley de Ohm podemos también emplear las expresiones

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_M^2}{R}$$

o

$$P = \frac{1}{2} I_M^2 R$$

### ***Ejemplo 1.10***

Determinar, en el circuito de la figura 1.23, la potencia promedio total absorbida y la potencia promedio total suministrada.



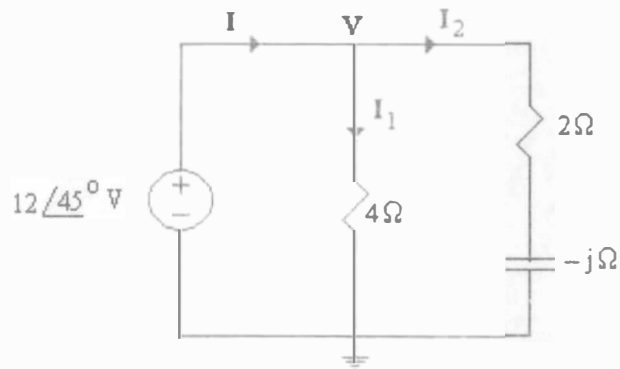


Figura 1.23 Ejemplo de circuito para ilustrar un balance de potencia.

De la figura notamos que

$$I_1 = \frac{12\angle 45^\circ}{4} = 3\angle 45^\circ$$

$$I_2 = \frac{12\angle 45^\circ}{2-j} = \frac{12\angle 45^\circ}{2.24\angle -26.57^\circ} = 5.37\angle 71.57^\circ$$

y, por tanto,

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = 3\angle 45^\circ + 5.37\angle 71.57^\circ$$

$$I = 8.16\angle 62.08^\circ$$

La potencia promedio absorbida en la resistencia de 4Ω es

$$P_4 = \frac{1}{2}V_M I_M = \frac{1}{2}(12)(3) = 18W$$

La potencia promedio absorbida en la resistencia de 2Ω es

$$P_2 = \frac{1}{2}I_M^2 R = \frac{1}{2}(5.37)^2(2) = 28.8W$$

Por tanto, la potencia promedio total absorbida es

$$P_A = 18 + 28.8 = 46.8W$$

La potencia promedio total suministrada por la fuente es

$$P_s = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i)$$

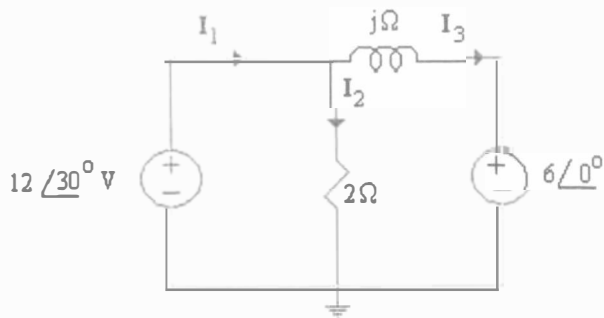
$$P_s = \frac{1}{2} (12)(8.16) \cos(45^\circ - 62.08^\circ)$$

$$P_s = 46.8W$$

Así, la potencia promedio total suministrada es, por supuesto, igual a la potencia promedio total absorbida.

### *Ejemplo 1.11*

Considerar la red de la figura 1.24 y determinar la potencia promedio total absorbida y suministrada por cada elemento.



**Figura 1.24** Ejemplo de circuito RL con dos fuentes.

De la figura notamos que

$$I_2 = \frac{12\angle 30^\circ}{2} = 6\angle 30^\circ$$

e

$$I_3 = \frac{12\angle 30^\circ - 6\angle 0^\circ}{j} = \frac{4.39 + j6}{j} = 7.43\angle -36.19^\circ$$

La potencia absorbida por la resistencia de  $2\Omega$  es

$$P_2 = \frac{1}{2}V_M I_M = \frac{1}{2}(12)(6) = 36W$$

De acuerdo con la dirección de  $I_3$ , la fuente  $6\angle 0^\circ$  está absorbiendo potencia. La potencia que absorbe está dada por

$$P_{6\angle 0^\circ} = \frac{1}{2}V_M I_M \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$P_{6\angle 0^\circ} = \frac{1}{2}(6)(7.43) \cos[0^\circ - (-36.19^\circ)]$$

$$P_{6\angle 0^\circ} = 18W$$

Para saber si la fuente está suministrando potencia al resto de la red o absorbiéndola, empleamos la convención pasiva de signos; o sea, si la dirección de la corriente de referencia entra en la terminal positiva de la fuente y la respuesta es positiva, entonces la fuente está absorbiendo potencia. Si la respuesta es negativa, la fuente está suministrando potencia al resto del circuito.

Para obtener la potencia suministrada a la red, calculamos  $I_1$  como

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 = 6\angle 30^\circ + 7.43\angle -36.19^\circ$$

$$I_1 = 11.29\angle -7.07^\circ$$

Por tanto, la potencia suministrada por la fuente de  $12\angle 30^\circ$  utilizando la convención es

$$P_s = \frac{1}{2}(12)(11.29) \cos(30^\circ + 7.07^\circ)$$

$$P_s = 54W$$

$\therefore$  la potencia absorbida es igual a la potencia suministrada.

### 1.8.3 Transferencia de potencia promedio máxima

Para abordar el tema analizaremos el circuito de la figura 1.25 a fin de determinar la impedancia de carga de la red que dará como resultado una potencia promedio máxima absorbida por la impedancia  $Z_L$ .

La ecuación para potencia promedio en la carga es

$$P_L(t) = \frac{1}{2} V_L I_L \cos(\theta_{v_L} - \theta_{i_L}) \quad (1.53)$$

La corriente y el voltaje en la carga están dados por las expresiones

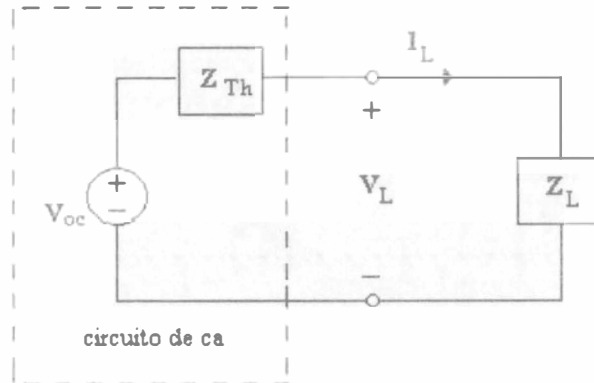
$$I_L = \frac{V_{oc}}{Z_{Th} + Z_L}$$

$$V_L = \frac{V_{oc} Z_L}{Z_{Th} + Z_L}$$

donde

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$



**Figura 1.25** Circuito utilizado para examinar la máxima transferencia de potencia.

La magnitud de la corriente y el voltaje fasoriales está dada por las expresiones

$$I_L = \frac{|V_{oc}|}{\left[ (R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.54)$$

$$V_L = \frac{|V_{oc}| \sqrt{R_L^2 + X_L^2}}{\left[ (R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Los ángulos de fase para la corriente y voltaje están contenidos en la cantidad  $(\theta_{v_L} - \theta_{i_L})$ .

Obsérvese que también  $\theta_{v_L} - \theta_{i_L} = \theta_{z_L}$  y además  $\cos \theta_{z_L} = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + X_L^2}}$ .

Sustituyendo las ecuaciones en la ecuación de potencia se obtiene

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{oc}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2} \quad (1.55)$$

Para maximizar  $P_L$ , hay que tener presente que  $V_{OC}$  es una constante. La cantidad  $(X_{Th} + X_L)$  no absorbe potencia y, por tanto, cualquier valor diferente de cero de esta cantidad sólo sirve para reducir  $P_L$ . De aquí que podamos eliminar este término seleccionando  $X_L = -X_{Th}$ . Nuestro problema se reduce a maximizar

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{V_{OC}^2 R_L}{(R_L + R_{Th})^2} \quad (1.56)$$

Ésta es la misma cantidad que se maximiza para el caso de un problema puramente resistivo seleccionando  $R_L = R_{Th}$ . Por lo tanto, para una transferencia de potencia promedio máxima a la carga que se muestra en la figura 1.20,  $Z_L$  debe elegirse de forma que

$$Z_L = R_L + jX_L = R_{Th} - jX_{Th} = Z_{Th}^* \quad (1.57)$$

Finalmente, si la impedancia de carga es puramente resistiva (es decir,  $X_L = 0$ ), la condición para transferencia de potencia promedio máxima puede derivarse mediante la expresión  $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$ , donde  $P_L$  es la expresión en la ecuación (1.56).

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{2[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2] |V_{oc}|^2 - |V_{oc}|^2 R_L 4(R_{Th} + R_L)}{2[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} = 0$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \frac{-|V_{oc}|^2 R_L 4(X_{Th} + X_L)}{2[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2} = 0 \quad (1.58)$$

Esto se cumple cuando

$$R_{Th} = R_L \quad \text{y} \quad X_{Th} = -X_L$$

$$\therefore Z_{Th}^* = Z_L = R_{Th} - jX_{Th}$$

### 1.8.4 Valores efectivos o RMS

Se define como valor efectivo un valor constante o de cd que entrega la misma potencia promedio a una resistencia  $R$ .

El valor rms (raíz cuadrada media) de una senoide es igual al valor máximo dividido entre  $\sqrt{2}$ . Una corriente o voltaje senoidal con un valor máximo  $I_M$  o  $V_M$  entrega la misma potencia promedio a una resistencia  $R$  que una corriente o voltaje cd con un valor  $\frac{I_M}{\sqrt{2}}$  o  $\frac{V_M}{\sqrt{2}}$ .

Al usar los valores rms para el voltaje y la corriente, la potencia promedio puede escribirse en general como

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (1.60)$$

La potencia absorbida por una resistencia  $R$  es  $P = I_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{R}$ .

Al tratar con voltajes y corrientes en diferentes aplicaciones eléctricas es importante saber si los valores citados son máximos, promedio o rms.

Si la corriente en una resistencia  $R$  está compuesta por una suma de ondas senoidales de frecuencias diferentes, la potencia absorbida por la resistencia puede expresarse como

$$P = (I_{1rms}^2 + I_{2rms}^2 + \dots + I_{nrms}^2) R \quad (1.61)$$

donde el valor rms de la corriente total es

$$I_{rms} = \sqrt{I_{1rms}^2 + I_{2rms}^2 + \dots + I_{nrms}^2} \quad (1.62)$$

Cada componente representa una corriente de diferente frecuencia.

## 1.8.5 Potencia compleja

Consideremos el circuito de la figura 1. 26.

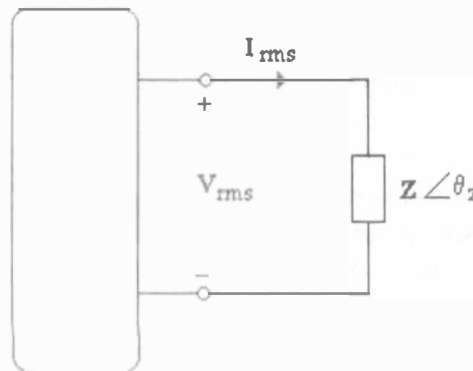


Figura 1.26 Circuito empleado para explicar relaciones de potencia.

La potencia compleja se define como

$$S = V_{rms} I_{rms}^* \quad (1.63)$$

donde  $I_{rms}^*$  se refiere al complejo conjugado de  $I_{rms}$ ; es decir, si  $I_{rms} = I_{rms} \angle \theta_i = I_R + jI_1$ , entonces  $I_{rms}^* = I_{rms} \angle -\theta_i = I_R - jI_1$ . La potencia compleja es entonces

$$S = V_{rms} \angle \theta_v I_{rms} \angle -\theta_i = V_{rms} I_{rms} \angle \theta_v - \theta_i \quad (1.64)$$

$$S = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

donde, por supuesto,  $\theta_v - \theta_i = \theta_z$ . La primera parte de esta ecuación es la potencia promedio o real. La parte imaginaria de  $S$  se denomina potencia *reactiva*. Por tanto, la potencia compleja se puede expresar en la forma

$$S = P + jQ \quad (1.65)$$



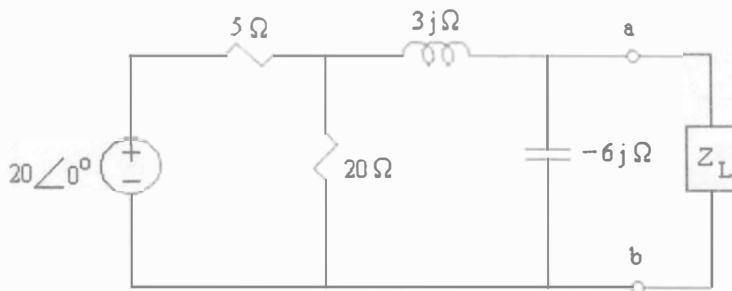
donde

$$P = \operatorname{Re}(S) = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (1.66)$$

$$Q = \operatorname{Im}(S) = V_{rms} I_{rms} \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)$$

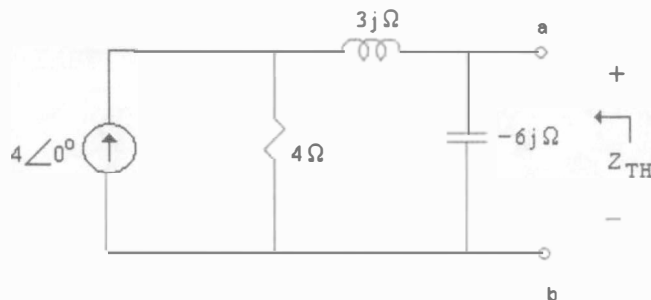
### Ejemplo 1.12

- a) Para el circuito de la figura, utilizar el equivalente de Thévenin para determinar el valor de  $Z_L$  en el circuito, a fin de obtener la máxima transferencia de potencia. ¿Qué elementos forman  $Z_L$ ?

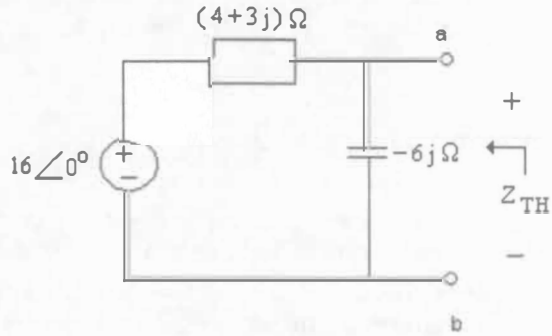


Iremos haciendo la transformación de fuentes hasta dejar el circuito en una forma simplificada, que nos ayude a encontrar  $V_{TH}$  y  $Z_{TH}$  a partir del equivalente de Thévenin.

Transformando la fuente de voltaje en serie con la impedancia de  $5\Omega$  a una fuente de corriente en paralelo con esta misma impedancia y encontrando el equivalente del paralelo de  $Z_{5\Omega}$  y  $Z_{20\Omega}$ , tenemos

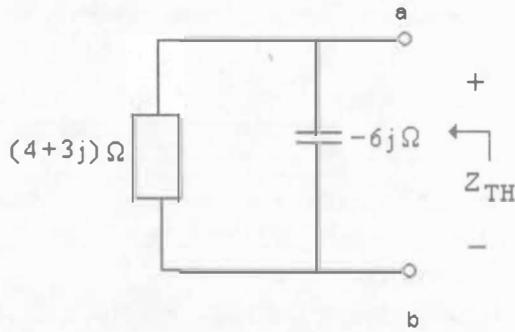


Hacemos de nuevo una transformación de fuentes para tener una sola malla, además de obtener la serie de  $Z_{4\Omega}$  y  $Z_{3j\Omega}$ .

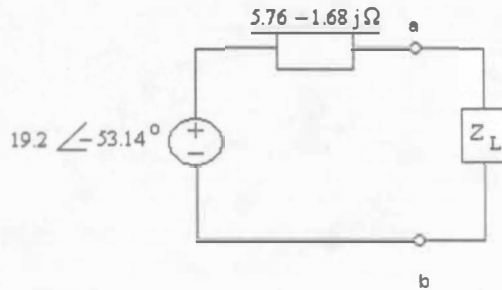


$$V_{TH} = \frac{16\sqrt{0^\circ}(-6j\Omega)}{(4-3j)\Omega} = 19.2\sqrt{-53.14^\circ}$$

Como tenemos una fuente independiente, podemos anularla para encontrar  $Z_{TH}$ .



El equivalente de Thévenin del circuito original queda finalmente así:



La condición para tener máxima transferencia de potencia en la carga de un circuito es

$$Z_L = Z\Omega_{th}^*$$

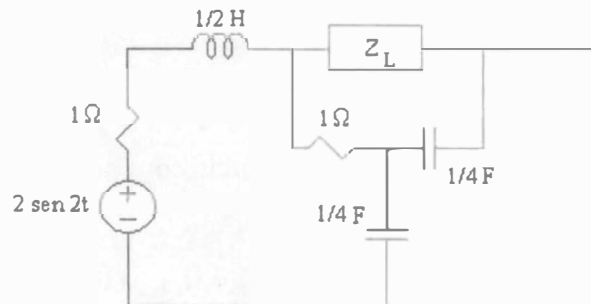
Por lo tanto,

$$Z_L = 5.76 + 1.68 j\Omega$$

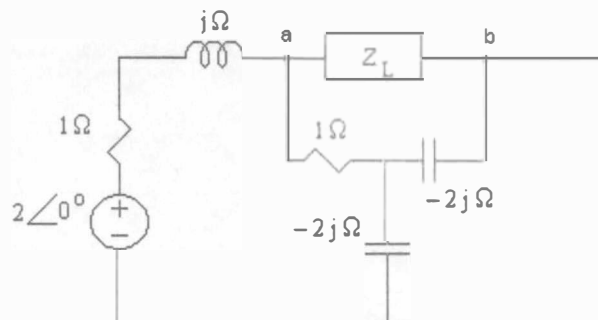
$Z_L$  está formada por una impedancia resistiva de  $5.76\Omega$  y una impedancia inductiva de  $1.68j\Omega$ .

### Ejemplo 1.13

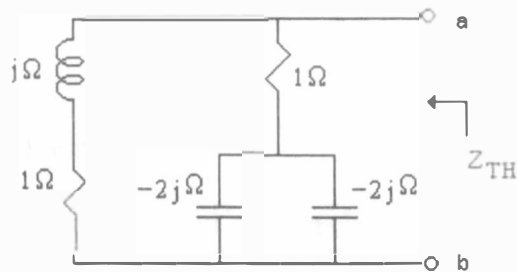
En el siguiente circuito, calcular  $Z_L$  para máxima transferencia de potencia.



Para resolver este problema, pasemos el circuito al dominio de fasores:



Para tener la máxima transferencia de potencia  $Z_L = Z_{TH}^*$ , eliminamos la fuente independiente de voltaje y reorganizamos el circuito para encontrar la impedancia de Thévenin.



Encontramos primero  $Z_{eq'}$  con el paralelo de las impedancias capacitivas

$$Z_{eq'} = 2j \parallel -2j = \frac{-4}{-4j} = -j$$

$Z_{eq'}$  está en serie con una de las impedancias resistivas de  $1\Omega$ , por lo que

$$Z_{eq} = Z_{eq'} + 1\Omega = 1 - j$$

y esto a su vez está en paralelo con la serie de la impedancia inductiva  $j\Omega$  y con la otra impedancia resistiva de  $1\Omega$ ; por lo tanto,

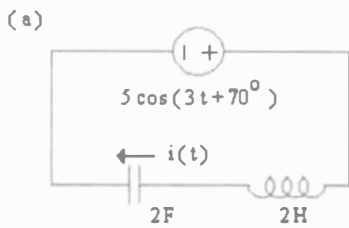
$$Z_{TH} = (1 + j) \parallel Z_{eq} = (1 + j)$$

$$Z_{TH} = 1\Omega$$

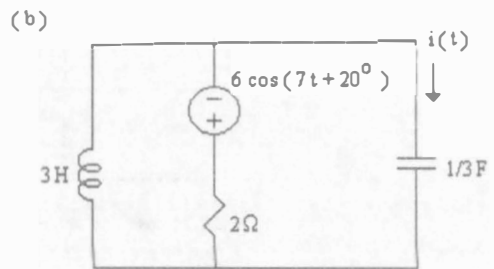
## Ejercicios propuestos

### Ejercicio 1.1

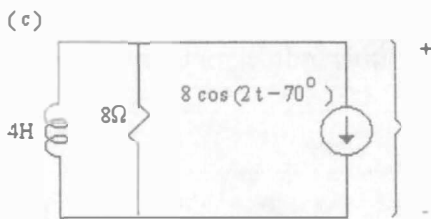
Encuentre las señales indicadas utilizando el método de fasores:



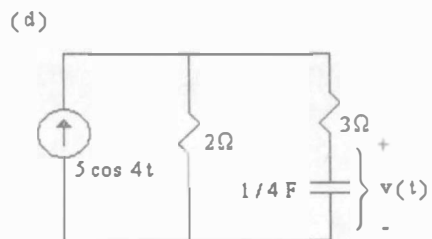
Sol.  $6.7 \cos(3t - 20^\circ) \text{ A}$



Sol.  $2.93 \cos(7t + 220^\circ) \text{ A}$



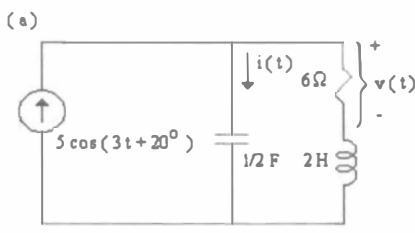
Sol.  $(64 / \sqrt{2}) \cos(2t + 155^\circ) \text{ V}$



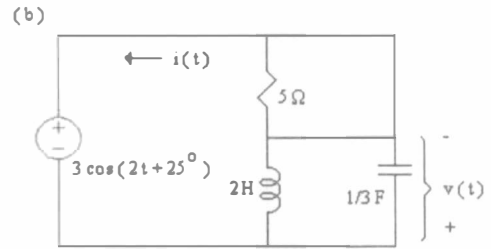
Sol.  $(10 / \sqrt{26}) \cos(4t - 78.7^\circ) \text{ V}$

**Ejercicio 1.2**

Encuentre las dos señales indicadas en cada red usando el método de fasores con los circuitos equivalentes:



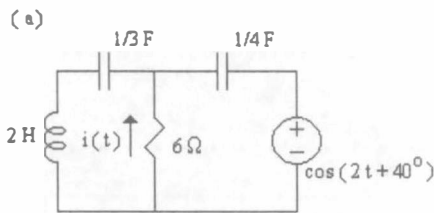
Sol.  $2.5 \cos(3t - 111.6^\circ)$  V  
 $529 \cos(3t + 23.4^\circ)$  A



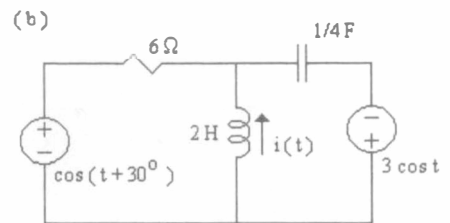
Sol.  $1.3 \cos(2t + 140.6^\circ)$  V  
 $0.54 \cos(2t + 230.6^\circ)$  A

**Ejercicio 1.3**

Encuentre la señal indicada utilizando el método de fasores.



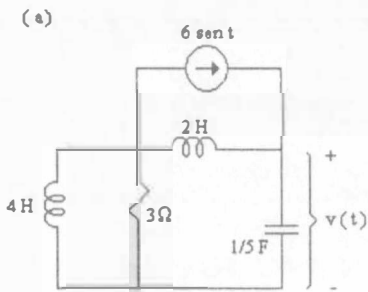
Sol.  $0.92 \cos(t + 22.6^\circ)$  A



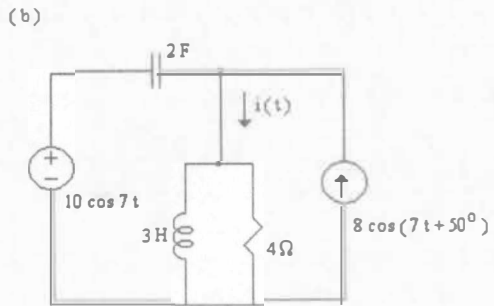
Sol.  $0.429 \cos(2t - 81^\circ)$  A

**Ejercicio 1.4**

Encuentre la señal indicada utilizando el método de fasores y las ecuaciones nodales.



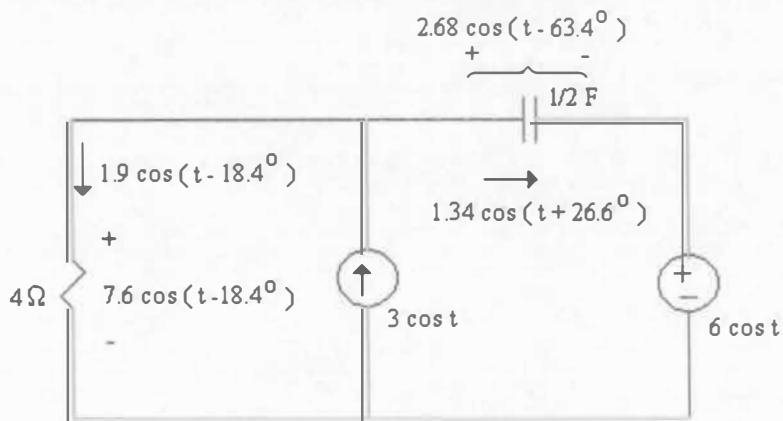
Sol.  $24.25 \text{ sen}(t + 39^\circ) \text{ V}$



Sol.  $2.65 \text{ cos}(7t - 9.8^\circ) \text{ A}$

**Ejercicio 1.5**

Encuentre la potencia compleja para cada elemento de la siguiente figura y compruebe que la potencia compleja de la red de salida de las fuentes es igual a la potencia compleja dentro de los demás elementos.



Sol.  $7.22 \text{ W}, -j1.8 \text{ W}, -10.82 + j3.6 \text{ W}, 3.6 - j1.8 \text{ W}$





# Capítulo 2

## RESPUESTA DE FRECUENCIA

### 2.1 RESPUESTAS EN FRECUENCIA

La respuesta de estado permanente de un sistema ante una entrada sinusoidal se conoce como **respuesta en frecuencia**. Se utiliza para efectuar análisis y diseño de sistemas (circuitos), variando la frecuencia de la señal de entrada (sinusoidal) en un cierto rango de frecuencias y se estudia la respuesta resultante. La **respuesta en frecuencia** nos dará una gráfica, a partir de la cual podemos ver qué modificaciones debemos hacerle a la función de transferencia del circuito para obtener las características deseadas de la respuesta transitoria. Busque diseñar un circuito lo más estable posible.

Ahora recordemos los requisitos para que un sistema sea estable:

1. La función de transferencia debe ser racional en  $s$  con coeficientes reales.
2. Los polos y ceros complejos deben ocurrir en pares complejos conjugados.
3. No deben tener polos en el semiplano derecho.
4. No deben tener polos múltiples en el eje  $j\omega$  (polos complejos conjugados cercanos a  $j\omega$  producen una respuesta en frecuencia de pico elevado).

## 2.2 GRÁFICAS DE MAGNITUD Y FASE

Existen varias posibilidades de uso de coordenadas para gráficas de respuesta en frecuencia. La variable independiente es siempre la frecuencia  $\omega$ , pero la variable dependiente puede ser la magnitud y fase de la función de transferencia. El uso de coordenadas logarítmicas en gráficas de magnitud y de fase se analizará en la siguiente sección de este capítulo, que corresponde a las gráficas de Bode. Se acostumbra utilizar el rango de frecuencias de 0 a  $\infty$  en lugar de  $-\infty$  a  $\infty$ . Ésta es una elección natural, ya que los generadores de laboratorio de ondas senoidales producen sólo  $\omega$  positivas. Además, la información para la frecuencia negativa es redundante porque la magnitud es una función par, en tanto que la fase es una función impar de  $\omega$ .

## 2.3 DIAGRAMAS DE BODE

Se puede representar una función de transferencia sinusoidal, por dos diagramas distintos; uno de la magnitud y el otro del ángulo de fase de la función de transferencia en función de la frecuencia.

La unidad comúnmente utilizada para la magnitud es el decibel [dB], es decir:

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

- Intervalos utilizados en diagramas de Bode.  
Si  $\omega_2 = 2\omega_1$  entonces hay una octava de diferencia entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Hay una década de diferencia entre estas dos frecuencias si  $\omega_2 = 10 \omega_1$ .
- Términos típicos de  $H(s)$ :
  1. Constante  $k$ .
  2. Polos o ceros en el origen  $\frac{1}{s^n}; s^m$   $n, m = 1, 2, \dots$

3. Polos o ceros en el eje real  $\frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1}; \frac{s}{\omega_c} + 1$

4. Polos o ceros complejos  $\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_c} + 1}; \frac{s^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_c} + 1$

Una función de transferencia se puede ver como la multiplicación de varias subfunciones de transferencia, donde cada una de ellas corresponde a alguno de los términos enumerados anteriormente, esto es:

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \times H_2(j\omega) \times H_3(j\omega) \times \dots \times H_n(j\omega) \quad (2.1)$$

aplicando logaritmos a ambos miembros de la ecuación 2.1:

$$\log H(j\omega) = \log [H_1(j\omega) \times H_2(j\omega) \times H_3(j\omega) \times \dots \times H_n(j\omega)] \quad (2.2)$$

y utilizando las propiedades de los logaritmos

$$\log H(j\omega) = \log H_1(j\omega) + \log H_2(j\omega) + \log H_3(j\omega) + \dots + \log H_n(j\omega) \quad (2.3)$$

Si se obtiene la magnitud y el ángulo de fase de cada una de las funciones de transferencia se obtienen las ecuaciones 2.4 y 2.5 respectivamente.

$$\log |H(j\omega)| = \log |H_1(j\omega)| + \log |H_2(j\omega)| + \log |H_3(j\omega)| + \dots + \log |H_n(j\omega)| \quad (2.4)$$

$$\phi(j\omega) = \phi_1(j\omega) + \phi_2(j\omega) + \phi_3(j\omega) + \dots + \phi_n(j\omega) \quad (2.5)$$

Para expresar la magnitud en decibeles, sólo falta multiplicar la ecuación 2.4 por 20.

$$20 \log H(j\omega) = 20 \log H_1(j\omega) + 20 \log H_2(j\omega) + 20 \log H_3(j\omega) + \dots + 20 \log H_n(j\omega) \tag{2.6}$$

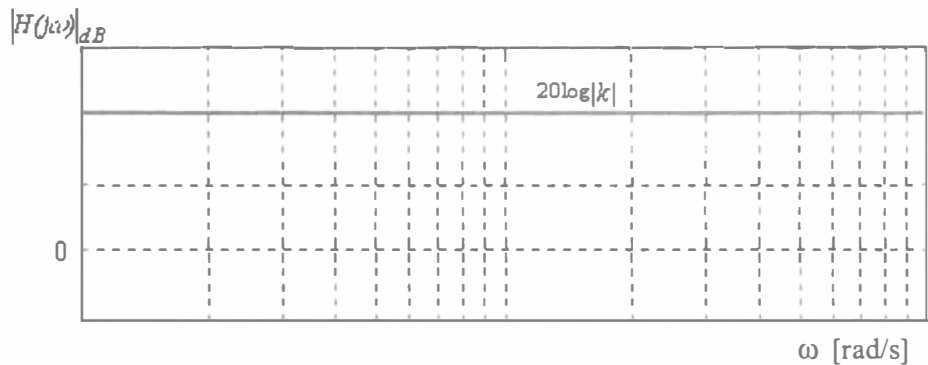
De la ecuación anterior se puede ver que la gráfica de magnitud en dB de una función de transferencia, es la suma de las gráficas de magnitud en dB de cada uno de los términos de la función de transferencia. Lo mismo podemos decir de la gráfica de fase analizando la ecuación 2.5. Tomando en cuenta esto, obtengamos las gráficas de magnitud y fase de cada uno de los términos mencionados, en función de la frecuencia.

