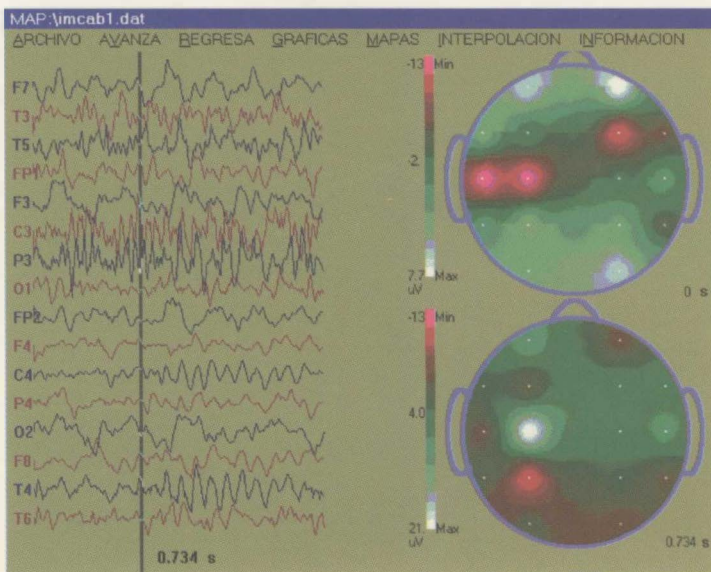
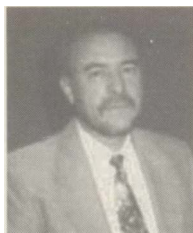


Fundamentos de la instrumentación biomédica

- Caupolicán Muñoz Gamboa
- Miguel Cadena Méndez
- Enrique Hernández Matos
- Emilio Sacristán Rock





Caupolicán Muñoz Gamboa realizó sus estudios de licenciatura en Ingeniería en la Universidad Católica de Valparaíso (Chile), en la especialidad de Comunicaciones y Electrónica, y obtuvo el grado de maestro en ciencias en el área de

Electrónica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) de Puebla, Pue. Es miembro de la Academia Nacional de Ingeniería desde 1979 y de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Biomédica desde 1986. Sus áreas de trabajo son la instrumentación electrónica y el procesamiento digital de señales fisiológicas y de potenciales evocados. Así mismo, ha formado parte del Sistema Nacional de Investigadores como investigador nacional nivel I en dos ocasiones.

Actualmente es profesor titular del área de Ingeniería Biomédica del Departamento de Ingeniería Biomédica del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la UAM-Iztapalapa y ha sido profesor de tiempo completo y de asignatura de la Universidad de Chile, de la Universidad Técnica del Estado en Santiago de Chile y de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).



Miguel Cadena Méndez es ingeniero en Comunicaciones y Electrónica por el Instituto Politécnico Nacional (1968). En 1980 obtuvo el grado de maestro en Ciencias en Ingeniería Biomédica en la Universi-

dad de Washington en St. Louis Missouri, EUA. Es miembro fundador de la licenciatura y la maestría en Ingeniería Biomédica de la Universidad Autónoma Metropolitana, y actualmente funge como profesor titular del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la misma universidad. Su campo de interés es la instrumentación biomédica aplicada a la Audiología y a la medición del metabolismo basal.

Fundamentos de la instrumentación biomédica



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Dr. José Luis Gázquez Mateos

Rector General

Dr. Antonio Aguilar Aguilar

Secretario General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dr. Luis Mier y Terán Casanueva

Rector

Dr. Eduardo Carrillo Hoyo

Secretario

Dra. María José Arroyo Paniagua

Directora de Ciencias Básicas e Ingeniería

M. en C. Miguel Ángel Peña Castillo

Jefe del Departamento de Ingeniería Eléctrica

Fundamentos de la instrumentación biomédica

Caupolicán Muñoz Gamboa
Miguel Cadena Méndez
Enrique Hernández Matos
Emilio Sacristán Rock



Imagen de la portada cortesía de
M. en C. Ofelia Andrea Valdés Rodríguez



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Primera impresión: 2001

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
San Rafael Atlixco No. 186
Iztapalapa, 09340, México, D.F.

ISBN: 970-654-907-2

Impreso y hecho en México / *Printed in Mexico*

Prefacio

Fundamentos de la instrumentación biomédica es un libro de texto dirigido a estudiantes, ingenieros y diseñadores de instrumentos de medición para aplicaciones en los campos de la biología y la medicina.

Como libro de texto puede utilizarse en un curso introductorio de instrumentación y metrología a nivel de licenciatura. En particular, está concebido para apoyar la unidad de enseñanza-aprendizaje “Instrumentación Médica I” de la Licenciatura en Ingeniería Biomédica que se imparte actualmente en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana.

El contenido presenta un panorama del proceso de desarrollo, los conceptos teóricos básicos y consideraciones generales para el diseño y evaluación de instrumentos biomédicos.

El propósito de los autores al escribir el libro fue el de presentar en un solo texto conceptos fundamentales que generalmente se encuentran dispersos o tratados superficialmente por otros textos del mismo campo. Se hizo especial énfasis en la sistematización del diseño y en un enfoque de análisis sobre la naturaleza aleatoria de las variables de medición.

Los primeros capítulos definen un modelo de instrumento y de las características estáticas y dinámicas del mismo. Así mismo, se abordan los criterios de análisis de la propagación del error en los distintos módulos que forman un instrumento, destacando las perspectivas del usuario y del diseñador en cuanto al desempeño por medio de “cifras de mérito”, siempre con el deseo de establecer un marco de comunicación y valoración de lo que pueden considerarse “normas de buena ingeniería”. Se trata la naturaleza de los mesurandos aleatorios con el propósito de que el lector unifíque su criterio sobre la complejidad real de los instrumentos utilizados hoy día. Finalmente, se analizan los principales aspectos de las mediciones analógicas y digitales.

Índice

CAPÍTULO 1	PROCESO DE DESARROLLO DE INSTRUMENTOS BIOMÉDICOS	15
1.1	Introducción	15
1.2	La instrumentación biomédica	16
1.3	Proceso de desarrollo	18
1.3.1	Definición del problema	18
1.4	Etapas de desarrollo	21
1.4.1	Criterios de diseño	21
1.4.2	Diseño y construcción del prototipo	24
1.4.3	Evaluación del prototipo	24
1.4.3.1	Evaluación de laboratorio	24
1.4.3.2	Evaluación clínica Alfa	25
1.4.3.3	Evaluación de costos	26
1.4.4	El prototipo final	28
1.5	Etapas de comercialización	28
1.5.1	Propiedad intelectual	28
1.5.1.1	Patentes	29
1.5.1.2	Derechos de autor	30
1.5.1.3	Secretos industriales	31
1.5.1.4	Marcas registradas	31
1.5.2	Certificación	32
1.5.3	Diseño final del producto	33
1.5.4	Evaluación y validación del producto	34
1.5.4.1	Control de calidad	34
1.5.4.2	Evaluación clínica Beta	36
1.5.5	Mercadotecnia y comercialización	37
CAPÍTULO 2	MODELO DE UN SISTEMA DE MEDICIÓN	39
2.1	Introducción	39

2.1.1	Origen de la medición	40
2.1.2	Sistema Internacional de Unidades (SI)	42
2.1.3	Justificación y necesidad de la medición	43
2.1.4	La medición en la ciencia y la ingeniería	44
2.1.5	Introducción al error como efecto inherente a la medición	46
2.1.6	Mediciones directas, indirectas e inferidas	48
2.1.7	Variables por medir	49
2.2	Instrumentos y sistemas de medición	51
2.2.1	Medición	51
2.2.2	Elementos básicos de una medición	51
2.2.3	Mesurando	54
2.2.4	Instrumentos de medición	56
2.2.5	Sistemas de medición	57
2.3	Modelo funcional de un instrumento	57
2.3.1	La medición como transformación	58
2.4	Modelos generalizados de un instrumento	59
2.4.1	Modelo generalizado	59
2.4.2	Fidelidad de la medición	62
2.4.3	Cifras de mérito	62
2.5	Modelos estructurales de un instrumento	64
2.5.1	Modelo básico	64
2.5.2	Modelos detallados	67
2.5.3	Modelo general	72
2.6	Modelos de otros instrumentos y sistemas de medición	73
2.7	Conclusión	79

CAPÍTULO 3	CARACTERÍSTICAS ESTÁTICAS DE LOS INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN	81
3.1	Introducción	81
3.2	Definición de los errores	82
3.3	Calibración de instrumentos de medición	100
3.3.1	Proceso de calibración	101
3.4	Sensibilidad	111
3.5	Linealidad y precisión	114
3.6	Histéresis	123
 CAPÍTULO 4	 CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS PARA MESURANDOS DETERMINISTAS	 125
4.1	El proceso de medición como sistema .	125
4.2	Distorsión	126
4.2.1	Distorsión por amplitud	127
4.2.2	Distorsión por fase	130
4.3	Modelo general de un sistema de medición	132
4.4	Funciones de transferencia	133
4.5	Instrumento de orden cero	135
4.6	Instrumento de primer orden	138
4.6.1	Respuesta a escalón de sistemas de primer orden. Constante de tiempo	139
4.6.2	Respuesta en frecuencia de un instrumento de primer orden	147
4.7	Instrumento de segundo orden	150
4.7.1	Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden	152
4.7.2	Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden	156
4.8	Modelos de instrumentos de orden superior	159

4.8.1	El polo dominante	160
4.8.2	Ajuste de los ceros	164
 CAPÍTULO 5 CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS PARA MESURANDOS ALEATORIOS 167		
5.1	Introducción	137
5.2	Cualidades de un instrumento de medición que garantizan mediciones confiables de mesurandos aleatorios ...	170
5.3	Características medibles de los mesurandos aleatorios.....	176
5.4	Determinación de la función de transferencia de sistemas de medición por medio de “ruido blanco”	189
 CAPÍTULO 6 PROPAGACIÓN DEL ERROR 197		
6.1	Introducción	197
6.2	Sistemas de medición con relación salida-entrada de tipo algebraico	197
6.3	Propagación del error determinista	200
6.4	Propagación del error aleatorio	228
 CAPÍTULO 7 EL INSTRUMENTO ELECTRÓNICO DIGITAL 239		
7.1	Introducción	239
7.2.	Modelo estructural de un instrumento digital	242
7.2.1	Diagrama de bloques	243
7.2.2	Descripción de los bloques	243
7.3	Acondicionamiento de la señal analógica	248

7.3.1	Procesamiento analógico y(o) digital	249
7.3.2	Técnicas analógicas de procesamiento	250
7.4	Adquisición de datos y señales	271
7.4.1	Las señales y los datos	272
7.4.2	Digitalización	273
7.4.3	Frecuencia de muestreo o de Nyquist ..	275
7.4.4	Teorema del muestreo	277
7.4.5	Cuantización	278
7.4.6	Conversión D/A	281
7.4.6.1	Métodos de conversión D/A	282
7.4.7	Conversión A/D	286
7.4.7.1	Métodos de conversión A/D	287
7.4.8	Multicanalización	295
7.5	El error de origen digital	297
7.5.1	Resolución del convertidor	298
7.5.2	Tiempos de operación	299
7.5.3	Errores de conversión	300

BIBLIOGRAFÍA.....	305
--------------------------	------------

APÉNDICE A DIAGRAMAS DE BODE	309
---	------------

A.1	Notación empleada	309
A.2	Factores básicos de $H(j\omega)$	311
A.3	La ganancia K	311
A.4	Factores integrales y diferenciales $(j\omega)^{\pm 1}$	312
A.5	Factores de primer orden $(1 + j\omega T)$	314
A.6	Factores de segundo orden	317
A.7	Procedimiento general para graficar los diagramas de Bode	321

APÉNDICE B PROBABILIDAD Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS 323

B.1 Concepto de variable aleatoria 323

B.2 Función distribución de probabilidad ($F_x(x)$) 325

B.3 Funciones de densidad 327

B.4 Funciones de distribución y densidad discretas 331

B.5 Ejemplo de funciones de densidad 333

B.6 Variable aleatoria de tipo gaussiano 335

B.7 Operaciones sobre una variable aleatoria 338

B.8 Momentos de una variable aleatoria 340

B.9 Momentos centrales alrededor de un valor promedio..... 341

B.10 Operaciones con dos variables aleatorias 341

B.11 Procesos estocásticos 343

Capítulo 1

Proceso de desarrollo de instrumentos biomédicos

1.1 Introducción

El proceso de desarrollo de un instrumento, desde su concepción hasta su comercialización, es muy complejo y requiere generalmente de un esfuerzo multidisciplinario. Esto es particularmente cierto en la instrumentación médica, debido a la confluencia de disciplinas tan diferentes como la ingeniería y la medicina, a las dificultades de trabajar con organismos biológicos, a los altos niveles de confiabilidad y desempeño requeridos, a la complejidad de las normas y estándares aplicables, y a las peculiaridades del mercado de equipo médico, el cual puede ser muy difícil de penetrar con instrumentos innovadores.

Este libro está dirigido al futuro ingeniero que participará en el diseño, construcción y evaluación de instrumentación para aplicaciones biomédicas. Sin embargo, la parte técnica es sólo una porción del proceso de desarrollo. Este capítulo se centra en el proceso completo y analiza las distintas etapas necesarias para el desarrollo de instrumentación médica, antes de adentrarse en aspectos más técnicos. Es necesario que el ingeniero no trabaje aislado del resto del proceso, para maximizar las probabilidades de éxito. El diseño de un instrumento debe tomar en cuenta todos los requerimientos del usuario final, al igual que del fabricante, el distribuidor y los organismos de certificación, y

es por ello que en este capítulo se incluye una introducción general al proceso de desarrollo.

1.2 La instrumentación biomédica

Por instrumentación biomédica se entiende el conjunto de aparatos de medición o mapeo de cualquier variable o variables de interés en el campo de la biología o de las ciencias de la salud. Estas variables pueden ser dimensionales, químicas, fisiológicas, mecánicas, eléctricas, etc. La salida del instrumento, es decir la medición, puede ser numérica, en unidades de una escala estándar; gráfica, en función de otras variables o del tiempo; o como una señal de control para algún sistema realimentado. Esta información se comunica al usuario en forma visual o auditiva a través de dispositivos para la visualización, fotografías, impresos, alarmas, etc., o bien se almacena o se transmite. En la tabla 1.1 se incluyen algunos ejemplos comunes de instrumentación.

Otros tipos de equipo médico, como los usados para terapia o prótesis, no se consideran instrumentos. Sin embargo, los ejemplos mencionados frecuentemente incluyen un instrumento como parte del sistema, como es el caso de bombas de infusión con un sensor de flujo volumétrico para medir la dosis, ventiladores con sensores de volumen o presión, incubadoras con termómetros integrados, etc. Es evidente que bajo el nombre de instrumentación biomédica cabe un gran variedad de aparatos con tamaños, formas de uso y niveles de complejidad muy diferentes. Aún así, existen conceptos generales para el diseño y evaluación comunes a esta clase de aparatos; dichos conceptos se estudian en el presente libro. En particular, es necesario observar que aun cuando los instrumentos biomédicos usan una gran variedad de tecnologías y métodos de medición, con frecuencia estos aparatos se basan en sistemas digitales para el procesamiento de la información. El poder, la flexibilidad y sobre todo el precio cada vez más bajo de los micropro-

cesadores y los microcontroladores ha incrementado su incorporación a todo tipo de instrumentos. Este libro trata los conceptos relevantes tanto de la instrumentación analógica como de la digital, además de los conceptos generales de la instrumentación biomédica.

Tabla 1.1 EJEMPLOS DE INSTRUMENTOS BIOMÉDICOS COMUNES

Instrumento	Tipo de medición
Rayos X	Mapa bidimensional de densidad
Tomografía axial	Mapa bi- y tridimensional de densidad
Ultrasonido	Mapa bidimensional de superficies tisulares
Resonancia magnética	Mapa bi- y tridimensional de concentración atómica
Termómetro	Temperatura
Electrofisiógrafos:	Biopotenciales:
ECG	cardiacos
EEG	cerebrales
EMG	musculares
EOG	oculares
Báscula	Peso
Analizadores químicos:	Concentración de:
Oxímetro	Oxígeno en % vol.
Gasómetro	pH, PCO_2 , PO_2
Glucómetro	Glucosa
Dosímetro	Dosis de radiación
Tonómetro	Presión relativa
Flujómetro	Flujo
Manómetro	Presión arterial
Capnógrafo	Frecuencia respiratoria

1.3 Proceso de desarrollo

El proceso de desarrollo de cada instrumento es único y depende de factores como los requisitos individuales del instrumento, los recursos disponibles, los requisitos comerciales, etc. Sin embargo, los proyectos de desarrollo exitosos tienden a apegarse a un modelo general, con muy pocas excepciones. Este modelo es el que se presenta a continuación. Es importante observar que este modelo es aplicable a cualquier equipo médico y no es exclusivo de los instrumentos médicos, aun cuando éste sea el enfoque que se le da en el presente libro. La figura 1.1 es un esquema de bloques de este modelo.

1.3.1 Definición del problema

Los instrumentos biomédicos se desarrollan para satisfacer una necesidad o, en otras palabras, para resolver un problema. Este problema debe ser definido por el usuario o usuarios del instrumento, trátase de un problema clínico, de investigación o industrial. El primer paso en cualquier proyecto de desarrollo debe ser el tener muy claras las necesidades del usuario y de la aplicación. Esto se conoce como diseño guiado por el usuario (o por el consumidor), el cual contrasta con el diseño guiado por la ingeniería, donde los avances tecnológicos son los que orientan el desarrollo de nuevos instrumentos, en muchas ocasiones sin que exista siquiera una necesidad por parte del usuario. Este último enfoque, que es muy común en otros campos (como el célebre “cubo de Rubik”, que no respondía a necesidad alguna y fue un rotundo éxito comercial), pocas veces tiene éxito en el área de la instrumentación biomédica. Esencialmente, en el caso de equipo médico es mejor primero entender el problema y luego buscar una solución técnica, que lo opuesto,

empezar con avances tecnológicos y luego buscar aplicaciones en las que este puede ser útil.

Ejemplo: Una muestra del fracaso en el desarrollo de un instrumento guiado por la ingeniería es el estetoscopio electrónico. Los avances en la electrónica permiten la realización de estetoscopios basados en un micrófono, un amplificador y audífonos, con mayor fidelidad y mejor respuesta en frecuencia, y que incluso podrían emular la respuesta de un estetoscopio acústico. Además, tendría la comodidad del control de volumen y, lo más importante, podría venderse a un precio mucho más bajo que los mejores estetoscopios acústicos. Para el ingeniero el avance es obvio. Sin embargo, no se tomó en cuenta al usuario, es decir, el médico, para el cual el estetoscopio es el instrumento con el que aprendió su arte y, aún más importante, es un símbolo, un icono de su profesión, por lo que el médico se resiste a cambiarlo. (Los ingenieros pensamos que finalmente se abrirá un mercado para estetoscopios digitales; sin embargo, eso no depende sólo de la ingeniería y del avance tecnológico. Parece una tarea tan difícil que al momento de la elaboración de este libro los autores no conocen a alguien que esté haciendo un serio esfuerzo en ese sentido).

El estudio de las necesidades del usuario puede incluir cualquiera de los siguientes elementos: entrevistas con profesionales clínicos o de laboratorio, estudios de mercado, análisis de la literatura médica y análisis de los requisitos de uso. Es importante resumir la información obtenida en una definición clara y concisa del problema, en el lenguaje del usuario y no en términos técnicos, para mantener el contacto con el usuario potencial y enfocar claramente los objetivos del proyecto. A continuación se presenta como ejemplo el caso histórico del desarrollo de un monitor metabólico de gases para el cálculo de la ingesta en pacientes de terapia intensiva. Este ejemplo se utiliza para ilustrar en partes, a lo largo del capítulo, todo el proceso de desarrollo y comercialización.

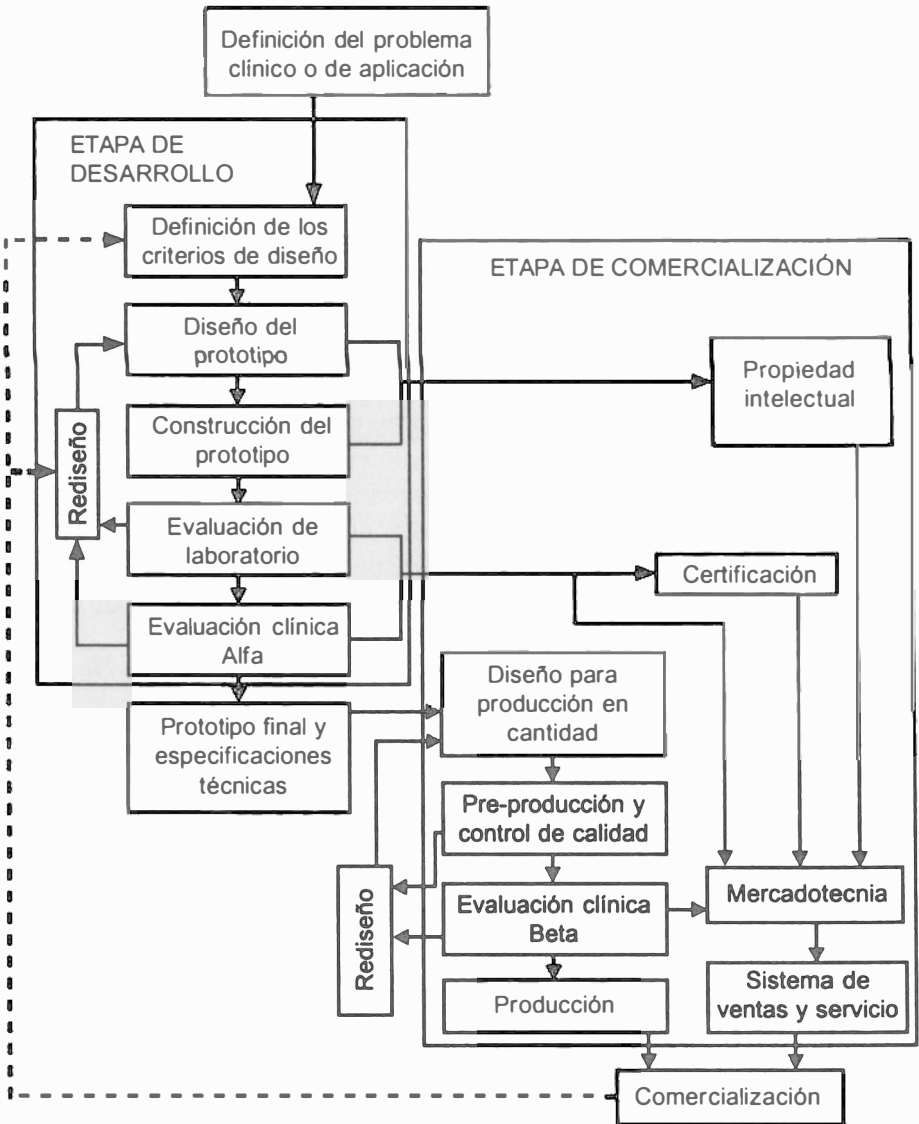


Figura 1.1 Modelo general del proceso de desarrollo de un instrumento biomédico.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos MGM II de Medcore

Definición del problema clínico:

Los pacientes en terapia intensiva son alimentados por vía parenteral. Es necesario estimar con precisión la ingesta que requiere cada paciente; la sobrealimentación es una carga adicional para el cuerpo, mientras que la subalimentación roba al paciente las calorías que necesita para mantener su metabolismo y luchar contra la enfermedad. Desde las décadas de los años cincuenta y sesenta, los intensivistas utilizan la ecuación de Harris-Benedick para estimar la ingesta de un paciente a partir de una serie de variables físicas y fisiológicas. Sin embargo, se observó que esta ecuación es particularmente sensible a un factor de estrés fisiológico que se estima según la enfermedad y la condición del paciente. Para finales de los años setenta se empezó a tratar de mejorar la estimación del metabolismo real de un paciente con el uso de calorímetros que calculan la energía utilizada por el metabolismo basal a partir de la medición del O_2 total utilizado y el CO_2 total generado por el cuerpo. Para 1980 existían dos calorímetros que habían penetrado hasta cierto punto en el mercado: el calorímetro Jaeger (US\$60,000) y el calorímetro marca Beckman (US\$35,000) más reciente. Existían aún algunos problemas por resolver: estos calorímetros eran muy grandes y costosos como para mantener en las salas de terapia intensiva. Adicionalmente, sólo medían el consumo de O_2 y la producción de CO_2 , y no había una manera estándar y sencilla de calcular la dieta requerida.

1.4 Etapa de desarrollo

1.4.1 Criterios de diseño

Una vez bien definida la aplicación o el problema por resolver, éste se debe traducir a objetivos o criterios de diseño. Aquí es necesario incluir

sólo aquellos criterios cuyo incumplimiento impide alcanzar el objetivo central del proyecto; en otras palabras, esto quiere decir que el instrumento no solucionará el problema. Para asegurar cierta flexibilidad en el proceso de diseño, esta lista de criterios incluirá todos los requisitos que el instrumento debe cumplir, pero sin especificar cómo se logran estos objetivos. Es decir, esta tarea no es más que una definición clara y concisa de las necesidades del usuario potencial del instrumento por desarrollar. Estos criterios guían el diseño del instrumento y pueden incluir especificaciones sobre factores muy variados, como los que se mencionan en la siguiente lista (modificada y ampliada del capítulo I de *Medical Instrumentation: Application and Design*, de J.G.Webs-ter) [20]:

Factores de medición

- Escala
- Certeza
- Sensibilidad
- Respuesta de tiempo o de frecuencia

Factores económicos

- Costo del instrumento
- Consumibles
- Compatibilidad con otros equipos
- Disponibilidad de componentes

Factores clínicos

- Medición invasiva o no invasiva
- Seguridad eléctrica
- Control de toxicidad o trombosis
- Comodidad del paciente

Factores de aplicación y uso

- Eliminación de interferencias

- Estabilidad
- Modo de calibración
- Requisitos de potencia
- Tamaño, portabilidad
- Ergonomía

Los criterios de diseño permiten estudiar la factibilidad técnica del instrumento. En ese estudio se evalúan las distintas tecnologías disponibles y sus capacidades con respecto a los objetivos estipulados. Una vez que se establece esta factibilidad, entonces comienza el proceso de diseño en sí.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos MGM II de Medcore

Definición de los criterios de diseño:

En 1980, Medcore emprendió el desarrollo de un nuevo monitor metabólico con los siguientes criterios:

- Tamaño: el nuevo instrumento debía ser más pequeño y portátil, con un peso máximo del orden de 15 kilogramos.
- Precio: el nuevo instrumento debía tener un precio del orden de US\$ 20,000 para poder competir efectivamente contra los instrumentos ya en uso.
- Mediciones: el instrumento debía tener la capacidad de medir continuamente la fracción de $O_2\%$ (0-80%), $CO_2\%$ (0-10%), y el flujo respiratorio de 3 a 40 L/min, con una imprecisión del 2%.
- Funciones: adicionalmente a las funciones normales de los calorímetros existentes, el instrumento incluiría un sistema experto automático capaz de calcular la dieta requerida, a partir de las ecuaciones de Bruestein que se acababan de desarrollar. Esto último se transmitiría al usuario a través del despliegue en forma de la cantidad (en gramos o kilocalorías) de carbohidratos, grasas y proteínas.

1.4.2 Diseño y construcción del prototipo

El proceso de diseño consiste en elaborar una lista cada vez más completa y detallada de las especificaciones técnicas del instrumento. Estas especificaciones se usarán y modificarán a lo largo del proceso de desarrollo: en la construcción, la evaluación y el rediseño. Las especificaciones finales del instrumento generalmente son el producto de concesiones entre distintas características deseadas, como las de desempeño y de costo. El producto de este proceso es el prototipo, el cual continúa desarrollándose en forma iterativa, de manera alterna al proceso de evaluación, hasta llegar a un prototipo final con las características deseadas.

1.4.3 Evaluación del prototipo

El prototipo debe someterse a pruebas de funcionalidad y desempeño, así como a un análisis de costo-beneficio de las distintas características deseadas. En particular, el protocolo de evaluación debe probar que se cumplieron los criterios de diseño. Adicionalmente, se hacen pruebas para caracterizar el desempeño y cuantificar algunas de las especificaciones del sistema. Entre ellas se incluyen pruebas de laboratorio, *in vitro* e *in vivo*, al igual que evaluaciones clínicas por parte de los usuarios finales y en las condiciones de uso reales.

1.4.3.1 EVALUACIÓN DE LABORATORIO

La evaluación del prototipo en el laboratorio, realizada por los mismos ingenieros de diseño es la parte inicial del proceso de evaluación. Nor-

malmente, en esta etapa primero se prueban los subsistemas y componentes individuales, y posteriormente se prueba el prototipo en estados progresivos de integración. El prototipo completo se evalúa como una caja negra, caracterizando la relación entre entradas y salidas. En algunos casos, la evaluación funcional en la banca de trabajo no es suficiente para probar las características críticas del instrumento y es necesario incluir pruebas *in vivo*, directamente en animales o en voluntarios humanos, pero en condiciones de laboratorio controladas y bajo la supervisión directa del equipo de diseño. A esta etapa le siguen las de diseño y de rediseño, hasta obtener un prototipo que cumpla con los requisitos críticos y cuente con especificaciones satisfactorias para continuar el proceso de desarrollo.

1.4.3.2 EVALUACIÓN CLÍNICA ALFA

El prototipo que completa satisfactoriamente la evaluación de laboratorio generalmente pasa a una evaluación clínica. Para aquellos instrumentos que pueden influir directamente en el estado de salud de un paciente, este tipo de estudios es esencial. Se trata de una evaluación realizada por los usuarios potenciales y en las condiciones reales de uso. La primera evaluación es crítica y por lo tanto se hace en forma restringida, con personal de confianza y manteniendo una estrecha interacción con el equipo de diseño. A esta primera evaluación del usuario se le denomina evaluación Alfa.

En este tipo de evaluación, normalmente se evalúa la función del instrumento comparada con las técnicas o mediciones alternativas de uso estándar en los mismos casos, en un estudio controlado y con diseño aleatorio. Estos estudios permiten además una observación minuciosa del uso del sistema. Fallas en el diseño que pueden causar errores, dificultades o frustración en el usuario, y deben ser descubiertas en esta etapa crítica. En caso de que el instrumento no se desempeñe como se

esperaba, mantener el estudio restringido puede evitar que se genere una reacción adversa por parte de los usuarios potenciales y permite reconsiderar el diseño y realizar las modificaciones pertinentes.

En el caso de la instrumentación revolucionaria, se intenta demostrar que su uso es una mejora importante sobre las alternativas existentes. Este tipo de estudio intenta rechazar la hipótesis nula de que el uso del instrumento no genera una diferencia estadísticamente significativa respecto a las técnicas de uso común. Los instrumentos revolucionarios que demandan cambios en las prácticas médicas suelen necesitar estudios muy sólidos y convincentes para lograr la aceptación generalizada de la comunidad médica.

Aquí la tarea consiste en demostrar que la función de los instrumentos revolucionarios es esencialmente equivalente a la de los instrumentos de generaciones anteriores. La idea es garantizar que los nuevos instrumentos, con un mejor precio o con funciones o características novedosas, pueden reemplazar sin problema a los instrumentos antiguos ya ampliamente utilizados. Este tipo de estudio es mucho más difícil desde el punto de vista estadístico pues implica probar la hipótesis nula. Para resolver este problema dos matemáticos estadísticos británicos, Bland y Altman, propusieron un método de evaluación que se ha convertido en el estándar universal (Bland y Altman. 1986. "Statistical methods for assessing agreement between two methods of clinical measurement". *The Lancet* [5]). Sin embargo, este método no siempre es aplicable, y se han publicado desde entonces varias críticas y variaciones.

1.4.3.3 EVALUACIÓN DE COSTOS

Las especificaciones técnicas de un instrumento de medición se tratan con detalle en capítulos siguientes de este libro. Una consideración que suele ser de suma importancia en la etapa de desarrollo de un instru-

mento es el costo. Por lo general, el análisis de costo-beneficio es una tarea continua a lo largo del proceso de diseño.

El precio final de un instrumento comercial depende de variables como el volumen, los costos de manufactura, los costos de servicio, la competencia en el mercado, etc. El precio debe incluir no sólo los costos de manufactura, venta y servicio de cada unidad, sino también los de inversión de desarrollo, mercadotecnia, patentes, operación de la compañía, etc. El precio al público también tiene mucho que ver con una estrategia financiera y de mercado. Aún así, desde la etapa de diseño es necesario poner en práctica una estrategia de costos. Como regla general, en la gran mayoría de los instrumentos médicos el costo total de los componentes representa entre 1/4 y 1/5 del precio de venta; es muy difícil lograr márgenes adecuados de utilidades con este tipo de productos.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos MGM II de Medcore

Desarrollo del prototipo:

En este caso el desafío técnico fue obtener la tecnología de medición para cumplir con los criterios de diseño, en particular el tamaño y el costo. Los avances técnicos respecto a los calorímetros existentes fueron el uso de un nuevo sensor de ZnO_2 para la medición de $\text{O}_2\%$, y un nuevo sistema de secado de la muestra que reducía notablemente el tamaño y el costo. Este último se basó en una nueva membrana desarrollada y patentada por Dupont llamada Nafion. Para el $\text{CO}_2\%$ se utilizó un sensor de IR. Las evaluaciones también revelaron un problema de polarización del sensor de O_2 , y se tuvo que desarrollar un sistema automático de diagnóstico que confirmara el funcionamiento adecuado de los sensores. El sistema se evaluó en pruebas clínicas alfa en el Children's Hospital de Salt Lake City, Utah, la ciudad sede de Medcore, bajo la supervisión del equipo de diseño. En el diseño final, el costo total de los componentes en el diseño final fue de US\$5,000.

1.4.4 El Prototipo final

Una vez terminadas todas las pruebas y evaluaciones necesarias, con resultados satisfactorios, concluye la llamada etapa de desarrollo. En este punto se tiene un prototipo final y se han completado todas las especificaciones técnicas. En el caso de sistemas que se desarrollan para uso limitado, como la investigación, y que se fabrican en cantidades modestas; éste es el final del proceso de desarrollo. Sin embargo, la mayoría de las veces para garantizar que un instrumento innovador y de buen desempeño tenga un uso más generalizado y se aproveche mejor el esfuerzo de desarrollo, debe esperarse a la etapa de comercialización.

1.5 Etapa de comercialización

La etapa de comercialización no necesariamente tiene que empezar al concluir la primera etapa de desarrollo. En realidad, una parte de esta etapa se puede hacer en paralelo con la primera. Es importante observar también que generalmente esta etapa no es la responsabilidad principal del equipo de diseño que llevó a cabo el desarrollo del prototipo. En esta segunda fase el equipo de diseño debe interactuar con ingenieros de producción, diseñadores industriales, abogados o expertos en normatividad, así como con especialistas en mercadotecnia, ventas y servicio. Muchas veces estos últimos trabajan para una compañía diferente bajo un arreglo contractual con el equipo de diseño.

1.5.1 Propiedad intelectual

El desarrollo comercial de un instrumento médico requiere de una inversión inicial muy fuerte. Esto se debe a la complejidad de muchas de

las evaluaciones necesarias en el proceso de desarrollo, y a los estrictos estándares de desempeño para equipo médico. Por esta razón, en la mayoría de los desarrollos de nuevos instrumentos médicos es muy importante proteger de una u otra manera la propiedad intelectual de cada uno de estos desarrollados, para así proteger la inversión.

La propiedad intelectual se protege bajo cuatro distintas categorías:

1.5.1.1 PATENTES

Ésta es la modalidad más común e importante de protección a la propiedad intelectual de instrumentos médicos innovadores. En este libro se habla de patentes en general y no particularmente de un país; las leyes varían de país a país, y para mayor información se recomienda la asesoría de abogados expertos. La patente es la descripción detallada de un invento, que el estado hace pública después de un análisis cuidadoso, y con la cual se otorga una garantía de derechos comerciales por un tiempo limitado (generalmente por 17 años, aunque depende del país). Las patentes protegen dispositivos que muestran el avance existente en determinada área de la tecnología.

En la mayoría de los casos de instrumentos médicos se debe considerar la comercialización en el mercado internacional. Esto se debe al alto nivel de globalización que ya vivimos y al hecho de que el mercado nacional en países como México no siempre representa un volumen suficiente para poder competir con instrumentos importados. Existen varios acuerdos binacionales o multinacionales, como el TLC, que incluyen protección mutua de las patentes. Sin embargo, para proteger adecuadamente un instrumento de los competidores internacionales se debe considerar la obtención de una patente en diversos países. Esto se puede hacer a través del Tratado de Patentes Internacional (Patent Cooperation Treaty), donde se pueden solicitar patentes “globales” a partir de una sola solicitud, y cada uno de los países que recibe esta solicitud (de los países signatarios) otorga una patente con el mismo

número. Es recomendable que todo el proceso de patentes esté a cargo de un abogado especialista. Como advertencia, se hace notar que en cada país la patente tiene costos de registro y cuotas de mantenimiento. Una buena patente con cobertura en todos los países clave puede fácilmente costar más de \$30,000 dólares el primer año, más las cuotas anuales.

Es importante recordar que la patente se otorga a cambio de hacer público un invento. Si se publican los detalles de un invento, por ejemplo en una revista científica, antes de solicitar la patente, se pueden perder los derechos. Para solicitar las patentes, normalmente se otorga un año de gracia después de la publicación. De la misma manera, se suele otorgar un año de gracia para solicitar las patentes en otros países, a partir de la obtención de la primera patente.

En general, la patente se otorga al primer inventor que la solicita; sin embargo, en algunos países, notablemente en Estados Unidos, ésta se otorga al primero que inventa el instrumento. Por esta razón, es importante documentar el desarrollo de la invención (principalmente a través de bitácoras), registrando la fecha de reducción a la práctica de un invento para poder probar, en caso de un conflicto, quién inventó primero dicho instrumento.

La patente puede llegar a tener una importancia estratégica para la comercialización de un producto. El inventor debe considerar cuidadosamente los costos y el momento de hacer público su invento. Esto requiere en general de una buena idea del potencial comercial del invento, de los posibles competidores y de la estrategia de financiamiento del proyecto.

1.5.1.2 DERECHOS DE AUTOR

Las patentes sólo cubren dispositivos innovadores; los algoritmos, códigos de programas, gráficas de despliegue, manuales técnicos y de uso, etc., pueden ser igualmente innovadores, representando una posible ventaja competitiva y siendo por lo mismo dignos de protección.

Estos últimos pueden protegerse legalmente bajo las leyes de derechos de autor. En este caso, el material es registrado y protegido legalmente contra la reproducción del material en cuestión. En este caso no se tiene que probar la originalidad del material, y es bastante más sencillo obtener la protección legal.

En cuanto a la instrumentación médica, esta modalidad puede ser muy importante para proteger los algoritmos de procesamiento, compensación o despliegue utilizados. Algunos instrumentos incluyen sistemas expertos o modelos matemáticos, los cuales pueden representar una inversión muy importante, y sin protección podrían ser aprovechados por cualquier competidor.

1.5.1.3 SECRETOS INDUSTRIALES

Otra forma de proteger el mercado de un nuevo producto es mantener en secreto información clave del funcionamiento, la cual no se tiene que divulgar en el proceso de certificación o de mercadotecnia, pues no es esencial para su uso. Esto puede incluir aspectos como protocolos propios de comunicación, conexiones, códigos o métodos de manufactura. La ley protege la secrecía y permite que la información de este tipo permanezca como confidencial. Sin embargo, si esta información cae en otras manos no hay recurso legal para impedir su uso. Un ejemplo célebre de esta práctica es la fórmula de la Coca Cola: se conocen los ingredientes, pero la receta exacta es un secreto celosamente custodiado.

1.5.1.4 MARCAS REGISTRADAS

Por último, en instrumentos médicos puede ser importante el uso de terminología especial que se vuelve de uso común, y que está directamente ligada con un instrumento en particular. Esta terminología puede registrarse para prohibir su uso no autorizado. La restricción para este tipo de términos es que no existan previamente ni que se parezcan de-

masiado a palabras de uso común o a marcas previamente registradas. Un buen ejemplo de esta práctica es el catéter Swan-Ganz[®], el cual está íntimamente ligado a las calculadoras de gasto cardiaco de Baxter.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos MGM II de Medcore

Propiedad intelectual:

El nuevo sistema de secado, desarrollado para el MGM II, el cual estaba basado en un sistema tipo Peltier pero utilizando el nuevo material de Dupont, Nafion, se patenta en 1983 y los derechos se asignan a Medcore. Adicionalmente, se protegen bajo las leyes de derechos de autor el algoritmo de cálculo de la ingesta, usando los coeficientes de Brustein, al igual que los manuales de uso que detallan su funcionamiento.

1.5.2 Certificación

Prácticamente todo equipo médico comercial debe cumplir con ciertas normas de seguridad, funcionalidad o calidad. En algunos casos la certificación del cumplimiento de tales normas es un requisito legal; en otros es simplemente una poderosa ventaja comercial. Existe una gran cantidad de normas y de organismos responsables, públicos y privados, que son aplicables a la instrumentación biomédica. Las certificaciones más importantes son las de seguridad y funcionamiento, por ejemplo las normas de la Secretaría de Salud y los permisos de comercialización de la Administración para los alimentos y los medicamentos de Estados Unidos (FDA, por sus siglas en inglés), o de la Comunidad Europea. Estas últimas pueden tramitarse cuando ya se cuenta con el diseño del instrumento y los resultados de las evaluaciones de la etapa de desarrollo. En [7] se puede encontrar un análisis detallado de estos procesos. Otro tipo de certificación que puede ser muy importante es una certificación de calidad, como ISO-9000 o GMP (*Good Manufacturing Practices* Buenas Prácticas de Fabricación). La certificación de calidad normal-

mente no depende del instrumento en sí, sino de los métodos de manufactura y control de calidad, y por lo tanto no es al instrumento al que se certifica, sino al fabricante.

En general, el proceso completo de certificación puede ser muy largo y costoso. En el caso de la instrumentación verdaderamente revolucionaria, el proceso puede tardar varios años. Por esta razón, es importante conocer las normas aplicables y sus respectivos procesos antes de programar las evaluaciones en la etapa de desarrollo. En la tabla 1.2 se presentan algunas de las normas internacionales aplicables a la instrumentación médica.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos: MGM II de Medcore

Desarrollo del prototipo:

Basándose en los resultados obtenidos en las evaluaciones de laboratorio y clínicas, se solicita a la FDA el permiso comercial como instrumento clase II. Este permiso: Pre Market Notification, bajo la cláusula 510(k), permite una aprobación acelerada si se establece que el sistema es esencialmente equivalente a instrumentos aprobados antes de 1976. Bajo este esquema, se intenta demostrar que el instrumento es equivalente a los calorímetros ya en uso. Finalmente, para obtener el permiso es necesario que la compañía se evalúe y certifique con respecto a los estándares de las GMP (*Good Manufacturing Practices*). Adicionalmente, el diseño cumple con las normas ANSI/AAMI para instrumentos médicos.

1.5.3 Diseño final del producto

En la mayoría de los casos, el diseño de un prototipo final debe pensarse para la producción en gran volumen y la comercialización. Sin alterar el desempeño y las características funcionales del instrumento, en ocasiones se tiene que considerar cambios para facilitar la construcción o mejorar la durabilidad. También se deben considerar factores de ergo-

nomía y facilidad de uso. Muchas veces se realizan cambios de tipo estético y de presentación, que vayan de acuerdo con una imagen o una línea de productos del fabricante.

Este proceso de diseño final generalmente está a cargo de diseñadores industriales, o incluye su colaboración.

1.5.4 Evaluación y validación del producto

El diseño preproducción del instrumento debe evaluarse para asegurar que éste cumpla con todos los criterios de diseño y las especificaciones técnicas de desempeño. En particular, en esta etapa se deben determinar la tolerancia y la reproducibilidad esperada entre los instrumentos de la línea de producción. De la misma manera, el instrumento debe ser probado por la mayor cantidad de usuarios y en las condiciones más diversas posibles antes de lanzarlo al mercado.

1.5.4.1 CONTROL DE CALIDAD

Es indispensable implantar un sistema de control de calidad para hacer un seguimiento continuo del proceso de producción. Tanto en Europa como en Estados Unidos, el permiso de comercialización de un equipo médico depende en parte de la certificación del proceso de control de calidad (GMP o ISO). Por ejemplo, en 1994 la compañía multinacional SIEMENS se vio afectada por la prohibición de vender sus equipos médicos en Estados Unidos debido a irregularidades en su control de calidad detectadas por la FDA.

El control de calidad incluye varios aspectos: primero se debe incluir un estudio estadístico continuo, generalmente por muestreo aleatorio, de las especificaciones de desempeño. En caso de una posible falla crítica el control puede llegar a practicarse en cada producto que sale de la línea. Segundo, se debe implementar un sistema de seguimiento y documentación de cada falla encontrada. Éstas van desde fallas detectadas en la línea de producción hasta los problemas reportados por los usuarios y el personal de servicio. La documentación debe registrar todo

el proceso, desde la detección de una falla hasta la puesta en práctica de acciones correctivas adecuadas.

**TABLA 1.2 ALGUNAS NORMAS INTERNACIONALES
APLICABLES A INSTRUMENTOS MÉDICOS**

Tipo	Normas	Organismo responsable
Seguridad eléctrica	IEC-601	IEC, International Electrotechnical Comission
Seguridad eléctrica	NFPA 99	NFPA, National Fire Protection Association
Seguridad eléctrica	ANSI/AAMI - Electrical safety	ANSI, American National Standards Institute AAMI, Association for the Advancement of Medical Instrumentation
Calidad eléctrica	UL	UL, Underwriters Laboratories
Seguridad médica y funcionamiento clínico	AAMI Clinical Standards	AAMI, Association for the Advancement of Medical Instrumentation
Funcionamiento y seguridad médica	PMA, Pre-market Approval o Pre-market Notification	FDA, Food and Drug Administration
Control de calidad	510(k) ISO-9000	ISO, International Standards Organization
Control de calidad	Good Manufacturing Practices	FDA, Food and Drug Administration
Seguridad nuclear	NRC	NRC, National Radiation Safety Comission
Funcionamiento	NOM- Norma Oficial Mexicana	Dirección General de Normas, México

1.5.4.2 EVALUACIÓN CLÍNICA BETA

Como último elemento de evaluación y control, antes de lanzar a la venta el producto es muy recomendable que la versión final del instrumento se someta a una evaluación clínica por los usuarios. Esta evaluación denominada beta difiere de la evaluación alfa en que se lleva a cabo mucho más adelante en el proceso de desarrollo. Hasta esta etapa se debe tener un alto nivel de confianza en el producto y se espera que cualquier falla catastrófica se haya detectado y corregido antes de llegar a dicha etapa. Los objetivos de esta evaluación son detectar pequeñas fallas o mejoras que puedan aún implantarse, llevar a cabo un estudio final de mercado e igualmente importante, comenzar la mercadotecnia introduciendo el producto al mercado de forma preliminar con “campeones” (especialistas líderes que promuevan y utilicen el instrumento en cuestión). En el campo médico en particular, es importante contar con el respaldo de estos “campeones”. En este sentido, la evaluación beta tiene semejanza a las muestras preestreno que realizan las distribuidoras de cine. Cabe aclarar que aun cuando se recomienda que la evaluación comience antes de lanzar el producto al mercado, ésta generalmente continúa aun después de que empiecen las ventas como parte del esfuerzo de mercadotecnia y control de calidad.

La evaluación beta normalmente se lleva a cabo simultáneamente con varios usuarios (del orden de una decena). Se escogen usuarios con proyectos de investigación en los que el instrumento juega un papel clave y de los cuales se esperan publicaciones en revistas médicas relevantes. A estos usuarios se les ofrece gratuitamente el instrumento, y en algunos casos hasta apoyo para el proyecto de investigación. Sin embargo, en esta etapa ya no se tiene un control directo sobre el protocolo y la investigación como en la evaluación alfa. Además de esperar que se publiquen resultados y que surjan en estas pruebas “campeones” que promuevan su uso, se debe hacer un seguimiento regular del empleo del instrumento y estudiar con cuidado las experiencias y sugerencias de estos primeros usuarios.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos MGM II de Medcore

Evaluaciones clínicas Beta:

En varios hospitales de Estados Unidos se proporcionaron monitores MGM II a investigadores. En particular, destaca el uso de este sistema en el famoso caso de Barney Clark, quien fue el primer ser humano que recibió un corazón artificial (el también famoso Jarvik 7). De estas evaluaciones se genera toda una bibliografía en la literatura médica.

1.5.5 Mercadotecnia y comercialización

Para llegar a la venta del instrumento en un mercado en particular, se tienen que cumplir tres elementos cruciales:

1. Certificaciones y permiso de comercialización
2. Sistemas de producción y control de calidad
3. Infraestructura de ventas y servicio

Este último elemento no es trivial, y puede determinar el éxito o el fracaso del instrumento en el mercado. Es muy común que las compañías que no cuentan con una buena infraestructura de ventas y servicio, contraten o formen una alianza comercial con distribuidoras especializadas. Las características de esta infraestructura dependen mucho del instrumento y del mercado en cuestión, y su discusión se aleja de los objetivos de este libro. Sin embargo, cabe mencionar un elemento muy importante para muchos instrumentos médicos, particularmente instrumentos revolucionarios: la necesidad de capacitación del usuario como parte del esfuerzo de ventas y servicio. Un alto porcentaje de los problemas que se reportan con instrumentos biomédicos son causados por errores del usuario, y por lo mismo un buen programa de capacitación y actualización puede tener un fuerte impacto en el éxito de un instrumento.

Obviamente, la estrategia comercial y de mercadotecnia también depende mucho del instrumento y el mercado. Aquí sólo podemos hacer algunas observaciones generales: para muchos instrumentos médicos, la mercadotecnia se enfoca en torno a la literatura y los eventos académicos. Se fomentan “campeones” que promueven el uso del instrumento en revistas y congresos. Por lo general, un nuevo instrumento se lanza al mercado cuando se tienen los primeros resultados favorables de las evaluaciones beta, y se promueve fuertemente en el congreso más importante de la especialidad.

Finalmente, el proceso de desarrollo no debe concluir con las primeras ventas. Los resultados de las evaluaciones clínicas, las experiencias de clientes y el proceso de control de calidad suelen poner de manifiesto la necesidad de realizar mejoras y hasta de construir por completo un nuevo instrumento.

Ejemplo: Desarrollo del monitor de gases metabólicos MGM II de Medcore

Comercialización y mercadotecnia:

El MGM II sale a la venta por primera vez en 1984. En 1988, la compañía de distribución y servicio Utah Medical (con alrededor de 400 empleados) se fusiona con Medcore (de 20 empleados), asegurándose así un mejor sistema de ventas y servicio que mantuviera la competitividad del instrumento dentro del mercado.

En México, Medcore y luego Utah Medical otorgan un contrato exclusivo a una distribuidora mexicana de equipo y mantenimiento, Sistemas Digitales Médicos. Ésta a su vez apoya a “campeones” locales que utilizan el sistema en investigación en el Instituto Nacional de la Nutrición y en el Hospital Español.

En 1990, Utah Medical vende la línea de monitores metabólicos a la compañía Life Energy Systems, quien introduce al mercado el EMS-50 (Enhanced Monitor System), una versión mejorada del MGM-II. Actualmente (1999) Life Energy Systems, en conjunto con una compañía mexicana, está desarrollando el MGM-III, que incorpora varios avances tecnológicos.

Capítulo 2

Modelo de un sistema de medición

2.1 Introducción

En la actualidad la medición abarca prácticamente todas las actividades humanas, incluso algunas que jamás se pensó que podrían llegar a cuantificarse, como los procesos sociales y los económicos. En el mundo moderno no sólo es importante disponer de mediciones, sino que éstas sean fidedignas; y es tal la necesidad de ellas, que esta actividad ya no se encuentra limitada al uso exclusivo de los expertos.

Es decisivo para el científico conocer con exactitud las constantes universales, como para la industria establecer con seguridad la medición del tiempo o para el comercio medir la capacidad de un barco petrolero. Tanto la ciencia como la tecnología, la industria y el comercio encuentran intereses comunes en la medición. Sin embargo, históricamente no siempre se le consideró tan importante ni tan indispensable como ahora. Los primeros filósofos y científicos llegaban a sus conclusiones sin recurrir a mediciones o apoyándose en las poco precisas mediciones de la época. Indudablemente, el desarrollo de la industria y del comercio, así como de la ciencia, fue lo que disparó el desarrollo actual de la medición, que ha convertido esta actividad en una de las ramas más importantes de la tecnología. En los párrafos siguientes se presenta una breve introducción de los aspectos básicos e históricos de la medición y de sus conceptos fundamentales.

2.1.1 Origen de la medición

Las primeras mediciones fueron, seguramente, las cuentas de los días, de las estaciones del año, de las fases de la luna o de la cantidad de las cosas de uso común de que se disponía. Estas mediciones primitivas equivalen al uso de los números naturales para cuantificar el tiempo y los objetos con unidades muy elementales.

Más adelante, estos conceptos primitivos debieron evolucionar para que pudiera establecerse, por ejemplo, la relación entre el día solar y el mes lunar, así como la duración de las estaciones y del año climático en unidades burdas, aunque apropiadas para esos momentos. Paso a paso, habrá sido necesario y posible establecer con mayor corrección la duración de éstos y otros periodos de tiempo más largos o más breves para disponer de intervalos apropiados a los usos de esa época. Fue un proceso que significó primero dividir los fenómenos naturales periódicos en intervalos iguales, considerando por ejemplo los ángulos descritos por los movimientos del sol y de la luna, y luego sustituyéndolos por mecanismos de medición artificiales como la clepsidra y el reloj de arena, que permitieron la medición de intervalos más pequeños. De esta forma se habrán determinado las horas, los minutos y los segundos, para obtener, finalmente, un reloj y un calendario muy detallados. Para que todo esto ocurriera, por supuesto, se requirió que existiera la necesidad de medir, la exigencia de disponer de un instrumento o mecanismo para describir, en forma cuantificada, los fenómenos naturales o algunas características relevantes de éstos. Tal vez por eso es que, seguramente, el tiempo fue la primera de las propiedades físicas que el ser humano pudo transformar en números.

Sin embargo, aunque en la actualidad el tiempo es la variable que se mide con mayor rigurosidad y por ello es de las más importantes, no es la única característica física que el ser humano necesitó medir desde un principio. Con el desarrollo del comercio, fue necesario cuantificar no sólo la cantidad, sino también el peso o el volumen de algunas mercancías y la longitud de otras. Al principio, tales mediciones se realizaron

con referencia a una escala humana, por lo que las medidas antropométricas como el codo, el pie y la pulgada son unidades muy antiguas. Sin embargo, paulatinamente la necesidad de medir exigió refinamientos. Una anécdota destacada de este proceso es la que se refiere al descubrimiento del principio de Arquímedes, quien enfrentó el problema de determinar si en un objeto se había utilizado la cantidad de oro correcta para obtener cierto grado de pureza en la aleación. Este principio hace posible medir el volumen de un cuerpo con forma arbitraria, del cual se conoce su peso, con lo que la solución es inmediata a través de la densidad (peso/volumen).

La medición tiene algunas características especiales: por ejemplo, para estar de acuerdo en su significado, es necesario que todos los interesados utilicen una misma unidad de medición absoluta (cualquier sistema debe ser universal en su aplicación para que su uso sea fácilmente comprendido), que se tenga acceso relativamente fácil a ella como única referencia (para que todos la utilicen), que pueda duplicarse con facilidad (que existan patrones o estándares claramente definidos), que los estándares o patrones no se modifiquen en exceso con el uso o con el paso del tiempo (que sean estables), y que sea posible darles seguimiento para ajustar y calibrar las referencias de uso práctico y de menor nivel.

Otras características que debe poseer cualquier sistema orientado a la medición son las siguientes: que sea sencillo (que tenga un mínimo de unidades básicas), claro (que las definiciones sean únicas, simples y cuidadosas) y coherente (que no haya contradicciones y que no coexistan varias unidades para medir una misma magnitud); y que tenga continuidad (que las modificaciones realizadas no afecten la magnitud de las unidades ya aceptadas y que sea posible incorporar nuevas unidades en cuanto el desarrollo de la ciencia o de la tecnología lo exija). Todos estos conceptos son los que actualmente definen, caracterizan y determinan cualquier sistema de medición, especialmente el de uso más extendido: el Sistema Internacional de Unidades (conocido universalmente por la sigla SI).

A medida que las ciencias se desarrollaron, fue necesario cuantificar cada vez con mayor acierto los resultados experimentales, medir nuevas variables y asignar una unidad de medición adecuada a cada una de ellas. Por otra parte, las mediciones cuya necesidad fue generada por el comercio se hicieron cada vez más complejas. Ya no bastó con medir longitudes, masas y tiempos. Poco a poco se incorporaron diversas unidades, no todas deducibles directamente de las existentes o relacionadas en forma estrecha con ellas, lo que configuró todo un espectro de unidades que hizo necesario organizar, simplificar, redefinir y hacer coherentes las unidades utilizadas en la ciencia, la tecnología, las actividades comerciales y la industria.

2.1.2 Sistema Internacional de Unidades (SI)

Uno de los primeros esfuerzos para obtener referencias universales correspondió a la definición del metro (en 1793) como *la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano de París*. Hacia fines del siglo XVIII Francia adoptó los históricos patrones de platino para el metro y el kilogramo, pero no fue hasta cincuenta años después que se decretó el uso obligatorio del sistema métrico decimal. Los científicos fueron los primeros en reconocer la necesidad de desarrollar un sistema universal de unidades, a lo que contribuyeron adoptando los sistemas cgs (centímetro gramo segundo), mgs (metro gramo segundo) y mks (metro kilogramo segundo) entre otros. El primero de ellos terminó imponiéndose a fines del siglo XIX y principios del XX.

Para determinar el actual sistema de medición, conocido como Sistema Internacional de Unidades y empleado universalmente, fue necesario establecer una serie de acuerdos internacionales con el propósito de que dicho sistema reuniera los requisitos mínimos para cumplir con sus propósitos y fuera ampliamente aceptado. Para llegar a este punto no sólo fueron decisivas las necesidades de los científicos: el desarrollo del comercio fue un factor muy importante, ya que el intercambio de grandes volúmenes de mercancías y de nuevos productos hizo necesari-

rio que vendedor y comprador se pusieran de acuerdo en lo que significa cada número y cada término asociado a una medición.

A partir de la creación de la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) en 1889, en la que se adoptan los patrones básicos del metro y el kilogramo, posteriores reuniones y acuerdos internacionales incorporan al sistema métrico decimal, hacia mediados del siglo XX, las unidades básicas actuales: el ampere (A), el kelvin (K) y la candela (cd), definiendo de esta manera el Sistema Práctico de Unidades. También se definen y redefinen con mayor cuidado los patrones, buscando referencias más precisas y básicas; y se integran las unidades derivadas, las unidades suplementarias y el mol, para la cantidad de sustancia, completando en esa forma el actual SI.

2.1.3 Justificación y necesidad de la medición

El comercio requiere referencias precisas y confiables, los resultados de los científicos deben comprenderse e interpretarse adecuadamente, los ingenieros y la industria demandan estándares y normas de trabajo universales, en tanto que casi todas las actividades humanas dependen de tales exigencias. Sin embargo, las razones de la medición son más profundas que muchas necesidades prácticas. Es una verdad muy conocida que si no existiera la medición, la ciencia no tendría el carácter que posee como rectora del conocimiento humano. Así mismo, la actividad del ingeniero, entendida como la aplicación práctica y utilitaria de tales conocimientos, tampoco podría realizarse sin ella. Estas circunstancias han hecho que la medición se desarrolle a la vanguardia de la ciencia y de la tecnología, y que los mecanismos de medición fidedignos y confiables deban desarrollarse imperiosamente cuando no existen. Es la habilidad de cuantificar con rigurosidad y establecer numéricamente las variables asociadas a los fenómenos en forma muy estricta, lo que ha permitido a los científicos encontrar las leyes fundamentales que gobiernan el universo y a los técnicos aplicarlas en beneficio de todos.

El conocimiento empírico se convierte en ciencia solamente cuando los fenómenos son cuantificados y medidos con fidelidad, al igual que la alquimia se convierte en la química moderna en el momento en que sus variables se determinan, organizan y cuantifican. Algo similar podría decirse de otras disciplinas clásicas, como la biología y la medicina, que han encontrado en la cuantificación un renovador impulso y una nueva dimensión; o de técnicas de reciente aparición, que se fundamentan en la utilización extensiva de la medición y de la cuantificación, como el control de calidad, el procesamiento digital o los sistemas de medición electrónicos.

2.1.4 La medición en la ciencia y la ingeniería

Las mediciones en la ciencia y la ingeniería no son conceptualmente muy diferentes de las que se realizan en el comercio, aunque debe destacarse que las primeras pueden ser más elaboradas, pueden requerir técnicas más formales y complejas, y deben aplicarse a la medición de variables nuevas o dedicarse al desarrollo de nuevos métodos o a la aplicación de técnicas más sencillas o más precisas. En términos generales, no existen sistemas de medición diferentes para la tecnología y el comercio. Ambas actividades utilizan el mismo sistema, aunque el comercio, por razones perfectamente comprensibles, no siempre requiere de una rigurosidad tan estricta ni puede utilizar técnicas muy complejas. Basta con que la técnica de medición pueda ser utilizada por cualquier persona con un breve entrenamiento y que el error no tenga un impacto económico notable. Existen, por supuesto, muchos casos en los cuales el comercio sí requiere de técnicas complejas y personal especializado, pero no son tan comunes. Normalmente la tecnología le proporciona los instrumentos y los métodos adecuados a su especial forma de operación [4, 9].

La ciencia, en cambio, no debe ser tan tolerante ya que en ocasiones un pequeño error puede significar que los resultados lleven a una conclusión totalmente diferente, y por tanto errónea, aunque no tenga un

impacto económico importante de inmediato. Muchas veces las teorías que los científicos han planteado como hipótesis pueden descartarse definitivamente o ser universalmente aceptadas, dependiendo de los resultados de un solo experimento. Por eso es que gran parte de las actividades de los investigadores se orienta a buscar datos con los cuales confirmar o negar la visión previa que tienen sobre la realidad, para lo cual es de invaluable ayuda una medición rigurosa.

Por su parte la tecnología, en su afán de producir las máquinas, la infraestructura y los artículos que requiere la vida moderna, se ve obligada a determinar con gran minuciosidad todas las variables involucradas en el diseño, creación, fabricación, prueba, producción y mantenimiento de los más diversos artículos, productos y equipos. La producción en serie, la cadena de montaje, la microelectrónica, la fabricación de piezas mecánicas y la producción de fármacos, máquinas, aparatos y procesos industriales requieren por igual una metodología de medición amplia, precisa y capaz de soportar todas las actividades relacionadas con la tecnología.

Aunque las variables y los fenómenos físicos que interesan a las distintas ramas de la tecnología moderna sean distintos, los puntos en común son muchos. Por ejemplo, la medicina se apoya cada vez más en aparatos electrónicos para observar y cuantificar variables fisiológicas, con el propósito de medir una serie de parámetros relacionados con la salud. El análisis químico ya es de uso común y los modelos matemáticos no son raros para comprender, cuantificar y medir fenómenos y hechos vinculados con la fisiología y la salud humana.

En ciertos casos, las características que se pretenden cuantificar o las variables que se quieren medir no son de fácil acceso, tienen un componente subjetivo importante, se vinculan estrechamente con una determinada población en lugar de hacerlo con un solo individuo, o no pueden caracterizarse fácilmente. Considérense, como ejemplos, la medición del volumen total de sangre de una persona, la cuantificación de lo que se siente al observar los colores, el cálculo de la intensidad del dolor, la potencia que disipa el corazón, la determinación numérica del efecto de

una droga o de una dieta en una población determinada de infantes o en una persona específica, etcétera.

En el proceso de cuantificar las características físicas y las variables de interés de un fenómeno real, se ve como algo muy necesario fijar con toda claridad las condiciones de la medición, las limitaciones del método utilizado, las imperfecciones de los instrumentos, los errores humanos y la especificación precisa del objeto de la medición, entre otros factores. Esto es necesario porque dichas circunstancias hacen inevitable que el propio proceso de medición contenga un error que, si es pequeño y tolerable, puede ser aceptado. Sin embargo, cuando no se toman todas las precauciones mencionadas, la cuantificación del mesurando sólo será aproximada, posiblemente falsa, distorsionada y, tal vez, poco útil.

2.1.5 Introducción al error como efecto inherente a la medición

Independientemente de los factores mencionados en el párrafo anterior, efectuar una medición implica normalmente realizar una comparación entre el objeto a medir (o *mesurando*) y una referencia concreta (o *patrón*). Puesto que tal comparación tiene que ser una operación física, el proceso necesariamente contiene una incertidumbre que, por muy pequeña que sea, implica un error. Por otra parte, el mesurando es una cantidad obviamente desconocida que se pretende determinar en forma numérica, en tanto que el patrón se construye ex profeso, por lo común a partir de otro patrón preexistente llamado *patrón primario*, y se elabora con el propósito muy concreto de que sirva de referencia para las mediciones. Además, cuando se construyen uno o más patrones primarios es ilusorio pensar que cada nuevo ejemplar tendrá el mismo valor que los demás, por mucho que los procesos correspondientes se sigan en forma escrupulosa. De la misma manera, cuando se obtiene una co-

pia de un patrón de orden superior, no es acertado imaginar que se logra una réplica perfectamente igual. Por todas estas razones, siempre se tiene forzosamente la presencia de otro error adicional.

Así mismo, independientemente de la calidad de su elaboración y construcción, el uso constante a que el patrón se ve expuesto lo somete a cambios, desgastes, variaciones, descalibración y otras modificaciones más que, aunque sean pequeñas, con el paso del tiempo alteran irremediablemente el valor original. Por ello, en el proceso normal que requiere cualquier sistema global de unidades, consistente en disponer de una referencia universal y obtener copias de ella que se utilicen como referencias prácticas a lo largo de un determinado intervalo de tiempo, también se introduce inevitablemente otro pequeño error.

Al mismo tiempo, si para un caso particular se quiere conocer con absoluta certidumbre cuál es el error implícito en una medición, se tiene el siguiente problema: el error puede definirse como la diferencia que existe entre la cantidad medida o “lo que se obtiene” como resultado del proceso de medición, y el “valor que debería obtenerse”. Como puede comprenderse fácilmente el *valor que se obtiene* es perfectamente conocido, mientras que el *que debería obtenerse* es un concepto abstracto que no representa la realidad porque nunca se conocerá en forma absoluta, ya que para esto *habría que medirlo* (con los errores ya mencionados que este proceso trae implícitos). Debido a ello, el resultado de una medición siempre **debe expresarse en la forma de una cantidad que contiene un determinado margen de incertidumbre, de tolerancia o de error.**

Por consiguiente, tanto *lo que se obtiene* como *lo que debería obtenerse* sólo pueden especificarse por medio de mediciones, y entonces siempre existirá cierta imprecisión en la descripción numérica de ambos, por muy rigurosa que sea ésta. Por ello, la medición del mesurando y el cálculo del error serán siempre cantidades aproximadas, aunque también es cierto que se espera que el mesurando sea muy cercano

“*al valor que debería obtenerse*”. Este último valor es obviamente inalcanzable, por lo que es más conveniente referirse a él como el *valor medido, esperado, conocido, calibrado, exacto, de un promedio de mediciones*, o como el *valor del patrón*, según sea el caso.

2.1.6 Mediciones directas, indirectas e inferidas

El proceso de medición enfrenta, además, otro problema no menos importante. El hecho de medir requiere que se tenga acceso al mesurando, que se obtenga información de éste para que pueda realizarse una adecuada comparación con la referencia que existe en el instrumento, que se disponga o se extraiga energía del fenómeno de interés para excitar al instrumento y para alimentar los procesos internos de éste. En otros casos más complejos incluso, para obtener un mesurado utilizable en algunos sistemas es preciso usar una señal de excitación para provocar una respuesta.

En consecuencia, como puede comprenderse, el proceso de medición suele perturbar o alterar en mayor o menor medida al mesurando, con lo que esta operación agrega un error adicional al resultado. Este efecto de interacción de la medición con el mesurando debe, por supuesto, mantenerse en niveles bajos que sean muy inferiores al error tolerable o que es posible aceptar.

