

Introducción a la probabilidad

Blanca Rosa Pérez Salvador • Armando Castillo Animas
Sergio de los Cobos Silva





Blanca Rosa Pérez Salvador estudió la Licenciatura en actuaría en la Facultad de Ciencias de la UNAM, la maestría en Matemáticas en la UAM-Iztapalapa, la maestría en Estadística e Investigación de Operaciones en el IIMAS-UNAM

-con la que obtuvo la medalla Gabino Barreda- y el doctorado en Ciencias en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha escrito libros de texto y artículos de investigación y ha presentado sus trabajos en diversos foros nacionales e internacionales especializados en las áreas de probabilidad y estadística. Su participación en los concursos nacionales de guiones para elaborar programas educativos en computadora para los niveles de primaria y secundaria, patrocinados por el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE) y la Secretaría de Educación Pública, ha sido sobresaliente. Es fundadora de la UAM-Iztapalapa, en donde ha impartido diferentes cursos de matemáticas básicas, cálculo diferencial e integral, cálculo matricial, probabilidad y estadística, experiencia que se refleja en las páginas de este texto.

Introducción a la probabilidad



Casa abierta al tiempo UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Dr. José Luis Gázquez Mateos

Rector General

Lic. Edmundo Jacobo Molina

Secretario General

UNIDAD IZTAPALAPA

Dr. Luis Mier y Terán

Rector

Dr. Eduardo Carrillo Hoyo

Secretario

María José Arroyo Paniagua

Directora de la División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Dr. Ernesto Pérez Chavela

Jefe del Departamento de Matemáticas

Ma. del Rosario Hoyos Alea

Jefa de la Sección de Producción Editorial

Introducción a la probabilidad

Blanca Rosa Pérez Salvador
Armando Castillo Ánimas
Sergio Gerardo de los Cobos Silva



Primera edición: 2000

© UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

Av. Michoacán y La Purísima
Iztapalapa, 09340, México D.F.

ISBN: 970-654-642-1

Impreso en México/*Printed in Mexico*

A la memoria de

Eva Salvador Ibañez,

cuyo paso por esta vida dejó profunda huella y su
recuerdo ilumina a todos los que la conocimos.

Contenido

Prefacio	13
Capítulo 0. Introducción	15
Ejercicios	19
Capítulo 1. Conceptos básicos	23
1. Modelos deterministas y modelos aleatorios	23
Ejercicios	30
2. Espacio de probabilidades	31
3. Espacios muestrales equiprobables	45
Ejercicios	54
4. Métodos de conteo	57
Ejercicios	73
5. Conteo en la física estadística	75
Ejercicios	81
Capítulo 2. Probabilidad condicional e independencia	83
1. Probabilidad condicional	83
Ejercicios	89
2. Teorema de Bayes: inferencia de causas	90
Ejercicios	95
3. Eventos independientes	96
4. Ejercicios	104
Capítulo 3. Variables aleatorias	107
1. Definición	107
Ejercicios	112
2. Distribuciones de probabilidad	112
Ejercicios	120
3. Distribuciones de funciones de variables aleatorias	122
Ejercicios	131

4. Variables aleatorias multivariadas	132
Ejercicios	139
5. Dependencia y condicionalidad	140
Ejercicios	142
6. Distribuciones de funciones de vectores aleatorios	143
Ejercicios	148
Capítulo 4. Esperanza matemática	151
1. Definición	151
Ejercicios	158
2. Propiedades de la esperanza matemática	159
Ejercicios	166
3. La varianza	167
Ejercicios	170
4. Covarianza y correlación	171
Ejercicios	183
5. Esperanza condicional	184
Ejercicios	193
6. Función generatriz de momentos	193
Ejercicios	197
Capítulo 5. ALGUNAS FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN	199
1. Distribuciones discretas	199
2. Distribuciones continuas	215
Ejercicios	226
Capítulo 6. TEMAS ADICIONALES	231
1. Teorema central del límite	231
Ejercicios	240
2. Números aleatorios y simulación	241
Ejercicios	245
3. Mínimos cuadrados	246
Ejercicios	254
4. Caminatas aleatorias	255
Ejercicios	259
Bibliografía	261
Apéndice A. Tablas*	263

1. Tabla de distribución binomial	263
2. Probabilidad de la función de distribución normal estándar	283
3. Tabla de números aleatorios	284
Apéndice B. Solución a los ejercicios propuestos	287
Ejercicios del capítulo 0	287
Ejercicios del capítulo 1	288
Ejercicios del capítulo 2	301
Ejercicios del capítulo 3	307
Ejercicios del capítulo 4	316
Ejercicios del capítulo 5	325
Ejercicios del capítulo 6	332
Índice	337

Prefacio

Para la lectura de este texto se requiere tener conocimientos de geometría elemental, álgebra básica, elementos de teoría de conjuntos y cálculo diferencial e integral.