### 2.3.1 Constante k

Aplicando la definición de dB al término constante tenemos

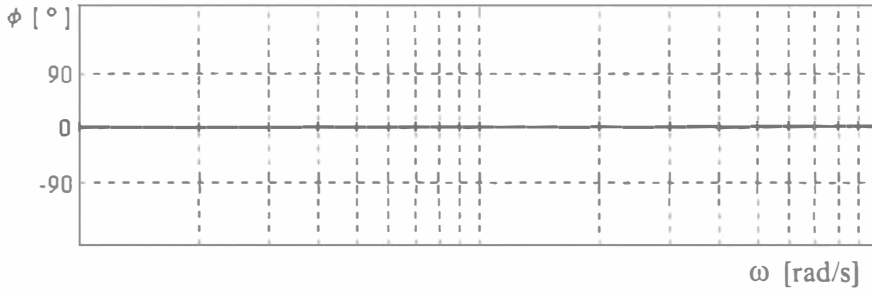
$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |k|$$

La gráfica de magnitud contra frecuencia de este término se muestra en la figura 2.1.



**Figura 2.1** Magnitud en dB del término k. Note que es constante independientemente del valor de la frecuencia.

El término constante es un número real, es decir su parte imaginaria es igual a cero; por lo tanto  $\phi = \tan^{-1} \frac{0}{k} = 0^\circ$  (Fig. 2.2).



**Figura 2.2** Fase en grados del término  $k$ . Tiene un valor de cero, independientemente de la frecuencia.

### 2.3.2 Polos y ceros en el origen

- a) Ceros en el origen  $s^m$ ,  $m=1,2,3$ , etc. Primero consideremos el caso en que  $m=1$ .

$$|H(j\omega)| = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \quad (2.7)$$

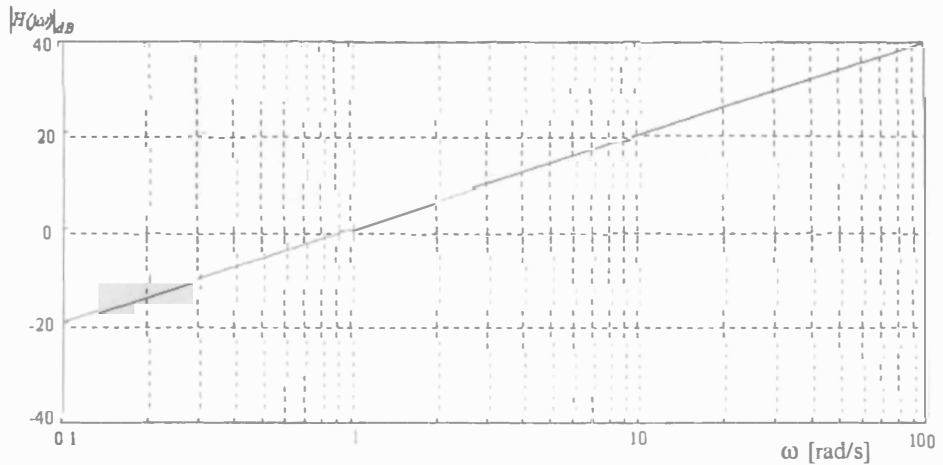
**TABLA 2.1** EVALUACIÓN DE LA ECUACIÓN 2.7.

$\omega$	$ H(j\omega) _{dB}$
0.1	-20
1	0
10	20
100	40

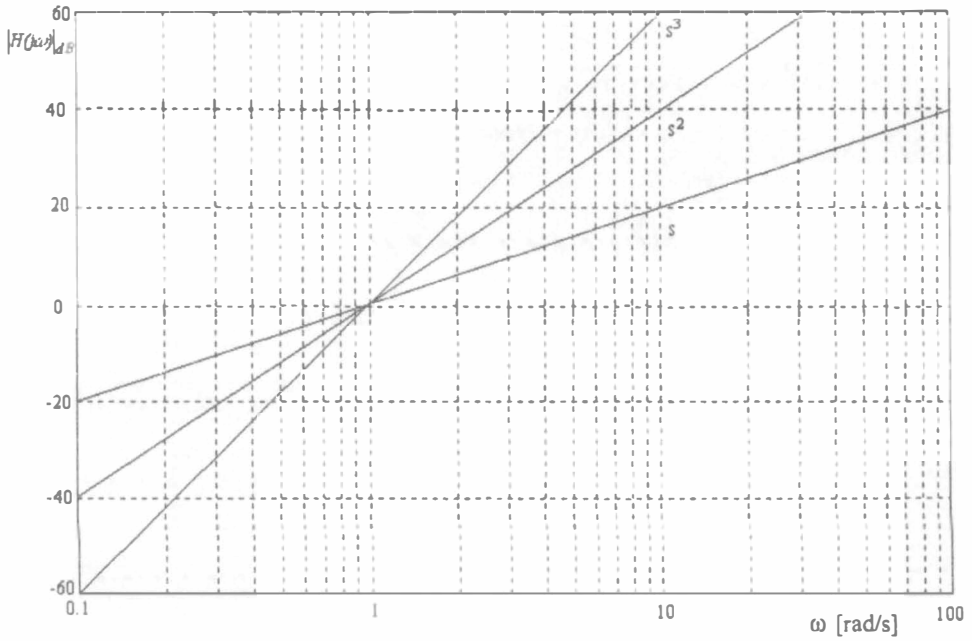
La pendiente de esta gráfica es de 20 dB/dec; es decir, entre dos frecuencias que tienen una década de diferencia tenemos una elevación de 20 dB en la gráfica de magnitud en dB. Conforme el orden del cero en el origen aumenta, es decir  $m = 2, 3, 4$ , etc., la pendiente de la recta será 40, 60, 80 dB/dec respectivamente, debido a que

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |(j\omega)^m| = 20 \log \omega^m = m(20 \log \omega)$$

En la figura 2.3 se grafican, los datos de la tabla 2.1 y en la figura 2.4, se puede observar el efecto en la magnitud al aumentar el orden del cero en el origen.

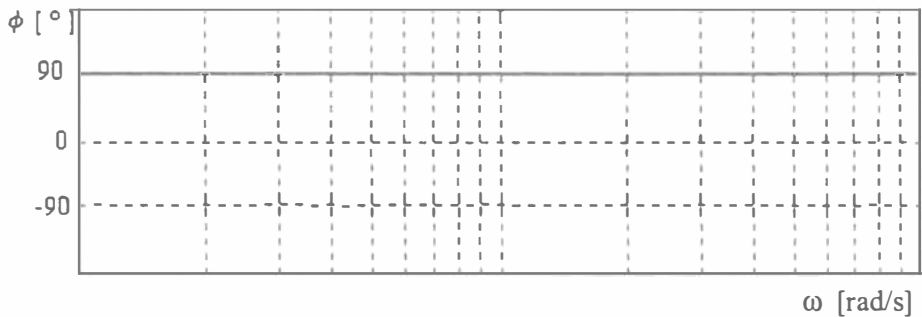


**Figura 2.3** Magnitud en dB del término  $s$ . Pendiente de la recta 20 dB/dec.



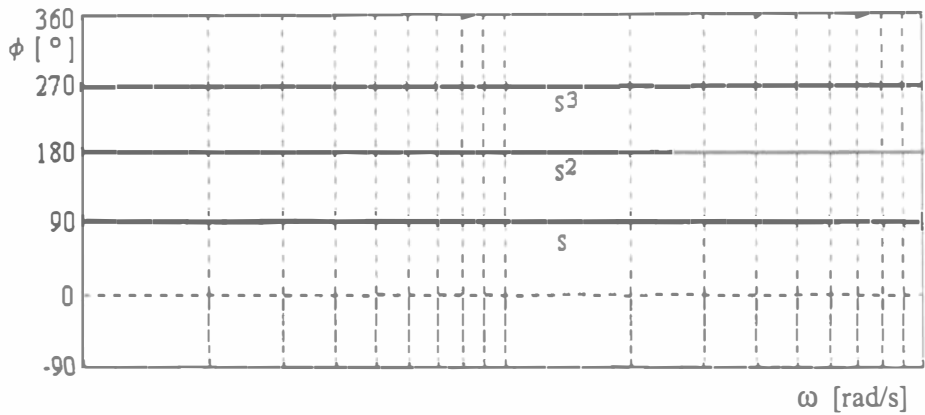
**Figura 2.4** Magnitud en dB de los término  $s, s^2, s^3$ , cuyas pendientes son 20, 40 y 60 dB/dec respectivamente.

En cuanto a la fase tenemos  $\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{0} = 90^\circ$ , lo cual quiere decir que  $\phi$  es un valor constante para todas las frecuencias. Esto está representado en la figura 2.5.



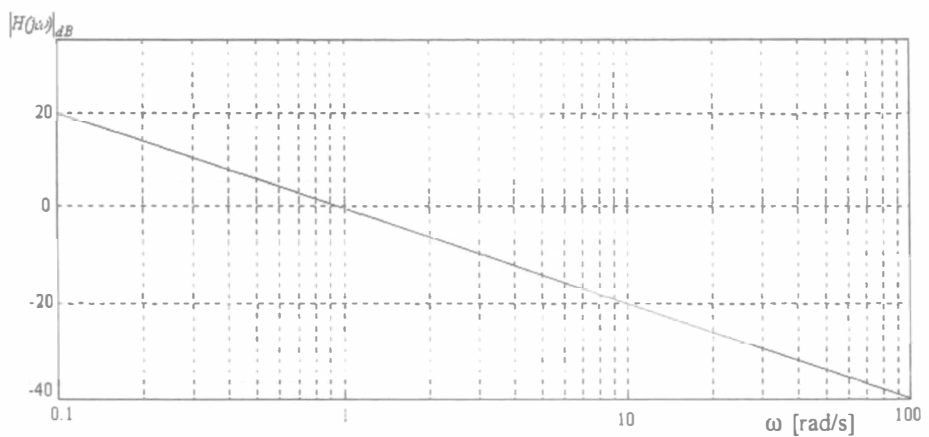
**Figura 2.5** Gráfica de la fase en grados del término  $s$ . Observe que tiene un valor de  $90^\circ$  constante a todas las frecuencias.

De la misma manera en que la pendiente de  $|H(j\omega)|_{dB}$  fue aumentando conforme aumentaba el orden del cero, tenemos que  $\phi = m(90^\circ)$  (Fig. 2.6).



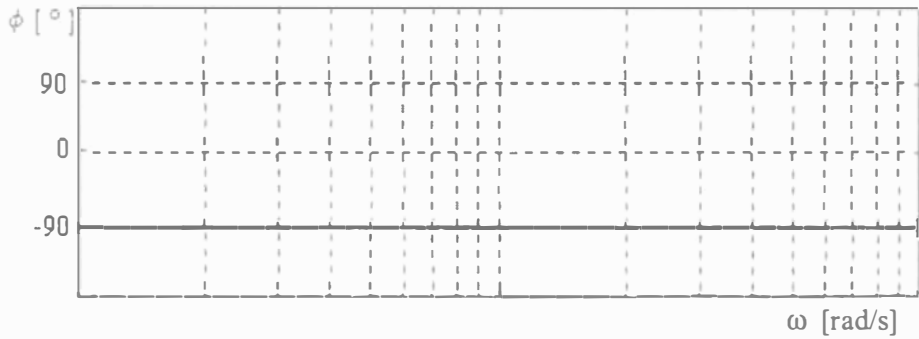
**Figura 2.6** Gráfica de fase en grados de los términos  $s$ ,  $s^2$  y  $s^3$ .

- b) Polos en el origen  $\frac{1}{s^n}$  donde  $n=1,2,3$ , etc. En este caso tendremos pendientes y ángulos de fase negativos (ver figura 2.7 y 2.8).



**Figura 2.7** Magnitud en dB del término  $1/s$ . Pendiente de la recta  $-20$  dB/dec.





**Figura 2.8** Gráfica de la fase en grados del término  $s$ . Se tiene un valor de  $90^\circ$  constante a todas las frecuencias.

### 2.3.3 Polos y ceros en el eje real

a) Polos en el eje real  $\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_c} + 1}$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_c} + 1} \right|$$

Considerando  $\frac{1}{\omega_n} = T$  podemos reescribir la ecuación anterior como

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \left| \frac{1}{j\omega T + 1} \right| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} = -20 \log \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \quad (2.8.)$$

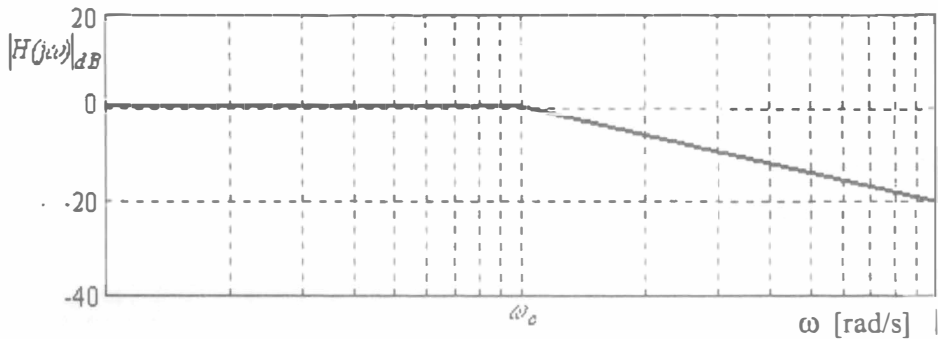
Para frecuencias bajas como  $\omega \ll 1/T$ ,

$$|H(j\omega)|_{dB} = -20 \log 1 = 0$$

Para frecuencias altas como  $\omega \gg 1/T$

$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} = -20 \log \sqrt{\omega^2 T^2} = -20 \log \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2}} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_c} \quad (2.9.)$$

Cuando  $\omega = \omega_c$  entonces  $|H(j\omega)|_{dB} = -3$  dB. A la frecuencia a la cual la magnitud de la función de transferencia cae 3 dB de su valor máximo se le conoce como **frecuencia de corte**. Este concepto será de suma importancia cuando se revise la teoría de los filtros. Para las frecuencias mayores a  $\omega_c$ , tenemos lo mismo que en el apartado 2.3.2: una recta con una pendiente de  $-20$  dB/dec. En la figura 2.9 se muestra la gráfica resultado del análisis anterior.

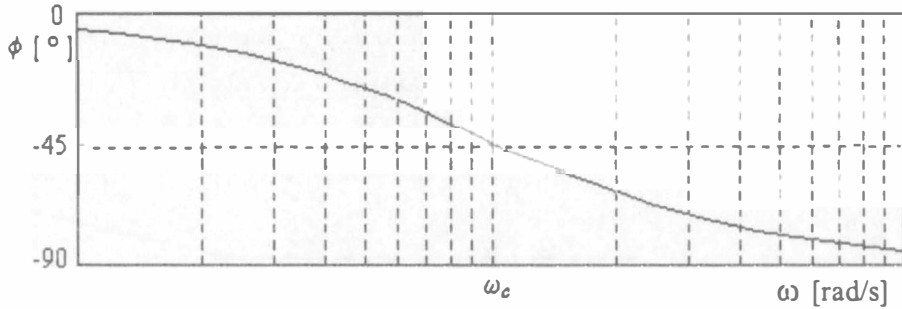


**Figura 2.9** Gráfica de la magnitud en dB del término  $\left(\frac{j\omega}{\omega_c} + 1\right)^{-1}$ . Observe que tiene una magnitud igual a cero antes de  $\omega_c$  y pasando esta frecuencia decae con una pendiente de  $-20$  dB/dec.

Para el caso de la fase observamos

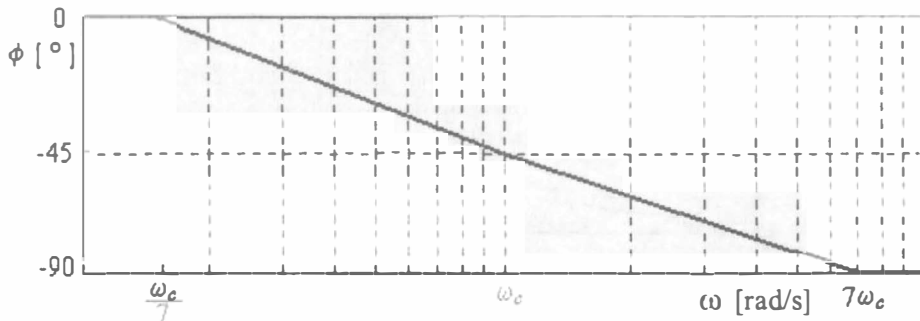
$$\phi^o = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_c} = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_c} \quad (2.10)$$

Si  $\omega \ll \omega_c$   $\phi = 0^\circ$ , cuando  $\omega = \omega_c$   $\phi = -45^\circ$  y si  $\omega \rightarrow \infty$   $\phi = -90^\circ$ . En la figura 2.10 aparecen estos resultados.



**Figura 2.10** Curva real de la fase en grados del término  $\left(\frac{j\omega}{\omega_c} + 1\right)^{-1}$ .

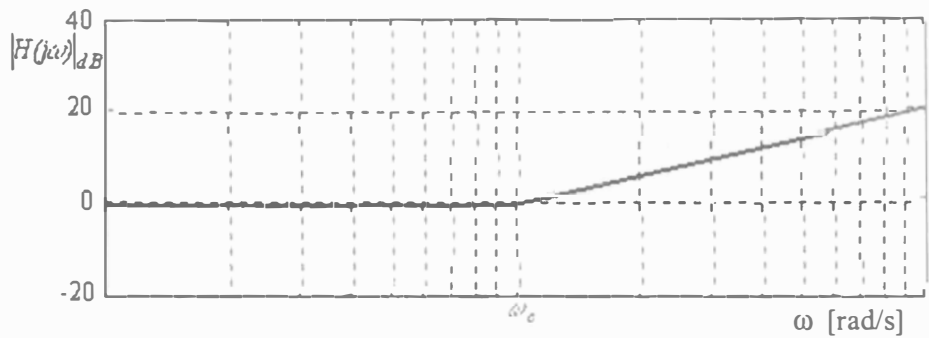
Para facilitar la suma de las gráficas de fase para este términos consideramos que la fase es cero hasta  $\omega_c/7$ , es igual a  $-45^\circ$  en la frecuencia de corte y a  $7\omega_c$  es  $90^\circ$ . Esta aproximación se ilustra en la figura 2.11.



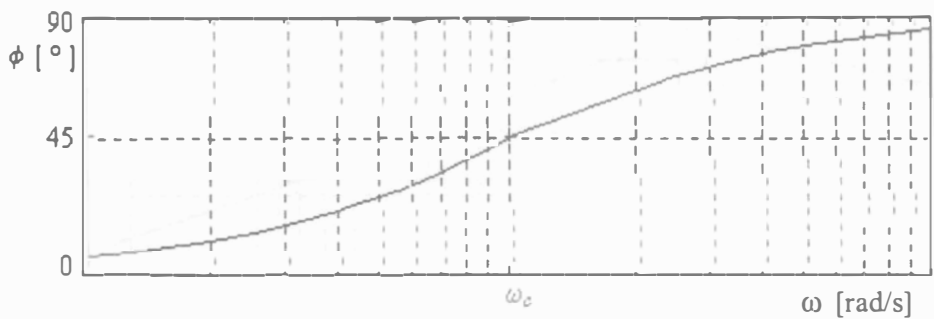
**Figura 2.11** Aproximación a la curva de fase del término  $\left(\frac{j\omega}{\omega_c} + 1\right)^{-1}$ .

- b) Ceros en el eje real  $\frac{j\omega}{\omega_c} + 1$

Si siguiendo un procedimiento equivalente al del inciso (a) tanto en magnitud como en fase llegamos a las gráficas de las figuras 2.12 y 2.13. En la figura 2.14 se muestra la aproximación de la gráfica de la figura 2.13.



**Figura 2.12** Magnitud en dB del término  $\frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ . Después de la frecuencia de corte  $\omega_c$ , la gráfica tiene una pendiente de 20 dB/dec.



**Figura 2.13** Gráfica de la fase en grados del término  $\frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ .

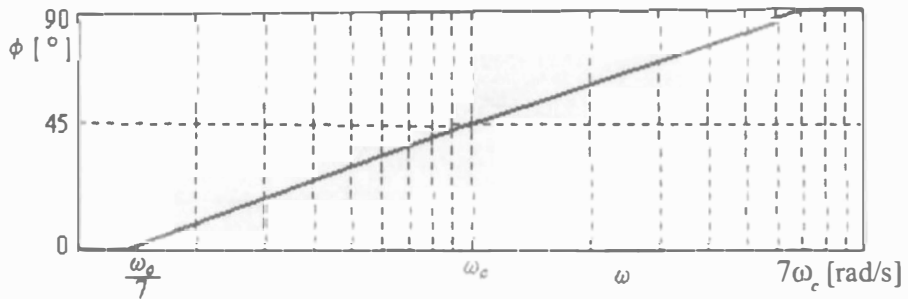


Figura 2.14 Aproximación de la gráfica de la fase en grados

del término  $\frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ .

### 2.3.4 Polos y ceros complejos

a) Polos complejos conjugados  $\frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1}$

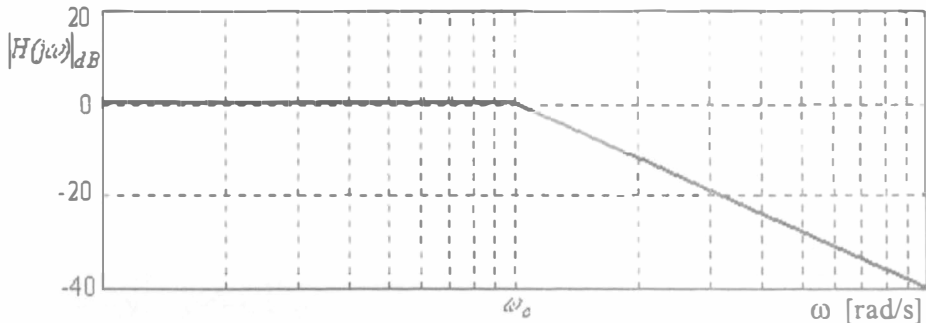
Siguiendo un procedimiento equivalente al utilizado en el punto anterior, podemos obtener las gráficas de magnitud y fase para los polos y ceros complejos conjugados. El valor del factor de amortiguamiento está en  $0 < \xi < 1$ ; en este caso consideremos que  $\xi = 0.5$ .

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left| \frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

Si  $\omega \ll \omega_n$ ,  $-20 \log 1 = 0dB$ . Para  $\omega \gg \omega_n$ ,

$$|H(j\omega)|_{dB} = -20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 = -40 \log \frac{\omega}{\omega_c}$$

Lo anterior significa que para frecuencias menores que la frecuencia de resonancia,  $|H(j\omega)|_{dB}$  es cero y pasando esta frecuencia, tiene una pendiente de  $-40$  dB/dec. Esto lo podemos ver en la gráfica de la figura 2.15.



**Figura 2.15** Magnitud en dB del término  $\left(\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_c} + 1\right)^{-1}$ . Después de la frecuencia de corte  $\omega_c$  la gráfica tiene una pendiente de  $-40$  dB/dec.

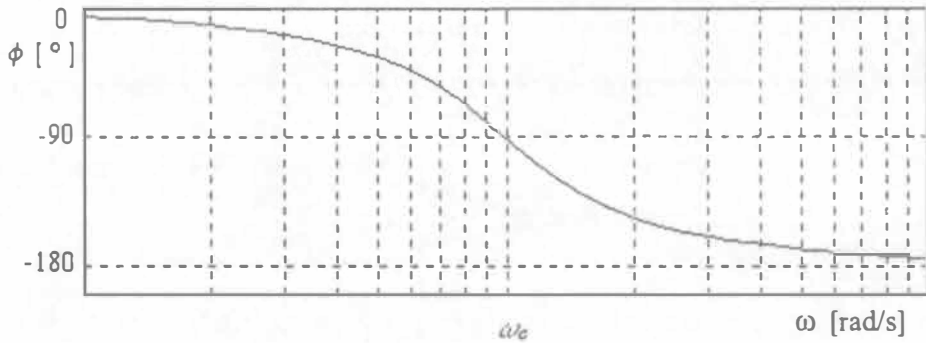
Pasemos ahora a la fase

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_c}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (2.11)$$

Consideremos ahora tres casos para la ecuación (2.11):

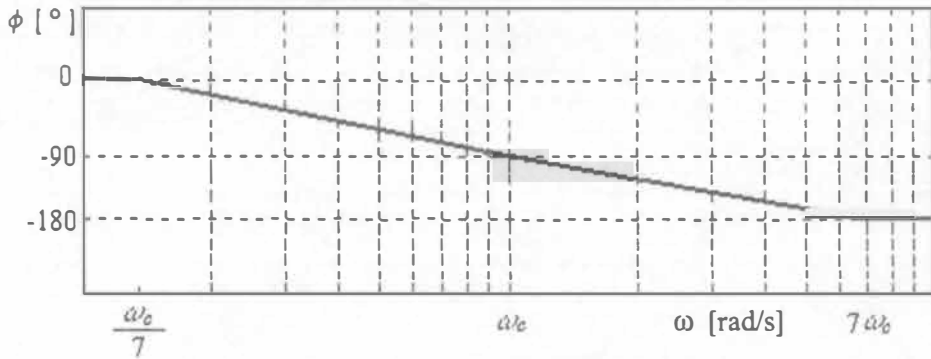
1.  $\omega = 0 \quad \phi = 0$
2.  $\omega = \omega_n \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi}{0}\right) = -\tan^{-1}\infty = -90^\circ$
3.  $\omega \rightarrow \infty \quad \phi = -180^\circ$

En las siguientes gráficas (Figs. 2.16 y 2.17) se pueden ver la gráfica de fase real para un término de este estilo y la aproximación con rectas a la misma.



**Figura 2.16** Curva real de la fase en grados del término

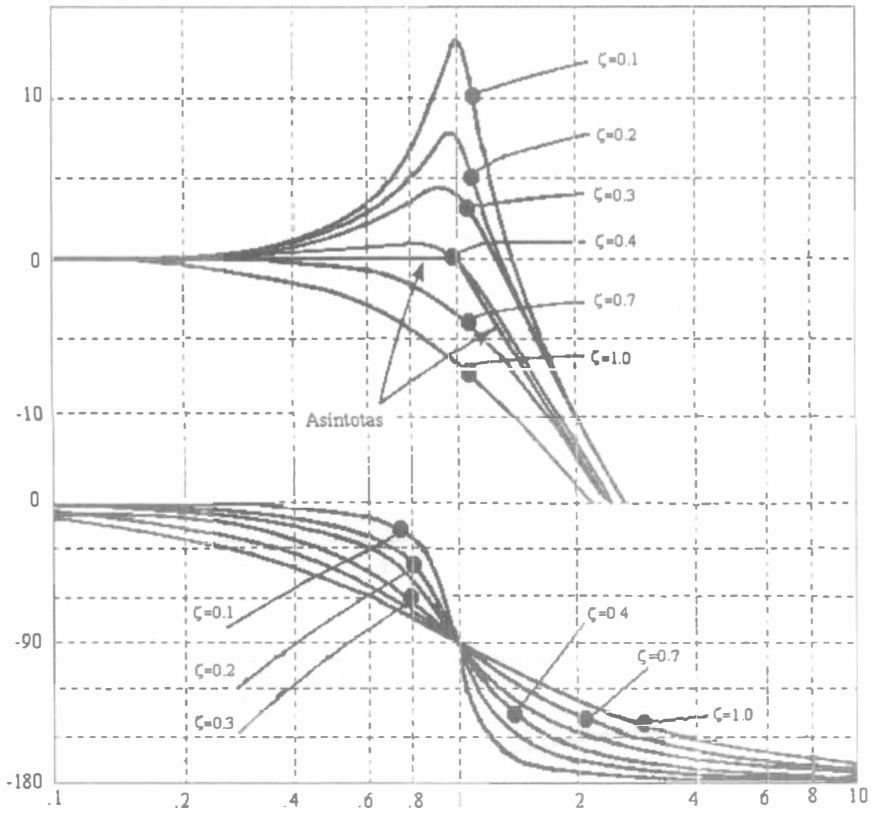
$$\left( \frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1 \right)^{-1}$$



**Figura 2.17** Aproximación de la gráfica de la fase en grados del

término  $\left( \frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1 \right)^{-1}$

Dependiendo del valor de  $x$  se presenta lo siguiente en la gráficas de magnitud y fase para este tipo determinó (ver Fig. 2.18).