Por otra parte, desde el punto de vista del acceso relativo que se tenga al mesurando, cuando un instrumento lo acepta sin modificaciones la medición es *directa* porque no requiere de preparación ni de etapas previas. Éste es el caso de un voltaje que se conecta directamente a un convertidor analógico a digital. Así mismo, si no existe una forma explícita de acceso al mesurando o éste no se encuentra disponible, la medición es *indirecta* porque en esta situación debe tomarse un segundo mesurando relacionado con el anterior para que se utilice en sustitución del original. Tal es el caso de la presión, que suele medirse por medio de la deformación de una membrana, así como de la deflexión de un pilar elástico o de la modificación que experimenta una resisten-

cia eléctrica con la distorsión de su forma. Por último, cuando el mesurando es definitivamente inaccesible y no existe ninguna forma sencilla de utilizar otro para medirlo en su lugar, todavía es posible determinar un resultado válido o *estimar* la medición. Para ello, generalmente debe elaborarse un modelo adecuado del fenómeno que genera el mesurando, aplicar a éste herramientas estadísticas, mediciones múltiples de otros mesurandos relacionados con él, o incluso utilizar simulación y procesamiento de datos o señales, para que en esta forma el resultado numérico se obtenga por *inferencia*.

Esta última situación se presenta con mucha frecuencia cuando se realizan mediciones de fenómenos biológicos, lo cual suele depender del tipo de mesurando o fenómeno que se intenta medir. En tal caso, la confianza que puede entregarse a los resultados obtenidos por inferencia depende estrictamente del método utilizado, de las herramientas que se apliquen, del modelo desarrollado y del tipo de mediciones o de datos de que se disponga. En consecuencia, los resultados dependen en gran medida del grado de conocimiento del fenómeno que se desea medir, así como de las características propias del instrumento y del método que éste utilice para cuantificar al mesurando.

2.1.7 Variables por medir

No existe límite en cuanto al tipo de las variables y de las características físicas que son susceptibles de medir. Por ejemplo, con respecto a la forma numérica las mediciones de desplazamiento, tiempo y volumen implican la obtención de un número único que pertenece a los números reales. Sin embargo, la medición no siempre implica cuantificar en esta forma, ya que los fenómenos de naturaleza discreta o que no requieren mucha precisión se miden sólo con los números enteros. Un ejemplo común es el tiempo, que se mide en horas, minutos y segundos (y hasta centésimas de segundo), todos los cuales son enteros.

Por el contrario, otras mediciones pueden requerir de dos o más números para describir el mesurando, como el voltaje alterno, que exige

magnitud y fase o el vector fuerza que, para estar completamente determinado requiere que se especifique magnitud y dirección o más específicamente en coordenadas tridimensionales, dos ángulos (elevación y azimut) y la magnitud correspondiente.

Adicionalmente, la experiencia indica que algunos fenómenos sólo pueden describirse, caracterizarse o medirse mediante el empleo de un conjunto de diversas propiedades asociadas a ellos. La caracterización o medición de un movimiento sísmico, por ejemplo, implica determinar una serie de valores relacionados con los movimientos de aceleración que se experimentan, la forma en que varían los desplazamientos tanto en el tiempo como en el espacio, la energía liberada, los efectos que se producen en la naturaleza y en las construcciones humanas, etc. Entre todos estos parámetros, y sólo como uno más, se encuentra la magnitud del sismo, que es el valor más utilizado para describir el movimiento telúrico.

Finalmente, para el caso de los sistemas dinámicos lineales e invariantes la respuesta a impulso de un sistema real es una herramienta muy utilizada para caracterizarlos, ya que los describe por completo en forma de una señal en el tiempo. Esto significa que se trata de una variable que toma un conjunto infinito de valores en el tiempo, y que para poder capturarla o “medirla” hace falta un esfuerzo mayor que el empleado para determinar unas cuantas cifras.

Como puede verse, en ingeniería existe una gran variedad de manifestaciones físicas y de fenómenos que para ser descritos con precisión demandan la identificación de muchos parámetros característicos y la cuantificación de múltiples variables. Algunos ejemplos son las imágenes, con sus diferentes colores, contrastes y definiciones; las señales de televisión, con similares características; la prueba de componentes o sistemas electrónicos, que se basa en una mezcla de mediciones diversas; el control de calidad, que incluye sistemas donde los seres humanos son parte del todo; así como la evaluación del estado de salud de un sujeto o la descripción, a largo plazo, de los efectos producidos por un determinado medio o cierta droga en el organismo.

2.2 INSTRUMENTOS Y SISTEMAS DE MEDICIÓN

Los sistemas de medición y los instrumentos son parte de lo que en términos generales puede describirse como una forma de conocimiento de la realidad. Sin embargo, resulta más preciso especificarlo como un proceso que permite, dentro de ciertos límites, transformar uno o varios aspectos de la realidad en algo *cuantificable* o *medible*. A continuación se plantea una definición más estricta.

2.2.1 Medición

Se entiende por medición al proceso que se vale de diversos métodos y técnicas con el propósito de *mapear* un determinado dominio observable a un segundo dominio cuantificable. Cada objeto, variable o fenómeno que pertenece al dominio observable se conoce con el nombre genérico de *mesurando*, en tanto que la consecuencia del proceso se conoce como *resultado*, *medida* o *medición*. El dominio observable es simplemente la realidad o el mundo real, que puede dividirse en subconjuntos más pequeños, como los constituidos por los fenómenos físicos, químicos o biológicos. El dominio cuantificable es, por lo común, alguna estructura matemática, por ejemplo los números reales.

2.2.2 Elementos básicos de una medición

Para llevar a cabo la medición o el mapeo de la realidad observable sobre cualquier dominio cuantificable es necesario cubrir varias etapas: 1) identificar el *mesurando*, 2) elegir un método de mapeo o de medición, y 3) definir una unidad para expresar numéricamente el resultado o medición por comparación con el *mesurando*. El *mesurando* no siempre es independiente del método, que a su vez puede depender poderosamente de la tecnología disponible, la cual se concreta física-

mente en un *instrumento de medición*. Allí es donde se encuentra el campo de estudio de la instrumentación, ya que el instrumento es el medio que permite realizar adecuadamente la medición; en consecuencia, sus características van a determinar las peculiaridades de todo el proceso. Por ejemplo, si se requiere alta precisión el instrumento debe proporcionarla, lo que significará alta calidad y alta tecnología; esto también puede implicar altos costos en el diseño y el desarrollo. Así mismo, la mera selección de un mesurando y(o) un método de medición determina de antemano las peculiaridades del instrumento; por ello, una de las principales tareas de la instrumentación es lograr que se sponga de la mejor medición al más bajo costo.

Ejemplo 2.1 El siguiente ejemplo puede clarificar estos conceptos: se pretende medir la concentración de oxígeno en los gases fisiológicos espirados por los seres humanos. Esta medición significa determinar la cantidad de oxígeno presente en un gas por unidad de volumen.

Solución. Como puede verse claramente, la medición de una concentración cualquiera (como átomos, moléculas o elementos existentes en un gas por unidad de volumen) no puede hacerse en forma directa, porque no sería práctico. Un ingeniero instrumentista interesado en realizar esta medición podría abordar el problema en la forma que se detalla a continuación.

Primero, hay que investigar las propiedades físicas y químicas del oxígeno, es decir, sus atributos en estado natural, como el punto de fusión, la afinidad con otros elementos, el peso molecular, las características ópticas, etc. Después, es necesario seleccionar entre estos rasgos distintivos del oxígeno alguna propiedad fácilmente observable y medible que sea proporcional a la concentración de éste, con lo cual el instrumentista ha *identificado un mesurando* (Etapa 1). A continuación, se consideran los valores de las concentraciones de los gases fisiológicos espirados por los seres humanos (el oxígeno puede encontrarse en concentraciones del 15 al 21% cuando se respira en la atmósfera).

Posteriormente, deben construirse dispositivos que respondan en forma selectiva a la propiedad elegida por medio de la modificación de alguna de sus características físicas detectables; se logra convertir la propiedad seleccionada en medible o en un mesurando cuando se *elige un mapeo* específico a un segundo dominio a través del dispositivo seleccionado (Etapa 2). Estos dispositivos que permiten “observar” una propiedad física determinada desde otro dominio se denominan *transductores* (resistores que transforman o traducen) debido a que trasladan este atributo a otro terreno y permiten que en éste se haga medible. Al llegar a este punto se tienen elementos suficientes para *definir una unidad* vinculada con el SI usando la ley del transductor (Etapa 3). En resumen, por medio del transductor que tiene una propiedad proporcional a la concentración de oxígeno, se obtiene una medición indirecta de esta concentración.

Actualmente, la tecnología disponible para medir oxígeno en gases fisiológicos se puede resumir, a grandes rasgos, como se detalla a continuación.

- **Tecnología de cristal de óxido de circonio.** En este caso la propiedad que se identificó como viable para realizar la transducción fue la afinidad que muestra el oxígeno con la estructura de cristal de circonio (adsorción) al ser calentado éste a 800°C. En esta condición se genera un voltaje (expresado en mV) en los extremos del cristal, que es directamente proporcional a la concentración del oxígeno. Con el uso de esta tecnología es obvio que la propiedad de adsorción utilizada para el transductor es la afinidad del oxígeno con el cristal de circonio, y el mesurando final es el voltaje generado en los extremos de este cristal.
- **Tecnología paramagnética.** Aquí se aprovecha la propiedad de paramagnetismo que presenta la molécula de oxígeno, ya que en presencia de un campo magnético se genera un cambio en su presión parcial, la cual es medible mediante un transductor de presión. Así, el transductor utiliza la propiedad paramagnética de la molécula de oxígeno, y el mesurando que se va a medir es la presión.

- **Tecnología polarimétrica.** Esta tecnología se basa en la propiedad de difusión del oxígeno a través de una membrana de teflón, donde se le hace reaccionar químicamente con un electrólito. Esta reacción hace cambiar la conductividad del teflón en forma directamente proporcional a la concentración de oxígeno. Por consiguiente, la propiedad que se está utilizando para determinar la concentración es la capacidad del oxígeno de difundirse en una membrana, y el mesurando útil es la resistencia eléctrica del teflón.

Como conclusión del análisis realizado, puede decirse que cada una de las tres alternativas para elegir una propiedad específica de transducción, con su correspondiente mesurando, ha conducido a diferentes métodos de medición y a distintos tipos de instrumentos, los cuales tienen sus propias características técnicas, problemas de desarrollo y costos asociados. El común denominador de todos ellos es que tienen el propósito de medir la concentración de oxígeno en los gases. A partir de esta información y de los detalles técnicos de cada método disponible, es tarea del ingeniero buscar que las mediciones tengan el mínimo error y que esto se haga al mejor precio posible, entre otros factores que ya se han analizado en el capítulo anterior.

Para aclarar los conceptos de mesurando y transductor es importante pensar, como ejercicio, si existe alguna otra propiedad del oxígeno que no se haya considerado en el ejemplo anterior y que también pueda utilizarse como mesurando, compararla con las que se utilizan hoy en día y sopesar si puede conducir al diseño de instrumentos que tengan nuevas ventajas y que sean de mejor calidad o de menor costo asociado, entre otras características deseables.

2.2.3 Mesurando

A partir del ejemplo anterior puede decirse que mesurando es toda entidad observable de un fenómeno, que puede ser cualquier atributo, característica o propiedad física del fenómeno en particular. Por lo general,

una buena parte de éstas no son observables en forma directa sino que se detectan o se hacen observables mediante el transductor o el propio instrumento de medición.

En muchos casos en los cuales no es posible determinar una característica específica del fenómeno que sea medible, se tiene que no existe un mesurando identificable. Algo similar ocurre cuando no puede definirse un método de mapeo o no se tiene una unidad para expresar el resultado.

Un ejemplo simple de esta situación es el dolor, que es un fenómeno de gran subjetividad. En tal caso no se recurre a una medición como tal, sino a una evaluación llamada juicio de valores que no corresponde a la definición previa de medición. En este tipo de evaluaciones se asigna al fenómeno en estudio un elemento de calidad no numérico, sino de estado (p. ej., para el dolor: fuerte, intenso, medio y ligero).

Otros ejemplos consisten en la determinación del tipo de sangre, la valoración del estado de salud de un paciente, el grado de una quemadura y la identificación de las fases de sueño de una persona en un somnograma, en los cuales simplemente se lleva a cabo una clasificación. En todos estos casos no existe un mesurando identificable y no se practica una medición; sólo se establece un orden de prioridad, una disposición u organización en clases distintas, o una relación de precedencia o de niveles, pero no se precisa una conexión numérica estricta entre los elementos o las clases. Por tales razones, estos ejemplos no se refieren exactamente a la definición de medición que se aborda en este capítulo.

A continuación se especifican algunos ejemplos de mesurandos válidos.

longitud	desplazamiento	posición	intervalo de tiempo
densidad	difusión	concentración	carga eléctrica
corriente	flujo	aceleración	resistencia
inductancia	capacitancia	permeabilidad	adsorción
temperatura	fuerza	ángulo	viscosidad
color	dureza	peso	densidad óptica

El hecho de considerar a la medición como el mapeo de un primer dominio observable a un segundo dominio cuantificable tiene como consecuencia que el mesurando sólo se conozca indirectamente a través del instrumento en una forma numérica de resultado o de medición. Por ello, es conveniente que el mesurando se represente como “*valor esperado de la característica o propiedad medida*”; a su vez, el producto obtenido con la medición se caracteriza como el “*valor medido, la medición o el resultado de la medición*”. Además, el mesurando se denotará por medio de x_n y el resultado mediante el símbolo y_n , como se observa en el modelo ideal del instrumento de la figura 2.1.

2.2.4 Instrumentos de medición

Este nombre se asigna a los dispositivos encargados de llevar a cabo físicamente el proceso de medición, razón por la cual éstos se encuentran ubicados exactamente entre el mesurando y el resultado de la medición. Además, su única responsabilidad es realizar en forma adecuada y consistente el mapeo entre estos dos dominios. Esta operación se realiza normalmente en varias etapas o partes, para las cuales el instrumento dispone de elementos muy especializados que están diseñados y contruidos para llevar a cabo una función determinada muy concreta de modo que el proceso de medición pueda realizarse en forma efectiva y confiable. La descomposición del instrumento en cada una de estas secciones o bloques, así como la interacción entre éstos, permite elaborar modelos que expliquen su estructura y su funcionamiento, con lo que se facilita la caracterización del proceso completo de la medición.

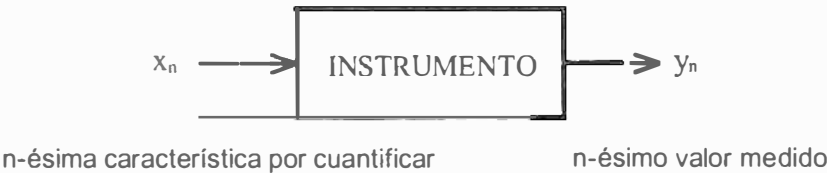


Figura 2.1 *Modelo ideal de un instrumento.*

2.2.5 Sistemas de medición

Cuando la medición es muy compleja, o se trata de medir varios mesurandos en forma simultánea, es necesario utilizar algunos instrumentos interconectados. En estos casos se habla de sistemas de medición. Por ejemplo, un electrocardiógrafo conectado a una computadora —dos instrumentos completos por sí mismos— permiten medir *la actividad eléctrica del corazón en la superficie del tórax* o registrar las señales ECG. La interacción entre estos dos elementos componentes constituye un nuevo sistema de medición automatizado, que se utiliza ampliamente como ayuda diagnóstica o para vigilancia continua, con características de operación que no tiene ninguno de los dos instrumentos originales por separado.

La interconexión de varios instrumentos o aparatos distintos con un propósito específico genera nuevos sistemas de medición cuya finalidad puede ser, como en el ejemplo del párrafo precedente, obtener nuevas, más amplias o mejores propiedades de operación, perfeccionar la calidad de los resultados, alcanzar la automatización del proceso de medición, facilitar el despliegue o la presentación de los datos obtenidos, controlar procesos de manufactura o, simplemente, para fines de vigilancia o supervisión, todo lo cual es de suma importancia en el ambiente hospitalario.

2.3 MODELO FUNCIONAL DE UN INSTRUMENTO

Si se considera que la medición, desde un punto de vista muy amplio y general, es el proceso de transformar la realidad en un objeto cuantificable, cabe preguntarse qué consecuencias tiene esta transformación y si es adecuada. La primera inquietud lleva a la conclusión de que, por medio del instrumento, la realidad se convierte en un objeto distinto y muy limitado que suele denominarse modelo. La segunda inquietud se

refiere al hecho de que la realidad y el modelo difieren en forma natural, diferencia que depende estrechamente de la calidad de la medición y del nivel de complejidad del modelo. Por ello, el experimentador debe tener siempre muy claro que las conclusiones a que pueda llegar están condicionadas a la visión que obtenga de la realidad por medio del proceso de medición y a qué tan acertado sea éste. Muchos de los errores cometidos por los principiantes —de los cuales por cierto no se libran ni siquiera los científicos e ingenieros más experimentados—, se deben a que confunden la realidad con el modelo.

2.3.1 La medición como transformación

Cuando la medición M se considera como una transformación entre X (dominio observable, al que pertenece la característica o mesurando x_n) y Y (dominio cuantificable, al que pertenece el resultado del proceso o medición y_n), puede escribirse lo siguiente:

$$M : X \rightarrow Y$$

$$y_n = M\{x_n\}$$

En consecuencia, esta ecuación significa que el valor *medido* o *resultado* obtenido por el instrumento (y_n) es la *medición*, *característica* o *propiedad* del *mesurando* en consideración x_n). La notación con el subíndice n obedece a que el proceso de medición generalmente es discreto; es decir, en todos los casos los resultados se obtienen uno tras otro, en una secuencia temporal. Una excepción a esta regla es el registro de señales en papel, como el ECG y el EEG tradicionales, aunque debe señalarse que estos estudios entregan una larga tira de papel con las señales correspondientes impresas en ella, pero no proporcionan resultados numéricos utilizables.

2.4 Modelos generalizados de un instrumento

A partir de la definición anterior, que representa al instrumento a través de su función básica de medición, se obtiene el modelo más sencillo de un instrumento o sistema de medición por medio de la representación idealizada que se muestra en la figura 2.1.

En esta figura, el mesurando x_n es la n -ésima entrada a un bloque que simboliza el instrumento completo, en tanto que la salida de éste es la n -ésima medición obtenida y_n . Idealmente, la relación entre la entrada y la salida debe ser uno a uno, o sea, $y_n = x_n$, por lo que en este modelo ideal se ignora la discrepancia natural que siempre existirá entre el mesurando y el resultado debido a las limitaciones del instrumento producidas por el ruido o el error. Esta situación obliga a considerar que el modelo de la figura 2.1 sólo es una referencia ideal que cualquier instrumento o sistema de medición debe tratar de alcanzar, pero que en la práctica nunca se logra completamente.

2.4.1 Modelo generalizado

En la figura 2.2 se muestra un modelo ideal generalizado que está más de acuerdo con la función efectiva que desempeña el instrumento, ya que considera las diferencias entre el mesurando y la medición que se manifiestan aleatoriamente en forma de incertidumbre. En esta figura y_{nk} representa la salida general del instrumento de medición, que puede aparecer en forma analógica, digital o como una gráfica. Aquí es importante resaltar que esta salida es la parte cuantificada del proceso y que el valor del n -ésimo mesurando x_n sólo puede obtenerse a partir de diversas observaciones estadísticas (k -ésimas) de y_n , o sea y_{nk} .

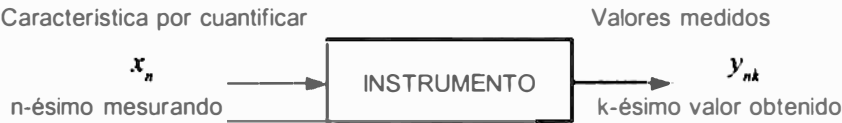


Figura 2.2 *Modelo ideal generalizado de un instrumento.*

Como ya se ha dicho, la salida y_{nk} es la medición k-ésima del n-ésimo mesurando, por lo que es de naturaleza aleatoria; esto responde a las diferentes fuentes de interferencia a que están sujetos un mesurando y un instrumento, como son las fuentes de ruido y las distorsiones inherentes a la tecnología utilizada. Por ejemplo, en el caso de los instrumentos electrónicos, entre otros factores, al ruido térmico, a la influencia de campos eléctricos como el de 60 Hz proveniente de la línea de alimentación, a la imperfección de los circuitos, a las variaciones de los elementos componentes y al envejecimiento propio de éstos. Este concepto de que la salida tiene un carácter aleatorio puede representarse más claramente mediante el diagrama de la figura 2.3.

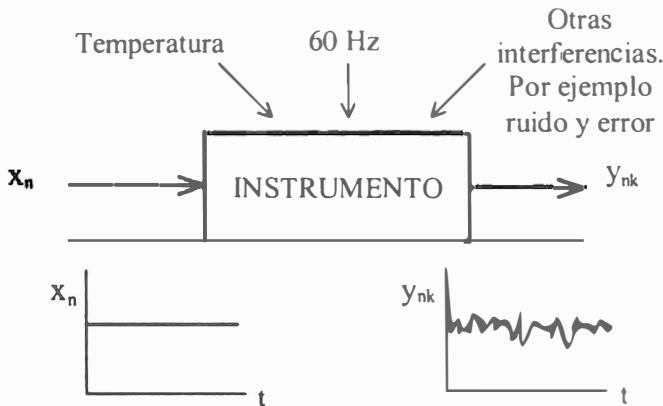
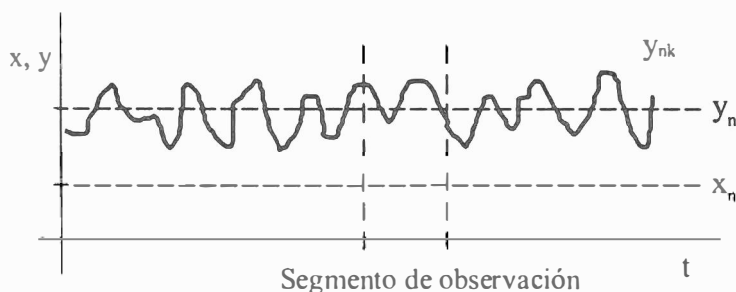


Figura 2.3 *Representación de la naturaleza aleatoria de y_{nk} en el modelo del instrumento.*

Por otra parte, en la figura 2.4 se observa el comportamiento de las mediciones realizadas con un instrumento a lo largo del tiempo, para el caso más sencillo. Este caso se presenta cuando el mesurando x_n es constante o independiente del tiempo y además se le puede definir como un patrón de medida o como un valor conocido. En esta figura, como las mediciones y_{nk} son de naturaleza estadística, el índice k representa el resultado obtenido en la salida (y) para la misma entrada (x_n) en el k -ésimo intento. En consecuencia, las K mediciones obtenidas ($k = 1, 2, \dots, K$) determinan el valor esperado y_n .

El caso que se muestra en las figuras 2.3 y 2.4 es el más sencillo que puede aplicarse a un instrumento ya que el mesurando (en este caso el patrón) tiene un solo valor fijo a lo largo del tiempo. Sin embargo, en el segmento de observación se aprecia que el resultado de la medición adquiere una serie de valores estadísticos diferentes a causa de la discrepancia que existe entre y_{nk} y x_n . Sin embargo, la misma sencillez del concepto permite definir con claridad la naturaleza de un instrumento o sistema de medición.



x_n = patrón y_n = valor esperado de y_{nk} k = k -ésima medición

Figura 2.4 Relación temporal entre la entrada (patrón) y las salidas de un instrumento (mediciones).

2.4.2 Fidelidad de la medición

Es importante destacar que la operación ideal de un sistema de medición se presenta cuando responde únicamente al mesurando de interés, por lo que el instrumento debe ser *ciego o insensible* a las demás propiedades, variables, características o particularidades del fenómeno en cuestión, razón por la cual no debe responder a ellas. Debe aclararse que esta situación no es totalmente real, ya que los transductores normalmente son sensibles a otras propiedades que difieren del mesurando de interés, las cuales siempre están presentes como fuentes de interferencia indeseables que disminuyen la fidelidad de la medición. En ese caso, el resultado que proporciona el instrumento está compuesto también por la “medición” de otros “mesurandos”, conocidos como variables o señales de interferencia. Algunas de las variables que se presentan con mayor frecuencia son las variaciones de la temperatura ambiente, las radiaciones que inciden en las etapas sensibles y la vibración que afecta al instrumento, por lo que también deben incluirse en la representación idealizada de la interferencia ilustrada en la figura 2.3.

2.4.3 Cifras de mérito

Tratar de definir un modelo generalizado que incluya todos los efectos que tienen consecuencias en la operación de un instrumento no es una tarea sencilla, porque depende de muchos factores, entre los que se encuentran la influencia de otros mesurandos, la no linealidad del proceso, las limitaciones de los dispositivos físicos y la naturaleza de la entrada. Así, más que adoptar un modelo generalizado que resultaría innecesariamente complejo, se recurre a la idea de la ingeniería de definir el desempeño de un sistema o de un instrumento mediante el concepto de un conjunto de *cifras de mérito* (“figures of merit”).

Una cifra de mérito es un valor que permite comparar las características de dos o más cosas, instrumentos o sistemas, en forma cuantitativa.

va con propósitos de evaluación comercial o tecnológica, por lo que no debe dar lugar a ambigüedades. Para ejemplificar esta definición, considérese el caso de una persona que desea comprar un automóvil. Lo más probable es que esta persona recurra primero a un conjunto de conceptos (o cifras de mérito) para realizar su elección. Éstos pueden ser conceptos o cifras como el “rendimiento”, el “número de asientos”, el “precio”, la “potencia”, el “espacio”, etc. Por último, utilizará *juicios de valor* subjetivos, en donde puede tomar en cuenta otros conceptos como el atractivo del color, el prestigio de la marca, la facilidad de mantenimiento, la belleza de la línea, etc., con lo cual ponderará su decisión final.

En el caso de los instrumentos de medición, como se trata de una evaluación de tipo técnico con respecto a las propiedades del mesurando, la definición de las cifras de mérito obliga a considerar el comportamiento del mesurando con respecto al tiempo. En la tabla 2.1 se resumen los casos posibles.

TABLA 2.1 CIFRAS DE MÉRITO DE ACUERDO CON LAS CARACTERÍSTICAS DEL MESURANDO

Comportamiento de x_n en el tiempo	Cifras de mérito definidas en cada caso
Constante	Características ESTÁTICAS
Variable en forma periódica o transitoria	Características DINÁMICAS
Variable en forma aleatoria	Características DINÁMICAS

Debido a que el mesurando x_n puede tener cualquiera de los comportamientos que se indican en esta tabla, el desempeño general de un

instrumento se valora cuantitativamente mediante la unión de los dos conjuntos de características estáticas y dinámicas. Expresado en forma de igualdad se tiene que:

El desempeño de un instrumento de medición se representa numéricamente por medio de la unión de sus características estáticas y dinámicas.

2.5 Modelos estructurales de un instrumento

La figura 2.2 muestra un modelo ideal muy general del instrumento, que hace hincapié en su operación general y que representa únicamente su comportamiento de entrada-salida, sin tomar en cuenta el detalle de los procesos internos. Sin embargo, como se verá más adelante, estos procesos pueden tener mucha relevancia en su operación general, ya que en ciertos casos configuran bloques completos que se comportan también como instrumentos o subsistemas con sus propias características. Por otra parte, dependiendo del tipo o de la aplicación del o los medidores involucrados, así como del propio diseño del instrumento, la organización de estos bloques puede diferir considerablemente, por lo que en esta sección se considerarán varios modelos cuya diferencia estriba casi siempre en la arquitectura del diseño del instrumento.

2.5.1 Modelo básico

Desde el punto de vista de su estructura interna y de sus elementos más importantes, un instrumento o sistema de medición puede considerarse en su forma más simple como compuesto por tres partes fundamentales: 1) una etapa transductora o primaria, 2) una etapa o unidad de procesamiento y 3) una etapa de almacenamiento y(o) despliegue, como se muestra en la figura 2.5.

En este modelo se considera que el instrumento de medición está integrado por tres subsistemas representados por cada uno de los tres

bloques, cuyas funciones, son, respectivamente: 1) *detectar el mesurando y transformarlo* para su posterior utilización; 2) *acondicionarlo, procesarlo y cuantificarlo* según se requiera; y 3) *desplegar o almacenar* el resultado del proceso de medición. Los subsistemas encargados de cada una de estas funciones pueden describirse en términos generales como se indica a continuación.



Figura 2.5 Diagrama de bloques del modelo básico de un instrumento de medición.

Etapas transductora o primaria. El primer bloque del modelo tiene como funciones básicas detectar y transformar al mesurando, normalmente para convertirlo a un formato eléctrico. El elemento más importante de esta etapa es el bloque transductor, cuya función consiste en detectar y convertir la energía original del mesurando (acústica, magnética, mecánica, óptica, eléctrica, química, térmica, etc.) en otro tipo de energía más fácil de procesar y de cuantificar, como es el caso de la energía eléctrica. Para efectuar dicha operación, esta etapa dispone de un elemento sensible o *sensor* que se encuentra sujeto directamente a los efectos del mesurando y que además responde a algún principio físico conocido y fácilmente reproducible (p. ej., microfonía, efecto Hall, piroelectricidad, fotoelectricidad, termoelectricidad, etc.), con lo que se logra la transformación del tipo de energía.

La energía eléctrica es la más fácil de utilizar para acondicionar y cuantificar el mesurando, así como para desplegar un resultado. Esto se debe a que en electrónica existen técnicas muy conocidas y muy objetivas para amplificación, filtrado, codificación, conversión analógica a digital, procesamiento analógico, procesamiento digital y de despliegue.

que o de almacenamiento de valores numéricos que facilitan el procedimiento y que, al mismo tiempo, pueden garantizar un resultado de alta calidad.

Adicionalmente, es importante destacar que la salida de esta etapa no siempre adopta la forma de energía eléctrica. Tal es el caso del estetoscopio, que convierte energía mecánica en energía acústica por medio de la campana transductora. Por su parte, el termómetro de mercurio transforma energía térmica en mecánica, en tanto que los transductores paramagnéticos convierten energía térmica en magnética, sólo por nombrar algunos ejemplos.

Etapas de procesamiento. Una vez que se obtiene la transformación a energía eléctrica, se dispone de una variable (p. ej., el voltaje) que debe ser proporcional al mesurando. En caso contrario tal proporcionalidad deberá obtenerse mediante adecuadas correcciones o acondicionamientos. Para ello es necesario amplificar, adecuar y filtrar el voltaje, para evitar que se degrade al mezclarse con ruido u otras señales espurias. Una vez separada la información importante, el mesurando se cuantifica por medios electrónicos ya que se encuentra en forma de una señal de voltaje, para presentar al usuario esta cuantificación en el último bloque en forma numérica. Los procesos que se llevan a cabo en éste dependen de la tecnología empleada. Para este efecto, se dispone de técnicas muy desarrolladas que se basan tanto en procesos analógicos como digitales.

Etapas de almacenamiento y despliegue. Esta etapa corresponde a la salida del instrumento (normalmente numérica, aunque hay instrumentos que proporcionan toda clase de salidas), por lo que la forma de despliegue (analógica o digital) también dependerá de la tecnología empleada. En la actualidad los sistemas digitales han desplazado ampliamente a los analógicos, aunque todavía existen mecanismos de medición analógicos muy convenientes, por ejemplo cuando el desplazamiento de una aguja sobre un cuadrante facilita los procesos de comparación, ajuste y corrección.

2.5.2 Modelos detallados

Aun cuando las tres etapas básicas del modelo de la figura 2.5 permiten describir los aspectos más importantes de un instrumento, cada uno de estos bloques puede descomponerse en varias subetapas o bloques más pequeños, dependiendo de la aplicación y del diseño del propio instrumento. Por ejemplo, algunas variables no son accesibles o no están disponibles en forma directa para que pueda realizarse de inmediato la transformación de la energía detectada en el tipo de energía con la cual se llevará a cabo el procesamiento del mesurando. En otros casos se requiere la medición en paralelo o simultánea de varios mesurandos o la medición de éstos en un orden particular, por medio de muestras tomadas en secuencia y a ciertas frecuencias específicas. Para estos efectos se requiere tanto de repetidas etapas de amplificación o de procesamiento como de la utilización de técnicas de acondicionamiento especiales para adecuar el o los mesurandos a los requerimientos del usuario.

Etapla transductora. Para analizar más detalladamente el caso de esta etapa considérese el proceso de medición de temperatura por medio de un termistor, el cual se representa esquemáticamente en la figura 2.6. Este proceso consiste en aprovechar la dependencia con respecto a la temperatura de algunas características eléctricas de ciertos materiales, que por lo general son compuestos de tipo metálico o semiconductor, para posteriormente acondicionar y transmitir las respectivas variaciones en forma de alguna señal de tipo eléctrico. En este caso la temperatura produce modificaciones físicas concretas en el material sensible (o en el *elemento sensible o sensor*), con lo que se logra producir un cambio en una variable eléctrica, la resistencia (donde se produce la *transformación de energía o efecto de transducción*) y, como consecuencia, en la corriente que circula por el dispositivo. Aquí el procedimiento de medición se fundamenta en que la variación de la corriente con la temperatura está caracterizada por una ecuación perfectamente conocida,

de modo que al detectar y medir la corriente se está midiendo en forma indirecta la temperatura.

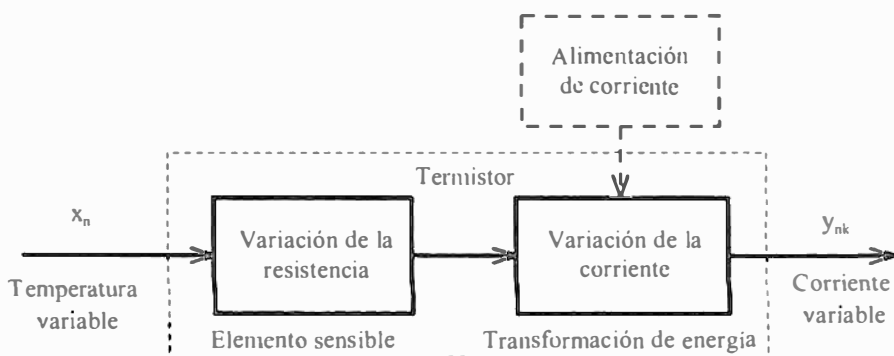


Figura 2.6 Diagrama esquemático de una etapa transductora para la medición de temperatura por medio de un termistor.

En consecuencia, para este ejemplo la primera etapa está integrada por los dos bloques activos básicos de la figura 2.6, identificados como elemento sensible o sensor y transformación de energía, y de un tercer bloque accesorio de alimentación de energía.

Por otra parte, cuando se trata de la medición de variables alejadas del punto de procesamiento, la etapa transductora debe tener una estructura muy distinta ya que para realizar apropiadamente su función requiere por lo menos de un bloque de acondicionamiento y otro de transmisión adicionales. Por ejemplo, en la figura 2.7 se muestra el diagrama esquemático de la etapa transductora o primaria de un sistema que realiza la medición remota de una señal eléctrica cardíaca, en el cual se encuentran los siguientes bloques: 1) un *amplificador* de señales cuya función es dar suficiente amplitud al mesurando; 2) un *filtro* que elimina las señales no deseadas o de interferencia, como el ruido, 3) un *convertidor analógico a digital* que convierte la señal al formato preciso que exige el diseño de las etapas posteriores; 4) un *modulador digital* que adapta eficientemente la señal al medio de transmisión;

5) un *transmisor* que le proporciona suficiente potencia para ser transmitida; y 6) un *enlace o línea de transmisión* que completa la trayectoria hasta el punto de recepción.

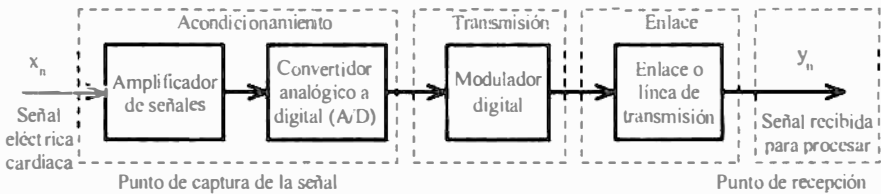


Figura 2.7 Diagrama esquemático de una etapa transductora o primaria para la medición remota de una señal cardíaca.

La estructura de este ejemplo no es única, ya que en general ésta depende de la complejidad del diseño. Sin embargo, independientemente de la arquitectura del instrumento, en todos los casos la función primordial de cada bloque es proteger al mesurando en sus diversas formas para evitar que sea alterado por interferencias externas, y adecuarlo al medio correspondiente para que sea transportado con un mínimo de distorsiones y(o) alteraciones al punto donde se realizará el procesamiento adicional.

En este ejemplo se observa que la etapa transductora puede descomponerse en las subetapas de transducción propiamente y de transmisión de señal, las que a su vez estarán constituidas por el elemento sensible o sensor, la transformación de energía o transductor, el acondicionamiento, la transmisión y el enlace o línea de transmisión.

Etapa de procesamiento. Esta etapa, conocida también como unidad central de proceso, puede descomponerse similarmemente en diversos bloques muy específicos que obedecen a la tecnología utilizada en el diseño del instrumento y al tipo de procesamiento que sea necesario realizar para obtener el resultado. Esto se debe a que en dicha etapa se llevan a cabo múltiples procedimientos o transformaciones a las que se

somete a la señal con el propósito de transformarla o de extraer información de ella, lo que dependerá principalmente de la complejidad del instrumento y de las aplicaciones para las cuales se haya diseñado. En la figura 2.8 se observa el ejemplo de un sistema de adquisición de potenciales evocados, donde se observan los bloques de control de los procesos: filtrado, almacenamiento y cálculo de los promedios.

Un sistema de estimulación y obtención de potenciales evocados opera con el principio de que determinado estímulo sensorial provoca una respuesta eléctrica cerebral específica. Por tal razón, el sistema genera estímulos sensoriales de tipo auditivo, visual o somatosensorial, dependiendo de la vía que se desea estimular, en tanto que las respuestas que se generan se encontrarán a lo largo de la trayectoria respectiva y en las regiones cerebrales vinculadas al oído, la visión o el tacto, según corresponda.

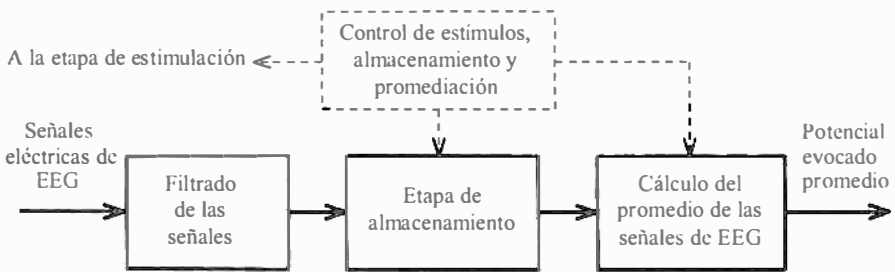


Figura 2.8 Diagrama esquemático del bloque de procesamiento de un sistema de estimulación y obtención de potenciales evocados.

Por consiguiente, el proceso de obtención de las respuestas debidas al estímulo implica la adquisición previa de algunas señales de EEG, ya que las respuestas provocadas (o potenciales evocados) no se encuentran aisladas, sino que aparecen mezcladas con la actividad cerebral espontánea. Esta actividad eléctrica, que se registra por medio de electrodos dispuestos en el cuero cabelludo, es de muy bajo nivel (generalmente de decenas de microvolts) mientras que los potenciales evo-

cados tienen amplitudes todavía menores, por lo que la relación entre ambas magnitudes es muy desfavorable (p. ej., -10 dB).

Esta situación conlleva dos cuestiones importantes. Una de ellas es la necesidad de una fuerte relación de amplificación, para tener amplitudes adecuadas al procesamiento, y la otra es el problema de separar la señal (el potencial evocado) del ruido (la actividad eléctrica cerebral espontánea), lo que se presenta en condiciones muy adversas de relación señal a ruido. Esto último se realiza por medio de la promediación, que consiste en la aplicación de múltiples estímulos, la consecuente captura de los segmentos de EEG correspondientes, los cuales se promedian punto a punto y en sincronía con el estímulo. Este proceso se utiliza porque el promedio de la actividad eléctrica espontánea del cerebro se caracteriza por tender a cero, mientras que las respuestas al estímulo tienden al potencial evocado promedio. El bloque de procesamiento de la figura 2.8 realiza esta función, ya que es en este punto donde los segmentos capturados de EEG son filtrados, almacenados, sincronizados y promediados.

Etapas de almacenamiento y despliegue. En forma similar a los casos anteriores, esta última etapa se descompone del mismo modo en varios bloques, lo cual también depende del instrumento y de la aplicación. Por lo general, los subsistemas que pueden encontrarse e identificarse muy frecuentemente en esta etapa de un instrumento cualquiera son los de acondicionamiento, como la codificación y la conversión D/A, y los de registro y de almacenamiento. Los instrumentos más simples sólo disponen de una aguja, de un indicador visual o de una carátula numérica para presentar el resultado, en tanto que los más complejos pueden almacenar una gran cantidad de datos en una memoria y al mismo tiempo presentarlos en forma de imágenes procesadas en una pantalla o monitor.

Algunos ejemplos muy sencillos de lo anterior son los trazos en papel que entregan, por ejemplo, los sistemas de registro de ECG y de EEG, en los cuales una aguja dibuja sobre un papel graduado en escalas

de amplitud y de tiempo las variaciones que experimenta una señal eléctrica cardíaca o cerebral. Además, como estos estudios pueden requerir que se disponga de las señales presentes en diversos puntos anatómicos, los sistemas utilizan por lo regular varias agujas que trabajan en forma simultánea trazando los registros de cada punto en un canal diferente.

Otros sistemas biomédicos, como los instrumentos de rayos x, de ultrasonido, de resonancia magnética o tomográficos, proporcionan como resultado imágenes en dos y(o) en tres dimensiones en forma de placas fotográficas, de impresiones en papel ya sea a colores o en blanco y negro, o de gráficas en tiempo real en un monitor especialmente diseñado.

De igual forma aunque con mayor complejidad, los instrumentos de ayuda diagnóstica basados en un sistema de cómputo pueden proporcionar mapas o imágenes en color, que con frecuencia incluyen animación, las cuales pueden desplegarse en monitores especialmente diseñados, disponiendo también de opciones para impresión en papel o para almacenamiento en discos magnéticos u ópticos.

2.5.3 Modelo general

En consecuencia, el modelo general de un instrumento de medición tiene una estructura compleja, compuesta de una decena de bloques como se muestra en la figura 2.9. Sin embargo, cada caso en particular puede tener distintos elementos componentes, estar diseñado con diferente arquitectura, orden y organización, puede haber redundancia de bloques cuando se procesan varios mesurandos o el instrumento está diseñado para la realización de algunos procesos más complicados, e incluso algunos de los bloques ya analizados pueden no llegar a utilizarse.

Por lo tanto, para presentar una visión más amplia de la posible composición de la arquitectura general de un instrumento, en la tabla 2.2 se relacionan algunas de las funciones que es factible llevar a cabo en cada una de las etapas y de los bloques.

**TABLA 2.2 ALGUNAS DE LAS FUNCIONES QUE PUEDEN
REALIZARSE EN CADA UNO DE LOS BLOQUES DEL
MODELO GENERAL DE UN INSTRUMENTO DE MEDICIÓN**

ETAPA	BLOQUE	FUNCIÓN
Etapa transductora	Elemento sensible o sensor	Membrana Pilar elástico Resistencia Compuesto o aleación Semiconductor
	Transformación de energía o transductor	Galga Transformador Efecto mecánico Efecto magnético Efectos eléctricos
Etapa de transmisión	Acondicionamiento	Amplificación Filtrado Conversión A/D Codificación
	Transmisión	Modulación Transmisión Linea de comunicación Enlace de comunicación
Etapa de procesamiento	Acondicionamiento	Demodulación Amplificación Codificación Filtrado
	Unidad central de control	Sincronía de los procesos Generación de tiempos Control de los procesos Cálculos aritméticos
	Procesamiento	Obtención de parámetros Transformaciones Promediaciones Cálculos estadísticos
Etapa de almacenamiento y despliegue	Almacenamiento y registro	Discos duros, blandos y ópticos Cinta magnética Cinta de papel Impresora
	Acondicionamiento	Codificación Decodificación Amplificación Conversión D/A
	Despliegue	Indicador visual analógico Indicador visual digital Pantalla o monitor

2.6 MODELOS DE OTROS INSTRUMENTOS Y SISTEMAS DE MEDICIÓN

Los instrumentos y sistemas de medición no se encuentran limitados exclusivamente a la medición; también tienen muchas aplicaciones en el control de sistemas, en las pruebas automáticas, en la observación de sistemas complejos y en la adquisición de datos. Algunas de estas aplicaciones están diseñadas a partir de una arquitectura especial, como las que se describen a continuación.

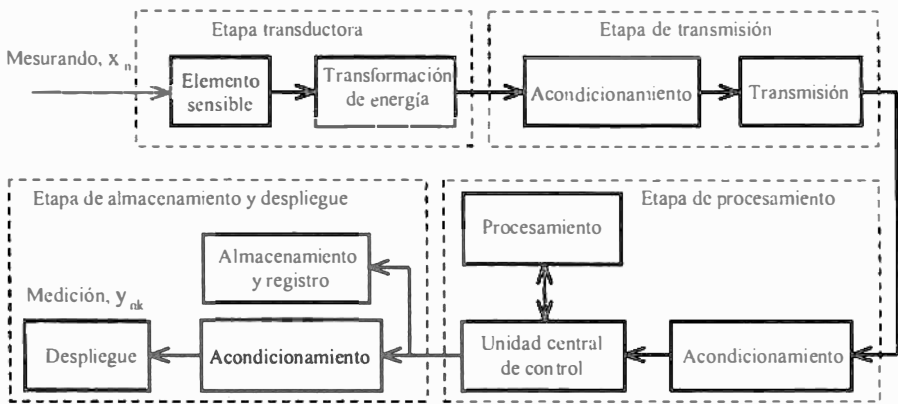


Figura 2.9 Diagrama de bloques del modelo general de un instrumento de medición.

Modelo de controlador. En la industria es común utilizar el resultado de una medición como referencia numérica del “estado actual” de un sistema, equipo, señal o proceso y con esta información proceder a modificarlo o a controlarlo. Esta estrategia también se lleva a cabo con mucha frecuencia en la instrumentación para otras aplicaciones, no necesariamente industriales, donde se miden en forma simultánea diver-

sas variables para obtener un conjunto de valores que describan más acertadamente la condición presente del proceso.

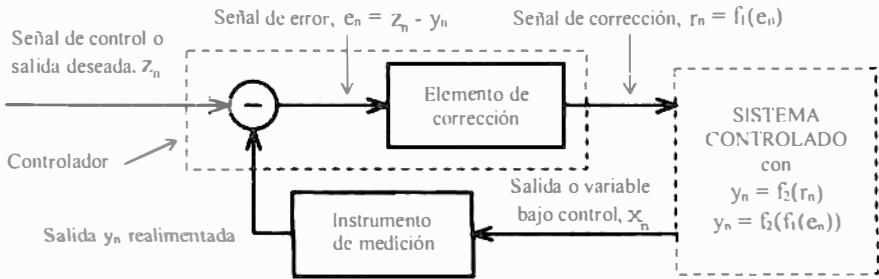


Figura 2.10 Diagrama general del controlador de un sistema.

Para lograr el propósito de modificar o controlar un proceso se miden la o las variables que se desea controlar. En la figura 2.10 la variable se denota como x_n , con cuyo valor medido y_n se obtiene la diferencia entre este resultado y una referencia externa dada o señal de control (la cual se señala por medio de z_n en la Fig. 2.10). Esta diferencia constituye un “error” entre ambos valores (que se expresa como $e_n = z_n - y_n$ en la misma figura), que se utiliza normalmente como guía para corregir o modificar, mediante la realimentación, las condiciones del sistema que tienen influencia en el valor final de la variable x_n o que lo determinan.

A causa de la estructura del controlador, a mayor diferencia entre el valor de la señal de salida realimentada y_n y la de control z_n , se tiene mayor error e_n , por lo que también se genera mayor señal de corrección (denotada como r_n). Esto último se efectúa siguiendo alguna relación apropiada (que corresponde a la función f de la Fig. 2.10), la cual debe facilitar al sistema la rápida recuperación del valor deseado de la variable x_n para que el error disminuya a un nivel previsto. El elemento de corrección se encarga de lograr lo anterior ejecutando una acción que sigue una relación de cualquier tipo, aunque como ejemplo se mencionarán los casos proporcional (P), integral (I) y de-

derivada (D) del error. Esto significa que la señal de corrección $r_n(t)$ responde directamente ya sea en forma proporcional al error $e_n(t)$, de acuerdo con el valor de la integral o siguiendo la derivada de éste, según las ecuaciones que se señalan a continuación.

$$r_n(t) = k e_n(t) = k [z_n(t) - y_n(t)], \text{ control proporcional (P)}$$

$$r_n(t) = k \int_0^t e_n(\tau) d\tau = k \int_0^t (x_n(\tau) - y_n(\tau)) dt, \text{ control integral (I)}$$

$$r_n(t) = k \frac{d}{dt} e_n(t) = k \frac{d}{dt} [x_n(t) - y_n(t)], \text{ control derivado (D)}$$

$$r_n(t) = k_1 e_n(t) + k_2 \int_0^t e_n(t) dt + k_3 \frac{d}{dt} e_n(t), \text{ control PID}$$

En estas ecuaciones k , k_1 , k_2 y k_3 son constantes de proporcionalidad.

Por lo general los controladores utilizan combinaciones de estas relaciones básicas, por lo que se identifican con las letras correspondientes, como en el caso del controlador PID que es una combinación lineal de las tres. Sin embargo, en aplicaciones más complejas se utiliza una función arbitraria entre $r_n(t)$ y $e_n(t)$, lo cual depende de las características propias de cada caso en particular.

En consecuencia, por medio de un controlador la salida o variable bajo control x_n se mantiene en un valor fijo deseado y dentro de un determinado margen de error conocido. Adicionalmente, la salida puede manipularse a voluntad cuando la referencia o señal de control z_n se modifica en una forma especificada de antemano, ya que la variable bajo control tratará de seguirla, también dentro de un margen de error predeterminado. Por tal razón, el instrumento de medición no solamente permite observar o medir a la variable x_n , sino que además es un mecanismo conductor del sistema que obliga al sistema controlado a proporcionar una salida específica.

Modelo de sistema de adquisición de señales. En muchos casos prácticos, no solamente industriales, se precisa medir diversas variables o señales en forma simultánea, por ejemplo cuando se necesita conocer *el estado general* de un proceso, sujeto, sistema, dispositivo o equipo en particular. Esto último se logra adquiriendo y procesando una determinada cantidad de variables representativas del objeto en observación, con lo que a través de estas mediciones puede llegar a tenerse *una visión general* de éste sin necesidad de examinar o manipular una excesiva cantidad de datos. Aunque no se trata únicamente de una medición, la observación del objeto se efectúa a través de la medición de diversas variables, proceso que puede ser tan efectivo como el de medir, dependiendo del uso que se dé a la información recolectada.

A continuación se mencionan algunos ejemplos de los casos anteriores.

1. Sistemas automáticos industriales de prueba, que se utilizan en las líneas de producción para comprobar o certificar aparatos, dispositivos, componentes, equipos y los más diversos productos eléctricos y electrónicos. También estos sistemas se usan regularmente en muchos procedimientos de control de calidad.
2. Sistemas automáticos de análisis, cuya función consiste en procesar muestras de ejemplares, especímenes, combinaciones o mezclas de elementos, a través de la medición de varios parámetros para obtener, a partir de los valores alcanzados, un resultado concreto relacionado por ejemplo con su composición básica, y proporcionarlo al usuario.
3. Sistemas de adquisición y procesamiento de diversas variables eléctricas fisiológicas, los cuales tienen como propósito adquirir y presentar las variaciones de ciertos parámetros electrofisiológicos o entregar resultados específicos relativos a su comportamiento en el tiempo, la frecuencia o el espacio en diversas formas numéricas o gráficas.

4. Sistemas de ayuda diagnóstica y sistemas expertos, muy vinculados a los anteriores pero cuya finalidad consiste en proporcionar una evaluación concreta de la condición clínica de un sujeto para orientar al especialista en su diagnóstico.
5. Robótica, que es la conjunción de una serie de disciplinas relacionadas con la medición, como son la adquisición de señales, imágenes y datos; el control de sistemas; y el procesamiento de señales e imágenes para realizar diversas funciones o tomar ciertas decisiones en un ambiente complejo.

En el caso específico de la ingeniería biomédica un dispositivo muy difundido y ampliamente utilizado es el sistema de adquisición de señales, ya que encuentra aplicaciones en la captura de diversos parámetros fisiológicos que se presentan en forma de señales eléctricas en ECG, EEG y EMG. En cada uno de estos casos se trata de adquirir una serie de señales eléctricas por medio de transductores adecuados o electrodos aplicados convenientemente al sujeto para acondicionarlas al contexto en el cual serán medidas o procesadas, como se muestra en la figura 2.11.

La primera etapa de este proceso, una vez que las K señales $x_k(t)$ han sido capturadas ($k = 1, 2, \dots, K$), consiste en amplificarlas en paralelo de manera independiente y someterlas a un proceso de muestreo y multicanalización para que compartan un mismo canal de comunicaciones, con lo que pueden ser más fácilmente codificadas en formato discreto por medio de un convertidor analógico a digital. En este formato las señales son alimentadas directamente a un sistema de cómputo específico, que puede basarse en microprocesadores (μP), procesadores digitales de señales (DSP) y computadoras personales (PC), donde se someten al procesamiento deseado [1].

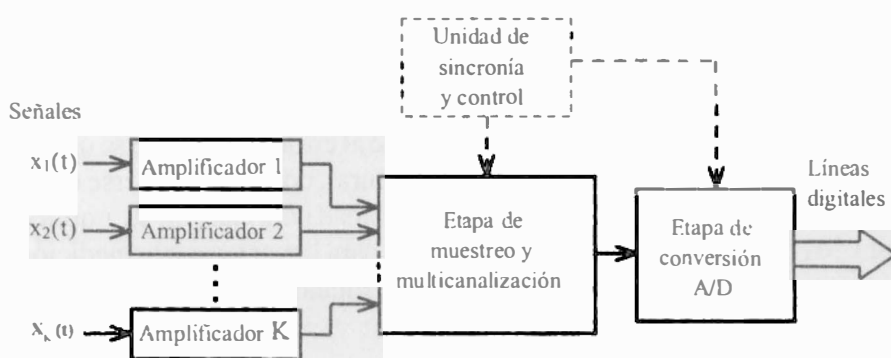


Figura 2.11 *Diagrama general de un sistema de adquisición de señales.*

2.7 CONCLUSIÓN

La gran diversidad de instrumentos y sistemas de medición existentes, así como de técnicas aplicables al diseño de éstos, unidas a la extensa variedad de propósitos y aplicaciones prácticas de la instrumentación, las cuales van desde la simple medición de un mesurando hasta la evaluación automática del estado de un sistema, hace muy difícil establecer modelos generales únicos que se apliquen a todos los casos. Por tal razón, es más conveniente hacer hincapié en los bloques fundamentales o subsistemas que componen un instrumento determinado o un sistema de medición específico, que en una estructura, arquitectura o integración generalizada que pueda aplicarse siempre.

Cada instrumento o sistema puede descomponerse en formas distintas que dependen tanto de la aplicación y de la tecnología como del diseño de éstos. Por ello, si se desea realizar una representación adecuada por medio de un modelo, pueden aplicarse dos enfoques distin-

tos. El primero se fundamenta en la relación temporal entrada-salida de los instrumentos, como se especifica en las figuras 2.2 a 2.4, por lo que es de gran utilidad para la caracterización del instrumento desde el punto de vista de su función y de su comportamiento frente al error. El segundo se orienta a la descripción de su composición estructural, como puede verse en las figuras 2.5 a 2.11, por lo que es de mayor utilidad para analizar su arquitectura, los procesos que realiza internamente para llevar a cabo la medición, las interacciones entre los componentes y el funcionamiento y la composición de cada una de sus partes.

Capítulo 3

Características estáticas de los instrumentos de medición

3.1 Introducción

Los instrumentos de medición se caracterizan más rigurosamente cuando se describen numéricamente por medio de una serie de constantes conocidas como cifras de mérito, las cuales representan sus propiedades técnicas de operación. Éstas pueden ser de tipo estático o dinámico, dependiendo del comportamiento constante o variable del mesurando. En el caso de los instrumentos cuyo uso está orientado exclusivamente a mesurandos estáticos o de muy baja frecuencia de variación, las cifras de mérito correspondientes se conocen como características estáticas.

Por consiguiente, las características estáticas de un instrumento de medición son un conjunto de valores numéricos que permiten describir técnicamente la utilidad de éste en forma rigurosa respecto a todos los mesurandos para los cuales está diseñado que no varían en el tiempo, o cuya variación es muy inferior a la velocidad con que el instrumento realiza la medición. Por tal razón, estas características se encuentran en estrecha relación con el comportamiento de la relación salida-entrada del instrumento, o sea, con el error y con el carácter aleatorio con que se comportan las variables de entrada y de salida, que son el patrón o el mesurando (denotado como x_n), y el resultado (representado como y_{nk}).

3.2 Definición de los errores

El carácter aleatorio de las variables de entrada y de salida se debe a la naturaleza de la interferencia a que está expuesto el proceso de medición, debido a lo cual el error también tiene este mismo carácter [6]. Por ello, para definir los errores implícitos en el proceso de medición se considerará este tipo de comportamiento para la variable y_{nk} , el cual se ejemplifica en la figura 3.1, donde se observa que y_{nk} toma valores aleatorios alrededor de un valor promedio y_n , en tanto que para este caso el valor del patrón x_n también se ha considerado como una constante. Por otra parte, las líneas punteadas verticales indican la selección de un segmento de observación de y_{nk} .

En la figura 3.2 se tiene un acercamiento (*zoom*) a este segmento, el cual se usará para definir los errores de medición que darán lugar a la descripción de las características estáticas. En esta figura el segmento de observación de x_n representa un espacio de tiempo fijo durante el cual se aplica al instrumento el único patrón x_n . En este lapso de tiempo se representan, por medio de una línea variable, algunos de los valores de todo su intervalo dinámico de variación que se hayan obtenido para y_{nk} . En este contexto, y_n representa el *valor esperado* de la población aleatoria del conjunto de las mediciones y_{nk} que se han capturado. Las tres diferencias absolutas $e_{p_{nk}}$, $e_{e_{nk}}$ y e_{c_n} , definidas de manera gráfica en esta figura, representan los *errores de precisión, exactitud y certeza* de estas mediciones, también denominados *imprecisión, inexactitud e incerteza*, respectivamente. Estos errores se utilizarán más adelante como punto de partida para especificar en forma más rigurosa los conceptos de precisión, exactitud y certeza, los cuales se considerarán como las características estáticas del instrumento o como las cifras de mérito que describen el comportamiento de éste frente a mesurandos constantes o que varían lentamente.

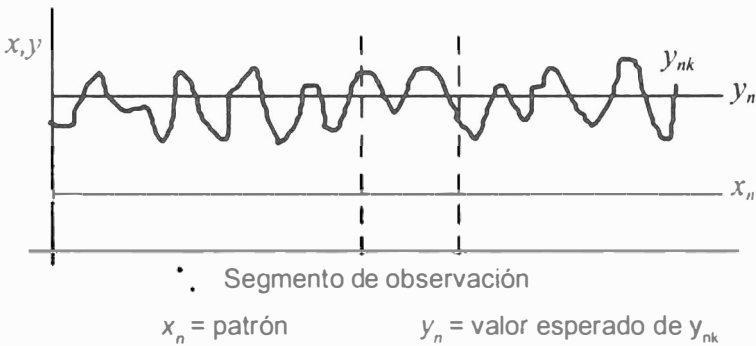


Figura 3.1 Variación temporal de y_{nk} con respecto al patrón constante x_n durante una serie de mediciones.

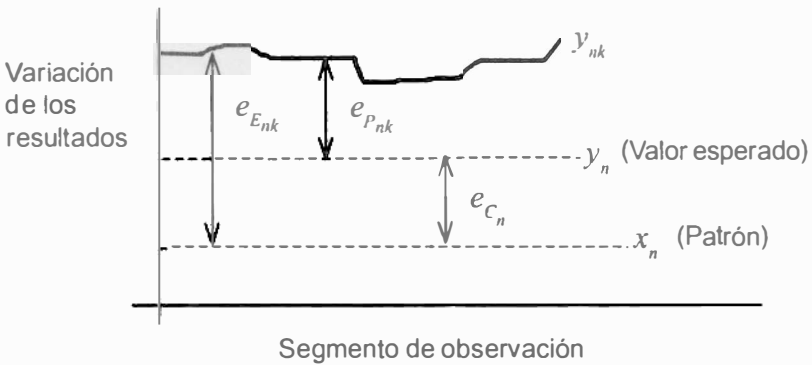


Figura 3.2 Segmento de observación de las variaciones de y_{nk} durante las mediciones.

En su forma algebraica, las definiciones gráficas de la figura 3.2 se expresan en términos absolutos como se indica a continuación.

Precisión. El error de precisión (o imprecisión) de la k -ésima medición realizada al n -ésimo patrón se define como

$$e_{P_{nk}} = y_{nk} - y_n \quad (3.1)$$

En consecuencia, se dice que un instrumento que minimiza es *preciso*.

Exactitud. El *error de exactitud* (o *inexactitud*) de la k -ésima medición efectuada al n -ésimo patrón se define como

$$e_{E_{nk}} = y_{nk} - x_n \quad (3.2)$$

En forma similar, se dice que un instrumento que se comporte minimizando este error, es *exacto*.

Certeza. Por último, el *error de certeza* o *error sistemático* (o *incerteza*) del conjunto de mediciones realizadas al n -ésimo patrón se define como

$$e_{C_n} = y_n - x_n \quad (3.3)$$

Por consiguiente, un instrumento que tiene la propiedad $e_{C_n} = 0$ se dice que es *certero*.

De las relaciones geométricas que existen entre estos errores absolutos se observa que cuando $e_{C_n} = 0$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Error de certeza} &= e_{C_n} = 0 \text{ implica que} \\ \text{error de precisión} &= e_{P_{nk}} = e_{E_{nk}} = \text{error de exactitud.} \end{aligned}$$

Tal condición es equivalente a decir que

$$\mathbf{Precisión = Exactitud}$$

Esta igualdad constituye el estado ideal de un instrumento, al que se llega por medio de un procedimiento específico de ajuste o corrección conocido como *calibración*, que se verá más adelante y con el cual se logra convertir el instrumento en certero. Por otro lado, la definición de los errores anteriores permite formalizar los conceptos básicos del propósito de un instrumento de medición en la forma indicada a continuación.

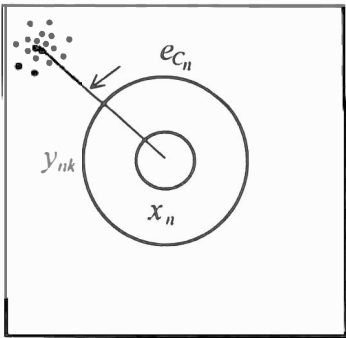
Considérese que un instrumento de medición es como un juego del tiro al blanco con cierto grado de dificultad. La propia naturaleza del instrumento puede observarse como un elemento generador de un obstáculo situado frente al blanco, que sería x_n , dificultad que impide ver claramente dónde se encuentra éste. Si además se considera que se dispara con un arma imperfecta, la evaluación final del tirador consistirá en saber qué tan buena es su puntería, al margen de las condiciones de la prueba. Precisamente para ese propósito se recurre a las cifras de mérito llamadas exactitud, precisión y certeza que se definen en función de los respectivos errores. Estos conceptos se visualizan en forma gráfica en la figura 3.3.

A partir de las ideas antes expuestas, se establece el conjunto de cifras de mérito que refleja con mayor claridad el desempeño estático de un instrumento para cada medición individual, así como para cada conjunto de mediciones que éste realice, utilizando los siguientes errores absolutos y adimensionales (o relativos):

Errores Absolutos	Errores Adimensionales	Nombres	Observaciones Error definido para
$e_{P_{nk}} = y_{nk} - y_n$	$e_{P_{nk}} = e_{P_{nk}} / y_n = y_{nk} / y_n - 1$	Imprecisión o error de precisión	cada medición
$e_{E_{nk}} = y_{nk} - x_n$	$e_{E_{nk}} = e_{E_{nk}} / x_n = y_{nk} / x_n - 1$	Inexactitud o error de exactitud	cada medición
$e_{C_n} = y_n - x_n$	$e_{C_n} = e_{C_n} / x_n = y_n / x_n - 1$	Incerteza o error de certeza	el conjunto de mediciones

A su vez, los errores adimensionales permiten definir las siguientes cifras de mérito

$P_{nk} = 1 - \epsilon_{P_{nk}} $	Es la precisión de la k-ésima medición al n-ésimo patrón.
$E_{nk} = 1 - \epsilon_{E_{nk}} $	Es la exactitud de la k-ésima medición al n-ésimo patrón.
$C_n = 1 - \epsilon_{C_n} $	Es la certeza del conjunto de mediciones del n-ésimo patrón.



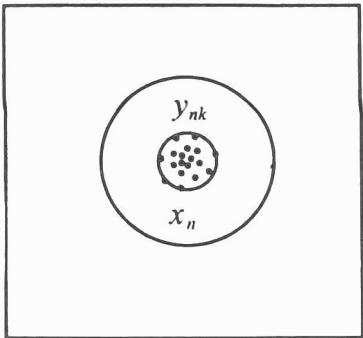
Preciso, pero no exacto

$e_{P_{nk}}$ = valor pequeño

$e_{E_{nk}}$ = valor mediano

$e_{C_n} \neq \text{cero}$

No certero



Preciso y exacto

$e_{P_{nk}}$ = valor pequeño

$e_{E_{nk}}$ = valor mediano

$e_{C_n} \neq \text{cero}$

Certero

Figura 3.3 Modelado de un instrumento por analogía con el tiro al blanco.

Como consecuencia de su definición, los errores adimensionales $\epsilon_{P_{nk}}$, $\epsilon_{E_{nk}}$ y ϵ_{C_n} tienen que considerarse como variables aleatorias capaces de ser evaluadas para determinar las cifras de mérito, de tal forma que mediante un solo número (o un conjunto de valores) se especifique el desempeño del instrumento para la k-ésima medición del n-ésimo patrón o mesurando.

Así, el problema por resolver es determinar en forma estadística las expresiones globales para la *precisión*, la *exactitud* y la *certeza* (P_{nk} , E_{nk} y C_n) conforme evolucione el proceso de medición, y llegar a cuantificar las sucesivas cifras de mérito a un nivel superior (o sea para cada patrón y para el total de las mediciones, según sea el caso) a partir de funciones F_1 , F_2 y F_3 , como las siguientes, que consideren las cifras de mérito ya definidas:

$$P_n = F_1(P_{n1}, P_{n2}, \dots, P_{nk})$$

Para el n-ésimo patrón

$$E_n = F_2(E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{nk})$$

Para el n-ésimo patrón

$$C = F_3(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Para el total de las mediciones

Para cuantificar estas cifras de mérito globales y especificar con mayor rigor las funciones F_i , se recurre al concepto de *valor esperado* de una variable aleatoria. De la teoría de probabilidades se sabe que una forma de caracterizar una variable aleatoria X es mediante sus momentos estadísticos, lo cual significa que para el caso de momentos centrales se tiene

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} X^n f(X) dX \quad (3.4a)$$

Este concepto, que permitirá definir la imprecisión, la inexactitud y la incerteza (σ_p , σ_E y σ_C) para una serie de mediciones en términos estadísticos, cuando se aplica a cada uno de los errores adimensionales se convierte en las siguientes expresiones, en las cuales M representa el número total de mediciones realizadas y N , el número de patrones

$$\sigma_P^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n,k=1}^M (\varepsilon_{P_{nk}})^2 \quad (3.5a)$$

$$\sigma_E^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n,k=1}^M (\varepsilon_{E_{nk}})^2 \quad (3.5b)$$

$$\sigma_C^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\varepsilon_{C_n})^2 \quad (3.5c)$$

Finalmente, las ecuaciones 3.5 permiten obtener las siguientes cifras de mérito globales:

$P = 1 - \sigma_P$	Precisión de un instrumento
$E = 1 - \sigma_E$	Exactitud de un instrumento
$C = 1 - \sigma_C$	Certeza de un instrumento

En forma más explícita, se tiene

$$P = 1 - \sqrt{\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n,k=1}^M \left(\frac{y_{nk}}{y_n} - 1 \right)^2} \quad (3.6a)$$

$$E = 1 - \sqrt{\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n,k=1}^M \left(\frac{y_{nk}}{x_n} - 1 \right)^2} \quad (3.6b)$$

$$C = 1 - \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{y_n}{x_n} - 1 \right)^2} \quad (3.6c)$$

Ejemplo 3.1. Diez mediciones con un solo patrón. Se desea evaluar las características estáticas de un dispositivo que mide el desplazamiento en la escala de un metro. Para este efecto, se utiliza como referencia un patrón de tal calidad que está certificado para garantizar un valor calibrado de un metro más un error de 5×10^{-5} m, es decir, 1.0000 ± 0.00005 m.