El material puede cubrirse durante un curso trimestral intensivo, o en un curso semestral.

Como se considera que la motivación es muy importante en el proceso de aprendizaje, los problemas se presentan primero en forma intuitiva, lo que induce al estudiante a descubrir por sí mismo la probabilidad; enseguida estos conceptos se formalizan axiomáticamente sin ser extremadamente rigurosos, razón por la cual se presentan varios problemas reales y se establece su modelo matemático. Asimismo, se proponen algunas simulaciones simples de los mismos problemas, simulaciones que permiten al estudiante darse cuenta de que los métodos probabilísticos sí funcionan.

En los primeros capítulos se pretende despertar la intuición y la curiosidad naturales en los estudiantes, y motivarlos a experimentar con la probabilidad al conocer sus diferentes aspectos. Se hace una introducción a las ideas de la teoría de probabilidad de manera sencilla y natural con base en múltiples ejemplos, formalizándose así los conceptos que dan cuerpo a una teoría formal y rigurosa. El texto consta de 7 capítulos, del 0 al 6 y de dos apéndices, el A y el B.

En el capítulo 0 se introducen las ideas frecuentistas de la probabilidad y, con base en problemas reales, se muestra su aplicabilidad. En este capítulo se propone la ejecución de varios experimentos que al realizarse “prueban” que las ideas de probabilidad realmente “funcionan”.

En el capítulo 1 se definen los conceptos básicos y se establecen los supuestos en los que descansa la teoría de la probabilidad, todo esto con base en ejemplos sencillos. En este capítulo se proporcionan algunos métodos de conteo, necesarios para obtener el cálculo de la probabilidad

para determinados eventos. Como una aplicación de los métodos de conteo, se presentan las estadísticas de Maxwell-Boltzman y de Fermi-Dirac.

En el capítulo 2 se presentan los conceptos de independencia estadística y de probabilidad condicional. Como aplicación se revisa la probabilidad de las causas conociendo los efectos, al estudiar el teorema de Bayes.

En el capítulo 3 se desarrolla el tema de variables aleatorias. Se presenta su definición y su clasificación en discretas y continuas. Además, se definen los conceptos de función de densidad y función de distribución.

En el capítulo 4 se estudia el tema de esperanza matemática. Como ejemplo se resuelve el problema de mayores y menores, un problema de tanques de guerra y otro de mantenimiento, reparación y reemplazo de equipo.

En el capítulo 5 se presentan algunas de las funciones de distribución más comunes. Para cada una de ellas se calculan la media, la varianza y la función generatriz de momentos.

En el capítulo 6, se desarrollan cuatro temas de suma importancia para vincular la teoría de la probabilidad con la teoría de la estadística: el teorema central del límite, base indiscutible de muchas de las aplicaciones estadísticas; la estimación de parámetros por el método de mínimos cuadrados; la tabla de números aleatorios, herramienta esencial en la teoría del muestreo; y las caminatas aleatorias, de gran aplicación al modelar algunos fenómenos físicos.

En el apéndice A se presentan tres tablas: la tabla de la distribución binomial, la de la distribución normal y la de números aleatorios.

En el apéndice B se presentan las soluciones a todos los ejercicios propuestos. En la mayoría de los casos, se dan las soluciones con todo detalle.

Finalmente, deseamos expresar que entregamos un libro del cual esperamos que los lectores compartan con nosotros la opinión de que es útil y fácil de leer.

Los autores

CAPÍTULO 0

Introducción

... y Dios no se pone a jugar
a los dados ...

Albert Einstein

La curiosidad por conocer la tendencia de los resultados al tirar un par de dados, o para determinar cuál es el resultado más factible en un juego de cartas, despertó el interés por estudiar los modelos frecuentistas; así, se puede decir que la génesis de la probabilidad, como ciencia establecida, se encuentra en los juegos de azar. Pero lejos de estos frívolos inicios, la probabilidad tiene la enorme cualidad de representar adecuadamente la realidad de muchos procesos sociales y naturales, y, por lo tanto, su conocimiento permite comprender y predecir mucho mejor el mundo en el que vivimos.

Un ejemplo claro de cómo la teoría de las probabilidades ordena y explica lo que se observa en la naturaleza, se tiene en las leyes de la herencia, postuladas por Gregorio Mendel.

Mendel¹, científico y monje austriaco (1822–1884), descubrió, mediante cuidadosos y pacientes experimentos, la regularidad frecuentista con que se presentan ciertas características en las diferentes generaciones de seres vivos. Sus experimentos con chícharos muestran que para modelar en forma adecuada la naturaleza, se requiere tener un mínimo conocimiento sobre el tema y cuantificar correctamente los hechos.

Para explicar lo dicho describiremos uno de los descubrimientos de Correns,² seguidor de Mendel.