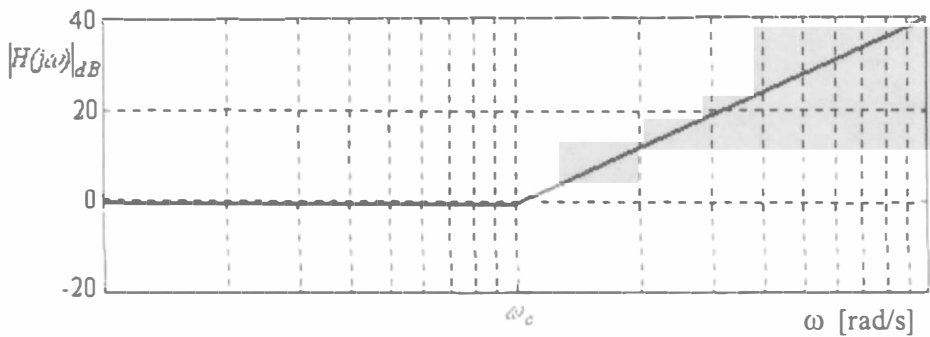
**Figura 2.18** Efecto del factor de amortiguamiento  $x$  sobre la gráfica de

magnitud y fase del término  $\left( \frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1 \right)^{-1}$ .

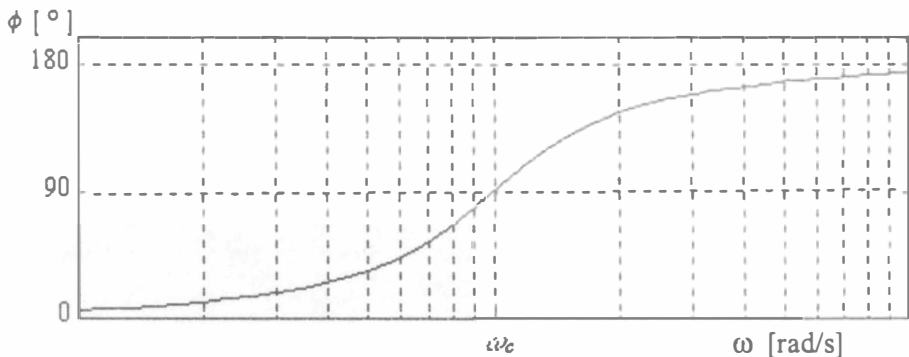


b) Ceros complejos conjugados  $\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1$

En este caso las pendientes y los ángulos de fase serán positivos, como se muestra en las figuras 2.19 y 2.20. Y de nuevo, en la figura 2.21 se muestra la aproximación a la gráfica de fase de este término.

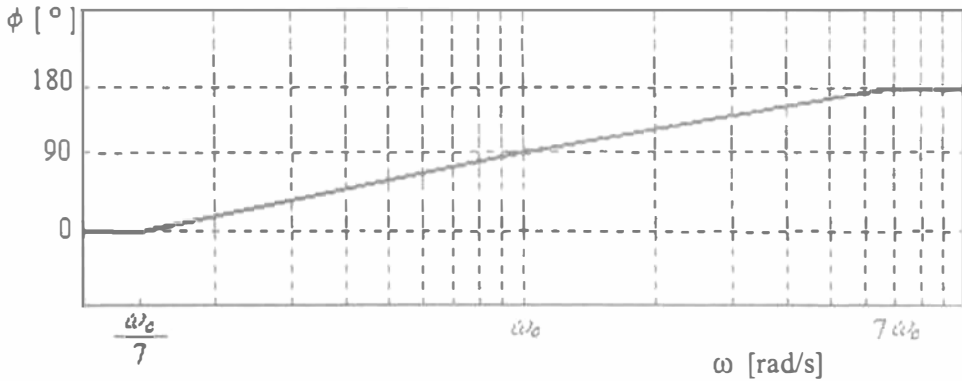


**Figura 2.19** Gráfica de la magnitud en dB término  $\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ .  
 Observe que la magnitud es igual a cero antes de la frecuencia de corte  $\omega_c$  y después de ésta se eleva con una pendiente de 40 dB/dec.



**Figura 2.20** Curva real de la fase en grados del

término:  $\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ .



**Figura 2.21** Aproximación de la gráfica de la fase en

grados del término:  $\frac{(j\omega)^2}{\omega_c^2} + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_c} + 1$ .

## 2.4. Ejemplos

### Ejemplo 2.1

Encuentre las gráficas de magnitud y fase que se generan a partir de la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

Primero modificamos cada uno de los términos de la función de transferencia, para tenerlos como se expusieron anteriormente:

$$H(s) = \frac{2}{s(s+1)\left(\frac{s}{5}+1\right)}$$

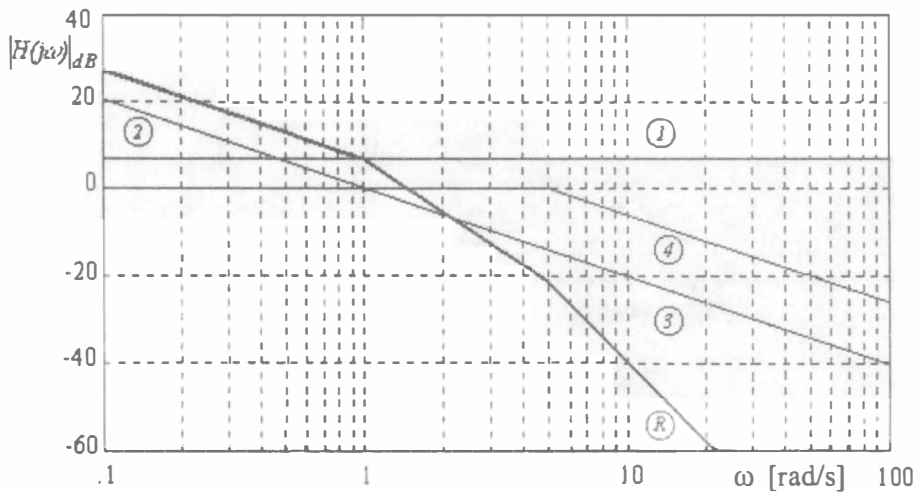
Ahora identificamos cada uno de los términos por graficar:

1.  $20 \log 2 = 6.02$

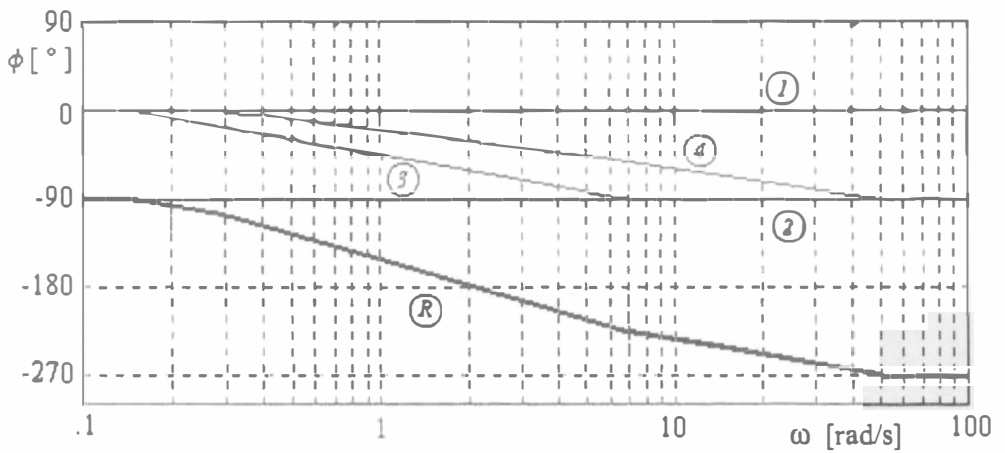
2.  $\frac{1}{s}$

3.  $\frac{1}{s+1}$ ;  $w_c=1$

4.  $\frac{1}{\left(\frac{s}{5}+1\right)}$ ;  $w_c=5$



**Figura 2.22** Gráfica de la magnitud de cada uno de los términos de la función de transferencia del ejemplo 2.1 (números 1-4) y la suma de estos términos (R).



**Figura 2.23** Gráfica de la fase de cada uno de los términos de la función de transferencia del ejemplo 2.1 (números 1-4) y la suma de estos términos (R) .

**Ejemplo 2.2**

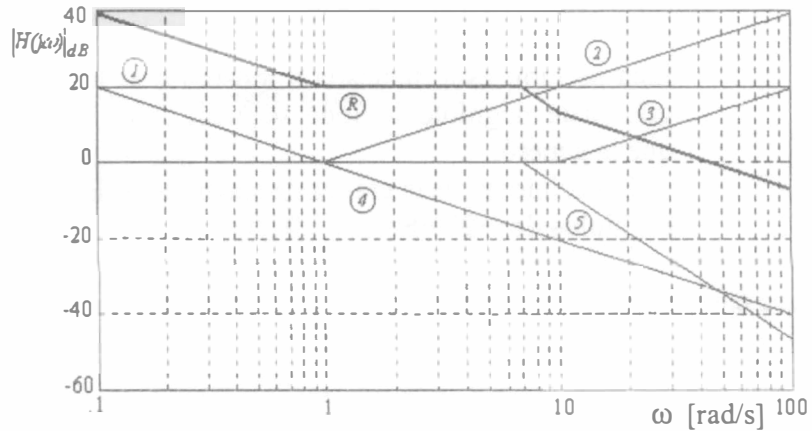
Encuentre las gráficas de magnitud y fase que se generan a partir de la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{10(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{s\left(\frac{s^2}{49} + \frac{6}{49}s + 1\right)}$$

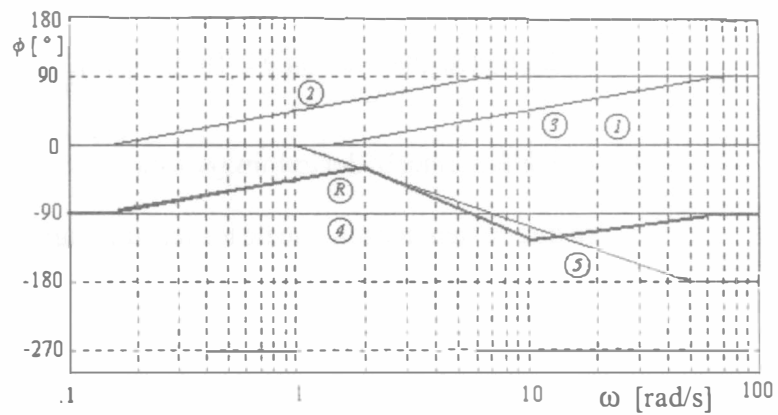
Cada uno de los términos de esta función de transferencia están de la forma que nos pide Bode, por lo tanto no tenemos que manipular  $H(s)$ . Identifiquemos ahora cada uno de los términos a graficar.

1.  $k = 10; 20\log 10 = 20$
2.  $(s + 1); \omega_c = 1$
3.  $\left(\frac{s}{10} + 1\right); \omega_c = 10$

4.  $\frac{1}{s}$
5.  $\left(\frac{s^2}{49} + \frac{6}{49}s + 1\right)^{-1}$  ;  $\omega_c = \sqrt{49} = 7$



**Figura 2.24** Gráfica de la magnitud de cada uno de los términos de la función de transferencia del ejemplo 2.2 (números 1-5) y la suma de estos términos (R).



**Figura 2.25** Gráfica de la fase de cada uno de los términos de la función de transferencia del ejemplo 2.2 (números 1-5) y la suma de estos términos (R).

Como el lector se podrá dar cuenta, depende del valor de las frecuencias de corte de cada uno de los elementos de la función de transferencia, el número de ciclos que necesitaremos en el papel semilogarítmico para espaciar de manera adecuada las gráficas de magnitud y fase.

## 2.5 GRÁFICA DE MAGNITUD → FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Esta sección está dedicada a mostrarle al lector cómo a partir de una gráfica de magnitud de Bode, se puede obtener la función de transferencia que la generó.

Las asíntotas de la gráfica de magnitud de Bode, deben tener pendientes múltiplos de  $\pm 20$  dB/dec.

- Si la pendiente varía desde  $-20$  a  $40$  dB/dec en una frecuencia igual

a  $\omega_1$ , debe haber un factor  $\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} + 1}$

- Si la pendiente varía en  $-40$  dB/dec en una frecuencia  $\omega_2$ , debe haber

un factor cuadrático de la forma  $\frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_2} + \left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2}$

- Determinación del término constante  $k$  de la función de transferencia.

Ya que se tienen cada uno de los términos anteriores, falta determinar la constante  $k$ ; para esto consideremos que la frecuencia tiende a cero. En

este caso los términos  $\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} + 1}$  y  $\frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_2} + \left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2}$  tienden a uno, por lo cual la función de transferencia puede escribirse como

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^\lambda}$$

Consideremos tres casos,  $\lambda$  igual a 0, 1 y 2.

1. Cuando  $\lambda = 0$ ,

$$H(j\omega) = k \text{ para } \omega \ll 1$$

Aplicando la definición de logaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior tenemos:

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log k$$

Obteniendo el valor de  $20 \log |H(j\omega)|$  de la gráfica de magnitud de Bode podemos despejar  $k$ .

2. Para  $\lambda = 1$ :

$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \text{ } \omega \ll 1$$

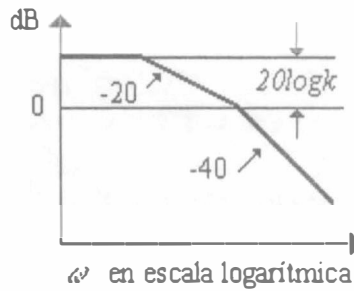
$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log k - 20 \log \omega$$

3. Para  $\lambda = 2$ :

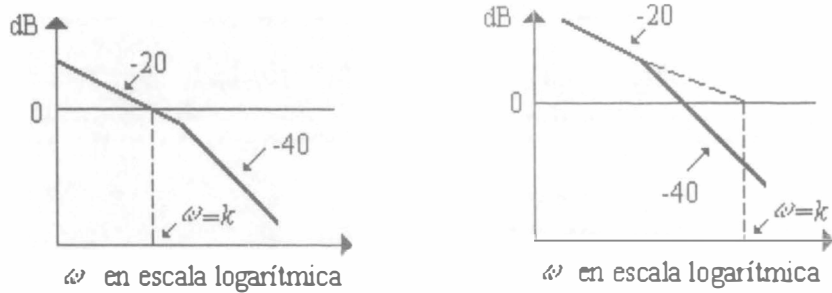
$$H(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^2} \text{ } \omega \ll 1$$

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log k - 40 \log \omega$$

A continuación se muestran algunas gráficas de magnitud de Bode en las cuales se esquematizan los resultados a los que se llegó en los tres puntos anteriores

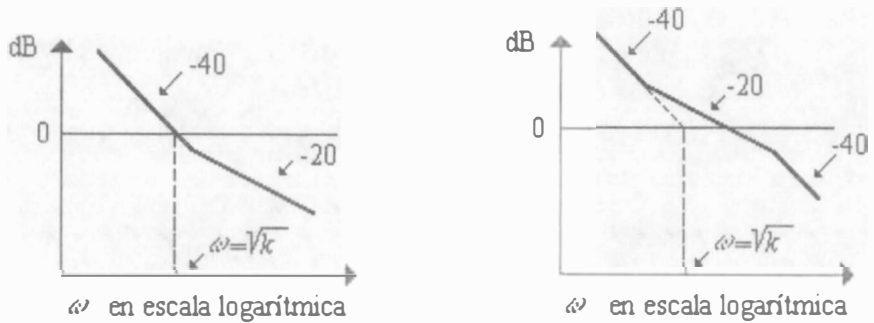


**Figura 2.26** Determinación del término  $k$  de la función de transferencia cuando tenemos una pendiente constante al inicio de la gráfica de magnitud de Bode.



**Figura 2.27** Determinación del término  $k$  de la función de transferencia cuando tenemos una pendiente de  $-20$  dB/dec al inicio de la gráfica de magnitud de Bode.



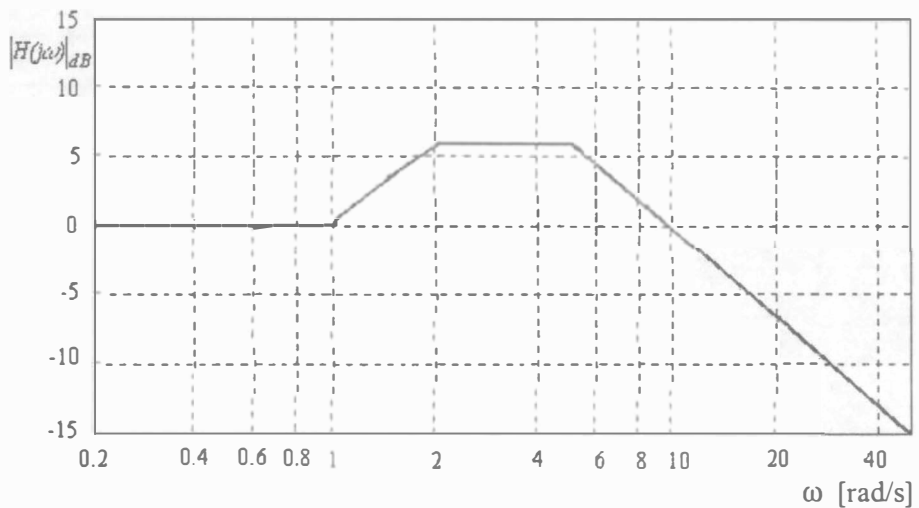


**Figura 2.28** Determinación del término  $k$  de la función de transferencia cuando tenemos una pendiente de  $-40$  dB/dec al inicio de la gráfica de magnitud de Bode.

### 2.5.1. Ejemplos

#### Ejemplo 2.3

Determine la función de transferencia que generó la gráfica de magnitud que se muestra en la figura 2.29.



**Figura 2.29** Gráfica de magnitud para determinar la función de transferencia del ejemplo 2.3.

Primero determinamos el valor de la constante. Como la primera pendiente de esta gráfica es de 0 dB/oct, obtenemos el valor de la constante como se muestra en la figura 2.26.

$$20 \log k = 0$$

$$\log k = 0$$

$$k = \text{anti log } 0 = 1$$

Ahora localicemos las frecuencias donde hay cambios de pendientes y asignemos un término que produzca dichos cambios.

**TABLA 2.2** FRECUENCIAS DE CORTE, CAMBIOS DE PENDIENTE Y TÉRMINOS  $j\omega$  QUE GENERARON LA GRÁFICA DE MAGNITUD EN DB DE LA FIGURA 2.29.

Frecuencia	Cambio de pendiente	Término asociado
$\omega_1=1$	0 a 6 dB/oct	$\frac{j\omega}{\omega_1} + 1$
$\omega_2=2$	6 a 0 dB/oct	$\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_2} + 1}$
$\omega_3=5$	0 a -6 dB/oct	$\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_3} + 1}$

Por lo tanto, la función de transferencia es

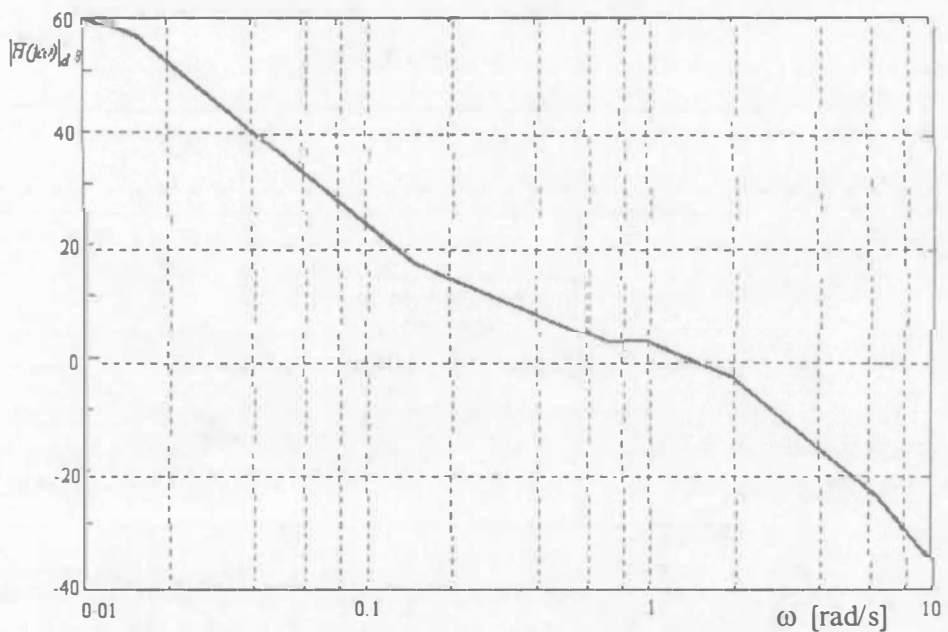
$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{\left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{5} + 1\right)}$$

Manipulando la ecuación anterior obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{10(j\omega + 1)}{(j\omega + 2)(j\omega + 5)}$$

**Ejemplo 2.4**

Utilizando la gráfica de magnitud que se muestra en la figura 2.30, determinar la función de transferencia que la generó.



**Figura 2.30** Gráfica de magnitud para determinar la función de transferencia del ejemplo 2.4.

La primera pendiente de esta gráfica de la figura 2.30 es igual a la que se muestra en la figura 2.28; por lo tanto, para determinar el valor de la constante debemos prolongar esta primera pendiente hasta que cruce con el eje de las frecuencias. Esto ocurre en  $\omega = 8$ , lo cual quiere decir que  $\kappa = 8$ . Ahora procedamos como en el ejercicio anterior, localizando las frecuencias donde hay cambios de pendiente.

TABLA 2.3 FRECUENCIAS DE CORTE, CAMBIOS DE PENDIENTE Y TÉRMINOS JW QUE GENERARON LA GRÁFICA DE MAGNITUD EN DB DE LA FIGURA 2.30.

Frecuencia	Cambio de pendiente	Término asociado
$\omega_1 = 0.07$	- 20 a - 40 dB/dec	$\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_1} + 1}$
$\omega_2 = 0.15$	- 40 a - 20 dB/dec	$\frac{s}{\omega_2} + 1$
$\omega_3 = 0.7$	- 20 a 0 dB/dec	$\frac{s}{\omega_3} + 1$
$\omega_4 = 1$	0 a - 20 dB/dec	$\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_4} + 1}$
$\omega_5 = 2$	- 20 a - 60 dB/dec	$\frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_5} + \left(\frac{j\omega}{\omega_5}\right)^2}$

Note que la primera pendiente de esta gráfica no es constante como en el ejercicio anterior. Esto quiere decir que hay que agregar un término para obtener dicha pendiente de - 20 dB/dec, lo cual se logra con un término  $\frac{1}{s}$ . Con esto, y considerando que  $x = 0.5$ , la función de transferencia queda así:

$$H(j\omega) = \frac{8\left(\frac{j\omega}{0.15} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{0.7} + 1\right)}{s\left(\frac{j\omega}{0.07} + 1\right)(j\omega + 1)\left(1 + \frac{j\omega}{2} + \frac{(j\omega)^2}{4}\right)}$$

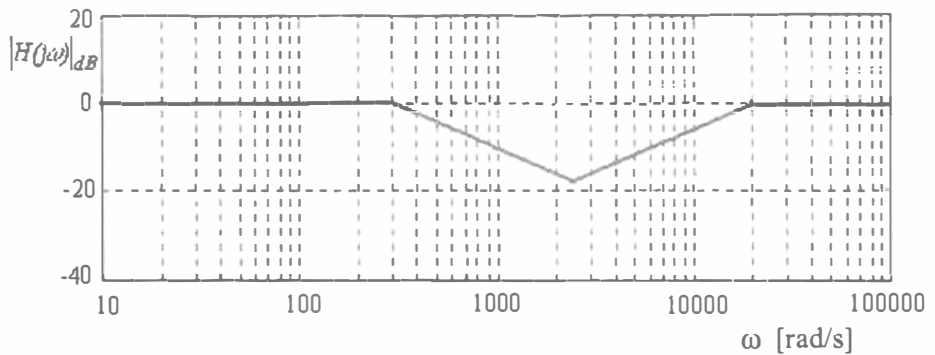
Manipulando un poco esta expresión y haciendo  $s = j\omega$ , tenemos:

$$H(s) = \frac{21.33(s + 0.15)(s + 0.7)}{s(s + 0.07)(s + 1)(s^2 + 2s + 4)}$$

## 2.5.2 Ejercicio propuesto

### Ejercicio propuesto 2.1

Determine la función de transferencia  $H(s)$  que generó la gráfica de magnitud de Bode que se muestra en la figura 2.31.



**Figura 2.31** Gráfica de magnitud para determinar la función de transferencia del ejercicio propuesto 2.1.

**Respuesta:** 
$$H(s) = \frac{303.58(s^2 + 25 \times 10^2 s + 62.5 \times 10^5)}{(s + 300)(s + 20 \times 10^3)}$$

## 2.6 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

La función de transferencia de un sistema de segundo orden en general se puede escribir así:

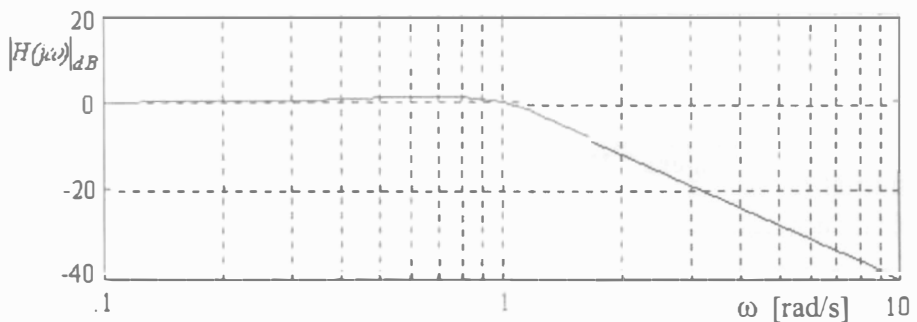
$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} \quad (2.12)$$

Consideremos los siguientes casos:

1. Considerando  $a_1 = a_2 = 0$ , la ecuación 2.12 toma la forma

$$H(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

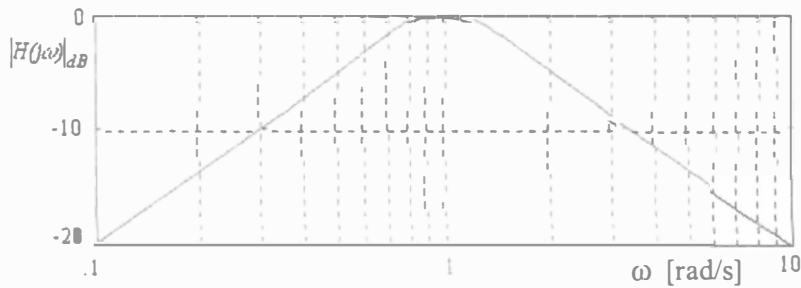
Si quisiéramos conocer la respuesta en frecuencia del circuito que generó esta función de transferencia utilizaríamos un gráfico de Bode, el cual se muestra en la figura 2.32. Debido a las características de la magnitud con respecto a la frecuencia de esta función de transferencia, se le conoce como **función de transferencia pasa-altas**.



**Figura 2.32** Magnitud con respecto a la frecuencia de una función de transferencia pasa-altas.

1. Haciendo  $a_1 = a_2 = 0$ , la ecuación 2.12 queda como:  $H(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + b_1 s + b_0}$ ;

en la figura 2.33 se muestra la gráfica de magnitud de esta función de transferencia. En esta gráfica se observa cómo la magnitud es máxima en cierta banda de frecuencia, por lo que se le conoce como **función de transferencia pasabanda**.

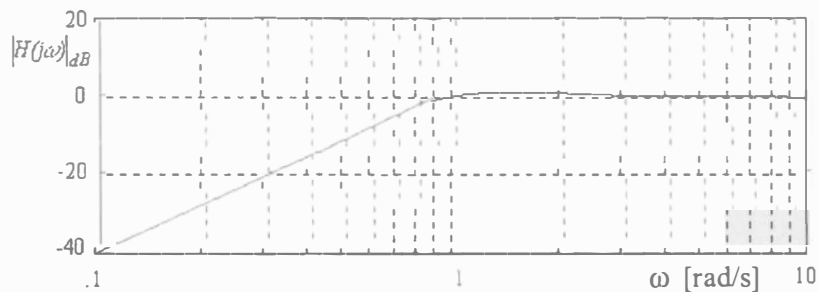


**Figura 2.33** Magnitud con respecto a la frecuencia de una función de transferencia pasabanda.

1. Cuando  $a_0 = a_1 = 0$ , la función de transferencia de la ecuación 2.12

se reescribe como  $H(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + b_1 s + b_0}$ , la cual recibe el nombre

de **función de transferencia pasa-altas** y cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura 2.34.



**Figura 2.34** Magnitud con respecto a la frecuencia de una función de transferencia pasa-altas.

- Tomando  $a_0 = b_0, a_1 = -b_1, a_2 = 1$ , tenemos una función de transferencia como sigue:  $H(s) = \frac{s^2 - b_1s + b_0}{s^2 + b_1s + b_0}$ ; en la figura 2.35 podemos ver la respuesta en frecuencia de esta función de transferencia. En este caso la magnitud se mantiene constante. Esta función de transferencia se conoce como **función de transferencia pasatodo**.

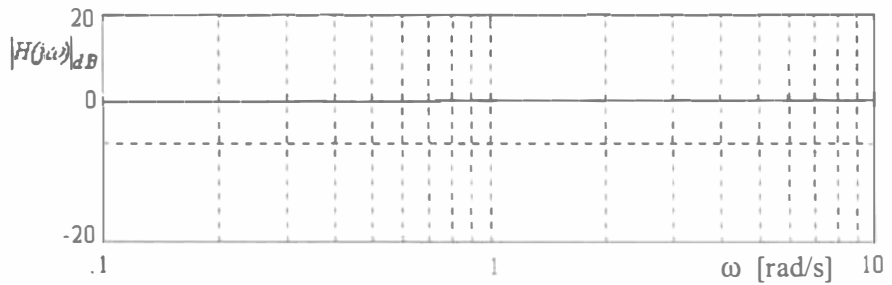


Figura 2.35 Magnitud con respecto a la frecuencia de una función de transferencia pasatodo.

- Ahora hagamos  $a_1 = 0$ ; con esto, la función de transferencia se puede escribir como  $H(s) = \frac{a_2s^2 + a_0}{s^2 + b_1s + b_0}$ . En la figura 2.36 se grafica su magnitud, y podemos observar cómo se suprime un rango de frecuencia específico, por lo cual se le conoce como **función de transferencia rechazabanda**.