Solución. Después de realizar varias mediciones, se obtienen los siguientes resultados:

PRUEBA No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RESULTADO	1.003	1.001	0.997	1.000	0.999	1.006	1.007	1.001	1.003	1.005

Se observa que la calidad del patrón (cuatro cifras significativas) es, por lo menos, de un orden de magnitud superior al medidor de desplazamiento (tres cifras). Esto, sin duda, le da mayor seguridad a la medición de las características estáticas del mismo.

El número de pruebas de medición del ejemplo está limitado a diez, lo cual se debe a que normalmente es necesario tener una aceptable relación costo-beneficio; esto suele suceder con frecuencia en problemas de ingeniería. Lo anterior significa que la estimación numérica que se obtiene del mesurando debe considerarse como una primera aproximación. Para guardar consistencia con la notación ya utilizada, se emplearán los valores de la tabla 3.1 en la cual para el patrón x_1 se ha tomado el valor 1.0000 m, ignorando su incertidumbre de ± 0.00005 m porque es pequeña en comparación con el número de cifras significativas que es capaz de manejar el instrumento.

Con estos valores se obtienen los siguientes resultados para y_n (valor esperado estimado como el promedio de las 10 mediciones y_{nk}), para σ_p (imprecisión), para σ_e (inexactitud) y para σ_c (incerteza), aunque en este último caso el valor es coincidente con el error adimensional de certeza por tratarse de una sola serie de mediciones o corrida única:

$$y_n = 1.0022 \text{ m}, \sigma_p = 0.00318 \text{ m}, \sigma_e = 0.00394 \text{ m y } \varepsilon_{C_n} = \sigma_c = 0.0022 \text{ m}$$

Finalmente, con estos resultados se obtienen las cifras de mérito que se conocen como características estáticas para esta corrida única:

$$\begin{array}{ll}
 P = 1 - 0.00318 = 0.9968 & \text{Precisión del instrumento} \\
 E = 1 - 0.00394 = 0.9961 & \text{Exactitud del instrumento} \\
 C = 1 - 0.00220 = 0.9978 & \text{Certeza del instrumento}
 \end{array}$$

En este punto es importante recordar que el propósito de las cifras de mérito, además de servir para comparar el desempeño entre instrumentos, es facilitar la cuantificación del error de la medición. Así mismo, debe recordarse siempre que en la práctica no existen mediciones perfectas debido a los errores inherentes al proceso.

TABLA 3.1 CÁLCULOS REALIZADOS PARA DETERMINAR LAS CIFRAS DE MÉRITO DEL EJEMPLO 3.1

n	k	y_{nk}	$e_{P_{nk}}$	$\varepsilon_{P_{nk}}$	$e_{E_{nk}}$	$\varepsilon_{E_{nk}}$	e_{C_n}	ε_{C_n}
1	1	1.003	0.0008	0.00080	0.003	0.003	0.0022	0.0022
	2	1.001	-0.0012	0.00120	0.001	0.001		
	3	0.997	-0.0052	0.00519	-0.003	-0.003		
	4	1.000	-0.0022	0.00220	0.000	0.000		
	5	0.999	-0.0032	0.00319	-0.001	-0.001		
	6	1.006	0.0038	0.00379	0.006	0.006		
	7	1.007	0.0048	0.00479	0.007	0.007		
	8	1.001	-0.0012	0.00120	0.001	0.001		
	9	1.003	0.0008	0.00080	0.003	0.003		
	10	1.005	0.0028	0.00279	0.005	0.005		

Ejemplo 3.2. Múltiples mediciones con un solo patrón. Se ha realizado una serie de 48 mediciones y_{nk} a un patrón x_n cuyo valor garantizado es de 1.00000 ± 0.000002 V, por lo que en este caso también se tiene que $n = 1$ y

valor del patrón $x_n = 1.00000$ V (no se considera su incertidumbre)

Los valores obtenidos en las 48 mediciones se muestran secuencialmente en el diagrama temporal de la figura 3.4 y aparecen ordenados de menor a mayor en la segunda columna de la tabla 3.2. Por otra parte, todas las mediciones están comprendidas entre 0.92 y 1.084, por lo que se eligió distribuirlas en 9 segmentos con un valor incremental uniforme de ± 0.01 ; de esta manera se construyen la tabla 3.3 y el histograma de la figura 3.5. Además, de acuerdo con un simple cálculo se obtienen el promedio y la desviación estándar del conjunto de mediciones, los cuales se aprecian en la tabla 3.2.

Valor esperado $y_n = 1.001188$ V (valor promedio del conjunto)

Desviación estándar $\sigma_y = 0.037944$ V (dispersión del conjunto)

TABLA 3.2 VALORES OBTENIDOS EN LA SERIE DE 48 MEDICIONES DEL EJEMPLO 3.2

orden k	y_{nk}	$e_{p_k} = y_n - y_n$	$\epsilon_{p_k} = (y_{nk} - y_n)/y_n$	$\epsilon_{\epsilon_k} = y_{nk} - x_n$	$\epsilon_{\epsilon_k} = (y_{nk} - x_n)/x_n$
1	0.920	-0.0812	-0.08110	-0.080	-0.080
2	0.935	-0.0662	-0.06612	-0.075	-0.075
3	0.940	-0.0612	-0.06113	-0.060	-0.060
4	0.945	-0.0562	-0.05613	-0.055	-0.055
5	0.951	-0.0502	-0.05014	-0.049	-0.049
6	0.953	-0.0482	-0.04814	-0.047	-0.047
7	0.958	-0.0432	-0.04315	-0.042	-0.042
8	0.960	-0.0412	-0.04115	-0.040	-0.040
9	0.962	-0.0392	-0.03915	-0.038	-0.038
10	0.967	-0.0342	-0.03416	-0.033	-0.033
11	0.972	-0.0292	-0.02917	-0.028	-0.028
12	0.973	-0.0282	-0.02817	-0.027	-0.027
13	0.977	-0.0242	-0.02417	-0.023	-0.023
14	0.981	-0.0202	-0.02018	-0.019	-0.019
15	0.982	-0.0192	-0.01918	-0.018	-0.018
16	0.984	-0.0172	-0.01718	-0.016	-0.016
17	0.985	-0.0162	-0.01618	-0.015	-0.015
18	0.989	-0.0122	-0.01219	-0.011	-0.011
19	0.991	-0.0102	-0.01019	-0.009	-0.009
20	0.993	-0.0082	-0.00819	-0.007	-0.007
21	0.994	-0.0072	-0.00719	-0.006	-0.006
22	0.994	-0.0072	-0.00719	-0.006	-0.006

23	0.997	-0.0042	-0.00420	-0.003	-0.003
24	1.000	-0.0012	-0.00120	0.000	0.000
25	1.002	0.0008	0.00080	0.002	0.002
26	1.004	0.0028	0.00280	0.004	0.004
27	1.008	0.0068	0.00679	0.002	0.002
28	1.009	0.0078	0.00779	0.001	0.001
29	1.009	0.0078	0.00779	0.001	0.001
30	1.012	0.0108	0.01079	0.012	0.012
31	1.015	0.0138	0.01378	0.015	0.015
32	1.015	0.0138	0.01378	0.015	0.015
33	1.017	0.0158	0.01578	0.017	0.017
34	1.019	0.0178	0.01778	0.019	0.019
35	1.021	0.0198	0.01978	0.021	0.021
36	1.023	0.0218	0.02177	0.023	0.023
37	1.024	0.0228	0.02277	0.024	0.024
38	1.028	0.0268	0.02677	0.028	0.028
39	1.033	0.0318	0.03176	0.033	0.033
40	1.034	0.0328	0.03276	0.034	0.034
41	1.044	0.0428	0.04275	0.044	0.044
42	1.048	0.0468	0.04674	0.048	0.048
43	1.049	0.0478	0.04774	0.049	0.049
44	1.055	0.0538	0.05374	0.055	0.055
45	1.060	0.0588	0.05873	0.060	0.060
46	1.063	0.0618	0.06173	0.063	0.063
47	1.078	0.0768	0.07671	0.078	0.078
48	1.084	0.0828	0.08270	0.084	0.084

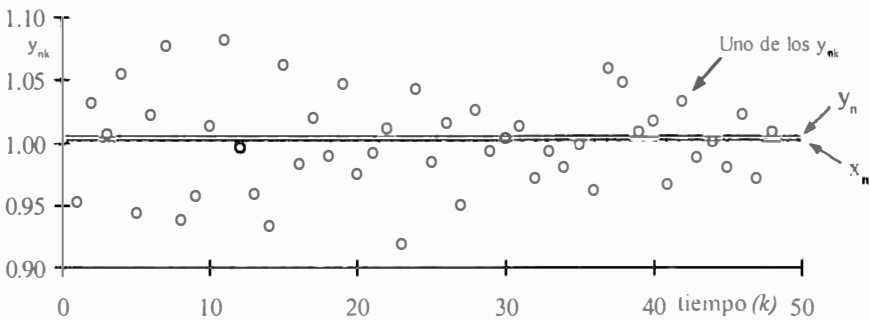


Figura 3.4 Secuencia temporal de la serie de mediciones del ejemplo 3.2 realizadas al patrón x_n .

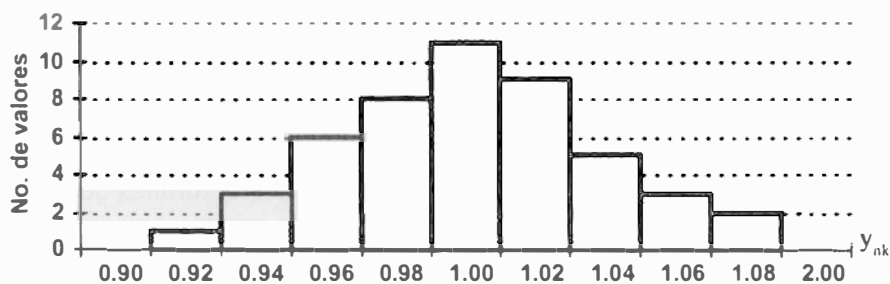
A partir de los datos de la tabla 3.2 que se han dibujado en la figura 3.4 es posible determinar el error de certeza para cada medición en forma absoluta y adimensional, así como la certeza del conjunto de mediciones. Esta última hace las veces de cifra de mérito global del experimento.

Error absoluto de certeza	$e_c = y_n - x_n$	$= 0.00119 \text{ V}$	Error sistemático del conjunto
Error relativo de certeza	$e_c = (y_n - x_n)/x_n$	$= 0.00119$	Error adimensional
Certeza	$C = 1 - e_c $	$= 0.99881$	Cifra de mérito de calibración

Los errores de precisión y exactitud de cada una de las mediciones aparecen en las columnas tercera y quinta de la tabla 3.2, respectivamente, en tanto que el error adimensional de precisión se muestra en la cuarta columna y el de exactitud en la sexta columna de la misma tabla.

TABLA 3.3 VALORES OBTENIDOS DE LAS MEDICIONES DEL EJEMPLO 3.2 AGRUPADOS EN INTERVALOS IGUALES DE ± 0.1 V

Intervalo	Extremos	Número de valores
1	0.920 ± 0.01	1
2	0.940 ± 0.01	3
3	0.960 ± 0.01	6
4	0.980 ± 0.01	8
5	1.000 ± 0.01	11
6	1.020 ± 0.01	9
7	1.040 ± 0.01	5
8	1.060 ± 0.01	3
9	1.080 ± 0.01	2

**Figura 3.5 Histograma de los valores obtenidos en el ejemplo 3.2 en intervalos de ± 0.01 V.**

Tomando los valores de los errores relativos o adimensionales de la tabla 3.2 se calculan las desviaciones estándar para cada uno de ellos, con lo que se tiene que

$$\sigma_{\epsilon_P} = \sigma((y_{nk} - y_n)/y_n) = 0.037547$$

$$\sigma_{\epsilon_E} = \sigma((y_{nk} - x_n)/x_n) = 0.037566$$

Finalmente, las cifras de mérito para evaluar tanto el proceso de medición como el desempeño del propio instrumento son las siguientes:

Precisión	$P = 1 - \sigma_{\epsilon_P}$	$= 1 - \sigma((y_{nk} - y_n)/y_n)$	$= 0.96245$
Exactitud	$E = 1 - \sigma_{\epsilon_E}$	$= 1 - \sigma((y_{nk} - x_n)/x_n)$	$= 0.96243$
Certeza	$C = 1 - \epsilon_C $	$= 1 - (y_n - x_n)/x_n $	$= 0.99881$

Ejemplo 3.3. Mediciones con un conjunto de patrones. Se han realizado 6 series de 8 mediciones cada una a un instrumento cuyo modelo ideal está dado por $y_n = x_n$, para lo cual se han utilizado seis patrones certificados. Los detalles del procedimiento se resumen en la tabla 3.4, donde en la primera columna se muestra el valor del patrón y en la segunda y la tercera los valores de los subíndices n y k , respectivamente; en tanto que las 48 mediciones aparecen en la cuarta columna de la misma tabla. Con estos resultados se han obtenido los valores promedio y_n y las desviaciones estándar σ_{y_n} para cada serie de mediciones, los cuales se muestran en las siguientes dos columnas de la tabla 3.4.

La figura 3.6 es un diagrama de los errores de las mediciones con respecto al modelo $y_n = x_n$ del instrumento para cada uno de los patrones, mientras que los errores específicos de exactitud de cada medición (con respecto al valor de cada patrón) y los de precisión (con respecto al valor promedio de cada serie) se muestran en la séptima y octava columnas, respectivamente. Las últimas dos contienen estos mismos errores en su forma adimensional.

TABLA 3.4 RELACIÓN DE LOS VALORES DE LA MEDICIÓN PARA CADA PATRÓN Y DE LOS RESPECTIVOS ERRORES ABSOLUTOS Y ADIMENSIONALES DEL EJEMPLO 3.3

x_n	n	k	y_{nk}	y_n	σ_{y_n}	$\theta_{E_k} = y_{nk} - x_n$	$\theta_{P_k} = y_{nk} - y_n$	$\theta_{E_k} = (y_{nk} - x_n)/x_n$	$\theta_{P_k} = (y_{nk} - y_n)/y_n$
1.000	1	1	1.009	0.9871	0.03414	0.009	0.02188	0.00900	0.022165
		2	0.951			-0.049	-0.03612	-0.04900	-0.036591
		3	1.015			0.015	0.02788	0.01500	0.028244
		4	0.977			-0.023	-0.01012	-0.02300	-0.010252
		5	1.019			0.019	0.03188	0.01900	0.032296
		6	0.935			-0.065	-0.05212	-0.06500	-0.052800
		7	1.024			0.024	0.03688	0.02400	0.037361
		8	0.967			-0.033	-0.02012	-0.03300	-0.020383
2.000	2	1	1.997	1.9950	0.03848	-0.003	0.00200	-0.00150	0.001003
		2	1.994			-0.006	-0.00100	-0.00300	-0.000501
		3	2.002			0.002	0.00700	0.00100	0.003509
		4	2.060			0.060	0.06500	0.03000	0.032581
		5	1.982			-0.018	-0.01300	-0.00900	-0.006516
		6	1.920			-0.080	-0.07500	-0.04000	-0.037594
		7	1.993			-0.007	-0.00200	-0.00350	-0.001003
		8	2.012			0.012	0.01700	0.00600	0.008521
3.000	3	1	2.985	3.0189	0.03441	-0.015	-0.03390	-0.00500	-0.011229
		2	3.055			0.055	0.03610	0.01833	0.011958
		3	3.015			0.015	-0.00390	0.00500	-0.001292
		4	3.021			0.021	0.00210	0.00700	0.000696
		5	3.017			0.017	-0.00190	0.00567	-0.000629
		6	3.078			0.078	0.05910	0.02600	0.019577
		7	2.972			-0.028	-0.04690	-0.00933	-0.015535
		8	3.008			0.008	-0.01090	0.00267	-0.003611

TABLA 3.4 Continuación

x_n	n	k	y_{nk}	y_n	σ_{y_n}	$e_{E_k} = y_{nk} - x_n$	$e_{P_k} = y_{nk} - y_n$	$e_{E_k} = (y_{nk} - x_n)/x_n$	$e_{P_k} = (y_{nk} - y_n)/y$
4.000	4	1	4.049	4.0023	0.05050	0.049	0.04670	0.01225	0.011668
		2	3.962			-0.038	-0.04030	-0.00950	-0.010069
		3	4.044			0.044	0.04170	0.01100	0.010419
		4	4.063			0.063	0.06070	0.01575	0.015166
		5	3.945			-0.055	-0.05730	-0.01375	-0.014317
		6	3.981			-0.019	-0.02130	-0.00475	-0.005322
		7	4.034			0.034	0.03170	0.00850	0.007920
		8	3.940			-0.060	-0.06230	-0.01500	-0.015566
5.000	5	1	4.991	4.9970	0.03223	-0.009	-0.00600	-0.00180	-0.001201
		2	5.000			0.000	0.00300	0.00000	0.000600
		3	5.028			0.028	0.03100	0.00560	0.006204
		4	4.989			-0.011	-0.00800	-0.00220	-0.001601
		5	4.953			-0.047	-0.04400	-0.00940	-0.008805
		6	5.048			0.048	0.05100	0.00960	0.010206
		7	5.009			0.009	0.01200	0.00180	0.002401
		8	4.958			-0.042	-0.03900	-0.00840	-0.007805
6.000	6	1	5.994	6.0069	0.03952	-0.006	-0.01290	-0.00100	-0.002148
		2	6.084			0.084	0.07710	0.01400	0.012835
		3	5.984			-0.016	-0.02290	-0.00267	-0.003812
		4	5.960			-0.040	-0.04690	-0.00667	-0.007808
		5	6.023			0.023	0.01610	0.00383	0.002680
		6	5.973			-0.027	-0.03390	-0.00450	-0.005643
		7	6.004			0.004	-0.00290	0.00067	-0.000483
		8	6.033			0.033	0.02610	0.00550	0.004345

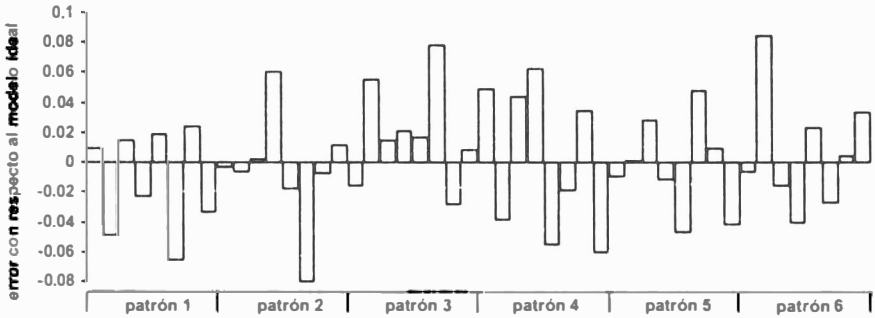


Figura 3.6 Errores de las mediciones del ejemplo 3.3 con respecto al modelo $y_n = x_n$, para cada uno de los patrones.

A partir de estos resultados, se encuentra que las desviaciones estándar de los errores adimensionales de exactitud y precisión son las siguientes:

$$\sigma_{\epsilon_p} = \sigma((y_{nk} - y_n)/y_n) = 0.01701$$

$$\sigma_{\epsilon_E} = \sigma((y_{nk} - x_n)/x_n) = 0.01792$$

En cuanto al error de certeza, éste se calcula como la desviación que presenta la recta ideal dada por $y_n = x_n$ con respecto al resultado que arroja el análisis de regresión lineal de los puntos experimentales, es decir, la recta ajustada $y_n = m x_n + b$. Este último análisis proporciona los parámetros

$$m = 1.0025229$$

$$b = -0.0076267$$

En consecuencia, las cifras de mérito que describen el desempeño estático del instrumento son

Precisión	$P = 1 - \sigma_{\epsilon_p} = 1 - \left \sigma((y_{nk} - y_n)/y_n) \right $	$= 0.97995$
Exactitud	$E = 1 - \sigma_{\epsilon_E} = 1 - \left \sigma((y_{nk} - x_n)/x_n) \right $	$= 0.98299$
Certeza	$C = 1 - (1 - m + b)$	$= 0.98985$

3.3 Calibración de instrumentos de medición

La precisión de un instrumento se encuentra, por su definición, íntimamente relacionada con su diseño y construcción física, por lo que no es una cifra de mérito que el experimentador pueda modificar con facilidad. En cambio, el error sistemático es una cifra de mérito que depende de algunas características físicas que pueden ajustarse para que este error se minimice. Tal proceso de minimización, conocido con el nombre de calibración, hace posible que el error de certeza del instrumento se haga prácticamente cero y que el valor de exactitud sea igual al de precisión.

Definición. La calibración de un instrumento es un proceso de ajuste de las características de operación de éste, mediante el cual se minimiza o elimina el error sistemático y se define numéricamente la imprecisión para información del usuario. La calibración se realiza por comparación o contraste con un conjunto de patrones.

Para calibrar un instrumento de medición, es fundamental contar con patrones certificados con los cuales se explora el intervalo dinámico de variación del mesurando (x_n). Contar con tales patrones certificados puede ser difícil y en ocasiones hasta imposible, lo que normalmente

depende del mesurando. Una forma de resolver este problema, cuando llega a presentarse, es conseguir un instrumento patrón, en el cual se tenga un alto grado de confianza (por lo menos de un orden de magnitud superior al instrumento que se calibra) y que garantice que se mantenga el proceso de calibración realizado por el fabricante. Por lo tanto, para que cualquier instrumento conserve en forma óptima sus características iniciales es necesario calibrarlo periódicamente con instrumentos de un nivel de precisión más elevado, y solicitar su certificación en el Centro Nacional de Metrología (CENAM) o en un laboratorio independiente.

3.3.1 Proceso de calibración

La calibración de un instrumento tiene como propósito determinar los errores sistemáticos para evaluar su desempeño y corregirlo si es necesario, con el fin de informar al usuario de la calidad de las mediciones que puede llevar a cabo. Para ello debe realizarse una exploración en toda la escala de medición del instrumento por medio de patrones debidamente certificados. Considérese que se dispone de un conjunto de N patrones x_n , o sea $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, con los cuales se lleva a cabo el procedimiento de calibración que se realiza en los cinco pasos específicos descritos a continuación.

PASO 1. Exploración del intervalo dinámico de variación del mesurando en intervalos discretos, primero incrementando los valores en intervalos discretos (“adquisición de datos de subida”) y luego reduciéndolos (“adquisición de datos de bajada”). Este método tiene como propósito adquirir mediciones o puntos experimentales en los que las condiciones previas a cada una de las mediciones no influyan de manera uniforme en los resultados que se obtengan. Cuando se realizan mediciones de subida y de bajada, las dos mediciones para cada patrón se obtienen a partir de diferentes estados previos; esto contribuye a la cancelación

de los posibles efectos debido a la secuencia en que se tomaron las mediciones y disminuye el efecto de histéresis.

PASO 2. Establecimiento de un modelo matemático que describa de la mejor manera posible la relación salida-entrada del instrumento. Este procedimiento se lleva a cabo dibujando los puntos experimentales obtenidos en un diagrama patrones contra los resultados y observando su tendencia general, así como la forma en que se dispersan o distribuyen en la gráfica. La tendencia general de los puntos permite suponer un modelo en forma de una línea recta o de una determinada curva, descrita por la ecuación $y = f(x)$, alrededor de la cual los puntos se distribuyen más o menos equitativamente. Esta primera suposición sirve de base para encontrar un modelo más específico que describa con el mayor acierto posible el instrumento.

Puesto que debe tomarse en cuenta que los puntos experimentales contienen error y que se encuentran dispersos en la gráfica, un método generalmente utilizado para calcular los parámetros de la recta o curva que describe mejor la tendencia general del conjunto de puntos experimentales es el que minimiza *la suma de los errores al cuadrado*. Este método se conoce como ajuste de mínimos cuadrados y consiste en minimizar la suma de las $2N$ diferencias al cuadrado entre el valor del modelo para cada patrón $f(x_n)$ y los dos valores obtenidos y_{nk} , ya que hay uno de subida (y_{ns}) y otro de bajada (y_{nb}).

$$S = \sum_{n=1}^N ((y_{ns} - f(x_n))^2 + (y_{nb} - f(x_n))^2) \quad (3.7)$$

Para la mayor parte de los instrumentos, los puntos experimentales presentan una clara tendencia a seguir una línea recta del tipo $y = mx + b$; por ello, el modelo más adecuado es la línea recta, aunque en los casos más complejos puede obtenerse un modelo general (y_m) por me-

dio de una curva apropiada cualquiera o de un polinomio de grado M con coeficientes a_i como el siguiente:

$$y_m = \sum_{i=0}^M a_i x^i$$

En esta ecuación, y_m representa el modelo de ajuste que se utilizaría para aplicar la técnica de los mínimos cuadrados, por lo que la suma S por minimizar es

$$S = \sum_{n=1}^N ((y_{ns} - y_m)^2 + (y_{nb} - y_m)^2)$$

En la figura 3.7 se muestra un ejemplo gráfico de estos conceptos.

PASO 3. Se determina si existe error sistemático por medio de los errores e_0 y e_G , cuando el modelo es una línea recta. Dichos errores se definen a partir de los parámetros del ajuste:

$$e_G = m - 1 \quad \text{error de ganancia}$$

$$e_0 = b \quad \text{error de corrimiento}$$

En caso de que estos errores tengan un valor más alto que el especificado por el fabricante, el comportamiento del instrumento debe corregirse hasta alcanzar $e_G \approx 0$, con lo que se logra minimizar los errores de ganancia y de corrimiento. Después de realizar esta corrección, se observa que el ajuste de mínimos cuadrados se ha utilizado para llegar a una relación salida-entrada $y_n = x_n$, lo cual significa que $m = 1$ y $b = 0$ para el modelo de la línea recta. Cuando el instrumento se comporta en tal forma que requiere el empleo de un modelo de orden superior, deben tomarse en cuenta los parámetros correspondientes de este modelo y ajustar el instrumento para que el error sistemático se minimice o

anule. Por ello, es importante recordar que en el modelo de la línea recta el error sistemático está implícito en la pendiente (m) y en la ordenada al origen (b), y que en los modelos de orden superior se encuentra en los parámetros respectivos.

Obsérvese que al realizar el ajuste de mínimos cuadrados, por cada x_n se tendrán dos valores de y_{nk} , uno de subida y el otro de bajada, lo cual obliga a considerar el doble de puntos estadísticos para los x_n , como se señala expresamente en la ecuación 3.7.

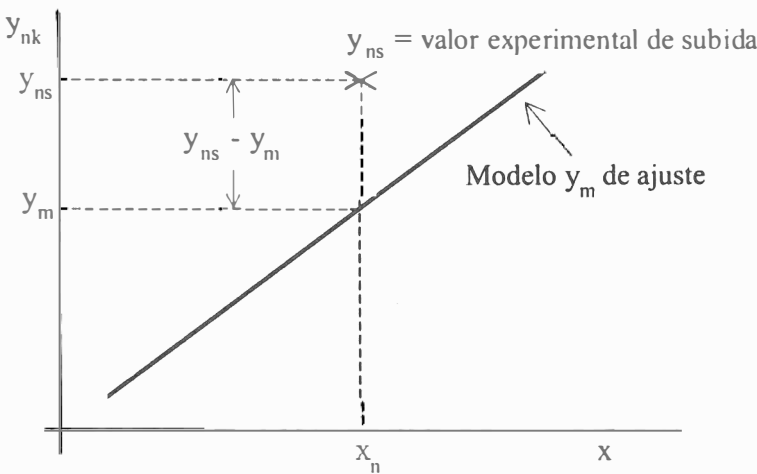


Figura 3.7 Distancia cartesiana para el cálculo de distancias que requiere el método de minimización del error cuadrático.

PASO 4. Evaluación de la imprecisión para que el usuario del instrumento pueda finalmente establecer un error en la medición y llegar a una expresión del tipo

Dado y_n , entonces, $x_n = y_n \pm \text{error}$

En esta forma, cuando el instrumento indique que el resultado es y_n el usuario podrá estimar el valor x_n del mesurando a partir de esta cantidad, aunque dentro de un determinado margen de error. Para entender mejor este último paso, debe tomarse en cuenta que el punto de vista del fabricante del instrumento considera el proceso de calibración como se muestra en la figura 3.8. En esta figura realmente se tiene una estadística sobre y_n debido a los errores implícitos en la medición, lo que se muestra con más detalle en la figura 3.9.

Por otro lado, el único valor con que cuenta el usuario del instrumento es el que puede observar en la carátula de éste, es decir, y_{nk} . Sin embargo, como y_{nk} puede proceder de mesurandos con valores dispersos por la misma causa ya mencionada, éstos se representan en la figura citada en forma similar al caso del fabricante, por medio de una distribución normal producida por la región de incertidumbre que incluye los puntos experimentales y que se indica con dos líneas discontinuas.

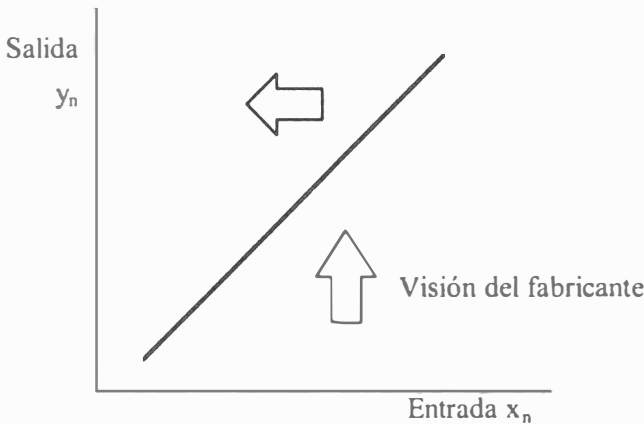


Figura 3.8 *Visión del fabricante en el proceso de calibración de un instrumento.*

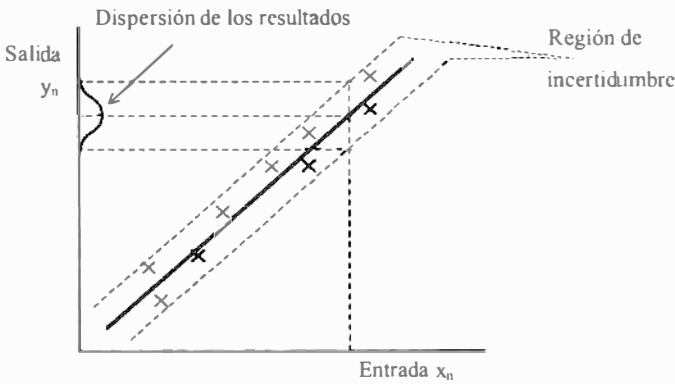


Figura 3.9 Estadística del error para la visión del fabricante, proyectada sobre y_n .

Es a partir de esta única información que se desea inferir x_n con el error respectivo. Por lo tanto, lo anterior obliga a pensar en una visión del usuario diferente de la visión del fabricante, la que se representa en la figura 3.10. Si se observa con cierto cuidado esta figura, en forma análoga al caso anterior puede llegarse a la pregunta: dado un valor observado de y_n , ¿cuál es la varianza de x_n ?

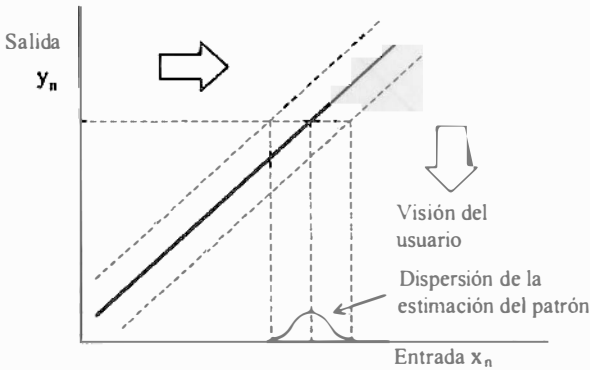


Figura 3.10 Visión del usuario en el proceso de calibración de un instrumento.

Definición. Evaluar la imprecisión del proceso de calibración es equivalente a evaluar σ_p^2 , para lo cual se requiere la función inversa. En un instrumento ideal la función inversa es exactamente igual a la función directa, ya que en este caso debe tenerse idealmente que la salida y_n es igual a la entrada x_n :

$$y_n = x_n$$

Como esta condición no siempre se cumple en todas las partes de un instrumento, especialmente en aquellas donde la relación salida-entrada no sigue por completo la línea recta (p. ej., en los transductores), debe determinarse la función inversa correspondiente. Así, para el caso del modelo dado por $y = mx + b$ se tiene

$$x_n = \frac{y_{nk} - b}{m}$$

con lo que, finalmente,

$$\text{Imprecisión} = \sigma_p = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{y_{nk} - b}{m} - y_n \right)^2}$$

PASO 5. Como el modelo probabilístico que se ha supuesto para el proceso de medición es gaussiano, la imprecisión, que también se ha determinado en esta forma, debe expresarse del mismo modo, es decir $x_n = y_n \pm \sigma_p$. Esto significa que existe una probabilidad del 68% de que x_n esté dentro de $\pm \sigma_p$. De manera similar,

$x_n = y_n \pm 2 \sigma_p$ significa una probabilidad del 95%.

$x_n = y_n \pm 3 \sigma_p$ significa una probabilidad del 99.7%.

La pregunta sobre cuál margen de imprecisión seleccionar se responde de acuerdo con lo estrictas que sean las normas de especificación. Calcular la imprecisión mediante $3\sigma_p$ proporciona un margen más grande de variabilidad pero mayor seguridad al usuario, ya que no se crea una falsa imagen de calidad con un intervalo pequeño que sólo cumple un porcentaje muy inferior. Por ello es conveniente indicar no sólo la imprecisión, sino también el porcentaje de probabilidad que se aplica.

Hasta el paso 5, se ha logrado evaluar el comportamiento del instrumento con respecto al error. La *calibración* consiste en eliminar el *error sistemático*, por lo que para completar este proceso se deberán modificar los ajustes internos del aparato hasta llegar a que $b = 0$ y $m = 1$, o hasta que estas condiciones se cumplan dentro de un margen de error que el instrumento puede tolerar de acuerdo a su diseño.

Ejemplo 3.4. Calibración. Se trata de calibrar un manómetro en el intervalo de 0 a 10 Pa. Las condiciones ambientales son constantes y se definen así: $T = 25^\circ\text{C}$, vibración = 0 y aceleración = 0.

Procedimiento. Se desarrollan los pasos ya definidos.

Paso 1. Los datos estadísticos obtenidos de las mediciones son los siguientes:

Mesurando	y_{nk} hacia arriba	y_{nk} hacia abajo
0.000	-1.12	0.69
1.000	0.21	0.42
2.000	1.18	1.65
3.000	2.09	2.48
4.000	3.33	3.62
5.000	4.50	4.71
6.000	5.26	5.87
7.000	6.59	6.89
8.000	7.73	7.92
9.000	8.68	9.10
10.000	9.80	10.20

Paso 2. Se grafican los datos y se adopta el modelo ideal de la línea recta

$$y_m = m x_n + b$$

Se aplica la técnica de ajuste de mínimos cuadrados y se obtiene, para y_m

$$y_m = 1.0510 x_n - 0.6275$$

Desde el punto de vista del fabricante, se obtiene la dispersión en la salida para los y_{nk} de subida y de bajada, es decir,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_m - y_n)^2 = \frac{1}{22} \sum_{n=1}^{22} \{ (x_n(1.051) - 0.6275) - y_n \}^2 = (0.3631)^2 \text{ Pa}$$

Paso 3. Para identificar el error sistemático y proceder a su calibración, es decir, qué tanto debe corregirse el instrumento, es necesario adoptar la visión del usuario. Obsérvese que a partir del modelo de ajuste de mínimos cuadrados se tiene, para la x_m del modelo,

$$x_m = \frac{y_n + 0.6275}{1.051}$$

lo que permite calcular la imprecisión en la siguiente forma:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_m - x_n)^2 = \frac{1}{22} \sum_{n=1}^{22} \left\{ \frac{y_n + 0.6275}{1.051} - x_n \right\}^2 = (0.3455)^2 \text{ Pa}$$

Esta cifra de mérito sirve para garantizar que las mediciones queden comprendidas en el intervalo dado por

$$x_n = y_{nk} \pm 1.0365 \quad (\text{a } 3\sigma_p)$$

Para comprender mejor el significado de este resultado, considérese que el manómetro tiene una lectura digital o analógica de 4.32 Pa, es decir, $y_{nk} = 4.32 \text{ Pa}$, por lo que

$$x_n = \frac{4.32 + 0.6275}{1.051} = 4.7076 \quad (\text{a } 3\sigma_P)$$

Lo anterior significa que el valor esperado de x_n es 4.7076 Pa y que como se ha elegido un margen de seguridad de $3\sigma_p$, existe una probabilidad del 99% de que x_n se encuentre entre los siguientes límites: $3.034 \leq x_n \leq 5.744$. En cuanto al error sistemático, se observa que

$$e_c = y_n - x_n = 4.32 - 4.708 = -0.388 \text{ Pa}$$

Pasos 4 y 5. El resultado anterior significa, claramente, que se tendría que realizar un ajuste al instrumento para eliminar este error. Sin

embargo, existe también la posibilidad de no modificar las características del instrumento, preservar este error e informar al usuario, simplemente, que para determinar el valor esperado de x_n utilice la siguiente fórmula:

$$x_n = [y_n - e_c] \pm 3\sigma_p$$

Recuérdese que lo importante, desde el punto de vista de la ingeniería, es establecer los límites del error de medición que siempre existe en cualquier instrumento o proceso de medición: y aunque éste no se elimine, por lo menos que se informe al usuario de sus características.

3.4 Sensibilidad

Uno de los conceptos más importantes de los sistemas de medición en general, y de los transductores en particular, es el efecto que una variación de la entrada produce en la salida. Este concepto se conoce como *sensibilidad*, ya que cuantifica estáticamente la relación salida-entrada del instrumento.

Definición. Sensibilidad es la pendiente de la curva de calibración de un sistema de medición. A modo de ejemplo, la naturaleza de la relación salida-entrada se representa en la forma gráfica que se muestra en la figura 3.11. Matemáticamente, la sensibilidad es la derivada de y_n con respecto a x_n , o sea dy/dx .

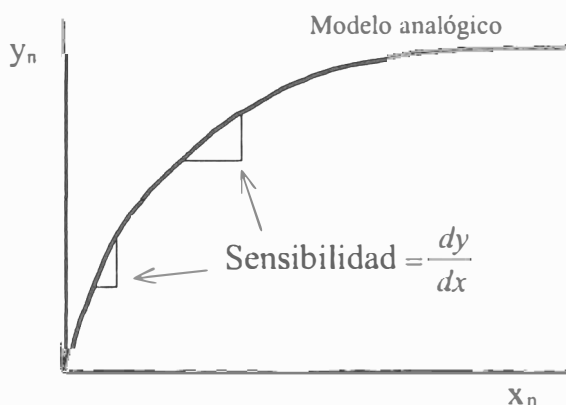


Figura 3.11 Diferente sensibilidad para distintos valores del medurando.

Otro concepto importante de los transductores y de los sistemas de medición que se relaciona con la sensibilidad es la *resolución*, que se define de la siguiente manera.

Definición. En la relación salida-entrada, la resolución es el mínimo cambio en x_n que es posible detectar en y_n .

Debe destacarse que la relación y_n contra x_n constituye una transformación de la naturaleza de la entrada, que se observa en forma más clara en los transductores. Por ejemplo un medurando, que puede ser una presión en mPa, se transforma a la salida del transductor en un voltaje expresado en mV.

La sensibilidad y la resolución son útiles durante la utilización y especialmente durante la fabricación de un instrumento de medición, proceso en el que se identifican los siguientes objetivos.

1. Obtención de una caracterización específica para la relación salida-entrada del sistema, en forma similar a como se hace durante un proceso de calibración.

2. Cálculo de la cifra de mérito conocida como sensibilidad a partir de la curva de calibración, ya sea en forma global, cuando presenta pocas variaciones o por partes a lo largo de todo el intervalo dinámico de variación del mesurando, cuando no es constante.
3. Evaluación de la imprecisión en forma directa, sin prestar atención al error sistemático. Esto debe hacerse cuidando de tener cuantificada la resolución.

Comentario. La caracterización de un transductor, al igual que la calibración de un instrumento, significa disponer de un conjunto de patrones certificados por alguna dependencia oficial o del gobierno. En nuestro país pueden ser la Dirección General de Normas de la Secretaría de Comercio y Fomento Industrial (SECOFI), el CENAM o algún laboratorio independiente. Sin embargo, por el grado de desarrollo tecnológico de nuestra ingeniería es común que en ciertos casos no se cuente con estos patrones certificados. Esta situación obliga a escoger entre dos caminos. Uno de ellos es depender de la certificación de patrones de otros países y el segundo, como una solución pragmática, es utilizar lo mejor posible las especificaciones de los fabricantes de los transductores.

Esto último significa que al comprar un transductor, el ingeniero no tiene otra alternativa que generar un *alto grado de confianza* en las especificaciones proporcionadas por el fabricante y a partir de ellas realizar el diseño del instrumento completo.

Aquí es importante mencionar que, en general, este último es el camino más común que adoptan la mayoría de las empresas dedicadas al diseño, tanto nacionales como extranjeras. Al parecer, el éxito con el que se maneja un transductor depende de la selección del proveedor en términos “OEM” (*Original Equipment Manufacture*, fabricación de equipo original). La idea que sustenta la selección de un fabricante del transductor en términos OEM es que garantiza un alto grado de confianza en lo que se refiere a las especi-

ficaciones de desempeño de los dispositivos, especialmente en cuanto a sus características técnicas y estadísticas.

3.5 Linealidad y precisión

En un sistema de medición, instrumento o transductor, la forma como varía la relación y_n contra x_n obliga a pensar en caracterizarla como un modelo real, ya que no siempre se cumple la relación ideal 1:1. Para este efecto, se definen los conceptos de linealidad y de no linealidad, los cuales pueden relacionarse con la precisión, como se verá más adelante.

Para comprender mejor el concepto de linealidad y su aplicación a los sistemas de medición, es conveniente recurrir al concepto de sistema. La idea es establecer que un proceso de medición, instrumento o transductor puede modelarse por conveniencia, como se observará más adelante en el capítulo sobre características dinámicas, mediante la teoría de sistemas lineales.

La definición fundamental de un instrumento como sistema lineal se obtiene mediante el modelo de la figura 3.12, que se deduce del modelo generalizado del instrumento que se muestra en la figura 2.2.



Figura 3.12 *Un instrumento como sistema.*

Como se indica en la figura 3.12, T es la transformación de la entrada x_n que se observa en la salida y_n . En términos matemáticos esto es

$$y_n = T[x_n], x_n \mapsto y_n \text{ es decir,}$$

Analizando el tipo de transformación, pueden obtenerse las características del sistema. Se dice que un sistema es lineal cuando T cumple con las siguientes propiedades:

- 1) Superposición
- 2) Escalamiento

En forma matemática, esto se expresa de la siguiente forma: si x_n es la suma de una serie de K elementos x_{ni} , o sea,

$$x_n = \sum_{i=1}^K a_i x_{ni}$$

entonces la salida y_n está dada por

$$y_n = T[x_n] = T\left[\sum_{i=1}^K a_i x_{ni}\right] = \sum_{i=1}^K T[a_i x_{ni}] = \sum_{i=1}^K a_i T[x_{ni}]$$

Los dos últimos términos de la ecuación, se obtienen, respectivamente, suponiendo que se cumplen las propiedades de superposición y de escalamiento de los sistemas lineales. Para el caso de dos componentes escalados, se tiene que la entrada es

$$x_n = ax_{n1} + bx_{n2}$$

y la salida es

$$T[ax_{n1} + bx_{n2}] = T[ax_{n1}] + T[bx_{n2}] \quad (\text{superposición}) \quad (3.8)$$

$$T[ax_{n1}] + T[bx_{n2}] = aT[x_{n1}] + bT[x_{n2}] \quad (\text{escalamiento}) \quad (3.9)$$

Ejemplo 3.5. Linealidad. Verificar si el sistema definido por la siguiente relación $y_n = x_{n2}^2$ cumple con la definición de linealidad.

Solución. Aplicando las definiciones para dos entradas diferentes x_1 y x_2 , se tienen las salidas

$$T[x_{n1}] = x_{n1}^2 \quad \text{y} \quad T[x_{n2}] = x_{n2}^2$$

por lo que

$$T[x_{n1} + x_{n2}] = (x_{n1} + x_{n2})^2 \neq x_{n1}^2 + x_{n2}^2 = T[x_{n1}] + T[x_{n2}]$$

Con esta desigualdad se demuestra que el sistema T no obedece las propiedades de superposición y escalamiento, por lo que es no lineal.

Ejemplo 3.6. Superposición y escalamiento. Determinar si el sistema definido por la transformación $y_n = 2x_n + 3$ cumple con las propiedades de superposición y escalamiento.

Solución. Aplicando las definiciones en forma similar al ejemplo anterior, para el caso de dos entradas se tiene que

$$T[x_1] = 2x_1 + 3 \quad \text{y} \quad T[x_2] = 2x_2 + 3$$

entonces,

$$T[x_1 + x_2] = 2(x_1 + x_2) + 3 \neq 2x_1 + 2x_2 + 6 = T[x_1] + T[x_2]$$

Como consecuencia de esta última desigualdad, se tiene que la transformación T no cumple con las propiedades señaladas, por lo que *no es estrictamente lineal*, aunque corresponde a la línea recta $y = mx + b$.

Observación. A pesar del resultado del ejemplo 3.6, debe señalarse que es una costumbre muy extendida en instrumentación que los sistemas que pueden representarse por medio de una línea recta del tipo $y = mx + b$ también *se consideren lineales*, aunque como ya se ha demostrado no cumplen rigurosamente con la definición. Lo anterior se debe a que las escalas que se aplican a la relación $y_n = T[x_n]$ pueden ser totalmente arbitrarias. En este sentido, si se modifica la ecuación original por medio de un simple cambio de variables se tiene la siguiente igualdad: $y' = y - b = mx$, que en la práctica corresponde solamente a un cambio de escala, pero que permite que la nueva variable y' cumpla plenamente con las propiedades de superposición y escalamiento.

Una forma de visualizar más claramente la idea de un sistema lineal es por medio de su representación en forma gráfica, como se ha hecho en la sección 3.3 **Calibración de instrumentos de medición**, lo cual significa expresar T en la forma de y_n contra x_n . De acuerdo con los resultados de los problemas propuestos, las gráficas de T de la forma mostrada en la figura 3.13 no representan sistemas lineales, *con la salvedad de la observación anterior para el caso de la línea recta*. Esto se destaca en el primer diagrama por medio de la débil línea punteada que representa al mismo sistema con un cambio de escala.

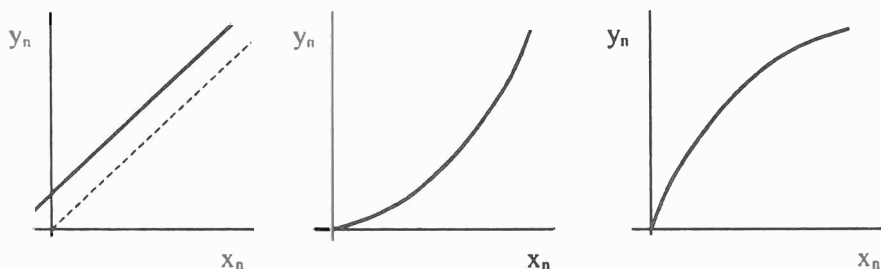


Figura 3.13 Relaciones salida-entrada de sistemas no lineales, donde se incluye el caso de la línea recta que no pasa por el origen.

Por el contrario, las gráficas de la figura 3.14, que se denotan como T_1 , T_2 y T_3 , corresponden plenamente a instrumentos lineales. En consecuencia, los sistemas de medición lineales se representan mediante líneas rectas como las de la figura 3.14. Adicionalmente, los principios de escalamiento y superposición también pueden observarse de manera gráfica en la figura 3.15.

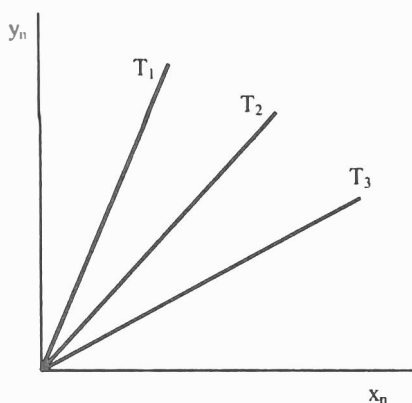


Figura 3.14 Representación de una familia de sistemas lineales.

Puesto que el concepto de linealidad es muy útil para observar el comportamiento de los sistemas de medición en forma de referencia ideal vinculada a la calidad de sus resultados y al error, lo primero que se define y se cuantifica es la diferencia existente en la práctica entre este comportamiento ideal o deseado y el comportamiento real del sistema en observación. Esta situación conduce a definir el concepto de *no-linealidad* de un sistema de medición, que es una forma de indicar cuánto se aleja la operación real de la deseada.

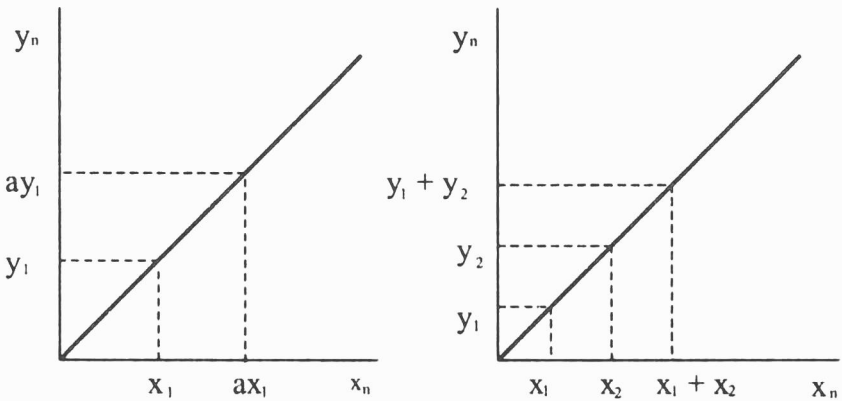


Figura 3.15 Principios de escalamiento y superposición.

En la figura 3.16 se representa gráficamente el caso donde se observa el error producido en el escalamiento cuando es originado por la incertidumbre en la determinación de la relación salida-entrada del instrumento.

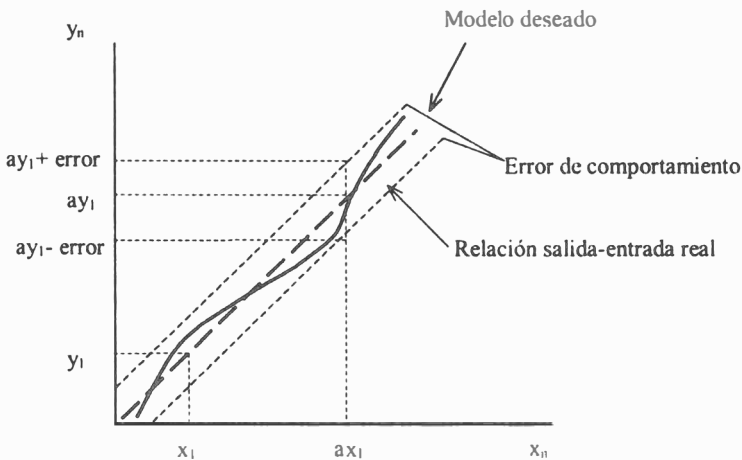


Figura 3.16 Análisis del error en el escalamiento producido por el error de comportamiento de un instrumento o transductor.

La franja de error que se muestra, significa que existe una desviación de la línea recta ideal. Si se parte de los conceptos de la teoría de los sistemas lineales, y esta teoría se complementa con consideraciones relativas a los sistemas de medición, puede pensarse que la no linealidad de un instrumento se debe a las consecuencias estadísticas del proceso de medición. Sin embargo, es de uso común entre los fabricantes de instrumentos y transductores definir el concepto de no linealidad cuando se aplica a éstos por medio de una única franja de error; es decir, se especifica el máximo error del sistema como si fuera determinista, incluyendo todos los agentes causantes posibles, sin considerar la naturaleza estadística del mismo.

Una forma directa y simple de cuantificar la no linealidad es mediante el valor estadístico más alejado del modelo de mínimos cuadrados que identifica la relación salida-entrada de un instrumento, lo que se muestra gráficamente en la figura 3.17.

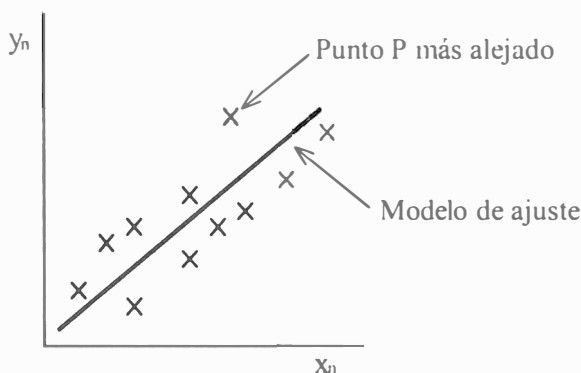


Figura 3.17 Gráfica de no linealidad y modelo de ajuste.

El punto P de la curva se toma para definir la máxima franja de error que incluye la no linealidad, por lo que, desde ese punto de vista, es equivalente a ella. A su vez, esta franja puede expresarse como un por-

centaje fijo de la lectura en ese punto (válido también en el resto del modelo) o como un porcentaje de la escala completa.

Definición. La no linealidad se expresará de la siguiente forma:

No linealidad	$= \pm A\%$ de la lectura, o bien,	(Región I)
	$= \pm B\%$ de la escala total, cualquiera	
	que sea la mayor	(Región II)

Esta definición permite determinar dos regiones claramente separadas en la curva de calibración de un proceso de medición. Emplear $A\%$ de la lectura implica considerar fronteras divergentes a la línea recta del modelo, mientras que aplicar $B\%$ de la escala total significa asignar fronteras paralelas a este modelo, como se muestra en la figura 3.18. La frontera de la no linealidad queda definida en esta figura por medio de las líneas continuas, en tanto que las prolongaciones de éstas se dibujan con líneas discontinuas.

Obsérvese que si se utiliza únicamente la definición de la región I para los valores cercanos a cero del mesurando, esta estrategia significaría comprometer la calidad de los patrones o instrumentos de referencia a una condición de desempeño sin error, puesto que la no linealidad sería cero para $x_n = 0$ (línea de puntos cercana al origen). Sin embargo, aun así existiría la imprecisión de los patrones de referencia que se utilizan para calibrar el sistema de medición. En forma similar, si se emplea solamente la definición de la región II, se tiene una tolerancia constante para toda la escala de medición que podría ser muy grande para el extremo inferior del modelo y muy pequeña para el extremo superior. Por estas razones, el compromiso entre ambas definiciones parece ser la mejor estrategia.

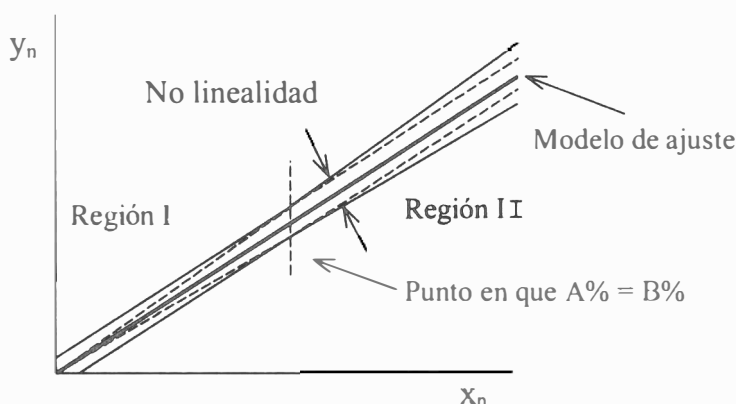


Figura 3.18 Zonas de la relación salida-entrada producidas por la definición de no linealidad.

Finalmente, al observar la forma en que se define la no linealidad, debe notarse que la relación existente con la imprecisión es

$$\text{No linealidad} = 3\sigma_p, \text{ en el mejor de los casos.}$$

Esto quiere decir que al realizar el proceso de calibración y determinar el punto estadístico más alejado del modelo de ajuste, se está suponiendo que no existe otro punto más alejado. En caso de que se hubieren efectuado pocas mediciones durante la calibración y la gráfica dispusiera de pocos puntos, podría asumirse en forma conservadora que

$$\text{No linealidad} = \sigma_p$$

Este criterio depende básicamente de la confianza conferida al fabricante y de la calidad con que se ha caracterizado el instrumento o el transductor.

Una diferencia importante entre no linealidad e imprecisión es su carácter heterogéneo, ya que en un caso se define un error determinista y en el otro se define un error alcatorio. Es importante hacer esta diferenciación porque afecta el tratamiento y el análisis teóricos de la propagación de errores, que se tratan más adelante.

3.6 Histéresis

La histéresis es un fenómeno muy común en instrumentación. Su origen se basa en la segunda ley de la termodinámica, la cual indica en términos generales que “ningún fenómeno es completamente reversible”. En cualquier proceso físico siempre existirán pérdidas de energía por fricción interna o externa que se disipan en forma de calor. Así mismo, en algunos casos el estado actual de un sistema puede depender del o los estados anteriores, lo que puede interpretarse como “memoria del sistema”. En tales casos se tiene que los valores medidos en ciertas circunstancias pueden ser diferentes si estas circunstancias se modifican.

Un ejemplo concreto de histéresis es la diferencia que se produce en el desplazamiento durante la compresión y posterior expansión de un resorte, como se muestra en la figura 3.19. En ésta se observa que el desplazamiento final no coincide exactamente con el punto original, ya que al final del proceso el resorte no llega a recuperar exactamente la longitud inicial.

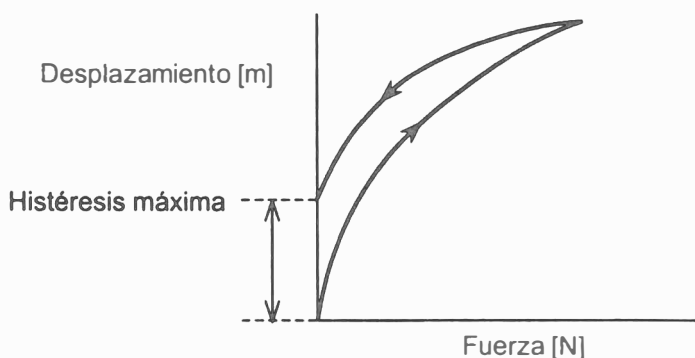


Figura 3.19 *Efecto de histéresis producido por la deformación de un resorte.*

El efecto de la histéresis puede hacerse más pronunciado cuando interviene el factor tiempo en la transformación de la energía; es decir, dicho efecto depende de la rapidez con la cual ésta es transformada, porque en tal caso las pérdidas pueden aumentar.

La histéresis se define, dentro del intervalo especificado de variabilidad, como la diferencia máxima que existe entre las mediciones realizadas a un valor cualquiera del mesurando cuando se llega a ese valor, primero aumentando el mesurando (desde “abajo” o desde valores inferiores) y después reduciéndolo (desde “arriba” o desde valores superiores). La expresión numérica de la histéresis se especifica en términos de estos valores medidos y generalmente se plantea como un porcentaje del intervalo de medición. Finalmente debe recordarse que en la sección **3.3 Calibración de instrumentos de medición**, cuando se realizan mediciones “hacia arriba” y posteriormente “hacia abajo”, este procedimiento se efectúa de esa manera con el propósito de destacar el efecto de histéresis y para que los puntos experimentales reflejen adecuadamente este fenómeno en el procesamiento de los datos del proceso de calibración de un instrumento.

Capítulo 4

Características dinámicas para mesurandos deterministas

4.1 El proceso de medición como sistema

En la definición de las características estáticas del capítulo se utilizó el concepto de mesurandos estáticos en el tiempo, es decir, representados por funciones constantes. Para definir las características dinámicas de un sistema de medición, se tiene que considerar el mesurando como función del tiempo y la utilización de conceptos relacionados con la teoría de sistemas lineales, con el propósito de modelar y predecir el comportamiento de los instrumentos.

Si se requiere un análisis completo y estricto, deben considerarse tanto las características estáticas como las dinámicas. Esto normalmente se efectúa por superposición.

En forma de modelo, un sistema de medición se puede visualizar gráficamente como se muestra en la figura 4.1.

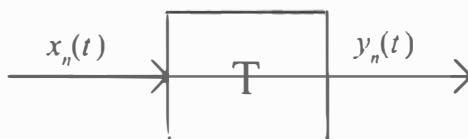


Figura 4.1 *Modelo de un sistema de medición.*

En la figura 4.1, $y_n(t) = T[x_n(t)]$ y T es la transformación con las siguientes propiedades:

1. Lineal
2. Invariante en el tiempo

La segunda propiedad significa que si $h(t)$ es la respuesta impulso, entonces $h(t) = h(t - t)$. Lo anterior nos permite utilizar una herramienta fundamental en el análisis de sistemas lineales que es la integral de convolución (A. V. Oppenheim y A. S. Willsky. 1997. *Signals and Systems*. 2ª. ed. Prentice Hall [16]) esto es:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (4.1.)$$

Una vez establecida la relación entrada-salida mediante el teorema de convolución, nos podemos preguntar por las condiciones que un sistema lineal tiene que reunir para medir en forma fiel un mesurando.

4.2 Distorsión

Para este propósito, definimos el concepto de **distorsión** como la característica global de un sistema de medición que lo aleja de un sistema fiel para medir un mesurando, donde podemos identificar dos tipos de distorsión:

- a. Distorsión por amplitud
- b. Distorsión por fase

La pregunta que surge es la siguiente: ¿Cuál es la relación entrada-salida que asegura a un sistema de medición ausencia de distorsión de alguno de esos tipos?

4.2.1 Distorsión por amplitud

En forma intuitiva, la distorsión por amplitud se muestra en la figura 4.2.

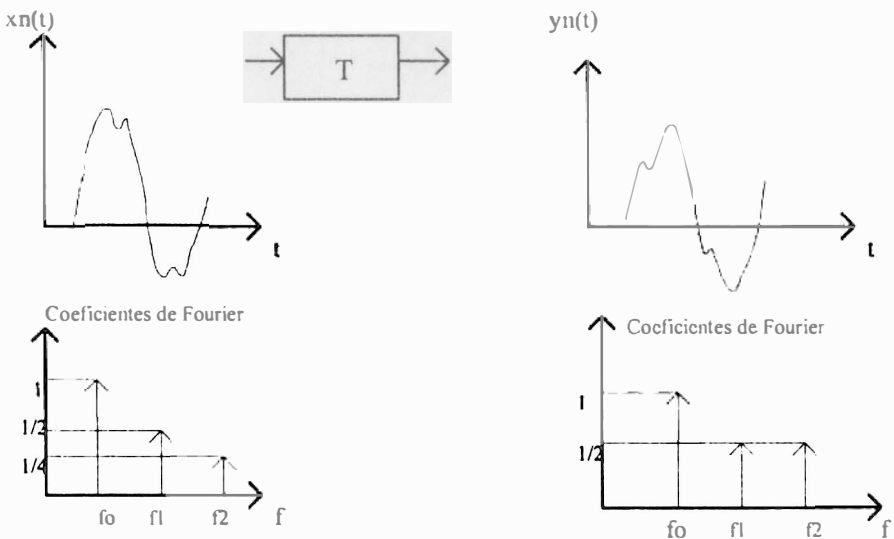


Figura 4.2 *Distorsión por amplitud.*

En forma analítica, el sistema de medición se puede explorar para obtener la transformación T mediante una excitación de tipo senoidal como

$$x_n(t) = Ae^{j\omega t}$$

Aplicando el teorema de convolución, se tiene

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau = A e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = x_n(t) H(j\omega) \quad (4.2)$$

En esta expresión observamos que la salida es igual a la excitación modificada por $H(j\omega)$.

También observamos que $H(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ es un complejo capaz de ser representado en forma cartesiana o en forma polar. En forma polar, se tiene

$$H(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (4.3)$$

donde

$$M(\omega) = \sqrt{\text{Im}(\omega)^2 + \text{Re}(\omega)^2} \quad (4.4)$$

y

$$\phi(\omega) = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \quad (4.5)$$

Así,

$$y_n(t) = x_n(t) [M(\omega) e^{j\phi(\omega)}] \quad (4.6)$$

En esta última expresión observamos que $x_n(t)$ es modificada por $M(\omega)$ en cuanto a la amplitud y $\phi(\omega)$ en cuanto a la fase. Una forma que permite observar más claramente los efectos sobre $x_n(t)$ es expresarla en el dominio de la frecuencia mediante una expansión en series de Fourier, si consideramos el caso más sencillo de $x_n(t)$ que sea un mesurando periódico.

Así, sea $x_n(t) = x_n(t + T)$ donde T representa un periodo; entonces,

$$x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t} \quad (4.7)$$

donde C_n son los coeficientes de Fourier y

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_n t} d\omega \quad (4.8)$$

Finalmente,

$$y_n(t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{j\omega_n t} \right] [M(\omega) e^{j\phi(\omega)}] \quad (4.9)$$

y podemos interpretar que $y_n(t)$ será también una sumatoria de los coeficientes de Fourier, modificados en amplitud por $M(\omega)$. Esta observación nos hace concluir que un sistema de medición que no tenga distorsión por amplitud necesariamente debe cumplir que $M(\omega) = K$, lo cual se muestra gráficamente en la figura 4.3.

$$M(\omega) = |H(j\omega)|$$

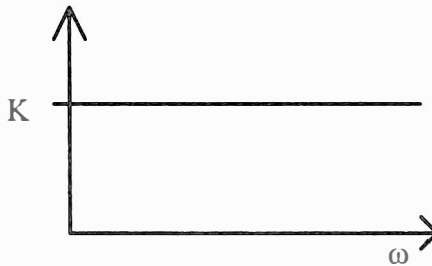


Figura 4.3 Sistema de medición sin distorsión por amplitud.

En la figura 4.3, K puede ser mayor que 1 como en el caso de un amplificador, o menor que 1 como en el caso de un atenuador.

En forma análoga, nos podemos preguntar cómo debe ser $\phi(\omega)$ para que un sistema de medición ideal no produzca distorsión en fase.

4.2.2 Distorsión por fase

Un camino fácil es considerar un sistema idealizado que se comporte generando un retardo constante para cualquier frecuencia y así evitar la distorsión por fase. Esto se observa en forma esquemática en la figura 4.4.

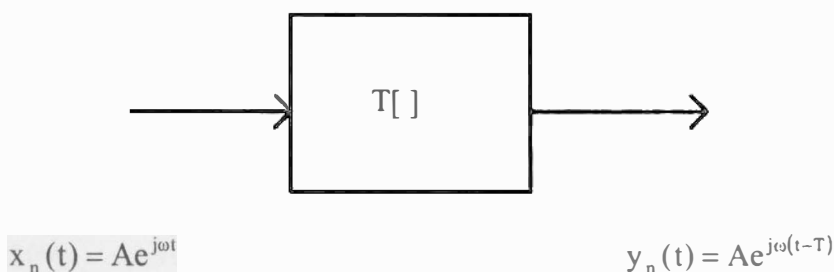


Figura 4.4 Línea de retardo.

En la figura 4.4, T representa el tiempo de retardo entre la entrada y salida, que da lugar al concepto de fase lineal. Utilizando la integral de convolución, sabemos que

$$Ae^{j\omega(t-T)} = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{j\omega(t-\tau)} h(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

Nuevamente, $h(t)$ representa la respuesta impulso del sistema de medición. Así,

$$Ae^{j\omega(t-T)} = Ae^{j\omega t} \int h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = Ae^{j\omega t} H(j\omega) \therefore H(j\omega) = e^{-j\omega T} \quad (4.11)$$

En la figura 4.5 se muestra gráficamente en forma polar,

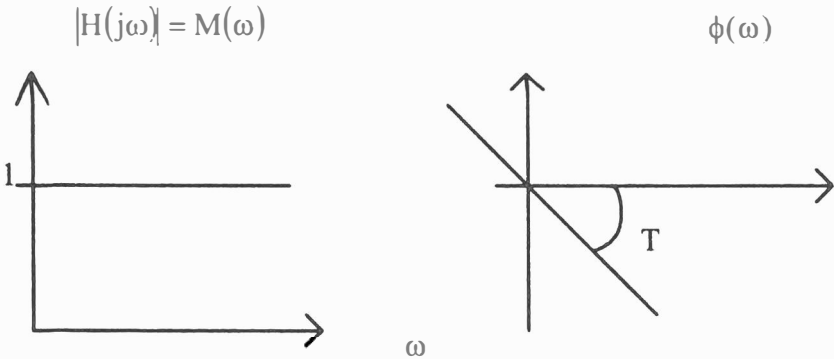


Figura 4.5 Sistema de medición con fase lineal.