¹Ruth Moore y los editores de *Life en Español*: 1967, Evolución, Colección de la Naturaleza de Life, México.

²G. Polya. 1966. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, Tecnos.

Correns utilizó dos plantas íntimamente relacionadas (especies diferentes del mismo género): una tiene flores blancas $\bigcirc$ y la otra, flores rojo oscuro $\bullet$. Las plantas están tan próximas que la una puede fertilizar a la otra. Las semillas que resultan de tal cruce dan plantas híbridas de carácter intermedio: las híbridas tienen flores rosas $\bigodot$.

Si se permite la fertilización entre estas plantas híbridas, las semillas resultantes de la tercera generación son de las tres clases: plantas con flores blancas, rosas y rojas. La figura (0.1) representa en forma esquemática la relación entre las tres generaciones.

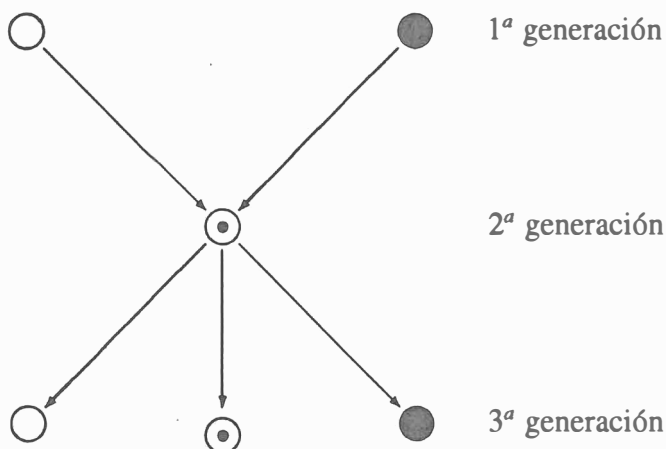


FIGURA 0.1 *Tres generaciones en un experimento mendeliano.*

El rasgo más significativo del experimento es la proporción numérica en que se producen las tres clases de plantas de la tercera generación. En el experimento descrito se observaron 564 plantas de la tercera generación; entre éstas, 141 tenían flores blancas, 132 flores rojas y 291 flores rosas.

Una simple inspección numérica muestra la razón entre las frecuencias observadas:

$$141 : 291 : 132 \quad \text{es prácticamente} \quad 1 : 2 : 1.$$

Esta sencilla proporción invita a una explicación sencilla.

El experimento empezó con el cruce de un par de plantas. Todas las plantas con flores surgen de la unión de dos células reproductivas (un óvulo

y un grano de polen). Los híbridos de flores rosas de la segunda generación surgen de dos células reproductivas de extracción diferente. Puesto que las plantas de flores rosas de la tercera generación son semejantes a las de la segunda generación, es natural asumir que han sido engendradas de manera semejante por dos células reproductivas de clase diferente (RB). Mientras que las plantas de flores blancas y las de flores rojas han sido reproducidas por células semejantes (RR) y (BB). El cuadro de la figura 0.2 ilustra mejor el porqué de la razón numérica (o **proporción constante**) entre las diferentes clases de plantas.

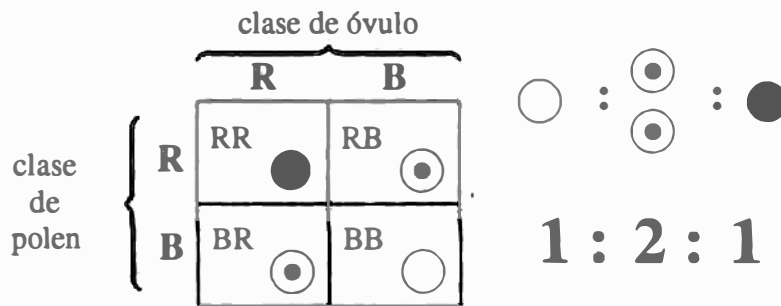


FIGURA 0.2 Posibles combinaciones entre óvulos y granos de polen.

La mitad de los granos de polen y la mitad de los óvulos producidos por las flores híbridas de la segunda generación son de la clase R; la otra mitad son de la clase B.

Al efectuarse la combinación:



las combinaciones RR, RB, BR y BB tienen la misma oportunidad de formarse. Este hecho explica la regularidad numérica en los experimentos mendelianos.

En el caso de los experimentos de Mendel, primero se observó la regularidad numérica y después pudo ser explicada por medio de un modelo probabilístico plenamente identificado y basado en los conocimientos actuales sobre la meiosis de las células reproductivas.

Pero no siempre se puede conocer el modelo probabilístico que rige al fenómeno observado; sin embargo, se puede confiar en que al realizar

una serie de experimentos aleatorios, el modelo probabilístico se verá reflejado, de cierta manera, en los resultados observados. Esto permite predecir y estimar los valores de algunas constantes desconocidas. Esta es una aplicación de la probabilidad que se desarrolla plenamente en la teoría de la estadística.