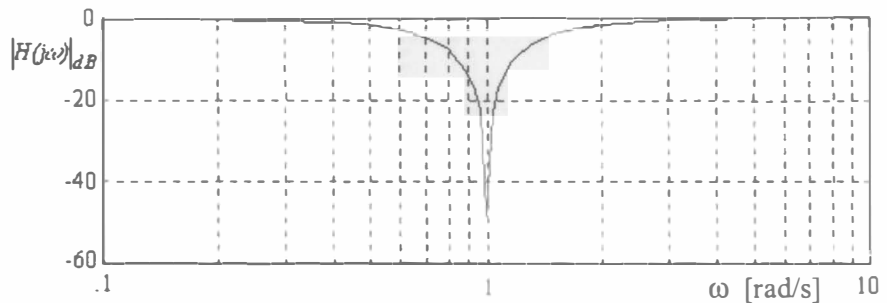


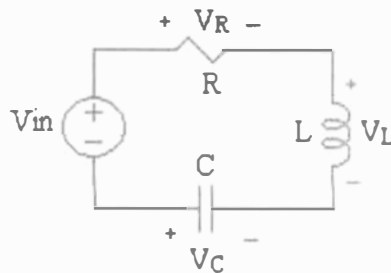
Figura 2.36 Magnitud con respecto a la frecuencia de una función de transferencia rechazabanda.



## 2.6.1 Ejemplos

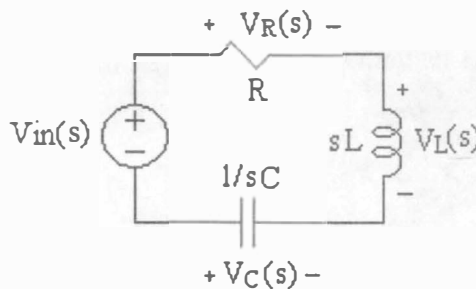
### Ejemplo 2.5

Determinar de qué tipo es la función de transferencia del circuito de la figura 2.37 considerando como salida cada uno de los voltajes de los elementos.



**Figura 2.37** Circuito en el tiempo del ejemplo 2.5. Decir de qué tipo es la función de transferencia que se genera, tomando como salida el voltaje en cada uno de los elementos de este circuito.

Pasamos el circuito de la figura 2.37 al dominio de la frecuencia. Obtenemos el voltaje de cada uno de los elementos del circuito utilizando un divisor de voltaje y con esto encontramos las funciones de transferencia (Fig. 2.38).



**Figura 2.38** Circuito en el dominio de Laplace del ejemplo 2.5.

a) Voltaje y función de transferencia en  $C$

$$V_c(s) = \frac{V_{in}(s) \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{s^2 CL + sRC + 1}$$

La función de transferencia anterior tiene un término constante en el numerador y un polinomio de segundo orden en el denominador, por lo que se trata de una función de transferencia pasabajas.

b) Voltaje y función de transferencia en  $L$ :

$$V_L(s) = \frac{V_{in}(s)sL}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{V_{in}(s)} = \frac{s^2 CL}{s^2 CL + sRC + 1}$$

La función de transferencia anterior tiene un término cuadrado en el numerador y un polinomio de segundo orden en el denominador; por lo tanto, se trata de una función de transferencia pasa-altas.

c) Voltaje y función de transferencia en  $R$ :

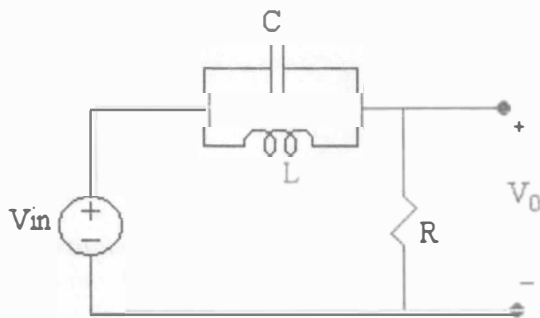
$$V_R(s) = \frac{V_{in}(s)R}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

$$H(s) = \frac{V_R(s)}{V_{in}(s)} = \frac{sRC}{s^2CL + sRC + 1}$$

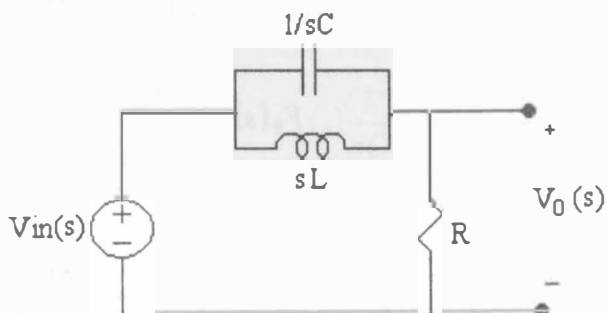
La función de transferencia anterior tiene un término simple en el numerador y un polinomio de segundo orden en el denominador; por lo tanto, se trata de una función de transferencia pasabanda.

**Ejemplo 2.5**

Considerando el voltaje de salida del circuito de la figura 2.39 en  $R$ , determinar el tipo de función de transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$  de este circuito.



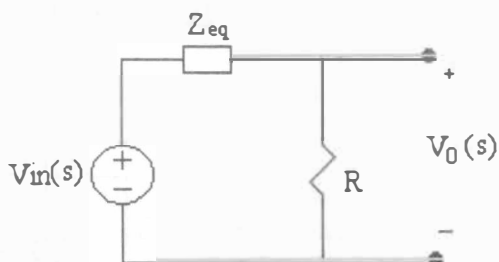
**Figura 2.39** Circuito en el tiempo del ejemplo 2.5.



**Figura 2.40** Transformación al dominio de Laplace del circuito de la figura 2.39.

Primero obtenemos la impedancia equivalente de  $sL$  y  $1/sC$  para simplificar el circuito (Fig. 2.40).

$$Z_{eq} = \frac{sL}{s^2CL + 1}$$



**Figura 2.41** Simplificación del circuito de la figura 2.40.  $Z_{eq}$  es el paralelo de la impedancia inductiva y capacitiva.

El voltaje de salida se encuentra mediante un divisor de voltaje en el circuito de la figura 2.41:

$$V_o(s) = \frac{V_{in(s)}R}{Z_{eq} + R}$$

y por último la función de transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{s^2CL + 1}{s^2CL + s\frac{L}{R} + 1}$$

la cual corresponde a una función de transferencia de tipo rechazabanda.

### 2.6.2 Ejercicios propuestos

#### Ejercicio 2.2

Determine la función de transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$  del circuito de la figura 2.42 y diga de qué tipo es.

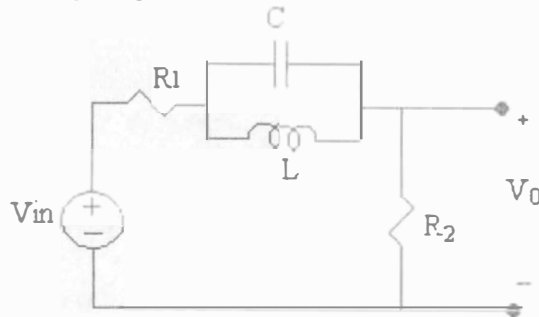
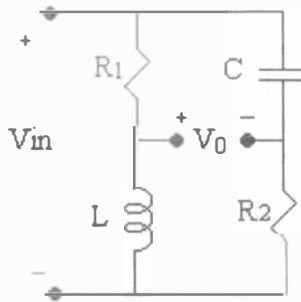


Figura 2.42 Circuito en el tiempo del ejercicio 2.2.

Respuesta:  $H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{1}{C(R_1 + R_2)} + \frac{1}{LC}}$ ; función de transferencia rechazabanda.

**Ejercicio 2.3**

¿De qué tipo es la función de transferencia  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)}$  del circuito de la figura 2.43?



**Figura 2.43** Circuito en el tiempo del ejercicio 2.3.

Respuesta:  $H(s) = \frac{s(L - CR_1R_2)}{s^2CLR_2 + s(L + CR_1R_2) + R_1}$ ; función de transferencia pasabanda.

**2.7 RESONANCIA**

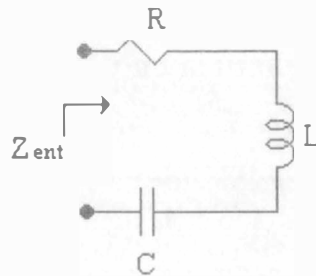
En una red eléctrica con dos terminales que contiene al menos una bobina y un condensador, la resonancia es la condición que existe cuando la impedancia de entrada de la red es puramente resistiva. Así, se dice que una red está en resonancia cuando el voltaje y la corriente en las terminales de entrada están en fase. También cuando una red está en condición resonante o casi resonante, se tiene la respuesta de amplitud extrema (un máximo y un mínimo). El fenómeno de resonancia es básico para aplicaciones como radio, radar y transmisión telefónica. En un radioreceptor, la frecuencia de resonancia del circuito puede ajustarse variando el valor de un elemento (casi siempre el valor del capacitor), para sintonizar el rango de frecuencias enviado por la estación transmisora; de esta manera se atenúan otras frecuencias enviadas por otras estaciones.

Ejemplos de resonancia:

- Un cantante de ópera puede romper copas de cristal por medio de una nota perfecta con la frecuencia propia de la copa.
- Cuando movemos la defensa de un automóvil, podemos poner el auto en movimiento oscilatorio si los impulsos se dan a la frecuencia propia del coche (1 impulso/s).
- En estos ejemplos nos referimos a la variación de la frecuencia hasta que se presenta la resonancia.

### 2.7.1 Resonancia en serie

Se desea determinar la frecuencia de resonancia del circuito RLC en serie mostrado en la figura 2.44.



**Figura 2.44** Circuito RLC en serie. En la frecuencia de resonancia, la parte imaginaria de la  $Z_{ent}$  es igual a cero.

Como se mencionó en la introducción de este apartado, la frecuencia de resonancia se da cuando la impedancia de entrada es puramente resistiva. Para que esto se cumpla, la parte imaginaria debe ser igual a cero. Veamos para qué valor de frecuencia se cumple esto.

$$Z_{ent} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Factorizando  $j$  y recordando que  $1/j = -1$ , tenemos

$$Z_{ent} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Ahora igualamos la parte imaginaria de la impedancia de entrada a cero:

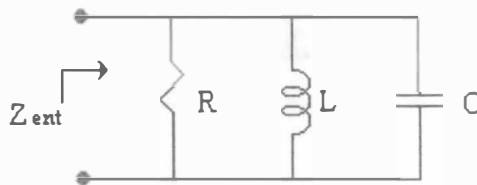
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Despejamos  $\omega = \omega_{res}$ , la cual es la frecuencia de resonancia

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

## 2.7.2 Resonancia en paralelo

Ahora queremos determinar la frecuencia a la cual el circuito RLC en paralelo mostrado en la figura 2.45 está en resonancia.



**Figura 2.45** Circuito RLC en paralelo. En la frecuencia de resonancia la parte imaginaria de la  $Z_{ent}$  es igual a cero.

$$Z_{ent} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$



Multiplicamos y dividimos por el complejo conjugado del denominador para poder igualar la parte imaginaria a cero y despejar la frecuencia de resonancia:

$$Z_{ent} = \frac{\frac{1}{R} + j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C + \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Esto quiere decir que la frecuencia de resonancia de un circuito RLC en paralelo es igual que la de un circuito RLC en serie.

## 2.8 ANCHO DE BANDA

- Circuito RLC en serie:

El ancho de banda de un circuito RLC en serie es el intervalo de frecuencias en el cual la magnitud de la impedancia de entrada del circuito es igual o menor que  $1/0.7$  veces la magnitud máxima.

Partamos de la impedancia de entrada de un circuito RLC en serie:

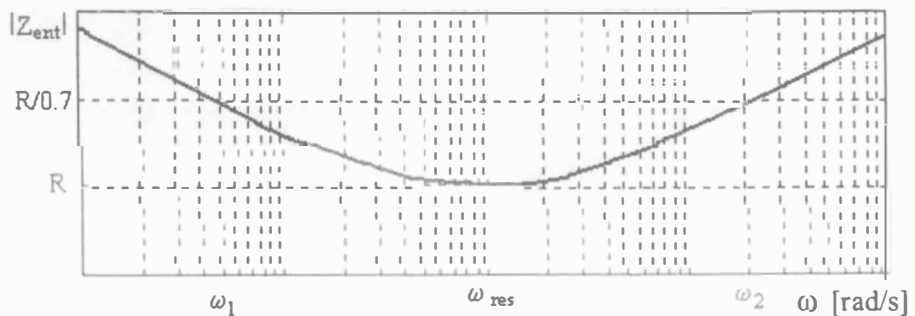
$Z_{ent} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ , haciendo  $\omega = \omega_1$  y considerando que a esta frecuencia se cumple

$$R = \frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L \quad (2.13)$$

Tenemos que la impedancia de entrada es  $Z_{ent}(\omega_1) = R - jR$ . Por lo tanto, la magnitud de la impedancia de entrada en la frecuencia  $\omega_1$  es  $|Z_{ent}(\omega_1)| = R\sqrt{2} = R/0.7$ . Como se mencionó anteriormente, la impedancia de entrada en la frecuencia de resonancia es puramente resistiva, por lo que  $|Z_{ent}(\omega_{res})| = R$ . Ahora hacemos  $\omega = \omega_2$  y consideramos que en esta frecuencia

$$R = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \quad (2.14)$$

Por lo tanto,  $Z_{ent}(\omega_2) = R + jR$  y la magnitud de la impedancia de entrada es  $|Z_{ent}(\omega_2)| = R/0.7$  (Fig. 2.46).



**Figura 2.46** Magnitud de la impedancia de entrada con respecto a la frecuencia de un circuito RLC en serie.

De la ecuación 2.13 tenemos

$$\omega_1^2 + \frac{R}{L}\omega_1 - 1 = 0$$

cuya raíz positiva es

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

A  $\omega_1$  se le conoce como frecuencia de corte baja del sistema. De manera equivalente, a partir de la ecuación 2.14 podemos determinar que

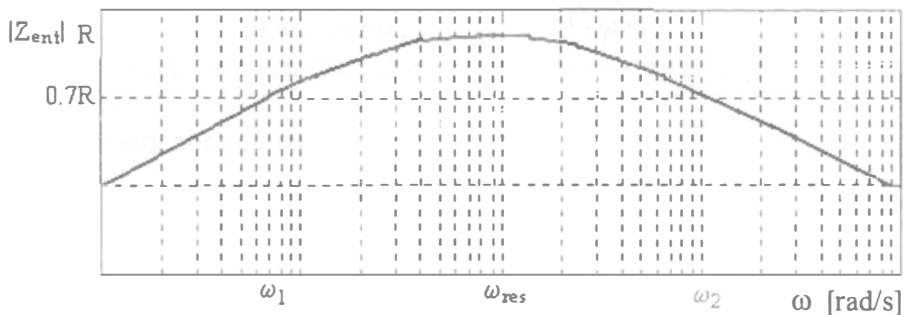
$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

A  $\omega_2$  se le conoce como frecuencia de corte alta del sistema.

Siendo el ancho de banda  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , tenemos que para un circuito RLC en serie,  $\Delta\omega_{serie} = \frac{R}{L}$ .

- Circuito RLC en paralelo:

El ancho de banda en un circuito RLC en paralelo es el intervalo de frecuencias en el cual la amplitud de la impedancia de entrada del circuito es igual o mayor 0.7 de su valor máximo (Fig. 2.47).



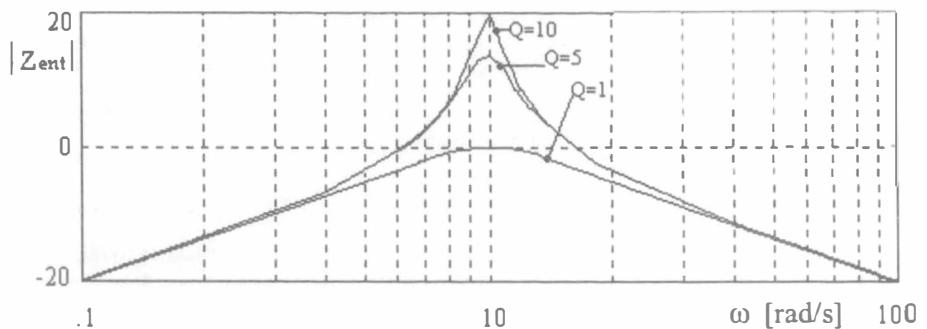
**Figura 2.47** Magnitud de la impedancia de entrada con respecto a la frecuencia de un circuito RLC en paralelo.

Partiendo de la impedancia de entrada de un circuito RLC en paralelo y procediendo de manera análoga al caso del circuito RLC en serie, se obtiene

$$\Delta\omega_{\text{paralelo}} = \frac{1}{RC}$$

## 2.9 FACTOR DE CALIDAD

La calidad de la respuesta en frecuencia de un circuito se describe cuantitativamente en términos de la razón de la frecuencia de resonancia al ancho de banda. El factor de calidad  $Q$  es una medida de la selectividad del circuito: a mayor  $Q$ , mayor selectividad (Fig. 2.49).



**Figura 2.48** Gráfica de diferentes valores del factor de calidad. Conforme aumenta el factor de calidad, el circuito es más selectivo en frecuencia.

En la tabla 2.4 se hace un resumen de cada una de las características de los sistemas de segundo orden que se han revisado en este apartado.

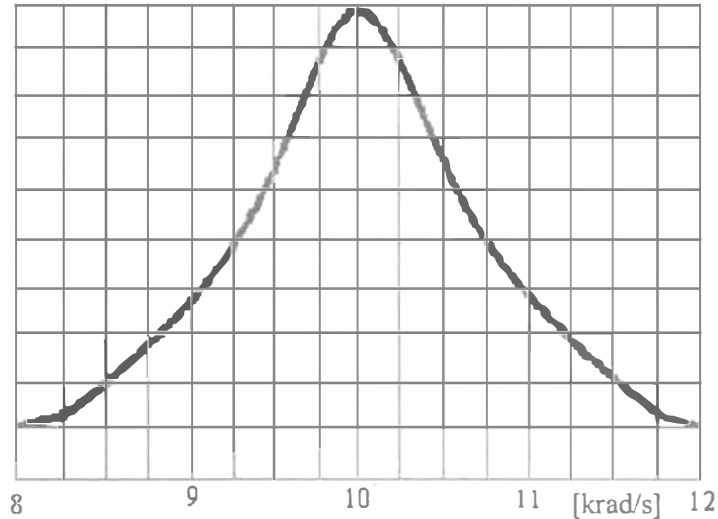
**TABLA 2.4** RESUMEN DE LAS PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS DE LOS CIRCUITOS DE SEGUNDO ORDEN.

Circuito	Frecuencia de resonancia $\omega_{res} \text{ [rad/s]}$	Ancho de banda $\Delta\omega \text{ [rad/s]}$	Factor de calidad $\frac{\omega_{res}}{\Delta\omega}$
Serie	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{R}{L}$	$\frac{L}{R\sqrt{LC}}$
Paralelo	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{RC}$	$\frac{RC}{\sqrt{LC}}$

### 2.9.1 Ejemplos

#### *Ejemplo 2.6*

La curva que se muestra en la figura 2.49 representa la magnitud de la impedancia de entrada de un circuito RLC simple; el capacitor tiene un valor de  $0.02\mu\text{F}$ . Determinar: a) el ancho de banda, b) el factor de calidad y c) el valor de L y R.



**Figura 2.49** Curva para el ejercicio 2.6.

- a) La impedancia de entrada de un circuito RLC presenta un máximo en la frecuencia de resonancia; por lo tanto,  $\omega_{res} = 10 \text{ krad/s}$ .
- b) Para calcular el factor de calidad necesitamos conocer el ancho de banda, y para esto tenemos que identificar las frecuencias de corte alta y baja, las cuales se dan cuando la  $Z_{ent}$  disminuye al 70% de su valor máximo. En este caso, aunque no tenemos información de unidades en el eje de las ordenadas, podemos ver que el máximo está a 10 cuadros del eje horizontal. Por lo tanto las frecuencias a las cuales la magnitud de la impedancia de entrada se eleva 7 cuadros son  $\omega_1 = 9.5 \text{ krad/s}$  y  $\omega_2 = 10.5 \text{ krad/s}$ . Esto quiere decir que el ancho de banda  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 1 \text{ krad/s}$ . Sabemos que  $Q = \frac{\omega_{res}}{\Delta\omega}$ , por lo que  $Q=10$ .
- c) Ahora calculemos el valor de R. Si tuviéramos la información de la magnitud de la impedancia de entrada, R estaría en la frecuencia de resonancia. Como esto no es posible, debemos percatarnos de que la gráfica corresponde a un circuito RLC en paralelo (véase la Fig. 2.47); por lo tanto,  $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$  y con la información del ancho de

banda del inciso anterior únicamente tenemos que despejar  $R$ . Esto es,  $R = \frac{1}{\Delta \omega C} = 50 \text{ k}\Omega$ . De manera equivalente podemos obtener el valor de  $L$  de la frecuencia de resonancia  $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

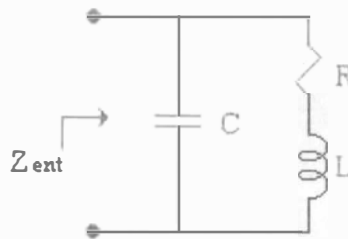
$$L = \frac{1}{\omega_{res}^2 C} = 0.5 \text{ H}.$$

## 2.9.2 Ejercicio propuesto

### *Ejercicio 2.4*

El circuito de la figura 2.50 es un circuito RLC serie-paralelo. Demuestre

que su frecuencia de resonancia es  $\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$ .



**Figura 2.50** Circuito RLC en serie paralelo del ejercicio 2.4.





# Capítulo 3

## TEMAS SOBRE EL DISEÑO DE FILTROS

### 3.1 INTRODUCCIÓN

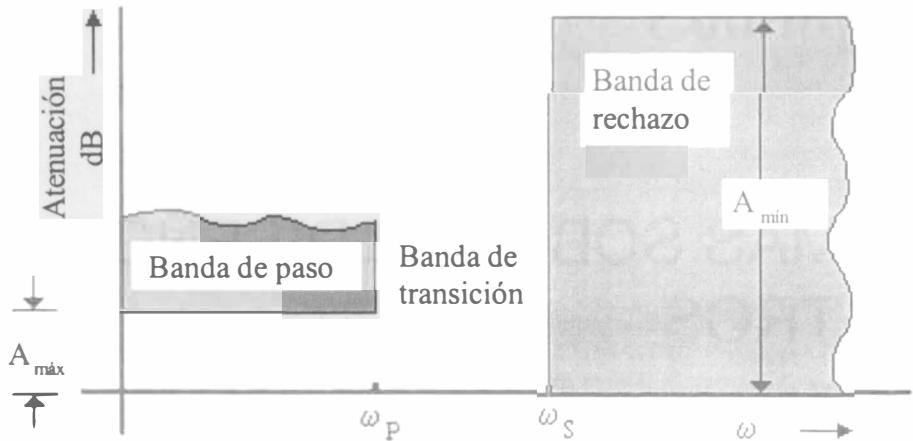
Un filtro es una red que se usa para mostrar el espectro en frecuencia de una señal eléctrica. De acuerdo con sus funciones, los filtros se clasifican en: pasabajos, pasa-altos, rechazabanda, ecualizadores de amplitud y ecualizadores de retraso.

Antes de los años sesenta, los filtros pasavoz y los sistemas de comunicación se realizaban usando componentes pasivos RCL. En los años recientes, la tecnología de circuitos híbridos integrados ha abierto un gran campo de filtros activos RC.

### 3.2 CARACTERIZACIÓN DE FILTROS

#### 3.2.1 Filtros pasabajos

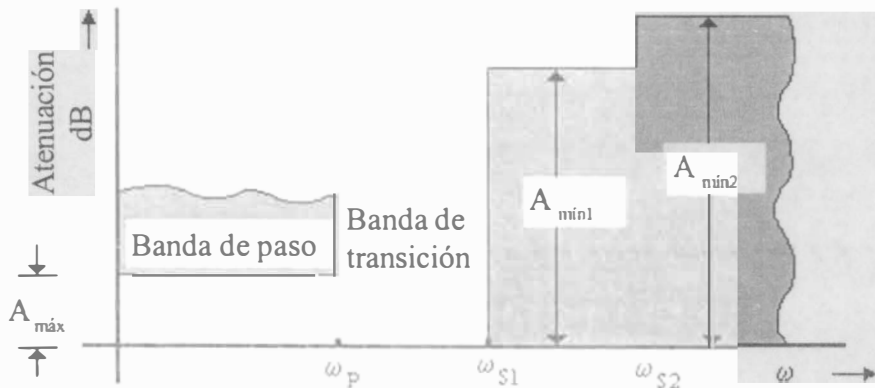
La función básica de un filtro pasabajos (LP) es dejar pasar las frecuencias bajas con muy poca pérdida y atenuar las altas frecuencias. En la figura 3.1 se muestran los requerimientos típicos de un filtro de este tipo.



**Figura 3.1** Plantilla de diseño de un filtro pasabajos.

Se requiere que un filtro pasabajos deje salir señales desde dc hasta la frecuencia de corte ( $\omega_p$ ) con únicamente  $A_{máx}$  dB de atenuación. La banda de frecuencia que se encuentra entre dc hasta  $\omega_p$  se conoce como pasabanda. Las frecuencias por arriba de  $\omega_s$  deben tener al menos  $A_{min}$  dB de atenuación. La banda de frecuencias de  $\omega_s$  hasta el infinito se conoce como rechazabanda y  $\omega_s$  se denomina frecuencia final rechazabanda. La banda de frecuencia de  $\omega_p$  hasta  $\omega_s$  se denomina banda de transición. Los parámetros  $\omega_p, \omega_s, A_{min}$  y  $A_{máx}$  describen los requerimientos de un filtro pasabajos.

Hay una forma más general de conformar un filtro pasabajos, la cual presenta diferentes cantidades de atenuación en la sección de rechazabanda (Fig. 3.2).



**Figura 3.2** Plantilla de diseño de un filtro pasabajos con diferentes atenuaciones en la banda de rechazo.

Aquí la atenuación de  $\omega_{s1}$  a  $\omega_{s2}$  debe ser al menos  $A_{\min1}$ , mientras que la atenuación de  $\omega_{s2}$  a infinito debe ser como mínimo  $A_{\min2}$ .

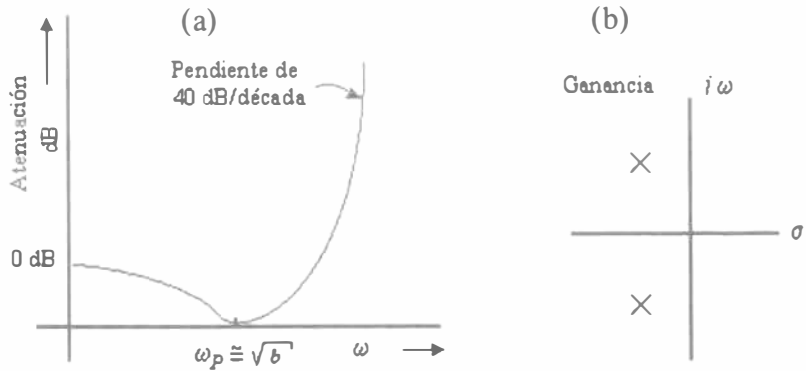
La función característica de ganancia de un filtro pasabajos es

$$\text{Ganancia} = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{b}{s^2 + as + b} = \frac{w_p^2}{s^2 + \frac{w_p}{Q_p}s + w_p^2} \quad (3.1)$$

Su función de pérdida correspondiente es

$$\text{Pérdida} = \frac{V_{in}}{V_o} = \frac{s^2 + as + b}{b} \quad (3.2)$$

Como se muestra en la figura 3.3a la pérdida de bajas frecuencias se aproxima a la unidad (0 dB), mientras que para las altas frecuencias la pérdida aumenta como  $s^2$ , esto es, a 40dB/década. La función de ganancia de un filtro pasabajos tiene un par de polos, como se observa en la figura 3.3b. La localización de los polos en la ecuación 3.1 determina la forma de la respuesta del filtro en la banda de paso.



**Figura 3.3** Curva de atenuación de un filtro pasabajos de segundo orden. (a) Gráfica de atenuación vs. frecuencia y (b) gráfica de polos y ceros.

Una de las aplicaciones de los filtros pasabajos es en el control de tonos de algunos amplificadores de alta fidelidad (*Hi-fi*). El regulador varía la frecuencia de corte del filtro LP y se utiliza para atenuar las altas frecuencias de ruido.

### 3.2.2 Filtros pasa-altos

Un filtro pasa-altos (HP) pasa las frecuencias por encima de la frecuencia dada, conocida como frecuencia de corte. En la figura 3.4 se muestran los requerimientos de un filtro HP. La banda de paso se extiende desde  $\omega_p$  hasta  $\infty$ , y la banda de rechazo va desde dc hasta  $\omega_s$ . Como en el caso de los filtros LP, los parámetros  $\omega_p$ ,  $\omega_s$ ,  $A_{\text{mín}}$  y  $A_{\text{máx}}$  describen completamente los requerimientos de un filtro HP.