Es decir, un sistema que logra tener un desfaseamiento lineal es un sistema que sólo asegura retrasar un tiempo constante cualquier entrada sin importar su frecuencia. Finalmente, podemos decir que un sistema libre de distorsión por fase significa que $\phi(\omega) = -\omega T$.

En sistemas de medición analógicos es muy difícil o casi imposible obtener un comportamiento que garantice un desfaseamiento cero o constante. Empleando tecnología digital, es posible obtener un comportamiento muy cercano a un desfaseamiento constante.

Con estas ideas en mente comenzaremos la clasificación de los sistemas de medición, no sin antes mencionar que $M(\omega)$ es la misma para excitaciones transitorias y aleatorias.

4.3 Modelo general de un sistema de medición

Aquí consideraremos la pregunta: ¿Cómo describir el comportamiento dinámico de un sistema cualquiera, y en particular de un sistema de medición, en el que se tienen una variable de entrada (excitación) y una variable de salida (respuesta)?

La herramienta matemática natural para lograr este objetivo son las ecuaciones diferenciales. Afortunadamente, la mayoría de los instrumentos de medición pueden describirse por medio de ecuaciones diferenciales lineales, ordinarias, con coeficientes constantes.

La entrada $x(t)$ está relacionada con la salida $y(t)$ mediante la siguiente ecuación:

$$a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (4.12)$$

donde las constantes

$$a_i (i = 0, 1 \dots l)$$

$$b_j (j = 0, 1 \dots m)$$

dependen de los parámetros mecánicos, eléctricos, térmicos, etc., del sistema de medición.

Definiendo el operador $D \equiv \frac{d}{dt}$, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$(a_l D^l + \dots + a_1 D + a_0) y(t) = (b_m D^m + \dots + b_1 D + b_0) x(t) \quad (4.13)$$

Conociendo el concepto de transformada de Laplace, se puede com

prender que sustituyendo el operador D por la variable s se llega a la ecuación que relaciona $X(s)$ con $Y(s)$.

La ecuación es lineal puesto que los coeficientes a_i y b_j no son funciones del tiempo o de la variable de entrada $x(t)$. La ecuación es ordinaria, ya que sólo hay una variable independiente $y(t)$.

La mayoría de los instrumentos de medición pueden representarse por medio de una ecuación diferencial de orden cero, primero o segundo, por lo que $l = 0, 1, 2$; y dado que las derivadas de la función de entrada $x(t)$ generalmente no existen, tendremos que $m = 0$.

La entrada $x(t)$ puede clasificarse en uno de los siguientes tipos:

- a) **Transitoria.** La señal transitoria más empleada en instrumentación es la función escalón.
- b) **Periódica.** La señal periódica más utilizada es la función senoidal, dado que cualquier señal periódica puede representarse con una expansión en series de Fourier, empleando combinaciones de funciones senoidales.
- c) **Aleatoria.** Por último, el ruido blanco (con contenido espectral de potencia uniforme) es la señal más utilizada en instrumentación.

Las soluciones particulares a las ecuaciones diferenciales dependen de la clasificación de las entradas, las cuales se explican en esta sección.

4.4 Funciones de transferencia

La función de transferencia expresa matemáticamente la relación entre la señal de entrada y la señal de salida de un instrumento de medición. Si la función de transferencia es conocida, es posible predecir la salida para cualquier tipo de entrada. La representación operacional de la función de transferencia en su forma general es

$$\frac{y(D)}{x(D)} = \frac{b_m D^m + \dots + b_1 D + b_0}{a_1 D^1 + \dots + a_1 D + a_0} \quad (4.14)$$

Esta representación es muy útil, en particular cuando se aplican entradas transitorias. En sistemas lineales la respuesta a una entrada transitoria ocurrirá sólo una vez y no se repetirá.

La función de transferencia puede también representarse para el caso de excitación senoidal como

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_1 (j\omega)^1 + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (4.15)$$

La señal de entrada se expresa generalmente como

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (4.16)$$

La señal de salida $y(t)$ es una senoide con la misma frecuencia, pero su amplitud y su fase dependen de ω , o sea

$$y(t) = B(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) \quad (4.17)$$

La función de transferencia es, por lo tanto, una función compleja con una magnitud y un ángulo de fase dependientes de ω . La magnitud es la relación entre las magnitudes de salida y de entrada, y el ángulo de fase es igual a la fase de salida menos la fase de entrada. Para la mayoría de los instrumentos, este ángulo es negativo.

4.5 Instrumento de orden cero

Conviene analizar por separado algunos tipos de sistemas pues su ocurrencia es muy frecuente, además de que permiten analizar sistemas más complejos en sus mismos términos.

El sistema de medición de orden cero es el caso más simple e ideal. En este caso tenemos

$$a_0 y_n(t) = b_0 x_n(t), \text{ por lo cual}$$

$$y_n(t) = \frac{b_0}{a_0} x_n(t) = K \cdot x_n(t) \quad (4.18)$$

$$\text{donde } K = \frac{b_0}{a_0} = \text{sensibilidad estática.} \quad (4.19)$$

Como ésta es una relación algebraica, es claro que no importa cómo pueda variar $x_n(t)$, y la salida sigue perfectamente a la entrada sin distorsión alguna desde el punto de vista de las características dinámicas, es decir, sin retraso o distorsión en amplitud.

Ejemplo 4.1 Potenciómetro lineal para medir desplazamientos

Se emplea un potenciómetro como se muestra en la figura 4.6.

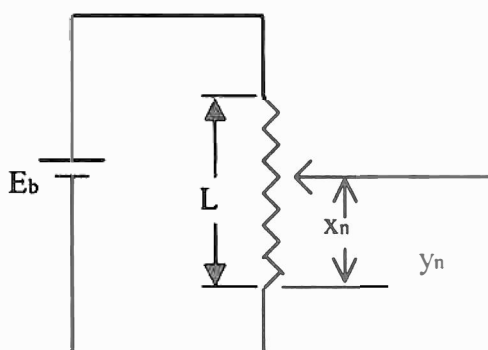


Figura 4.6 *Potenciómetro lineal.*

En la figura 4.7 se muestra la relación entrada-salida del transductor de la figura 4.6.

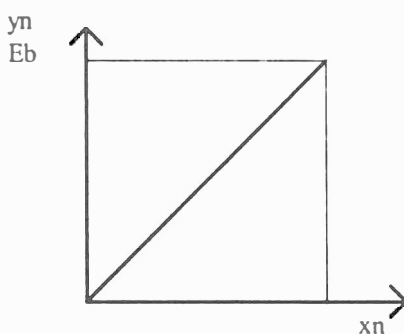


Figura 4.7 *Relación entrada-salida de un potenciómetro lineal.*

Este caso se presenta si y sólo si L está distribuida linealmente en la resistencia.

$$y_n = \frac{E_b}{L} x_n(t) = K \cdot x_n(t)$$

Entonces

$$K = \frac{E_b}{L} = \text{sensibilidad [volt/cm]}$$

(K es la característica que define este instrumento). En forma dinámica, idealmente sucederá lo que se muestra en la figura 4.8.

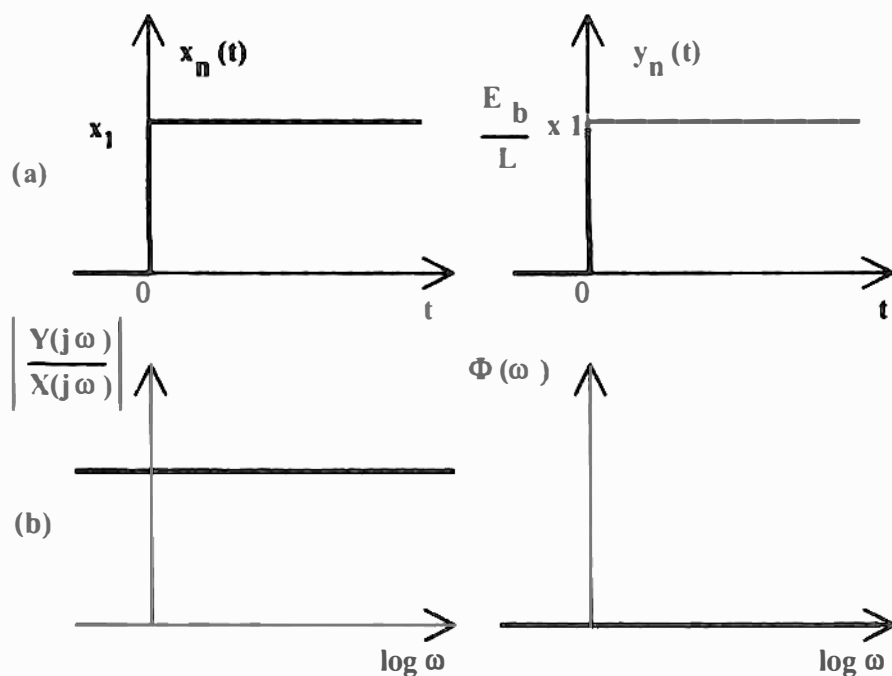


Figura 4.8 Comportamiento dinámico de un sistema de orden cero: a) respuesta a escalón y b) función de transferencia obtenida con excitación senoidal.

En su implantación real, este ejemplo de instrumento de orden cero podría tener un comportamiento diferente del ideal [14]. Las razones de ello son las siguientes:

- a) Pequeñas inductancias y capacitancias asociadas a la resistencia del alambre.
- b) Fricción mecánica del cursor sobre el alambre resistivo.
- c) Distribución de la resistencia en forma no lineal con respecto al desplazamiento del cursor.

4.6 Instrumento de primer orden

Si el instrumento contiene un elemento de almacenamiento de energía, entonces en la ecuación diferencial se requerirá la derivada de primer orden de $y_n(t)$. El modelo es

$$a_1 \frac{dy_n}{dt} + a_0 y_n = b_0 x_n$$

Arreglando términos para obtener sólo dos parámetros, se tiene

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dy_n}{dt} + \frac{a_0}{a_0} y_n = \frac{b_0}{a_0} x_n$$

$$\tau \frac{dy_n}{dt} + y_n = K \cdot x_n \quad (4.20)$$

$\tau = \frac{a_1}{a_0}$ es la constante de tiempo del sistema.

$$\tau \cdot Y_n(s)s + Y_n(s) = K \cdot X_n(s)$$

$$Y_n(s)[\tau s + 1] = K \cdot X_n(s)$$

La función de transferencia es

$$\frac{Y_n(s)}{X_n(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (4.21)$$

4.6.1 Respuesta a escalón de sistemas de primer orden. Constante de tiempo

Para caracterizar un instrumento de medición o un sistema en general, es recomendable utilizar una función de excitación escalón. En este caso se supone que para $t < 0$, el instrumento está en equilibrio y en $t = 0^+$ se presenta un cambio brusco. Matemáticamente, esta función de excitación se puede expresar como

$$x_n(t) = \mu(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Entonces $\mu(s) = \frac{1}{s}$ y, por lo tanto,

$$Y_n(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{K}{\tau s + 1} \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{\frac{1}{\tau} K}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}},$$

donde

$$A = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \Big|_{s=0} = K \quad \text{y} \quad B = \frac{K \frac{1}{\tau}}{s} \Big|_{s=-\frac{1}{\tau}} = -K$$

de tal forma que

$$Y_n(s) = \frac{K}{s} + \left(\frac{-K}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (4.22)$$

Regresando al dominio del tiempo,

$$y_n(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{s} - \frac{K}{s + \frac{1}{\tau}} \right\} = K + Ke^{-\frac{1}{\tau}t} = K(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}) \quad (4.23)$$

Vemos que el instrumento de primer orden alcanza con mayor rapidez su valor final de respuesta, si $e^{-\frac{1}{\tau}t}$ tiende a cero más rápidamente; esto implica una τ pequeña. En la figura 4.9 podemos observar una gráfica adimensional que representa el comportamiento de $y_n(t)$.

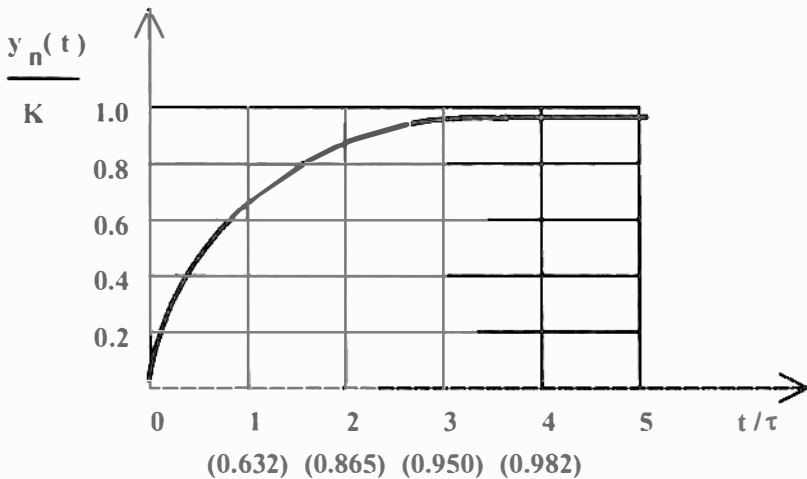


Figura 4.9 Respuesta escalón de un sistema de primer orden.

En la gráfica de la figura 4.9 observamos que τ controla el tiempo de respuesta. Para una medición fiel se requiere que τ sea mínimo, es decir, que la salida siga a la entrada. Sabemos que esta condición es prácticamente imposible y para informar a un usuario sobre el tiempo que debe esperar para tomar una medición fiel en un sistema de medición modelado por un sistema de primer orden, se recurre al concepto de “tiempo de asentamiento” (*settling time*), definido como el tiempo que tarda la salida en alcanzar la entrada dentro de un porcentaje (%) de error. El porcentaje (%) más utilizado es el 5%.

De lo anterior podemos preguntar: ¿Cuál es el tiempo que tarda la salida en alcanzar la entrada en un 95%?

Si $y_n(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$, donde para simplificar $K = 1$

y además

$$y_n(t) = 0.95 \cdot x_n(t) \text{ para un escalón } x_n(t) = 1.$$

Así,

$$0.95 = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \therefore 0.05 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{0.05} \Rightarrow \frac{t}{\tau} = \ln \frac{1}{0.05} = 2.99$$

Por lo tanto, $t = 3\tau$.

Podemos también hablar del error de medición dinámico:

$$e_m = x_n(t) - \frac{y_n(t)}{K} = 1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{4.24}$$

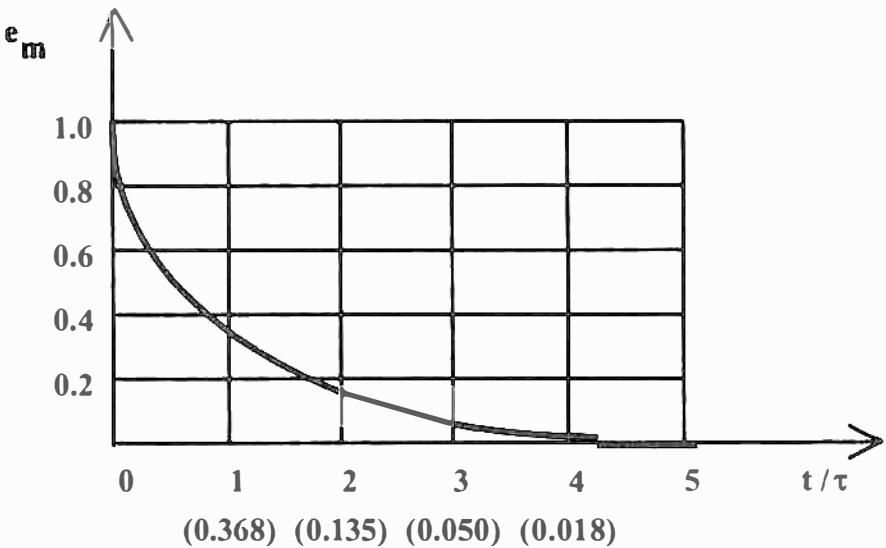


Figura 4.10 Error de medición dinámico.

Ejemplo 4.2 Termómetro de capilar

Consideremos el comportamiento de un termómetro de capilar (Fig. 4.11).

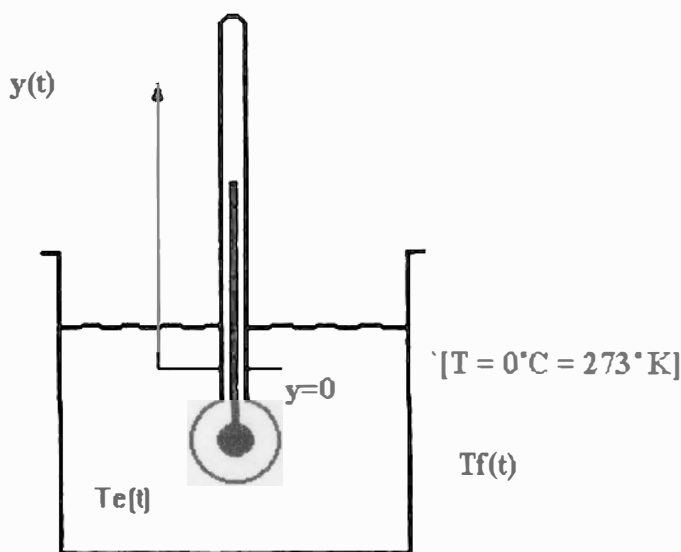


Figura 4.11 Termómetro de capilar.

La variable de entrada es $T_e(t)$, la temperatura del líquido, que se supone uniforme. La variable de salida es $y(t)$, el desplazamiento de la columna de mercurio, a partir de una marca de referencia correspondiente a la temperatura de 0°C .

Si ignoramos retrasos mecánicos, como la inercia de la columna del fluido, podemos suponer la siguiente relación entre la temperatura del fluido del bulbo $T_f(t)$ y el desplazamiento $y(t)$:

$$y(t) = \frac{K_{ex} \cdot V_b}{A_c} \cdot T_f(t)$$

donde

$$K_{ex} = \text{Coeficiente diferencial de expansión térmica del fluido,}$$

$$\left[\frac{m^3}{m^3 \cdot ^\circ C} \right]$$

$$V_b = \text{Volumen de fluido en el bulbo.} [m^3]$$

$$A_c = \text{Área transversal del tubo capilar.} [m^2]$$

Consideremos ahora la dinámica del flujo de energía térmica entre el medio y el fluido dentro del capilar:

$$Q = \frac{l}{R} \cdot (T_a - T_b) = U \cdot A_b \cdot (T_a - T_b)$$

donde

$$Q = \text{Flujo de calor}$$

$$R = \text{Resistencia térmica}$$

$$U = \text{Coeficiente de transferencia de calor a través del tubo,}$$

$$\left[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right]$$

$$(T_a - T_b) = \text{Diferencia entre temperatura externa e interna}$$

$$A_b = \text{Área de transferencia de calor a través de la pared del tubo, } [m^2]$$

En este caso,

$$Q_{entrada} = U \cdot A_b \cdot (T_e(t) - T_f(t))$$

pero

$$Q_{\text{neto}} = Q_{\text{entrada}} - Q_{\text{salida}}$$

Si suponemos que no existen pérdidas: $Q_{\text{salida}} = 0$; por lo tanto,

$$Q_{\text{neto}} = U \cdot A_b \cdot (T_e(t) - T_f(t))$$

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{dT_f(t)}{dt} = \frac{1}{V_b \cdot \rho \cdot C} \cdot Q_{\text{neto}}$$

donde

$T_c(t)$ = Temperatura en el capilar, $[\text{°C}]$.

$T_f(t)$ = Temperatura en el fluido, $[\text{°C}]$.

ρ = Densidad del fluido del bulbo, $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$

C = Calor específico del fluido, $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{°C}}\right]$

Se llega entonces a la siguiente ecuación:

$$V_b \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_f(t)}{dt} = U \cdot A_b (T_e(t) - T_f(t))$$

en la cual se plantean las siguientes suposiciones implícitas:

- a) Capacitancia térmica nula del vidrio.
- b) Coeficientes de transferencia de calor (U) constantes.
- c) Expansión térmica nula del bulbo.
- d) Masa del bulbo constante.

Es importante saber qué suposiciones plantear, para mantener el modelo suficientemente simple y obtener respuestas adecuadas. Obtengamos así

$$V_b \cdot \rho \cdot C \cdot \frac{dT_r(t)}{dt} + U \cdot A_b \cdot T_r(t) = U \cdot A_b \cdot T_e(t)$$

Utilizando la ecuación $y(t) = \frac{K_{ex} \cdot V_b}{A_c} \cdot T_r(t)$, obtenemos

$$\frac{\rho \cdot C \cdot A_c}{K_{ex}} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{U \cdot A_b \cdot A_c}{K_{ex} \cdot V_b} \cdot y(t) = U \cdot A_b \cdot T_e(t)$$

Se arregla la ecuación como la función de transferencia de un instrumento de primer orden:

$$\frac{\frac{\rho \cdot C \cdot A_c}{K_{ex}}}{\frac{U \cdot A_b \cdot A_c}{K_{ex} \cdot V_b}} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{\frac{U \cdot A_b}{U \cdot A_b \cdot A_c}}{\frac{K_{ex} \cdot V_b}{K_{ex} \cdot V_b}} \cdot T_e(t)$$

donde, por comparación, se reconocen

$$\tau = \frac{\rho \cdot C \cdot V_b}{U \cdot A_b} \quad y \quad K = \frac{K_{ex} \cdot V_b}{A_c}$$

Habiendo obtenido el modelo matemático del sistema, sería necesario resolverlo para la entrada $T_c(t)$. En la práctica, esta temperatura no se conoce.

Habíamos visto que en el caso de instrumentos de primer orden el tiempo de asentamiento para el 5% es de 3τ . Para aumentar la velocidad de respuesta de nuestro termómetro, es necesario reducir τ . Esto se logra disminuyendo ρ , C y V_b , y aumentando U y A_b .

Podemos hacer las siguientes consideraciones:

- a) Como ρ y C no son independientes, debemos reducir el producto $\rho \cdot C$, escogiendo un líquido adecuado.
- b) V_b y A_b tampoco son independientes; reducir V_b implica reducir A_b (o utilizar superficies rugosas o con aletas intercambiadoras de calor).
- c) U depende de las condiciones de prueba, es decir: realizando el arreglo estático o agitando el termómetro o el líquido en el exterior.

Por otra parte, como

$$K = \text{Sensibilidad estática} = \frac{K_{ex} \cdot V_b}{A_c}$$

reducir V_b implica reducir K . Entonces una respuesta más rápida implica pérdida de sensibilidad.

4.6.2 Respuesta en frecuencia de un instrumento de primer orden

Para tener una mejor idea del desempeño de un instrumento, es necesario observar los niveles de distorsión y los parámetros que influyen en los mismos. Una forma de observar este desempeño es mediante el análisis de la función de transferencia senoidal:

$$\text{Si } H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \Rightarrow H(j\omega) = \text{función de transferencia senoidal} =$$

$$\frac{K}{\tau j\omega + 1} = M(j\omega) \angle \phi(\omega)$$

donde se espera que, en forma ideal,

$$H(j\omega) = K \angle 0^\circ = K \angle -\omega\tau \text{ en este caso,}$$

$$M(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \text{ y para obtener } \phi(\omega),$$

se modifica $H(j\omega)$ de la siguiente forma:

$$H(j\omega) = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{(1 + \tau j\omega)(1 - \tau j\omega)} = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{1 + \tau^2 \omega^2} = \frac{K}{1 + \tau^2 \omega^2} - j \frac{K\omega\tau}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

Así,

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \tan^{-1}(-\tau\omega)$$

y finalmente

$$H(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}} \angle \tan^{-1} - \tau\omega \quad (4.25.)$$

En esta expresión observamos lo siguiente:

- La fase es lineal y por lo tanto no produce distorsión por fase.
- Es deseable que $\omega\tau \rightarrow 0$ para que $M(\omega)$ tienda a K . Esto significa que existe una ω en bajas frecuencias donde el sistema no distorsiona.

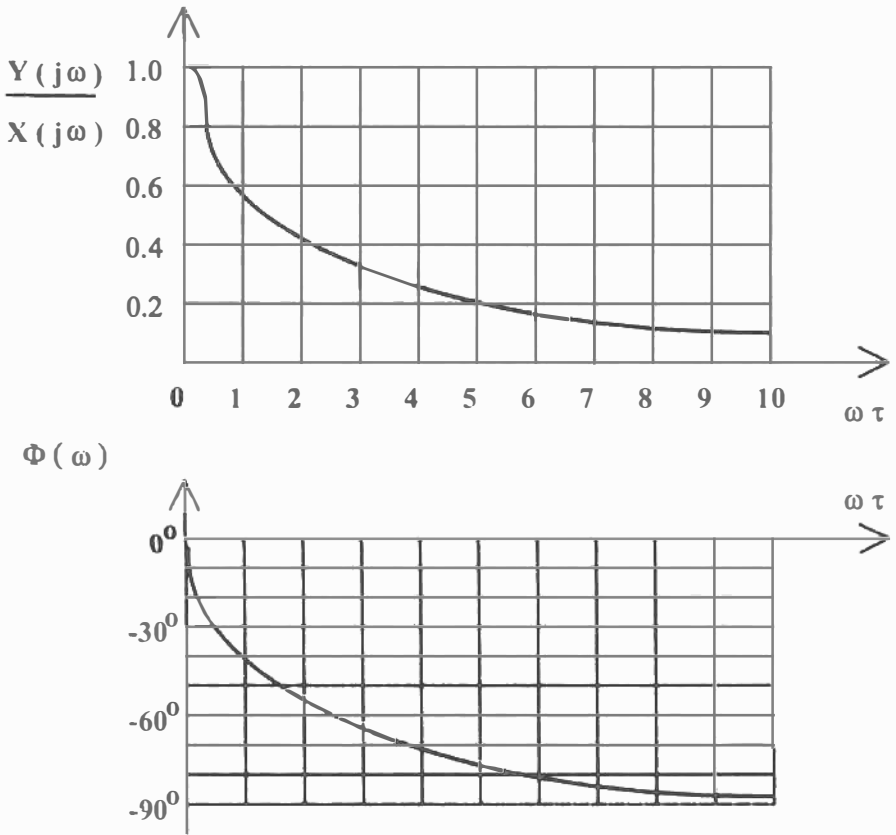


Figura 4.12 Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden.

4.7 Instrumento de segundo orden

Un instrumento puede considerarse de segundo orden si para describir su comportamiento dinámico se utiliza una ecuación diferencial del tipo:

$$a_0 y_n(t) + a_1 \frac{dy_n(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} = b_0 x_n(t)$$

La mayoría de los instrumentos médicos son de segundo orden o incluso de órdenes mayores, y generalmente su comportamiento en frecuencia es pasabajas. Por supuesto que mediante simplificaciones, los instrumentos de órdenes mayores al segundo pueden ser aproximados por un modelo de segundo orden.

Para obtener los parámetros dinámicos del sistema, la ecuación anterior se divide entre a_0 y se calcula su transformada de Laplace.

$$L\left\{y_n(t) + \frac{a_1}{a_0} \frac{dy_n(t)}{dt} + \frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} = \frac{b_0}{a_0} x_n(t)\right\}$$

Se obtiene

$$Y_n(s) + \frac{a_1}{a_0} \cdot s \cdot Y_n(s) + \frac{a_2}{a_0} \cdot s^2 \cdot Y_n(s) = \frac{b_0}{a_0} \cdot X_n(s)$$

$$Y_n(s) \left[\frac{a_2}{a_0} s^2 + \frac{a_1}{a_0} s + 1 \right] = \frac{b_0}{a_0} X_n(s) \quad (4.26)$$

Los cuatro coeficientes de esta ecuación pueden reducirse a tres, con un significado físico definido. Así pues,

$$K = \frac{b_0}{a_0} = \text{Sensibilidad estática} \quad (4.27)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \text{Frecuencia natural [rad/s]} \quad (4.28)$$

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \text{Coeficiente de amortiguamiento} \quad (4.29)$$

Así,

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2\zeta}{\omega_n} \quad \text{y} \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{\omega_n^2}$$

Entonces, nuestro modelo transformado queda de la siguiente manera:

$$Y_n(s) \left[\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right] = K \cdot X_n(s) \quad (4.30)$$

y la función de transferencia es

$$\frac{Y_n(s)}{X_n(s)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} \quad (4.31)$$

4.7.1 Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden

La ecuación diferencial de segundo orden toma la forma

$$\left(\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta D}{\omega_n} + 1 \right) \cdot y_n(t) = K \cdot x_n(t) \quad \text{para } t \geq 0^+$$

donde

$$y_n(0^+) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dy_n(0^+)}{dt} = 0$$

De nuevo tenemos que funciones exponenciales ofrecen soluciones a esta ecuación; sin embargo, la forma final de la solución dependerá de la razón de amortiguamiento ζ . Consideremos los tres posibles casos:

- a) $\zeta > 1$. Raíces de la ecuación característica reales y diferentes. Respuesta sobrearmortiguada.

Las raíces son

$$s_1 = \omega_n \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) < 0$$

$$s_2 = \omega_n \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) < 0$$

En este caso,

$$y_n(t) = C_1 \cdot e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + C_2 \cdot e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} + K \cdot x_n(t)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales tenemos

$$y_n(t) = -\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2 \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot K \cdot e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \cdot \omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2 \cdot \sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot K \cdot e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \cdot \omega_n t} + K \quad (4.32.)$$

- b) $\zeta = 1$. Raíces de la ecuación característica reales e iguales. Respuesta críticamente amortiguada.

Las raíces son

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

Para este caso,

$$y_n(t) = (C_0 + C_1 \cdot t) \cdot e^{-\omega_n t} + K \cdot x_n(t)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para $t = 0$,

$$y_n(0) = 0 = C_0 + K \cdot x_n(t) \quad C_0 = -K \cdot x_n(t)$$

$$\frac{dy_n(0)}{dt} = 0 = -C_0 \omega_n + C_1 \quad C_1 = -\omega_n \cdot K \cdot x_n(t)$$

La solución en este caso toma la forma

$$y_n(t) = -(1 + \omega_n t) \cdot K \cdot e^{-\omega_n t} + K \quad (4.33)$$

- c) $\zeta < 1$. Raíces de la ecuación característica complejas conjugadas. Respuesta subamortiguada.

Las raíces son

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

Para este caso,

$$y_n(t) = e^{\zeta\omega_n t} \cdot \left(C_1 \cdot e^{j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t} + C_2 \cdot e^{-j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t} \right) + K \cdot x_n(t)$$

$$y_n(t) = C_3 \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t + \phi\right) + K \cdot x_n(t)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales obtenemos

$$y_n(t) = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot K \cdot \text{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t + \phi\right) + K \quad (4.34)$$

donde
$$\phi = \text{sen}^{-1} \sqrt{1-\zeta^2}$$

Utilizando gráficas normalizadas, en la figura 4.15 se representan las respuestas para los tres casos.

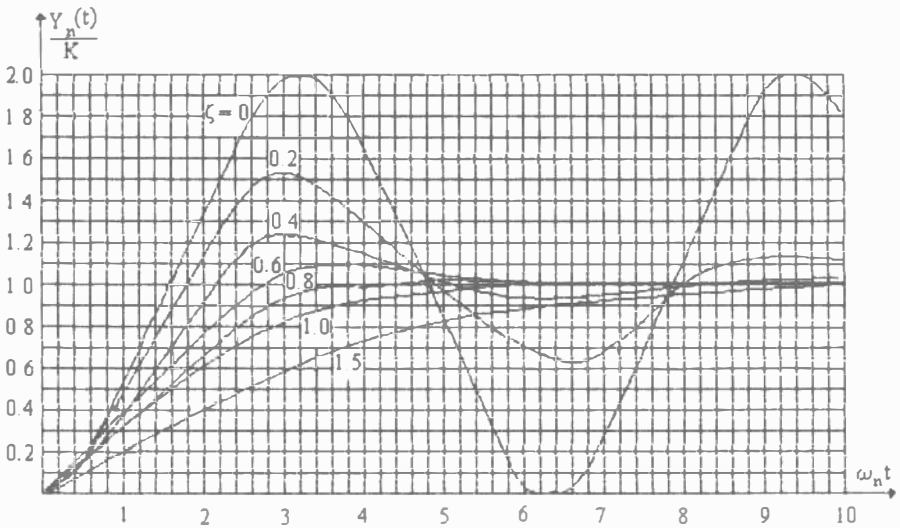


Figura 4.15 Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden.

De la gráfica de la figura 4.15 observamos que la respuesta dependerá de dos parámetros, ζ y ω_n . Si tenemos una ζ dada, al aumentar ω_n se incrementará la velocidad de respuesta.

Si aumentamos ζ reduciremos la oscilación en la respuesta, pero la volveremos más lenta (en el sentido de tardar más en llegar al valor final). El valor más adecuado de ζ dependerá del criterio de diseño utilizado. Por ejemplo:

Tiempo de asentamiento 10 % $\zeta_{\text{opt}} = 0.6$

Tiempo de asentamiento 5 % $\zeta_{\text{opt}} = 0.7$

En la práctica se escoge $0.6 \leq \zeta \leq 0.7$.

4.7.2 Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden

La función de transferencia del sistema de segundo orden es

$$H(j\omega) = \frac{Y_n(j\omega)}{X_n(j\omega)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}(j\omega) + 1} \quad (4.35)$$

Arreglando términos en el denominador,

$$H(j\omega) = \frac{K}{\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Podemos obtener la magnitud y la fase de la función de transferencia:

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}\right)}} \quad (4.36)$$

y

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta}{\omega_n - \frac{\omega^2}{\omega_n}} \quad (4.37)$$

Utilizando las gráficas normalizadas de la figura 4.16 obtenemos lo siguiente:

Es de notar que aumentar ω_n implica incrementar el rango de valores para los cuales la curva de amplitudes es aproximadamente plana. Por lo tanto, es necesario hacer esto para una ω_n alta a fin de medir adecuadamente señales con frecuencias altas.

El mejor rango se obtiene para ζ (0.6-0.7). En cuanto a la fase, lo que se buscará es $\phi = K\omega$ (ya que $\phi = 0$ no se puede lograr).

Así mismo, el mejor valor es cuando ζ (0.6-0.7).

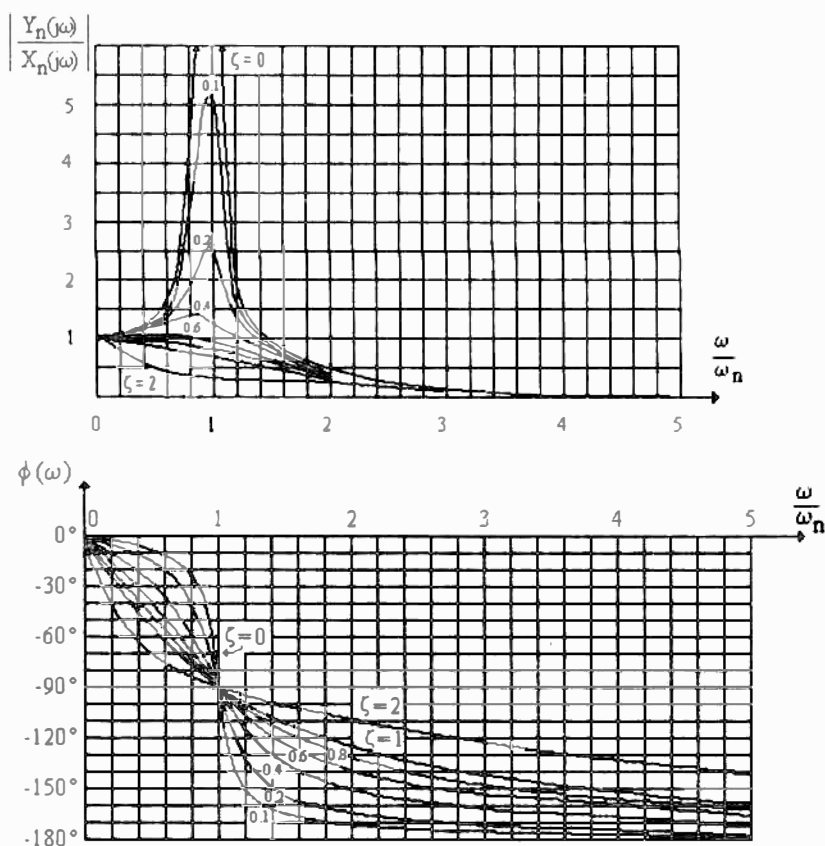


Figura 4.16 Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden.

Ejemplo 4.3 Balanza de resorte

Un ejemplo muy sencillo de los sistemas de medición de segundo orden es una balanza de resorte. Los elementos masa (M), resorte (K_{el}) y amortiguamiento viscoso (B) se oponen a la fuerza aplicada $F(t)$ y la salida es el desplazamiento $y(t)$ de la masa. Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene que

$$\sum f_c = M \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$F(t) - B \cdot \frac{dz}{dt} - K_{el} \cdot z = M \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

y se ordena la expresión

$$(M \cdot D^2 + B \cdot D + K_{el}) \cdot z = F(t)$$

donde

$$K = \frac{1}{K_{el}} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{el}}{M}} \quad y \quad \zeta = \frac{B}{2\sqrt{K_{el} \cdot M}}$$

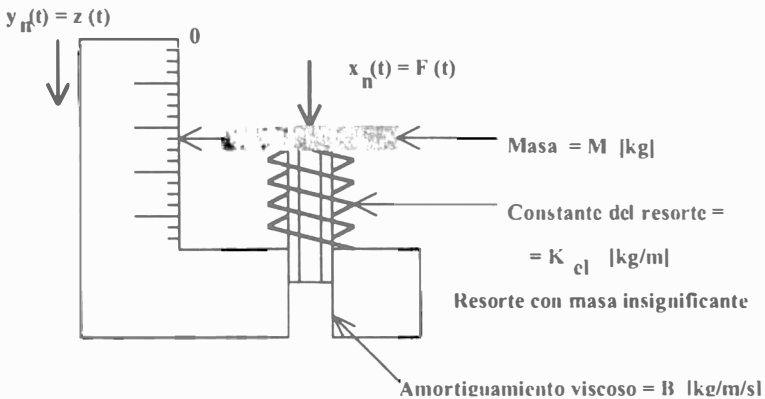


Figura 4.17 Balanza de resorte.

En el libro de texto *Mediciones biomédicas de presión, flujo y volumen* de M.E. Hernández y col. de esta misma serie puede encontrarse un análisis semejante aplicado a catéteres médicos [10].

En el apéndice A de este libro se presenta el método para graficar la respuesta en frecuencia tanto en magnitud como en fase, a partir de la función de transferencia y utilizando los diagramas de Bode.

4.8 Modelos de instrumentos de orden superior

Los instrumentos que para su representación requieren forzosamente de modelos de tercer orden, o superior, muy rara vez se ven en la práctica. Esto ocurre debido a que en tales casos el ingeniero de diseño dispone de suficiente control sobre los parámetros que determinan el instrumento, como para lograr que los prototipos resultantes respondan aproximadamente a modelos de orden inferior.

Algunas de las estrategias más utilizadas para conseguir este objetivo son la técnica del polo dominante y la de ajuste de los ceros. En ambos casos el propósito principal se reduce a conseguir que el sistema responda aproximadamente como un sistema de primero o segundo orden, según sea el caso. Para lograr lo anterior, con la primera estrategia se desplaza uno de los polos hacia frecuencias más bajas para convertirlo en dominante. La segunda es útil cuando en el modelo del instrumento existe un cero adyacente a alguno de los polos, en cuyo caso se trata de mover uno de ellos, o ambos, de modo que se obtenga su virtual anulación.

Ambas estrategias se analizan con mayor detenimiento a continuación.

4.8.1 El polo dominante

Considérese que un sistema de medición, en general, puede representarse en la siguiente forma:

$$H(s) = K \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

Cuando esta ecuación se factoriza a partir de las raíces de los polinomios del numerador y del denominador, puede expresarse en forma resumida en función de sus polos y ceros:

$$H(s) = K s^{\pm R} \frac{(sp_1 + 1)(sp_2 + 1) \dots (sp_N + 1)}{(st_1 + 1)(st_2 + 1) \dots (st_M + 1)} \quad \text{con } N + M + R = n + m \quad (4.38)$$

Para el caso más simple de un sistema de tercer orden es legítimo concluir, sin pérdida de generalidad, que puede representarse por medio de la expresión 4.39.

$$H(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \quad (4.39)$$

En esta ecuación se han ignorado, para simplificar, los demás factores que pudieran existir multiplicando el denominador, como los ceros, ya que éstos son más útiles en la segunda técnica de ajuste. Con respecto a los términos del tipo $s^{\pm R}$, sucede que son muy raros en los sistemas de medición, porque el ancho de banda útil de un instrumento de medición debe ser muy inferior al ya conocido estándar de 3 dB, debido a que éste implica un $\pm 30\%$ de variación del mesurando. Esto significa que para lograr que el error en la medición de un mesurando se mantenga dentro de muy altos niveles de calidad a todas las frecuencias para los

que fue diseñado se requiere que la respuesta en frecuencia sólo presente una alteración mínima con respecto a una línea recta constante en su ancho de banda útil. Por ejemplo, una variación del $\pm 1\%$ equivale sólo a ± 0.044 dB.

El primer paso de la técnica del polo dominante consiste en encontrar las raíces de la ecuación de tercer grado del denominador para obtener lo siguiente:

$$H(s) = \frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$$

Debido a que es un polinomio de tercer grado con coeficientes reales, las raíces del denominador $-1/\tau_1$, $-1/\tau_2$ y $-1/\tau_3$ sólo pueden ser, o bien todas reales, o una real y un par de complejas conjugadas. Esto quiere decir que los diagramas de polos y ceros correspondientes son del tipo indicado en la figura 4.18, con $p_1 = -1/\tau_1$, $p_2 = -1/\tau_2$ y $p_3 = -1/\tau_3$.

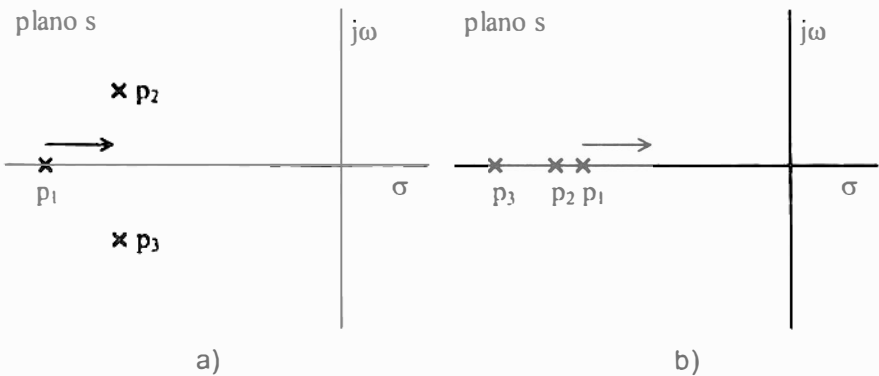


Figura 4.18 Diagrama de polos y ceros de un sistema de tercer orden: a) un polo real y dos complejos conjugados; b) tres polos reales.

Tal como se indica por medio de las flechas, el único polo real p_1 de la figura 4.18a se desplaza hacia el origen del plano s de modo que con ello p_1 determine la frecuencia de corte más baja y se reduzca el ancho de banda útil. En el caso de los tres polos reales de la figura 4.18b el procedimiento es similar, sólo que se escoge a uno de ellos que en la figura es p_1 .

Por otra parte, el logaritmo de la magnitud de la función de transferencia $H(j\omega)$ que define el sistema de medición $H(s)$ es la siguiente:

$$20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log |j\omega\tau_1 + 1| - 20 \log |j\omega\tau_2 + 1| - 20 \log |j\omega\tau_3 + 1| \quad (\text{dB})$$

Esta magnitud se encuentra expresada en decibeles (dB), lo que facilita su representación en la forma de un diagrama de Bode, donde tiene el aspecto que se observa en las figuras 4.19 y 4.20, según se trate de tres polos reales o uno real y dos complejos conjugados. El desplazamiento del polo p_1 hacia el origen puede interpretarse en esta figura en la forma indicada a continuación.

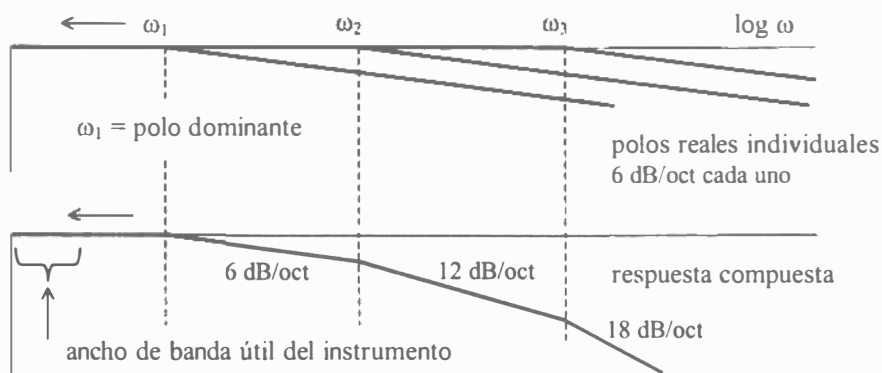


Figura 4.19 Magnitud logarítmica de la respuesta en frecuencia del sistema de medición de tercer orden para el caso de tres polos reales.

- a) Para el caso de los tres polos reales, cada uno de ellos determina en el diagrama de la respuesta en frecuencia de $H(s)$ una curva característica de primer orden y una frecuencia de quiebre diferente. En la figura 4.19 se observan las tres curvas características y las frecuencias ω_1 , ω_2 y ω_3 . Suponiendo que ω_1 representa la correspondiente al polo p_1 , al desplazar este polo hacia el origen se tiene que la banda útil del instrumento disminuye como lo indica la flecha, pero al mismo tiempo se minimiza la influencia de las curvas características situadas a frecuencias superiores que se deben a los otros dos polos. Como puede comprenderse fácilmente a causa de la escala de amplitud logarítmica y las consideraciones respecto al error, un mínimo corrimiento de este polo lo convierte en dominante porque determina el ancho de banda y la característica efectiva de operación del instrumento.
- b) Para el caso del polo real y de los dos polos complejos conjugados, el primero de ellos establece en la magnitud de la respuesta en frecuencia una curva característica de primer orden con una frecuencia ω_1 de corte. Por su parte, los dos polos complejos conjugados determinan una curva característica de segundo orden con una frecuencia natural ω_2 , como se muestra en la figura 4.20. El desplazamiento de ω_1 en la forma indicada por la flecha de la figura representa el traslado hacia el origen del polo p_1 .

En consecuencia, al igual que en el caso anterior la banda útil del instrumento disminuye, pero se minimiza la influencia de la curva característica de segundo orden situada en ω_2 , que corresponde a los dos polos complejos conjugados, mientras que el polo desplazado se convierte en dominante, determinando, al igual que en el caso anterior, el ancho de banda y la característica efectiva de operación del instrumento.

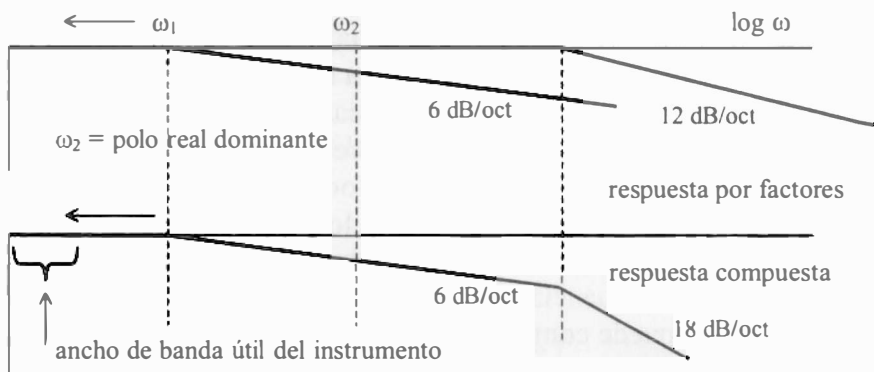


Figura 4.20 Magnitud logarítmica de la respuesta en frecuencia del sistema de medición de tercer orden para el caso de dos polos complejos conjugados y un polo real.

4.8.2 Ajuste de los ceros

Para comprender más fácilmente la forma en que funciona este método, a partir de la ecuación 4.38 se considerará, sin pérdida de generalidad, que el sistema de tercer orden con un cero puede representarse en la siguiente forma:

$$H(s) = K \frac{b_1 s + 1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

Como en el caso anterior, al factorizar esta ecuación se obtiene

$$H(s) = K \frac{(sb_1 + 1)}{(\sigma\tau_1 + 1)(\sigma\tau_2 + 1)(\sigma\tau_3 + 1)}$$

Considerando que, por tratarse también de un polinomio de tercer grado, uno de los polos será necesariamente real y suponiendo que éste es $p_3 = -1/\tau_3$, siempre será posible imaginar que tanto el cero dado por $-1/b_1$ como este polo pueden aproximarse uno al otro sobre el eje real y lograr que

$$\text{si } b_1 \approx \tau_3, \text{ resulta que } \frac{sb_1 + 1}{s\tau_3 + 1} \approx 1$$

En consecuencia, independientemente de que los otros dos polos $p_1 = -1/t_1$ y $p_2 = -1/t_2$ sean reales o complejos, se tendrá

$$H(s) = K \frac{(sb_1 + 1)}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)} \approx K \frac{1}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$$

Finalmente, con este último resultado se demuestra que con dicha estrategia es posible conseguir que un sistema $H(s)$ de orden superior a dos se comporte aproximadamente como un sistema de un orden inferior a causa de la virtual eliminación de uno de sus polos.

Capítulo 5

Características dinámicas para mesurandos aleatorios

5.1 Introducción

En el campo de las mediciones biomédicas existen diferentes señales que por su naturaleza deben tratarse como la medición de mesurandos aleatorios. Algunos ejemplos de estas señales son: el electroencefalograma (EEG), el electromiograma (EMG), el electrocardiograma (ECG) y, en general, la mayoría de las señales electrofisiológicas que muestran fácilmente esta naturaleza estocástica. Otras señales de origen mecánico, producidas en el cuerpo humano, también son ejemplos de mesurandos aleatorios, como son: los ruidos respiratorios, los ruidos cardiacos, los movimientos peristálticos del sistema digestivo y la medición de las concentraciones de los gases espirados, entre otras.

La medición de estas señales biomédicas expone al diseñador de instrumentos de medición a dos preguntas fundamentales que siempre debe tener en mente, a saber:

- Dada una señal biomédica contaminada con ruido por el mismo proceso imperfecto de medición, ¿cuál puede ser la mejor representación probable de la señal que esté libre de ruido?
- ¿Existe algún instrumento capaz de obtener mesurandos aleatorios fielmente representados, sin ruido y sin pérdida de la información?

Debe ser claro que la segunda pregunta es consecuencia directa de la primera y que contestar estas preguntas implica tener conocimientos relacionados con diferentes campos de la ingeniería, como procesamiento digital de señales, análisis de señales como procesos aleatorios, redes neuronales, lógica difusa, etc. Sin embargo, debe tenerse presente que las bases fundamentales para entender señales aleatorias se ubican en el campo del **análisis de procesos estocásticos**. Precisamente, este capítulo se orienta hacia el empleo de las herramientas de este campo para explicar el desempeño óptimo deseado de un instrumento que sea capaz de medir y procesar un mesurando aleatorio (señal aleatoria). Una explicación general de los fundamentos de procesos estocásticos se puede encontrar en el apéndice B al final de los capítulos de este libro [2,8,17,18].

A manera de una introducción general al problema de *medir un mesurando aleatorio*, es conveniente reflexionar sobre la forma inicial como una señal biomédica, clásica en la literatura médica y cuya naturaleza inherente es aleatoria, fue tratada con propósitos de medición. Así mismo, es conveniente observar los avances tecnológicos que han permitido hoy día analizarla, pero ahora con un enfoque de mesurando aleatorio, encontrando nuevas aplicaciones en la medicina antes no sospechadas.

Cuando fue descubierto por Einthoven a principios de este siglo, el ECG se analizó desde un punto de vista de señal periódica, es decir, con un enfoque determinista, buscando establecer la correlación de la morfología de la señal con la electrofisiología del corazón. Sin duda, este análisis fue un avance muy importante en la medicina, hasta el punto en que hoy día se utiliza como una herramienta de diagnóstico perfectamente estandarizada en su interpretación. Sin embargo, debe observarse que probablemente un primer enfoque de análisis es en forma determinista, cuando no se tienen todas las herramientas ingenieriles al alcance, como pueden ser instrumentos basados en computadoras, para observar los fenómenos desde un punto de vista más complejo.

Esto es, un análisis determinista puede considerarse como un subconjunto de un enfoque aleatorio, al grado que se puede considerar una señal periódica determinista, como un caso particular de una señal aleatoria. En el caso del ECG, cuando se pensaba que ya todo estaba dicho sobre el particular, surgen en la última década nuevos enfoques a partir de considerar esta señal como aleatoria, los cuales están transformando la cardiología.

Actualmente, en la literatura científica son comunes los trabajos que analizan la variabilidad de la frecuencia cardiaca y los potenciales tardíos. En particular, la manifestación aleatoria temporal del intervalo R-R del electrocardiograma se correlaciona hoy día con la actividad del sistema nervioso autónomo, permitiendo observar al corazón como un órgano efector donde se observan claramente arritmias que revelan el buen funcionamiento del mismo, no sólo como una bomba mecánica, sino en cuanto a la función simpática y parasimpática del sistema nervioso que actúa sobre él. Esta nueva forma de medir el ECG no sólo permite pronosticar el desarrollo de nuevos instrumentos de medición en forma de sistemas expertos o de monitores “inteligentes”, sino también comprender mecanismos fisiológicos de control cuya naturaleza es principalmente estocástica, y que están relacionados con padecimientos neurocardiológicos antes no bien comprendidos en la clínica.

Así, el ejemplo de la medición del ECG como un mesurando aleatorio muestra, además de los beneficios en la medicina, la complejidad que significa caracterizar instrumentos de medición que sean capaces de procesar mesurandos aleatorios.

En resumen, desde el punto de vista de sistemas de medición surgen preguntas naturales, complemento de las arriba propuestas, que deben contestarse para comprender la complejidad de la medición de mesurandos aleatorios. Algunas de ellas, ordenándolas de la más compleja a la más sencilla, podrían ser como las siguientes:

- ¿Cuál es el comportamiento ideal de un sistema de medición que garantice fidelidad para procesar mesurandos aleatorios?

- ¿Cuáles son las características medibles y cuáles son las herramientas para medir un mesurando aleatorio?
- ¿Qué significa mesurando aleatorio?

A continuación se da respuesta a cada una de estas preguntas, utilizando la teoría de sistemas lineales y el análisis de procesos estocásticos.

5.2 Cualidades de un instrumento de medición que garantizan mediciones confiables de mesurandos aleatorios

Con el propósito de establecer las cualidades ideales que un instrumento debe poseer para cumplir con la medición de mesurandos aleatorios, es importante destacar las características requeridas para la medición de otros mesurandos, como son los deterministas, esto es, señales o mesurandos periódicos y transitorios en el tiempo.

En forma general, un instrumento de medición debe cumplir con la reproducción de un mesurando de entrada $x_n(t)$ en forma fiel (sin distorsión) en la salida $y_n(t)$, preferentemente sin retraso (t) entre la entrada y la salida. Así, la función de transferencia de un instrumento idealizado debe ser de la siguiente manera:

- **Para la medición de mesurandos periódicos:**

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K \angle 0^\circ \quad (5.1)$$

donde K es la sensibilidad estática del instrumento, como se definió en la figura 4.3.

H , Y , X son funciones en el dominio de la frecuencia compleja ($j\omega$).

$\angle 0^\circ$ representa la fase del sistema que en este caso es de cero grados.

Debe ser claro que esta función de transferencia, $H(j\omega)$, debe existir para todo el rango de frecuencias, donde $X(j\omega)$ tenga energía medible. La medición de la energía se lleva a cabo por medio de los coeficientes de la serie de Fourier que sintetizan $x(t)$.

Esta relación de funciones $H(j\omega)$ y $X(j\omega)$ se observa gráficamente en la figura 5.1.

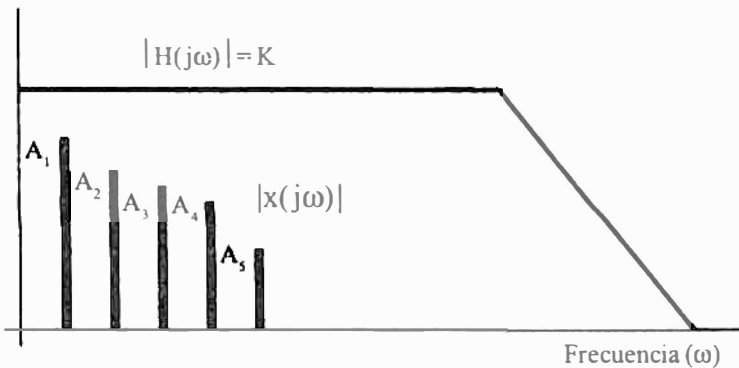


Figura 5.1 Relación de la función de transferencia de un instrumento $H(j\omega)$ con la entrada para evitar distorsión de amplitud.

La interpretación que debe darse a $|H(j\omega)| = K$ en relación con $|X(j\omega)|$ es que en la medida en que se mantenga constante y cubra un mayor ancho de banda que la función $X(j\omega)$, asegura que la salida $Y(j\omega)$ se presentará sin distorsión de amplitud. Esta es una cualidad deseable de cualquier instrumento de medición.

Para el caso donde sea inevitable un retraso entre la salida y la entrada, como es la situación de un instrumento que que procesa un mesurando

en tiempo real, entonces la función de transferencia debe tener fase lineal; esto es,

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K\angle -\omega\tau \quad (5.2.)$$

Recordemos que la forma práctica de obtener $H(j\omega)$ es realizar una exploración del instrumento con señales senoidales de excitación a la entrada, esto es,

$$x_n(t) = A_n \cdot e^{j\omega_n t}$$

El subíndice “n” indica diferentes señales con diferentes amplitudes “ A_n ” y por supuesto con diferentes frecuencias “ ω_n ”.

Si existe un retraso (τ) entre la entrada y la salida por la presencia del instrumento en sí mismo, la salida adopta la forma siguiente:

$$x_n(t) = K \cdot A_n \cdot e^{j\omega_n(t-\tau)}$$

Al realizar el cociente **salida/entrada** se obtiene la ecuación 5.2. En la sección 4.2.1 se analiza con mayor detalle la distorsión de amplitud desde el punto de vista de sistema.

- **Para la medición de mesurandos transitorios:**

La función de transferencia de un instrumento debe cumplir la forma siguiente:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = K\angle 0^\circ \quad (\text{Igual que 5.1})$$

Es decir, la respuesta en frecuencia del instrumento debe ser constante, cubriendo la frecuencia mayor de la transformada de Fourier de $x(t)$.

A diferencia del caso anterior, aquí se habla de la energía de la transformada de Fourier de $x(t)$, es decir,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = |X(j\omega)| \tan^{-1} \frac{\text{Im } X(j\omega)}{\text{Re } X(j\omega)} \quad (5.3)$$

Nuevamente, la relación entre $|H(j\omega)|$ y $|X(j\omega)|$ se observa gráficamente en la figura 5.2.

Para explorar la respuesta en frecuencia del instrumento $H(j\omega)$ es importante recordar que basta una señal de entrada $x(t)$ de excitación que sea una aproximación real a la función impulso $\delta(t)$, es decir, una delta de Dirac, cuya transformada de Fourier cubra en energía al menos el ancho de banda del instrumento.

Esto último debe considerarse como un método alternativo para obtener la respuesta en frecuencia de un instrumento, comparado con el método de barrido de frecuencias utilizado cuando se miden mesurandos periódicos.

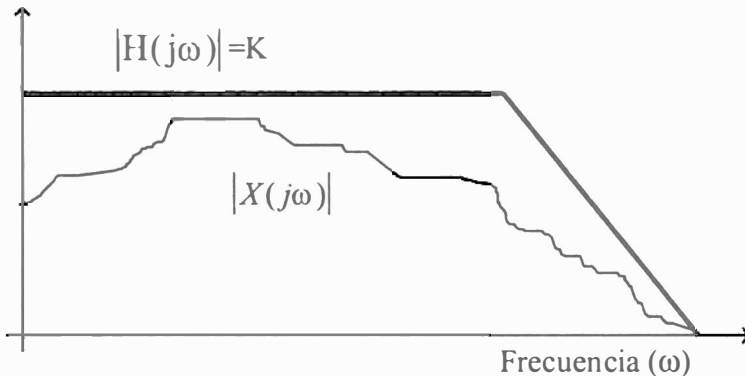


Figura 5.2 Relación de la función de transferencia de un instrumento $H(j\omega)$ con la entrada para evitar la distorsión de amplitud.

De nuevo la condición $H(j\omega) = K \angle 0^\circ$ asegura mediciones fieles de $x_n(t)$ en forma ideal, y la condición $H(j\omega) = K \angle -\omega\tau$ reconoce que existe un defasamiento entre la entrada y la salida sin distorsión por fase.

- **Para la medición de mesurandos aleatorios:**

Por último –y como la parte más importante de este capítulo–, un instrumento que mida mesurandos aleatorios debe cumplir una condición similar a las anteriores.

Es decir, la respuesta en frecuencia del instrumento $H(j\omega)$ debe ser constante hasta cubrir la máxima frecuencia de $S(\omega)_{x(t)}$ que es la potencia espectral de $x(t)$,

donde (5.4)

$$S(\omega)_{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t)e^{-j\omega t} dt$$

y $R_{xx}(t)$ es la función de autocorrelación de $x_n(t)$; definida como

$$R_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \tag{5.5}$$

Al igual que en los casos anteriores, es importante recordar que el punto importante es la obtención práctica de la función de transferencia del instrumento. En el caso de mesurandos aleatorios, la señal de excitación que debe elegirse es una aproximación real al “ruido blanco”; ésta puede ser lo que se conoce como ruido de color (p. ej., ruido rosa).

En las secciones subsiguientes se abordará con detalle la obtención práctica de la función de transferencia por excitación de “ruido blanco”. Sin embargo, es importante mencionar que en cualquiera de los casos antes mencionados siempre se habla de $H(j\omega)$ y que ésta se determina por métodos diferentes de acuerdo con la naturaleza del me-

surando que se desea medir. Particularmente, la obtención de la función de transferencia por medio de señales aleatorias, como puede ser el método del “ruido blanco”, permite realmente desenmascarar el comportamiento del instrumento (véase la Sec. 5.4), sobre todo cuando deja de comportarse como un sistema lineal.

Más adelante se observará que, por ejemplo, utilizando la **función de coherencia** se puede determinar para qué frecuencias el instrumento presenta no linealidades indeseadas para procesar fielmente un mesurando. También es importante diferenciar la capacidad de cada metodología para determinar la respuesta en frecuencia del instrumento. Por ejemplo, si se sospecha que se tiene distorsión de fase, y ésta es la característica principal del instrumento que permitirá procesar fielmente algún mesurando, entonces es recomendable utilizar el método de excitación senoidal. Por el contrario, si la importancia radica en medir la distorsión por amplitud, probablemente, la mejor manera para determinar la respuesta en frecuencia del instrumento sea el método de ruido blanco o por medio de una excitación tipo delta de Dirac.

En resumen, determinar las características de un instrumento que permite la medición fiel de mesurandos es el objetivo de una evaluación en el sentido del control de calidad. Estas características dependen fundamentalmente de la cuantificación de $H(j\omega)$, la cual está orientada por la naturaleza misma del mesurando (periódico, transitorio y aleatorio). Por cualquiera de los métodos arriba expuestos, todos ellos interrelacionados, se llega a cuantificar las características estática y dinámica. Sin embargo, el punto importante es utilizar siempre señales de excitación que sean semejantes al tipo de mesurando, a fin de aproximarse a la verdadera naturaleza del instrumento en las condiciones de operación impuestas por él mismo.

Antes de establecer las formas idóneas para caracterizar $H(j\omega)$ ante mesurandos aleatorios es indispensable, primero, conocer la forma de cuantificar mesurandos aleatorios por sí mismos.

5.3 Características medibles de los mesurandos aleatorios

Un mesurando aleatorio o estocástico es una señal que únicamente se puede cuantificar en forma estadística. Es decir, no se puede describir por una función específica del tiempo antes de su ocurrencia. En cierta forma, todos los mesurandos o señales reales tienen algún grado de aleatoriedad, a pesar de que en algunas ocasiones se adoptan modelos más simples, como son las señales periódicas o transitorias, funciones del tiempo, con el propósito de tener una primera aproximación de lo que realmente sucede en un proceso de medición.

Las opciones posibles son: analizar las señales en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. Para tal propósito, siempre debe recordarse que ambos caminos están ligados por transformaciones, como son las transformaciones derivadas del análisis de Fourier.

El modelo matemático que permite caracterizar señales estocásticas es el de “proceso aleatorio” (PA). Para comprender la definición formal y conocer los diferentes tipos de PA, se recomienda al lector consultar al apéndice B, “Probabilidad y procesos estocásticos” al final de este libro, para comprender la definición formal y los diferentes tipos de PA.

El tipo de PA más útil para modelar mesurandos aleatorios es aquel que tiene los siguientes atributos:

- Es estacionario en el “sentido amplio”.
- Cumple con el principio de ergodicidad.

El hecho de que un PA cumpla con el primer punto significa que sus dos primeros momentos estadísticos permanecen constantes a lo largo del tiempo, esto es:

Si $X(t)$ es un PA, entonces

$$(1) \quad E[X(t_1)] = \bar{X}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_x(x_1; t_1) dx_1 \quad (5.6)$$

y además

$$E[X(t_2)] = \bar{X}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_x(x_2; t_2) dx_2 \quad (5.7)$$

Entonces se cumple la primera condición si: $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$,

donde

$E[\bullet]$ es el operador “valor esperado”.

$f_x(x_1; t_1)$ y $f_x(x_2; t_2)$ son las funciones de densidad de probabilidad calculadas para los tiempos t_1 y t_2 en el PA, denotado como $X(t)$.

También si se cumple

$$(2) \quad R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{xx}(\tau) \quad (5.8.)$$

donde

$R_{xx}(\tau)$ es la función de autocorrelación

y

$$\tau = t_2 - t_1$$

Las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) significan, en palabras, que el valor promedio del PA no cambia en el tiempo y que la “función de autocorrelación” sólo depende de “ τ ” y no del valor absoluto de t_1 y t_2 .

Por otra parte, el principio de “ergodicidad” significa que basta una realización del experimento para obtener un mesurando o señal en el tiempo que refleje la estadística de todas las posibles realizaciones. Este principio permite un enfoque ingenieril para caracterizar mesurandos físicamente detectables, aunque su demostración está más allá del propósito de estas notas. Sin embargo, en el apéndice mencionado antes se puede encontrar una ampliación del mismo.

Respecto a las funciones de densidad de probabilidad, el modelo más utilizado es el de Gauss porque es el que más se manifiesta en la naturaleza. Sin embargo, no hay que olvidar que en el campo de las mediciones bien pueden suceder experimentos que no necesariamente se comporten estadísticamente como gaussianos.

Como una forma simple de analizar mesurandos aleatorios, es importante comenzar con la hipótesis de que los mesurandos son: estacionarios, gaussianos y por demás ergódicos. Todo esto hasta que se demuestre lo contrario.

La utilidad de la función de autocorrelación para caracterizar y medir mesurandos aleatorios se puede observar en las figuras 5.3 y 5.4. Estas figuras se obtuvieron mediante el uso de MAT-LAB (patente de Mat.Works Inc.).

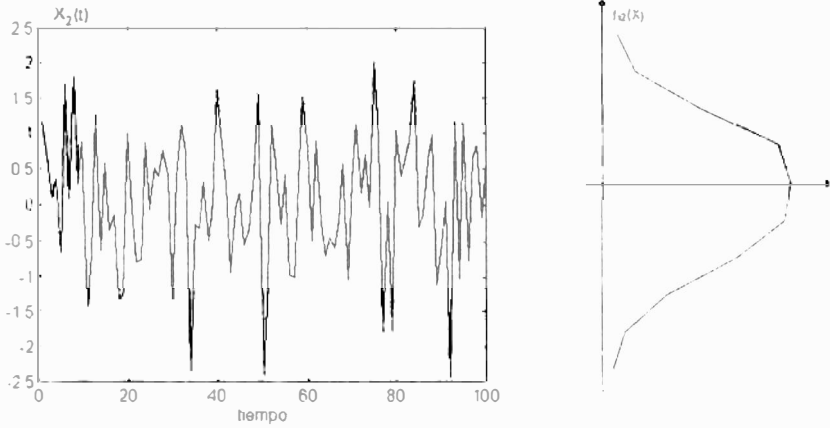


Figura 5.3 Se muestra un PA $X_2(t)$ rápido en el tiempo, con su histograma aproximado con una densidad de probabilidad gaussiana.