Un ejemplo de cómo utilizar la regularidad frecuentista en la solución de problemas se tiene en el método de muestreo conocido como “captura y recaptura”, el cual se utiliza para predecir el tamaño de una población animal. A continuación se analiza el ejemplo de predicción del número de carpas adultas que habitan en un lago; esto es muy útil para determinar si se levanta o no el estado de veda.

El método de captura y recaptura consta de los siguientes pasos:

1. Se considera que el número de peces en el lago es N , un parámetro desconocido.
2. En una primera etapa de captura, se extraen M carpas ($M \leq N$); éstas se señalan con una marca indeleble y se regresan al lago. Desde ese momento, en el lago existen dos tipos de carpas, las marcadas con la señal (M carpas) y las no marcadas ($N - M$ carpas).
3. En una segunda etapa de captura, se extraen n carpas y se encuentra que m de ellas están marcadas.
4. Considerando la existencia de una regularidad frecuentista, puede pensarse que la razón $n : m$ en la muestra es casi la misma que la razón $N : M$ en la población; esta relación se puede escribir como la proporción

$$\frac{N}{M} \cong \frac{n}{m},$$

lo cual implica que

$$N \sim \frac{nM}{m}.$$

Entonces, el número $\frac{nM}{m}$ es un valor que se puede utilizar para **estimar** el parámetro desconocido N , y es una variable afectada por el azar, el azar al elegir la segunda muestra. Para diferenciar el parámetro de su estimador, se acostumbra designar al estimador con la misma letra que el parámetro, pero coronada por un “gorrito” (acento circunflejo).

Ejemplo: $\hat{N} = \frac{nM}{m}$ es un estimador de N .

Descubrir las proporciones constantes, si bien no viene a confirmar que Dios sí juega a los dados, al menos da evidencia de que Dios utiliza los modelos probabilísticos para poner el orden en la naturaleza.

La estimación propuesta está respaldada únicamente por la suposición de que la proporción de peces marcados en el lago se verá reflejada en la muestra. El valor estimado $\hat{N}$ no necesariamente coincide con el valor del parámetro N . Existe cierta incertidumbre en el valor de $\hat{N}$, y la probabilidad es una herramienta para medir esta incertidumbre.

La regularidad numérica ejemplificada en los experimentos de Mendel y utilizada en el método de “captura y recaptura”, muestra que la teoría de las probabilidades sirve para describir el comportamiento de un gran número de fenómenos: desde casos tan simples y mundanos como **los juegos de azar**, hasta casos complejos y de gran utilidad científica y tecnológica como conocer **el estado de las partículas atómicas y sub-atómicas de la materia**. Es aquí donde radica la importancia de la teoría de la probabilidad y es lo que motiva su estudio. Conocer los fundamentos de la teoría de la probabilidad permite entender mejor los fenómenos aleatorios y así aprovechar mejor sus características.

Ejercicios

EJERCICIO 0.1 (Simulación del método de captura y recaptura). En una caja se colocan 10 frijoles negros que representan los peces marcados ($M = 10$), y varios frijoles bayos que representan los peces no marcados.

Realice 15 veces el siguiente proceso:

1. Saque al azar 12 frijoles de la caja ($n = 12$).
2. Cuente el número de frijoles negros en la muestra, llama m a ese número y devuelva los frijoles a la caja.
3. Calcule el estimador del total de frijoles en la caja, mediante la relación

$$N \approx \frac{nM}{m} = \frac{(12)(10)}{m}.$$

4. Registre el resultado.

Cuente los frijoles de la caja; ¿qué tan bien estimó el número con cada una de las 15 muestras?

Obtenga el promedio de las 15 estimaciones; ¿qué tanto se acerca el promedio al número real de frijoles en la caja?

EJERCICIO 0.2. En una caja se colocan 10 frijoles negros que representan los peces marcados ($M = 10$), y varios frijoles bayos que representan los peces no marcados. Use la misma caja del ejemplo anterior.

Realice 15 veces el siguiente proceso:

1. Saque al azar los frijoles de la caja, en forma sucesiva. El proceso se detiene cuando se obtiene el segundo frijol negro en la muestra ($k = 2$).
2. Cuente el número de frijoles que sacó, llame n a ese número y devuelva los frijoles a la caja.
3. Calcule el estimador del total de frijoles en la caja, mediante la relación:

$$N \cong \frac{(n - k)(M + 1)}{k} + M = \frac{(n - 2)(10 + 1)}{2} + 10.$$

4. Registre el resultado.

Cuente los frijoles de la caja; ¿qué tan bien estimó el número total de frijoles con cada una de las 15 muestras?