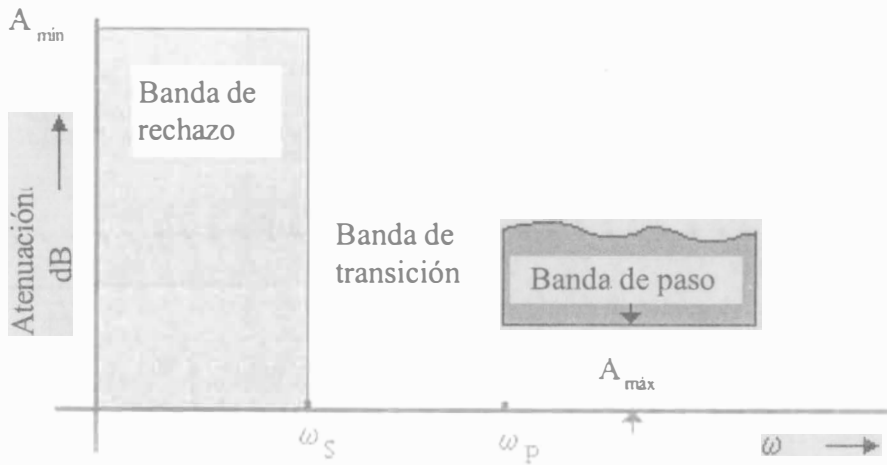
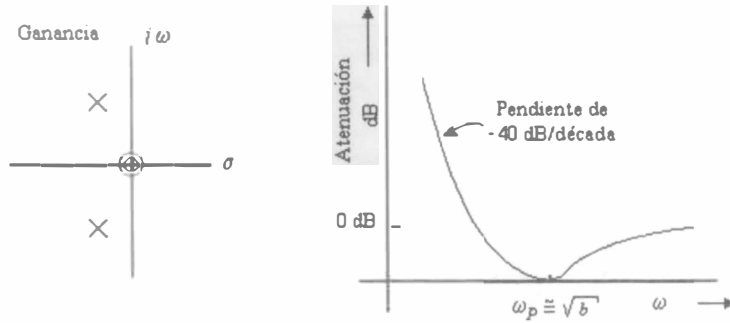


Figura 3.4 Plantilla de diseño para un filtro pasa altos.

La función característica de ganancia de un filtro pasa-altos es

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{s^2}{s^2 + as + b} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{w_p}{Q_p}s + w_p^2} \quad (3.3)$$

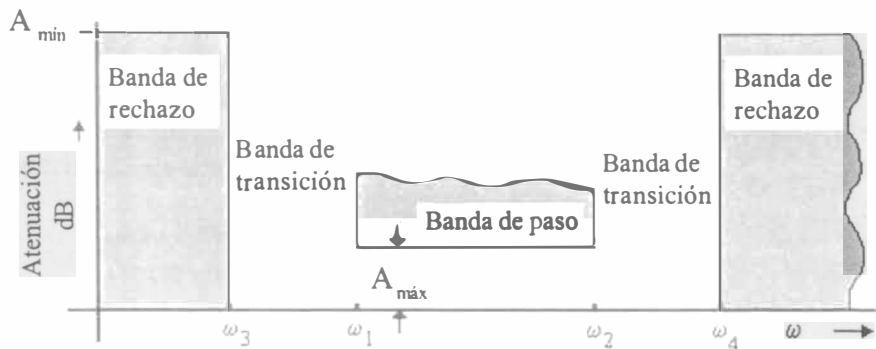
La función de ganancia tiene un par de polos y un doble cero en el origen, como se muestra en la figura 3.5. En el diagrama se observa que las frecuencias altas se alejan de la unidad, mientras que la pérdida en las frecuencias bajas aumenta a 40 dB/década.



**Figura 3.5** Filtro pasa-altos de segundo orden. (a) Gráfica de polos y ceros, (b) curva de atenuación.

### 3.2.3 Filtros Pasabanda

Los filtros pasabanda (BP) pasan frecuencias en determinada banda de frecuencias con muy poca atenuación, rechazando las frecuencias que se encuentran a ambos lados de dicha banda. La figura 3.6 muestra los requerimientos de este tipo de filtros. La banda de paso de  $\omega_1$  a  $\omega_2$  tiene su máxima atenuación en  $A_{\text{máx}}$  dB; la banda de rechazo de dc a  $\omega_3$  y de  $\omega_4$  a  $\infty$  tiene un mínimo de atenuación de  $A_{\text{mín}}$  dB.

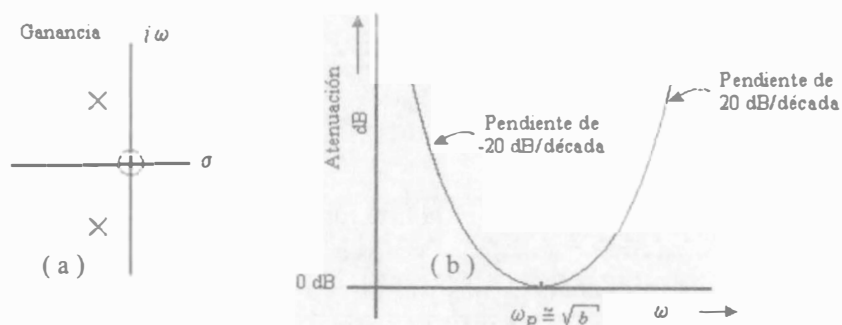


**Figura 3.6** Plantilla de diseño de un filtro pasabanda.

La función de transferencia característica de un filtro pasabanda es

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{as}{s^2 + as + b} = \frac{\frac{w_p}{Q_p} s}{s^2 + \frac{w_p}{Q_p} s + w_p^2} \quad (3.4)$$

Esta función tiene un par de polos en el plano  $s$  y un cero en el origen, como se muestra en la figura 3.7a. A frecuencias bajas y altas, la pérdida aumenta como  $s$ , es decir, a 20 dB/década. A la frecuencia del polo,  $\omega_p = \sqrt{b}$ , la pérdida es una constante igual a la unidad. El diagrama de la función de pérdida se muestra en la figura 3.7b.



**Figura 3.7** Filtro pasabanda de segundo orden. (a) Gráfica de polos y ceros, (b) curva de atenuación.

### 3.2.4 Filtros Rechazabanda

Los filtros rechazabanda (BR) se utilizan para rechazar determinada banda de frecuencias de una señal. Los requerimientos de un filtro rechazabanda se muestran en la figura 3.8. La banda de rechazo va de  $\omega_3$  a  $\omega_4$ . Las bandas de paso están por debajo de  $\omega_1$  y por encima de  $\omega_2$ .

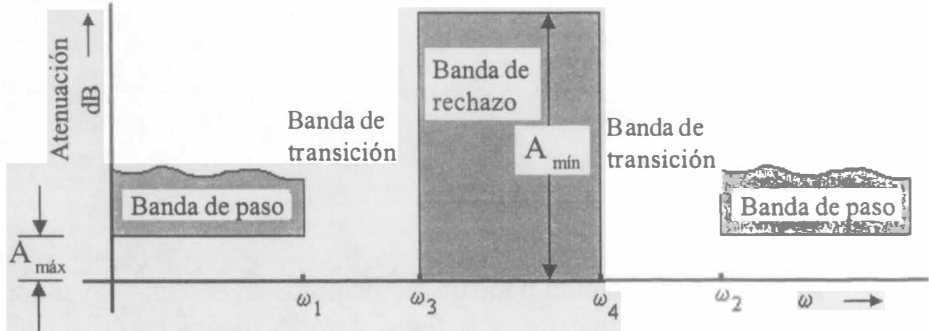


Figura 3.8 Plantilla de diseño de un filtro rechazabanda.

La función característica de un filtro rechazabanda es

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{s^2 + d}{s^2 + as + d} = \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} \quad (3.5)$$

donde  $\omega_z = \omega_p$ . Esta función tiene polos en el plano  $s$  y ceros en el eje  $j\omega$ . La frecuencia de los polos es igual a la de los ceros (Fig. 3.9a). La pérdida a frecuencias bajas y altas se aproxima a la unidad, mientras que la pérdida a  $s = j\omega_z$  es infinito, como se muestra en la figura 3.9b.

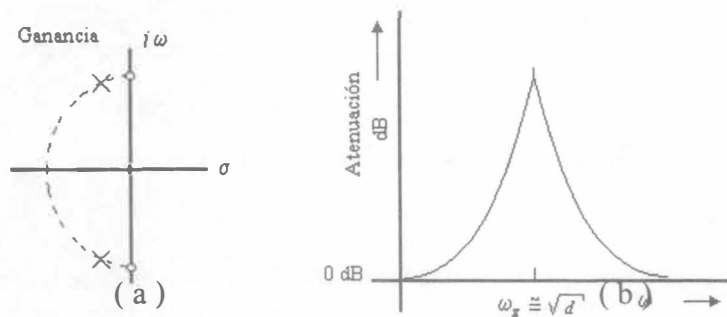
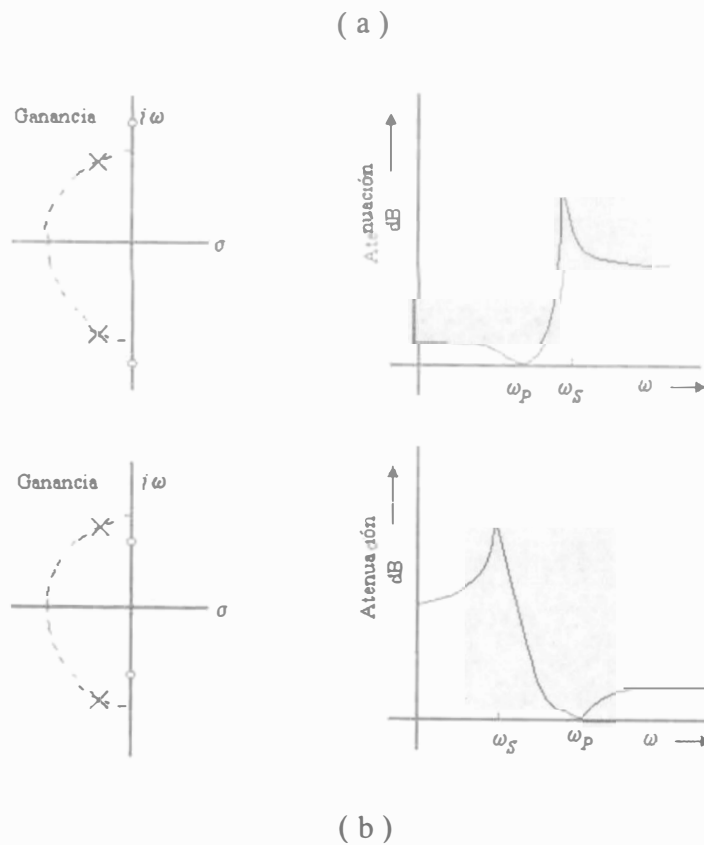


Figura 3.9 Filtro rechazabanda de segundo orden. (a) Gráfica de polos y ceros, (b) curva de atenuación.



Si  $\omega_z \gg \omega_p$ , la ecuación representa una función pasabajos con un cero en la banda de rechazo, como se muestra en la figura 3.10a. La pérdida en frecuencias altas es mayor que en las bajas. Esta característica de los filtros se denomina *notch* pasabajos y se emplea comúnmente en el diseño de filtros. Si  $\omega_z \ll \omega_p$  se obtiene un filtro notch pasa-altos, como se muestra en la figura 3.10b.



**Figura 3.10** (a) Filtro notch pasabajos. (b) Filtro notch pasa-altos.

La aplicación más común de los filtros rechazabanda es la eliminación de tonos indeseados del espectro en frecuencia de una señal.

### 3.2.5 Ecuilizadoros de ganancia

Los ecualizadoros de ganancia se utilizan para perfilar la ganancia *versus* el espectro en frecuencia de una señal dada. Este perfilado puede tomar la forma de cresta o de valle, es decir, destacar o suprimir una banda de frecuencias. Los ecualizadoros de ganancia difieren de los diferentes tipos de filtros comentados anteriormente en que los perfilados que proporcionan no son caracterizados por un filtro pasabanda o rechazabanda. Cualquier perfilado de ganancia *versus* frecuencia que no pueda clasificarse como LP, HP, BP, BR se considera un ecualizador de ganancia.

Una aplicación de los ecualizadoros de ganancia ocurre en la grabación y reproducción de música en discos fonográficos.

### 3.2.6 Ecuilizadoros de retraso

Los ecualizadoros de retraso se utilizan para compensar las distorsiones de retraso introducidas por filtros y otros componentes del sistema de transmisión.

La característica del retraso es un plano en todas las frecuencias, como se muestra en la figura 3.11. El pulso digital asociado con este retraso se convierte en  $T_0$  en el dominio del tiempo. El retraso ideal se describe matemáticamente mediante

$$V_o(t) = V_{in}(t - T_0)$$

Aplicando la transformada de Laplace,

$$V_o(s) = V_{in}(s)e^{-sT_0}$$

Su función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = e^{-sT_0} \quad (3.6)$$

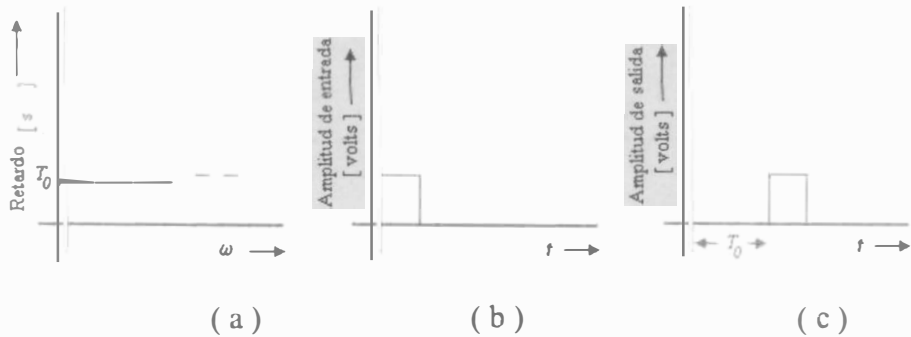
Si  $s = j\omega$ ,

$$H(j\omega) = e^{-j\omega T_0} \quad (3.7)$$

La amplitud y la fase de esta función son

$$\text{Amplitud } (H(j\omega)) = |H(j\omega)| = 1 \quad (3.8)$$

$$\text{Fase } (H(j\omega)) = \arg H(j\omega) = -\omega T_0 \quad (3.9)$$



**Figura 3.11** (a) Características ideales de retraso. (b) Pulso de entrada. (c) Pulso de salida.

El retraso ideal tiene amplitud constante y la fase es función lineal de la frecuencia. El retraso  $T_0$  puede obtenerse mediante la derivación de la función de fase con respecto a  $\omega$ , lo cual simboliza la definición de retraso

$$\text{Retraso} = \frac{d}{d\omega} (-\phi(\omega)) \quad (3.10)$$

donde  $\phi(\omega)$  es la fase de la función de ganancia. Si la función de transferencia de la ganancia se expresa como

$$T(s) = \prod_{i=1}^N \frac{m_i s^2 + c_i s + d_i}{n_i s^2 + a_i s + b_i} \quad (3.11)$$

La fase está dada por

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^N \left[ \tan^{-1} \frac{c_i \omega}{d_i - m_i \omega^2} - \tan^{-1} \frac{a_i \omega}{b_i - n_i \omega^2} \right] \quad (3.12)$$

Mediante derivación, se obtiene la siguiente expresión para el retraso:

$$D = \frac{d}{d\omega} (-\phi(\omega))$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{c_i (d_i + m_i \omega^2)}{(d_i - m_i \omega^2)^2 + c_i^2 \omega^2} + \frac{a_i (b_i + n_i \omega^2)}{(b_i - n_i \omega^2)^2 + a_i^2 \omega^2} \right] \quad (3.13)$$

En general, el retraso de los filtros no será un plano y necesitará de corrección, la cual se logra colocando un ecualizador de retraso a continuación del filtro. El propósito del ecualizador de retraso es introducir el perfilado de retraso necesario para que el retraso total (del filtro y el ecualizador) sea lo más plano posible. Además, el ecualizador de retraso no debe perturbar las características de pérdida del filtro.

El ecualizador de retraso puede llevarse a cabo mediante la función

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} \quad (3.14)$$

Los polos y ceros de esta función son simétricos respecto a  $j\omega$ , como se muestra en la figura 3.12. La ganancia de esta función es

$$20 \log_{10} \left| \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} \right|_{s=j\omega} = 10 \log_{10} \left[ (b - \omega^2)^2 + (-a\omega)^2 \right] - 10 \log_{10} \left[ (b - \omega^2)^2 + (a\omega)^2 \right] = 0 \text{ dB}$$



**Figura 3.12** Gráfica de polos y ceros de un ecualizador de retardo de segundo orden.

Un ejemplo de la aplicación de los ecualizadores de retraso es la transmisión de datos por cables.

### 3.3 FILTROS PASIVOS Y ACTIVOS

Los filtros activos y pasivos son los más utilizados en comunicaciones de voz y de datos.

Los **filtros pasivos** utilizan resistores, capacitores e inductores. Para aplicaciones de frecuencia de audio, el uso de inductores produce ciertos problemas debido a que la impedancia real del inductor es diferente del valor ideal debido a la resistencia inherente que poseen desde su fabricación. En el modelo de la figura 3.13, el factor de calidad  $Q_L$  del inductor está dado por

$$Q_L = \frac{\omega L}{R} \quad (3.15)$$

A mayor resistencia  $R$  menor será el factor de calidad  $Q$ , por lo tanto, mayor será su diferencia respecto al inductor ideal. Para minimizar la distorsión en las características del filtro, se deben utilizar inductores de un alto factor de calidad.



**Figura 3.13** Modelo de inductor.

Los **filtros activos** superan estas desventajas y ofrecen algunas ventajas. Los filtros activos se realizan utilizando resistores, capacitores y amplificadores operacionales (usualmente). Algunas de sus ventajas son:

- Reducción de tamaño y peso.
- Mayor fiabilidad del circuito.
- Facilidad de implementación del circuito.
- Numerosas aplicaciones.
- Pueden proporcionar ganancia de voltaje, mientras que los filtros pasivos producen pérdidas de voltaje.

Una de las desventajas de los filtros activos es el ancho de banda finito, el cual causa algunas limitantes a altas frecuencias, así que no se utilizan por encima de 30 kHz, mientras que los filtros pasivos no tienen esa limitación y pueden utilizarse hasta 500 MHz.

Un criterio importante en la comparación de filtros es la sensibilidad, la cual es una medida de la desviación de la respuesta del filtro debida a variaciones en los elementos causadas por cambios ambientales. La sensibilidad de los filtros pasivos es mucho menor que la de los filtros activos.

### 3.4 APROXIMACIÓN

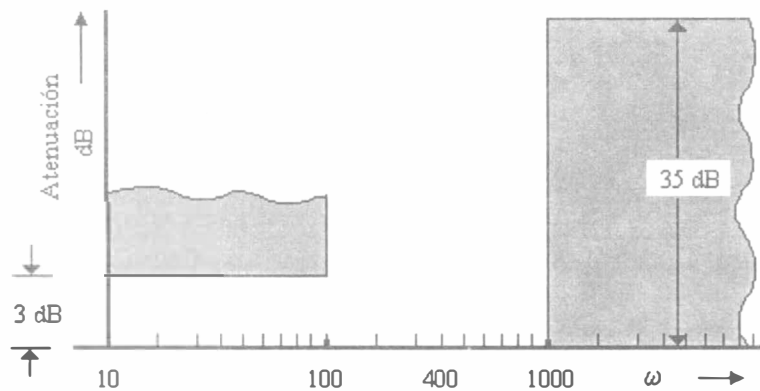
El problema de la aproximación consiste en encontrar una función cuya característica de pérdida se encuentra en la región permitida. La función puede utilizar elementos pasivos o activos, pero debe tenerse en cuenta que cuanto menor sea el orden de la función, mayor simplificación habrá en el diseño.

#### 3.4.1 Técnica de aproximación con diagramas de Bode

Este método es apropiado para diseños de filtros sencillos y de orden bajo. El procedimiento consiste en estimar la locación de los polos y ceros para cumplir con los requerimientos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

##### *Ejemplo 3.1*

Aproximar los requerimientos del filtro pasabajos que se describe en la figura 3.14.



**Figura 3.14** Plantilla de diseño para el ejemplo 3.1.

El primer paso es estimar el orden de la función del filtro deseada. De los requerimientos dados, la pérdida en la banda de transición de 100 a 400 rad/s aumenta en 35 dB, lo cual corresponde a una recta de 35 dB que es dos octavas o 17.5 dB/octava.

Se estima que los requerimientos dados se satisfacen con una función de ganancia LP de tercer orden de la forma

$$T_{LP}(s) = \frac{K}{(s+a)\left(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2\right)} \quad (3.16)$$

donde las constantes  $K$ ,  $a$ ,  $\omega_p$  y  $Q_p$  se obtienen a partir de los requerimientos del filtro, como se explica a continuación. La comparación de los requerimientos con el diagrama de Bode de  $1/(s + \alpha)$  sugiere que el polo real debe estar localizado en la frecuencia de corte del filtro, es decir,

$$a = 100$$

La frecuencia del polo debe ser igual a la frecuencia de corte, es decir,

$$\omega_p = 100$$

y la constante  $K$  se determina del valor dc de la función, el cual se supone de 1 debido a los requerimientos. Entonces el valor dc de  $T_{LP}(s)$  es

$$T_{LP}(s)\Big|_{s=0} = \frac{K}{a\omega_p^2} = 1$$

$Q_p$  se obtiene a partir de la pérdida a la frecuencia de corte  
 $\omega = 100 \text{ rad/s}$

$$20 \log_{10} \left| \frac{K}{(s+a)\left(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2\right)} \right|_{s=j100} = -3$$



Sustituyendo  $K$ ,  $a$  y  $\omega_p$  y simplificando,

$$\frac{10^6}{|j100 + 100| \cdot \left| -(100)^2 + \frac{100}{Q_p}(j100) + (100)^2 \right|} = 0.7078$$

Resolviendo para  $Q_p$  se obtiene

$$Q_p = 1$$

Entonces, la función  $LP$  es

$$T_{LP}(s) = \frac{10^6}{(s + 100)(s^2 + 100s + 10^4)}$$

### 3.4.2 Aproximación Butterworth

De acuerdo con la figura 3.15, los requerimientos son caracterizados mediante un pasabanda de  $\omega_c$  a  $\omega_p$ , un rechazabanda de  $\omega_s$  a infinito,  $A_{\text{máx}}$  como la máxima pérdida del pasabanda y  $A_{\text{mín}}$  como la mínima pérdida del rechazabanda.

La aproximación  $LP$  de la función tiene la siguiente forma general:

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2 = 1 + \left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2 \quad (3.17)$$

donde  $H(s)$  es la función de pérdida deseada y  $K(s) = N(s)/D(s)$  es una función racional en  $s$ . La función  $K(s)$  debe escogerse de manera que sea pequeña en el pasabanda, para que la magnitud de  $H(j\omega)$  sea igual a la unidad. En el rechazabanda, la magnitud de  $K(s)$  debe ser de gran orden

para satisfacer los requerimientos de pérdida del rechazabanda.  $K(s)$  debe ser de la forma

$$K(s) = P_n(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots a_ns^n \quad (3.18)$$

donde los coeficientes se escogen de manera que  $H(s)$  cumpla con los requerimientos del filtro.

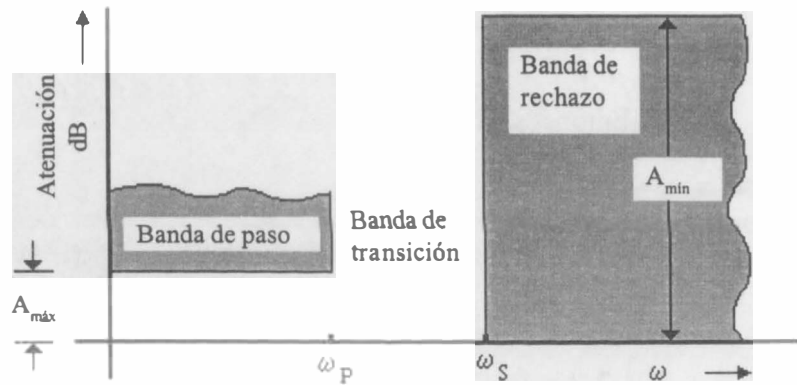


Figura 3.15 Plantilla de diseño del filtro pasabajas.

La aproximación *Butterworth* está caracterizada por

$$K(s) = P_n(s) = \varepsilon \left( \frac{s}{\omega_p} \right)^n \quad (3.19)$$

donde  $\varepsilon$  es una constante,  $n$  es el orden del polinomio y  $\omega_p$  es la frecuencia del pasabanda. La función de pérdida correspondiente es

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_{IN}(j\omega)}{V_o(j\omega)} \right| = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n}} \quad (3.20)$$

En el valor dc, la pérdida es de 1. La curva de la función en dc se obtiene mediante la expansión de la ecuación anterior en series binomiales. Cerca de  $\omega = 0$ ,

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} \ll 1$$

entonces

$$\left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{4n} + \frac{1}{16} \varepsilon^6 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{6n} + \dots \quad (3.21)$$

$K(s)$  se escoge de tal forma que la mayoría de las derivadas sea cero, resultando una curva tan plana como sea posible al valor dc. Por lo anterior, este tipo de aproximación se conoce como *aproximación plana al máximo*.

La pérdida en dB es

$$A(\omega) = 10 \log_{10} \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{2n} \right] \text{ dB} \quad (3.22)$$

Si  $\omega = \omega_p$ ,

$$A(\omega_p) = 10 \log_{10} (1 + \varepsilon^2) \quad (3.23)$$

El parámetro  $\varepsilon$  se relaciona con los requerimientos de pérdida del pasabanda  $A_{\text{máx}}$  mediante

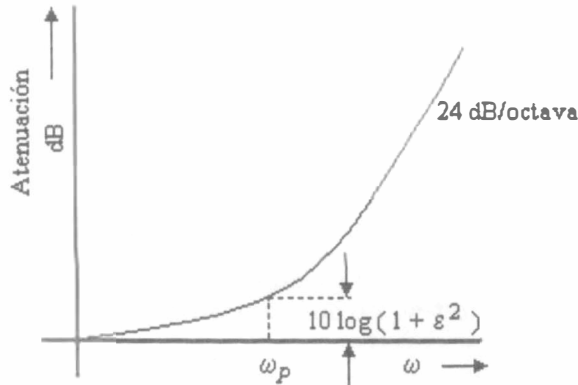
$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1 A_{\text{máx}}} - 1} \quad (3.24)$$

La pérdida aumenta con el orden  $n$ .

La función de pérdida Butterworth de cuarto orden se muestra en la figura 3.16. En ella se observa la máxima característica plana del pasabanda y el aumento monotónico de la pérdida del rechazabanda. Para propósitos

de diseño, es conveniente graficar estas características para diferentes valores de  $n$  contra la frecuencia normalizada

$$\Omega = \varepsilon^{1/n} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right) \tag{3.25}$$



**Figura 3.16** Filtro pasabajas del tipo Butterworth de cuarto orden.

En términos de la frecuencia normalizada, la pérdida es

$$A(\Omega) = 10 \log_{10}(1 + \Omega^{2n}) \tag{3.26}$$

la cual se grafica en la figura 3.17 para órdenes superiores a 5. El uso de esas gráficas se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2**

Encontrar la pérdida a  $\omega_s = 40 \text{ rad/s}$  para un filtro de quinto orden que tiene una pérdida máxima de 1dB en  $\omega_p = 10 \text{ rad/s}$ .

De la ecuación 3.24,

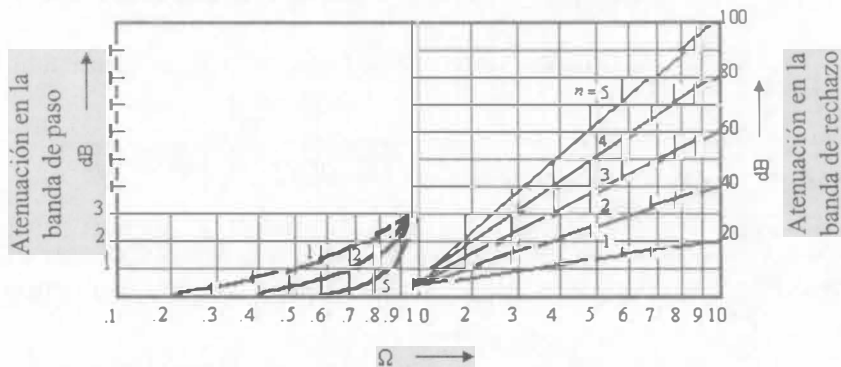
$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1} = 0.509$$

y de la ecuación 3.25,

$$\Omega_s = (0.509)^{1/5}(4) = 3.49$$

La pérdida a  $\Omega_s = 3.49$  de la figura 3.17 es aproximadamente 55 dB. El valor más exacto se obtiene de la ecuación 3.26:

$$A(\omega) = 10 \log_{10} (1 + (3.49)^{10}) = 54.3 \text{ dB} .$$



**Figura 3.17** Atenuación de un filtro Butterworth pasabajos de cuarto orden.

$H(j\omega)$  se expresa en términos de su parte real e imaginaria como

$$H(j\omega) = \text{Re } H(j\omega) + j \text{Im } H(j\omega) \quad (3.27)$$

de donde

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= (\operatorname{Re} H(j\omega))^2 + (j \operatorname{Im} H(j\omega))^2 \\ &= [\operatorname{Re} H(j\omega) + j \operatorname{Im} H(j\omega)][\operatorname{Re} H(j\omega) - j \operatorname{Im} H(j\omega)] \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$H(-j\omega) = \operatorname{Re} H(j\omega) - j \operatorname{Im} H(j\omega)$$

entonces la ecuación anterior se reduce a

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega) \quad (3.28)$$

Igualmente, en términos de la variable normalizada  $\Omega$  se obtiene

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega)$$

Esta ecuación describe la función de transferencia para frecuencias en el eje  $j\Omega$ ; sin embargo, una forma más general de expresarse es

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) \quad (3.29)$$

donde  $s$  es la frecuencia normalizada de la variable  $\Sigma + j\Omega$ .

De la aproximación de Butterworth de la ecuación 3.20,

$$|H(j\Omega)|^2 = 1 + \Omega^{2n} = 1 + [-(j\Omega)^2]^n \quad (3.30)$$

que en el dominio de  $s$  se representa como

$$|H(s)|^2 = 1 + (-s^2)^n \quad (3.31)$$

Las raíces de  $|H(s)|^2$  se obtienen al resolver la ecuación

$$1 + (-s^2)^n = 0 \quad (3.32)$$

La solución de la ecuación anterior es

$$s_k = \exp\left[\frac{j\pi}{2} \left(\frac{2k+n-1}{n}\right)\right] \quad \text{donde } k = 1, 2, \dots, 2n$$

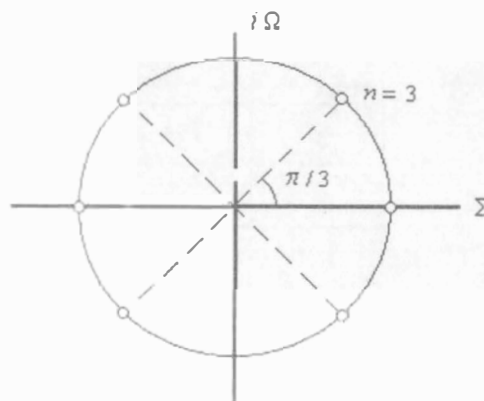
Las raíces  $2n$  se encuentran localizadas en el círculo unitario y están igualmente espaciadas a intervalos de  $\pi/n$  radianes. La función de pérdida en el dominio de  $s$  está dada por

$$H(s) = \prod_j (s - s_j) \quad (3.33)$$

donde  $s_j$  son las raíces de la mitad del plano izquierdo de la ecuación 3.32.