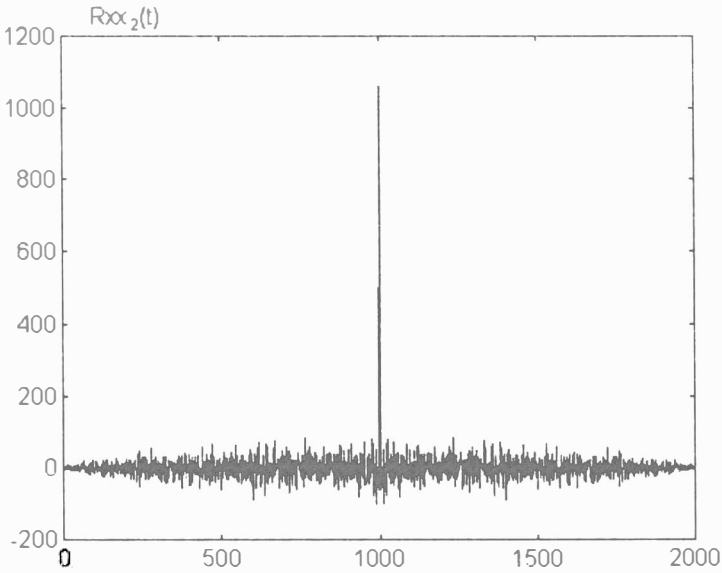


Figura 5.4 Función de autocorrelación sobre $X_2(t)$.

Obsérvese que el cálculo de la función de autocorrelación es similar al cálculo de la función de la convolución, sin la necesidad del corrimiento en espejo, esto es,

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.9)$$

y sólo para observar la simplicidad de esta función, pero a su vez su importancia, aquí se hace referencia al cálculo de la autocorrelación en forma discreta, es decir,

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+\tau) \quad (5.10)$$

donde $x(n)$ denota la versión discreta de $x(t)$.

En la ecuación 5.10 claramente se observa cuando $\tau = 0$ sucede el producto de dos funciones idénticas y se suman uno a uno sus valores discretos. Éste ocurre cuando la función de autocorrelación es máxima y se tiene la energía de la señal. Es decir,

$$\mathfrak{R}_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]^2 = \text{VALOR RMS de } x[n] \quad (5.11)$$

Por otra parte, también se cumple lo siguiente para el caso de que $X(t)$, un PA, sea ergódico:

$$\text{Si } A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)dt = \bar{x}, \text{ denota un promedio en el tiempo.} \quad (5.12)$$

Esto es análogo a cualquier operador lineal, como puede ser el caso del operador $E[\cdot]$ que denota un promedio estadístico.

Así, una aproximación al cálculo de la función de autocorrelación se puede realizar mediante

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)], \text{ es decir:}$$

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (5.13)$$

donde se observa que $\bar{x}$ y $\mathfrak{R}_{xx}(\tau)$ son variables aleatorias, y en caso de que $X(t)$ sea un PA ergódico se cumple

$$E[\bar{x}] = \bar{X} \quad (5.14)$$

$$\text{y} \quad E[\mathfrak{R}_{xx}(\tau)] = R_{xx}(\tau) \quad (5.15)$$

Expresado en palabras, lo anterior significa que si un PA es ergódico entonces el cálculo de la función de autocorrelación se puede realizar en un **tramo corto de información**. Si este tramo tiende al infinito, se tendrá una mejor aproximación al valor esperado; de lo contrario, hay que tratar esta estimación como una variable aleatoria, sujeta al cálculo de su valor esperado, lo que da como resultado final la ecuación 5.15 donde $R_{xx}(t)$ es el valor deseado.

Las propiedades más importantes de la función de autocorrelación son:

$$1) \quad |R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

$$2) \quad R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$$

$$3) \quad \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = (\bar{x})^2$$

- 4) $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0$, Esta última propiedad se cumple cuando $X(t)$, PA, tiene promedio cero, es ergódico y no posee componentes periódicas.

Conjuntando estas propiedades, es relativamente fácil comprender el poder de la función de autocorrelación en el análisis y caracterización de mesurandos aleatorios.

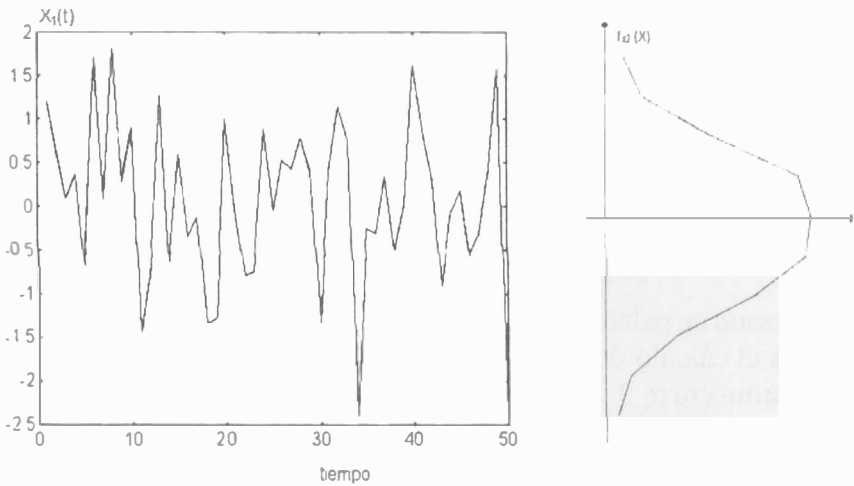


Figura 5.5 Un PA lento $X_1(t)$ en el tiempo pero con la misma $f_x(x)$ de $X_2(t)$ (véase la Fig. 5.3).

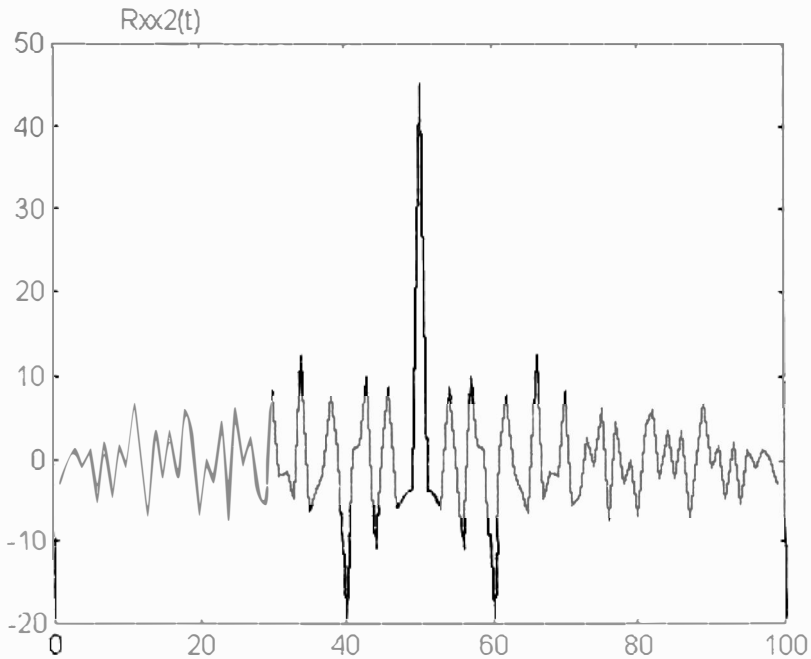


Figura 5.6 *Función de autocorrelación del proceso aleatorio lento $X_2(t)$.*

Claramente, en las figuras 5.3 y 5.5 se observa que los PA son diferentes. Sin embargo, las funciones de densidad de probabilidad son aproximadamente las mismas: $[f_{x_1}(x) = f_{x_2}(x)]$.

El PA de la figura 5.3 es más rápido en el tiempo que el PA de la figura 5.5. Es decir, las funciones de densidad no son suficientes para discriminar desde el punto de vista de la medición. Aquí es conveniente observar la ayuda que proporciona el empleo de la función de autocorrelación. Las figuras 5.4 y 5.6 muestran las funciones de autocorrelación para cada uno de los casos, observándose en el segundo caso una mayor abertura de la función de autocorrelación, lo cual

revela que el proceso aleatorio en estudio tiene un menor contenido de altas frecuencias.

Lo anterior significa que la función de autocorrelación permite medir un PA por su rapidez en el tiempo. Se observa que entre más angosta sea la función de autocorrelación, significa que el PA tiene mayor contenido de frecuencias altas.

Esta última observación se comprende mejor con el concepto de “espectro de potencia” que viene a completar las herramientas de análisis de un PA, y por lo tanto de un mesurando aleatorio.

La relación que existe entre el espectro de potencia y la función de autocorrelación es la siguiente (Teorema de Wiener y Khinchine):

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.16)$$

y

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (5.17)$$

El hecho de que el espectro de potencia de un PA se obtenga por medio de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, permite analizar un mesurando aleatorio tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

Ejemplo 5.1. En la salida de un transductor se observa una señal eléctrica aleatoria en la cual existe posiblemente una señal periódica determinista. Éste puede ser el caso que se presenta cuando se detecta un mesurando determinista en un ambiente ruidoso. La señal observada se puede modelar como sigue:

$$X(t) = \text{Ruido} + A \cos(\omega_0 t)$$

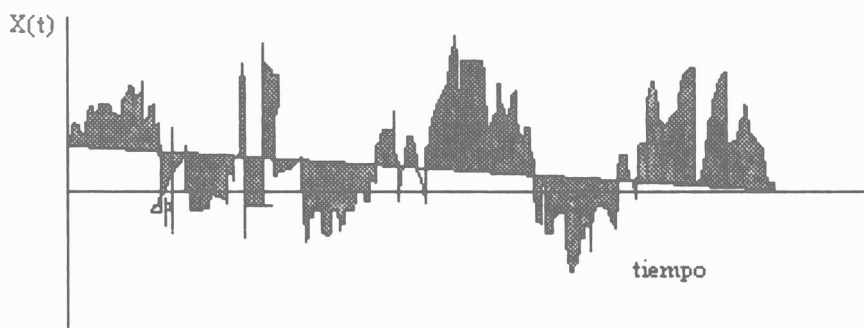


Figura 5.7 *PA con una probable componente determinista.*

La figura 5.7 muestra una señal como podría observarse en un osciloscopio.

Definitivamente, tratar de contestar si existe una componente periódica dentro de esta señal basado simplemente en un análisis a “simple vista” no permitiría medir algo objetivo. Por el contrario, aplicando la función de autocorrelación después de hacer el cálculo del espectro de potencia –como se observará más adelante– permitirá evaluar cuantitativamente este tipo de señales.

Para ilustrar este ejemplo, supongamos que una vez calculada la función de autocorrelación por medio de la ecuación (5.9) se obtiene

$$R_{xx}(\tau) = (A^2 / 2) \cos(\omega_0 \tau) \quad (5.18)$$

donde A y ω_0 son constantes. A su vez, esta ecuación también puede escribirse como

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{4} (e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}) \quad (5.19)$$

Por otra parte, al obtener la transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau)$ se observan las siguientes identidades:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad (5.20)$$

es decir,

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (5.21)$$

y, de acuerdo con el teorema del corrimiento, se cumple

$$e^{j\omega_0\tau} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (5.22)$$

Estas identidades finalmente permiten obtener la transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau)$:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (5.23)$$

La autocorrelación y el espectro de potencia se observan de manera gráfica en las figuras 5.8. y 5.9 respectivamente.

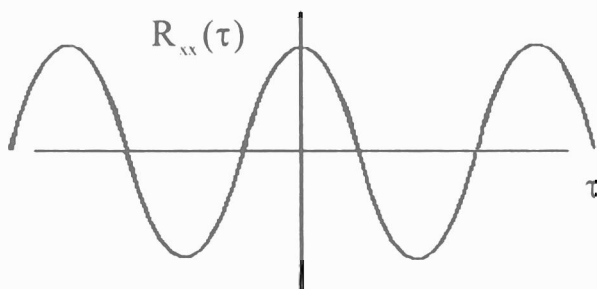


Figura 5.8 Función de autocorrelación (Ec. 5.18).

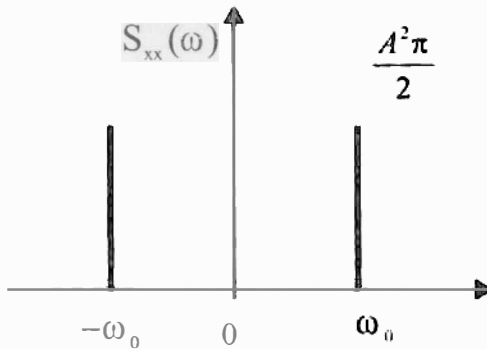


Figura 5.9 Espectro de potencia (Ec. 5.23).

En la gráfica de la función de autocorrelación de la figura 5.8 se observa la componente periódica que ratifica la existencia de una señal también periódica sumergida en un ruido aleatorio. Ésta es una de las propiedades más útiles de la función de autocorrelación que permite cuantificar o medir un mesurando aleatorio.

Finalmente, el espectro de potencia (Fig. 5.9) termina cuantificando la magnitud y la frecuencia de la componente periódica.

Estas herramientas permiten caracterizar los PA. Sin embargo, para cumplir con el propósito de analizar el comportamiento de un instrumento, el objetivo fundamental es desenmascarar la naturaleza de la función de transferencia de todo el sistema de medición. Una herramienta adicional para este último propósito es el concepto de “ruido blanco” que permite, como señal de excitación, encontrar con relativa facilidad esta función de transferencia.

“Ruido blanco” es un concepto ideal de una señal de prueba $N(t)$, la cual, además de ser estacionaria en el “sentido amplio”, tiene las siguientes características:

$$S_{NN}(\omega) = \frac{\eta_0}{2} \quad (5.24)$$

donde η_0 es una constante y la función de autocorrelación es

$$R_{NN}(\omega) = \left(\frac{\eta_0}{2}\right)\delta(\omega) \quad (5.25)$$

La figura 5.10 muestra la gráfica de las ecuaciones 5.24 y 5.25.

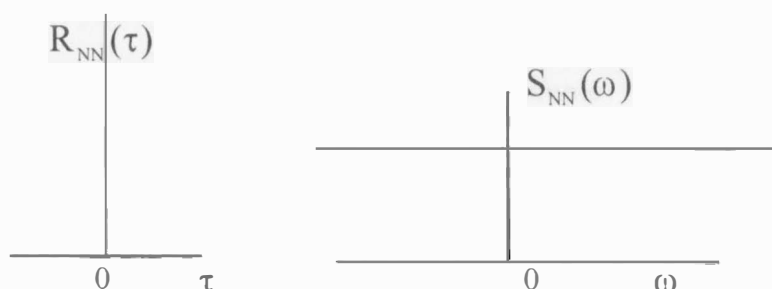


Figura 5.10 Autocorrelación y espectro de potencia del “ruido blanco”.

Debe quedar claro que el concepto de ruido blanco es no realizable físicamente por que tiene una potencia promedio infinita, esto es,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) d\omega = \infty \quad (5.26)$$

Sin embargo, el concepto es muy útil porque permite simplificar cálculos matemáticos que no están alejados de la práctica. La realización aproximada de esta señal $N(t)$ en el laboratorio se logra mediante el concepto de “ruido de color”. Por ejemplo, el “ruido rosa” es una señal cuyo espectro de potencia, en lugar de ser constante a lo largo de todo el dominio de la frecuencia, como sería el caso del ruido blanco, por lo general sólo llega a cubrir el espectro de 0-20,000 Hz con su energía.

Después de estas frecuencias, su energía decae a razón de 20 dB por década, utilizándose principalmente para investigar el comportamiento de sistemas que procesan o miden señales de audio.

En resumen, la idea de emplear una señal que aproxime el comportamiento del “ruido blanco” es para explorar el comportamiento de la función de transferencia de cualquier sistema. Por lo tanto, una buena señal de excitación será aquella que tenga un contenido espectral por encima del ancho de banda del sistema de medición que se esté analizando. Así, la hipótesis de que un ruido “limitado en banda”, como sería el ruido rosa, matemáticamente es semejante al ruido blanco $N(t)$, permite analizar y caracterizar un instrumento de medición como se observa en la siguiente sección.

5.4 Determinación de la función de transferencia de un sistema de medición por medio de «ruido blanco»

En la sección 5.1 de este capítulo se trataron las condiciones ideales que la función de transferencia de un sistema de medición debe cumplir para cada tipo de mesurando. Se mencionó que, si bien se trata de una misma función de transferencia, existen diferentes métodos de obtenerla. Particularmente, en el caso de un sistema de medición que procesa mesurandos aleatorios es recomendable utilizar señales de excitación aleatorias para determinar la función de transferencia. El uso de un método de caracterización de $H(j\omega)$ basado en el empleo de “ruido blanco” permite obtener el comportamiento real del sistema de medición, especialmente porque pone a prueba el posible comportamiento no lineal que pudiera no encontrarse por medio de alguno de los otros dos métodos de excitación. A continuación se explican las ventajas del método de ruido blanco.

Como se explicó al inicio del capítulo 4, un sistema lineal e invariante en el tiempo es definido por las siguientes relaciones:

$$y(t) = T \left[\sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \right] = \sum_{n=1}^N \alpha_n T[x_n(t)] = \sum_{n=1}^N \alpha_n y_n(t) \quad (5.27)$$

donde “T” es la transformación del sistema, α_n son constantes arbitrarias y N puede ser infinito.

Utilizando las propiedades de la función impulso, la señal de entrada se puede expresar como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\epsilon) \delta(t - \epsilon) d\epsilon \quad (5.28)$$

y sustituyendo en 5.27 se obtiene

$$y(t) = T[x(t)] = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\epsilon) \delta(t - \epsilon) d\epsilon \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\epsilon) T[\delta(t - \epsilon)] d\epsilon \quad (5.29)$$

donde $T[\delta(t - \epsilon)] = h(t - \epsilon)$ y cuando el sistema es invariante en el tiempo también se cumple

$$h(t) = h(t - \epsilon) \quad (5.30)$$

Teniendo en mente estas propiedades que modelan un instrumento de medición, se pueden calcular el valor esperado y el valor cuadrado promedio de la respuesta del sistema. Así,

$$E[y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\epsilon) x(t - \epsilon) d\epsilon \right] \quad (5.31)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon) E[x(t - \varepsilon)] d\varepsilon \quad (5.32)$$

donde si $X(t)$ es estacionario en el sentido amplio, se cumple

$$= \overline{X} \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon) d\varepsilon = \overline{Y} \quad (5.31)$$

Esta expresión indica que el valor promedio de $Y(t)$ iguala el valor promedio de $X(t)$ multiplicado por el área bajo la curva de la respuesta impulso del sistema.

En el caso del valor cuadrado promedio se tiene

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon_1)x(t - \varepsilon_1)d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon_2)x(t - \varepsilon_2)d\varepsilon_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t - \varepsilon_1)x(t - \varepsilon_2)h(\varepsilon_1)h(\varepsilon_2)]d\varepsilon_1d\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Además, por tratarse de un proceso estacionario, $X(t)$ cumple con

$$E[x(t - \varepsilon_1)x(t - \varepsilon_2)] = R_{xx}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (5.33)$$

y, por lo tanto,

$$\overline{Y^2} = E[Y^2(t)] = \int \int R_{xx}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)h(\varepsilon_1)h(\varepsilon_2)d\varepsilon_1d\varepsilon_2 \quad (5.34)$$

La solución de esta ecuación es complicada, y puede consultarse en [5]. Sin embargo, cuando la entrada es “ruido blanco” como señal de excitación, el cálculo del valor cuadrado promedio se simplifica como se observa a continuación:

$$R_{xx}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \left(\frac{\eta_0}{2}\right)\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

Entonces,

$$= \left(\frac{\eta_0}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\epsilon_2) d\epsilon_2 \quad (5.35)$$

Es decir, la potencia de salida es proporcional al área del cuadrado de la respuesta impulso.

Por otra parte, el cálculo de la respuesta impulso se facilita si se utiliza la correlación cruzada de la entrada con la salida. Esto es,

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] = E\left[X(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\epsilon) X(t + \tau - \epsilon) d\epsilon\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t)X(t + \tau - \epsilon)] h(\epsilon) d\epsilon \quad (5.36)$$

donde para el caso en que $X(t)$ es estacionaria en un sentido amplio, se cumple

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \epsilon) h(\epsilon) d\epsilon \quad (5.37)$$

y esto significa que se trata de la convolución de $R_{xx}(\tau)$ con $h(\tau)$. Esto es,

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) \quad (5.38)$$

Con estos conceptos en mente, ya se puede enfrentar la evaluación de un instrumento o sistema utilizando ruido aleatorio. En particular, el uso de “ruido blanco” facilita este procedimiento.

Supongamos que se dispone de una fuente de ruido amplio (no necesariamente ruido blanco) cubriendo el ancho de banda del instrumento o del sistema en observación:

$$R_{xx}(\tau) \triangleq \left(\frac{\eta_0}{2}\right)\delta(\tau) \quad (5.39)$$

y por lo tanto la función de correlación cruzada se convierte en

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)\delta(\tau - \varepsilon)h(\varepsilon)d\varepsilon = \left(\frac{\eta_0}{2}\right)h(\tau) \quad (5.40)$$

es decir,

$$h(\tau) = \left(\frac{2}{\eta_0}\right)R_{xy}(\tau) \quad (5.41)$$

La ecuación (5.41) muestra una forma relativamente fácil de obtener la respuesta impulso de un instrumento de medición: simplemente se calcula la función de correlación cruzada.

Finalmente, para comprobar la calidad de un instrumento bastaría con observar el comportamiento del mismo en el dominio de la frecuencia, por medio de

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (5.42)$$

Esta última evaluación se tiene que realizar de acuerdo con los criterios establecidos en la sección 5.2.

Ejemplo 5.2. Caracterización de un sistema de medición de primer orden por medio de “ruido blanco”.

Antes de analizar un sistema de medición por medio de “ruido blanco” es importante recordar que, cualquiera que sea la naturaleza del mismo, siempre es posible representarlo en dos formas: mediante la respuesta impulso del sistema $h(t)$ o mediante la función de transferencia $H(j\omega)$, que no es más que la transformada de Fourier de la respuesta impulso. También es conveniente recordar que en algunos casos

se trabaja con la función de transferencia expresada en el dominio de “s”, cuya representación es $H(s)$ y se trata de la transformada de Laplace de la respuesta impulso del sistema. En este mismo orden de ideas, se debe tener presente que un sistema de medición modelado como un sistema lineal al tener una entrada determinista, ya sea analizado en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, siempre existirá una única relación entre la entrada y la salida. Así mismo, cuando la entrada a un sistema es una función muestra de un PA, de nuevo existirá una única relación entre la excitación y la respuesta del sistema. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que, debido a la naturaleza aleatoria de la entrada, no se tiene también una expresión explícita para la respuesta. En este caso, debemos entender que se tendrá una descripción de la salida en términos probabilísticos o estadísticos, de la misma forma que se tiene caracterizada la entrada.

En el campo de la instrumentación existen varios sistemas de medición que son modelables mediante una simple sección de un circuito pasabajas RC, como se muestra en la figura 5.11.

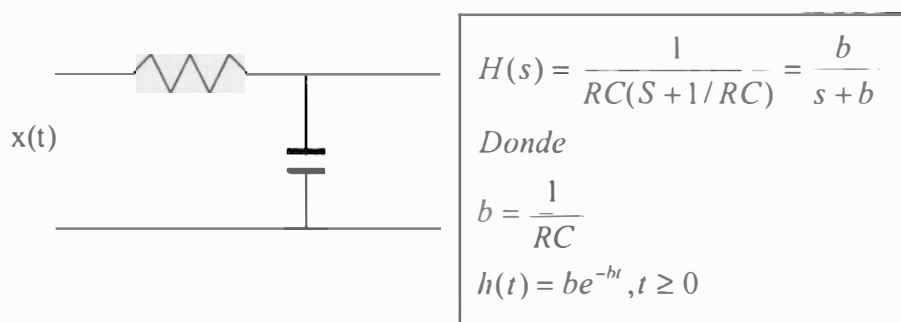


Figura 5.11 Modelo de un sistema de medición de primer orden RC.

Para caracterizar un sistema como el aquí planteado, se tienen que contestar preguntas básicas como las siguientes:

Si el mesurando de entrada tiene un nivel de CD (corriente directa) ¿cómo será procesado por el instrumento? O ¿cuál es el valor cuadrático medio de la salida?. Éstas y otras preguntas se pueden responder utilizando la técnica de excitación por medio del “ruido blanco”.

Para iniciar el análisis del sistema, se supone que éste es causal; es decir, $h(t) = 0$ para $t < 0$, y además se cumple que la salida $y(t)$ estará dada por la integral de convolución como sigue:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (5.43)$$

y el valor promedio estará dado por

$$\overline{Y} = E[y(t)] = E\left[\int_0^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau\right] \quad (5.44)$$

Cuando la entrada es un PA del tipo estacionario, se cumple

$$Y = X \int_0^{\infty} h(\tau) d\tau \quad (5.45)$$

La expresión 5.45 simplemente nos recuerda que la ganancia de un sistema lineal está dada por el área bajo la curva de la función respuesta impulso, y que la componente directa de la salida es igual a la componente directa de la entrada multiplicada por el nivel de ganancia del sistema. De igual forma, si la entrada no tiene componente directa tampoco la salida tendrá una componente constante. En el caso particular de este ejemplo, se cumple

$$Y = X \int_0^{\infty} b e^{-b\tau} d\tau = X b \left[\frac{e^{-b\tau}}{-b} \right]_0^{\infty} = X$$

Este último resultado es relativamente obvio puesto que con una simple inspección se observa que la ganancia del circuito es la unidad.

Para determinar el valor cuadrático medio de la salida debemos calcular el valor promedio del producto de dos integrales; a saber:

$$Y^2 = E[y^2(t)] = E\left[\int_0^\infty x(t - \tau_1)h(\tau_1)d\tau_1 \cdot \int_0^\infty x(t - \tau_2)h(\tau_2)d\tau_2\right] \quad (5.46)$$

Este resultado es semejante a la ecuación 5.34, donde al aplicar el ruido blanco se tiene un resultado igual a la ecuación 5.35.

En este problema el valor cuadrático medio es

$$Y^2 = \left(\frac{\eta_0}{2}\right) \int b^2 e^{-2b\tau} d\tau = b^2 \left(\frac{\eta_0}{2}\right) \left(\frac{e^{-2b\tau}}{-2b}\right)_0^\infty = b \left(\frac{\eta_0}{4}\right) \quad (5.47)$$

Observése que el parámetro b , el cual es el recíproco de la constante del tiempo RC , está relacionado con el ancho de banda del sistema, en particular con el ancho de banda de potencia media; es decir, el ancho de banda B es

$$B = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{b}{2\pi} \text{ Hz}, \text{ y } Y^2 = \pi B \left(\frac{\eta_0}{2}\right)$$

De esta última relación se observa que el valor cuadrático medio de la salida se incrementa linealmente con el ancho de banda del sistema. Este resultado es de esperar siempre que el ancho de banda del PA en la entrada del sistema sea mayor que el ancho de banda del mismo sistema. En la bibliografía se puede encontrar una ampliación de estos conceptos.

Capítulo 6

Propagación del error

6.1 Introducción

Puesto que, por su propia naturaleza, el proceso de medición contiene un error inherente, es necesario considerar con mayor detalle la forma en que el error se propaga dentro de un sistema de medición complejo. Sin embargo, esta situación se presenta en cualquier sistema de medición, por muy sencillo que sea, ya que un instrumento siempre puede verse como compuesto por varios bloques en cascada, los cuales pueden ser muy sencillos: un transductor o un módulo de despliegue.

En tal circunstancia, el problema de la propagación del error consistirá en establecer la forma en que el comportamiento del error en cada bloque en particular influye en el comportamiento generalizado en el sistema completo. Por esta razón, se considerarán a continuación los casos del error como fenómeno determinista y como fenómeno aleatorio.

6.2 Sistemas de medición con relación salida-entrada de tipo algebraico

Cuando se interconectan varios instrumentos entre sí para llevar a cabo un proceso de medición, surgen dos interrogantes relativas a la forma en que se comporta el error, las que se plantean a continuación:

- 1) ¿Cuál es la imprecisión global del proceso de medición con el que se mide el mesurando cuando se conocen las imprecisiones de cada instrumento?
- 2) ¿Cuál es la imprecisión tolerable de cada instrumento, considerado individualmente, para obtener la imprecisión global deseada del sistema de medición?

Para responder la primera de las interrogantes, considérese el diagrama de bloques de la figura 6.1.

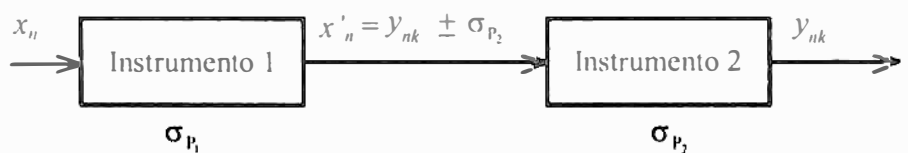


Figura 6.1 Conexión de dos instrumentos de medición en cascada.

Los parámetros σ_{p1} y σ_{p2} son las imprecisiones de los instrumentos 1 y 2, respectivamente. Estas imprecisiones permiten afirmar, por ejemplo, que cuando el usuario tiene una lectura y_{nk} en la carátula del instrumento 2, entonces en la entrada de éste (o sea en x'_n) tiene una imprecisión dada por la relación

$$x'_n = y_{nk} \pm \sigma_{p_2}$$

A su vez, la entrada del sistema total (en este caso en x_n) tiene una imprecisión dada por

$$x_n = x'_n \pm \sigma_{p_1} = y_{nk} \pm \sigma_{p_1} \pm \sigma_{p_2}$$

Esto significa que la imprecisión global del sistema $\pm \sigma_G$ es

$$\pm \sigma_G = \pm \sigma_{p_1} \pm \sigma_{p_2} \tag{6.1}$$

Por la forma en que se hicieron los cálculos, se observa claramente que esta afirmación corresponde a la consideración del sistema de medición como se muestra en la figura 6.2, que es la visión del usuario

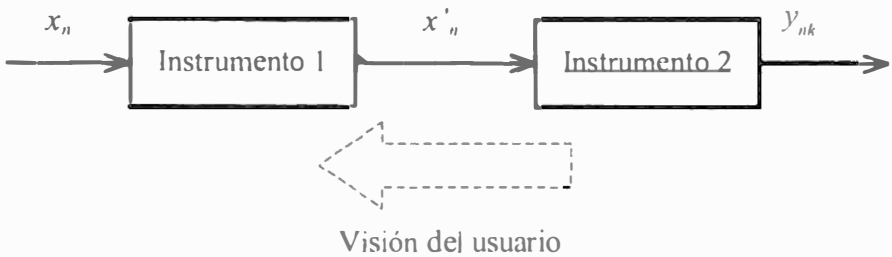


Figura 6.2 *Visión del usuario para los instrumentos en cascada.*

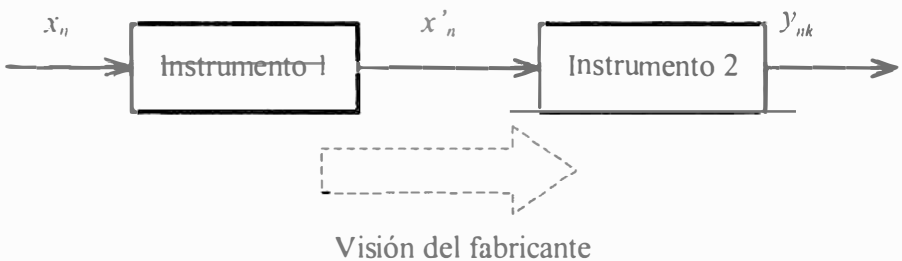


Figura 6.3 *Visión del fabricante para los instrumentos en cascada.*

En cuanto a la segunda interrogante, de manera similar se tiene que el proceso de medición debe observarse ahora en sentido opuesto, ya que en este caso el proceso se inicia con una imprecisión global $\pm\sigma_G$ conocida que va a representar un límite superior para las imprecisiones locales σ_{p1} y σ_{p2} . Esta forma de cálculo corresponde a la visión del fabricante, como se muestra en la figura 6.3.

Independientemente de la visión que se considere, en ambos casos se está frente a un problema conocido como *propagación del error*. Sin embargo, es fundamental diferenciar el tipo al que pertenece esta propagación, ya que puede tratarse de un error cuya naturaleza específica sea aleatoria o determinista, o incluso que combine ambas. También puede ser que, independientemente de su naturaleza, sólo se sepa que el error se describió en alguna de estas dos formas o no se tengan mayores datos. Por ejemplo, no es lo mismo analizar la propagación de una imprecisión que de una no linealidad, o analizar la propagación de la combinación de una no linealidad con una imprecisión.

Para efectos del análisis que se desarrolla a continuación, al margen de la naturaleza intrínseca que el error tenga en un momento dado y sólo con el propósito de establecer la diferencia entre la forma en que se van a tratar ambos tipos de error, se considerará que un error aleatorio se describe mediante una curva de densidad de probabilidad específica, en tanto que para el error determinista sólo se establece el valor máximo que éste puede alcanzar.

En la siguiente sección se observarán con mayor detalle estas diferencias, a partir de una teoría generalizada de la propagación del error.

6.3 Propagación del error determinista

En general, un sistema de medición simple o de cualquier complejidad puede considerarse como un conjunto de módulos concatenados uno a continuación de otro, o en cascada, como se observa en la figura 6.4. Si se considera que la figura representa un sistema de medición simple, el bloque **sistema 1** es generalmente un transductor, en tanto que el bloque **sistema N** es un módulo de registro o despliegue. Los módulos intermedios pueden ser cualquier bloque intermedio del instrumento, como los procesadores analógicos o digitales cuya función es acondicionar la

o las variables por medir. En el caso de un sistema de medición más complejo, cada uno de los módulos puede ser, en sí, un sistema independiente.

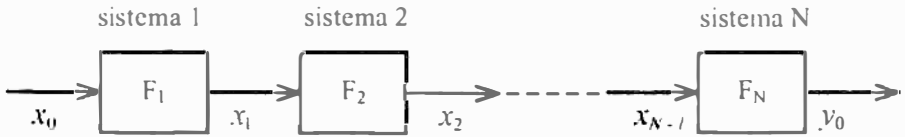


Figura 6.4 Representación generalizada de un sistema de medición.

Los símbolos de la figura 6.4 representan lo siguiente:

$F_1, F_2, \dots, F_N$ = funciones que relacionan la salida-entrada de cada módulo

$x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ = entradas respectivas de cada módulo

y_0 = salida del módulo de despliegue

En particular, las salidas de cada módulo, como función de las entradas y de los parámetros propios de cada subsistema, generan las funciones vectoriales que se señalan a continuación:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_0, u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,j_1}) \\ x_2 &= F_2(x_1, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,j_2}) \\ &\vdots \\ y_0 &= F_N(x_{N-1}, u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

En este sistema de ecuaciones las constantes $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,j_1}$ representan los j_1 parámetros que describen el sistema 1. Así mismo, los símbolos $u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N}$ representan los j_N parámetros que describen el sistema N.

Al examinar el sistema de ecuaciones 6.2 se llega a la conclusión de que para calcular la relación que vincula el error Δy_0 en la salida con el error Δx_0 en la entrada y con las variaciones de los parámetros Δu_{kji} , es necesario llegar a una sola relación salida-entrada que concatene todos los módulos de la cadena de medición. En esta forma, se podrá aplicar una expansión en serie de Taylor para evaluar Δy_0 .

Para iniciar el proceso de concatenación, obsérvese lo que se tiene en los dos últimos módulos de la figura 6.4, correspondientes a las dos últimas igualdades del sistema de ecuaciones 6.2. En éstas se cumple

$$\begin{aligned} X_{N-1} &= F_{N-1}(x_{N-2}, u_{N-1,1}, u_{N-1,2}, \dots, u_{N-1,j_{N-1}}) \\ y_0 &= F_N(x_{N-1}, u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Puesto que, a su vez, la salida x_{N-1} es la entrada del último módulo, al sustituir la ecuación 6.3 en la 6.4 se obtiene lo siguiente:

$$y_0 = F_N(F_{N-1}(x_{N-2}, u_{N-1,1}, u_{N-1,2}, \dots, u_{N-1,j_{N-1}}), u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N})$$

Al efectuar este mismo proceso con el módulo anterior y con la ecuación que lo representa en el sistema 6.2, se obtiene

$$y_0 = F_N \left(F_{N-1} \left(F_{N-2}(x_{N-3}, u_{N-2,1}, u_{N-2,2}, \dots, u_{N-2,j_{N-1}}), u_{N-1,1}, u_{N-1,2}, \dots, u_{N-1,j_{N-1}} \right), u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N} \right)$$

Finalmente, al considerar todos los módulos de la figura 6.4 y las respectivas igualdades de las ecuaciones 6.2 que los describen en la representación generalizada del sistema de medición, se tiene que todos los sistemas concatenados se resumen en

$$y_0 = F_N \left(F_{N-1} \left(F_{N-2} (\dots F_2 (F_1(x_0, u_{1,1}, \dots, u_{1,j_1}), u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{2,j_2}), \dots), \right. \right. \\ \left. \left. u_{N-1,1}, u_{N-1,2}, \dots, u_{N-1,j_{N-1}} \right), \right. \\ \left. u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N} \right) \quad (6.5)$$

En esta expresión se observa que y_0 se expresa en términos de todas las funciones F_i en la forma $F_1 \circ F_2 \circ \dots \circ F_N$ y que si se concentra todo el arreglo de funciones anidadas en una sola, que se llamará F , la salida queda expresada como

$$y_0 = F(x_0, u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,j_1}, u_{2,1}, u_{2,2}, \dots, u_{N,1}, u_{N,2}, \dots, u_{N,j_N})$$

En esta última expresión se tiene que el número total de parámetros es igual a $j_1 + j_2 + \dots + j_{N+1}$. Al aplicar expansión a la salida y_0 por medio de una serie de potencias de Taylor, se obtiene que $y_0 \pm \Delta y_0$ para el caso determinista es

$$y_0 \pm \Delta y_0 = F \begin{bmatrix} x_0 \pm \Delta x_0, u_{1,1} \pm \Delta u_{1,1}, \dots, u_{1,j_1} \pm \Delta u_{1,j_1}, \\ u_{2,1} \pm \Delta u_{2,1}, \dots, u_{2,j_2} \pm \Delta u_{2,j_2}, \\ \vdots \\ u_{N,1} \pm \Delta u_{N,1}, \dots, u_{N,j_N} \pm \Delta u_{N,j_N} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Así mismo, la expansión permite obtener

$$\begin{aligned}
y_0 \pm \Delta y_0 = & F(x_0, u_{1,1}, \dots, u_{1,j_1}, u_{2,1}, \dots, u_{1,j_2}, \dots, u_{N,1}, \dots, u_{N,j_N}) + \\
& + \left| \frac{\partial F}{\partial x_0} \right| |\Delta x_0| + \left| \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right| |\Delta u_{1,1}| + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right| |\Delta u_{2,1}| + \dots \\
& + \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \right| |\Delta x_0^2| + \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u_{1,1}^2} \right| |\Delta u_{1,1}^2| + \dots + \frac{1}{2!} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u_{2,1}^2} \right| |\Delta u_{2,1}^2| + \dots \quad (6.7) \\
& + \frac{1}{3!} \left| \frac{\partial^3 F}{\partial x_0^3} \right| |\Delta x_0^3| + \frac{1}{3!} \left| \frac{\partial^3 F}{\partial u_{1,1}^3} \right| |\Delta u_{1,1}^3| + \dots + \frac{1}{3!} \left| \frac{\partial^3 F}{\partial u_{2,1}^3} \right| |\Delta u_{2,1}^3| + \dots \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Finalmente, igualando las expresiones que corresponden al término $\pm \Delta y_0$ en ambos miembros de la ecuación 6.7, tomando valores absolutos para considerar el peor caso e ignorando los términos de orden superior porque tienden a cero cuando Δy_0 es pequeño, se obtiene sucesivamente

$$|\Delta y_0| = \left| \frac{\partial F}{\partial x_0} \right| |\Delta x_0| + \left| \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} \right| |\Delta u_{1,1}| + \dots + \left| \frac{\partial F}{\partial u_{2,1}} \right| |\Delta u_{2,1}| + \dots$$

y

$$|\Delta y_0| = \left| \frac{\partial F}{\partial x_0} \right| |\Delta x_0| + \sum_{k=1}^N \sum_{j_i=1}^{j_N} \left| \frac{\partial F}{\partial u_{k,j_i}} \right| |\Delta u_{k,j_i}| \quad (6.8)$$

Esta última ecuación establece una relación general, que determina la forma en que el error determinista Δx_0 de la entrada afecta la salida Δy_0 , así como la respectiva influencia de las funciones F_i y de las variaciones $\Delta u_{k,j_i}$ que pueden experimentar los parámetros de cada uno de los bloques. Esta ecuación es muy útil cuando se trata de establecer la forma en que el sistema de medición trata las variaciones del ruido presente en la entrada y cómo éste se propaga hasta la salida.

El problema de considerar la propagación del error desde el punto de vista del fabricante, o sea desde la entrada hasta la salida, se reduce a formular la pregunta ¿cuál es el error en la lectura de la salida y_0 cuando en la entrada se encuentra un patrón de medición conocido, y se conocen las funciones y las variaciones de los parámetros de cada uno de los bloques del sistema?

La respuesta a la pregunta anterior se obtiene directamente de la ecuación 6.8 para Δy_0 , donde se considera que $\Delta x_0 = 0$ porque puede suponerse que el patrón se encuentra libre de error o que, al menos, éste es insignificante. Esta forma de observar el instrumento supone que el diseñador o el fabricante conoce perfectamente la entrada y que quiere estimar la salida, por lo que esta consideración obedece al punto de vista del fabricante, en cuyo caso se tiene

$$|\Delta y_0| = \sum_{k=1}^N \sum_{j_i=1}^{j_N} \left| \frac{\partial F}{\partial u_{k,j_i}} \right| |\Delta u_{k,j_i}| \quad (6.9)$$

Por el contrario, cuando la situación es tal que se desconoce la entrada y sólo se observa la lectura del instrumento por medio de la salida y_0 , la pregunta es: ¿cuál es la ecuación que relaciona el error esperado en x_0 y en las variaciones de los parámetros de cada uno de los bloques del sistema? En este caso se aplica el punto de vista del usuario y la pregunta se contesta, a su vez, mediante la siguiente expresión, que se obtiene en forma análoga a la ecuación 6.8, analizando el modelo de la figura 6.4 en forma inversa:

$$|\Delta x_0| = \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_0} \right| |\Delta y_0| + \sum_{k=1}^N \sum_{j_i=1}^{j_N} \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial \mu_{k,j_i}} \right| |\Delta \mu_{k,j_i}| \quad (6.10)$$

En esta última ecuación la notación F^{-1} señala la función inversa de

F y los términos $\Delta\mu_{k,j_i}$ corresponden a los inversos de los parámetros directos $\Delta u_{k,j_i}$, por lo que

$$F^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1} \circ \dots \circ F_N^{-1} \quad \text{y} \quad \Delta\mu_{k,j_i} = F^{-1} (\Delta u_{k,j_i})$$

Para obtener la ecuación 6.10 es necesario que existan todas y cada una de las funciones individuales inversas F^{-1} , lo que también se aplica a los parámetros u_{k,j_i} . Sin embargo, esta exigencia se cubre con mucha facilidad ya que por lo común la función F es tan sencilla que su inversa F^{-1} es inmediata. Tal es el caso, por ejemplo, cuando se trata de módulos cuya relación salida-entrada es lineal. Así mismo, como y_0 es una lectura fija y conocida a partir de la cual se estimará x_0 con su error correspondiente, resulta que $\Delta y_0 = 0$, con lo que

$$| \Delta x_0 | = \sum_{k=1}^N \sum_{j_i=1}^{j_N} \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial \mu_{k,j_i}} \right| | \Delta \mu_{k,j_i} | \quad (6.11)$$

Con el propósito de ejemplificar más claramente la aplicación de la teoría de la propagación del error en un sistema de medición, se considerarán dos casos de mediciones en las cuales se tienen errores específicos en la entrada de los sistemas y se analizará influencia de éstos en la medición final.

Ejemplo 6.1 Medición de la presión sanguínea. La presión sanguínea es una variable fisiológica que puede medirse en forma directa o indirecta, dependiendo del método, el cual puede ser invasivo o no. El presente ejemplo se refiere a la medición de esta presión en forma directa. Para este propósito debe llegarse al punto preciso de la medición, que es el corazón o la arteria, por lo que se introduce un catéter ya sea al corazón izquierdo o a la arteria aorta. En caso de que se introduzca a la arteria aorta, se desea medir un mesurando que es función del tiempo, cuya morfología y valores comunes se observan en la figura 6.5.

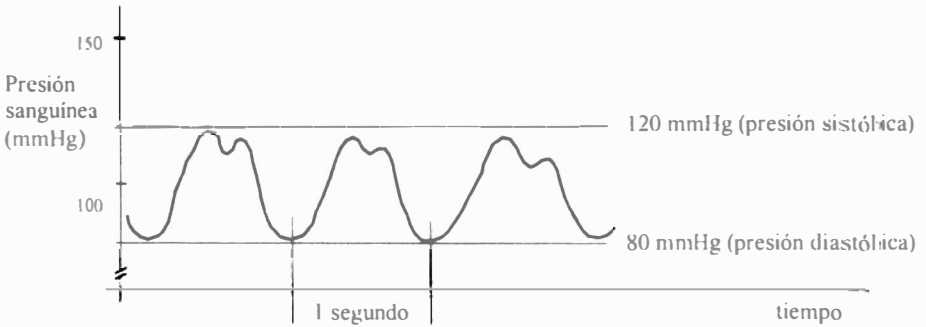


Figura 6.5 Forma de onda típica de la presión sanguínea de un paciente normal.

La presión sanguínea es un mesurando que debe medirse mediante un transductor de presión. Para los propósitos del ejemplo sólo se tratará el análisis estático; la parte dinámica se trata más adelante. Adicionalmente se recomienda consultar la referencia [20], que trata con mayor detalle los aspectos tecnológicos de los transductores y los aspectos fisiológicos de los catéteres. Para el análisis estático y la propagación de los errores de este ejemplo, se supone que el intervalo dinámico del mesurando es de 0 a 300 mmHg y que es deseable medirlo con un error menor que ± 1 mmHg.

También se supone que se utiliza un transductor con las siguientes características estáticas:

Intervalo dinámico de medición	escala = 0 a 300 mmHg
Sensibilidad	$S = 50 \mu\text{V/mmHg}$
No linealidad	$\Delta x_0 = 0.1\%$ de la escala

Así mismo, se espera construir un instrumento compuesto de los bloques que se observan en el diagrama de la figura 6.6.

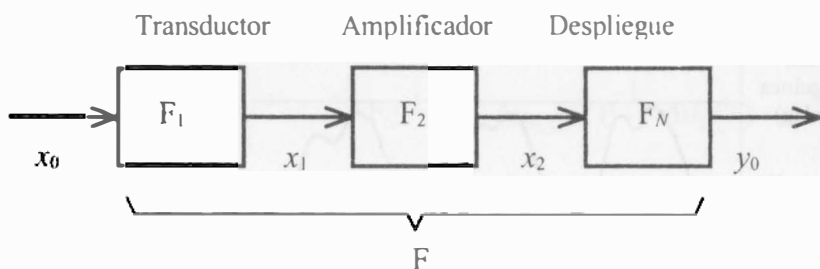


Figura 6.6 Diagrama de bloques de un instrumento para medir la presión sanguínea en forma directa.

Los símbolos en la figura 6.6 representan lo siguiente:

x_0 = midiendo tal y como aparece en la figura 6.5.

x_1 = salida del transductor en milivolts (mV).

x_2 = salida de un amplificador en volts (V).

y_0 = salida de un sistema de despliegue, que para el análisis estático bien puede ser una lectura digital.

F_1 , F_2 y F_3 = funciones que representan la relación salida-entrada de cada bloque.

F = función global del instrumento.

Para simplificar, en este punto es importante observar las siguientes aproximaciones:

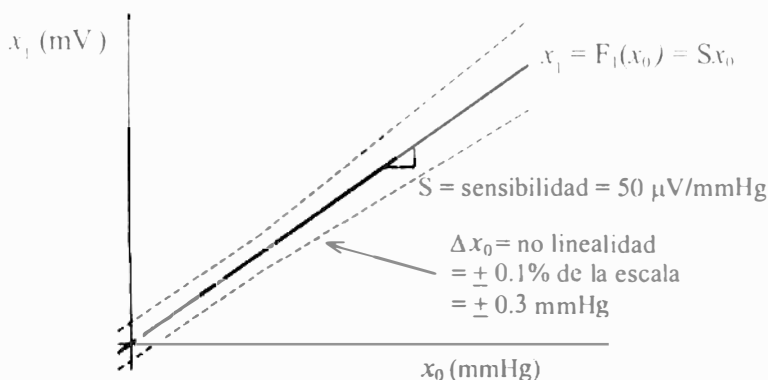
- Los parámetros u_{ij} , es decir los parámetros propios de cada sistema, se toman como constantes. En este caso $S = 50 \mu\text{V/mmHg}$ y $K = 1$.
- La naturaleza propia del instrumento, es decir su variabilidad, se manifiesta en las imprecisiones de los bloques de despliegue y amplificación, así como en la no linealidad propia del transductor, en este caso $\Delta x_1 = 1 \text{ mV}$ y $\Delta x_2 = 0.1 \text{ mV}$.

Las relaciones salida-entrada de cada bloque son conocidas, por lo que pueden representarse gráficamente como se muestra en la figura 6.7. Además, de las figuras 6.6 y 6.7 puede deducirse lo siguiente:

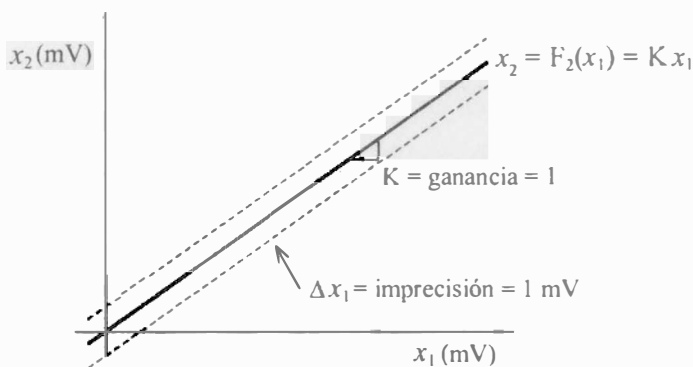
$$y_0 = F(x_0)$$

con

$$F = F_1 = F_2 = F_3$$



Relación salida-entrada del transductor.



Relación salida-entrada del amplificador.

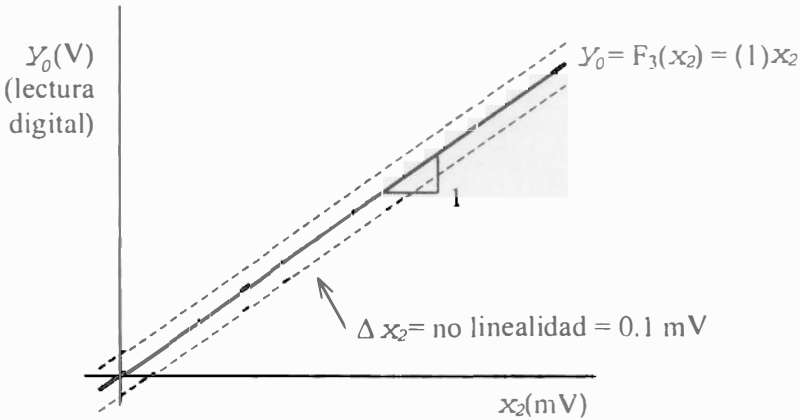


Figura 6.7 Relaciones salida-entrada para cada uno de los bloques del instrumento.

$$y_0 = F_3(F_2(F_1(x_0)))$$

Así mismo, se observa que las variables importantes son x_0 , x_1 y x_2 , por lo que

$$y_0 = F(x_0, x_1, x_2)$$

Por lo tanto, para el caso de propagación de errores deterministas se aplica la ecuación 6.8, que en este caso queda como

$$|\Delta y_0| = \left| \frac{\partial F}{\partial x_0} \right| |\Delta x_0| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| |\Delta x_2|$$

en la cual, por tratarse de la derivada de una composición de funciones,

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}$$

Por lo tanto, al sustituir las igualdades anteriores en la ecuación de $|\Delta y_0|$ se obtiene

$$|\Delta y_0| = \left| \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_0} \cdot \Delta x_0 \right| + \left| \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right|$$

Por último, la estimación del error en el sentido directo tiene que calcularse a partir de las relaciones salida-entrada de la figura 6.7.

Lo anterior significa que

$$\begin{aligned} |\Delta y_0| = & (1) \cdot K \cdot S \cdot (\Delta x_0) & \Delta x_0 = \text{no-linealidad [mmHg]} \\ & + (1) \cdot K \cdot (\Delta x_1) & \Delta x_1 = \text{imprecisión [mV]} \\ & + (1) \cdot (\Delta x_2) & \Delta x_2 = \text{no-linealidad [mV]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Delta y_0| &= (1) \cdot (1) \cdot (50) \cdot (0.3) + (1) \cdot (1) \cdot (1) + (1) \cdot (0.1) = 15 + 1 + 0.1 \\ &= 16.1 \text{ mV} \end{aligned}$$

Dimensionalmente, el error absoluto en forma directa queda en mV y se observa que los tres términos de la ecuación (y de la suma) indican

la importancia relativa de cada uno de los bloques del instrumento. Con ello se responde directamente a la pregunta ¿cuántos dígitos del error corresponden a la no linealidad del transductor, a la imprecisión del amplificador y a la imprecisión del sistema de despliegue? Adicionalmente, el diseñador puede ajustar los parámetros de diseño para que la contribución al error por parte de cada uno de los factores o de los bloques sea uniforme.

En forma análoga, si la pregunta está dirigida a conocer el error en el mesurando cuando se conoce la lectura a la salida del instrumento, la propagación del error se tiene que observar según la siguiente ecuación, que es inversa al punto de vista del fabricante:

$$x_0 = F^{-1}(y_0, x_2, x_1)$$

lo cual significa que

$$|\Delta x_0| = \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial y_0} \cdot \Delta y_0 \right| + \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right| + \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right|$$

donde

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial y_0} = \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2^{-1}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_3^{-1}}{\partial y_0}$$

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial x_2} = \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2^{-1}}{\partial x_2}$$

y

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial x_1}$$

Al sustituir estas ecuaciones en la anterior, se obtiene

$$|\Delta x_0| = \left| \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2^{-1}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F_3^{-1}}{\partial y_0} \cdot \Delta y_0 \right| + \left| \frac{\partial F_1^{-1}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2^{-1}}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right| + \left| \frac{\partial F_3^{-1}}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right|$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |\Delta y_0| &= (S^{-1}) \cdot (K^{-1}) \cdot (1) \cdot (\Delta y_0) & \Delta y_0 &= \text{imprecisión inversa [mV]} \\ &+ (S^{-1}) \cdot (K^{-1}) \cdot (\Delta x_2) & \Delta x_2 &= \text{imprecisión inversa [mV]} \\ &+ (S^{-1}) \cdot (\Delta x_1) & \Delta x_1 &= \text{no linealidad inversa [mV]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Delta y_0| &= (0.02) \cdot (0.1) \cdot (160) + (0.02) \cdot (0.1) \cdot (0.1) + 0.02 = 0.32 + 0.0001 \\ &+ 0.02 = 0.3401 \text{ mmHg} \end{aligned}$$

De esta manera, el error queda calculado en forma absoluta en mmHg, en función de las imprecisiones inversas y de la no linealidad inversa, como lo indican los tres términos de la última ecuación. Esto resulta ser muy similar a como se calculó la primera parte de la solución de este problema.

Ejemplo 6.2 Medición de flujo por el método de obstrucción por malla. Un flujómetro del tipo de obstrucción es un dispositivo que permite medir el flujo de los gases espirados por un sujeto por medio de la diferencia de presiones que se presentan a ambos lados de una frontera resistiva, como se representa esquemáticamente en la figura 6.8.

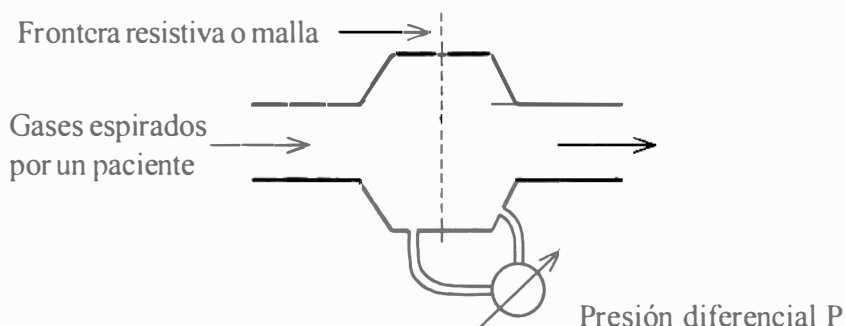


Figura 6.8 *Flujómetro del tipo tubería con obstrucción por malla.*

Este dispositivo se diseñó para medir la diferencia de presión generada por efecto de la obstrucción, que obstaculiza pero no impide el paso de los gases cuando éstos chocan con ella, porque dispone de un pequeño orificio para no bloquear totalmente el paso de los gases. Este método permite medir el flujo por medio de la siguiente relación:

$$Q_M = C \cdot A \sqrt{P}$$

en la cual

Q_M = razón de flujo (L/min = litros/minuto).

A = área del orificio (mm^2).

P = presión diferencial (cmH_2O).

C = coeficiente de descarga.

Para determinar la influencia de los errores individuales en el error total de la medición se genera la siguiente interrogante: ¿cuál es el error en la medición del flujo Q_M cuando existe error de medición en A , en P

y en C? Para contestar esta pregunta debe considerarse la propagación de estos errores utilizando la ecuación 6.9,

$$|\Delta Q_M| = \left| \frac{\partial(CA\sqrt{P})}{\partial C} \right| |\Delta C| + \left| \frac{\partial(CA\sqrt{P})}{\partial A} \right| |\Delta A| + \left| \frac{\partial(CA\sqrt{P})}{\partial P} \right| |\Delta P|$$

En esta última ecuación, ΔQ_M es el error en la medición de flujo, en tanto que ΔC , ΔA y ΔP representan los errores de medición del coeficiente de descarga, del área del orificio y de la presión diferencial, respectivamente. Por tanto, si se considera que el error de medición del área ΔA es pequeño puede ignorarse, con lo que se tiene

$$|\Delta Q_M| = A\sqrt{P}|\Delta C| + \frac{C \cdot A}{2\sqrt{P}}|\Delta P|$$

y el error adimensional de la medición es

$$\left| \frac{\Delta Q_M}{Q_M} \right| = \frac{1}{C}|\Delta C| + \frac{1}{2\Delta P}|\Delta P| = \left| \frac{\Delta C}{C} \right| + \left| \frac{\Delta P}{2P} \right| = \left| \frac{\Delta C}{C} \right| + 0.5 \cdot \left| \frac{\Delta P}{P} \right|$$

Con este último resultado se demuestra que, en términos adimensionales, el error cometido al determinar la presión ($\Delta P/P$) tiene la mitad del efecto sobre el error total de la medición ($\Delta Q_M/Q_M$), que la repercusión que sobre éste tiene el error cometido en la obtención del coeficiente de descarga ($\Delta C/C$). En consecuencia, se ha encontrado que el error más importante es el que se genera al medir este coeficiente de descarga. Por tal razón, al realizar mediciones con un flujómetro de obstrucción por malla es conveniente poner más cuidado en la determinación de este coeficiente de descarga C que en la propia medición de la presión diferencial ΔP .

Ejemplo 6.3 Espectrofotometría de absorción. La espectrofotometría de absorción es una técnica de medición utilizada para analizar una gran variedad de compuestos orgánicos e inorgánicos. En el laboratorio clínico, este método se emplea rutinariamente en los análisis cuantitativos de diversos parámetros bioquímicos. En particular, se utiliza para la determinación de glucosa, urea, creatinina, hemoglobina y otros compuestos similares.

Probablemente esta técnica es la más empleada en la mayor parte de los análisis que actualmente se practican en un laboratorio clínico. Otros campos de interés donde frecuentemente se utiliza dicha técnica se encuentran en la producción y control de calidad de fármacos y en los laboratorios de investigación.

El fundamento teórico de la espectrofotometría de absorción se basa en la interacción que se produce entre la energía electromagnética y la materia. Esta interacción se realiza en el ámbito molecular, cuando un compuesto químico se expone a un flujo radiante de energía. Sucede que cada elemento aislado en forma de ion, átomo o molécula sólo puede absorber un conjunto de niveles de energía muy definidos, los cuales corresponden exactamente a las frecuencias electromagnéticas específicas que están relacionadas con los saltos energéticos de excitación de un nivel a otro de las partículas. Por tanto, las frecuencias electromagnéticas absorbidas identifican con claridad los elementos presentes en una muestra sometida a radiación porque los átomos responden selectivamente a la excitación.

La perfección de los detectores de radiación, vinculado al adelanto general en la instrumentación moderna, ha provocado un gran desarrollo de las técnicas de medición que utilizan este principio. En la actualidad existen espectrofotómetros capaces de cubrir el espectro electromagnético desde el lejano infrarrojo hasta la totalidad del ultravioleta. En algunos casos, su sensibilidad es tan grande que pueden detectar concentraciones tan pequeñas como 0.01 y 0.001 partes por millón.

Cuando un haz de flujo radiante se hace pasar a través de un determinado medio, como un gas o un líquido, se registra una cierta pérdida de intensidad de dicho haz. Esta pérdida se produce por diversas causas, como la reflexión en las fronteras de la interfase, pero también por la dispersión propia del medio y, muy principalmente, por la absorción de energía que tiene lugar cuando las moléculas son excitadas por la energía radiante y cambian sus niveles de energía.

Por tanto, el fenómeno más importante que provoca la pérdida de energía es la absorción, la cual depende de

- a) la naturaleza del medio, es decir, de su composición; y
- b) la longitud de la trayectoria óptica en este medio.

La forma cómo este último factor influye en el fenómeno se conoce como ley de Lamber-Beer.

Ley de Lamber-Beer

La ley de Lamber-Beer, o relación que describe la forma en que la longitud de la trayectoria influye en el proceso de absorción de energía, se establece bajo las suposiciones siguientes:

- 1) El flujo radiante incidente es monocromático.
- 2) Los centros absorbentes (moléculas o iones) actúan de manera independiente unos de otros, sin tomar en cuenta su número o tipo.
- 3) La absorción está limitada a un volumen de corte seccional uniforme.

En resumen, esta ley puede expresarse en lenguaje común diciendo que:

La absorción de energía que se produce en un medio dado es directamente proporcional al número de centros de absorción que hay en dicho medio.

En esta forma, se tiene una relación directa que vincula la pérdida de energía del haz incidente con la concentración presente en el medio que atraviesa. En la figura 6.9 se observa un diagrama simple para deducir en forma analítica esta ley. Los símbolos de esta figura identifican las siguientes variables y parámetros:

P_E = flujo radiante incidente de un haz de energía luminosa en watts (W).

P_S = flujo radiante del haz de salida.

c = concentración del compuesto (g/L = gramos por litro).

b = longitud de la celda o tubo de ensaye que contiene al compuesto diluido (cm).

dx = diferencial espacial.

k = constante de absorción que depende del compuesto y de la longitud de onda de la energía luminosa.

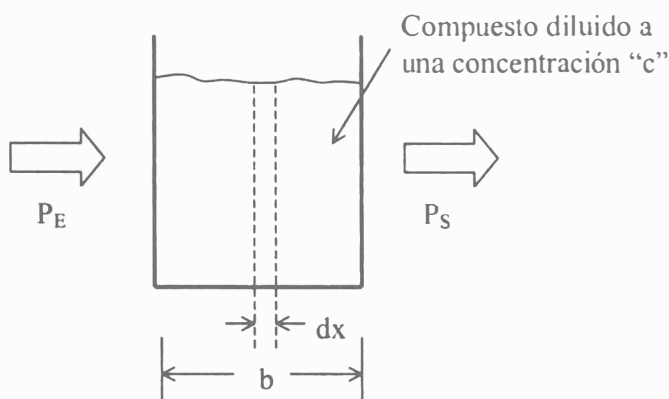


Figura 6.9 Diagrama esquemático para la deducción de la ley de Lamber-Beer.

Al aplicar las limitaciones del fenómeno de Lambert-Beer al modelo de la figura 6.9, se tiene que la disminución del flujo radiante de energía en la salida ($-dP_s$) es directamente proporcional (de acuerdo con la constante k) a la variación de la distancia (x), a la energía radiante de entrada y a la concentración del compuesto (c), según la siguiente relación:

$$-dP_s = k c P_E dx \quad (6.12)$$

Reagrupando términos se obtiene

$$-\frac{dP_s}{P_E} = k c dx$$

y al integrar de acuerdo con las fronteras del modelo resulta

$$-\int_{P_E}^{P_s} \frac{dp}{p} = \int_0^b k c dx$$

La solución de esta última ecuación es

$$-\left[\ln p\right]_{P_E}^{P_s} = -\left[\ln P_s - \ln P_E\right] = \ln \frac{P_E}{P_s} = k c b \quad (6.13)$$

Por comodidad, es conveniente definir una relación salida-entrada en forma similar a un sistema de medición, para que este resultado pueda graficarse en forma de una línea recta. Por esta razón, se definen el porcentaje del haz que se trasmite, o porcentaje de transmitancia T , y la absorbancia A , en la siguiente forma:

$$T = \frac{P_s}{P_E} \quad \text{y} \quad A = \log \frac{1}{T} \quad \therefore P_E = P_s \times 10^A \quad (6.14)$$

En consecuencia, la ecuación 6.13 queda así

$$A = \log \frac{I}{T} = \log \frac{P_E}{P_S} = -\log T = \log(e) \ln \frac{1}{T} = \log(c)kbc$$

Finalmente, si se unen las constantes k y $\log(e)$ en un solo término definiendo la absorptividad ‘ a ’, por medio de $a = \log(e) \times k = 0.43429 \times k$, se obtiene

$$A = -\log T = abc \tag{6.15}$$

Obsérvese que si T es adimensional, entonces A también lo es, por lo que las dimensiones de la absorptividad a son litros por gramo por centímetro ($L \cdot g^{-1} \cdot cm^{-1}$). En el laboratorio suelen observarse curvas de calibración como la que se muestra en la figura 6.10.

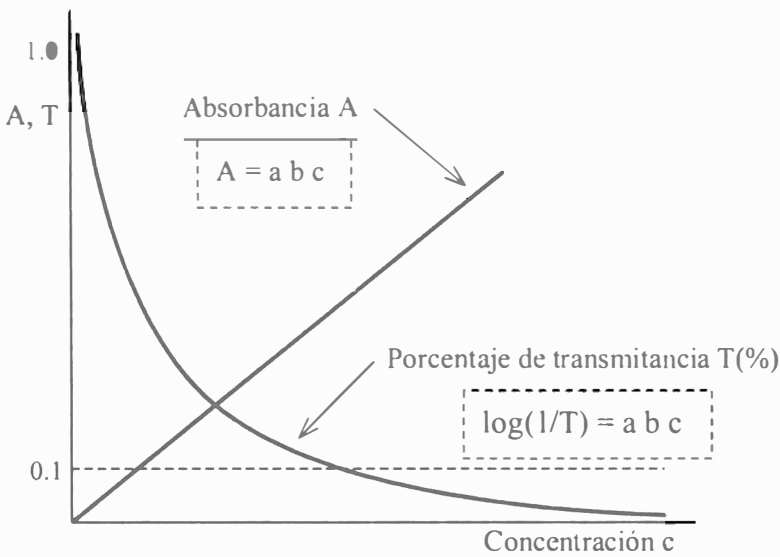


Figura 6.10 Relación gráfica de T y A contra c .

Desviaciones y errores de la ley de Lamber-Beer

La ley de Lamber-Beer puede presentar en la práctica algunas variaciones o desviaciones que la alejan de la línea recta, lo que se observa en el laboratorio al encontrar curvas de trabajo como la que se muestra en la figura 6.11. Las desviaciones de la ley de Lamber-Beer pueden darse por las siguientes causas.