Obtenga el promedio de las 15 estimaciones; ¿qué tanto se acerca el promedio al número total de frijoles en la caja?

¿Cuál cree que sea el mejor método de estimación para N : el del ejercicio 0.1 o el del ejercicio 0.2?

EJERCICIO 0.3. Realice 20 veces el experimento de lanzar dos monedas al aire. Cuente el número de veces que salieron dos águilas, un águila y cero águilas.

¿La razón es aproximadamente 1:2:1?, ¿por qué?

EJERCICIO 0.4 (Adivina el número). Pida a un compañero que recorte varios papelitos y que los numere sucesivamente desde el 1 hasta un número que elija, sin que te diga cuál es. Luego dígame que doble los papelitos, que los ponga en una caja y que se los pase. Revuelva bien los papelitos, escoja 5, desdóblelos y anote los números escritos en ellos. ¿Cuál es el mínimo valor en su muestra de 5 papelitos?, ¿cuál es el máximo valor? Calcule un estimador del número total de papelitos que le pasaron con la relación: $\hat{N}_1 = \text{máx} + \text{mín} - 1$. Calcule otro estimador con la relación $\hat{N}_2 = \frac{6}{5} \text{máx}$. ¿Qué tanto se acercó al número real? ¿Por qué cree que funciona esto?

Este método de estimación se puede usar para predecir el número de tanques que tiene un ejército enemigo, si los tanques están numerados del 1 al N y la oportunidad de ver cada tanque es la misma (ver sección 4.4.1). ¿En qué otro problema lo aplicaría?

EJERCICIO 0.5 (Simulación del experimento de Mendel). Coloque en dos cajas el mismo número (el que usted desee) de frijoles bayos y de frijoles negros (p. ej.: caja 1, 30 frijoles bayos y 30 frijoles negros; caja 2, 50 frijoles bayos y 50 frijoles negros). Los frijoles de la primera caja representan los óvulos de una flor híbrida; los frijoles de la segunda caja representan los granos de polen. Los frijoles negros corresponden a la característica: flor roja; los frijoles bayos corresponden a la característica: flor blanca. Revuelva bien los frijoles y saque simultáneamente un frijol de cada caja. Repita el experimento 40 veces y anote el número de veces que se dio la combinación: bayo, bayo, negro, bayo o negro, negro. Observe que la razón es casi igual a 1 : 2 : 1.

EJERCICIO 0.6. Las características estudiadas por Mendel en las plantas de chícharo presentaban dos rasgos: uno dominante (D) y el otro recesivo (r). El rasgo dominante siempre se manifiesta en las plantas que lo tienen, y el rasgo recesivo se manifiesta en las plantas sólo en ausencia del rasgo dominante. Si una planta tiene una de las combinaciones DD, Dr, rD, el rasgo que presentará será el D. Si la planta tiene la combinación rr, presentará el rasgo r. Considere dos de las características estudiadas por Mendel en las plantas de chícharo: la textura de la semilla madura (lisa (D), arrugada (r)) y el color del interior de la fruta madura (amarilla (D) y verde (r)). Las posibles combinaciones de las semillas de chícharo en la tercera generación se presentan en la siguiente tabla, donde la textura lisa se representa con un círculo, la textura arrugada con un óvalo, el color amarillo en blanco y el color verde con un pequeño círculo negro.

		TEXTURA	
		Liso (L)	Arrugado (a)
COLOR	Amarillo (A)		
	Verde (v)		

(a) Complete la tabla siguiente, que muestra todas las posibles combinaciones de las dos características.

Las letras en la tabla tienen el siguiente significado: A = amarillo, v = verde, L = lisa, a = arrugada.

		clase de óvulo			
		L-A	L-v	a-A	a-v
clase de polen	L-A	LLAA 	LLAv 	La-AA 	La-Av 
	L-v	LLAv			
	a-A	LaAA			
	a-v				

(b) Una vez que la tabla esté completa, escriba la razón que existe entre los individuos con las siguientes características:

L-A : L-v : a-A : a-v.

(c) De 1 600 plantas de la tercera generación, ¿en cuántas se “esperaría” que sus semillas maduras fueran

-  amarilla-lisa? _____,
-  amarilla-arrugada? _____,
-  verde-lisa? _____,
-  verde-arrugada? _____.

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos

*No todo es predecible.
No todo es impredecible.*

1. Modelos deterministas y modelos aleatorios

Para entender mejor su materia de estudio y poder resolver los problemas que se les presentan, los investigadores de las ciencias naturales y de las ciencias sociales recurren a modelos. Modelos que pueden ser **deterministas** o **aleatorios** (no deterministas).

Se entenderán mejor las características de estos dos tipos de modelos durante el desarrollo de los dos siguientes ejemplos.