### **Ejemplo 3.3**

Encontrar la función de aproximación del filtro *LP* Butterworth normalizado de tercer orden.



**Figura 3.18** Raíces de un filtro pasabajos del tipo Butterworth de tercer orden.

Las seis raíces de  $|H(s)|^2$  se localizan en el círculo unitario a intervalos de  $\pi/3$  radianes, como se muestra en la figura 3.18. Sus raíces son

$$s = -1 \quad \text{y} \quad s = -0.5 \pm j0.866$$

La función de aproximación es

$$\begin{aligned} H(s) &= (s + 1)(s + 0.5 + 0.866j)(s + 0.5 - 0.866j) \\ &= (s + 1)(s^2 + s + 1) \end{aligned}$$

En la tabla 3.1 se muestran los polinomios de Butterworth normalizados para  $n = 1$  a 5. Para determinar la función de Butterworth de un filtro cuya frecuencia de corte es  $\omega_p$  y su pérdida máxima es  $A_{\text{máx}}$  dB, los polinomios dados en la tabla 1 se deben normalizar reemplazando  $s$  por  $s \left( \frac{\epsilon^{1/n}}{\omega_p} \right)$ .

**TABLA 3.1** COEFICIENTES DE LOS LOS POLINOMIOS DE BUTTERWORTH NORMALIZADOS PARA  $n = 1$  A 5.

$n$	$H(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.414s + 1$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0.76537s + 1)(s^2 + 1.84776s + 1)$
5	$(s^2 + 0.61803s + 1)(s^2 + 1.61803s + 1)(s + 1)$



### 3.4.3 Aproximación Chebyshev

La principal característica de la aproximación Butterworth es que su pérdida es máximamente plana en el origen, lo cual para un pasabanda es bueno en el origen; sin embargo, esta aproximación va cambiando a medida que  $\omega$  se aproxima a  $\omega_p$ . Además, la atenuación de la banda de rechazo es menor que esa atenuación si se utilizan otros tipos de polinomios como el Chebyshev, el cual se describe a continuación. El aumento de atenuación de la banda de rechazo se logra al cambiar las condiciones de aproximación de la banda de paso. Este criterio se utiliza para minimizar la desviación máxima de la característica plana ideal, buscando un comportamiento como se muestra en la figura 3.19.

La función Chebyshev  $C_n(\Omega)$  de  $n$ -ésimo orden se define como

$$\begin{aligned} C_n(\Omega) &= \cos(n \cos^{-1} \Omega) & |\Omega| \leq 1 \\ &= \cosh(n \cosh^{-1} \Omega) & |\Omega| > 1 \end{aligned} \quad (3.34[a \text{ y } b])$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia normalizada

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

La función de Chebyshev también puede expresarse como polinomio en  $\Omega$ , en la forma

$$C_{n+1}(\Omega) + C_{n-1}(\Omega) = \cos[(n+1) \cos^{-1} \Omega] + \cos[(n-1) \cos^{-1} \Omega]$$

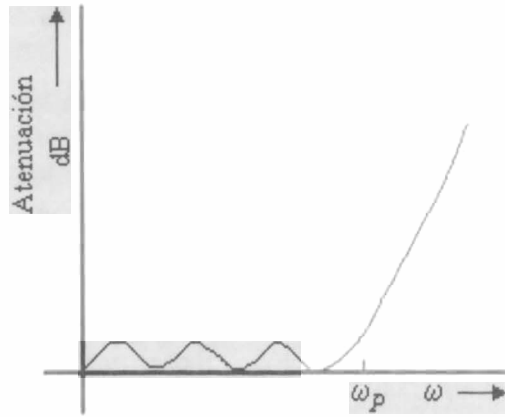


Figura 3.19 Característica de rizo de la banda de paso.

Utilizando la identidad  $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$ , el lado derecho de la ecuación se reduce a

$$2 \cos(\cos^{-1} \Omega) \cos(n \cos^{-1} \Omega) = 2\Omega C_n(\Omega) \tag{3.35}$$

de donde se produce la relación

$$C_{n+1}(\Omega) = 2\Omega C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega) \tag{3.36}$$

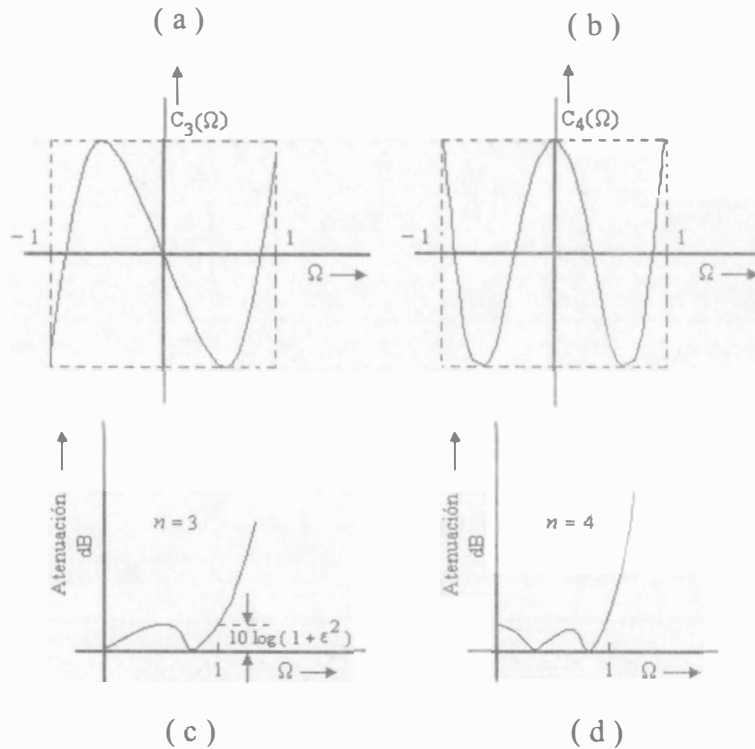
De la ecuación 3.34(a),

$$\begin{aligned} C_0(\Omega) &= 1 \\ C_1(\Omega) &= \Omega \end{aligned}$$

De la ecuación 3.36 se obtienen los polinomios de órdenes superiores

$$\begin{aligned} C_2(\Omega) &= 2\Omega^2 - 1 \\ C_3(\Omega) &= 4\Omega^3 - 3\Omega \\ C_4(\Omega) &= 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1 \\ C_5(\Omega) &= 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

La gráfica de las funciones de Chebyshev utilizando los polinomios anteriores se muestra en la figura 3.20a y b.



**Figura 3.20** a) Función Chebyshev de tercer orden. b) Función Chebyshev de cuarto orden. c) Aproximación pasabajo de una función Chebyshev de tercer orden. d) Aproximación pasabajos de una función Chebyshev de cuarto orden.

La función de aproximación pasabajos Chebyshev se obtiene a partir de los polinomios de Chebyshev y está dada por

$$|H(j\Omega)| = \frac{V_{IN}(j\omega)}{V_o(j\omega)} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)} \quad (3.37)$$

En la figura 3.20c y d se muestran las funciones de pérdida para  $n = 3$  y  $n = 4$ . Observe que el rizo de las funciones de aproximación se encuentra entre uno y  $\sqrt{1 + \varepsilon^2}$  para  $|\Omega| \leq 1$ , y ese número de mínimos de  $|H(j\Omega)|$  en

la banda de  $(-1 \leq \Omega \leq 1)$  es igual al orden  $n$ . Esa propiedad se cumple para todos los órdenes.

La pérdida de  $|H(j\Omega)|$  en la frecuencia  $\omega_p$  de la banda pasante, donde la frecuencia normalizada  $\Omega = 1$  y  $C_n(1) = 1$ , es

$$A_{max} = 10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2) \quad (3.38)$$

donde el parámetro  $\varepsilon$  se define como

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1} \quad (3.39)$$

Si se conocen los requerimientos del rizo  $A_{max}$  y el orden  $n$ , se puede graficar la pérdida normalizada de Chebyshev utilizando las ecuaciones 3.34, 3.37 y 3.39. El uso de estas gráficas se ilustra en el siguiente ejemplo.

#### **Ejemplo 3.4**

Encontrar el orden necesario para un filtro pasabajos Chebyshev cuyos requerimientos están caracterizados por

$$f_p = 2000\text{Hz} \quad f_s = 5000\text{Hz} \quad A_{max} = 1\text{dB} \quad A_{min} = 35\text{dB}$$

La frecuencia normalizada de la banda de rechazo es

$$\Omega_s = f_s / f_p = 2.5$$

De la figura 3.23 se observa que el orden necesario es 4.

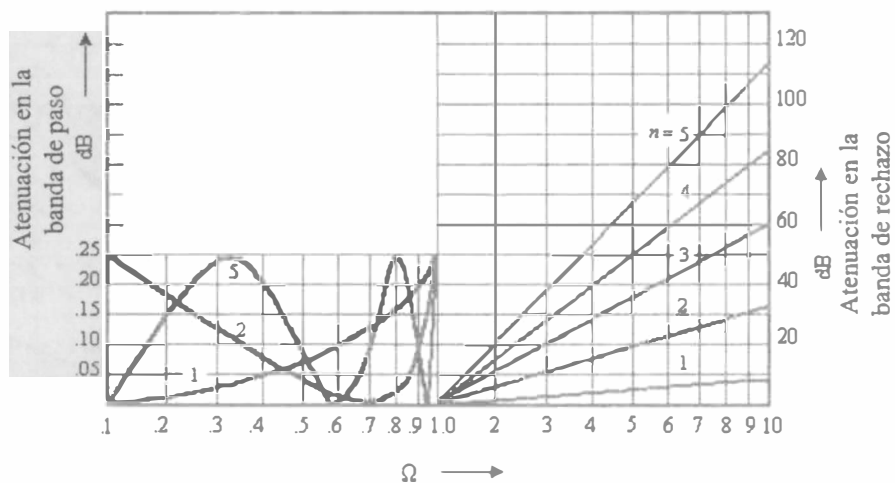


Figura 3.21 Gráfica de atenuación de un filtro Chebyshev para  $A_{m\acute{a}x}=0.25$  dB.

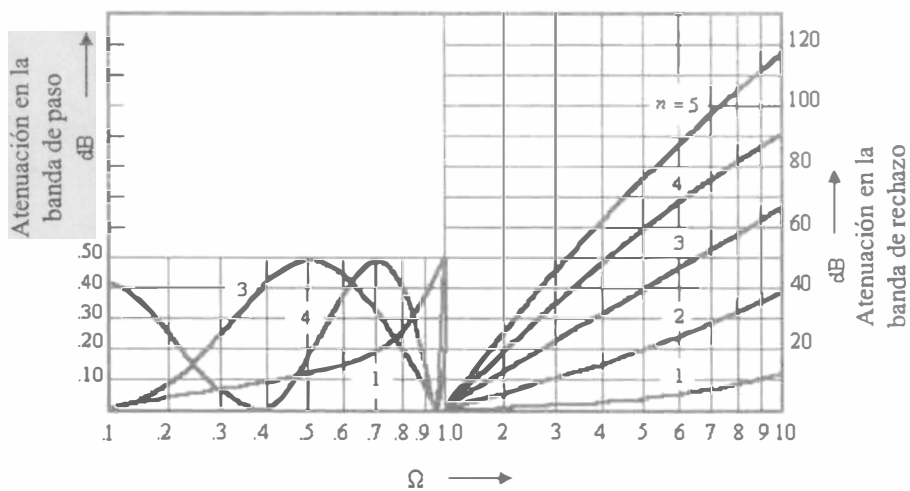


Figura 3.22 Gráfica de atenuación de un filtro Chebyshev para  $A_{m\acute{a}x}=0.5$  dB.

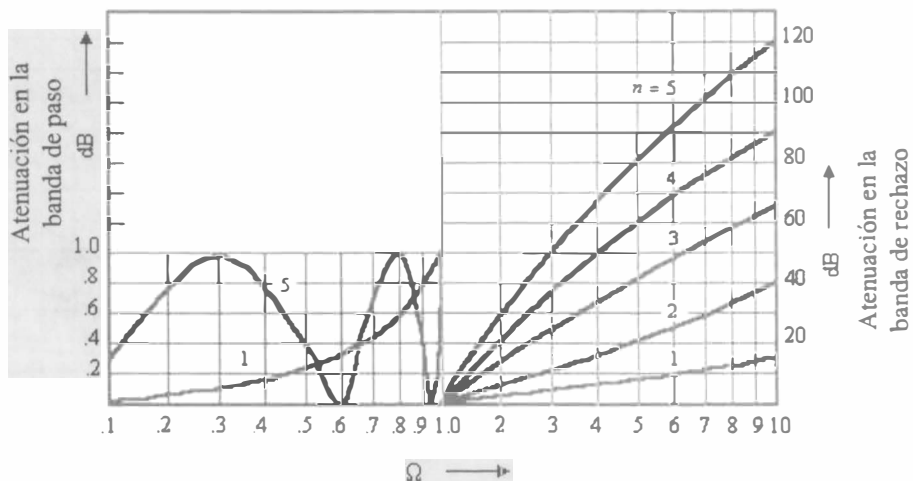


Figura 3.23 Gráfica de atenuación de un filtro Chebyshev para  $A_{m\acute{a}x} = 1.0 \text{ dB}$ .

**TABLA 3.2 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN DE CHEBYSHEV.**

a)  $A_{m\acute{a}x} = 0.25 \text{ dB}$

$n$	Numerador de $H(s)$	Denominador (K)
1	$s + 4.10811$	4.10811
2	$s^2 + 1.79668s + 2.11403$	2.05405
3	$(s^2 + 0.76722s + 1.33863)(s + 0.76722)$	1.02702
4	$(s^2 + 0.42504s + 1.16195)(s^2 + 1.02613s + 0.45485)$	0.51352
5	$(s^2 + 0.27005s + 1.09543)(s^2 + 0.70700s + 0.53642)(s + 0.43695)$	0.25676

b)  $A_{m\acute{a}x} = 0.5dB$

$n$	Numerador de $H(s)$	Denominador ( $K$ )
1	$s + 2.86278$	2.86278
2	$s^2 + 1.42562s + 1.51620$	1.43138
3	$(s^2 + 0.62646s + 1.14245)(s + 0.62646)$	0.71570
4	$(s^2 + 0.35071s + 1.06352)(s^2 + 0.84668s + 0.356412)$	0.35785
5	$(s^2 + 0.22393s + 1.03578)(s^2 + 0.58625s + 0.47677)(s + 0.362332)$	0.17892

c)  $A_{m\acute{a}x} = 1dB$

$n$	Numerador de $H(s)$	Denominador ( $K$ )
1	$s + 1.96523$	1.96523
2	$s^2 + 1.09773s + 1.10251$	0.98261
3	$(s^2 + 0.49417s + 0.99420)(s + 0.49417)$	0.49130
4	$(s^2 + 0.27907s + 0.98650)(s^2 + 0.67374s + 0.27940)$	0.24565
5	$(s^2 + 0.17892s + 0.98831)(s^2 + 0.46841s + 0.42930)(s + 0.28949)$	0.12283

El uso de las tablas se muestra en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 3.5

Encontrar la función de aproximación de un filtro pasabajos con los siguientes requerimientos:

$$\omega_p = 200 \quad \omega_s = 600 \quad A_{max} = 0.5dB \quad A_{min} = 20dB$$

La frecuencia de la banda de rechazo normalizada es  $\Omega_s = 600/200 = 3$ . De la figura 3.22, el orden necesario es 3. La función *LP* normalizada para  $n = 3$  y  $A_{m\acute{a}x} = 0.25 dB$  se obtiene de la tabla 2b.

$$H_N(s) = \frac{(s^2 + 0.62646s + 1.14245)(s + 0.62646)}{0.71570}$$

La función deseada  $H(s)$  se obtiene reemplazando  $s$  por  $s/200$ :

$$H(s) = \frac{(s^2 + 125.3s + 45698)(s + 125.3)}{5725600}$$

### 3.4.4 Aproximación de Bessel

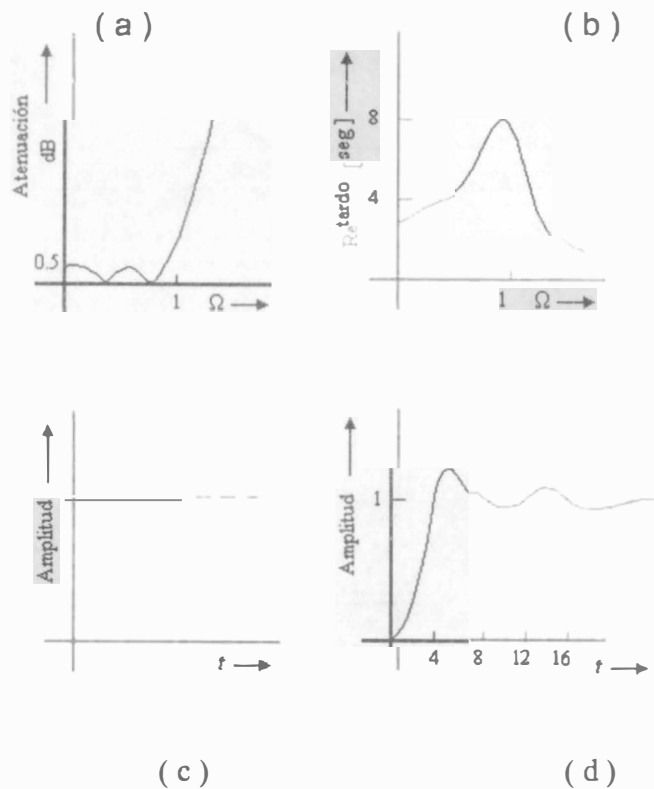
Esta aproximación se concentra en las características de fase y retraso que presentan los filtros.

Las funciones de filtros Chebyshev deterioran significativamente la respuesta en tiempo de las señales digitales. Las características de retraso de la banda pasante no son planas y las altas frecuencias se retrasan mucho más que las bajas frecuencias, como se observa en las gráficas de la figura 3.24 para un filtro de cuarto orden.

En el caso de los filtros Butterworth, la característica de magnitud es monótonica en la banda pasante y el retraso es relativamente plano. En la figura 3.25 se muestran las características de magnitud y retraso para un



Butterworth de cuarto orden. Se observa que a mayor suavidad en la característica de magnitud, la característica de retardo se hace más plana. Sin embargo, ese comportamiento de la aproximación Butterworth produce menos atenuación de la banda de rechazo que en la aproximación de Chebyshev.



**Figura 3.24** Características de un filtro Chebyshev de cuarto orden. ( $A_{m\acute{a}x} = 0.5$  db). a) Atenuación. b) Retardo. c) Entrada escalón. d) Respuesta al escalón.

El objetivo de la aproximación de Bessel es obtener una característica de retardo tan plana como sea posible en la banda pasante. La función de pérdida de la característica de retardo ideal es

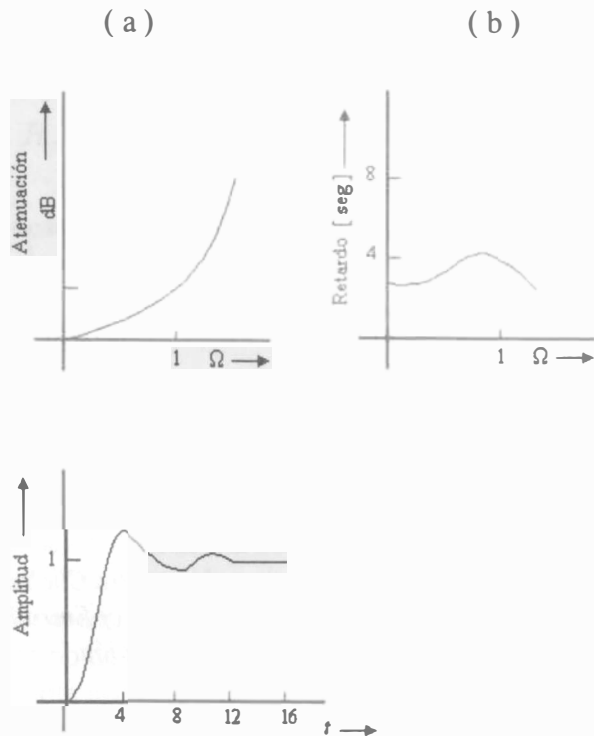
$$H(s) = e^{sT_0} \quad (3.40)$$

La aproximación de Bessel utiliza polinomios que se aproximan a esta característica ideal. En esta aproximación el retraso en el origen es plano al máximo, es decir, la mayoría de las derivadas en el origen son cero. Para una función normalizada, la aproximación, con un retraso dc de 1 segundo, es

$$H(s) = e^{-s} \tag{3.41}$$

La aproximación de Bessel para la función normalizada anterior es

$$H(s) = \frac{B_n(s)}{B_n(0)} \tag{3.42}$$



**Figura 3.25** Características de un filtro Chebyshev de cuarto orden. ( $A_{m\acute{a}x} = 3.0$  db). a) Atenuación. b) Retraso. c) Entrada escalón.

donde  $B_n(s)$  es el  $n$ -ésimo orden del polinomio de Bessel, el cual se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$B_0(s) = 1$$

$$B_1(s) = s + 1$$

$$y \quad B_n(s) = (2n - 1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \quad (3.43)$$

En la tabla 3.3 aparecen las funciones de aproximación de Bessel para  $n = 1$  a 5.

**TABLA 3.3 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN DE BESSEL.**

$n$	Numerador de $H(s)$	Denominador (K)
1	$s + 1$	1
2	$s^2 + 3s + 3$	3
3	$(s^2 + 3.677782s + 6.45944)(s + 2.32219)$	15
4	$(s^2 + 5.79242s + 9.14013)(s^2 + 4.20758s + 11.4878)$	105
5	$(s^2 + 6.70391s + 14.2725)(s^2 + 4.64934s + 18.1563)(s + 3.64674)$	945

La pérdida y el retraso de las aproximaciones de Bessel ( $n = 1$  a 5) se muestran en las figuras 3.26 y 3.27, respectivamente. En esas figuras la frecuencia normalizada  $\Omega$  está relacionada con  $\omega$  mediante

$$\Omega = \omega T_0 \quad (3.44)$$

En la figura 3.27 se muestra que a mayor orden  $n$ , mayor es el ancho de la banda de frecuencias en la cual el retraso es plano. Las características de retraso de la aproximación de Bessel son superiores a las de Butterworth y Chebyshev. Sin embargo, la atenuación es menor que la de Butterworth.

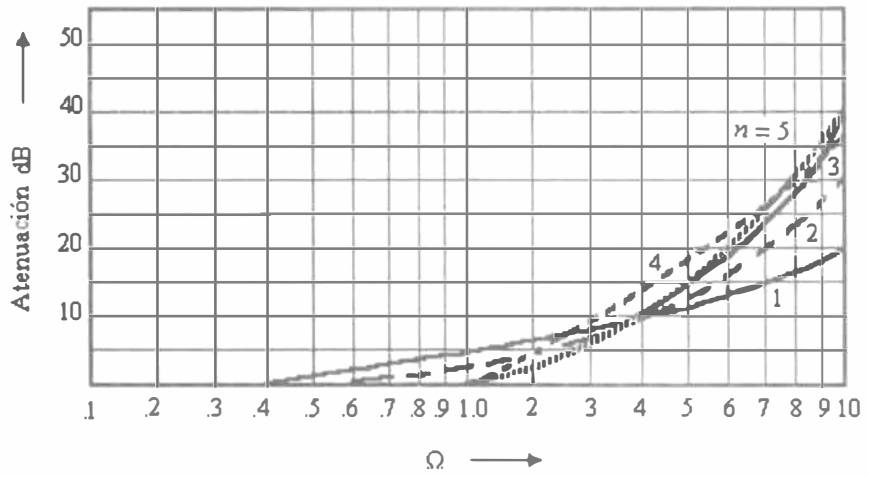


Figura 3.26 Atenuación del filtro pasabajos tipo Bessel.

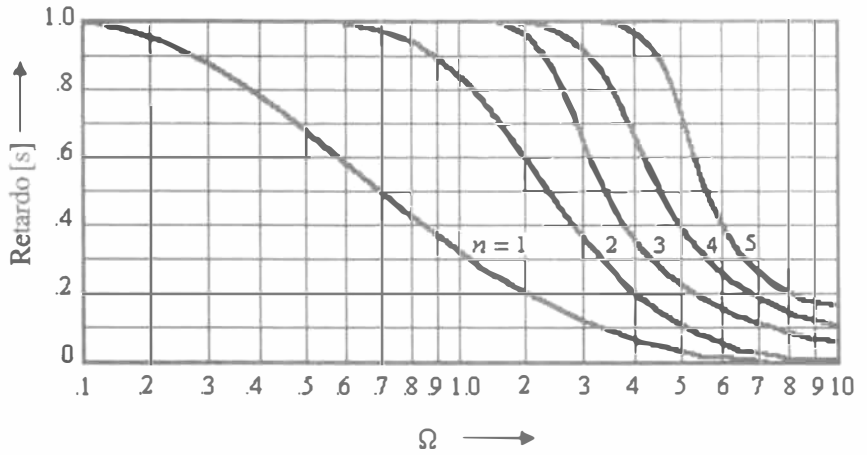


Figura 3.27 Retraso de un filtro pasabajos del tipo Bessel.

### Ejemplo 3.6

Encontrar la función de aproximación de Bessel *LP* para un filtro con los siguientes requerimientos:

- El retraso debe ser plano por encima de 1% del valor dc a 2kHz.
- La atenuación a 6kHz debe exceder los 25dB.

La primera idea es buscar un filtro de cuarto orden. De la figura 3.27 la aproximación de Bessel para un filtro de cuarto orden muestra un retraso plano por encima del 1% de aproximadamente  $\Omega = 1.9$ . Para satisfacer los requerimientos de retraso, esta frecuencia normalizada debe corresponder a  $\omega = 2\text{kHz}$ . Así, la frecuencia normalizada correspondiente a 6kHz debe ser

$$\Omega_s = \frac{6}{2}(1.9) = 5.7$$

A esa frecuencia, la atenuación es de 22 dB (Fig. 3.26) Como la aproximación de cuarto orden no cumple con los requerimientos de pérdida, se utiliza una función de quinto orden.

De la figura 3.27, el retraso comienza a aproximadamente  $\Omega = 2.5$ . Esta frecuencia corresponde a  $\omega = 2\text{kHz}$ , y la frecuencia normalizada a  $\omega = 6\text{kHz}$  es

$$\Omega_s = \frac{6}{2}(2.5) = 7.5$$

De la figura 3.26, la función de quinto orden proporciona una atenuación de 29.5 dB a esa frecuencia, así que la aproximación de Bessel de quinto orden satisface los requerimientos de pérdida y retraso.

La función normalizada de quinto orden se muestra en la tabla 3.3. De la ecuación 3.44,

$$T_0 = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{2.5}{2\pi(2000)} = 1.989(10)^{-4} \text{ s.}$$

entonces, sustituyendo  $s$  y  $T_0$  la función de ganancia es

$$\frac{V_o}{V_{IN}} = \frac{3.608(10^8)}{s^2 + 3.370(10^4)s + 3.608(10^8)} \cdot \frac{4.5894(10^8)}{s^2 + 2.338(10^4)s + 4.5894(10^8)} \cdot \frac{1.8335(10^4)}{s + 1.8335(10^4)}$$

## 3.5 SENSIBILIDAD

### 3.5.1 Sensibilidad $\omega$ y $Q$

La sensibilidad de una red es la medida del grado de variación de su rendimiento del valor nominal, debido a cambios en los elementos que conforman la red. La función bicuadrática de un filtro puede expresarse como

$$T(s) = K \frac{s^2 + \frac{\omega_z}{Q_z} s + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2} \quad (3.45)$$

En esta sección se estudia la sensibilidad a los parámetros bicuadráticos con la ilustración de algunos ejemplos.

Si se considera la sensibilidad de una frecuencia de polo  $\omega_p$  con respecto a los cambios del resistor  $R$ , la sensibilidad del polo se define como el cambio por unidad en la frecuencia del polo,  $\Delta\omega_p/\omega_p$ , causada por el cambio por unidad en el resistor,  $\Delta R/R$ . Matemáticamente,

$$S_P^{\omega_p} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\omega_p}{\omega_p}}{\frac{\Delta R}{R}} \quad (3.46)$$

$$= \frac{R}{\omega_p} \frac{\partial \omega_p}{\partial R} \quad (3.47)$$

lo cual equivale a

$$S_p^{\omega_p} = \frac{\partial(\ln \omega_p)}{\partial(\ln R)} \quad (3.48)$$

El costo de manufactura de un componente es función del porcentaje de cambio ( $100 \cdot \Delta R / R$ ) más que del cambio absoluto ( $\Delta R$ ) del componente. Por esta razón se requiere medir la sensibilidad en términos de los cambios relativos en los componentes, como se muestra en la ecuación 3.46.