- a) **Por alta concentración.** La relación lineal entre concentración y absorbancia sólo se cumple para concentraciones menores a 0.001 mg, lo cual se ha determinado en forma empírica. Al superar este límite la suposición de independencia de los centros de absorción no es válida, por lo que la línea recta tiende a saturarse.
- b) **Desviaciones químicas.** En la práctica pueden observarse varias fuentes químicas de error, por ejemplo la variación en la temperatura de la muestra, la presencia de impurezas en los solventes, las alteraciones y degradaciones que son producidas naturalmente o por agentes externos en la sustancia, la falta de control en el pH y la exposición a la energía radiante, entre otras. Estas fuentes de error, unidas a otras de diverso origen, pueden dar lugar a desviaciones positivas y negativas de la ley. Sin embargo, la más importante es la relacionada con el límite superior de la concentración para la validez de la ley. Se considera que los límites prácticos varían entre 10^{-5} y 10^{-2} para que sea válido que no existe interferencia entre los centros absorbentes y que no es necesario corregir el índice de refracción.
- c) **Desviaciones instrumentales.** Los errores de los instrumentos y del procedimiento son los más difíciles de detectar. Estos errores se deben a la presencia de radiación dispersa que sea diferente de la longitud de onda de la frecuencia seleccionada, de la fatiga de los fotodetectores, de las variaciones en el flujo radiante de la fuente luminosa, del hecho de que en la práctica la radiación considerada como

monocromática tiene efectivamente un ancho de banda asociado a su longitud de onda λ y, por último, de la propia función de error que establece por sí misma la ley de Beer.

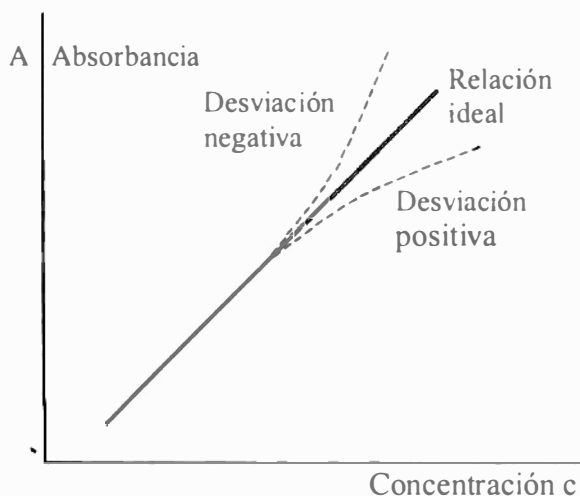


Figura 6.11 *Desviaciones de la ley de Lamber-Beer.*

Esta última desviación puede entenderse bajo los siguientes argumentos: considérese que la muestra en análisis se expone a dos diferentes longitudes de onda λ_1 y λ_2 . Esto puede deberse, por ejemplo, a imperfecciones en el monocromador. En tal circunstancia, para un mismo compuesto a la misma concentración, se tiene que la absorbancia medida A_m puede determinarse a través de

$$A_m = -\log \frac{P_{S(TOTAL)}}{P_{E(TOTAL)}} \quad (6.16)$$

donde $P_{S(TOTAL)}$ y $P_{E(TOTAL)}$ son los flujos radiantes totales de la salida y de la

entrada, respectivamente. Por otra parte, para cada longitud de onda se cumple que

$$A_1 = -\log \frac{P_{S1}}{P_{E1}} = a_1 bc \quad \text{es la absorbancia para } \lambda_1 \quad (6.17a)$$

$$A_2 = -\log \frac{P_{S2}}{P_{E2}} = a_2 bc \quad \text{es la absorbancia para } \lambda_2 \quad (6.17b)$$

Entonces,

$$\log \frac{P_{E2}}{P_{S2}} = a_2 bc \quad \therefore P_{E2} = P_{S2} 10^{a_2 bc} \quad (6.18a)$$

$$\log \frac{P_{E1}}{P_{S1}} = a_1 bc \quad \therefore P_{E1} = P_{S1} 10^{a_1 bc} \quad (6.18b)$$

Suponiendo que los niveles de radiación y absorción son bajos, puede aplicarse el principio de superposición, con lo que

$$P_{E(TOTAL)} = P_{E1} + P_{E2} \quad (6.19a)$$

$$P_{S(TOTAL)} = P_{S1} + P_{S2} \quad (6.19b)$$

Sustituyendo las igualdades 6.17 a 6.19 en la ecuación 6.16 se tiene

$$A_m = -\log \frac{P_{S1} + P_{S2}}{P_{S1} 10^{a_1 bc} + P_{S2} 10^{a_2 bc}} \quad (6.20)$$

por lo que

$$A_m = -\log(P_{S1} + P_{S2}) + \log(P_{S1} 10^{a_1 bc} + P_{S2} 10^{a_2 bc}) \quad (6.21)$$

Si en la ecuación 6.21 se cumple que a_1 es razonablemente similar a a_2 (o sea $a_1 \approx a_2 \approx a$), entonces también se cumple que $A_1 \approx A_2 \approx A$ y que $P_{s1} = P_{s2} = P_s$, en cuyo caso

$$A_m = -\log(2P_s) + \log(2P_s 10^{abc}) = \log \frac{P_{E1}}{P_{s1}} = a_1 bc$$

con lo que se demuestra que se cumple la hipótesis de Lamber-Beer.

El desarrollo anterior muestra que para aproximar la relación lineal entre la concentración c y la absorbancia A deben realizarse mediciones en aquella región del espectro de absorción donde no haya cambios significativos de la absortividad a .

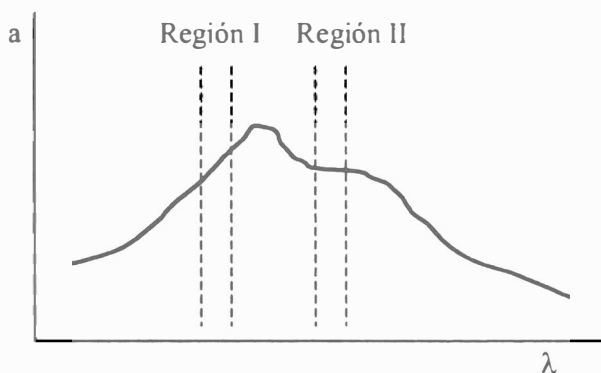


Figura 6.12 Regiones de la longitud de onda λ con diferente variabilidad de a .

Lo anterior puede comprobarse gráficamente observando la figura 6.12. En la región I, el coeficiente a presenta una variación significativa para un pequeño cambio de λ , mientras que en la región II es práctica-

mente constante. Los resultados para ambas regiones se observan gráficamente en la figura 6.13.

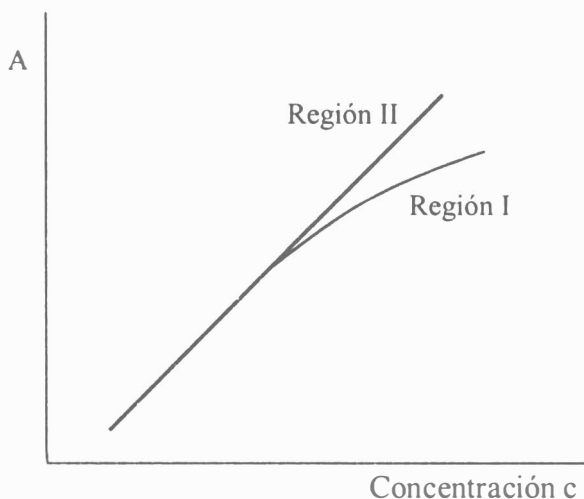


Figura 6.13 Error en el cálculo de A por las variaciones de a .

Errores analíticos. La ecuación de Lamber-Beer, vista desde el punto de vista de la propagación del error, puede considerarse como un sistema de medición descrito por la relación salida-entrada de la figura 6.14.

El sistema de esta figura permite responder a la pregunta ¿cuál es el comportamiento del error en el cálculo de concentración, dados los errores (deterministas) de los parámetros del sistema?

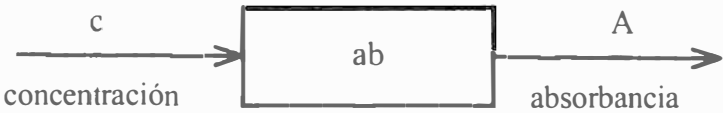


Figura 6.14 *La ecuación de Lamber-Beer vista como un sistema de medición.*

La respuesta se obtiene despejando la variable c de la ecuación 6.15:

$$c = \frac{-\log T}{ab} = -\frac{0.43429}{ab} \ln T$$

en la cual se tiene que al aplicar la ecuación 6.9,

$$\text{error en } c = |\Delta c| = \left| \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a \right|$$

En esta última ecuación, ΔT , Δb y Δa son los errores estimados para cada uno de estos parámetros.

Además, por razones prácticas y de instrumentación como las que ya se analizaron, debe suponerse lo siguiente:

- | | |
|------------------------|---|
| $\Delta a = 0$ | Siempre y cuando se mida en una región como la ya descrita, donde a y λ son aproximadamente constantes (Región II de la Fig. 6.12). |
| $\Delta b = 0$ | Es evidente que su valor tiene que ser estrictamente diferente de cero; sin embargo, por comparación con los demás resulta ser muy pequeño, por lo que puede ignorarse. Por último, |
| $\Delta T = \pm 0.5\%$ | En consecuencia, este error es el que debe considerarse como el más importante. |

En esta forma, se tiene que

$$|\Delta c| = \left| \frac{d}{dT} \left(\frac{-0.43429}{ab} \ln T \right) \right| |\Delta T| = \left(\frac{0.43429}{abT} \right) |\Delta T|$$

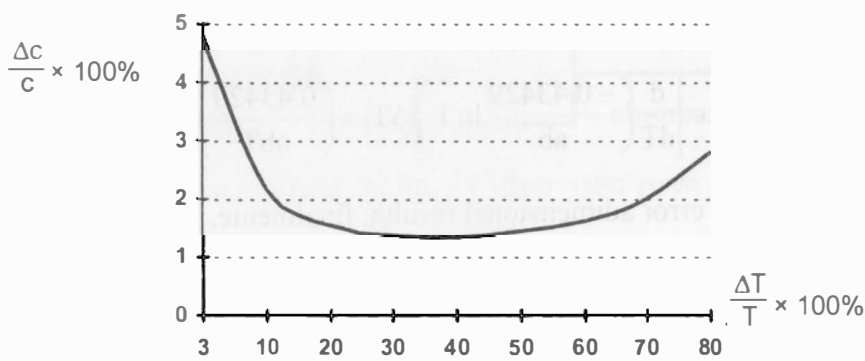
Por lo tanto, el error adimensional resulta, finalmente,

$$\frac{|\Delta c|}{c} = \frac{0.43429}{\log T} \cdot \frac{|\Delta T|}{T}$$

Cuando la expresión anterior se tabula, se obtienen los valores que se observan en la tabla 6.1. El error obtenido se muestra gráficamente en la figura 6.15.

TABLA 6.1 RELACIÓN ENTRE T Y EL ERROR ADIMENSIONAL DE LA CONCENTRACIÓN c

DT/T	Dc/c
0.80	2.80
0.70	2.00
0.60	1.63
0.50	1.44
0.40	1.36
0.30	1.38
0.20	1.55
0.10	2.17
0.03	4.75



A partir de estos resultados puede concluirse que, para minimizar el error, el procedimiento más adecuado consiste en realizar mediciones en concentraciones cuyas lecturas puedan estar entre el 20 y el 53% de la transmitancia. Así, se logrará un error de medición inferior al 1.5% en la estimación de la concentración.

6.4 Propagación del error aleatorio

Los errores determinista y aleatorio sólo difieren entre sí por su comportamiento y por la forma en que pueden caracterizarse y establecerse. Por una parte, el error determinista generalmente se especifica en términos de más/menos un intervalo de variación (Δ) para señalar el margen de incertidumbre ya que, por ejemplo, la variable x con error determinista suele escribirse $x \pm \Delta x$. Por otra parte, el error aleatorio se especifica en términos de su comportamiento estadístico a través de la desviación estándar del error (σ) ya que, por ejemplo, en este caso la misma variable se especifica $x \pm \sigma_x$. Aunque ambas expresiones pare-

cen equivalentes, la distinta naturaleza de estos dos errores conduce a diferentes resultados cuando se trata de establecer la forma en que se propagan, como se demostrará a continuación.

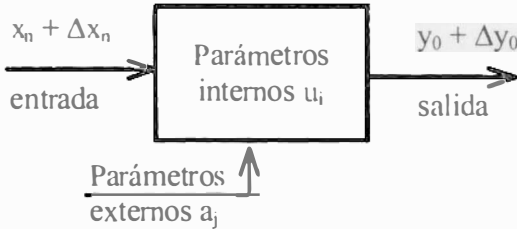


Figura 6.16 *Modelo de un solo bloque para la propagación del error aleatorio.*

En forma similar al análisis de la propagación del error determinista, pero aplicando la notación del modelo de un solo bloque de la figura 6.16 y considerando que la relación salida-entrada está determinada a través de la función f por la entrada x_n , los $n - 1$ parámetros internos u_i y los m parámetros externos a_j , se tiene

$$y_0 \pm \Delta y_0 = f(x_n \pm \Delta x_n, x_1 \pm \Delta x_1, \dots, x_{n-1} \pm \Delta x_{n-1}, a_1 \pm \Delta a_1, \dots, a_m \pm \Delta a_m) \quad (6.22)$$

en la cual, sin pérdida de generalidad, $x_n \pm \Delta x_n$ puede tomarse como un parámetro u_n adicional. Además, considerando el resultado obtenido para el error determinista con la expansión realizada en las ecuaciones 6.6 y 6.7, es posible expresar el error Δy_0 en la siguiente forma:

$$\pm \Delta y_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \Delta u_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta a_j \quad (6.23)$$

Cuando se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación 6.23, se tiene

$$(\pm \Delta y_0)^2 = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \Delta u_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta a_j \right]^2$$

$$\Delta y_0^2 = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \Delta u_i \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta a_j \right]^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta u_i \Delta a_j$$

En esta última expresión se toma el valor esperado en ambos miembros, usando la notación $E[\bullet]$, con lo que se obtiene

$$E[\Delta y_0^2] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_i} \Delta u_i \right)^2 \right] + E \left[\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_j} \Delta a_j \right)^2 \right] +$$

$$E \left[2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial(f)}{\partial u_i} \frac{\partial(f)}{\partial a_j} \Delta u_i \Delta a_j \right) \right] \quad (6.24)$$

Aplicando al último término del segundo miembro las propiedades de linealidad del operando valor esperado, es posible escribir

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial a_j} E(\Delta u_i \Delta a_j) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial f}{\partial a_j} E(\Delta u_i) E(\Delta a_j) \quad (6.25)$$

En esta última ecuación se observa claramente que los parámetros Δu_i y Δa_j son variables aleatorias independientes, con la particularidad de que sus valores esperados son cero, o sea

$$E(\Delta u_i) = E(\Delta a_j) = 0$$

Con este resultado se tiene que la ecuación 6.25 es igual a cero y la ecuación 6.24 puede reinterpretarse como

$$\sigma_{y_0}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right)^2 \sigma_{u_i}^2 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial a_j} \right)^2 \sigma_{a_j}^2 \quad (6.26)$$

Ejemplo 6.4 Medición de corriente eléctrica. Se desea medir, en forma indirecta, la corriente de la malla eléctrica que se muestra en la figura 6.17. El método consiste en utilizar una resistencia de 1Ω para no interferir en la carga R_c y medir el voltaje desarrollado en la misma. La tolerancia de la resistencia está dada por $R = 1 \Omega \pm 10^{-7} \Omega$. Además, en forma experimental se obtienen con un voltmetro de $3\frac{1}{2}$ dígitos las mediciones que aparecen en la tabla 6.2. Para los propósitos de este ejemplo la medición se considera libre de error, lo cual significa que la precisión es igual a uno.

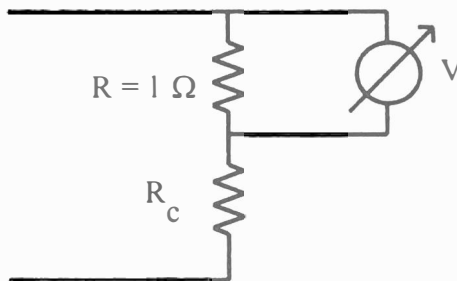


Figura 6.17 Malla eléctrica para el ejemplo 6.4.

TABLA 6.2 MEDICIONES OBTENIDAS EN EL EJEMPLO 6.4

v	v - $\bar{v}$	(v - $\bar{v}$) ²
3.00	0.01	0.0001
3.01	0.02	0.0004
2.93	-0.06	0.0036
2.99	0.0	0.0000
3.07	0.08	0.0064
2.89	-0.1	0.0100
3.03	0.04	0.0016
3.01	0.02	0.0004
2.98	-0.01	0.0001
2.95	-0.04	0.0016
2.97	-0.02	0.0004
3.05	0.06	0.0036

A partir de los datos de la tabla se tiene

$$\bar{v} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} v_i = 2.99$$

$$\sum_{i=1}^{12} (v - \bar{v})^2 = 0.0282$$

$$\therefore \sigma_v^2 = 2.5636 \times 10^{-3} \text{ y } \sigma_v = 5.063 \times 10^{-2}$$

Tomando en consideración estos resultados y la propagación de las fuentes de error en la relación $I = V/R$, se tiene

$$\sigma_I^2 = \left(\frac{\partial \frac{V}{R}}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial \frac{V}{R}}{\partial V} \right)^2 \sigma_V^2 = \left(\frac{V}{R^2} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{1}{R} \right)^2 \sigma_V^2$$

y en forma adimensional resulta

$$\left(\frac{\sigma_I}{I} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_R}{R} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_V}{V} \right)^2$$

En esta expresión se observa que la tolerancia de R (que en realidad es un error determinista) y el voltaje pueden considerarse como

$$\sigma_R = 10^{-7} \Omega \quad \text{y} \quad V = 2.99 \text{ V}$$

Finalmente, el error relativo o adimensional de la medición de I , o sea σ_I / I , está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_I}{I} &= \sqrt{\left(\frac{5.063 \times 10^{-2}}{2.99} \right)^2 + \left(\frac{10^{-7}}{1} \right)^2} = \frac{5.063 \times 10^{-2}}{3.0} \\ &= 1.693 \times 10^{-2} = 0.0169 = 1.69\% \end{aligned}$$

y puesto que el segundo término del argumento de la raíz se ignoró, el error con el que se medirá la corriente es

$$\sigma_I = 1.6933 \times 10^{-2} \times 2.99 = 5.063 \times 10^{-2} \approx 0.051 \text{ A}$$

Ejemplo 6.5 Operaciones con números aproximados. Se desea determinar la propagación del error cuando se realizan operaciones aritméticas con números aproximados, por lo que el problema consiste en determinar el error en el resultado de la operación con números que contienen una incertidumbre. Se considerará el caso de la evaluación de los errores de la suma, la multiplicación, la inversión y las funciones de un argumento cuando se tienen números aproximados.

Suma. En este caso se tiene que los sumandos A y B se expresan como

$$\text{sumando A} = A \pm \sigma_A$$

$$\text{sumando B} = B \pm \sigma_B$$

por lo que el resultado de la operación es $R = A + B$ y los errores absoluto σ_R y adimensional σ_R/R se calculan aplicando la ecuación 6.26. Por tanto,

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

$$\frac{\sigma_R}{R} = \frac{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}}{A + B}$$

Producto. Considerando que esta vez el resultado es $R = A \times B$, en forma análoga al caso de la suma los errores del producto de tipo absoluto σ_R y adimensional σ_R/R son los siguientes:

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial A}\right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial B}\right)^2 \sigma_B^2} = \sqrt{B^2 \sigma_A^2 + A^2 \sigma_B^2}$$

$$\frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{A^2} + \frac{\sigma_B^2}{B^2}}$$

Inversión 1/A. Aplicando directamente la ecuación 6.26, se tiene que los errores absoluto y adimensional en el cálculo de $1/A$ (denotados por $\sigma_{1/A}$ y $A\sigma_{1/A}$, respectivamente) están dados por

$$\sigma_{1/A} = \left| \frac{d(1/A)}{dA} \right| \sigma_A = A^{-2} \sigma_A = \frac{\sigma_A}{A^2}$$

$$\frac{\sigma_{1/A}}{1/A} = A \sigma_{1/A} = \frac{\sigma_A}{A}$$

Estos resultados señalan que el error absoluto que se obtiene al calcular el inverso de un número depende mucho del valor de dicho número, pudiendo crecer excesivamente cuando se tiene que $A < 1$. Sin embargo, los errores adimensionales (o porcentuales) de A y de $1/A$ son iguales.

Función $f(A)$. El argumento único A contiene en este caso un error dado por σ_A , por lo que para evaluar la función $f(x)$ en el punto $x_0 = A$ puede utilizarse la expansión en serie de Taylor, como en las ecuaciones 6.6 y 6.7, suponiendo que el error $\sigma_A = \varepsilon$:

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm \varepsilon) &= f(x_0) \pm \varepsilon \times \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \pm \frac{\varepsilon^2}{2!} \times \left| \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \pm \\ &\pm \frac{\varepsilon^3}{3!} \times \left| \frac{d^3f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} \pm \dots \end{aligned}$$

$$f(x_0 \pm \varepsilon) = f(x_0) \pm \varepsilon \times \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \pm \text{residuo}$$

Cuando $\varepsilon < 1$, puede esperarse que los términos de orden superior disminuyan en forma apreciable, por lo que el residuo se ignora y

$$f(A \pm \sigma_A) \approx f(A) \pm \sigma_A \times \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=A} = f(A) \pm \sigma_{f(A)}$$

Finalmente, los errores absoluto y adimensional son

$$\sigma_{f(A)} = \sigma_A \times \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=A}$$

$$\frac{\sigma_{f(A)}}{f(A)} = \frac{\sigma_A}{f(A)} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=A}$$

La expresión para $\sigma_{f(A)}$ equivale a linealizar la función $f(x)$ en el punto $x = A$, como se muestra en la figura 6.18. En esta figura también se observa claramente que, para el caso de la evaluación de funciones con argumento aproximado, el error en el resultado del cálculo no depende únicamente del error del argumento, sino que la pendiente de la curva en el punto de evaluación tiene una influencia determinante ya que puede incrementar o atenuar fuertemente el efecto de la propagación del error. En consecuencia, para evitar que el error crezca desmesuradamente debe cuidarse la evaluación de funciones en los puntos en que su derivada es mayor que uno, limitando al máximo el error σ_A de la variable.

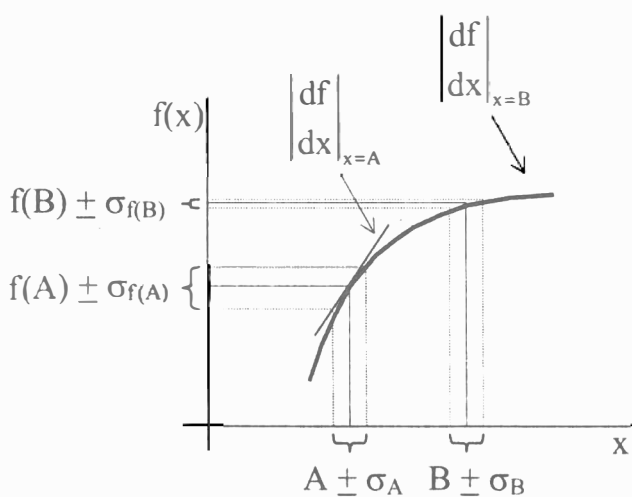


Figura 6.18 Propagación del error al evaluar una función con argumento aproximado.

Capítulo 7

El instrumento electrónico digital

7.1 Introducción

La historia de la instrumentación señala que los primeros instrumentos fueron desarrollados a partir de dispositivos mecánicos muy simples como la regla, la balanza, el compás y el reloj de arena, puesto que estaban destinados a la medición de mesurandos muy elementales como la longitud, la masa, el ángulo y el tiempo. A pesar de su sencillez, fueron ingeniosamente utilizados durante siglos para realizar las más diversas mediciones que permitieron llegar incluso a estimar la distancia de la tierra a la luna y el diámetro de ésta, así como los ángulos de salida del sol y de los planetas para predecir la ocurrencia de los equinoccios y los eclipses, entre otros interesantes resultados.

Como puede suponerse, la exactitud de las mediciones realizadas con tales instrumentos, aunque era muy precaria, resultaba apropiada para las necesidades de aquellos tiempos. Sin embargo, poco a poco las exigencias del desarrollo del comercio, de la ciencia y de la tecnología requirieron no sólo medir los nuevos mesurandos que se iban descubriendo, sino que también fue necesario que todas las mediciones se hicieran con mayor exactitud. Con esta motivación se impulsó el desarrollo de nuevas técnicas y e instrumentos que en la actualidad proporcionan al experimentador una mayor seguridad en relación con los resultados numéricos obtenidos. Por tales razones, la antigua medición

de distancia o desplazamiento ha evolucionado de la simple regla a la utilización de refinadas técnicas ópticas y electrónicas, en tanto que la medición del tiempo ha cambiado desde la clepsidra y el reloj de arena hasta los actuales relojes atómicos basados en la resonancia, pasando por el simple y exitoso método de Galileo de contar las oscilaciones de un péndulo.

Algunos mesurandos son los mismos de siempre, pero otros no eran conocidos hace uno o dos siglos ya que el desarrollo de las ciencias ha ido empujando sin descanso al rudimentario arte de la medición hasta transformarlo en la actual ciencia que destaca por la enorme precisión con que puede entregar los resultados. Por ejemplo, en la actualidad el patrón de distancia o desplazamiento puede establecerse con una incertidumbre inferior a una cienmilésima de milímetro, el de masa con una imprecisión mucho menor a una diezmilésima de gramo y el de tiempo con un error de un segundo en trescientos mil años.

Sin embargo, así cómo ha evolucionado la precisión de la medición, también han cambiado las técnicas y los principios empleados para obtener los resultados en forma rápida y confiable. Los primitivos sistemas mecánicos unidos a la electrónica consiguieron mayor velocidad, mejor resolución, compensaciones, mecanismos de control y más precisión, aunque en la mayor parte de los casos fueron sustituidos por otros principios físicos de respuesta más rápida. Tales principios están asociados a los metales, a diversos compuestos y a los semiconductores que fueron utilizados para detectar mesurandos, para servir de referencia en las mediciones o para amplificarlos, acondicionarlos o procesarlos por medio de la electrónica analógica. Por esta razón, no es extraño que las técnicas digitales que la electrónica emplea cada vez con mayor amplitud también se utilicen ampliamente en instrumentación para aprovechar las ventajas que ofrecen y dar mayor seguridad a los sistemas de medición y a sus resultados.

Las técnicas digitales de la electrónica no sólo han generado los sistemas de cómputo que van desde las grandes computadoras hasta las

computadoras personales y los microprocesadores, sino que también han mejorado las características de los enlaces telefónicos a través de la codificación digital de la voz, han proporcionado mayor seguridad a los sistemas de control digital y han iniciado una serie de cambios en los sistemas comerciales de audio y de video que incluyen la grabación, la radio y la televisión, los cuales provocarán en los años próximos un cambio total orientado hacia la representación digital de todas las telecomunicaciones. De estos efectos no ha estado ausente la instrumentación, que ha ido incorporando cada vez más elementos digitales para mejorar la operación de los sistemas de medición, lo que ha dado lugar al nacimiento de la instrumentación digital.

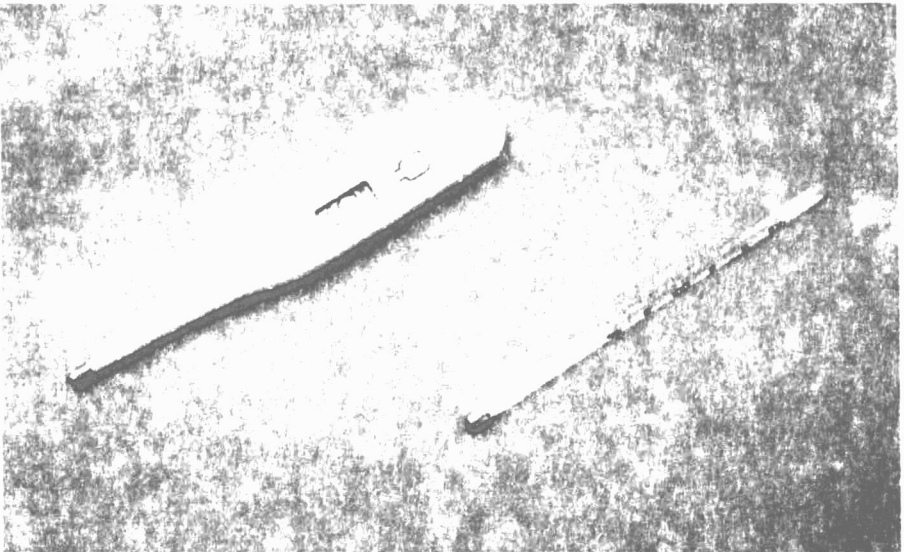


Foto 7.1 Hasta los instrumentos más sencillos, como el termómetro, pueden procesar electrónicamente la información, y son muy pocos los instrumentos no electrónicos que aún pueden competir, como el termómetro tradicional de mercurio.

Hoy en día, la mayor parte de los instrumentos biomédicos modernos procesan su información en forma digital. Sólo algunos instrumentos muy sencillos, como el termómetro de mercurio, permanecen aún en uso sin utilizar procesamiento electrónico. Sin embargo, gracias a las importantes reducciones en tamaño y costo que han experimentado los microprocesadores, unidas a la enorme capacidad y velocidad de procesamiento, así como a la flexibilidad de las aplicaciones digitales, incluso los instrumentos más elementales pueden incorporar microprocesadores. Un ejemplo de éstos es el termómetro digital, que compete con el muy conocido termómetro de mercurio tanto en tamaño como en precio (Foto 7.1).

7.2 Modelo estructural de un instrumento digital

Para realizar con éxito una medición debe considerarse que la función básica de un sistema de medición es detectar el mesurando para el que está diseñado pero, como el carácter de los mesurandos es básicamente analógico, no puede desarrollar todas sus funciones exclusivamente con métodos y principios digitales, por lo que sólo algunas partes del instrumento estarán basadas en estas técnicas. Esto significa que en la actualidad no es posible analizar un instrumento digital sin considerar como un elemento muy importante los procesos analógicos que debe llevar a cabo, el acondicionamiento de las señales y el tratamiento realizado al mesurando. En consecuencia, las versiones analógica y digital de un mismo sistema de medición no tienen grandes cambios estructurales, sino más bien lo que se modifica es básicamente la forma en que manejan el procesamiento del mesurando. Una forma de analizar estas diferencias es a partir de un diagrama que destaque en forma de bloques tanto la estructura general como la función de sus partes analógicas y digitales [14].

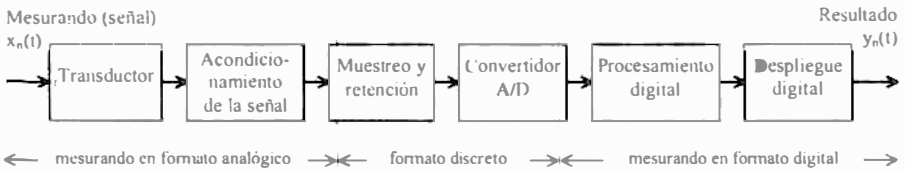


Figura 7.1 *Diagrama de bloques de un instrumento digital.*

7.2.1 Diagrama de bloques

En la figura 7.1 se muestra un diagrama general y esquemático de un instrumento que utiliza técnicas digitales para realizar sus funciones. La principal característica que puede apreciarse en este diagrama es que hay dos grandes bloques separados por una etapa intermedia responsable de la conversión. La primera etapa funciona virtualmente en la misma forma que en el caso del instrumento analógico, mientras que la última presenta marcadas características digitales puesto que es en esta parte donde intervienen tales técnicas. La etapa intermedia que las une cumple con la función de modificar el formato analógico del mesurando y transformarlo en el formato digital para que pueda procesarse adecuadamente.

7.2.2 Descripción de los bloques

Transducción y acondicionamiento del mesurando. En los primeros bloques la operación del instrumento digital no difiere del analógico, excepto porque en ocasiones se aprovecha la enorme capacidad y velocidad de los sistemas digitales para medir y procesar en forma simultá-

nea varios mesurandos o señales. En tal caso las mediciones se canalizan en paralelo (como se analizó en la sección **2.6 Modelos de otros instrumentos y sistemas de medición** del Cap. 2; véase la Fig. 7.2), desde el punto en que los mesurandos son capturados hasta la etapa de muestreo, retención y multicanalización, en la cual se procesan muy rápidamente uno tras otro en la secuencia prevista.

En esta última etapa las muestras se disponen en una secuencia pre-determinada, con lo que se completa la transformación del formato analógico al discreto de cada una de ellas. De este modo es posible transmitir las o situarlas a todas en la misma línea o canal (proceso que se conoce como multicanalización), y con ello se facilita el proceso de conversión analógico a digital (A/D). En esta forma todas las señales se transforman a un determinado formato digital que requiere la unidad de procesamiento. En consecuencia, el sistema necesita una unidad de sincronía para muestrear una por una todas las salidas de los amplificadores y ordenar estas muestras en la secuencia previamente establecida, organizándola por medio de señales de control o de sincronía.

Con excepción del muestreo masivo, de las señales de control y de la organización de las muestras en secuencia, el sistema de la figura 7.2 no difiere sustancialmente de los sistemas que miden un solo mesurando o una sola señal, porque en este caso también se realizan los procesos de muestreo y retención previos a la conversión A/D.

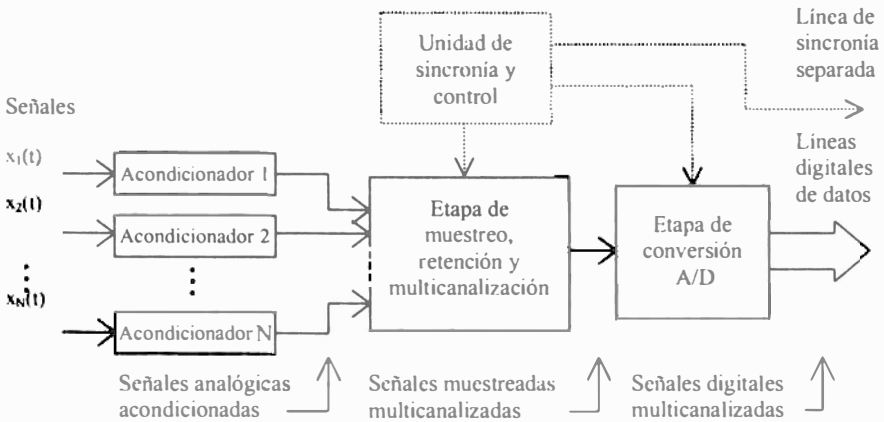


Figura 7.2 Diagrama esquemático general de un sistema de adquisición de señales.

Muestreo y retención. Este proceso consiste en la obtención del valor presente (actual) del mesurando correspondiente, lo que se logra generalmente por medio de la carga de un pequeño capacitor C que se conecta brevemente en paralelo con el mesurando. Debido a que para este propósito se utilizan interruptores de circuito integrado, la constante de tiempo de carga de C es muy pequeña (usualmente del orden de los nanosegundos), mientras que la constante de tiempo de descarga es muy grande. Por tal razón, puede suponerse que se mantiene perfectamente constante durante el breve tiempo durante el cual este valor es retenido para realizar la conversión A/D.

Convertidor A/D. El muestreo significa que el tiempo continuo del mesurando o de la señal se ha hecho discreto, no así su amplitud. Por ello, en esta etapa se establece un número fijo máximo de valores discretos de amplitud (proceso que se conoce como cuantización) y se asigna a cada uno de ellos un código digital previamente establecido. Como puede comprenderse, en esta etapa es donde se lleva a cabo pro-

piamente la transformación al dominio digital elegido, por lo que los circuitos más comúnmente utilizados con este propósito se denominan convertidores A/D y se analizarán con detalle más adelante. También conviene mencionar que el proceso inverso o de conversión digital a analógico (D/A) es útil para hacer compatibles con el mundo analógico a las señales procesadas y como bloque integrante de algunas configuraciones de convertidores A/D.

Procesamiento. En esta etapa del instrumento, el mesurando (o el conjunto de mesurandos del sistema de adquisición de señales) se encuentra codificado en forma de una serie de números digitales que pueden considerarse como datos de entrada a la unidad de procesamiento. Esta última puede ser un sistema digital especialmente diseñado, un microprocesador, un procesador digital de señales o incluso una computadora. El tipo de procesamiento que se realice al mesurando (o mesurandos) dependerá de los parámetros que interese extraer de la (o las) señales, lo que se codifica especialmente en la memoria del procesador en forma de un programa de cómputo y se ejecuta automáticamente o por medio de una interfaz con el usuario del instrumento.

Todos estos procesos pueden resumirse en forma de transformaciones que experimenta la señal de entrada al sistema de medición. El mesurando $x_n(t)$ puede considerarse como perteneciente a un conjunto de señales analógicas caracterizadas por estar definidas en un dominio temporal continuo equivalente a los números reales ($\mathbf{IR}$), que toman valores en un segundo dominio también equivalente a los números reales, por lo que en la entrada del instrumento $x_n(t)$ puede describirse como

$$x_n : \mathbf{IR} \rightarrow \mathbf{IR} \quad \text{mesurando en formato natural o eléctrico}$$

Las primeras etapas de la figura 7.1 que corresponden a la sección analógica del instrumento esta condición no se altera, ya que en estos

bloques el mesurando x_n sólo se amplifica, se acondiciona y se transforma de un dominio físico a otro sin que deje de ser analógico y de amplitud continua. Por ejemplo, si x_n es una variable mecánica (p. ej., presión) se convierte a una variable eléctrica (ya sea voltaje o corriente), al mismo tiempo que puede amplificarse, filtrarse o usarse para modular una portadora.

Sin embargo, el proceso que realiza la etapa de muestreo y retención del valor muestreado es de naturaleza muy distinta, ya que discretiza el dominio temporal al tomar una muestra cada cierto tiempo y descartar definitivamente los demás valores intermedios. Con ello, el dominio temporal se hace equivalente a los números naturales (**IN**), por lo que en estas etapas de formato discreto el mesurando debe representarse

$$x_{n1} : \mathbf{IN} \rightarrow \mathbf{IR} \quad \text{mesurando muestreado}$$

El siguiente proceso que se realiza para efectuar la conversión A/D es la limitación de los valores de amplitud que puede tomar el mesurando, ya que sólo se conservan algunos y se descartan los demás. Este procedimiento llamado cuantización produce la discretización del segundo dominio de x_n haciendo que éste también sea equivalente a los números naturales, aunque en realidad se trata de un conjunto finito de números reales, por lo que al cuantizar se tiene

$$x_{n2} : \mathbf{IN} \rightarrow \mathbf{IN} \quad \text{mesurando muestreado y cuantizado}$$

Por último, debido a que la capacidad de manejo numérico de los sistemas digitales (tanto en sus formatos entero como real) se encuentra limitada a una colección finita de valores del tipo correspondiente, los niveles de la cuantización también están limitados a un subconjunto de los números naturales (**IN**) que se denotará **IM** $\subset$ **IN**. En consecuencia, se tiene que en el formato digital el mesurando x_{n3} cumple con

$$x_{n3} : \mathbf{IN} \rightarrow \mathbf{IM} \quad \text{mesurando digitalizado}$$

A pesar de que la transformación experimentada por el mesurando de x_n hasta x_{n3} pareciera que lo hace perder algunas de sus características, en realidad se trata prácticamente del mismo mesurando aunque en otra forma, que es más adecuada al procesamiento digital. Además, el hecho de que **IM** sea un subconjunto de los números naturales no significa que éste no pueda representar a un conjunto de números reales ya que (por ejemplo) para ello **IM** puede multiplicarse por cualquier factor y tenerse una equivalencia con un subconjunto de los números reales que es equivalente a **IM**.

Despliegue digital. El último bloque de las etapas digitales sólo tiene como propósito informar al usuario del resultado de la o las mediciones, por lo que este bloque consiste en uno o varios indicadores visuales numéricos, una pantalla de cristal líquido de puntos o un monitor gráfico al estilo de cualquier computadora personal, lo que dependerá de la complejidad de los resultados obtenidos con el procesamiento y del diseño del sistema de medición.

7.3 Acondicionamiento de la señal analógica

Existe una gran variedad de transductores y sensores para adquirir mensurandos de diversos tipos, por lo que en esta parte cada instrumento es diferente. Sin embargo, todos los instrumentos digitales requieren de alguna forma de acondicionamiento previo a la digitalización, la cual puede ser: amplificación, aislamiento, linealización, filtrado, etc. En algunos casos, los sensores comerciales ya incluyen en el circuito integrado un primer circuito de acondicionamiento, pero aún en esos casos puede ser necesario agregar una etapa adicional, según el diseño del instrumento en cuestión.

En esta sección se presentan las técnicas más utilizadas en las etapas de acondicionamiento y procesamiento de señales electrónicas, con un enfoque práctico y apoyado en ejemplos específicos de instrumentos biomédicos. No se pretende presentar el marco teórico de la electrónica analógica, lo cual queda fuera de los objetivos de este libro. Por ello, se supone que el lector está familiarizado con los fundamentos de la electrónica y de la computación y puede consultar otros textos especializados que cubren detalladamente y con más profundidad la electrónica [11, 12, 20]. En este capítulo se presentan más bien soluciones prácticas a problemas comunes en el diseño de instrumentación biomédica, con el propósito de facilitar su implantación rápida y eficaz.

7.3.1 Procesamiento analógico y(o) procesamiento digital

En el modelo de instrumento que se presentó en la sección anterior se muestra el diseño típico de un instrumento en el cual el procesamiento de la señal se divide en tres etapas: acondicionamiento o preprocesamiento, conversión analógico a digital, y procesamiento digital. En la primera etapa se utiliza electrónica analógica para acondicionar la señal proveniente del transductor antes de que se realice la conversión, lo que se prepara en *hardware*. En la última etapa, la señal digital debe ser procesada por un sistema de cómputo o por un microprocesador de acuerdo con un algoritmo, es decir en *software*.

El procesamiento digital también puede implantarse en hardware con circuitos digitales en algunos casos, pero esta opción no tiene sentido si el procesamiento necesario implica más que un nivel mínimo de complejidad y se piensa utilizar un microprocesador programable. En la actualidad se ha popularizado el uso de procesadores digitales de señales (DSP, por sus siglas en inglés) para aplicaciones de alta complejidad, pero éstos no son más que microprocesadores especializados para pro-

cesamiento digital masivo y de alta velocidad. La mayoría de las necesidades de procesamiento pueden desarrollarse tanto en forma analógica como digital, es decir, en hardware o software. Suponiendo que la complejidad del procesamiento necesario justifica el uso de un microprocesador (condición que, con los precios que alcanzan actualmente en el mercado, se cumple casi siempre), ya sea por sus ventajas de costo o su flexibilidad de diseño, las soluciones digitales son preferibles en la mayor parte de los casos.

Por otra parte, las soluciones analógicas pueden reducir significativamente las necesidades del sistema digital en cuanto memoria, velocidad de procesamiento y resolución, por lo que vale la pena que se implanten en hardware. Por ejemplo, es mejor amplificar una señal con un amplificador operacional para aprovechar al máximo la escala y la resolución del convertidor A/D, que utilizar por debajo de sus capacidades reales a un convertidor de mayor resolución y mucho mayor costo.

7.3.2 Técnicas analógicas de procesamiento

En casi todas las mediciones biomédicas, las señales que se obtienen ya sea con electrodos como en el caso de los potenciales biológicos, o mediante diversos transductores, son con frecuencia muy pequeñas, por lo que requieren amplificación. El diseño de circuitos para realizar esta función se ha facilitado mucho con el desarrollo del amplificador operacional (Amp-Op). Este tipo de circuito integrado permite el diseño de sistemas analógicos para la adquisición y el posterior procesamiento de señales con un costo y una complejidad relativamente bajos, por medio de una diversidad de amplificadores, comparadores y filtros. A continuación se presentan el modelo del Amp-Op y los circuitos de aplicación más utilizados en instrumentación biomédica.

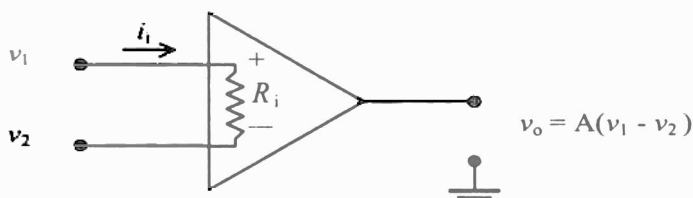


Figura 7.3 Modelo simplificado de un amplificador operacional

El amplificador operacional puede verse como un circuito ideal que puede modelarse, de acuerdo con la figura 7.3, de la siguiente manera:

1. $v_o = A(v_1 - v_2)$ y $A \cong \infty$
2. $i_i \cong 0$, es decir $R_i \cong \infty$
3. Si $-V_{cc} < v_o < +V_{cc}$ (en la escala lineal del amplificador), entonces $v_1 = v_2$

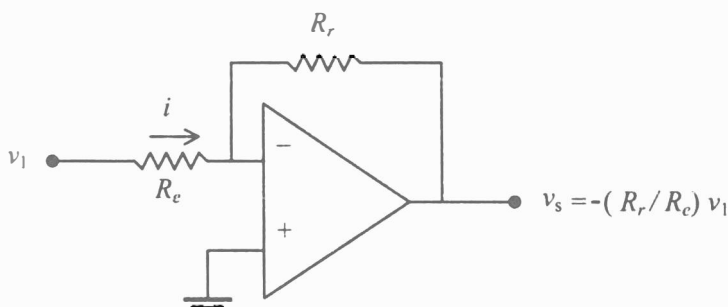


Figura 7.4 Amplificador inversor. La señal de salida se alimenta a la entrada negativa para obtener un voltaje de salida inversamente proporcional a la resistencia R_r .

Amplificadores y sumadores. La necesidad más común de acondicionamiento de señales de un instrumento es la amplificación, la cual permite hacer la interfaz para los potenciales bioeléctricos entre los sensores y la electrónica de procesamiento y despliegue del instrumento. La realimentación negativa permite utilizar amplificadores operacionales para que las señales sean amplificadas linealmente. Con esta clase de realimentación el voltaje de salida del amplificador se conecta a la terminal negativa de la entrada, con lo que además se controla la ganancia neta del amplificador. El uso del amplificador operacional realimentado, además, proporciona una alta impedancia de entrada, una baja impedancia de salida y un ancho de banda más amplio.

Amplificador inversor. El amplificador más sencillo es el que se muestra en la figura 7.4, el cual tiene una ganancia negativa porque produce la inversión de las señales de entrada. En este circuito la señal de la salida es alimentada de nuevo a la terminal de entrada negativa, con lo que se obtiene un voltaje de salida inversamente proporcional a la resistencia del lazo de realimentación.

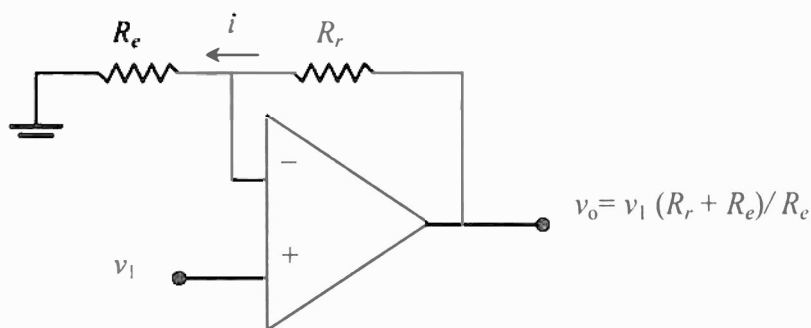


Figura 7.5 Amplificador no inversor. La salida de este circuito es positiva y directamente proporcional a la suma de las resistencias de la salida a tierra.

Amplificador no inversor. Cuando el circuito anterior se modifica como aparece en la figura 7.5 se obtiene una variante de la misma idea, con la diferencia de que en este caso la salida no es invertida, aunque tiene la limitante de que la ganancia ya no depende de un solo elemento. En este caso la entrada se alimenta a la entrada positiva, y la corriente de realimentación se controla con una resistencia conectada a tierra.

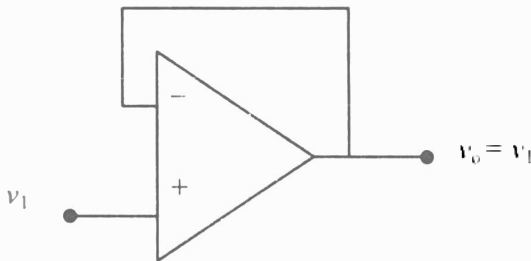


Figura 7.6 *Amplificador seguidor. Este circuito sirve de interfaz para acoplar las impedancias de entrada y de salida de dos sistemas.*

Amplificador seguidor. Una variante muy útil del amplificador no inversor es el amplificador de ganancia unitaria de la figura 7.6, que se usa normalmente como interfaz entre una fuente generadora de señal de alta impedancia y un sistema de medición de baja impedancia. El circuito no amplifica el potencial de la señal, pero permite que la siguiente etapa utilice más corriente de la que la fuente es capaz de proporcionar. De lo contrario, al tratar de medir una señal de alta impedancia con un sistema que no tiene una impedancia de entrada muy elevada, la propia medición actúa como una carga y afecta a la variable que se desea medir.

Amplificador sumador. Otra función importante para el acondicionamiento y el procesamiento es la suma de variables o mesurandos. En ciertos casos es importante sumar diversas señales o valores, por ejem-

plo para eliminar la desviación sistemática de una señal determinada. Los amplificadores que se han presentado previamente también pueden llevar a cabo esta función (como en la Fig. 7.7). Este circuito permite sumar dos señales, al mismo tiempo que puede brindar una ponderación diferente a cada una de ellas cuando las resistencias de entrada son distintas.

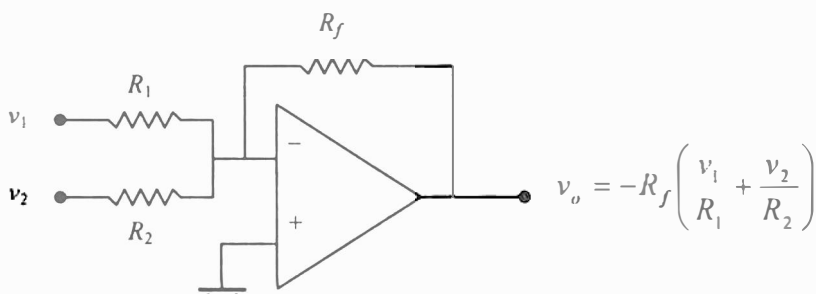


Figura 7.7 Amplificador sumador. Este circuito es un amplificador que invierte y suma dos potenciales, y también proporciona una ganancia ponderada.

El circuito amplificador de la figura 7.7 puede utilizarse, por ejemplo, para acondicionar la salida de un sensor y aprovechar al máximo la resolución del convertidor A/D, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1. Se desea utilizar un sensor de temperatura integrado para medir y registrar digitalmente la temperatura corporal. El sensor seleccionado es el LM035, que proporciona una salida lineal precalibrada de 10 mV/°C. La escala de interés para esta aplicación es de 30 a 45°C, con una resolución mínima de 0.1°C. El convertidor A/D disponible es de 8 bits y tiene una escala de 0 a 5 V.

Utilizando el circuito de la figura 7.7, la resolución del convertidor puede aprovecharse al máximo. Puesto que el amplificador es inversor, se necesita que el máximo de la escala de temperatura corresponda al mínimo de la escala del convertidor A/D y viceversa. Si v_1 es la salida del sensor de temperatura, entonces

$$v_1(30^\circ\text{C}) = 300 \text{ mV} \quad \text{y} \quad v_1(45^\circ\text{C}) = 450 \text{ mV}$$

y si se determina que $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 \text{ V} = \frac{-R_1}{10 \text{ k}\Omega} \times (300 \text{ mV} + v_2) \\ 0 \text{ V} = \frac{-R_1}{10 \text{ k}\Omega} \times (450 \text{ mV} + v_2) \end{cases}$$

Con $R_f = 33 \text{ k}\Omega$ y $v_2 = -450 \text{ mV}$ se maximiza la escala digital para obtener 256 niveles del convertidor entre 30 y 45°C con una resolución de 0.059°C . Sin acondicionamiento, el convertidor daría únicamente una resolución de 1.9°C

Los circuitos presentados en los párrafos anteriores también pueden combinarse para formar cualquier ecuación lineal. Esto puede ser útil para implantar en un instrumento un mecanismo adicional de calibración lineal en hardware. En la figura 7.8 se presenta como ejemplo un circuito de dos amplificadores operacionales con potenciómetros de ajuste, con los que puede efectuarse una calibración de 2 puntos. El potenciómetro P_2 se utiliza para eliminar la desviación alrededor del cero, en tanto que el potenciómetro P_1 se emplea para ajustar la sensibilidad del instrumento.

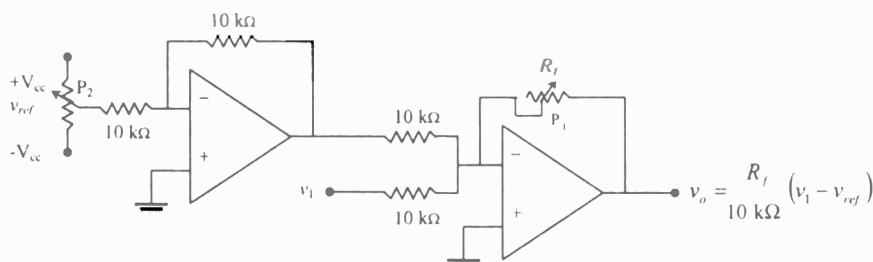


Figura 7.8 Circuito de calibración lineal. Este circuito permite realizar una calibración lineal de 2 puntos al ajustar los valores de P_1 y P_2 .

Ejemplo 7.2. El sensor de presión diferencial (Honeywell Microswitch) genera un potencial proporcional a la presión medida entre 1 y 5 V aproximadamente, para un intervalo de 0 a 5 libras por pulgada cuadrada (psi). * Para calibrar esta medición puede utilizarse el circuito de la figura 7.8, empleando potenciómetros de 20 kW. Para realizar la calibración, primero se aplica una presión de 0 psi al sensor y se ajusta P_2 para que el voltaje de salida sea 0 V. A continuación se aplica una presión diferencial de 5 psi al sensor, confirmándola con un manómetro de referencia, y se ajusta P_1 para que el voltaje sea de exactamente 5 V. Después de la calibración, el circuito dará una salida calibrada de 1 V/psi.

Para realizar mediciones diferenciales, condición que se presenta cuando el mesurando de interés es la diferencia entre dos potenciales como en el caso en un puente de Wheatstone, se dispone del circuito amplificador diferencial. Esta configuración, que se muestra en la segunda etapa de la figura 7.9, permite obtener un circuito que amplifica las señales aplicadas *entre ambas* entradas (modo diferencial), pero que rechaza las señales aplicadas *simultáneamente a ambas* entradas (modo común), por lo que se dice que tiene un alto grado de rechazo de modo

* Esta unidad no forma parte del Sistema Internacional de Unidades (SI), pero se utiliza en este ejemplo a causa del amplio uso que todavía tiene.

común. Esto es importante cuando las dos señales de entrada tienen un fuerte componente común, como el ruido de 60 Hz.

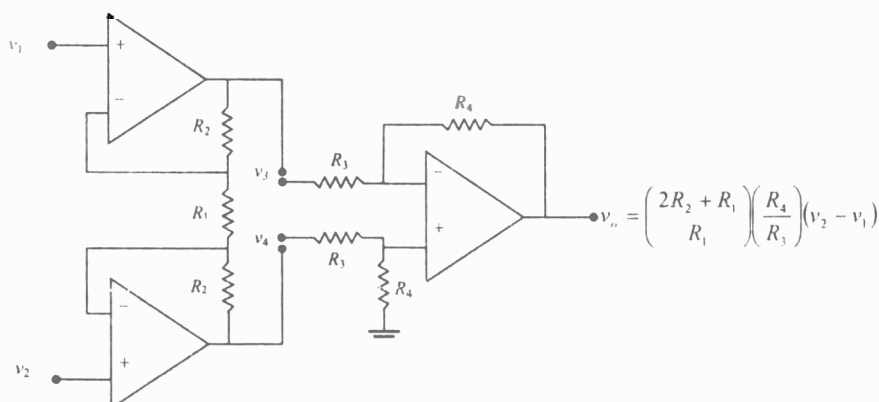


Figura 7.9 Amplificador de instrumentación. La segunda etapa es un amplificador diferencial que proporciona un alto grado de rechazo de modo común. La primera etapa de seguidores asegura una alta impedancia de entrada. La ganancia puede regularse con sólo variar R_1 .

A pesar de las ventajas mencionadas, el amplificador diferencial presenta una impedancia de entrada muy baja, por lo que no sirve para efectuar mediciones directas a fuentes de alta impedancia, como en el caso de los potenciales bioeléctricos, porque haría las veces de una carga excesiva. En esta circunstancia debe añadirse un par de amplificadores seguidores para incrementar la impedancia de entrada del circuito completo, como los de la figura 7.4, pero interconectados de forma balanceada para limitar la ganancia de modo común (como se muestra en la primera etapa de la figura 7.9).

El circuito completo de tres amplificadores operacionales se conoce como amplificador de instrumentación, y se usa ampliamente para mediciones de biopotenciales. Además, en el mercado se encuentran circuitos inte-

grados que incluyen el amplificador de instrumentación completo con impedancias de entrada que alcanzan hasta $1 \times 10^{14} \Omega$ y tasas de rechazo de modo común superiores a 10^4 .

Convertidores de corriente a voltaje. En aplicaciones de instrumentación biomédica se utilizan muy frecuentemente sensores con una salida de señales de corriente, por ejemplo los sensores de luz como fotodiodos o fotomultiplicadores. En este último caso, las corrientes suelen ser muy pequeñas y con una salida de corriente proporcional a la intensidad de la luz incidente sobre el sensor. Es necesario, además de amplificar esta corriente, convertirla a una señal de voltaje para poder digitalizarla con convertidores A/D normales (aunque existen ya en el mercado convertidores analógicos para corrientes pequeñas diseñados para este tipo de aplicaciones, aunque su uso todavía depende mucho del caso específico). En la figura 7.10 se presenta el diseño típico de un convertidor de precisión de corriente a voltaje, como equivalente al amplificador de instrumentación. Para este tipo de aplicaciones es necesario utilizar amplificadores operacionales de bajo ruido y muy baja corriente de fuga, para evitar que la señal se contamine con ruido o se distorsione.

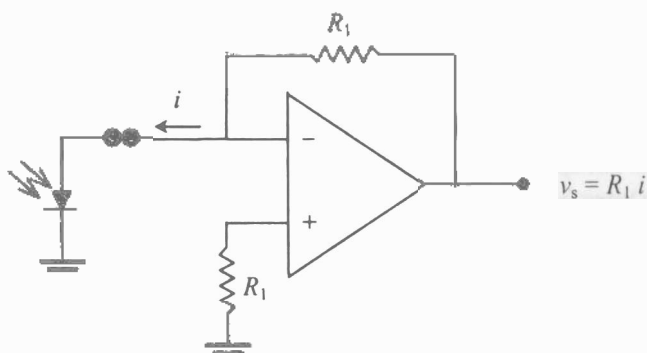


Figura 7.10 Convertidor de corriente a voltaje. En este diagrama se muestra conectado a un fotodiodo. La salida del circuito es un voltaje proporcional a la luz incidente sobre el fotosensor.

Amplificadores exponenciales y logarítmicos. En algunos casos, la salida de un transductor tiene una relación logarítmica o exponencial con la variable de interés. Por ejemplo, en un fotómetro la transmitancia medida tiene una relación exponencial con la absorbancia (la ley de Beer-Lambert es exponencial). Otro ejemplo es la salida de un electrodo tipo Severinghaus para medir PCO_2 sanguíneo. Este electrodo proporciona una señal que varía en forma logarítmica con los cambios del PCO_2 . En estos casos pueden emplearse amplificadores que tengan una relación entre la entrada y la salida de tipo exponencial y(o) logarítmica (como el de la Fig. 7.11). Asimismo, un amplificador logarítmico puede ser útil para trabajar con mesurandos que tienen una variación dinámica muy grande.

Aisladores. En los instrumentos biomédicos siempre se tiene la necesidad particular de proteger al paciente del peligro de un *electroshock*. Esto significa que cuando se conecta eléctricamente a un paciente con un instrumento para capturar biopotenciales, es importante aislar al paciente de la red eléctrica en caso de que ocurra una falla en el instrumento o en la instalación eléctrica de la habitación. Esto es de importancia crítica en casos donde el instrumento tiene una conexión directa de baja impedancia con el corazón, porque en este caso sólo basta una corriente de fuga muy pequeña para causar fibrilación cardíaca.

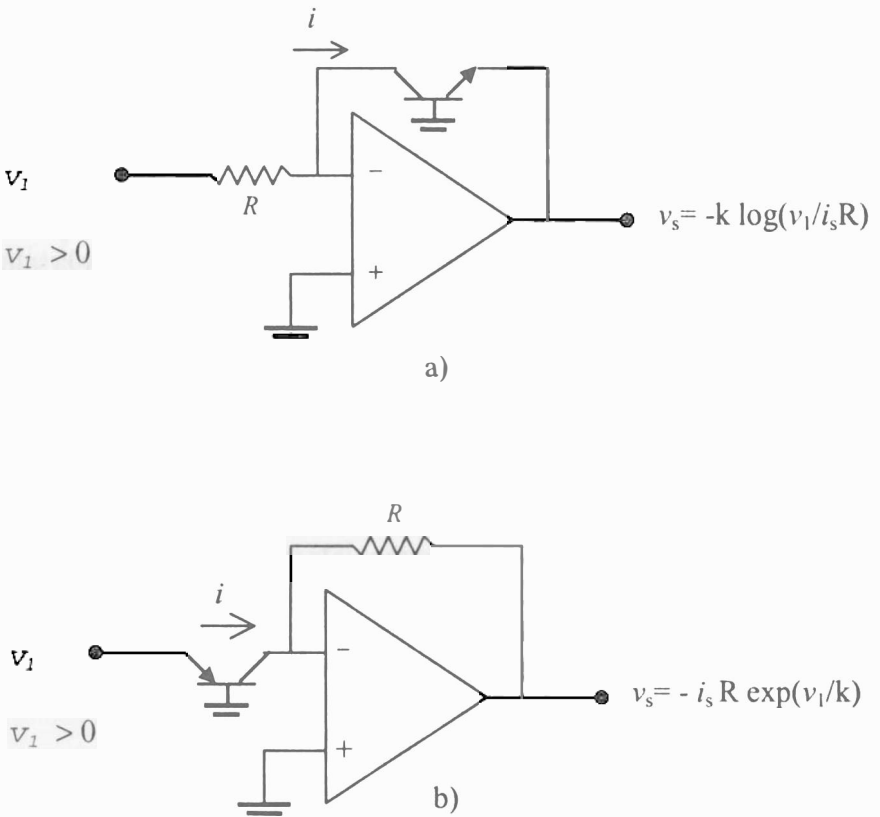


Figura 7.11 a) Amplificador logarítmico y b) exponencial. El factor k está relacionado con las características del transistor e i_s es la corriente de saturación inversa del diodo CE del transistor. Para $v_1 < 0$ el transistor debe ser del tipo pnp en el circuito a y npn en el b.

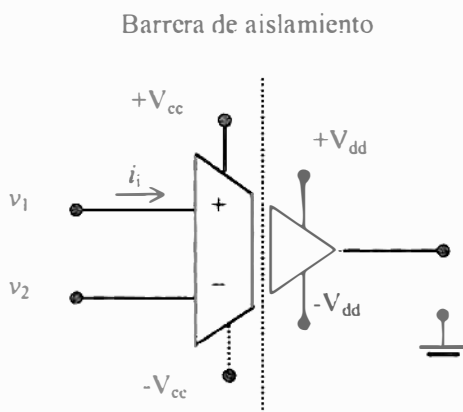


Figura 7.12 Amplificador aislador. La entrada está aislada de la salida, y cada sección tiene su fuente de poder independiente. La conexión a través de la barrera de aislamiento se hace en forma óptica o por inducción electromagnética.

En este caso, la idea es permitir la transmisión de la señal de interés sin realizar una conexión eléctrica directa. Para este propósito se ha desarrollado una amplia variedad de aisladores integrados comerciales (como el que se muestra en la Fig. 7.12). Comúnmente se encuentran dos tipos de aisladores: ópticos y de inducción magnética. Como su nombre lo indica, la señal en cuestión se transmite a través de la barrera aisladora por medio de uno de estos dos métodos. Cada lado de la barrera tiene su propia fuente de alimentación, y la que se encuentra del lado del paciente tiene que estar eléctricamente aislada del resto del instrumento, por ejemplo mediante una batería separada.

Comparadores y detectores. En algunos instrumentos no es necesario conocer en todo momento el nivel de voltaje de una señal en particular,

sino sólo saber si ésta ha rebasado un nivel crítico, si tiene un valor muy pequeño o si se encuentra dentro de un intervalo en particular. Ejemplos de posibles aplicaciones de esta situación son la detección de niveles muy altos o muy bajos de una variable para activar una alarma o la detección de picos de una señal para sincronizar la adquisición de otras señales. En estos casos, utilizando circuitos comparadores puede eliminarse la necesidad de un convertidor A/D para la señal en cuestión. El comparador más sencillo es el amplificador operacional sin realimentación (Fig. 7.13).

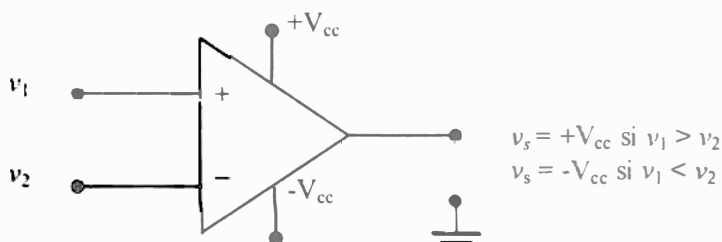


Figura 7.13 Circuito comparador. Si $+V_{cc}$ es igual a 5 V, y $-V_{cc}$ es igual a 0 V, la salida del comparador será compatible con un circuito digital TTL.

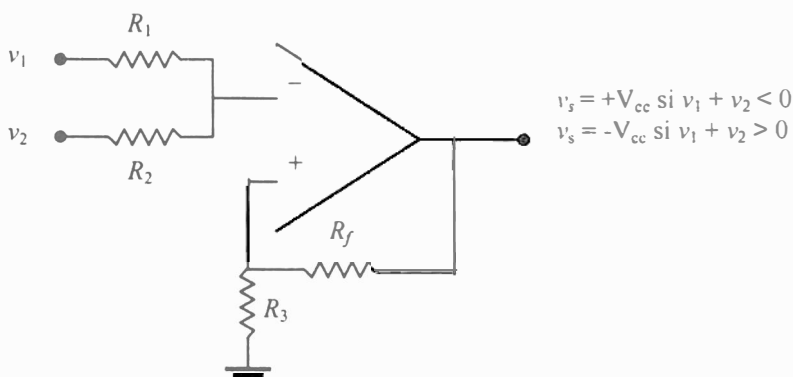


Figura 7.14 Circuito comparador con histéresis. Si $R_3 > 0$, la salida de este circuito será más estable cuando v_1 se aproxima a v_2 .

Cuando se utiliza un circuito sumador con resistencias de entrada, la impedancia exacta que se tiene en la entrada será perfectamente conocida; sin embargo, los voltajes v_1 y v_2 se aplican directamente a las entradas del amplificador operacional, como se muestra en la figura 7.14, lo que genera una salida tan elevada que el Amp-Op se satura en una u otra dirección. Por ello, si la resistencia de la entrada positiva a tierra (R_3) es superior a 0, este circuito presentará histéresis alrededor del voltaje de transición (cuando $v_1 \equiv v_2$), lo cual elimina la posibilidad de que la salida oscile sin control o “rebote” entre dos valores.

Derivada, integral y filtrado. En los casos en que se quiere modificar el contenido espectral de la señal antes de la etapa de digitalización se recurre a diversos filtros como los que se presentan a continuación. La figura 7.15 presenta los elementos básicos de los filtros: el diferenciador y el integrador ideales, junto con sus respectivas respuestas en frecuencia. Combinando estos dos elementos y añadiendo polos (o sea, agregando resistencias en serie o en paralelo con cada capacitancia) es posible construir filtros de los tipos pasabajas, pasa-altas y pasabanda de primer orden (Figs. 7.16, 7.17 y 7.18).