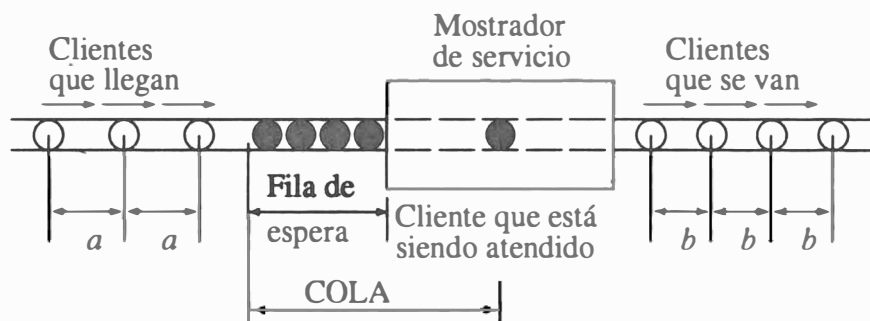
1.1 Atención en una fila de espera

1.1.1 *Una cola determinista.* Se estudia una cola de espera, la cola tiene una fila de clientes que pasan a través de un mostrador de servicio único. Las condiciones del servicio son:

1. **Modelo de llegadas.** Los clientes llegan a intervalos de tiempo regulares; cada intervalo es de “ a ” unidades de amplitud.
2. **Modelo de servicio.** Los clientes son servidos a intervalos de tiempo regulares, cada uno de “ b ” unidades de tiempo. Tan pronto como se termina de atender a un cliente, el siguiente se dirige al mostrador y comienza su servicio.
3. **Disciplina de la cola.** “El primero en llegar es el primero en ser servido”. Es decir, los clientes esperan en fila y al quedarse libre el mostrador, se sirve al cliente que más tiempo haya esperado.

El diagrama de la figura 1.1 describe la dinámica de este proceso. Se pueden dar tres casos posibles en el comportamiento de esta cola:

$$(1) b > a, \quad (2) b = a, \quad (3) b < a.$$

FIGURA 1.1 *Dinámica de una fila de espera determinista.*

El análisis de cada caso es:

1. $b > a$: Esto significa que antes de que un cliente termine de ser atendido, ya llegó un nuevo cliente. En este caso, es claro que la cola se forma y se va incrementando indefinidamente conforme pasa el tiempo.
2. $b = a$: Si no hay nadie en la cola en el inicio del procedimiento, el servicio del primer cliente se iniciará cuando éste llegue; el servicio terminará cuando llegue el siguiente cliente, y así ningún cliente tendrá que esperar. Si ya hay clientes en la cola cuando se inicia el servicio, cada cliente tiene que esperar el mismo tiempo en ser atendido.
3. $b < a$: Esto significa que el servicio termina antes de que llegue un nuevo cliente. En este caso, la cola irá disminuyendo hasta llegar a la situación en que el servicio espere las llegadas de los clientes.

Este modelo es determinista porque una vez que se conoce el número de clientes en la cola y los valores de las constantes a y b , se pueden **determinar con toda exactitud** las condiciones de la cola en cualquier momento. Este modelo es sólo una aproximación poco representativa de la dinámica del proceso, porque la llegada de los clientes y la duración del servicio no siempre ocurren en tiempos igualmente espaciados. Posiblemente el modelo representa bien la dinámica en una línea de producción automatizada (o robotizada), donde los tiempos de llegada y salida de los clientes pueden controlarse.

Por lo general, los tiempos de llegada y de atención a los clientes presentan variaciones azarosas, por lo que sería más realista considerar un modelo que contemplara esta variación no determinista.

1.1.2 *Una cola no determinista o aleatoria.* Un modelo simple, no determinista o **aleatorio** para el mismo proceso de espera en una fila de servicio, es el siguiente:

1. **Modelo de llegadas.** Los clientes llegan a intervalos de tiempo de longitud variable, pero en unidades de tiempo discretas " a_i " ($a_i \in \{1, 2, 3, \dots\}$).
2. **Modelo de servicio.** Los clientes son servidos, uno cada vez, a intervalos de tiempo variable, también en unidades de tiempo discretas " b_i ". Tan pronto como se termina de atender a un cliente, el siguiente se dirige al mostrador y comienza su servicio.
3. **Disciplina de la cola.** "El primero en llegar es el primero en ser servido"; es decir, los clientes esperan en fila y al quedar libre el mostrador, se sirve al cliente que más tiempo haya esperado.
4. Se ha observado que los clientes tardan en llegar a_i unidades de tiempo con una frecuencia dada por p_{a_i} ; y un cliente es atendido en b_i unidades de tiempo con una frecuencia igual a q_{b_i} .
5. El tiempo entre una llegada, o una salida, no depende de las otras llegadas o de las otras salidas.

El diagrama de la figura 1.2 describe la dinámica de este proceso.