Las sensibilidades de los parámetros  $\omega_p$ ,  $Q_p$ ,  $Q_z$  y  $K$  a cualquier elemento de la red se definen como

$$S_C^{\omega_p} = \frac{C}{\omega_p} \frac{\partial \omega_p}{\partial C} \quad S_R^{Q_p} = \frac{R}{Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial R} \quad S_R^K = \frac{R}{K} \frac{\partial K}{\partial R} \quad \text{etc.} \quad (3.49)$$

La ecuación 3.48 puede utilizarse para desarrollar reglas útiles para simplificar los cálculos de la sensibilidad. La sensibilidad del parámetro  $p$  a un elemento  $x$  es

$$S_x^p = \frac{x}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\ln p)}{\partial(\ln x)} \quad (3.50)$$

Si  $p$  no es función de  $x$  (p. ej.,  $p = a$  constante), entonces

$$S_x^p = 0 \quad (3.51)$$

Si  $p = cx$ , donde  $c$  es una constante,

$$S_x^{cx} = \frac{\partial(\ln cx)}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial(\ln c)}{\partial(\ln x)} + \frac{\partial(\ln x)}{\partial(\ln x)} = 1 \quad (3.52)$$

Otra relación útil es

$$S_x^P = -S_x^{1/P} \quad (3.53)$$

De la ecuación 3.48,

$$-S_x^{1/P} = -\frac{\partial(\ln 1/P)}{\partial(\ln x)} = -\frac{\partial(-(\ln P))}{\partial(\ln x)}$$

De manera similar, se puede demostrar que

$$S_x^P = -S_{1/x}^P \quad (3.54)$$

Otra relación que puede demostrarse fácilmente es

$$\begin{aligned} S_x^{P_1 P_2} &= S_x^{P_1} + S_x^{P_2} \\ S_x^{P_1/P_2} &= S_x^{P_1} - S_x^{P_2} \\ S_x^P &= \frac{1}{n} S_x^P \\ S_x^{P^n} &= n S_x^P \\ S_x^{P_1 + P_2} &= \frac{P_1 S_x^{P_1} + S_x^{P_2}}{P_1 + P_2} \\ S_x^{c f(x)} &= S_x^{f(x)} \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde  $c$  es independiente de  $x$ , y  $f(x)$  es función de  $x$ .

La evaluación de la sensibilidad utilizando estas relaciones se demuestra en los siguientes ejemplos.

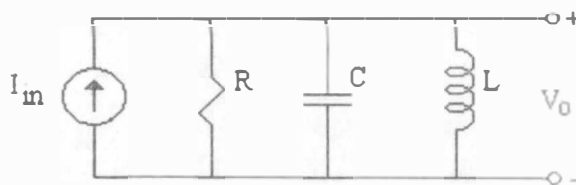


**Ejemplo 3.7**

La función de transferencia  $V_o/I_{IN}$  para el circuito pasivo de la figura 3.28 puede ser

$$\frac{V_o}{I_{IN}} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Hallar las sensibilidades de  $K$ ,  $\omega_p$  y  $Q_p$  para los elementos pasivos.



**Figura 3.28** Circuito pasivo propuesto.

De la ecuación 3.45, los parámetros bicuadráticos son

$$K = \frac{1}{C} \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q_p = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Utilizando las relaciones de sensibilidad desarrolladas anteriormente,

$$S_C^K = S_C^{1/C} = -S_C^C = -1$$

$$S_L^{\omega_p} = S_L^{1/\sqrt{LC}} = -S_L^{\sqrt{LC}} = -\frac{1}{2} S_L^{LC} = -\frac{1}{2}$$

$$S_C^{\omega_p} = -S_C^{\sqrt{LC}} = -\frac{1}{2}$$

$$S_R^{Q_p} = S_R^{R\sqrt{C/L}} = 1$$

$$S_C^{Q_p} = \frac{1}{2} S_C^{R^2 C/L} = \frac{1}{2}$$

$$S_L^{Q_p} = \frac{1}{2} S_L^{R^2 C/L} = -\frac{1}{2} S_L^{L/R^2 C} = -\frac{1}{2}$$

y todas las demás sensibilidades son cero.

Observaciones:

1. Las magnitudes de las sensibilidades son todas menores que la unidad. Una sensibilidad de 1 implica que un 1% de cambio en el elemento puede causar un 1% de cambio en el parámetro (Ec. 3.46), lo cual se considera una baja sensibilidad.
2. Las sensibilidades evaluadas son iguales al exponente del elemento. Por ejemplo, para

$$Q_p = R^1 C^{1/2} L^{-1/2}$$

las sensibilidades son

$$S_R^{Q_p} = 1 \qquad S_C^{Q_p} = \frac{1}{2} \qquad S_L^{Q_p} = -\frac{1}{2}$$

En general, si el parámetro  $p$  está dado por

$$p = x_1^a x_2^b x_3^c$$

entonces la sensibilidad de  $p$  para  $x_1, x_2, y x_3$ , será igual a sus respectivos exponentes, es decir,

$$S_{x_1}^p = a \quad S_{x_2}^p = b \quad S_{x_3}^p = c \quad (3.56)$$

3. La sensibilidad de  $\omega_p$  a  $R$  es cero, es decir, cualquier cambio en  $R$  no afecta la frecuencia del polo.

### 3.5.2 Desviaciones de varios elementos

El cambio en la resistencia hace que la frecuencia del polo cambie por

$$\Delta\omega_p = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} S_R^{\omega_p} \frac{\Delta R}{R} \omega_p \quad (3.57)$$

Para desviaciones pequeñas en  $R$ ,

$$\Delta\omega_p \cong S_R^{\omega_p} \frac{\Delta R}{R} \omega_p \quad (3.58)$$

Este cambio se debe a un elemento.

Si se considera, por ejemplo, el cambio en  $\omega_p$  debido a desviaciones de todos los elementos del circuito  $x_j$ , el cambio  $\Delta\omega_p$  puede obtenerse expandiéndolo a través de las series de Taylor como

$$\Delta\omega_p = \frac{\partial\omega_p}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial\omega_p}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial\omega_p}{\partial x_m} \Delta x_m + \text{términos de segundo orden o mayor.}$$

donde  $m$  es el número total de elementos en el circuito. Se asume que los cambios en los componentes  $\Delta x_j$  son pequeños y se ignoran los términos de segundo orden o de órdenes superiores. Además,

$$\Delta\omega_p \cong \sum_{j=1}^m \frac{\partial\omega_p}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (3.59)$$

Otra forma de expresar la ecuación anterior es

$$\begin{aligned}\Delta\omega_p &\cong \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial\omega_p}{\partial x_j} \frac{x_j}{\omega_p} \right) \left( \frac{\Delta x_j}{x_j} \right) \omega_p \\ &= \sum_{j=1}^m S_{x_j}^{\omega_p} V_{x_j} \omega_p\end{aligned}\quad (3.60)$$

donde  $V_{x_j} = \Delta x_j / x_j$  es el cambio por unidad en el elemento  $x_j$ , y se conoce como *variabilidad* de  $x$ . De la ecuación 3.31, el cambio por unidad en  $\omega_p$  es

$$\frac{\Delta\omega_p}{\omega_p} = \sum_{j=1}^m S_{x_j}^{\omega_p} V_{x_j} \quad (3.61)$$

Igualmente, los cambios por unidad en el polo  $Q$ ,  $\omega_z$ ,  $Q_z$  y  $K$  debidos a las desviaciones simultáneas de todos los componentes están dados por

$$\begin{aligned}\frac{\Delta Q_p}{Q_p} &= \sum_{j=1}^m S_{x_j}^{Q_p} V_{x_j} & \frac{\Delta K}{K} &= \sum_{j=1}^m S_{x_j}^K V_{x_j} \\ \frac{\Delta\omega_z}{\omega_p} &= \sum_{j=1}^m S_{x_j}^{\omega_z} V_{x_j} & \frac{\Delta Q_z}{Q_z} &= \sum_{j=1}^m S_{x_j}^{Q_z} V_{x_j}\end{aligned}\quad (3.62)$$

### Ejemplo 3.8

Encontrar la función de transferencia  $V_0/V_{IN}$  del circuito activo RC que se muestra en la figura 3.29, y encontrar las expresiones para la sensibilidad de  $\omega_p$  y  $Q_p$  para los elementos  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y la ganancia del amplificador  $A$ .

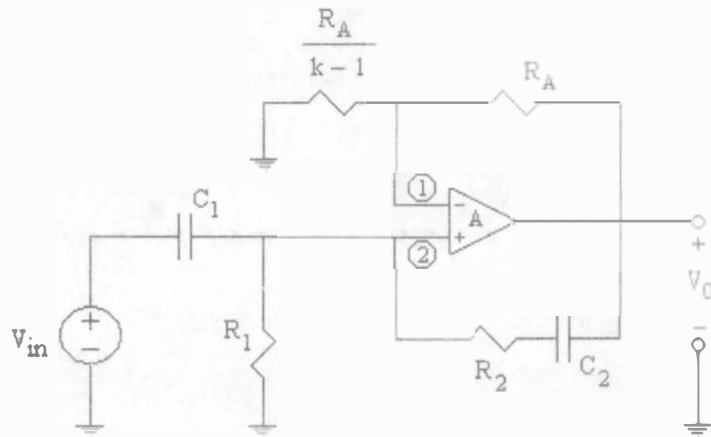


Figura 3.29 Circuito RC activo.

Las ecuaciones nodales para el circuitos son

$$\text{nodo 1: } V^- \left( \frac{k-1}{R_A} + \frac{1}{R_A} \right) - V_o \left( \frac{1}{R_A} \right) = 0$$

$$\text{nodo 2: } V^+ \left( sC_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \right) - V_o \left( \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \right) = V_{in} sC_1$$

Los voltajes de las terminales positiva y negativa del amplificador operacional están relacionados por

$$V_o = (V^+ - V^-)A$$

Al resolver las ecuaciones, la función de transferencia es

$$\frac{V_o}{V_{IN}} = \frac{s(s + 1/R_2 C_2)k(1 + k/A)^{-1}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\left(1 - \frac{k}{1 + k/A}\right)\right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

y los parámetros bicuadráticos son

$$\omega_p = R_1^{-1/2} R_2^{-1/2} C_1^{-1/2} C_2^{-1/2}$$

$$(bw)_p = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \left(1 - \frac{k}{1 + k/A}\right)$$

$$Q_p = \frac{\omega_p}{(bw)_p}$$

La sensibilidad de  $\omega_p$  a los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  y  $C_2$  es

$$S_{R_1}^{\omega_p} = S_{R_2}^{\omega_p} = S_{C_1}^{\omega_p} = S_{C_2}^{\omega_p} = -\frac{1}{2}$$

La sensibilidad de  $Q_p$  a los componentes es

$$S_{R_1}^{Q_p} = S_{R_2}^{\omega_p / (bw)_p} = S_{R_1}^{\omega_p} - S_{R_1}^{(bw)_p}$$

De las ecuaciones anteriores, utilizando la ecuación 3.55

$$S_x^{p_1+p_2} = \frac{p_1 S_x^{p_1} + S_x^{p_2}}{p_1 + p_2}$$

se obtiene

$$S_{R_1}^{Q_p} = -\frac{1}{2} \frac{\left( \frac{1}{R_1 C_1} (-1) + \left( \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \left( 1 - \frac{k}{1+k/A} \right) \right) \right) (0)}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \left( 1 - \frac{k}{1+k/A} \right)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{(bw)_p}$$

De manera similar,

$$S_{R_2}^{Q_p} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(bw)_p} \left[ \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \left( 1 - \frac{k}{1+k/A} \right) \right]$$

$$S_{C_2}^{Q_p} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{(bw)_p} \left[ \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \left( 1 - \frac{k}{1+k/A} \right) \right]$$

$$S_{C_2}^{Q_p} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{R_2 C_2} \cdot \frac{1}{(bw)_p}$$

Considerando las sensibilidades de la ganancia del amplificador,

$$S_A^{\omega_p} = 0$$

$$S_A^{Q_p} = -S_A^{(bw)_p} = \frac{-1}{(bw)_p} \left\{ \frac{1}{R_2 C_1} \left[ \frac{-k}{1+k/A} \right] S_A^{-k/R_2 C_1 (1+k/A)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(bw)_p} \cdot \frac{1}{R_2 C_1} \cdot \frac{k}{1+k/A} \cdot (-1) S_A^{(1+k/A)R_2 C_1/k} \\
 &= \frac{1}{(bw)_p} \cdot \frac{1}{R_2 C_1} \cdot \frac{k}{1+k/A} \cdot (-1) \cdot \frac{\frac{k}{A} \cdot \frac{R_2 C_1}{k} (-1)}{(1+k/A)R_2 C_1/k} \\
 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{R_2 C_1} \cdot \frac{k^2}{\left(1+\frac{k}{A}\right)^2} \cdot \frac{1}{(bw)_p}
 \end{aligned}$$

Observaciones:

1. La expresión para  $S_A^{Q_p}$  implica que este término puede reducirse aumentando la ganancia del amplificador. En particular, para un amplificador ideal este término se hace cero, es decir, el polo  $Q$  se vuelve insensible a la ganancia del amplificador operacional.
2. Hay que notar que  $k$  depende de los resistores  $R_A$  y  $R_B$  y no es constante.
3. Las sensibilidades de  $\omega_p$  y  $Q_p$  se relacionan con sus respectivas dimensiones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 S_{R_1}^{Q_p} + S_{R_2}^{Q_p} &= 0 & S_{C_1}^{Q_p} + S_{C_2}^{Q_p} &= 0 \\
 S_{R_1}^{\omega_p} + S_{R_2}^{\omega_p} &= -1 & S_{C_1}^{\omega_p} + S_{C_2}^{\omega_p} &= -1
 \end{aligned}$$

Entonces la frecuencia del polo  $\omega_p$ , la cual es de la forma  $1/RC$ , tiene las dimensiones

$$\dim(\omega_p) = [R]^{-1} [C]^{-1}$$



mientras que el polo  $Q$ , dado por  $\omega_w/(bw)_p$  es adimensional:

$$\dim(Q_p) = [R]^0 [C]^0$$

## 3.6 SÍNTESIS DE LA RED PASIVA

### 3.6.1 Síntesis por inspección

En esta sección se introduce el concepto de síntesis a partir de la consideración de funciones simples que puedan sintetizarse mediante inspección. Tales funciones pueden considerarse como la suma de las impedancias (o admitancias) de resistores, capacitores e inductores. En la figura 3.30 se muestran algunos ejemplos. Redes más complejas se realizan mediante la combinación de las simples. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

#### *Ejemplo 3.9*

Sintetizar

$$Z(s) = \frac{s^2 + 1}{2s}$$

La impedancia puede escribirse como

$$Z(s) = \frac{s}{2} + \frac{1}{2s}$$

la cual puede representarse como un capacitor en serie con un inductor, como se muestra en la figura 3.31.

**Ejemplo 3.10**

Sintetizar

$$Z(s) = \frac{s + 1}{s + 4}$$

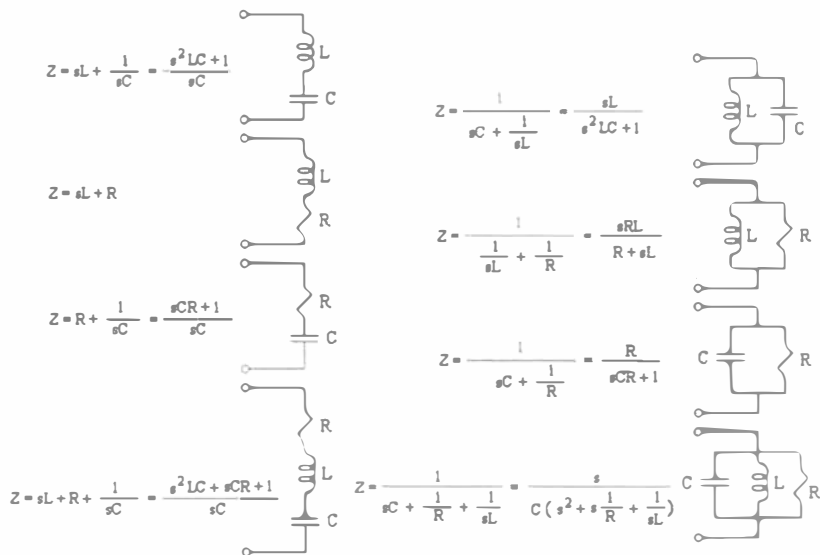
$Z(s)$  puede escribirse como

$$Z(s) = \frac{s}{s + 4} + \frac{1}{s + 4}$$

lo cual puede representarse como se muestra en la figura 3.32a. Alternativamente, la función de admitancia correspondiente puede expandirse como

$$Y(s) = \frac{s + 4}{s + 1} = 1 + \frac{3}{s + 1} = 1 + \frac{1}{\frac{s}{3} + \frac{1}{3}}$$

que se representa en la figura 3.33b. Obsérvese que este diseño es mejor que el de la figura anterior, ya que requiere un elemento menos.



**Figura 3.30** Funciones simples que se pueden sintetizar por inspección.

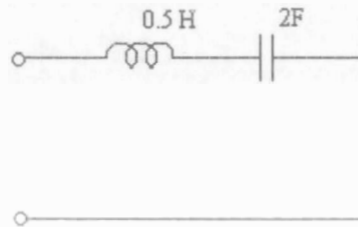


Figura 3.31 Circuito del ejemplo 3.10.

### Ejemplo 3.11

Sintetizar

$$Z(s) = \frac{s+1}{s+4}$$

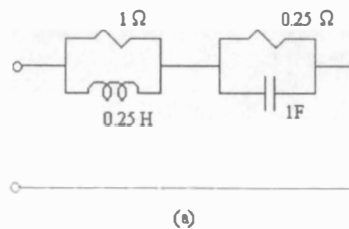
$Z(s)$  puede escribirse como

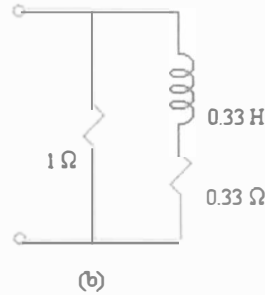
$$Z(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4}$$

lo cual puede representarse como se muestra en la figura 3.32a. Alternativamente, la función de admitancia correspondiente puede expandirse como

$$Y(s) = \frac{s+4}{s+1} = 1 + \frac{3}{s+1} = 1 + \frac{1}{\frac{s}{3} + \frac{1}{3}}$$

que se representa en la figura 3.32b. Obsérvese que este diseño es mejor que el de la figura anterior, ya que requiere un elemento menos.





**Figura 3.32** Circuito del ejemplo 3.11.

## 3.6.2 Síntesis del punto de excitación

### 3.6.2.1 Síntesis mediante expansión en fracciones parciales

La síntesis de funciones de punto de excitación RC y LC se basa en la expansión en fracciones parciales de la función dada. Partiendo de la expresión general para la expansión en fracciones parciales para una función de impedancia de punto de excitación LC,

$$Z_{LC}(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty s + \sum_i \frac{2K_i s}{s^2 + \omega_{p_i}^2} \quad (3.63)$$

La admitancia  $Y_{LC}(s)$  tiene una expansión similar. La expansión para una impedancia RC es

$$Z_{RC}(s) = \frac{K_0}{s} + K_\infty + \sum_i \frac{K_i}{s + p_i} \quad (3.64)$$

y la expansión para  $R_{RC}(s)$  es

$$Z_{RC}(s) = K_0 + K_\infty s + \sum_i \frac{K_i s}{s + p_i} \quad (3.65)$$

Una vez expresada la función del punto de excitación, cada uno de los términos de la expansión puede sintetizarse por inspección. Para funciones de impedancia los bloques se conectan en serie, mientras que para las de admitancia se conectan en paralelo para completar la síntesis.

### ***Ejemplo 3.12***

Sintetizar

$$Z(s) = \frac{s(s^2 + 2)}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}$$

La función del punto de excitación no tiene polo en el origen, sino un polo al infinito. Los términos  $K_0$  y  $K_\infty$  son cero, y la expansión en fracciones parciales es

$$Z(s) = \frac{K_1 s}{s^2 + 1} + \frac{K_2 s}{s^2 + 3}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  están dadas por

$$K_1 = \frac{s^2 + 1}{s} Z(s) \Big|_{s^2 = -1}$$

$$= \frac{s^2 + 2}{s^2 + 3} \Big|_{s^2 = -1} = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = \frac{s^2 + 3}{s} Z(s) \Big|_{s^2 = -3}$$

$$= \frac{s^2 + 2}{s^2 + 1} \Big|_{s^2 = -3} = \frac{1}{2}$$

entonces,

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3} \\ &= \frac{1}{2s + \frac{2}{s}} + \frac{1}{2s + \frac{6}{s}} \end{aligned}$$

el cual puede sintetizarse por inspección como se muestra en la figura 3.33.

Una forma alterna de sintetizar  $K_{(s)}$  puede ser realizar la expansión en fracciones parciales de su recíproco,  $Y_{(s)}$ :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s}{s^2 + 2} + K_3 s \end{aligned}$$

donde

$$K_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

$$K_2 = \frac{s^2 + 2}{s} Y(s)|_{s^2=-2} = \frac{1}{2}$$

$$K_3 = \frac{Y(s)}{s} \Big|_{s=\infty} = \frac{\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\left(1 + \frac{3}{s^2}\right)}{1\left(1 + \frac{2}{s^2}\right)} \Big|_{s=\infty} = 1$$

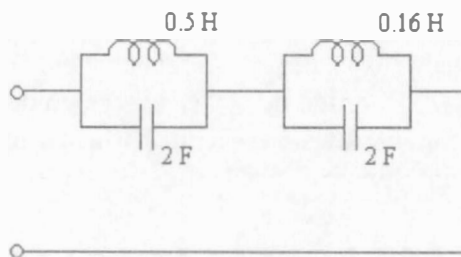


Figura 3.33 Circuito para el ejemplo 3.11.

### 3.6.2.2 Síntesis mediante expansión en fracciones continuas

El procedimiento consiste en eliminar alternadamente elementos de  $Z(s)$  en serie y en paralelo hasta llegar a la función del punto de excitación, como se explica a continuación.

Considere la síntesis de función  $LC$   $Z(s)$ , cuyo numerador es de mayor grado que el denominador; lo primero será dividir el denominador entre el numerador de la siguiente forma:

$$Z(s) = sL_1 + Z_1(s)$$

donde  $Z_1(s)$  es el término restante, cuyo orden es uno menor que el de  $Z(s)$ .

$Z(s)$  puede representarse como un inductor en serie con una función del punto de excitación  $Z_1(s)$ . La sustracción de  $sL_1$  de  $Z(s)$  hace que el grado del denominador de  $Z_1(s)$  sea uno mayor que el grado del numerador. Se puede repetir el procedimiento anterior a la admitancia de la función restante  $Y_1(s) = 1/Z_1(s)$ , expandiéndola como

$$Y_1(s) = sC_1 + Y_2(s)$$

El lado derecho de la expresión representa un capacitor  $C_1$  en paralelo con una admitancia  $Y_2(s)$  cuyo orden es dos grados menor que la función

original  $Z(s)$ . Luego,  $Y_2(s)$  se invierte para obtener una impedancia de  $Z_2(s)$ , la cual se expande para que el inductor  $L_2$  quede en serie con el término restante  $Z_3(s)$ . El orden de  $Z_3(s)$  es tres grados menor que  $Z(s)$ . El proceso de inversión y división se repite hasta que no haya nada que remover del término restante, punto al cual la síntesis está completa.

### ***Ejemplo 3.12***

Sintetizar la siguiente función del punto de excitación:

$$Z(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 1}$$

La función de impedancia puede escribirse como

$$Z(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^2 + 1} = s + \frac{s}{s^2 + 1} = s + Z_1(s)$$

La admitancia  $Y_1(s)$  es

$$Y_1(s) = \frac{s^2 + 1}{s} = s + \frac{1}{s}$$

lo cual se representa mediante un inductor de 1H en paralelo con una capacitor de 1F, como se muestra en la figura 3.34.

Observación:

a) La expansión en fracciones continuas de  $Z(s)$  puede expresarse como

$$Z(s) = s + \frac{1}{s + \frac{1}{s}}$$



De manera general, la expansión en fracciones continuas de una función de impedancia puede expresarse como

$$Z(s) = a_1 s + \frac{1}{a_2 s + \frac{1}{a_3 s + \frac{1}{a_4 s + \dots}}} \quad (3.66)$$

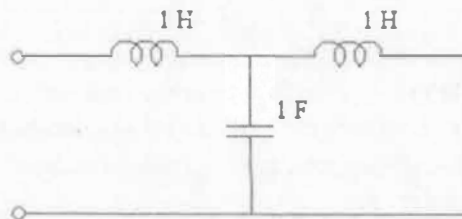


Figura 3.34 Circuito del ejemplo 3.12.

- b) El procedimiento descrito anteriormente puede utilizarse para redes  $RC$  y  $RL$ , donde se necesiten remover elementos en serie y en paralelo. La técnica de fracciones continuas puede aplicarse al numerador y denominador de dos maneras, organizando los polinomios en forma ascendente o descendente, lo cual da como resultado circuitos diferentes.

### 3.7 EJERCICIOS PROPUESTOS

#### Ejercicio 3.1

El diseño de un filtro pasa-altos se especifica como  $A_{\text{máx}} = 1$  dB,  $A_{\text{mín}} = 28$  dB,  $f_p = 3500$  Hz,  $f_s = 1000$  Hz. Aproxime estas especificaciones de diseño utilizando gráficas de Bode de funciones pasa-altos de primer y segundo orden. Calcule la atenuación a las frecuencias  $f_p$  y  $f_s$ .

### Ejercicio 3.2

Una función pasabajos Butterworth de cuarto orden tiene una atenuación de 2 dB a 100 rad/s. Calcule la atenuación a una frecuencia de 350 rad/s. Verifique su respuesta con la gráfica de la figura 3.17.

### Ejercicio 3.3

La atenuación en la banda de paso de un filtro pasabajos Butterworth de cuarto orden es de 1 dB a 500 Hz. Investigue a partir de qué frecuencia la atenuación es mayor a 40 dB. Verifique su respuesta con la gráfica de la figura 3.17.

### Ejercicio 3.4

Grafique la curva de atenuación de una función pasabajos del tipo Butterworth de séptimo orden con  $\epsilon = 0.1$  y  $\omega = 1$ .

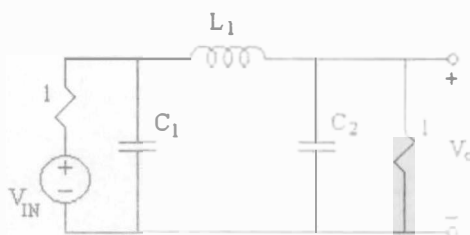
### Ejercicio 3.5

Aproximación de Butterworth. Un filtro pasabajos tiene los siguientes parámetros de diseño  $A_{\text{máx}} = 1$  dB,  $A_{\text{mín}} = 35$  dB,  $f_p = 1000$  Hz,  $f_s = 3500$  Hz.

- Determine la función Butterworth correspondiente
- Determine la atenuación a 9000 Hz
- Determine la Q de la función de ganancia

### Ejercicio 3.6

La red mostrada se puede utilizar para implementar una función pasabajos de tercer orden. Determine los valores  $L_1$ ,  $C_1$  y  $C_2$  para implementar un filtro Butterworth.



### Ejercicio 3.7

Determine la función Chebyshev para una función pasabajos con los siguientes requerimientos:

$$A_{\text{n}\acute{\text{a}}\text{x}} = 0.25 \text{ dB} \qquad A_{\text{m}\acute{\text{i}}\text{n}} = 40 \text{ dB}$$

$$\omega_{\text{p}} = 1200 \text{ rad/s} \qquad \omega_{\text{s}} = 4000 \text{ rad/s}$$

Calcule la atenuación lograda a la frecuencia que delimita la banda de rechazo. ¿En cuanto puede incrementarse el ancho de la banda de paso, sin alterar las demás características del filtro?

### Ejercicio 3.8

Una función pasabajos Chebyshev de quinto orden tiene una atenuación de 72 dB a 4000 Hz. Determine la frecuencia aproximada a la que un filtro del tipo Butterworth alcanzaría la misma atenuación, dado que ambas funciones satisfacen las mismas características de diseño.

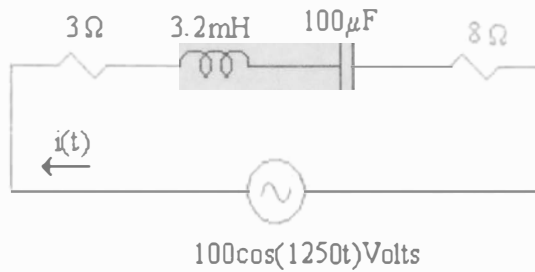


# Apéndice

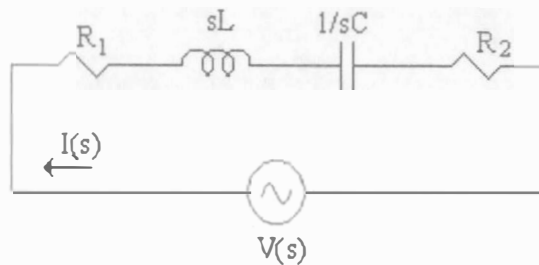
## ANÁLISIS SENOIDAL

### EJEMPLO A-1

En el circuito de la figura A-1, determinar la corriente de estado estable  $i(t)$ .



**Figura A-1** Circuito en el tiempo del ejemplo A-1.

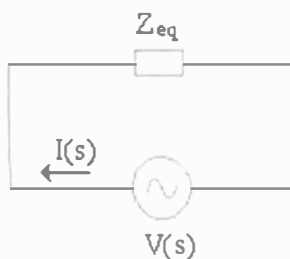


**Figura A-2** Circuito en la frecuencia del ejemplo A-1.

Encontremos primero la impedancia equivalente de los elementos en serie del circuito de la figura A-2.

$$Z_{eq} = R_1 + sL + \frac{1}{sC} + R_2$$

$$Z_{eq} = \frac{s^2 LC + sC(R_1 + R_2) + 1}{sC}$$



**Figura A-3** Circuito simplificado de la figura A-2.

Apliquemos la ley de Ohm para determinar la corriente de la malla del circuito de la figura A-3.

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_{eq}}$$

La función de transferencia de este circuito tiene la forma

$$H(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{sC}{s^2 LC + sC(R_1 + R_2) + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

Sustituimos el valor de la frecuencia  $\omega = 1250$  y de los componentes  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  y  $C$ .

$$H(1250j) = \frac{0.125j}{0.5 + 1.375j}$$

$$|H(1250j)| = \frac{\sqrt{0.125^2}}{\sqrt{0.5^2 + 0.125^2}} = 0.085$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0.125}{0} - \tan^{-1} \frac{1.375}{0.5} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$i(t) = 100(0.085) \cos(1250t + 20^\circ)$$

$$i(t) = 8.5 \cos(1250t + 20^\circ) \text{ Amp}$$

### EJEMPLO A-2

Determinar la respuesta de estado estable  $V_x(t)$  en el circuito de la figura A-4 usando análisis nodal.