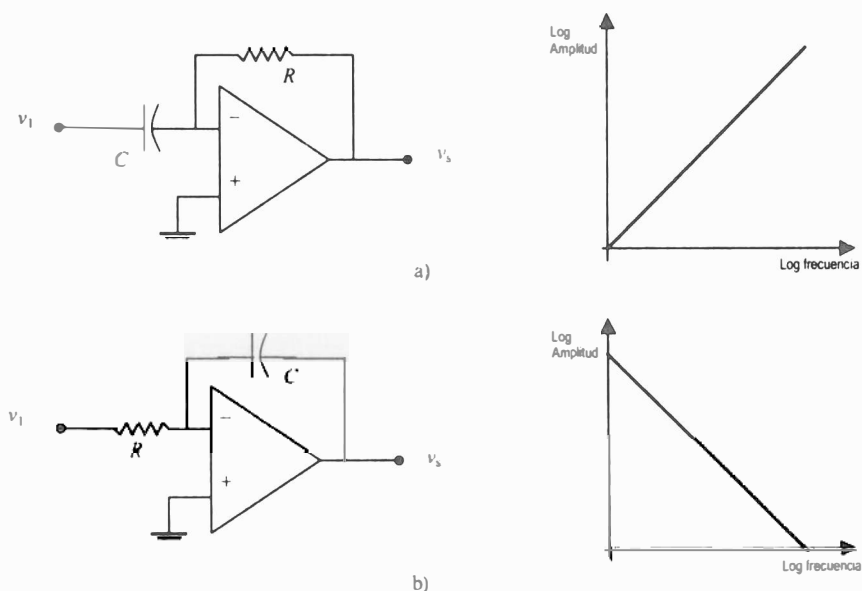


Figura 7.15 Circuitos a) diferenciador ideal y b) integrador ideal. Los diagramas de Bode que se incluyen, muestran la respuesta ideal en frecuencia de estos circuitos.

Para aplicaciones de diferenciación e integración, los circuitos ideales de la figura 7.15 no son realmente prácticos. El diferenciador ideal es inestable y amplifica mucho las altas frecuencias, que suelen ser ruido. En la práctica, para obtener la derivada de una señal es más conveniente utilizar un filtro pasabanda como en la figura 7.17, pero de tal forma que la frecuencia máxima de interés de la señal $f_{\text{máx}}$ sea menor que la frecuencia del primer polo del filtro pasabanda, o sea f_1 . Normalmente, para utilizar un integrador es necesario incluir un interruptor que descargue el capacitor y que al reactivar proporcione alguna indicación del momento $t = 0$, cuando se inicia la integración.

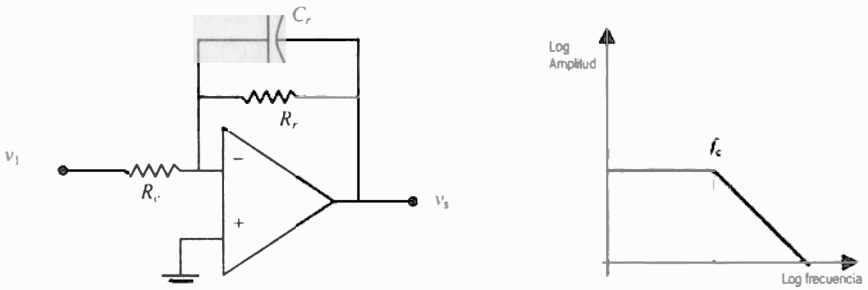


Figura 7.16 Filtro pasabajas de primer orden. La frecuencia de corte f_c (-3dB) se determina por la combinación de R_f y C_f de acuerdo con $f_c = 1/(2\pi R_f C_f)$.

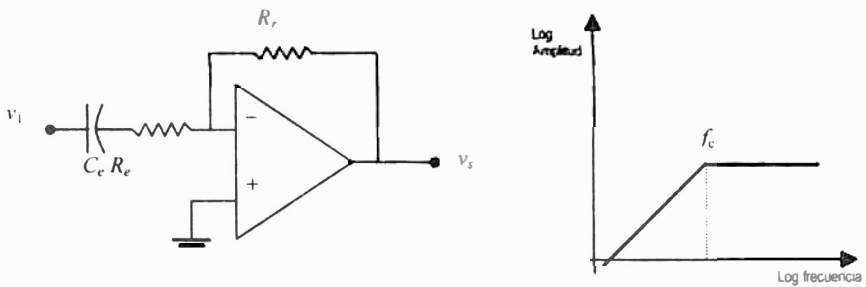


Figura 7.17 Filtro pasa-altas de primer orden. La frecuencia de corte f_c (-3dB) se determina por la combinación de R_e y C_e de acuerdo con $f_c = 1/(2\pi R_e C_e)$.

Los filtros que se han presentado pueden combinarse en cascada para conformar filtros más complejos. Los filtros de primer orden tienen caídas de -20 dB/década en la banda de rechazo. Para formar filtros con caídas más agudas, es decir con transiciones más abruptas en las proximidades de la frecuencia de corte, se requieren filtros de orden superior. Tales filtros deben tener más de un polo próximo a la frecuen-

cia de corte. Cuando tienen n polos se dice que son de orden n , y en este caso la pendiente de la característica en la banda de rechazo es n veces -20 dB/década.

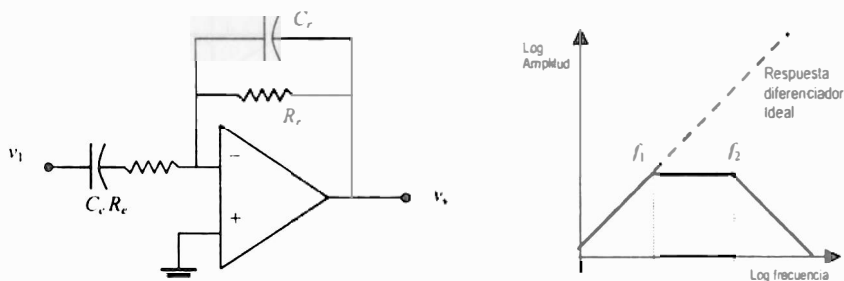


Figura 7.18 Filtro pasabanda de primer orden. Las frecuencia de corte f_1 y f_2 se determinan por las combinaciones de R_c , C_c , R_r y C_r de acuerdo con $f_1 = 1/(2\pi R_c C_c)$ y $f_2 = 1/(2\pi R_r C_r)$, $f_1 > f_2$.

El diseño de estos filtros no es tan sencillo como conectar varios filtros de primer orden en cascada, porque si las frecuencias de corte de cada uno de estos filtros se aproximan demasiado, el sistema puede generar resonancias alrededor de estas frecuencias, oscilar o convertirse en inestable. Para evitar estos problemas, se han desarrollado combinaciones especiales para el diseño de filtros de orden superior. Las más utilizadas con esta estrategia son los tipos Butterworth, Chebychev y Bessel. Entre las características más importantes de éstos destacan las siguientes: el filtro Butterworth tiene una respuesta muy plana en la banda de paso. El filtro Chebychev tiene la transición más rápida, pero la ganancia en la banda de paso no es plana; y el filtro Bessel no tiene una transición tan rápida como el Butterworth o el Chebychev, pero tiene la ventaja de poseer una respuesta en fase lineal.

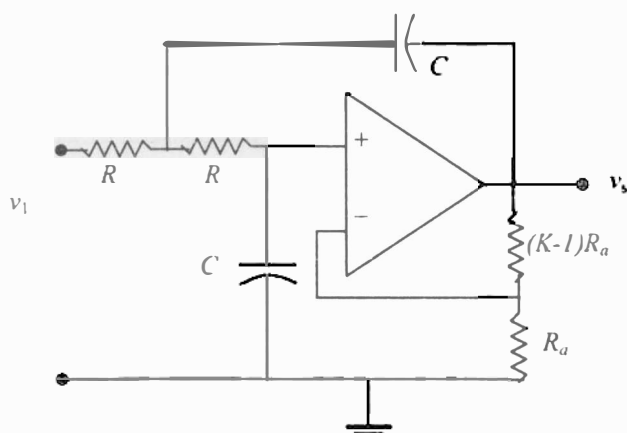


Figura 7.19 Etapa de filtro pasabajas de 2 polos. Para diseñar filtros de más de 2 polos, hay que conectar en serie varias etapas. Los valores de cada una se calculan de acuerdo con la tabla 7.1 de modo que $RC=1/(2\pi f_c f_n)$ para la frecuencia de corte f_c deseada. Cuando se trata de múltiples etapas, éstas deben disponerse en orden de K creciente.

En la figura 7.19 y la tabla 7.1 se presenta la fórmula para diseñar cualquier filtro activo pasabajas de los tres tipos mencionados. A estos filtros se les llama filtros de fuente controlada o filtros VCVS (*Voltage Controlled Voltage Source*, fuente de voltaje controlado). Se requiere una etapa para 2 polos (es decir, un filtro de $n = 8$ requiere 4 Amp-Op). Para los filtros Butterworth sólo hace falta aplicar el factor K para modificar la ganancia de cada etapa. Para los filtros Chebychev y Bessel también se requiere aplicar un factor de normalización para la combinación RC de cada etapa, de modo que $RC=1/(2\pi f_c f_n)$. Para construir filtros pasa-altas, se puede usar el mismo circuito pero intercambiando todos los capacitores por resistores y viceversa, en tanto que los factores f_n de la tabla 7.1 deben remplazarse por $1/f_n$.

TABLA 7.1 (REPRODUCIDA CON PERMISO DE HOROWITZ Y HILL. 1980. THE ART OF ELECTRONICS, CAMBRIDGE UNIV. PRESS.)

No. de polos	Butterworth	Bessel		Chebychev (0.5dB)	
	K	f_n	K	f_n	K
2	1.586	1.274	1.268	1.231	1.842
4	1.152	1.432	1.084	0.597	1.582
	2.235	1.606	1.759	1.031	2.660
6	1.086	1.607	1.040	0.396	1.537
	1.586	1.692	1.364	0.768	2.448
	2.483	1.908	2.023	1.011	2.846
8	1.038	1.781	1.024	0.297	1.522
	1.337	1.835	1.213	0.599	2.379
	1.889	1.956	1.593	0.861	2.711
	2.610	2.192	2.184	1.006	2.913

Ejemplo 7.3. Para obtener una serie de imágenes del corazón por RMN (resonancia magnética nuclear), es necesario construir un circuito detector del complejo QRS del ECG que genere una señal de sincronización, porque las imágenes deben obtenerse en el mismo punto del ciclo cardiaco.

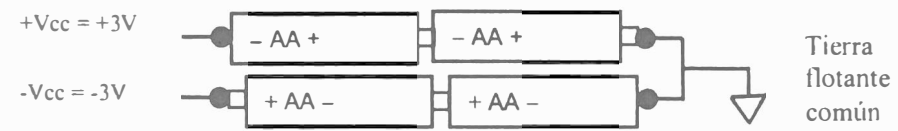


Figura 7.20 Configuración del circuito de alimentación del ejemplo 7.3.

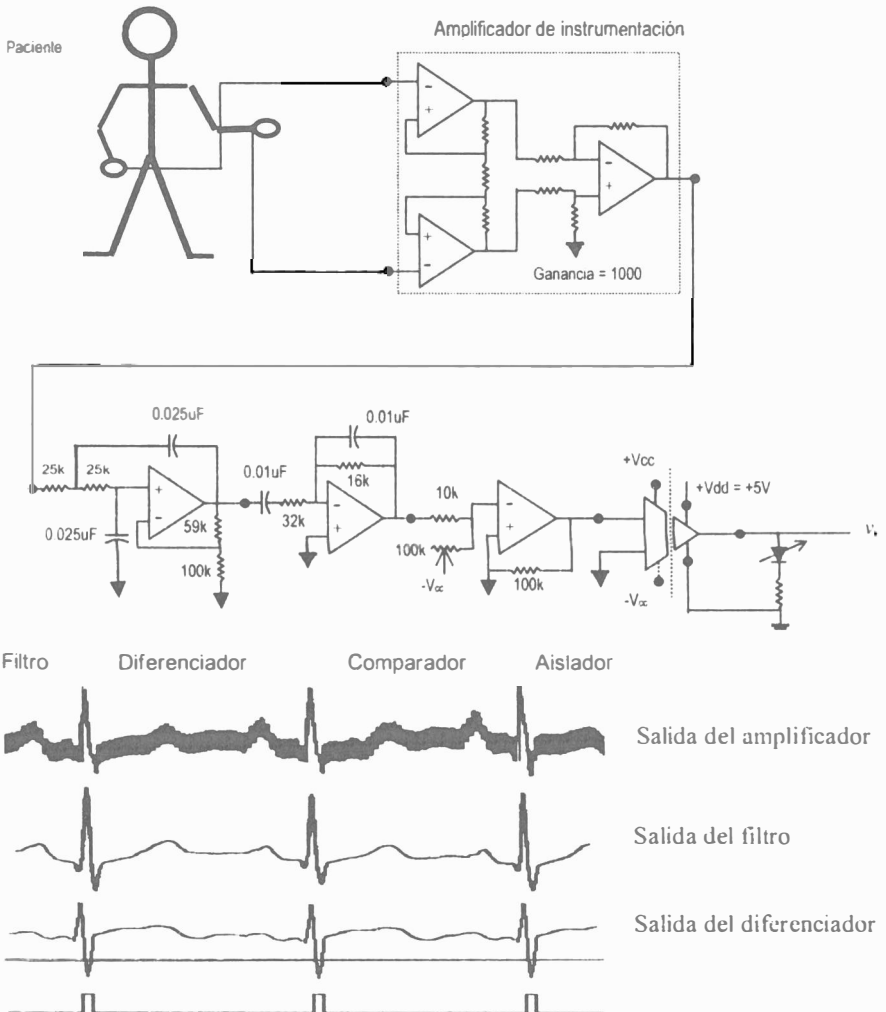


Figura 3.21 Ejemplo 7.3. Sistema de detección de pulsos cardiacos para sincronización de la captura de imágenes de corazón.

Para resolver este problema se necesita primero un amplificador diferencial para tener una señal confiable y después un filtro pasabajas para eliminar el ruido de radiofrecuencia (RF) que produce el sistema de RMN y limitar el ancho de banda del ECG. Como segunda etapa se necesita obtener la derivada del ECG, porque con este método se obtiene un pico negativo muy pronunciado debido a la pendiente del segmento RS y se eliminan los componentes de baja frecuencia del ECG. Para detectar este pico negativo puede utilizarse un circuito comparador. Adicionalmente, se requiere aislar el sistema para protección del paciente y acoplar la salida de este circuito a un sistema digital. Empezando por la fuente, para conseguir la aislación pueden utilizarse 4 baterías AA de 1.5V, con lo que se obtiene una alimentación de voltaje de ± 3 V (Fig. 7.20).

La primera etapa necesita un amplificador de instrumentación como el de la figura 7.9 que proporcione una ganancia de 1000. (El ECG típico tiene una amplitud de 1 a 5 mV, por lo que la salida del amplificador entregará una señal de 1 a 5 V.) Este tipo de amplificador se puede conseguir en un solo circuito integrado especial (Fig. 7.21).

La segunda etapa requiere de un filtro pasabajas que limite el ancho de banda del ECG al intervalo de interés, por ejemplo a 250 Hz. Si se utiliza un filtro Butterworth de segundo orden, de acuerdo con la tabla 7.1 con $R = 25$ k Ω y $C = 1/(2\pi R f_c) = 25$ nF, la resistencia de realimentación $R_f = (K - 1) 100$ k $\Omega = 58.6$ k Ω para R_i de 100 k Ω .

La tercera etapa es un diferenciador como el filtro pasabanda de la figura 7.18 en el que la frecuencia $f_i > 250$ Hz. Se escoje aproximadamente $f_1 = 500$ Hz y $f_2 = 1000$ Hz y $R_1 = 32$ k Ω , $C_1 = 0.01$ μ F, $R_2 = 16$ k Ω y $C_2 = 0.01$ μ F.

La siguiente etapa es un comparador como el de la figura 7.14, con v_2 conectado por un potenciómetro de 100 k Ω a $-V_{cc}$ y v_1 conectado por una $R = 10$ k Ω en la salida de la etapa previa. La resistencia de realimentación es $R_f = 100$ k Ω y $R_3 = 0$. De esta manera, la salida del comparador se satura a +2.3 V cuando la derivada del ECG (o sea v_i) es inferior a $-v_2$ y permanece en -2.3 V cuando v_i es superior.

Finalmente, como última etapa se conecta un aislador como el de la figura 7.12, con la fuente de alimentación de los circuitos conectados al paciente igual a los voltajes $+V_{cc}$ y $-V_{cc}$ de las baterías. El sistema digital, en cambio, se alimenta con $+V_{dd} = +5\text{ V}$ y $-V_{dd} = 0\text{ V}$, que provienen directamente de la fuente de la computadora que controla el sistema de RMN. Así, la salida será un pulso digital positivo con una duración aproximadamente igual al intervalo RS. Para facilitar la visualización del pulso y poder ajustar el potenciómetro del comparador al nivel óptimo, puede ponerse un diodo LED en la salida del aislador.

7.4 Adquisición de datos y señales

Muchas veces los instrumentos no se limitan a medir un mesurando o a capturar una variable aislada, sino que son utilizados para capturar cierta cantidad de valores diferentes o un grupo de señales. En el primer caso (cuando se trata de datos) pueden ser los valores que en determinado momento del tiempo presenta una serie de mesurandos, los cuales pueden ser frecuencia cardíaca, presión arterial, temperatura corporal o concentración de oxígeno espirado. En el segundo caso (cuando se trata de señales) pueden ser los potenciales eléctricos que existen entre varios puntos específicos del cuero cabelludo de un sujeto (derivaciones) durante un intervalo de tiempo o los potenciales que se generan con la actividad celular o muscular.

En el control de sistemas o de procesos de producción por lo general se requiere conocer el estado del sistema que se estudia, valora, analiza o controla, lo cual se logra por medio de la captura de los valores que tienen algunas de sus variables más importantes o por la forma en que se comportan sus señales más representativas. De manera similar, en la práctica clínica se requiere conocer el estado de un sujeto o de un paciente por medio del análisis de los datos de sus funciones vitales o

mediante la captura de las señales descriptivas de su estado actual. En la industria, el sistema que se ha delineado es un proceso de fabricación, una máquina o algunos equipos que deben realizar una función, mientras que en la clínica se trata de un sujeto que se ausculta, se valora y se diagnostica. Sin embargo, en ambos casos se utiliza un sistema similar de captura o de adquisición de datos o señales, como el que se muestra en la figura 7.2.

7.4.1 Las señales y los datos

Cuando la información que se reúne es un conjunto de los valores de un grupo de mesurandos relativamente estáticos, o sea que presentan escasa variación en el tiempo, se habla de adquisición de datos. En cambio, cuando se trata de los cambios más o menos rápidos que experimenta una serie de mesurandos variables en un intervalo de tiempo que se denomina “ventana”, se trata de adquisición de señales.

El conocimiento más preciso y específico del estado del sistema o del sujeto se realiza cuando se extrae y analiza la información contenida en sus parámetros más relevantes. En la industria se trata de presiones, niveles, flujos, temperaturas o velocidades que presentan poca o nula variación (datos) o que se van modificando con el tiempo (señales); en tanto que en la práctica clínica se trata, por lo general, de parámetros eléctricos que se espera presenten valores estáticos (datos) o variaciones determinadas y conocidas (señales). Sin embargo, en ambos casos el conjunto de valores o de señales proporciona información concreta del estado actual del sistema bajo control o del sujeto en observación.

En consecuencia, una señal como las que se han mencionado es simplemente el conjunto ordenado de valores de un parámetro o mesurando (p. ej., la temperatura) durante un intervalo de tiempo. Las señales de este tipo tienen un comportamiento similar a las funciones continuas, por lo

que sólo presentan variaciones relativamente suaves en el tiempo, las cuales representan cada uno de los diferentes valores que el mesurando toma en cada instante de tiempo. Este comportamiento permite describirlas mediante un contenido de frecuencias limitado o banda limitada que se conoce como ancho de banda, porque estas señales no contienen en su espectro de frecuencias componentes superiores a esta frecuencia máxima. Como una ventaja adicional, las señales presentan la característica de variar casi siempre dentro de un determinado intervalo de amplitudes. En otras palabras se encuentran acotadas en amplitud y frecuencia.

7.4.2 Digitalización

La información contenida en una señal analógica se encuentra no sólo en el valor que presenta en determinado momento, sino también en la forma en que varía, en los valores máximos y mínimos que alcanza, así como en las reglas que sigue para modificar su valor en el tiempo. Para extraer esta información se requiere conocerla exactamente durante un intervalo de tiempo, para que sea posible analizarla. En la figura 7.22 se muestra el aspecto típico de una señal bioeléctrica de tipo electroencefalográfico [18].

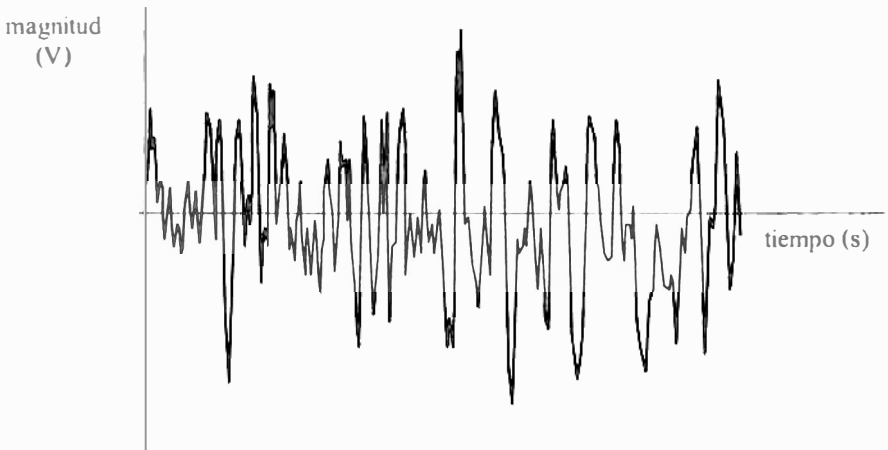


Figura 7.22 Señal electroencefalográfica en una ventana de tiempo.

Como en la actualidad el procedimiento de análisis recurre a la asistencia de la computadora y ésta trabaja con un formato completamente distinto del analógico, se hace necesario que esta señal sea transformada al formato digital a fin de que pueda ser compatible con los procesos internos de la computadora. Para lograr esta transformación, se hace uso de dos procedimientos que sirven para reducir a una cantidad finita y manejable los valores infinitos presentados por una función analógica. Estos procedimientos son el muestreo y la cuantización. El muestreo realiza una parte de la transformación o conversión entre los formatos, ya que hace que el tiempo sea discreto. Al muestrear se consigue que la señal original pueda representarse por completo y sin pérdida de información, utilizando únicamente las muestras tomadas.

Como se sabe, muchas empresas realizan estudios de mercado llevando a cabo encuestas sobre un determinado grupo humano sin necesidad de interrogarlos a todos ni de conocer la preferencia de cada uno de ellos. De la misma manera, otras empresas realizan encuestas de opinión pública (para conocer en forma anticipada el resultado de unas

elecciones políticas, por ejemplo) utilizando como información base la que proporciona un reducido grupo humano, el cual ha sido especialmente seleccionado. El éxito de estas estrategias se debe a que el proceso de selección de los encuestados, mejor conocido como muestreo, se hace de manera que la muestra represente en forma muy precisa la opinión o el comportamiento de la población total, lo cual se fundamenta con herramientas estadísticas.

Ésta es la misma idea que se utiliza al transformar el formato de una señal determinada, aunque su justificación sea diferente. Cada cierto intervalo de tiempo se toma una muestra del valor que presenta la señal en ese momento y se considera que las muestras representan con precisión el comportamiento de la señal original, lo que se basa en las características de ésta y en el contenido de frecuencias de la señal original.

7.4.3 Frecuencia de muestreo o de Nyquist

Resulta muy obvio que si las muestras se toman a grandes intervalos de tiempo (lo que equivale a una baja frecuencia de muestreo), todo lo que ocurra entre muestra y muestra será información que se perderá irremediablemente. Por el contrario, si las muestras se toman a intervalos de tiempo más pequeños, se tendrá una enorme cantidad de datos muy difícil de manejar. Ambas situaciones equivalen a encuestar a unas cuantas personas o a una enorme cantidad de ellas. El primer caso dará un resultado muy inseguro, mientras que el segundo podría ser inmanejable. Esto da la idea de que debe existir una cantidad óptima de datos o un intervalo de tiempo máximo (equivalente a una frecuencia de muestreo mínima) que garantice que las muestras tomadas representan fielmente a la señal original. Tal intervalo y tal frecuencia existen y dependen de las características de la señal que se desea muestrear, en especial del contenido de frecuencias de ésta.

Para ver más concretamente el efecto que tiene la frecuencia de muestreo sobre una señal cualquiera se considerará el caso de la figura 7.23, donde se presenta el efecto de muestrear una señal a cuatro diferentes frecuencias. En el caso de la figura 7.23a se tienen 1200 muestras tomadas a una frecuencia f_m , las cuales representan muy exactamente a la señal original, ya que observando en detalle la figura puede verse que para cada oscilación de ésta hay varias muestras.

Al disminuir a la mitad, la frecuencia de muestreo f_m se obtienen las 600 muestras de la figura 7.23 b que revelan muy poca diferencia con respecto a la anterior, pero donde se insinúan pequeñas alteraciones a la forma de onda. Sin embargo, estos dos casos representan exitosamente la señal analógica sin pérdida de información en su espectro de frecuencias porque tanto f_m como $f_m/2$ son superiores al doble de la frecuencia máxima de ésta, con lo que se cumple apropiadamente el teorema del muestreo que se verá más adelante.

Este efecto de alteración de la forma de onda de la señal analógica se hace más notorio cuando f_m disminuye a la cuarta parte, como se observa en las 300 muestras de la figura 7.23c, aunque todavía la señal conserva muy aproximadamente la forma de onda original. El efecto es mucho más evidente cuando el muestreo se realiza solamente a la sexta parte de f_m , como puede verse en la figura 7.23d, ya que los cambios de la forma de onda son tales que la señal se ha alterado sustancialmente. Las modificaciones claramente visibles en estos últimos dos casos se deben a que las frecuencias de muestreo $f_m/4$ y $f_m/6$ son inferiores a la frecuencia máxima de la señal, por lo que no se cumple el teorema del muestreo y existe pérdida de información en el espectro de frecuencias. En consecuencia, los dos primeros casos de muestreo son perfectamente adecuados, en tanto que para esta señal no es conveniente usar las frecuencias de muestreo de los dos últimos.

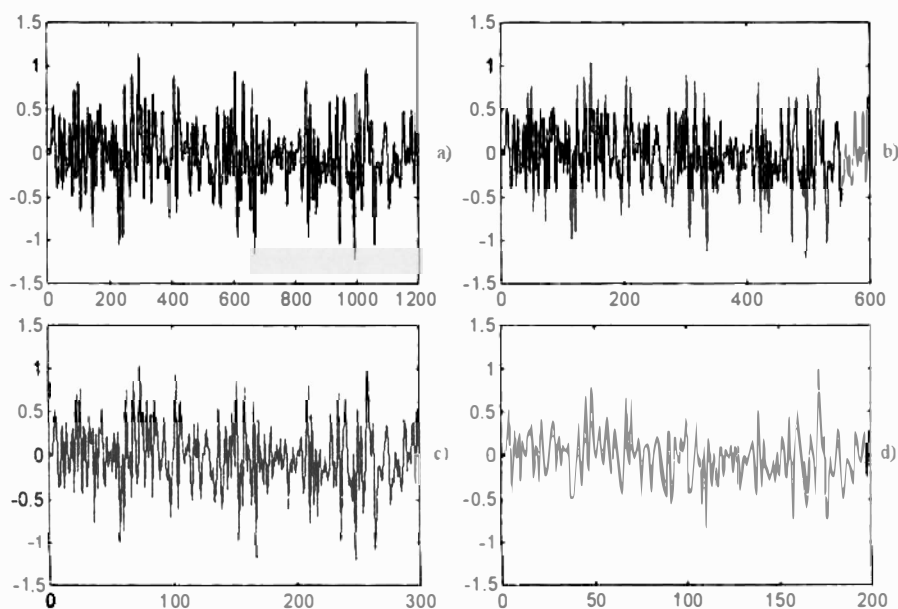


Figura 7.23 Ejemplo de una señal analógica muestreada a cuatro frecuencias diferentes. a y b son el resultado de un muestreo adecuado en el que se utilizan las frecuencias f_m y $f_m/2$, respectivamente, mientras que c y d representan los casos inadecuados donde las frecuencias de muestreo utilizadas $f_m/4$ y $f_m/6$ alteran claramente la señal.

7.4.4 Teorema del muestreo o de Nyquist

El proceso de muestreo consiste en obtener y conservar durante un corto lapso de tiempo el valor que tiene una señal (y que se conoce como muestra); procedimiento que se repite a intervalos regulares, los cuales determinan la frecuencia de muestreo. El intervalo entre muestras suele representarse por medio de la retención del valor muestreado, ya que en

ocasiones es necesario realizar una retención para que el valor de cada muestra pueda procesarse, por lo general mediante cuantización o codificación.

La justificación plena del procedimiento de muestreo de una señal cualquiera se fundamenta en una regla conocida como teorema del muestreo, que se formula mediante la siguiente desigualdad:

$$f_m \geq 2 f_0$$

Esto quiere decir que la frecuencia de muestreo f_m que puede utilizarse sin que exista pérdida de información debe ser mayor o igual a dos veces la máxima frecuencia contenida por la señal original, que en este caso es f_0 . Por tanto, una condición importante de este proceso es que sólo puede aplicarse a las señales de banda limitada, porque se requiere que exista esta frecuencia máxima f_0 . En caso contrario se producirá una distorsión no recuperable, producida por la mezcla de las colas del espectro conocida como interferencia de colas espectrales (*aliasing*).

7.4.5 Cuantización

Una vez que la señal ha sido muestreada, el tiempo se ha convertido en una magnitud discreta pero los valores que toma la señal son todavía continuos. Por ello, se hace necesario considerar que la señal sólo presenta valores en un intervalo o margen máximo de variación, el cual se discretiza al dividirlo en pequeños intervalos en forma de una serie de niveles fijos, a modo de saltos cuánticos, de redondeo de números o de muestras en amplitud. Cuanto mayor sea el número de estos niveles, mayor será también el número de bits necesarios para representar numéricamente la señal en su formato digital. Cada nivel tiene asignado un valor específico y representa en forma digital (y podría decirse que

abreviada) todos los valores analógicos del nivel para todos los procesos siguientes. Por tanto, si la señal toma valores en las proximidades de uno cualquiera de estos niveles, se le asigna el valor del nivel más próximo, en forma similar al redondeo de un número.

La señal no debe rebasar el nivel máximo ni ser inferior al nivel mínimo, ya que está acotada en amplitud, porque si supera (en cualquier dirección, hacia arriba o hacia abajo) los extremos del margen de variación de la variable, se presenta saturación del código con la consecuente pérdida de información porque se le asigna el valor del límite correspondiente, ya sea superior o inferior.

Los niveles no tienen que ser necesariamente de la misma amplitud, aunque muchas veces es conveniente que sea así, caso que se conoce como cuantización uniforme. Por otra parte, los valores de los niveles se asignan de manera que puedan representarse mediante algún código predeterminado, por lo que esta asignación también es arbitraria así como arbitrario es el número de niveles. Sin embargo, cuando se utiliza la codificación binaria es conveniente emplear un número de niveles igual a una potencia de dos, en cuyo caso se habla (por ejemplo) de convertidores de 10 o 12 bits. Con esta descripción se hace referencia al número de niveles obtenidos a través del código, ya que para $N = 10$ y 12 resulta que $2^N = 1024$ y 4096, respectivamente.

Ejemplo 7.4. Los procesos de muestreo, cuantización y conversión analógica a digital modifican el aspecto de la señal que se procesa, por lo que se ilustrarán considerando que se tiene la señal analógica de la figura 7.24a, para la cual el tiempo y la amplitud son variables continuas. Esta señal se caracteriza por sus variaciones suaves, circunstancia que cambiará al procesar de acuerdo con las plantillas que se muestran para el tiempo y la amplitud.

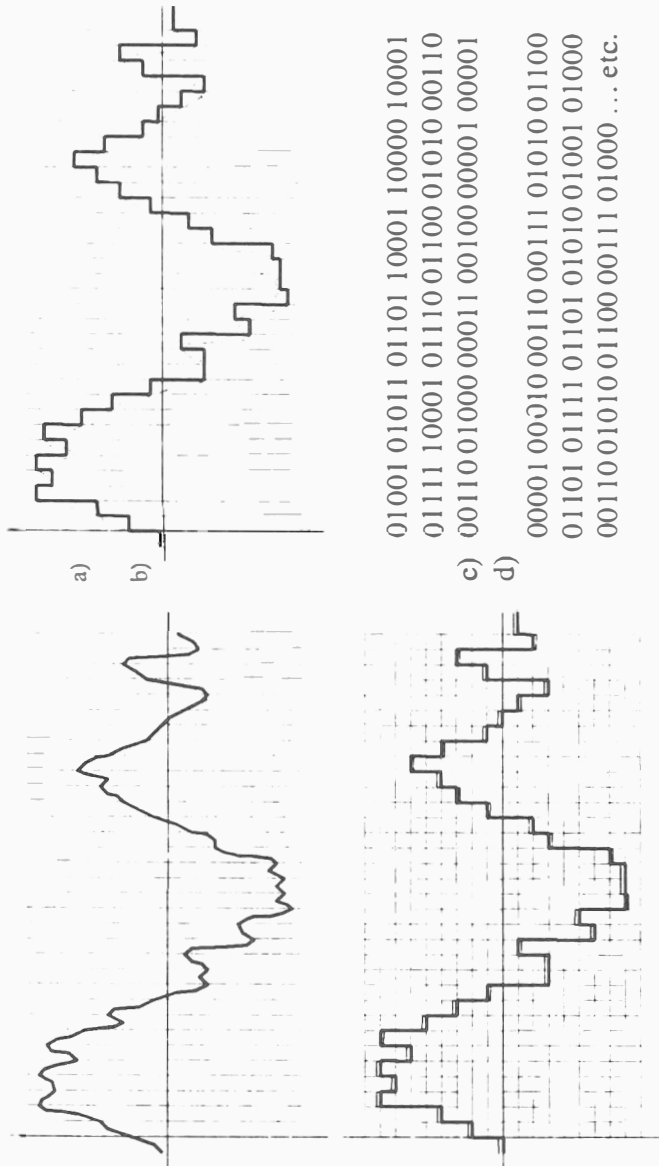


Figura 7.24 a) Señal analógica con amplitud y tiempo continuos, b) señal analógica muestreada con amplitud continua y tiempo discreto, c) señal cuantizada con amplitud y tiempo discretos, y d) señal en formato digital binario de 5 bits.

En primer lugar se realiza el proceso de muestreo como se aprecia en la figura 7.24b, donde el tiempo pasa a ser una variable discreta pero la amplitud sigue siendo continua. Para darle mayor continuidad a la gráfica de la señal, cada muestra se representa como un valor constante entre dos muestras consecutivas, por lo que la señal aparece como una serie de escalones que suben o bajan, dependiendo de las variaciones que experimenta en su formato analógico, el cual aparece dibujado como una línea de puntos. El siguiente proceso corresponde a la cuantización de los valores obtenidos, después de lo cual tanto el tiempo como la amplitud pasan a ser variables discretas, como se aprecia en la figura 7.24c, donde se observa una pequeña diferencia entre la señal cuantizada y la señal muestreada. Esta última se ha dibujado con una línea continua más fina.

Por último, para completar la conversión la señal debe codificarse en algún código apropiado para su procesamiento digital. Por esta razón, cada nivel se transforma en una secuencia ordenada de pulsos que representan dos valores distintos, por ejemplo encendido-apagado, arriba-abajo, grande-pequeño, alto-bajo, o positivo-negativo. Una vez codificados todos los niveles, se tiene una secuencia ordenada de códigos, los cuales suelen simbolizarse con unos y ceros, como se aprecia en la figura 7.24d para el caso de un código binario de 5 bits en el que se tiene $2^5 = 32$ niveles.

Conviene recordar que a pesar de los cambios de formato que experimenta la señal del ejemplo, cuando el muestreo se realiza respetando el teorema correspondiente no existe pérdida de información cuando la señales de banda limitada. En cambio, cuando se efectúa el proceso de cuantización se introduce una pequeña inexactitud o incertidumbre conocida con el nombre de ruido de cuantización. Este ruido proviene del ajuste que es necesario hacer (equivalente al redondeo) para que los valores correspondan a los niveles previamente definidos. Los demás cambios de formato no alteran en absoluto el contenido de información de la señal, por lo que el número de bits es un parámetro que puede describir eficientemente la calidad de la señal digitalizada.

7.4.6 Conversión D/A

Las señales que se quiere convertir al formato digital deben ser procesadas en diversas formas por circuitos especializados que tienen como propósito obtener un código para cada nivel cuantizado. Los resultados obtenidos se utilizan con múltiples fines, que incluyen muchas aplicaciones entre las que se encuentran la compresión de datos, el filtrado, la evaluación del estado actual del mismo sistema o sujeto del que se han extraído, la codificación, la realimentación de los datos con fines de control, la graficación de algunos resultados, la extracción de información por medio de la aplicación de modelos o a través de parámetros calculados, la elaboración y la presentación de diagramas en una o varias dimensiones y la estimación de sus características espectrales. Además de lo anterior, muchas veces los resultados que se obtienen con el procesamiento se convierten nuevamente al formato analógico con el propósito de controlar otras variables analógicas o presentarlas en su nueva forma una vez procesadas. Todas estas aplicaciones dependen del caso particular de medidores o señales en consideración.

7.4.6.1 MÉTODOS DE CONVERSIÓN D/A

Los resultados que se encuentran en un formato digital o las señales procesadas digitalmente que es necesario volver a convertir al formato analógico deben pasar por el proceso de conversión digital a analógico (D/A), que consiste en asignar a cada nivel discreto un voltaje analógico predeterminado. Este proceso es muy sencillo, porque requiere sólo de circuitos cuyas configuraciones son más elementales que las de aquellos que se usan para la conversión A/D. Adicionalmente, algunos convertidores D/A los utilizan como elementos componentes de su arquitectura, por lo que se considerarán en primer lugar.

Método de resistencias 2^N . El circuito de la figura 7.25 muestra el método más sencillo para obtener un voltaje analógico V_0 a partir del código binario de cuatro dígitos $b = b_3 b_2 b_1 b_0$ que representa a un voltaje digitalizado. Su operación se fundamenta en que cada dígito b_i ($i = 1, 2, 3$ y 4) representa un valor decimal igual a 2^i y puesto que b_i sólo puede tomar dos valores (uno y cero), el código $b = b_3 b_2 b_1 b_0$ resulta ser igual al número decimal dado por $b_3 \times 2^3 + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0 = 8 b_3 + 4 b_2 + 2 b_1 + b_0$.

En el circuito de la figura 7.26 se supone que los voltajes b_i sólo pueden tomar los valores cero y uno digitales, aunque ponderados por el voltaje V_c . Esto significa que cero y V_c equivalen a los niveles lógicos *cero* y *uno* respectivamente. Por lo tanto, producen en el circuito una corriente igual a cero (cuando toman el valor cero digital) o igual a V_c entre la resistencia correspondiente (o sea que la corriente es V_c/R , $2V_c/R$, $4V_c/R$ y $8V_c/R$), cuando toman el valor uno digital. Como estas corrientes están completamente determinadas por los valores de las resistencias y por V_c (que es una constante), constituyen un equivalente analógico de los dígitos b_i porque valen $b_i \times 2^i/R$. Además, como las corrientes se suman en el nodo negativo del amplificador operacional, producen en la salida de éste un voltaje igual a dicha suma multiplicada por R_f , o sea

$$V_0 = V_c \times (8 b_3/R + 4 b_2/R + 2 b_1/R + b_0/R) \times R_f = \\ (V_c \times R_f / R) \times (8 b_3 + 4 b_2 + 2 b_1 + b_0)$$

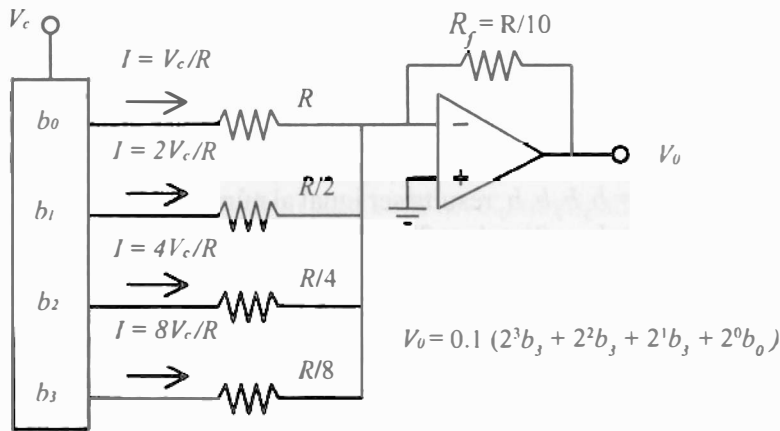


Figura 7.25 Circuito convertidor D/A que usa el método de resistencias 2^N .

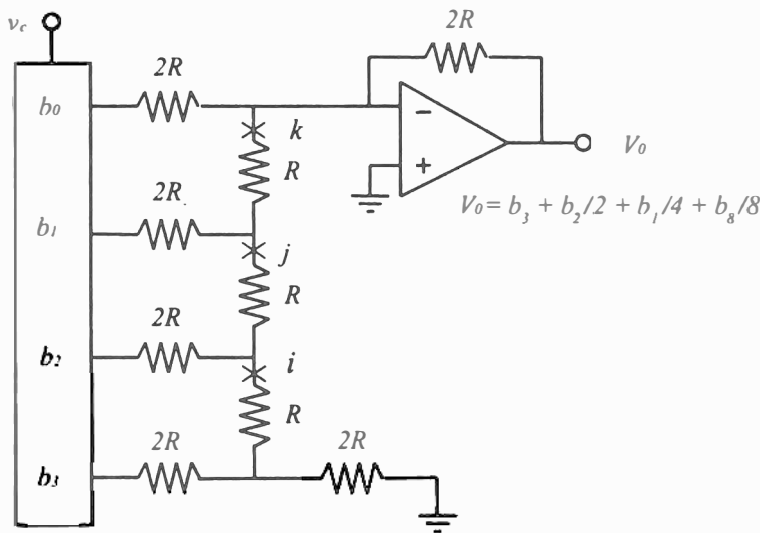


Figura 7.26 Circuito convertidor D/A que utiliza el método R-2R.

Como puede verse claramente, esta última ecuación representa el equivalente analógico en voltaje del código digital. En consecuencia, si se supone que $V_c = 1$ V, el voltaje de salida V_0 que es equivalente al código b puede tomar uno de los 16 valores comprendidos entre 0 y 1.5 V, con incrementos de 0.1 V, ya que en este caso

$$V_0 = \frac{V_c \times R_f}{R} (2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0)$$

$$= 0.1(2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0) \text{ [Volts]}$$

Método escalera o R-2R. El gran inconveniente que tiene el método anterior es que las resistencias deben ser muy precisas y al mismo tiempo abarcar un gran intervalo de variación que va desde R hasta $R/2^N$, intervalo que se hace mayor mientras más dígitos (N) tenga el código digital que se quiere convertir al formato analógico.

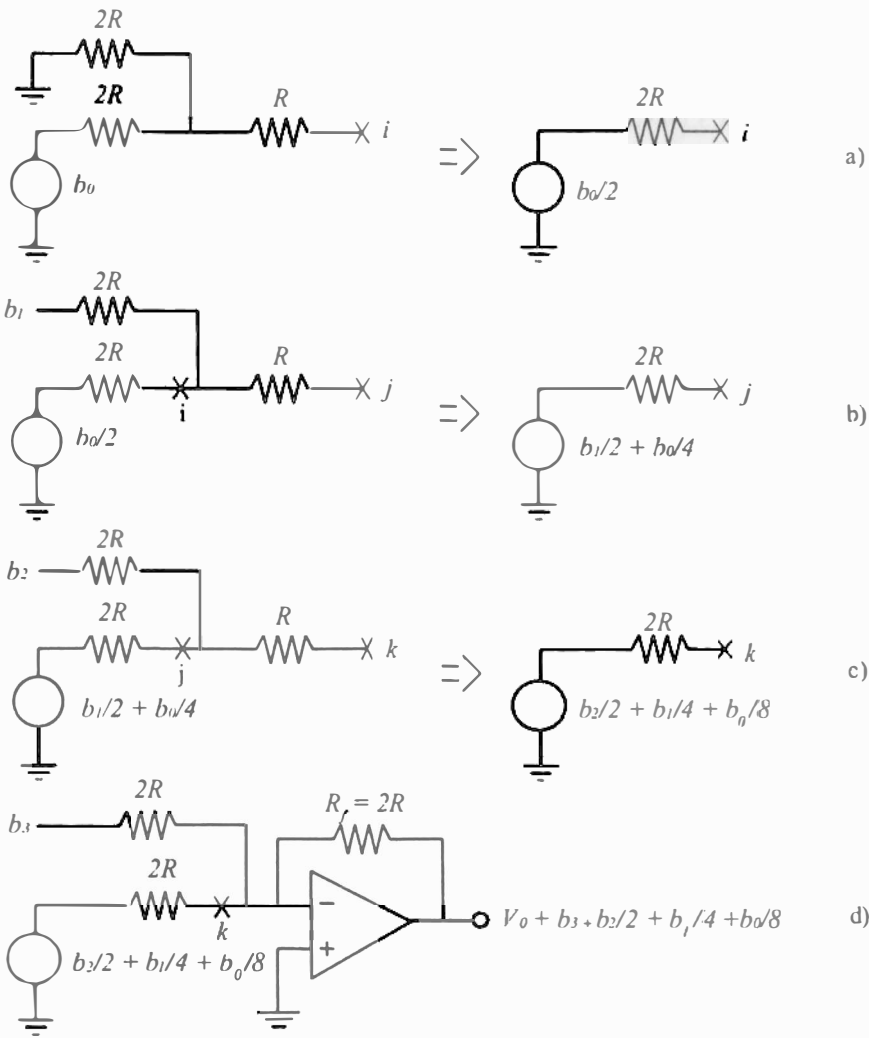


Figura 7.27 Análisis del circuito convertidor D/A que usa el método R-2R.

Una forma simple de evitar este problema es utilizar el método que se ilustra con el circuito de la figura 7.27, en el cual sólo se emplean dos valores fijos de resistencia en una serie de secciones a modo de escalera. Esta estructura le da la gran ventaja de que al incrementarse el número de secciones también se incrementa la capacidad del convertidor medida en el número de bits, ya que como se observa claramente en la figura cada sección aporta un término equivalente a un bit, o sea, $b_i/2^N$.

El análisis de este convertidor se realiza fácilmente por medio del circuito equivalente Thévenin. Aplicando esta técnica entre el punto i y tierra se tiene que el circuito resultante es exactamente una resistencia de valor $2R$ en serie con una fuente de voltaje $b_0/2$, como se muestra en la figura 7.27a. Continuando en forma similar al paso anterior, el circuito equivalente entre el punto j y tierra resulta ser igual a una resistencia $2R$ en serie con una fuente de voltaje igual a $b_1/2 + b_0/4$, como se muestra en la figura 7.27b. De la misma forma, el circuito equivalente entre el punto k y tierra es igual a una fuente de voltaje $b_2/2 + b_1/4 + b_0/8$ en serie con una resistencia $2R$, como se aprecia en la figura 7.27c. Por último, en la figura 7.27d se tiene que a la entrada del amplificador operacional se produce la suma de la corriente $b_3/2R$ debida a la rama superior, con la corriente $(b_2/2 + b_1/4 + b_0/8)/2R$ de la rama inferior. Si en este circuito se supone que los dígitos binarios sólo pueden tomar los valores cero y uno (ponderados por V_c) y como ambas corrientes circulan por la resistencia R_f de realimentación, el voltaje de salida V_o está dado por

$$V_o = V_c(b_3 + b_2/2 + b_1/4 + b_0/8) \quad [\text{Volts}]$$

7.4.7 Conversión A/D

La conversión A/D es el proceso que transforma el formato analógico de una señal en formato digital. Este proceso consiste en la adquisición

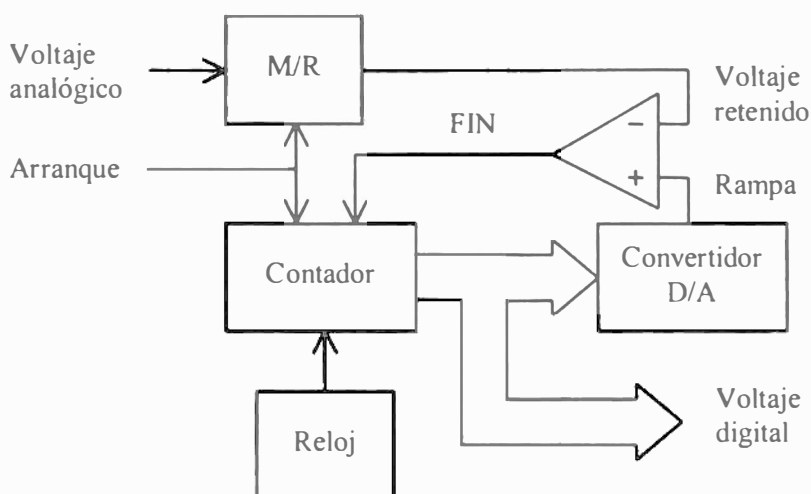


Figura 7.28 Diagrama esquemático de un convertidos rampa.

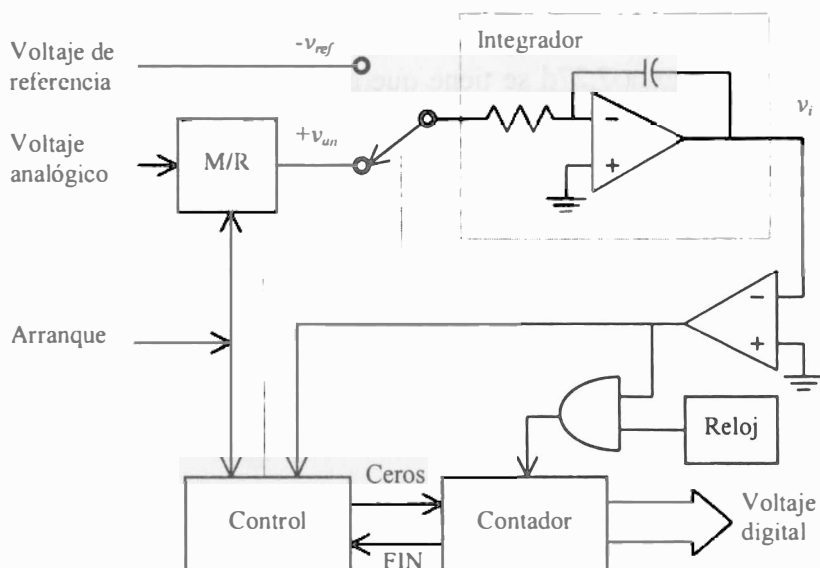


Figura 7.29 Diagrama esquemático de un convertidos de doble rampa o doble pendiente.

de muestras a cierta frecuencia (o sea, el muestreo de la señal), la retención de estos valores durante un breve lapso de tiempo (cuando la conversión no es suficientemente rápida) y la discretización de ellos a cierto número de niveles (o sea, la cuantización de la magnitud), para finalmente codificar dichos niveles en código binario, decimal codificado en binario (BCD) o cualquier otro que se requiera, que se desee y que sea compatible con el procesamiento digital que se va a realizar. El proceso puede efectuarse en varias formas, que dependen de la arquitectura de los circuitos que ejecutan la conversión.

7.4.7.1 MÉTODOS DE CONVERSIÓN A/D

La cuantización y la codificación se encuentran tan estrechamente relacionadas que, por lo general, se efectúan en forma simultánea. Los dos métodos más populares son el de doble pendiente y el de aproximaciones sucesivas. Adicionalmente se considerarán el método de rampa (o de pendiente única) y el método *flash* o instantáneo.

Método de rampa. El circuito de la figura 7.28 es el diagrama esquemático de un convertidor A/D de rampa o pendiente única. Este circuito funciona de la siguiente manera: a la entrada se tiene un bloque de muestreo y retención (M/R) que proporciona, durante el tiempo que tarda la conversión, el valor fijo del voltaje analógico que se muestrea, lo que ocurre cada vez que aparece el pulso de arranque. Este mismo pulso también dispara en forma simultánea un contador que corre libremente desde cero contando los pulsos del reloj en forma ascendente, con lo cual en la salida del convertidor D/A (que puede ser cualquiera de los que se analizaron previamente) se tiene una rampa en forma de escalera.

El proceso descrito en el párrafo anterior se detiene sólo cuando la rampa coincide o supera el valor muestreado y retenido por el circuito M/R, ya que en ese momento el comparador dispara la señal de fin de conversión (FIN). Al detenerse el contador, la lectura de éste es exactamente igual a la codificación digital, la que aparece en código binario en la salida (voltaje digital).

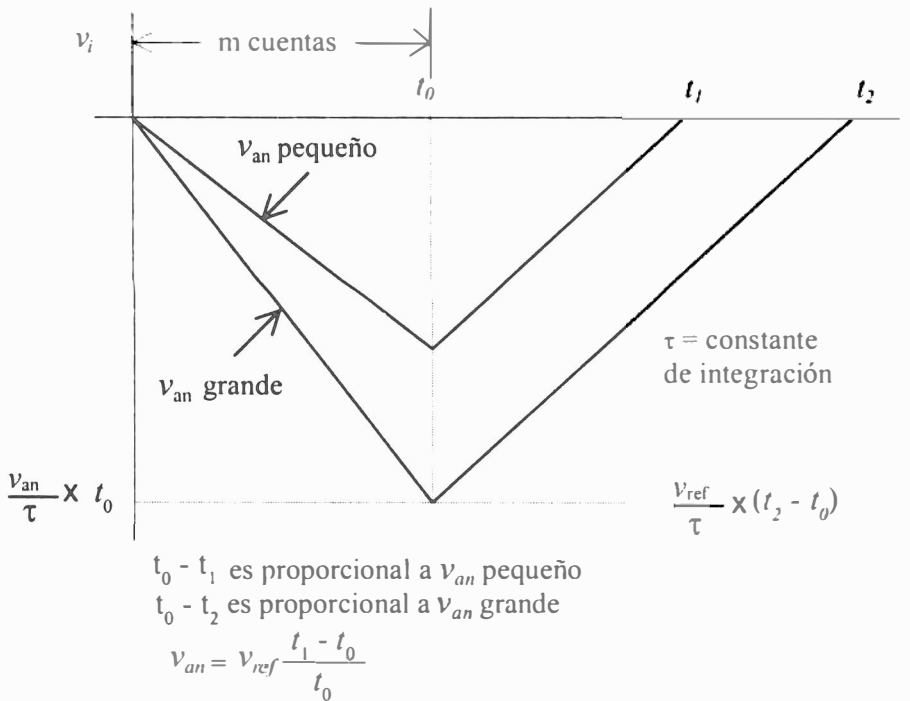


Figura 7.30 Diagrama esquemático de la operación de un convertidor de doble pendiente.

Método de doble pendiente. El circuito de la figura 7.29 es el diagrama esquemático de un convertidor A/D de doble pendiente. Este circui-

to funciona en dos fases (que se describen gráficamente en la figura 7.30): la primera comienza en el tiempo cero, cuando el pulso de arranque activa el circuito de muestreo y retención (M/R), conecta el valor muestreado de la señal a la entrada del integrador y pone en zeros el contador. A partir de este momento, la salida del integrador V_i es una rampa analógica de pendiente negativa cuyo valor depende del voltaje V_{an} , en tanto que el contador inicia la cuenta de los pulsos del reloj hasta que se alcanza, después de un tiempo fijo t_0 y de m cuentas, la señal de fin de cuenta (FIN).

En este momento se inicia la segunda fase, en la cual el circuito de control conecta, en la entrada del integrador, un voltaje de referencia negativo conocido y fijo ($-V_{ref}$), al mismo tiempo que pone en zeros nuevamente al contador. En esta forma, la rampa en la salida del integrador se invierte con una pendiente positiva fija y constante. Los tiempos t_1 (para V_{an} pequeño) y t_2 (para V_{an} grande) marcan el momento en que la rampa llega a cero y el contador no recibe más pulsos debido al cambio de estado del comparador, por lo que detiene su cuenta, la cual corresponde a la codificación binaria de V_{an} .

El método de la doble pendiente tiene la particularidad de que los tiempos $t_1 - t_0$ y $t_2 - t_1$ son directamente proporcionales al voltaje V_{an} e independientes de los parámetros del circuito. Esto se demuestra fácilmente con ayuda de la figura 7.30, donde se observa que el tiempo de la segunda integración ($t_1 - t_0$) es igual a t_0 multiplicado por el cociente entre V_{an} y V_{ref} . Al ser todos estos valores constantes, los resultados del contador serán muy precisos. Debido a ello, este método se emplea en los voltímetros digitales, aunque debe notarse que requiere más tiempo para concluir la conversión a causa de la doble cuenta que el contador debe realizar.

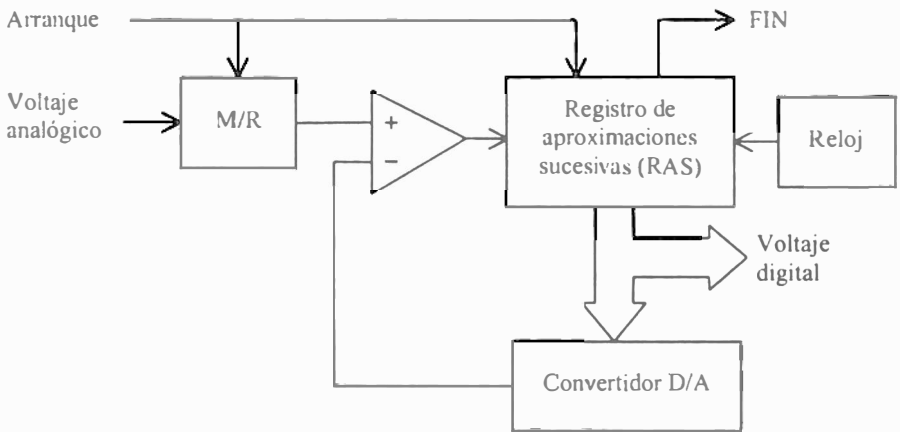


Figura 7.31 *Diagrama esquemático de un convertidor A/D de aproximaciones sucesivas.*

Método de aproximaciones sucesivas. El circuito de la figura 7.31 es el diagrama esquemático de un convertidor A/D de aproximaciones sucesivas. Este convertidor funciona a partir de un circuito integrado especial, llamado registro de aproximaciones sucesivas (RAS), el cual tiene la particularidad de que es al mismo tiempo una memoria y un sistema de control de los procedimientos que se llevan a cabo para la conversión. Su operación se desarrolla de la siguiente manera: después del arranque y con el primer pulso del reloj, el RAS proporciona al bloque que representa el convertidor D/A un patrón binario compuesto sólo de ceros, con excepción del primer bit que es un uno lógico. Por ejemplo, para un convertidor de 8 bits este número debe ser $(10000000)_{\text{bin}}$ porque corresponde al valor central del código binario de la conversión, ya que $(10000000)_{\text{bin}} = (128)_{\text{dec}}$ y el valor máximo es $(11111111)_{\text{bin}} = (255)_{\text{dec}}$. Por tanto, la salida del comparador informará al RAS en una sola operación si el bit más significativo es uno (cuando la salida es alta) o cero (cuando es baja), con lo cual este bit queda confirmado. En los siguientes

tes pulsos del reloj esta operación se repite en forma similar, incorporando a la izquierda del patrón binario los bits ya conocidos, con lo que se va confirmando sucesivamente el valor lógico de cada uno de los bits de izquierda a derecha.

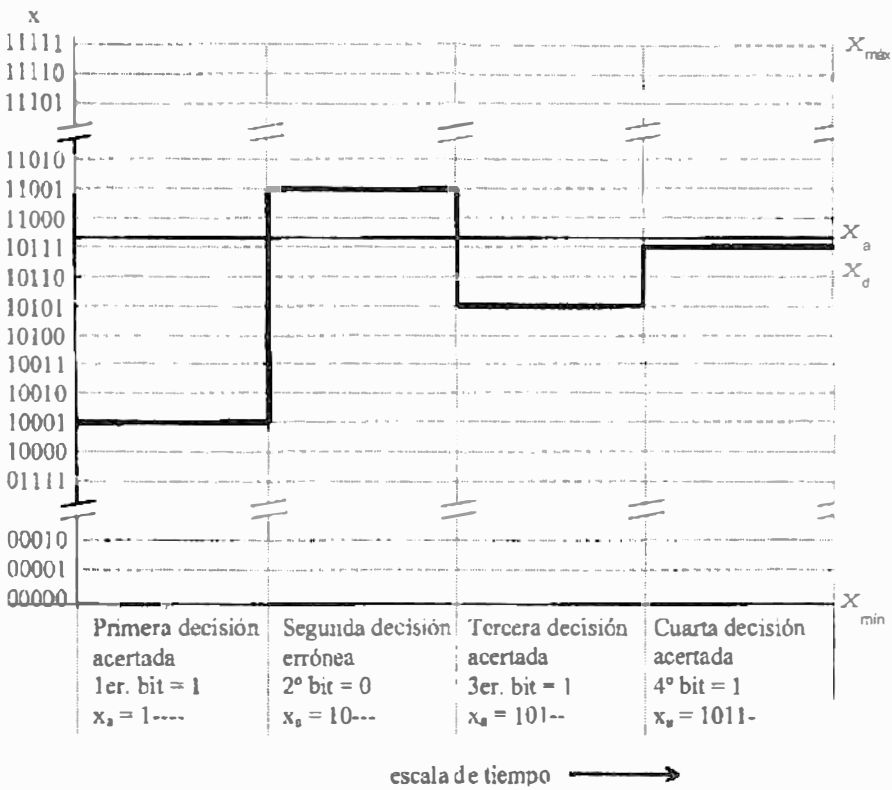


Figura 7.32 Diagrama de tiempos y decisiones de un convertidor A/D de

El funcionamiento de este convertidor puede comprenderse más fácilmente por medio de la figura 7.32, en la que se representan en forma gráfica por medio de un diagrama de tiempos las operaciones que debe realizar durante una conversión de cinco bits, para un voltaje analógico comprendido entre $(10110)_{\text{bin}}$ y $(10111)_{\text{bin}}$.

El primer paso consiste en la comparación del voltaje analógico x_a con el valor digital central del código binario x_d en su forma analógica, que es igual a $(10000)_{\text{bin}}$. En esta primera decisión, la salida del comparador confirma que el primer bit es igual a uno, lo cual se aprecia en la gráfica porque v_d se encuentra “por debajo” de v_a .

El segundo paso consiste en comparar nuevamente x_a con el voltaje analógico correspondiente a $(11000)_{\text{bin}}$, ya que el primer bit ya ha sido determinado, con lo cual se obtiene un resultado erróneo en la salida del comparador. En consecuencia, este segundo bit es igual a cero. El tercer paso consiste ahora en comparar por tercera ocasión al voltaje x_a con el equivalente analógico de $(10100)_{\text{bin}}$, obteniéndose una confirmación en la salida del comparador, por lo que este bit debe ser uno. El siguiente paso consiste en la cuarta comparación del voltaje v_a con el correspondiente analógico del código $(10110)_{\text{bin}}$. El resultado confirma que el cuarto bit es igual a uno. La última comparación (que ya no se muestra en la gráfica) permitirá determinar que el último bit debe ser igual a cero, lo que concluye la conversión en cinco pasos para obtener como resultado que $v_a = (10110)_{\text{bin}}$.

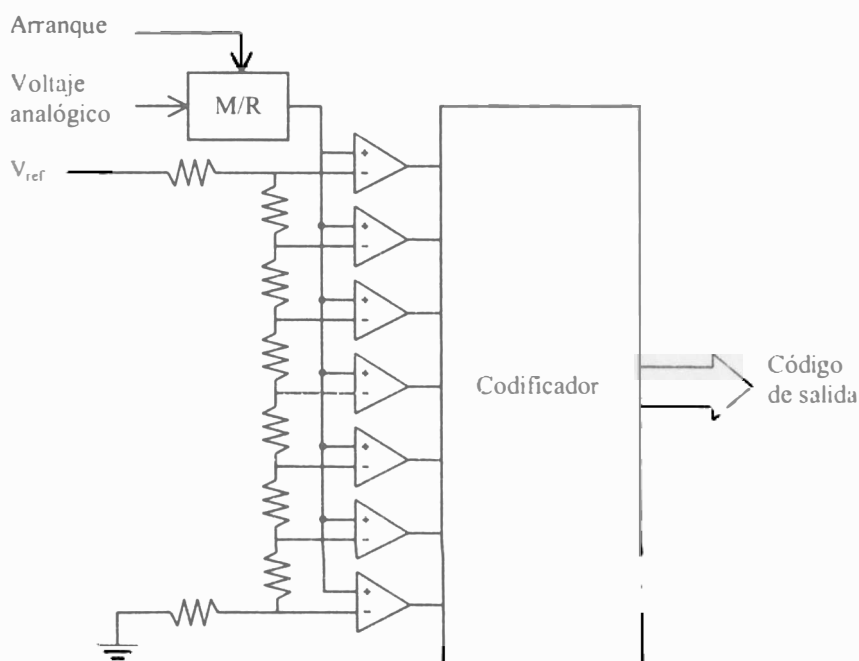


Figura 7.33 Diagrama esquemático de un convertidor A/D tipo flash.

Puesto que en cada pulso de reloj la operación del convertidor consiste básicamente en preguntar al comparador si el valor proporcionado por el RAS es mayor o menor que el valor analógico muestreado o retenido, la conversión completa de N bits tarda exactamente N pulsos de reloj, lo cual significa que este convertidor es muy rápido.

Método de convertidores en paralelo o *flash*. Éste es el método más simple y rápido para realizar la conversión A/D, ya que obtiene en forma inmediata el valor digital del voltaje analógico de entrada mediante la comparación con los niveles de un divisor de voltaje conectado a una

serie de comparadores en paralelo, como se muestra en la figura 7.33 para el caso de ocho niveles lógicos (cuatro bits en código binario). El divisor de voltaje y los comparadores están dispuestos de manera que cuando se aplica a la entrada un voltaje que va creciendo desde cero, los comparadores van cambiando sucesivamente de estado de abajo hacia arriba. Por tanto, cuando se aplica un voltaje analógico cualquiera los comparadores situados por debajo de este valor en el divisor de voltaje presentarán un voltaje de salida positivo (equivalente a un uno lógico) y los situados por encima, un voltaje negativo (o un cero lógico).

El resultado de estas comparaciones simultáneas que aparece en la entrada del codificador no es propiamente el valor digital del voltaje analógico; sin embargo, con la ayuda de éste se obtiene el código respectivo. En consecuencia, es un convertidor muy rápido (por lo cual se le conoce como *flash*), aunque su mayor desventaja es que requiere una gran cantidad de comparadores (exactamente $2^N - 1$ para N bits de resolución). Los únicos retrasos corresponden a los tiempos de respuesta de los comparadores y del circuito codificador.

7.4.8 Multicanalización

Este proceso consiste en tomar las muestras de N líneas o canales independientes y disponerlas en una sola línea ordenadas en una secuencia específica, de manera que todas lleguen por esta sola línea al convertidor A/D. Esto es posible porque las muestras pueden ocupar un espacio de tiempo mucho más pequeño que el comprendido entre una muestra y la siguiente, por lo que queda suficiente tiempo para acomodarlas a todas.

En la figura 7.34 se muestra el detalle de la multicanalización de cuatro señales o mesurandos independientes m_1 , m_2 , m_3 y m_4 en dos

tiempos de muestreo k y $k + 1$. Para identificar más claramente cada una de las muestras, se han usado subíndices de modo que la muestra denotada $m_{p,q}$ corresponde a la tomada a la línea ' p ' en el tiempo de muestreo ' q '.

En la primera columna de la izquierda de esta figura se observa la suave variación de cada una de las señales (líneas) y las muestras que se han tomado en los tiempos k y $k + 1$, las que para mayor claridad se dibujaron aisladas en la columna central. Como puede notarse, se trata de señales compuestas de escalones ascendentes o descendentes que toman valores negativos o positivos dependiendo de la forma en que varía la señal. Para cada uno de los tiempos de muestreo de la figura, estas muestras se han ordenado siguiendo la secuencia de orden de las líneas (1, 2, 3 y 4) y por cada tiempo de muestreo (en este caso: ..., k , $k + 1$, ...).

En el extremo derecho de la figura se observa la secuencia obtenida al seguir el procedimiento descrito. También se puede comprobar que para evitar confusiones y reconocer con facilidad a qué línea corresponde cada una de las muestras o grupo de ellas, se introdujo una secuencia especial de sincronía para separar cada grupo. En este caso se supuso que esta secuencia es "espacio, pulso, espacio", aunque la sincronía también puede incluirse en una línea separada, lo que proporciona mayor espacio en la línea única para acomodar más muestras.