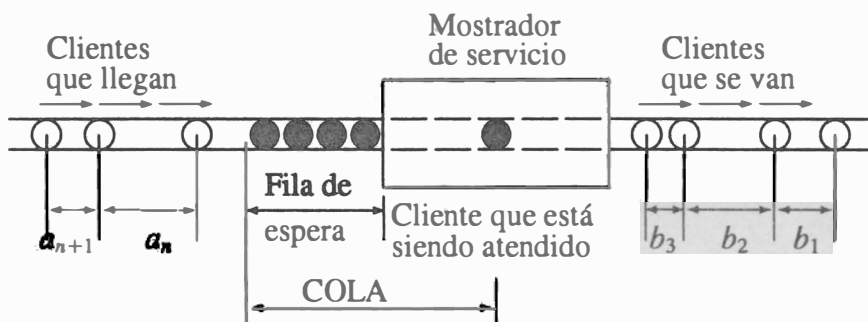


FIGURA 1.2 *Dinámica de una fila de espera aleatoria.*

En este modelo, no se sabe con exactitud en qué tiempo van a llegar los clientes; tampoco se sabe cuánto durará un servicio. Por lo tanto, no

se puede determinar con exactitud cuántos clientes estarán en la fila de espera en un tiempo determinado. Sin embargo, con base en la regularidad frecuentista es posible determinar su tendencia promedio en la dinámica de la cola.

Un fenómeno es determinista cuando es posible predecir su resultado. Por ejemplo: al lanzar una moneda al aire, se sabe sin lugar a dudas que ésta tiene que caer.

1.2 Producción de fruta en una huerta

1.2.1 Caso determinista. Se estudia la producción anual de una huerta en función del número de árboles sembrados en ella. Las condiciones de producción son:

1. **Condiciones iniciales.** En la huerta hay 100 árboles cuya producción unitaria es de “ a ” kg de fruta al año.
2. **Condiciones por cada nuevo árbol sembrado.** Por cada nuevo árbol que se siembre, la producción total del huerto tendrá un contribuyente más, pero la competencia por los nutrientes del suelo será mayor, por lo que la producción de cada árbol disminuirá en “ b ” kg.

En la tabla 1.1 se describe la dinámica de la producción de la huerta, en función de cada árbol adicionalmente sembrado.

TABLA 1.1 *Producción de la huerta en función de los árboles sembrados.*

Número de árboles en la huerta	Producción de cada árbol	Producción de la huerta
100	a	$100a$
101	$a - b$	$101(a - b)$
102	$a - 2b$	$102(a - 2b)$
103	$a - 3b$	$103(a - 3b)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$100 + x$	$a - xb$	$(100 + x)(a - xb)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si la variable x representa al número de árboles adicionalmente sembrados, entonces la función

$$f(x) = (100 + x)(a - bx)$$

describe la producción anual de la huerta en términos del número de árboles que se siembren. La producción óptima del huerto se alcanza cuando x es igual a x_0 , donde

$$x_0 = \frac{a - 100b}{2b}.$$

Observe que la gráfica de $f(x)$ es una parábola que se abre hacia abajo, y entonces tiene un valor máximo. El punto donde se alcanza el valor máximo se encuentra con cálculo diferencial: $f'(x) = (a - 100b) - 2bx$, y $f'(x) = 0$ cuando $x_0 = \frac{a - 100b}{2b}$.

Hay tres casos posibles para el valor de x_0 :

$$(1) x_0 > 0, \quad (2) x_0 = 0, \quad (3) x_0 < 0.$$

El análisis de cada caso es:

1. $x_0 > 0$: La producción del huerto puede aumentarse si se siembran hasta x_0 nuevos árboles; después de esto, la producción comienza a descender.
2. $x_0 = 0$: Ya se tiene el número adecuado de árboles para tener una producción máxima en la huerta.
3. $x_0 < 0$: La producción se puede aumentar eliminando x_0 árboles del huerto.

El modelo descrito es determinista porque una vez que se conocen los valores de a y de b , se puede decir con toda seguridad cuál es la situación de la producción del huerto. Es decir, se tienen los elementos para tomar acciones tendientes a aumentar la producción.

Un fenómeno es aleatorio si se conocen todos los posibles resultados, pero no se puede decir con seguridad cuál de ellos ocurrirá en un caso particular. Ejemplo: al tirar un dado se sabe que podemos observar cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6, pero no se sabe cuál de ellos es el que veremos.

1.2.2 Caso aleatorio. Un modelo aleatorio considera que la producción por árbol no es constante, sino que varía de un árbol a otro, y que la producción de un mismo árbol varía de un año a otro.