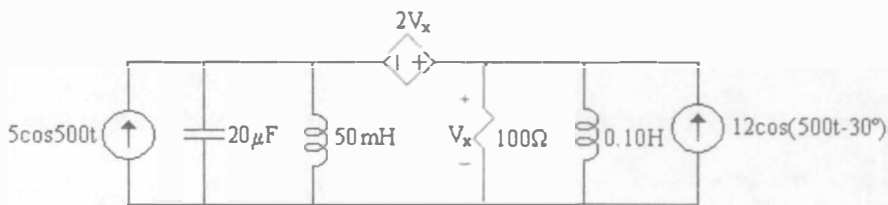
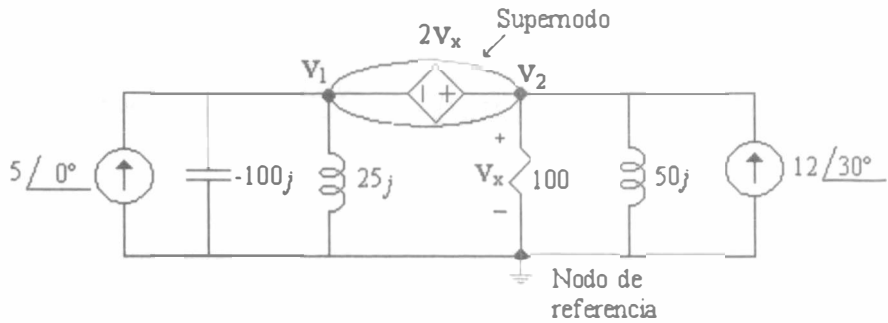


Figura A-4 Circuito en el tiempo del ejemplo A-2.

Transformamos el circuito de la figura A-4 al dominio de los fasores y asignamos un voltaje arbitrario a cada uno de los nodos del mismo. Con esto, nos podemos dar cuenta de que la fuente dependiente  $2V_x$  se encuentra conectada a dos nodos cuyos voltajes no son cero, por lo que el circuito tiene un supernodo.



**Figura A-5** Representación fasorial del circuito de la figura A-4.

Del supernodo podemos plantear que  $V_2 - V_1 = 2V_x$ ; además  $V_2 = V_x$ , por lo que  $V_1 = -V_x$ .

Ecuación para el supernodo:

$$5\angle 0^\circ + 12\angle -30^\circ = \frac{V_1}{-100j} + \frac{V_1}{25j} + \frac{V_2}{100} + \frac{V_2}{50j}$$

Factorizando  $V_1$  y  $V_2$ ,

$$5\angle 0^\circ + 12\angle -30^\circ = V_1 \left( \frac{1}{-100j} + \frac{1}{25j} \right) + V_2 \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{50j} \right)$$

Realizando operaciones y sustituyendo  $V_1 = -V_x$  y  $V_2 = V_x$  tenemos

$$5 + 10.39 - 6j = -V_x(0.01j - 0.04j) + V_x(0.01 - 0.02j)$$

$$15.39 - 6j = V_x(0.01 + 0.01j)$$

$$16.51\angle -21.29^\circ = V_x(0.014\angle 45^\circ)$$



Despejando  $V_x$ ,

$$V_x = \frac{16.51 \angle -21.29^\circ}{0.014 \angle 45^\circ}$$

$$V_x = 1179 \angle -66.29^\circ$$

Pasando al dominio del tiempo tenemos

$$V_x(t) = 1178 \cos(500t - 66.3^\circ) \text{ Volts}$$

### EJEMPLO A-3

En la figura A-6, determinar  $V_x(t)$  reemplazando el circuito a la izquierda de las terminales a-b por su equivalente de Thévenin cuando  $C = 10\mu\text{F}$ .

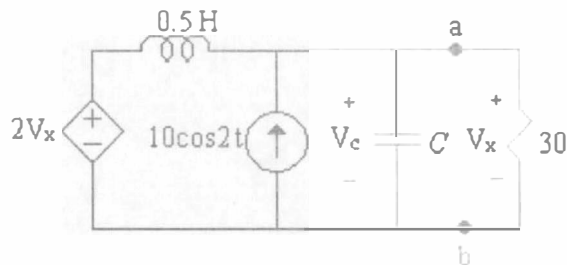


Figura A-6 Circuito en el tiempo del ejemplo A-3.

En el circuito de la figura A-7 se muestra la transformación fasorial del circuito anterior.

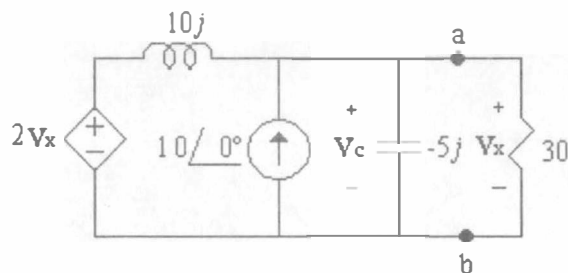
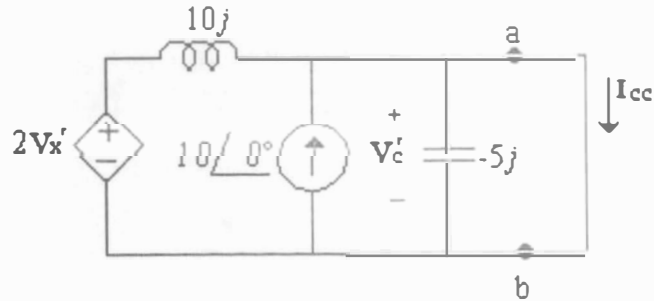


Figura A-7 Circuito en la frecuencia de la figura A.6.

Calculamos primero la corriente de cortocircuito (Fig. A-8):

$$i_{cc} = 10 \angle 0^\circ$$



**Figura A-8** Se muestra la corriente de cortocircuito  $I_{cc}$  utilizada para encontrar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura A-6.

El voltaje de circuito abierto (voltaje Thévenin)  $V_{ca} = V_{th}$  se muestra en el circuito de la figura A-9. Aplicamos análisis nodal para calcularlo.

$$\frac{V'_x - 2V'_x}{10j} + \frac{V'_x}{-5j} = 10 \angle 0^\circ$$

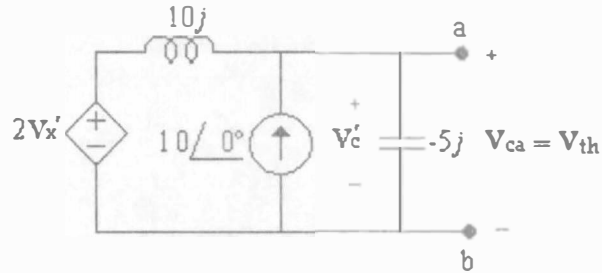
$$\frac{15jV'_x}{50} = 10 \angle 0^\circ$$

Despejando  $V'_x$ ,

$$V'_x = \frac{500 \angle 0^\circ}{15j}$$

$$V'_x = \frac{500 \angle 0^\circ}{15 \angle 90^\circ}$$

$$V'_x = V_{th} = 33.33 \angle -90^\circ$$



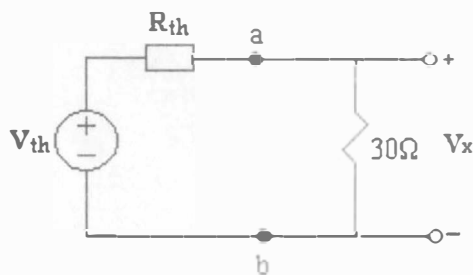
**Figura A-9** Se muestra el voltaje de circuito abierto  $V'_{ca}$ , necesario para encontrar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura A-6.

Con el voltaje de circuito abierto  $V'_x$  y la corriente de cortocircuito  $I_{cc}$ , podemos calcular la resistencia de Thévenin  $R_{th}$ .

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{i_{cc}} = \frac{33.33 \angle -90^\circ}{10 \angle 0^\circ}$$

$$R_{th} = 3.3 \angle -90^\circ = -3.3j$$

A partir de los resultados obtenidos podemos plantear el circuito equivalente de Thévenin como se muestra en la figura A-10.



**Figura A-10** Circuito equivalente de Thévenin del circuito de la figura A-6.

Aplicando un divisor de voltaje en el circuito de la figura A-10,

$$V_x = \frac{30V_{th}}{R_{th} + 30}$$

$$V_x = \frac{30(33.33\angle -90^\circ)}{30 - 3.3j}$$

$$V_x = \frac{1000\angle -90^\circ}{30.1\angle -6.27^\circ}$$

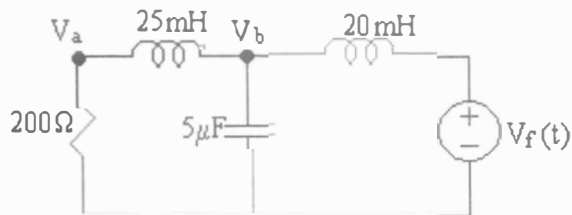
$$V_x = 33.13\angle -83.66^\circ$$

Finalmente, en el dominio del tiempo tenemos

$$V_x(t) = 33.13\cos(20t - 83.66^\circ)\text{Volts}$$

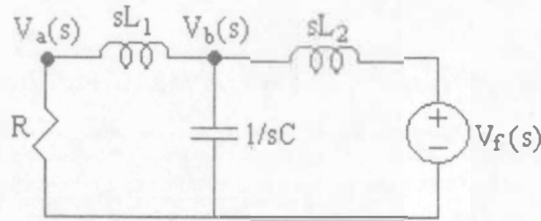
#### EJEMPLO A-4

Determinar los dos voltajes de nodo  $V_a(t)$  y  $V_b(t)$  en el circuito de la figura A-11 cuando  $V_f(t) = 1.2\cos 4000t$ .



*Figura A-11* Circuito en el tiempo del ejemplo A-4.

En la figura A-12 se muestra la transformación al dominio de Laplace del circuito en el tiempo de la figura A-11.



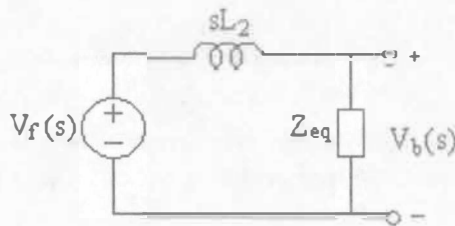
**Figura A-12** Transformada de Laplace del circuito de la figura A-4.

Para simplificar el circuito de la figura A-11 obtenemos la impedancia equivalente de la resistencia  $R$  en serie con la impedancia inductiva  $sL_1$  y ésta a su vez en paralelo con la impedancia capacitiva  $\frac{1}{sC}$ .

$$Z_{eq} = (R + sL_1) // \frac{1}{sC}$$

$$Z_{eq} = \frac{R + sL_1}{s^2 L_1 C + sRC + 1}$$

En la figura A-13 se muestra el circuito simplificado de la figura A-12:



**Figura A-13** Circuito simplificado de la figura A-12.

Utilizamos un divisor de voltaje para encontrar  $V_b(s)$ :

$$V_b(s) = \frac{V_f(s)Z_{eq}}{sL_2 + Z_{eq}}$$

$$H(s) = \frac{V_b(s)}{V_f(s)} = \frac{sL_1 + R}{s^3 L_1 L_2 C + s^2 RCL_2 + s(L_1 + L_2) + R}$$

$$H(j\omega) = \frac{R + j\omega L_1}{R - \omega^2 RL_2 C + j[\omega(L_1 + L_2) - \omega^3 L_1 L_2 C]}$$

Sustituyendo el valor de los componentes y  $\omega = 4000$  tenemos

$$H(4000j) = \frac{20 + 10j}{-12 + 2j}$$

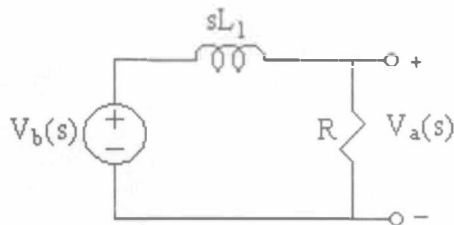
$$|H(4000j)| = \frac{\sqrt{20^2 + 10^2}}{\sqrt{12^2 + 2^2}} = 1.83$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{10}{20} - \tan^{-1} \frac{2}{-12} = -143.96^\circ \cong -144^\circ$$

$$V_b(t) = 1.22(1.83) \cos(4000t - 144^\circ)$$

$$V_b(t) = 2.23 \cos(4000t - 144^\circ) \text{Volts}$$

Con este resultado proponemos un nuevo circuito, el cual se muestra en la figura A-14, para determinar el voltaje en el nodo  $V_a(s)$ .



**Figura A-14** Nuevo circuito para calcular el voltaje del nodo  $V_a(s)$ .

De nuevo empleamos un divisor de voltaje para encontrar la función de transferencia

$$V_a(s) = \frac{V_b(s)R}{R + sL_1}$$

$$H(s) = \frac{V_a(s)}{V_b(s)} = \frac{R}{R + sL_1}$$

Sustituyendo  $s = j\omega$ ,

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L_1}$$

Tomando los valores de los componentes y  $\omega = 4000$ ,

$$H(4000j) = \frac{2}{2 + j}$$

$$|H(4000j)| = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1}} = 0.89$$

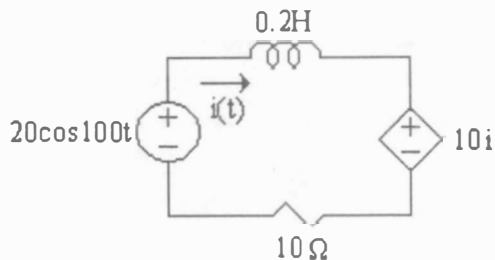
$$\phi = \tan^{-1} \frac{0}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{2} = -26.56^\circ$$

$$V_a(t) = 2.23(0.89) \cos(4000t - 144^\circ - 26.56^\circ)$$

$$V_a(t) = 1.98 \cos(4000t - 170.46^\circ) \text{Volts}$$

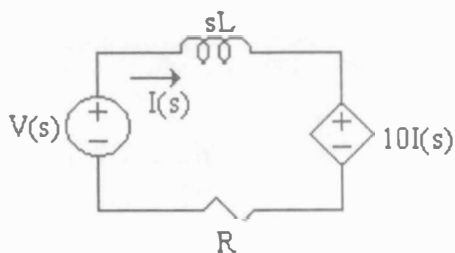
### EJEMPLO A-5

El circuito de la figura A-15 contiene una fuente de voltaje que opera a  $\omega = 100$  rad/s. Determinar la corriente  $i(t)$ .



**Figura A-15** Circuito en el tiempo del ejercicio A-5.

Utilizando la transformada de Laplace, representamos el circuito de la figura A-16 en el dominio de la frecuencia para obtener la función de transferencia.



**Figura A-16** Circuito en la frecuencia del ejemplo A-15.

Aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla del circuito de la figura A-16:

$$V(s) - sLI(s) - 10I(s) - RI(s) = 0$$

Factorizando  $I(s)$ ,

$$V(s) - I(s)[sL + 10 + R] = 0$$

$$I(s)[sL + 10 + R] = V(s)$$



La función de transferencia  $H(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$  finalmente queda como

$$H(s) = \frac{1}{sL + R + 10}$$

Ahora sustituimos  $s = j\omega$  en la función de transferencia

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega L + R + 10}$$

Considerando que  $\omega = 100$  y los valores de los componentes, tenemos

$$H(100j) = \frac{1}{20 + 20j}$$

$$|H(100j)| = \frac{1}{\sqrt{20^2 + 20^2}} = 0.035$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0}{1} - \tan^{-1} \frac{20}{20} = -45^\circ$$

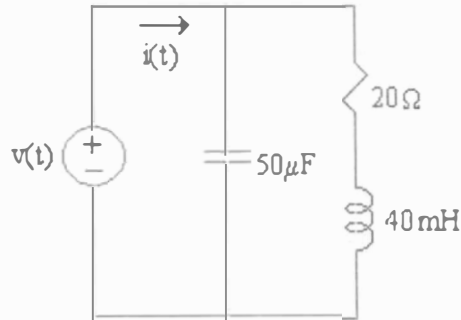
Finalmente formamos la respuesta en el tiempo como

$$i(t) = 20(0.035) \cos(100t - 45^\circ)$$

$$i(t) = 0.7 \cos(100t - 45^\circ) \text{ Amp}$$

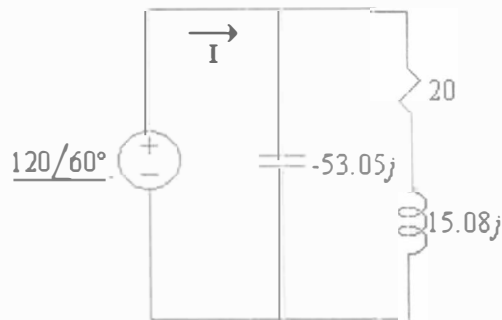
## EJEMPLO A-6

Utilizando el concepto de fasor, encontrar la corriente  $i(t)$  en el circuito de la figura A-17 considerando que  $v(t) = \text{sen}(377t + 60^\circ) \text{ Volts}$ .



**Figura A-17** Circuito del ejemplo A-6. Determinar el valor de  $i(t)$ .

Pasemos primero el circuito de la figura A-17 al dominio de los fasores tomando  $\omega = 377$ .



**Figura A-18** Transformación del circuito de la figura A-17 al dominio de la frecuencia utilizando el concepto de impedancia fasorial.

Reducimos el circuito encontrando la impedancia equivalente de entrada (Fig. A-19):

$$Z_{eq} = (-53.05) // (20 + 15.08j)$$

$$Z_{eq} = \underline{30 / 60^\circ}$$

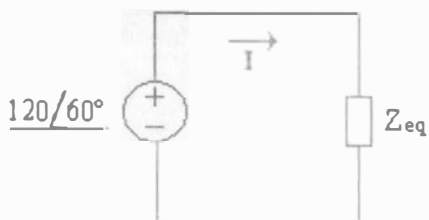


Figura A-19 Circuito de la figura A-18 reducido.

Ahora simplemente aplicamos la Ley de Ohm para encontrar  $I$ .

$$I = \frac{120/60^\circ}{Z_{eq}} = 4/60^\circ$$

El problema es encontrar la corriente  $i(t)$ ; por lo tanto, tenemos que regresar al dominio del tiempo de la siguiente forma:

$$i(t) = 4 \text{ sen}(377t + 60^\circ)$$

**EJEMPLO A-7**

Determinar la corriente  $i(t)$  de la malla del circuito de la figura A-20, mediante fasores. En este caso,  $v(t) = 750 \text{ cos}(5000t + 30^\circ) \text{ Volts}$ .

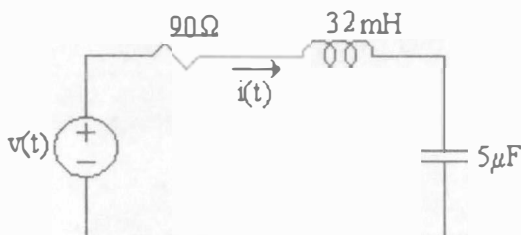
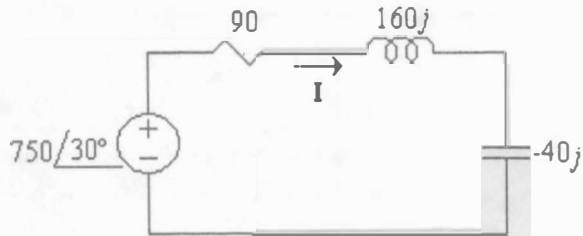


Figura A-20 Circuito del ejemplo A-7.

En la figura A-21 se transforma el circuito del ejemplo A-7 al dominio de los fasores.



**Figura A-21** Transformación del circuito de la figura A-20 al dominio de los fasores.

Por lo tanto, la corriente  $I$  de este circuito es el voltaje de la malla entre la suma de las impedancias de la malla:

$$I = \frac{750/30^\circ}{90 - 160j - 40j} = \frac{750/30^\circ}{90 + 120j}$$

$$I = \frac{750/30^\circ}{150/53.06^\circ} = \underline{5/-23.06^\circ}$$

En el dominio del tiempo,

$$i(t) = 5 \cos(5000t - 23.06^\circ)$$

### Ejercicio A-1

Utilizando un diagrama fasorial, encuentre el valor de  $I_f$  de la figura A-22 considerando  $\mathbf{I}_1 = 1\angle 0^\circ$ .

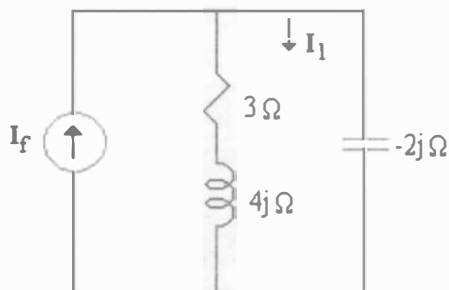


Figura A-22 Circuito para el ejercicio propuesto A-1.

Respuesta:

$$V_R = 3\angle 0^\circ, V_L = 4\angle 90^\circ, V_C = 5\angle 53.13^\circ, I_2 = 2.5\angle 143.13^\circ, I_f = 1.8\angle -56.41^\circ$$

## POTENCIA

### EJERCICIO A-2

Determine la potencia promedio, reactiva y compleja de cada uno de los elementos del circuito de la figura A-23 y verifique el principio de conservación de la potencia.

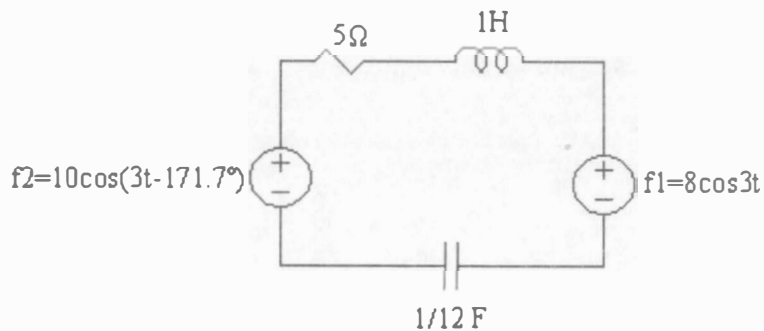


Figura A-23 Circuito del ejercicio propuesto A-2.

Respuesta:

Elemento	P. promedio	P. reactiva	P. compleja
$R$	30.9	0	$30.9+0j$
$L$	0	18.59	$0+18.59j$
$C$	0	-24.79	$0-24.79j$
$f_1$	17.44	-2.33	$17.44-2.33j$
$f_2$	13.54	-3.86	$13.54-3.86j$

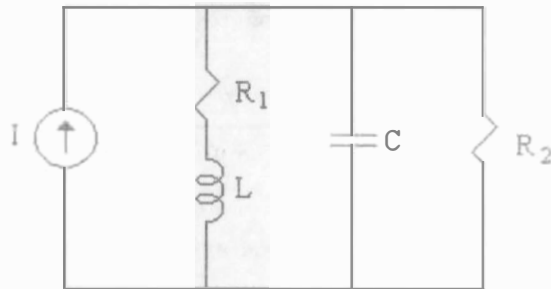
$$\sum P_{compleja}(fuentes) = \sum P_{compleja}(elementos)$$

$$30.99 - 6.19j = 30.99 - 6.19j$$

## Respuesta en frecuencia

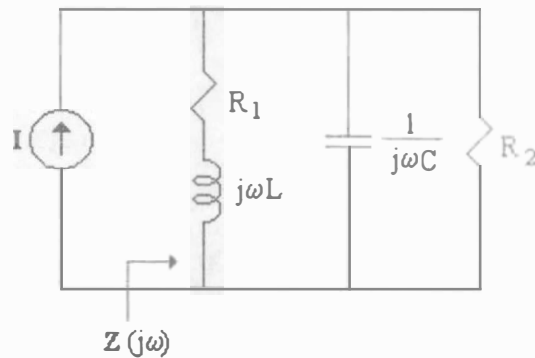
### EJERCICIO A-8

Para el circuito de la figura A-17, a) determine la frecuencia de resonancia y b) qué valor debe tener  $R_1$  para que el circuito tenga una frecuencia de resonancia equivalente a la de un circuito RLC en paralelo simple.



**Figura A-24** Circuito del ejercicio A-8.

- a) Para determinar la frecuencia de resonancia del circuito, debemos calcular la frecuencia a la cual la impedancia de entrada es real; es decir, su parte imaginaria es igual a cero. Para esto pasemos el circuito al dominio de la frecuencia con el concepto de fasor (Fig. A-24).



**Figura A-25** Circuito de la figura A-24 en el dominio de los fasores.

Recordando la admitancia  $Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}$ ,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R_2},$$

y manipulando la expresión anterior,

$$Y(j\omega) = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{1}{R_2} - j \left( \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \omega C \right)$$

Ahora tomemos la parte imaginaria e igualemos a cero:

$$\omega C - \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

$$R_1^2 C + \omega^2 CL^2 - L = 0$$

Despejando  $\omega$  tenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{L - R_1^2 C}{CL^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_1^2}{L^2}}$$

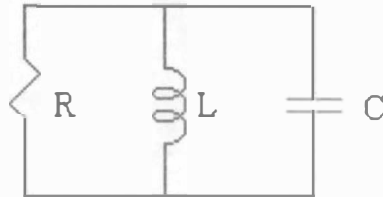
- b) Para que esta frecuencia sea igual a la de un circuito RLC en paralelo simple, el cociente  $\frac{R_1}{L}$  tiene que ser igual a cero. La respuesta trivial es que  $R_1 = 0$ , pero de manera práctica se debe buscar que  $L \gg R_1$ .

### EJEMPLO A-9

Están disponibles los siguientes componentes para formar un circuito resonante en paralelo:  $L_1 = 7.5\text{mH}$ ,  $L_2 = 15\text{mH}$ ,  $C_1 = 6\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3\mu\text{F}$  y  $R = 2\text{k}\Omega$ . Diseñar un circuito que tenga la mayor frecuencia de resonancia posible. Especificar además (a) el ancho de banda y (b) el factor de calidad.



La configuración básica de un circuito RLC en paralelo se ve en la figura A-26.



**Figura A-26** Circuito RLC básico.

Recordando la ecuación de la frecuencia de resonancia  $\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , para que este número sea lo más grande posible,  $\sqrt{LC}$  debe ser lo más pequeño posible. Esto lo logramos con la siguiente configuración de los inductores y capacitores:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = 200 \therefore L_{eq} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = 0.5 \cdot 10^6 \therefore C_{eq} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Tomando en cuenta estos valores, tenemos que la frecuencia de resonancia es

$$\omega_{res} = 10k \text{ rad/s}$$

Aplicando las ecuaciones vistas para el ancho de banda y el factor de calidad, obtenemos

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC} = 250 \text{ rad/s}$$

$$Q = \frac{\omega_{res}}{\Delta\omega} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = 40$$



# Bibliografía

- Budak, Aram. 1978. *Circuit Theory Fundamentals and Applications*. USA, Prentice Hall.
- Budak, Aram. 1974. *Passive and Active Network Analysis and Synthesis*. USA, Houghton Mifflin.
- Canales, Roberto y Renato Barrera. 1977. *Análisis de Sistemas dinámicos y control automático*. México, Limusa.
- Daryanani, Gobind. 1976. *Principles of Active Network Synthesis and Design*. New York, John Wiley.
- Dorf, R. y James Svoboda. 1996. *Introduction to Electric Circuits*. USA, Wiley.
- Haykin, S. y B. Van Veen. 1999. *Signals and Systems*. USA, Wiley.
- Hostetter, Gene H. 1984. *Engineering Network Analysis*. New York, Harper & Row.
- 1982. *Sistemas de control*. México, Nueva Editorial Interamericana.
- 1980. *Fundamentals of Network Analysis*. New York, Harper & Row.
- Huelsman, L.P. 1984. *Teoría de circuitos*. México, Prentice Hall.
- 1972. *Basic Circuit Theory with Digital Computations*. New Jersey, Prentice Hall.

- y P. E. Allen. 1980. *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*. USA, McGraw-Hill.
- Irwin, J. David. 1996. *Análisis básico de circuitos en ingeniería*. México, Prentice Hall.
- Jiménez, G. 1985. *Problemas de teoría de los circuitos*. México, Limusa.
- Johnson, David y John Hilburn. 1990. *Análisis básico de circuitos eléctricos*. México, Prentice Hall.
- Kuo, Franklin F. 1962. *Network Analysis and Synthesis*. USA, John Wiley.
- Scott, Donald. 1987. *Introducción al análisis de circuitos*. España, Mc. Graw Hill.
- Siebert, William. 1997. *Circuits, Signals, and Systems*. Cambridge, Massachusetts, Londres. The MIT Press / McGraw-Hill.
- Van Valkenburgh, M.E. 1989. *Análisis de redes*. México, Limusa.

*Circuitos eléctricos III*  
se terminó de imprimir en noviembre de 2001  
en la Sección de Impresiones y Diseño de la UAM-I  
La edición consta de 1,000 ejemplares.  
Formación: Alejandro Romero Barrios











Ma. del Pilar Granados es profesora titular integrante del laboratorio de Audiología en el Área de Ingeniería Biomédica de la UAM-Iztapalapa, y es egresada de la misma institución con licenciatura (1984) y maestría (1994) en Ingeniería Biomédica, con estudios de doctorado en Ciencias. Es profesora de las materias de Circuitos Eléctricos I,II y III, además de autora de distintos trabajos de investigación en el campo de la Audiología, entre los que destacan: "Evaluación de ayudas auditivas en un rango lineal mediante ruido blanco" y "Estudios de respuestas de frecuencia específica con potenciales evocados auditivos de latencia larga".

---

---

El presente material aborda el estudio de los sistemas lineales sometidos a una excitación senoidal a través del análisis fasorial, así como la potencia y respuesta en frecuencia de una red eléctrica, finalizando con la aplicación de estos conceptos al diseño y análisis de filtros.

El número y secuencia de los temas tratados se apega, en lo fundamental, al contenido de la materia de Circuitos Eléctricos III. En el desarrollo de cada tema, la teoría se apoya en los numerosos ejemplos resueltos y propuestos que permiten al lector interesado comprobar por sí mismo el avance alcanzado. Además, se ofrece una numerosa bibliografía a la cual puede recurrir el lector en busca de un estudio más profundo.

---



ISBN: 970-654-949-8



9 789706 549495