En el tramo que se presenta aparece primero el grupo de tres pulsos de sincronía (sinc) y a continuación las muestras del tiempo k , o sea $m_{1,k}$, $m_{2,k}$, $m_{3,k}$ y $m_{4,k}$ con lo que se completa el primer intervalo de tiempo. Después aparece nuevamente el grupo de sincronía (sinc), que es seguido por las muestras del tiempo $k + 1$, o sea $m_{1,k+1}$, $m_{2,k+1}$, $m_{3,k+1}$ y $m_{4,k+1}$. La línea de sincronía separada se muestra abajo. Como puede comprenderse fácilmente, el proceso ha sido el mismo para todos los tiempos de muestreo previos y continúa en forma similar para cada uno de los siguientes.

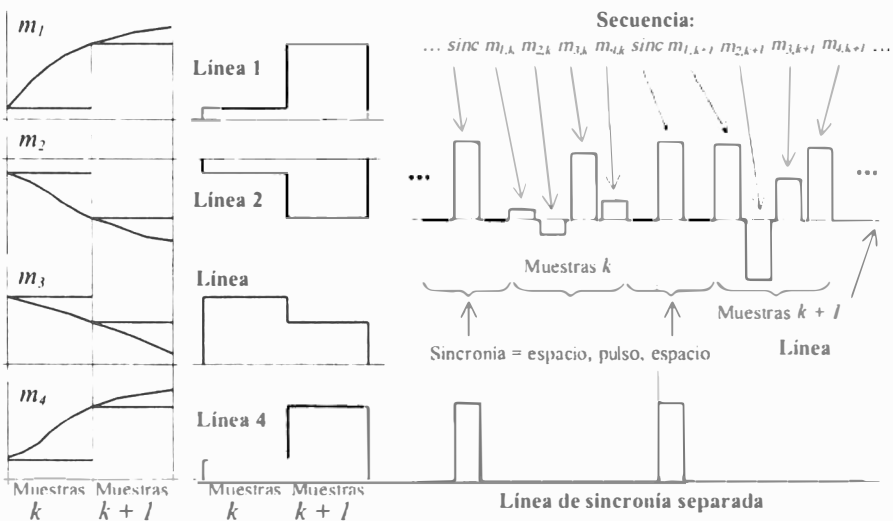


Figura 7.34 Multicanalización de cuatro señales o mesurandos.

En este caso el ejemplo incluye una secuencia de sincronía (definida como espacio, pulso, espacio) en la misma línea en que se disponen las muestras, situación que puede evitarse si en una línea adicional se incluye la sincronía, por ejemplo en forma de un solo pulso. En cualquiera de los dos casos la sincronía cumplirá con la función de informar al convertidor A/D el momento en que se inicia cada uno de los bloques de muestras, para de esta forma identificar el principio de cada secuencia.

7.5 El error de origen digital

El proceso de transformación de una señal que se encuentra en formato analógico y que se quiere disponer en formato digital no se encuentra

exento de errores, como cualquier otro proceso electrónico. Algo similar ocurre con las señales procesadas o en formato digital que se desee hacer volver a la representación analógica. Estos errores se producen por las más diversas causas, algunas propias del mismo proceso y otras debido a las imperfecciones de los circuitos o de los sistemas encargados de la conversión.

A continuación se considerarán los más importantes, entre los cuales se encuentran la resolución del convertidor, los tiempos de retraso o de operación, los errores de la conversión, el error de velocidad de cambio de la salida (*slew rate*) y los errores de salto y retención de código, entre los más importantes.

7.5.1 Resolución del convertidor

Puesto que la resolución de un sistema o circuito cualquiera es la mínima variación de la entrada que se detecta en la salida, para la codificación lineal la resolución puede expresarse a través del número de bits o de niveles de cuantización. En el caso de la codificación no lineal, o sea, cuando el tamaño de los niveles no es constante a lo largo de toda la escala, se dice que la resolución es variable.

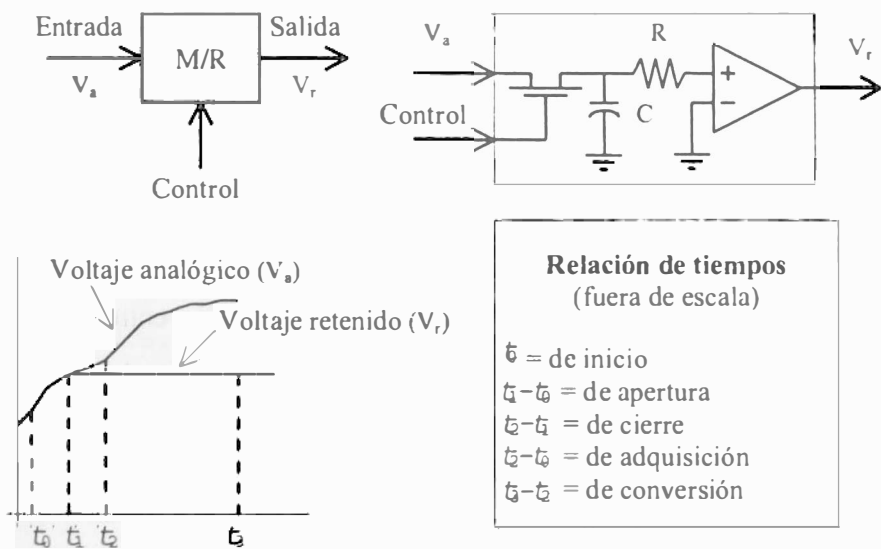


Figura 7.35 *Tiempos de apertura, cierre, adquisición y conversión.*

7.5.2 Tiempos de operación

En el proceso de conversión se requiere muestrear y retener la señal analógica, lo cual significa capturar un voltaje y retenerlo en forma estable mientras se produce la codificación. Esto implica que el circuito M/R de la figura 7.35 debe activar en el tiempo t_0 a un interruptor (usualmente un transistor que se pone en cortocircuito), lo que demora un tiempo conocido como de apertura ($t_1 - t_0$), esperar que se cargue el capacitor C y una vez cargado aislarlo de la señal de entrada, lo que exige un tiempo de cierre ($t_2 - t_1$). Ambos constituyen el tiempo de adquisición. Posteriormente, se realizan los procesos de codificación, para los cuales se requiere un tiempo mayor, conocido como tiempo efectivo de conversión ($t_3 - t_2$).

7.5.3 Errores de conversión

Los errores más importantes del convertidor A/D son cinco de tipo estático, llamados de ganancia, de desplazamiento, de cuantización, de monotonicidad y de no linealidad; y dos dinámicos, conocidos como de velocidad de cambio de la salida y de salto y retención de código. Éstos se definen a continuación de acuerdo con la figura 7.36.

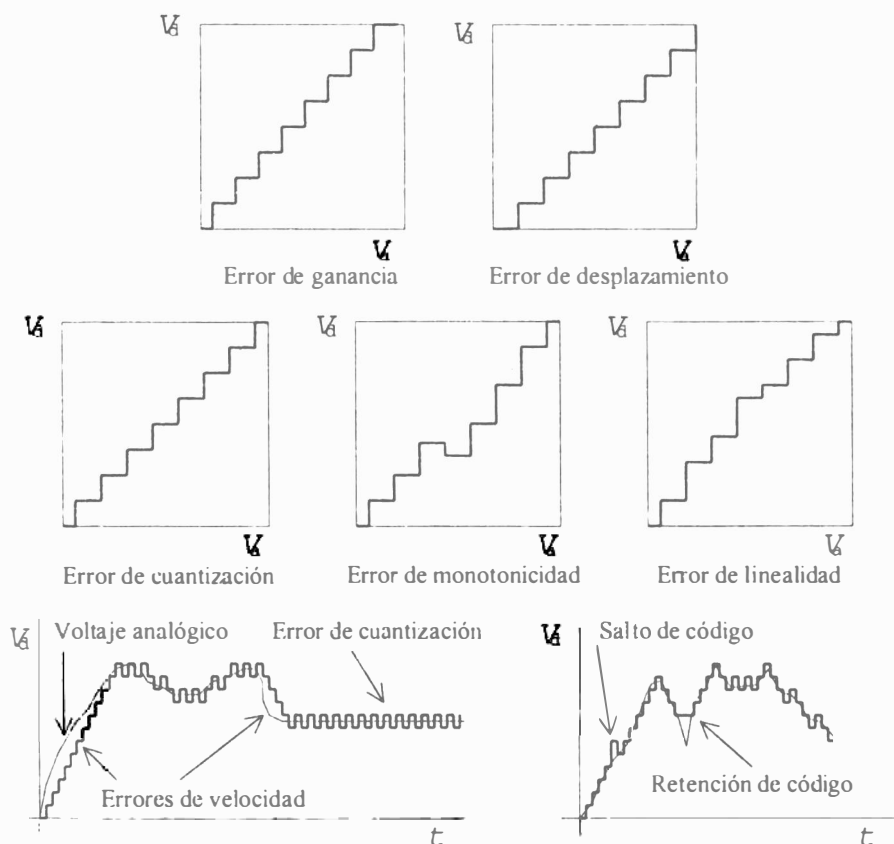


Figura 7.36 Errores de la conversión.

Error de ganancia. La altura de los escalones de la escala discreta y los intervalos a los que quedan situados definen una pendiente de la escala que no siempre coincide con la inclinación ideal de la característica V_a contra V_d del instrumento. Este efecto produce un error que se llama de ganancia. Por su naturaleza, se observa que es equivalente a tener mayor o menor ganancia (pendiente) en una etapa de ampliación y que es directamente proporcional a la magnitud del voltaje de entrada analógico V_a .

Error de desplazamiento. Cualquier variación sistemática que se presente uniformemente en toda la escala del voltaje analógico de entrada V_a , como polarizaciones o corrimientos, se manifiesta como una diferencia neta entre cualquier valor discreto y el valor analógico típico que le correspondería, por lo que a esta diferencia se le conoce como error de desplazamiento o de corrimiento.

Error de cuantización. Debido a que el voltaje analógico muestreado o retenido puede tomar cualquier nivel en un intervalo continuo y el voltaje digital dispone sólo de un número limitado de niveles, la cuantización y la codificación implican que los voltajes discreto y digital son aproximados por este efecto de redondeo. Este resultado se representa como las diferencias entre los valores cuantizados o codificados y el valor analógico correspondiente. Se conoce con el nombre de error o ruido de cuantización, ya que tiene características de un ruido aleatorio que se agrega a la señal.

Error de monotonicidad. La relación entre V_a y V_d debe ser una escalera que crece en forma constante y cuyos escalones son exactamente iguales; sin embargo, por imperfecciones de los circuitos puede aparecer un escalón negativo cuando se produce el cambio de dos niveles digitales contiguos o cuando cambian todos los bits en forma simultánea, como de 0111 a 1000. Esto significa que se altera la secuencia nor-

mal de la escalera al resultar que un valor superior tiene un código que corresponde a un valor inferior. Este efecto se conoce como error de monotonicidad.

Error de linealidad. Si los escalones no son negativos, pero tampoco son perfectamente iguales, la relación entre V_a y V_d se aparta de la recta ideal más allá de lo que normalmente lo hace con el error de cuantización. Por tanto, la relación entre la entrada analógica y la salida discreta deja de ser una escalera uniforme y se produce este tipo de error.

Error de velocidad de cambio de la salida. Debido a que los procesos de conversión no son instantáneos, el voltaje digital no siempre puede seguir de cerca las variaciones del voltaje analógico, especialmente cuando se trata de frecuencias elevadas. En tal caso se produce el error de velocidad de cambio de la salida, porque la diferencia entre el voltaje analógico y el código digital que produce el convertidor es grande y los voltajes no se aproximan. Este error depende también del circuito, de la velocidad máxima de operación de los circuitos y del tipo de conversión utilizada, ya que dependiendo de su estructura y funcionamiento el convertidor no siempre puede proporcionar a tiempo la codificación requerida.

Errores de salto y retención de código. Ocasionalmente se produce este tipo de errores debido a que el método de codificación no puede responder con suficiente velocidad a las variaciones del voltaje analógico, a que existen retrasos importantes en los cambios de estado de las líneas digitales, a que los pulsos de sincronía no están cumpliendo adecuadamente con su función o porque el convertidor está operando muy cerca de su velocidad máxima.

La mayor parte de las veces este error es provocado por el simple cambio simultáneo de dos o más bits contiguos en el código binario, por ejemplo al pasar de 0011 a 0100 y viceversa. En tales casos, cuando

alguno de los bits de mayor peso no cambia de estado con suficiente velocidad, se produce un código erróneo. Si el bit debió cambiar de uno a cero, se tiene retención de código; en tanto que si cambió sin motivo de cero a uno, se tendrá un salto de código. En otras ocasiones, sin embargo, los códigos son retenidos o saltados sólo durante un breve intervalo de tiempo adicional debido a los retrasos de los circuitos o porque no existe una adecuada sincronía entre ellos. Esta circunstancia puede ser interpretada erróneamente por el resto del sistema, cuando las líneas digitales son capturadas y retenidas por los demás circuitos, ya que los cambios de estado se producen a destiempo.

Bibliografía

1. Aljama, T, M. Cadena, S. Charleston y O. Yáñez. 1992. *Procesamiento digital de señales*, México UAM-Iztapalapa.
2. Auñón, Jorge. Notas del curso "Procesamiento estocástico", impartido en otoño de 1982 en el Depto. de Ing. Eléctrica de la UAM-Iztapalapa.
3. Beckwith, Thomas, Roy Marangoni y John Lienhard. 1995. *Mechanical Measurements*. 5ª ed. New York, Addison-Wesley.
4. Bentley, John. 1995. *Principles of Measurement Systems*. 3ª ed. UK, Longman.
5. Bland, J.M. y D.G. Altman. "Statistical Methods for Assessing Agreement Between Two Methods Of Clinical Measurement", *The Lancet*, 8 de febrero de 1986.
6. Bottaccini, M.R. 1975. *Instruments and Measurements*. Columbus, Ohio, Charles & Merrill.
7. Bronzino, J. (ed.). *The Biomedical Engineering Handbook*. Boca Raton Florida, CRC Press.
8. Cooper, G.R. y C.D. McGillem. 1971. *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*. New York, Holt, Rinehart and Winson.

9. Doebelin, Ernest. 1990. *Measurement Systems, Application and Design*. 5ª. Ed. New York, McGraw-Hill.
10. Hernández, M. E., F. A. Suárez, L. M. A. Bautista, V. D. Jiménez y R. J. Vidal. 2000. *Mediciones biomédicas de presión, flujo y volumen*. México, UAM-Iztapalapa.
11. Holman, J. P. y W. J. Gajda. 1988. *Métodos experimentales para ingenieros*. 4a. ed. México, McGraw Hill.
12. Horowitz, P. y W. Hill. 1980. *The Art of Electronics*. New York, Cambridge University Press.
13. Jung, W. 1986. *The IC Op-Amp Cookbook*. 3a. ed. Indianápolis, Sams.
14. Mompín, P.J. (ed). 1983. *Transductores y medidores electrónicos*. 2a. ed. Edición; Barcelona, Marcombo Boixareu Editores.
15. Muñoz, G. C. y M.T. Chárraga. 1997. *Manual de instrumentación electrónica y biomédica*. México, UAM-Iztapalapa.
16. Oppenheim, A. V., A. S. Willsky y N. S. Hamid. 1997. *Señales y sistemas*. 2a. ed. México, Prentice Hall.
17. Papoulis, A. 1984. *Probability, Random Variable, and Stochastic Processes*. 2a. ed. New York, McGraw-Hill.
18. Peebles, Peyton. 1990. *Probability, and Random Variables and Random Signal Principles*. 3a. ed. New York, McGraw-Hill.

19. Tompkins, W.J. y J.G. Webster (eds.). 1981. *Design of Microcomputer Based Medical Instrumentation*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.
20. Webster, J.G. (ed.). 1998. *Medical Instrumentation: Application and Design*. 3a. ed. Boston, Houghton-Mifflin.
21. Webster, J.G (ed.). 1999. *The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook*. Boca Raton, Florida, CRC Press/IEEE Press.

Apéndice A

Diagramas de Bode

A.1 Notación empleada

Estos diagramas se caracterizan por representar la magnitud de las funciones de transferencia de sistemas de medición en función de la frecuencia ω en escalas logarítmicas: el logaritmo natural de

$$H(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (\text{A.1})$$

es la función compleja

$$\ln H(j\omega) = \ln M(\omega) + j\phi(\omega) \quad (\text{A.2})$$

En esta ecuación $\ln M(\omega)$ es la ganancia o ganancia logarítmica en Nepers y ϕ es el ángulo en radianes. La unidad común para la ganancia es el decibel (dB); en esta unidad

$$\text{Ganancia en dB} = 20 \log M(\omega) \quad (\text{A.3})$$

De manera similar, la unidad común para el ángulo ϕ es el grado. Para convertir de unas unidades a otras, se utilizan las siguientes relaciones:

$$\text{Núm. de dB} = 8.686 \times \text{Núm. de Nepers}$$

$$\text{Núm. de grados} = 360/2\pi = 57.295 \times \text{Núm. de radianes}$$

Introduciremos también aquí la variable frecuencia logarítmica:

$$u = \log \omega, \text{ de modo que } \omega = 10^u \quad (\text{A.4})$$

En términos de esa variable, un intervalo de frecuencia está definido por la ecuación

$$u_2 - u_1 = \log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (\text{A.5})$$

Existen dos tipos de intervalos utilizados comúnmente en diagramas de Bode:

La octava, para la cual $\omega_2 = 2 \cdot \omega_1$

La década, para la cual $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$

Las pendientes de las rectas asintóticas en los diagramas de Bode se expresarán en términos de esos dos intervalos.

La principal ventaja de utilizar gráficas logarítmicas es que la multiplicación de magnitudes puede convertirse en una suma. Además, existe un método muy sencillo para representar una curva logarítmica, utilizando aproximaciones asintóticas.

La representación logarítmica es muy útil, puesto que muestra en un solo diagrama las características a bajas frecuencias y a altas frecuencias de la función de transferencia. (Nótese que debido a la escala logarítmica de frecuencia, es imposible graficar las curvas a frecuencia cero).

A.2 Factores básicos de $H(j\omega)$

Los factores básicos que aparecen con mayor frecuencia en la función de transferencia son:

1. La ganancia K
2. Factores integrales y diferenciales, $(j\omega)^{\pm 1}$
3. Factores de primer orden, $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$
4. Factores de segundo orden (cuadráticos),

$$\left(1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2\right)^{\pm 1}.$$

Una vez que nos familiarizamos con las gráficas logarítmicas de estos factores básicos, es posible construir una gráfica logarítmica compuesta para $H(j\omega)$, graficando los factores individuales y sumando gráficamente los logaritmos de sus ganancias.

Este proceso puede simplificarse utilizando aproximaciones asintóticas. Si es necesario, pueden hacerse correcciones para obtener diagramas más precisos.

A.3 La ganancia K

Un número mayor que la unidad tiene un valor positivo en decibels, mientras que un número menor que la unidad tiene un valor negativo.

La curva logarítmica para una constante K es una línea recta horizontal con magnitud $20 \log K$ [dB]. El ángulo de fase de la ganancia es cero.

A.4 Factores integrales y diferenciales $(j\omega)^{\pm 1}$

La magnitud logarítmica de $1/j\omega$ en dB es

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ [dB]}$$

El ángulo de fase de $1/j\omega$ es constante e igual a -90° .

Si graficamos la magnitud logarítmica $-20 \log \omega$ [dB] contra la frecuencia ω , obtenemos una línea recta con una pendiente negativa de -20 dB/década (-6 dB/octava). La figura A.1 ilustra gráficamente estas relaciones.

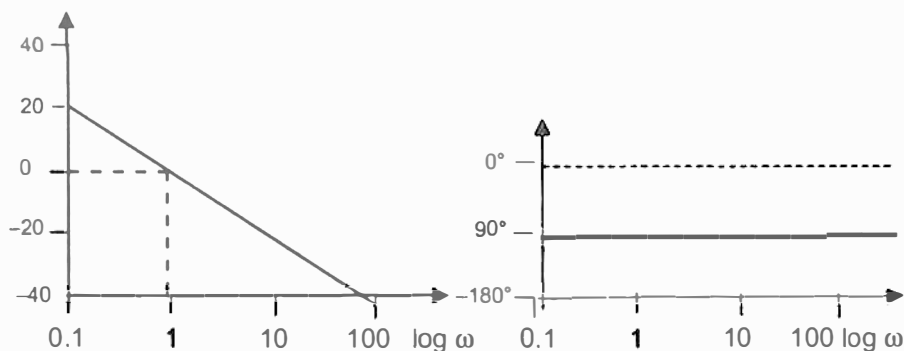


Figura A.1 Curvas de respuesta en frecuencia para $1/j\omega$.

En forma similar, la magnitud logarítmica de $j\omega$ en dB es

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ [dB]}$$

El ángulo de fase es constante e igual a $+90^\circ$.

La curva de magnitud es una línea recta con una pendiente de 20 dB/década (6 dB/octava). La figura A.2. muestra la respuesta en frecuencia para $j\omega$.

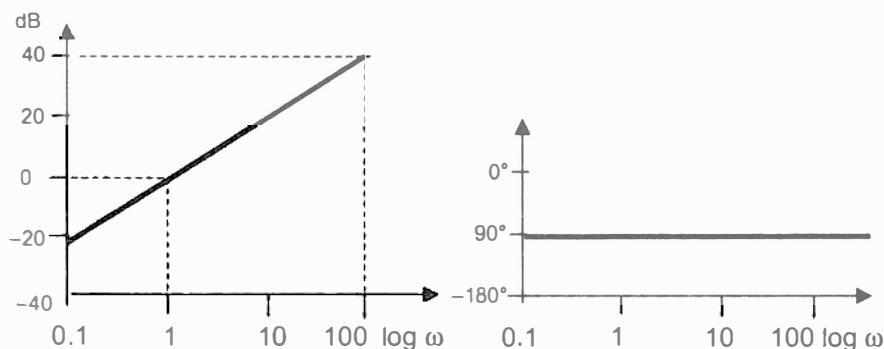


Figura A.2 Curvas de respuesta en frecuencia para $j\omega$.

Podemos distinguir fácilmente las diferencias en las respuestas en frecuencia para $1/j\omega$ y $j\omega$ en los signos de las pendientes de las curvas de magnitud y en los signos en los ángulos de fase. Las dos magnitudes logarítmicas son iguales a 0 dB, para $\omega = 1$.

Si la función de transferencia contiene factores del tipo $(1/j\omega)^n$ ó $(j\omega)^n$, las magnitudes logarítmicas serán, respectivamente;

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -n \times 20 \log |j\omega| = -20n \log \omega [\text{dB}]$$

$$20 \log |(j\omega)^n| = n \times 20 \log |j\omega| = 20n \log \omega [\text{dB}]$$

Las pendientes de las curvas logarítmicas de magnitud para los factores $(1/j\omega)^n$ y $(j\omega)^n$ serán $-20n$ dB/década y $+20n$ dB/década respec-

tivamente. El ángulo de fase de $(1/j\omega)^n$ es igual a $-90^\circ \times n$ sobre el rango de frecuencias, mientras que el de $(j\omega)^n$ es igual a $+90^\circ \times n$.

A.5 Factores de primer orden $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

La magnitud logarítmica del factor de primer orden $1/(1+j\omega T)$ es

$$20\log\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} [\text{dB}]$$

Para bajas frecuencias como $\omega \ll 1/T$, puede aproximarse por medio de

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} = -20\log(1) = 0\text{dB}$$

Por lo tanto, la curva de magnitud logarítmica a bajas frecuencias es una línea constante a 0 dB. Para altas frecuencias, como $\omega \gg 1/T$, tenemos

$$-20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} = -20\log\omega T [\text{dB}]$$

Ésta es una expresión aproximada para el rango de altas frecuencias. A $\omega = 1/T$ la ganancia es 0 dB; a $\omega = 10/T$ la ganancia es -20 dB, por lo que el valor de $-20\log\omega T$ decrece en 20 dB cada década de ω . Para $\omega \gg 1/T$, la gráfica de magnitud es una línea recta con pendiente -20 dB/década (-6 dB/octava). La figura A.3 muestra la gráfica completa

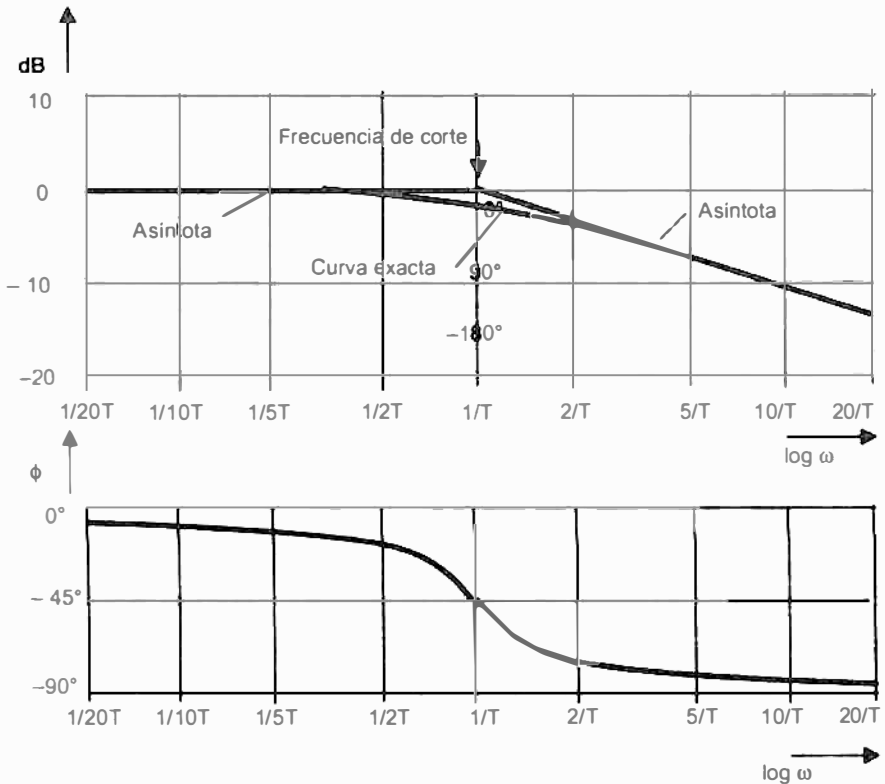


Figura A.3 Curva de ganancia logarítmica con asíntotas y curva de ángulo de fase para el factor $1/(1+j\omega T)$.

La frecuencia en la cual las dos asíntotas se intersectan es la llamada frecuencia de corte. Para el factor $1/(1+j\omega T)$, esta frecuencia es $\omega = 1/T$. El ángulo de fase ϕ del factor $1/(1+j\omega T)$ es

$$\phi = -\tan^{-1}(\omega T)$$

A frecuencia cero el ángulo de fase es 0° ; a la frecuencia de corte el ángulo de fase es

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{T}{T}\right) = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ$$

En el infinito el ángulo de fase se convierte en -90° . Puesto que el ángulo de fase está dado por una función tangencial inversa, presenta gráficamente una simetría con respecto al punto de inflexión en $\phi = -45^\circ$.

El error en la curva de magnitud introducido con el uso de las asíntotas puede calcularse fácilmente. El error máximo ocurre de manera lógica en la frecuencia de corte y es aproximadamente igual a -3 dB, puesto que

$$-20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.0103$$

Nótese que al variar la constante de tiempo T la frecuencia de corte se desplaza hacia la derecha o hacia la izquierda, pero la forma de las gráficas de magnitud y de fase permanecen iguales. La función de transferencia $1/(1+j\omega T)$ tiene las características de un filtro pasabajas.

Una ventaja de la representación logarítmica es que para factores recíprocos, por ejemplo el factor $1+j\omega T$, las curvas de magnitud y de fase necesitan solamente cambiar de signo, puesto que

$$20 \log |1 + j\omega T| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

La frecuencia de corte $\omega = 1/T$ es la misma en ambos casos. La pendiente de la asíntota de alta frecuencia de $1+j\omega T$ es 20 dB/década y el ángulo de fase varía de 0° a 90° al aumentar la frecuencia de 0 a ∞ . La siguiente figura muestra los diagramas de Bode para el factor $1+j\omega T$.

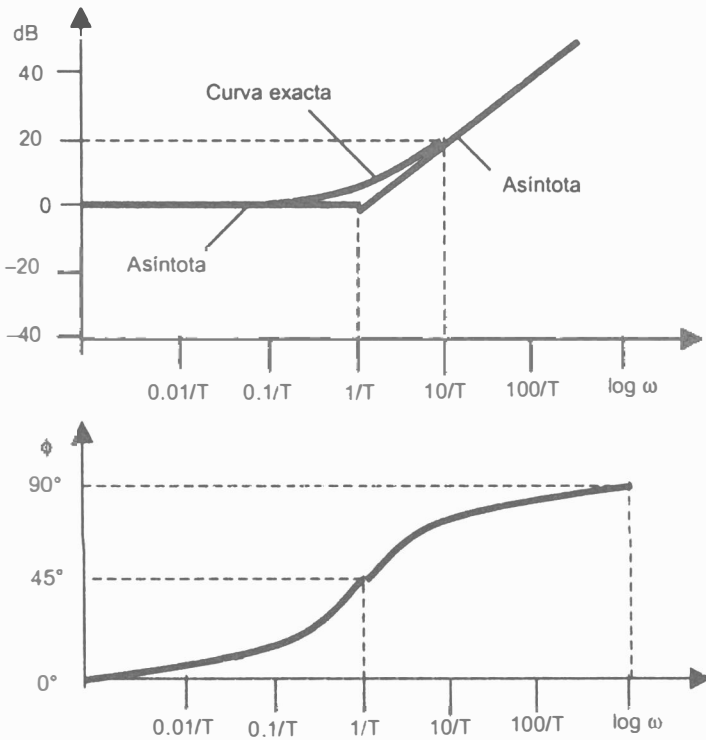


Figura A.4 Curva de ganancia logarítmica para el factor $(1 + j\omega T)$.

A.6 Factores de segundo orden

Los sistemas de medición biomédicos poseen a menudo factores cuadráticos de la forma

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Si $\zeta > 1$, el factor cuadrático puede expresarse como el producto de dos factores de primer orden. Si $0 < \zeta < 1$, el factor cuadrático es el producto de dos factores complejos conjugados. La curva asintótica de respuesta en frecuencia puede obtenerse de la siguiente manera:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

Para bajas frecuencias, como $\omega \ll \omega_n$, la ganancia logarítmica es

$$-20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

La asíntota para bajas frecuencias es, por lo tanto, una línea horizontal a 0 dB. Para altas frecuencias, como $\omega \gg \omega_n$, la ganancia será

$$-20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) [\text{dB}]$$

La asíntota para altas frecuencias será entonces una línea recta con una pendiente de -40 dB/década , la cual interseca la asíntota de bajas frecuencias cuando $\omega = \omega_n$. La frecuencia ω_n es la frecuencia de corte del factor considerado.

Las dos asíntotas obtenidas son independientes del valor de ζ ; sin embargo, cerca de la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$ ocurre un pico de resonancia. El grado de amortiguamiento ζ determina la magnitud de este pico de resonancia. Por lo tanto, existen errores al aproximar con asíntotas y la magnitud de esos errores dependerá de ζ , la cual será grande para valores pequeños de ζ .

La figura A.5 muestra las curvas de ganancia exactas junto con las asíntotas y los ángulos de fase exactos. Si se desea hacer correcciones a las curvas asíntóticas, pueden obtenerse los factores de corrección para un número suficiente de puntos en el eje logarítmico de la frecuencia. El ángulo de fase del factor cuadrático es

$$\phi \left(\frac{1}{1 + 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$$

Como se observa en la expresión, el ángulo de fase para este factor depende de ω_n y ζ .

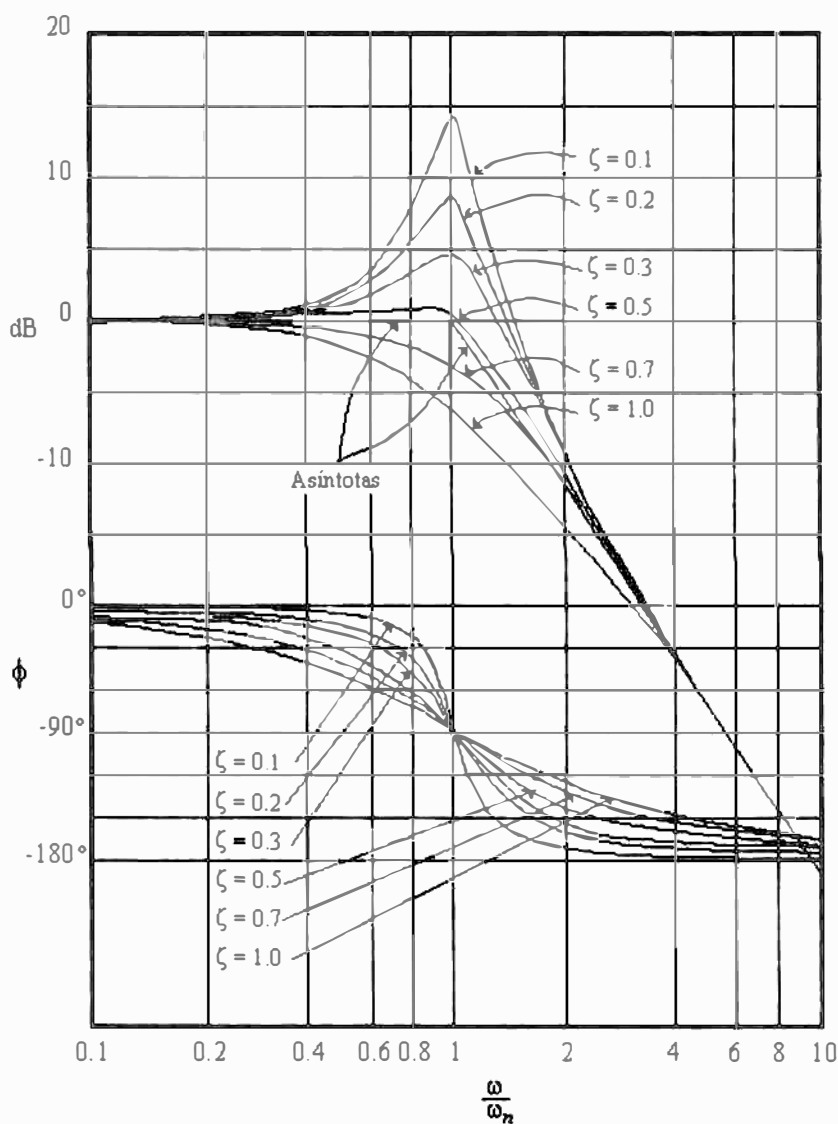


Figura A.5 Curvas de magnitud logarítmica con asintotas, y curvas con ángulo de fase.

A $\omega = 0$ el ángulo de fase es igual a 0° . A la frecuencia de corte $\omega = \omega_n$ el ángulo de fase es -90° independientemente de ζ , puesto que

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta}{0}\right) = -\tan^{-1}(\infty) = -90^\circ$$

A $\omega = \infty$ el ángulo de fase será -180° . La curva del ángulo de fase tiene una simetría con respecto al punto de inflexión, el punto donde $\phi = -90^\circ$.

Las curvas de respuesta en frecuencia para el factor

$$1 + 2\zeta \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2$$

pueden obtenerse con sólo invertir el signo de la ganancia logarítmica y el ángulo de fase de factor

$$\frac{1}{1 + 2\zeta \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para obtener las curvas de respuesta en frecuencia de un factor cuadrático dado debemos determinar la frecuencia de corte ω_n y el grado de amortiguamiento ζ , y después, utilizando la figura A.5, graficar las curvas.

A.7 Procedimiento general para graficar los diagramas de Bode

- Primero vuelva a escribir la función de transferencia $H(j\omega)$ como un producto de los factores básicos antes mencionados.

- Identifique después las frecuencias de corte asociadas con estos factores básicos.
- Grafique las curvas aproximadas asintóticamente.
- Haga las correcciones necesarias.
- El ángulo de fase de $H(j\omega)$ puede graficarse sumando las curvas de los ángulos de fase individuales.

Apéndice B

Probabilidad y procesos estocásticos

Para el lector debe ser claro que el siguiente material se concibió como una breve introducción a la probabilidad y los procesos estocásticos, haciendo énfasis en los aspectos importantes para entender la naturaleza de los mesurandos aleatorios. De cualquier manera, se recomienda consultar libros especializados citados en la bibliografía.

B.1 Concepto de variable aleatoria

Sea

$S = \{\text{todos los posibles resultados de un experimento}\} = \text{Espacio muestra}$

$= \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, entonces definimos $X: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo Considere el juego de la moneda y el dado, donde S tiene los elementos que se muestran en la figura B.1.

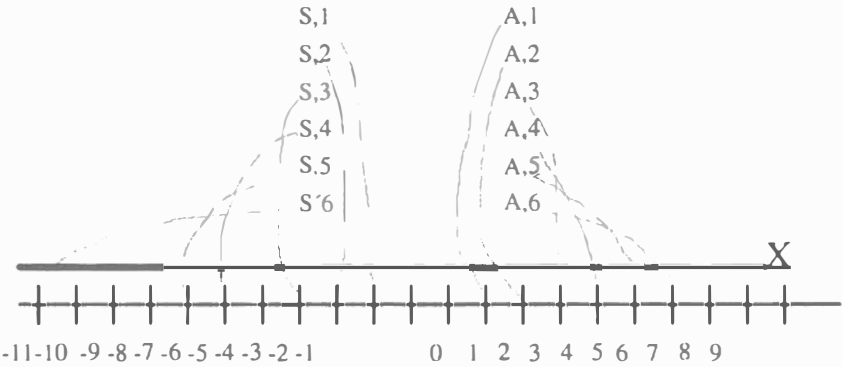


Figura B.1 Elementos del juego de la moneda y el dado.

En este ejemplo actúa como una transformación de algo no contable en algo que directamente es un número en la recta numérica. Ésta es precisamente la necesidad de crear el concepto de variable aleatoria: cuando S tiene resultados no contables.

Puede ser cualquier función, como se observa en la figura B.2. Sin embargo, para que sea una función de variable aleatoria se requieren los siguientes puntos:

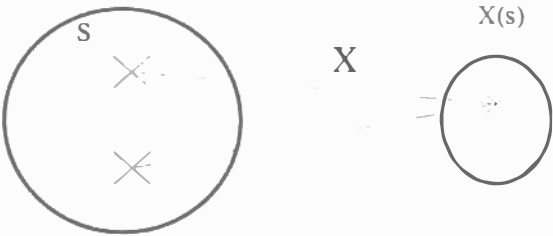


Figura B.2 Mapeo de la función X .

1. Es inyectiva y se muestra gráficamente en la figura B.3.

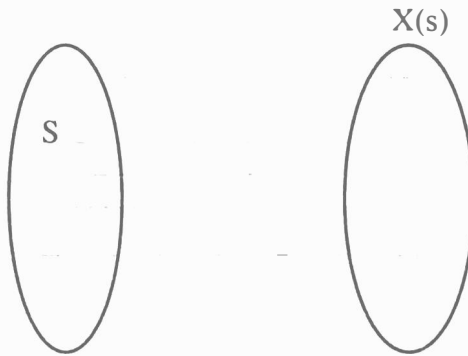


Figura B.3 Representación gráfica de X .

2. Definimos el concepto de evento en $X(s)$ como: evento = $\{X \leq x\}$, es decir, $X(s)$ no excede el número “ x ” y debe corresponder a un evento perfectamente definido en S .
3. $p\{x = -\infty\} = p\{x = \infty\} = 0$. Esto no quiere decir que no habrá $x = -\infty$ ó $x = \infty$ correspondientes a algún $s \in S$, sino que simplemente su $p\{x = -\infty\}$ ó $p\{x = \infty\} = 0$, es decir, estamos buscando eventos finitos y de probabilidad $\neq 0$.

B.2 Función distribución de probabilidad ($F_x(x)$)

Definimos: $p(X \leq x) = F_x(x)$ y decimos: es la función de distribución de probabilidad de X , con las siguientes propiedades:

1. $F_x(-\infty) = 0$
2. $F_x(\infty) = 1$

3. $0 \leq F_x(x) \leq 1$
4. $F_x(x_1) \leq F(x_2)$ si $x_1 < x_2$
5. $p\{x_1 \leq X \leq x_2\} = F_x(x_2) - F_x(x_1)$
6. $F_x(x^+) = F_x(x)$ i.e. valorada por la derecha.

Justificación:

1. $F_x(-\infty) = p(X \leq -\infty) = p(x < -\infty \cup x = -\infty)$, pero este evento no existe.
2. $F_x(\infty) = p(X \leq \infty) = p(X < \infty \cup X = \infty) = 1$
3. $p(x_1 < X \leq x_2) = F_x(x_1) - F(x_2)$

Demostración:

El evento $p\{x_1 < X \leq x_2\} = p\{X \leq x_2\} - p\{X \leq x_1\}$

puesto que $p(x_1 < X \leq x_2) = F_x(x_1) - F(x_2)$

$$p\{x \leq x_1\} + p\{x_1 < x \leq x_2\} = p\{X \leq x_2\}$$

La propiedad 6 indica que $F_x(x)$ debe evaluarse por la derecha; en la figura B.4 se muestra un ejemplo.

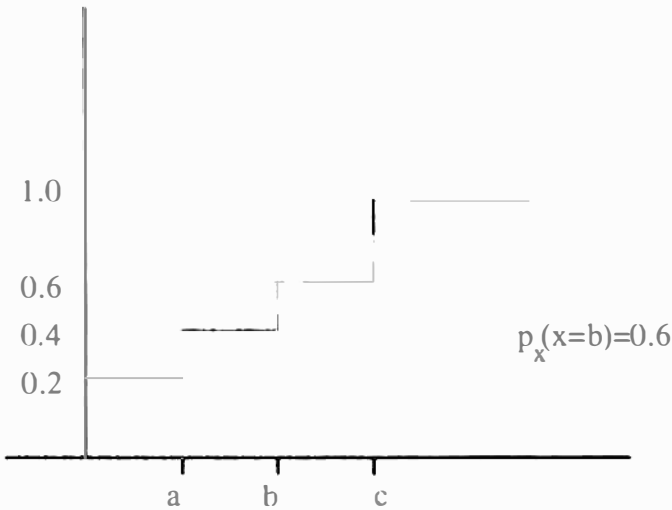


Figura B.4 Función acumulativa de probabilidad discreta.

Corolario:

Demostración $p(X > x) = 1 - F_x(x)$.

B.3 Funciones de densidad

Definimos $f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$ con las siguientes propiedades:

1. $f_x(x) \geq 0$
2. $\int f_x(x) dx = 1$

$$3. p(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

$$4. f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx$$

Ejemplo: Determinar si la función $g_X(x)$ que se muestra en la figura 4.5 puede ser una función de densidad.

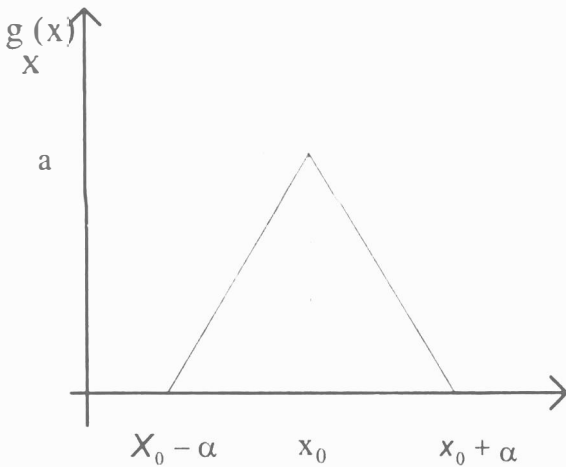


Figura B.5 *Ejemplo de una densidad de probabilidad de variable continua.*

Solución:

- i) La primera propiedad se cumple ya que $g_X(x)$ no es negativa.
- ii) Si el área = $\alpha a = 1$, entonces $g_X(x)$ es una función densidad de probabilidad cuando $a = \frac{1}{\alpha}$ y queda definida como:

$$g_x(x) = \begin{cases} 0, & x_0 - \alpha > x \geq x_0 + \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} (x - x_0 + \alpha), & x_0 - \alpha \leq x < x_0 \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (x - x_0), & x_0 \leq x < x_0 + \alpha \end{cases}$$

iii) También se puede obtener de la siguiente forma:

$$G_x(x) = \begin{cases} 0, & x_0 - \alpha > x \\ \int_{x_0 - \alpha}^x g_x(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\alpha^2} (x - x_0 + \alpha)^2, & x_0 - \alpha \leq x < x_0 \\ \frac{1}{2} + \int_{x_0}^x g_x(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} (x - x_0) - \frac{1}{2\alpha^2} (x - x_0)^2, & x_0 \leq x < x_0 + \alpha \\ 1, & x_0 + \alpha \leq x \end{cases}$$

y se puede observar como se muestra en la figura B.6.

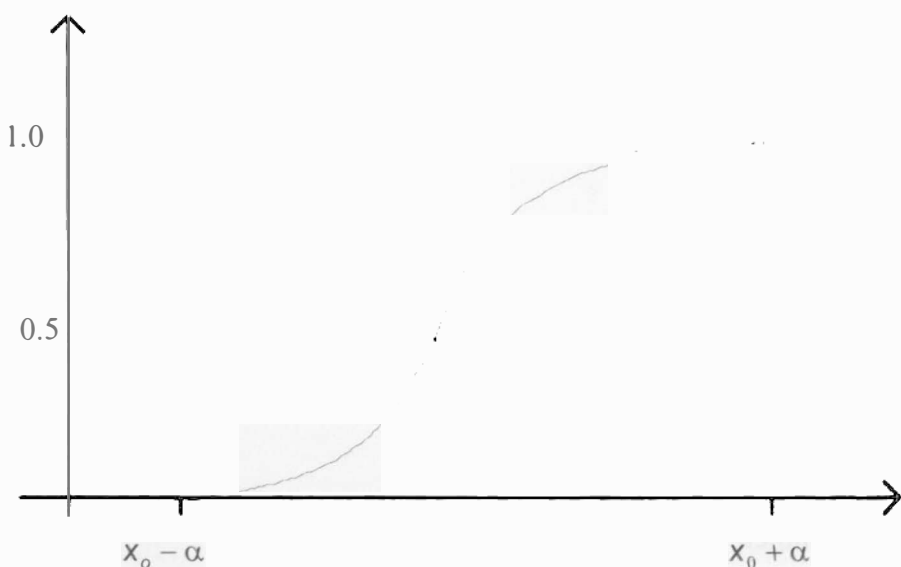


Figura B.6 *Función distribución de probabilidad.*

Ejemplo Suponga que una variable aleatoria tiene la función de densidad anterior con $x_0 = 8$, $\alpha = 5$ y $a = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{5}$. Encuentre $p(4.5 < x \leq 6.7)$.

Solución:

$$p\{4.5 < x \leq 6.7\} = \int_{4.5}^{6.7} g_x(x) dx$$

donde

$$g_x(x) = \begin{cases} 0 & 3 > x \geq 13 \\ \frac{1}{25}(x-3) & 3 \leq x < 8 \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{25}(x-8) & 8 \leq x < 13 \end{cases}$$

$$\text{Así } p\{4.5 < x \leq 6.7\} = \int_{4.5}^{6.7} \frac{1}{25}(x-3)dx = \frac{1}{25} \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{4.5}^{6.7}$$

Es decir, el evento $\{4.5 < x \leq 6.7\}$ tiene una probabilidad de 0.2288 o del 22.88%.

B.4 Funciones de distribución y densidad discretas

Si X es una variable discreta, entonces $F_x(x)$ y $f_x(x)$ se observan como sigue.

Ejemplo: se muestra gráficamente en la figura B.7.

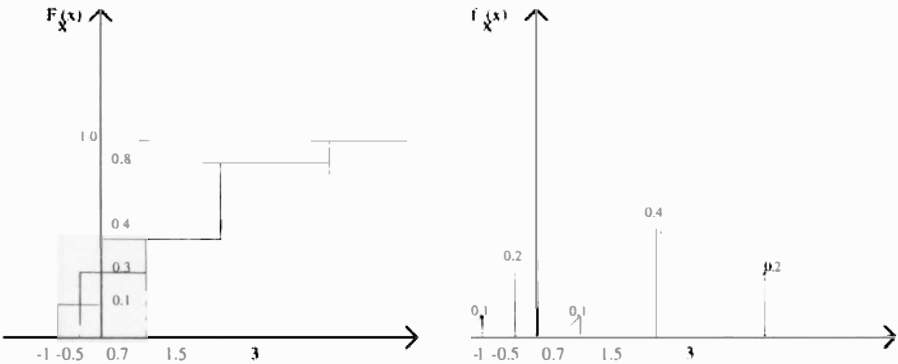


Figura B.7 *Relación de funciones de distribución y densidad de probabilidad discretas.*

Donde

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^N p\{X = x_i\} \mu(x - x_i)$$

y

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^N p\{X = x_i\} \delta(x - x_i)$$

Ejemplo En el circuito que se muestra en la figura B.8, R2 se selecciona aleatoriamente de una caja de resistencias que contienen los siguientes valores: 180Ω, 470Ω, 1K y 2.2K; todas las resistencias tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas.

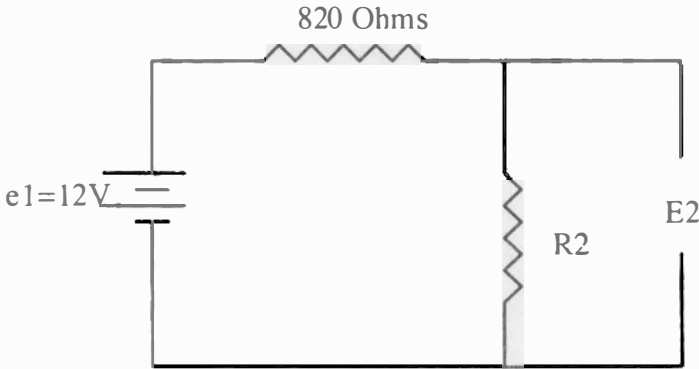


Figura B.8 Circuito eléctrico para obtener una variable aleatoria de voltaje (E_2).

Determine $f_x(x)$ y $F_x(x)$ de E_2 como variable aleatoria (en forma explícita).

Este ejemplo se le deja al lector para su reflexión. La solución la puede encontrar en Pebbles 1995.

B.5 Ejemplo de funciones de densidad

1. Densidad uniforme

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

Gráficamente se observan en la figura B.9.

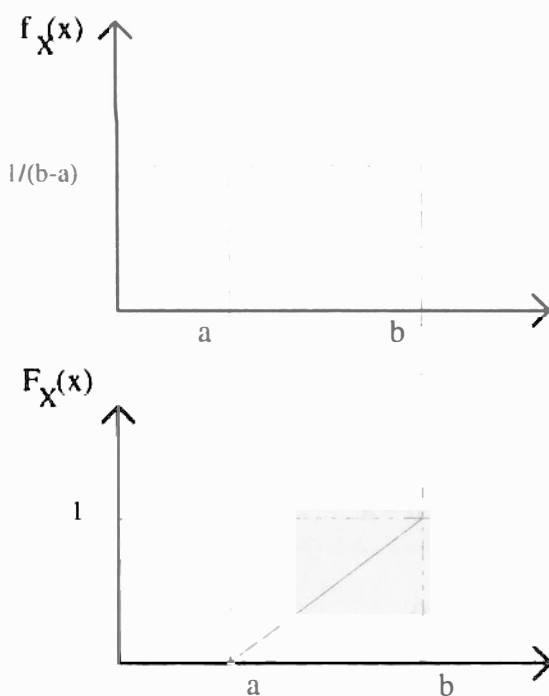


Figura B.9 Densidad y distribución uniforme.

B.6 Variable aleatoria de tipo gaussiano

Importancia de su estudio:

- Es un modelo importante porque muchos fenómenos de la naturaleza se manifiestan en forma aproximada a la de Gauss.
- La transformada de Fourier de una función gaussiana es también una función gaussiana.
- Se especifica totalmente por medio de dos parámetros:

X es variable aleatoria gaussiana si $G : (\mu, \sigma) = F(\mu, \sigma)$

y tiene la forma

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde σ = desviación estándar; $\sigma_x > 0$

μ = promedio; $-\infty < \mu < \infty$

Observaciones:

- El valor máximo $(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}$ ocurre cuando $x = \mu$.
- En $x = \mu + \tau$ y $x = \mu - \tau$ y la función se reduce 0.607 veces el valor máximo.
- La función distribución correspondiente es

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta-\mu}{\sigma}\right)^2} d\zeta$$

Donde esta integral no tiene solución directa y debe ser evaluada por métodos numéricos; sin embargo, no es conveniente ni posible desarrollar tablas para cada combinación de σ y μ .

Así, la solución viable es calcular la integral para una función normalizada, es decir, $\sigma = 1$ y $\mu = 0$, en la forma siguiente:

Sea $X : N(\mu, \sigma)$ cualquiera y se desea evaluar

$$p(x_1 < x \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

donde hacemos el siguiente cambio de variable:

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}, \text{ entonces: } dy = \frac{1}{\sigma} dx \therefore dx = \sigma dy$$

y los nuevos límites de la integral quedarían así:

$$y_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

de tal forma que

$$p(x_1 < x \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

donde esta última integral se puede descomponer en dos:

$$p(x_1 < X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y_1} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = F_y(y_2) - F_y(y_1)$$

En general, la integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ se llama función de error, y podemos decir que

$$F_X = F\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{ó} \quad p(x_1 < X \leq x_2) = \operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

Ejemplo Suponga que se elige una resistencia R a partir de un lote de resistencias con parámetros $\mu = 1000\Omega$ y $\sigma = 200\Omega$. ¿Cuál es la probabilidad de que R tenga un valor entre 900 y 1100 Ω ?

Solución: Suponiendo que $R : N[1000, (200)^2]$

$$\begin{aligned} \text{entonces } p(900 < R \leq 1100) &= \operatorname{erf}\left(\frac{1100 - 1000}{200}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{900 - 1000}{200}\right) \\ &= \operatorname{erf}(0.5) - \operatorname{erf}(-0.5) = 0.19 + 0.19 \end{aligned}$$

$$\text{donde } \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \quad \therefore \quad p(900 < R \leq 1100) = 0.38$$

Ejemplo Suponga que la altura de las nubes se distribuye en forma aleatoria de acuerdo con una variable gaussiana con $\mu = 1830$ m y $\sigma = 460$ m. Determine la probabilidad de que las nubes se encuentren a una altura mayor que 2750 metros.

Solución:

$$\begin{aligned} p(X > 2750) &= 1 - p(X \leq 2750) = \\ &= 1 - F_X(2750) = 1 - F_X\left(\frac{2750 - 1830}{460}\right) \\ &= 1 - F_X(2.0) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

Así, la probabilidad de que las nubes estén por encima de los 2750 m es de 2.28%.

B.7 Operaciones sobre una variable aleatoria

VALOR ESPERADO: El valor esperado o promedio de una variable aleatoria es

$$E[x] = \sum_{i=1}^N x_i p(x_i) \text{ para el caso discreto.}$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \text{ para el caso continuo.}$$

donde $f_x(x)$ es la función de densidad de X .

Observación: Para el caso discreto, si $f_x(x) = \sum_{i=1}^N p(x_i) \delta(x - x_i)$

entonces

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^N p(x_i) \delta(x - x_i) dx$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} x p(x_i) \delta(x - x_i) dx = \sum_{i=1}^N x_i p(x_i)$$

Observación: Estamos acostumbrados a calcular el valor promedio de un experimento mediante la fórmula $E[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ donde N es el mero total de resultados; sin embargo, debe considerarse que esta expresión proviene de la siguiente consideración.

Si X_i se repite M_i veces, entonces

$$E[x] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M M_i x_i = \sum_{i=1}^M \frac{M_i}{N} = \sum_{i=1}^M x_i [p(x_i)]$$

Ejemplo: Se observa de manera aleatoria a 90 personas para saber cuánto dinero en monedas traen en su bolsillo. Se consideran fracciones de \$1 peso, es decir, si una persona trae más de un peso se descarta y sólo se contabiliza la fracción monetaria de 0-95 centavos.

El resultado experimental es el siguiente:

# de personas	centavos
8	15
12	45
28	65
22	70
15	75
5	95

Con estos resultados tenemos que

$$E\left[\text{fracción monetaria}\right] = 0.15 \frac{8}{90} + 0.45 \frac{12}{90} + 0.65 \frac{28}{90} +$$

$$0.70 \frac{22}{90} + 0.15 \frac{75}{90} + 0.95 \frac{5}{90} \approx 0.60$$

Ejemplo El valor esperado de la función de la densidad normal.

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Sea $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$; entonces $dz = \frac{1}{\sigma} dx$ y además $x = 2\sigma + \mu$

Entonces
$$E[x] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + z\sigma) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$E[x] = \frac{\mu\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \mu(1) + 0 = \mu$$

B.8 Momentos de una variable aleatoria

Debido a que el valor esperado de una variable aleatoria no es suficiente para describir su comportamiento, es necesario definir otros promedios estadísticos, conocidos como momentos.

Momentos alrededor del origen:

$$m_n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y $x_n = g(x)$ es una función de V.A.

En particular,

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

$$m_1 = E[x] = \bar{x} \text{ valor promedio}$$

B.9 Momentos centrales alrededor de un valor promedio

$$m_r = E[(x - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f_x(x) dx : r=1, 2, \dots$$

El momento que más se utiliza es m_2 , llamado varianza σ^2 ; una forma importante de manejar ésta es como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(x - \mu)^2] = E[x^2 - 2x\mu + \mu^2] = \\ &= E[x^2] - 2E[x]\mu + \mu^2 \\ &= E[x^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[x^2] - \mu^2 \\ \sigma^2 &= \overline{x^2} - \mu^2 \end{aligned}$$

Observe que el operador $E[\]$ es lineal.

El tercer momento central es

$$E[(x - \mu)^3] = m_3$$

que es una medida de simetría de $f(x)$ alrededor de μ . Esta medida de simetría se conoce como “sesgo” de la función de densidad, por lo que si $f_x(x)$ es simétrica respecto a x , entonces $m_3 = 0$.

B.10 Operaciones con dos variables aleatorias

Definimos

$$m_{nk} = E[x^n y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{xy}(x, y) dx dy$$

como los **momentos conjuntos**.

Así, los momentos

$$m_{n0} = E[x^n] \quad \text{son los momentos de } X.$$

$$m_{0k} = E[y^k] \quad \text{son los momentos de } Y.$$

La suma de $n + k$ da el orden de los momentos; así m_{02} , m_{20} y m_{11} son los momentos de segundo orden de “ x ” y de “ y ”.

Particularmente, el momento $m_{11} = E[xy]$ se llama correlación de X y de Y , y suele denotarse como R_{xy} . Así,

$$R_{xy} = m_{11} = E[xy] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{xy}(x, y) dx dy$$

Cuando se cumple la condición siguiente:

$$E[xy] = E[x]E[y]$$

se dice que las variables X y Y no están correlacionadas. Es decir, la no correlación está garantizada con la condición de que X y Y sean estadísticamente independientes. Esto es,

$$f_{x,y}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$$

Debe observarse que la implicación inversa no se cumple. Es decir, si X, Y son variables no correlacionadas, entonces son variables independientes. Debe ser claro que en este sentido la implicación no es correcta.

B.11 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es un modelo matemático que sirve para identificar las características de señales, o para los propósitos de este libro, de mesurandos aleatorios.

La idea fundamental para la correcta utilización de este modelo es determinar las condiciones en las que una señal o mesurando puede corresponder a la definición formal de un proceso aleatorio.

La definición de un PA puede entenderse a partir de la figura B.10.

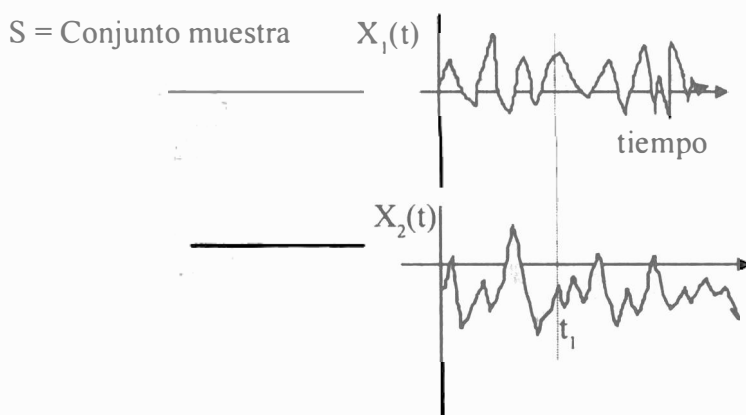


Figura B.10 *Generación de dos funciones de muestras.*

En la figura B.10 se observa el conjunto muestra S que contiene todas las posibles realizaciones de un experimento. Ahora $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan dos posibles realizaciones de un mismo experimento que son dependientes del tiempo. Matemáticamente, $X(t)$ es un PA de tal forma que

$$X(t) = X(s, t)$$

Así, cuando “s” es fija se genera una muestra del ensamble.

Ejemplo Si es s_1 , entonces se tiene la muestra $x_1(t)$. Contrariamente, cuando se fija el tiempo (t_1) se tiene una variable aleatoria $x(t_1)$. El análisis de los PA se realiza en su estadística horizontal o en su estadística vertical. Así, un PA de primer orden es aquel que cumple con la condición: $f_{x(t_1)}(x, t_1) = f_{x(t_2)}(x, t_2)$. Es decir, la estadística se mantiene a lo largo del tiempo. Esto significa que el valor esperado y la varianza de la señal no cambian en el tiempo. Este puede ser el caso de señales como las del EEG.

Análogamente, un PA de segundo orden cumple con la condición

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{x_1 x_2}(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

Esta condición da como resultado

$$R_{xx}(\tau) = \text{constante}$$

La interpretación que debe darse a esta última ecuación es que la función de autocorrelación no cambia a lo largo del tiempo ni depende del valor absoluto en la elección de t_1 y de t_2 , donde

$$t_2 - t_1 = \tau$$

Para mayor aclaración el lector puede consultar la sesión 5.3 (pag.176).

Este tipo de PA se denomina PA estacionario de segundo orden, y basta con la función de autocorrelación para comprobar esta característica.

Otra característica importante de los PA es la condición de ergodicidad. Se dice que un PA es ergódico cuando cumple con las condiciones siguientes:

(1) La estadística horizontal es igual a la estadística vertical; en lenguaje matemático, esto es $\bar{X}_1(t) = \bar{X}(t_1)$, igual que los otros momentos.

(2) De manera similar, en cuanto a las funciones de densidad de probabilidad esto significa

$$f_{x1(t)}(x) = f_{x(t_1)}(x)$$

Ejemplo. Procesamiento del Electroencefalograma (EEG).- Supóngase que se desea realizar el análisis de la actividad eléctrica del cerebro (EEG) para propósito de diagnóstico médico; para lo cual se cuenta con el registro de información proveniente de electrodos (transductores) colocados en forma de un ensamble 10-20 sobre el cuero cabelludo en tramos o épocas de 5 segundos. Esto último obedece a estándares bien establecidos sobre el procesamiento del EEG que permiten, además de una buena resolución de análisis en el dominio de la frecuencia, una forma práctica de estandarizar un estudio clínico.

Así de acuerdo con nuestra teoría sobre PAs, el análisis del EEG asume las siguientes hipótesis de trabajo:

- El EEG es un PA del tipo débilmente estacionario. Es decir, la función de autocorrelación es constante a lo largo de la época de 5 segundos, una vez que se define una “ τ ” constante de análisis que sea menor al tamaño de la época, digamos de un segundo.
- El EEG es un PA ergódico. Esto significa que cada época de 5 segundos representa toda la estadística que se puede desarrollar como si se estuviera registrando desde “ $-\infty$ ” hasta “ $+\infty$ ” en el tiempo. Esto mismo pudiera interpretarse que basta 5 segundos de información para saber que le pasa al cerebro de una persona desde que nace hasta el momento del registro.

- El EEG puede ser descrito en la estadística de amplitud mediante una función densidad de probabilidad $f(x)$, « del tipo Gaussiana con promedio cero ($\mu = 0$) y varianza constante a lo largo de la época de 5 segundos de aproximadamente de $81 \mu\text{volts}^2$, equivalente a decir $50 \mu\text{volts}$ pico-pico.
- Por último el modelo que frecuentemente se asume del EEG como señal es que se trata de un PA, descrito paramétricamente con los argumentos anteriores, en un ancho de banda de 0.1 -hasta 100 Hertz con una relación de señal-ruido típicamente registrada de 100. Es decir, una parte es ruido y 100 es señal. Donde la naturaleza del ruido es $1/f$ hasta 1 Hz y después se asume como un PA caracterizado por el modelo de ruido blanco.

En este ejemplo se observa el poder descriptivo del concepto de PA para caracterizar una de las señales típicas que se puede encontrar en la instrumentación biomédica. Debe ser claro que teniendo en mente la descripción y caracterización de una señal biomédica el proceso de diseño de un instrumento se facilita porque permite la caracterización del desempeño del mismo mediante los conceptos discutidos en el capítulo 5 de este texto. Se recomienda al lector consultar la bibliografía citada en el campo de Procesos Aleatorios con particular énfasis en los capítulos de la estimación de los espectros de potencia de PAs.

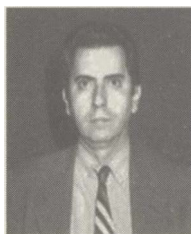
Fundamentos de la instrumentación biomédica

se terminó de imprimir en diciembre de 2001

en SyG editores, S.A. de C.V.

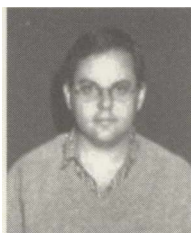
La edición consta de 1,000 ejemplares.

Formación: Gabriela Cárdenas Mendoza y Alejandro Romero Barrios.



Enrique Hernández Matos es licenciado en Ingeniería Mecánica y Eléctrica por la UNAM (1973). En 1976 obtuvo el Diplôme Ingénieur de la Facultad de Electrotecnia de la Universidad Fridericiana de Karlsruhe, Alemania.

Es fundador del Servicio de Ingeniería Biomédica del Centro Hospitalario 20 de Noviembre del ISSSTE (1977) (primer servicio de ingeniería biomédica en un hospital en México). Ingresó a la UAM-Iztapalapa en 1978 y ocupa el cargo de profesor titular. Sus campos de interés son la instrumentación médica electrónica, la ultrasonografía y la impedancimetría.



Emilio Sacristán Rock es ingeniero en Electrónica y doctor en Ingeniería Biomédica del Instituto Politécnico de Worcester en Estados Unidos. Es profesor titular del Área de Ingeniería Biomédica de la UAM-Iztapalapa desde 1995, y de

1996 al 2000 fue editor en jefe de la *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*. Sus investigaciones se han enfocado al desarrollo de instrumentación para anestesia y terapia intensiva. Varios de sus desarrollos se han realizado en colaboración con empresas como Datex, Siemens y Vitalmex. Además de múltiples publicaciones científicas, es autor de 4 patentes internacionales.

El libro *Fundamentos de la instrumentación biomédica* es una obra que proporciona una visión nueva y moderna de la instrumentación, apartándose del enfoque técnico clásico que hace más énfasis en los detalles prácticos que en los fundamentos de la teoría. Por tal razón, constituye un libro de texto muy recomendable para iniciar el estudio de las bases de la instrumentación biomédica y de los sistemas de medición a nivel de licenciatura, aunque también puede ser una referencia importante para profundizar en los temas más avanzados de un curso de posgrado. La metodología del desarrollo de instrumentos biomédicos —con lo que se inicia la obra— es un primer paso para que el estudiante tenga un contacto cercano con lo que significa el proceso general de producción de un sistema complejo de medición, en especial de aquellos que tienen aplicaciones biomédicas. Lo anterior se complementa con los modelos funcionales y estructurales que se aplican a los instrumentos vistos como sistemas lineales, de donde surgen en forma natural los más importantes conceptos de la teoría, como *mesurando*, *error*, *propagación del error*, *variable determinista* y *variable aleatoria*, a través de los cuales se plantea la caracterización del instrumento para toda clase de mesurandos y condiciones.

Los temas relevantes de la obra se refieren al análisis detallado del error y la forma en que se propaga en los sistemas, a la caracterización de los sistemas de medición en general y al tratamiento de los mesurandos de tipo aleatorio, lo que le da un carácter único y constituye un enfoque diferente y original. Esta circunstancia significa incluso que a pesar de estar orientado hacia las aplicaciones de la ingeniería biomédica, el texto puede utilizarse también en los cursos de instrumentación electrónica e industrial.



ISBN: 970-654-907-2