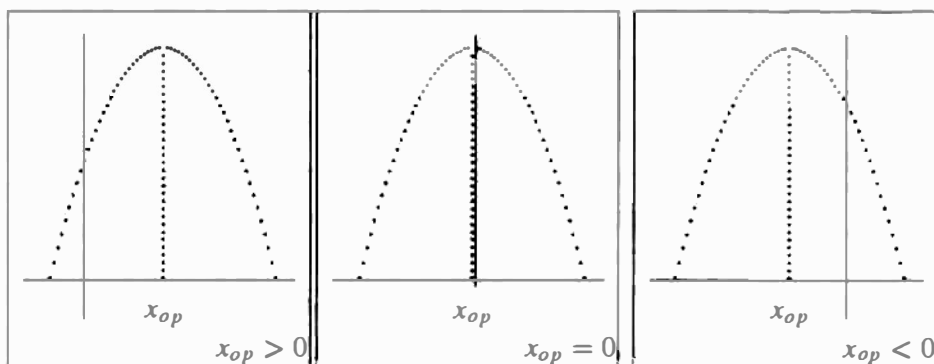


FIGURA 1.3 *Producción de la huerta en función de los árboles sembrados en ella.*

Enseguida se describe un modelo aleatorio para el mismo fenómeno:

1. **Condiciones iniciales.** Hay 100 árboles en la huerta.
2. **Condiciones de producción por árbol.** La producción de cada árbol varía de un árbol a otro y de un año a otro, alrededor de un valor promedio a . Los posibles valores de la producción de la fruta por árbol y sus frecuencias observadas se presentan en la tabla 1.2.

TABLA 1.2 *Producción de fruta por árbol.*

Possible producción por árbol, en kg.	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n
Frecuencia con que se da esta producción.	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1n}

3. **Condiciones de cambio en la producción.** Cada nuevo árbol que se siembra en la huerta afecta la producción de los otros árboles. Sin embargo, la variación no es constante; depende del azar, pero se encuentra alrededor de un valor promedio b . La cantidad en la que puede disminuir la producción de cada árbol se describe en la tabla 1.3.

La producción total del huerto, descrita con este modelo, no es una cantidad constante, sino una cantidad aleatoria que se encuentra en un

TABLA 1.3 *Cambio en la producción de fruta por árbol sembrado.*

Disminución en la producción por cada nuevo árbol sembrado, en kg.	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_m
Frecuencia con que se presenta esta disminución.	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2m}

rango bien determinado alrededor de la función cuadrática

$$f(x) = (100 + x)(a - bx).$$

Esto es, se conocen los posibles valores de la producción, pero no se sabe con certeza cuál va a ser la producción en un año determinado.

La gráfica siguiente describe la posible región para la producción de la huerta, de acuerdo con el modelo aleatorio descrito.

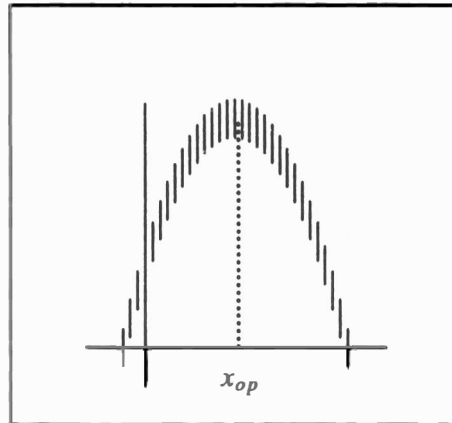


FIGURA 1.4 *La región sombreada corresponde a los posibles valores de la producción de la huerta, en términos de los árboles sembrados.*

La probabilidad se puede entender, en este momento, como una frecuencia relativa.

Ejercicios

EJERCICIO 1.1 (Modelo de separación de materiales). En una cámara hay dos solventes (s_1 y s_2 , respectivamente) separados por una membrana semipermeable, que no permite la mezcla de los dos solventes. En los solventes se diluye un litro de soluto, el cual puede traspasar la membrana en cualquier dirección, quedando diluido siempre en una misma proporción en ambos solventes: en el solvente 1, un 60 por ciento del soluto, y en el solvente 2, un 40 por ciento del mismo. Una vez que el proceso de separación ha terminado, se vacía el contenedor que tiene el solvente 1 y se llena de nuevo con solvente 1, limpio. El soluto que está en el solvente 2 se vuelve a separar siempre en la misma proporción. Escriba un modelo determinista y uno aleatorio para describir cuatro etapas de este proceso de separación.

EJERCICIO 1.2 (Elección de un número aleatorio). Tome un lápiz y realice el siguiente experimento.

1. Dibuje 20 rayas una después de otra.
2. Escriba 20 dígitos (números enteros entre 0 y 9) aleatoriamente sobre las rayas.
3. En la lista que escribió revise cuántas veces aparece el 0, cuántas aparece el 1, etc.

Si la lista es aleatoria, se esperaría tener dos observaciones de cada dígito. ¿Por qué? ¿Los resultados respaldan esta suposición?

4. Revise si en su lista de datos aparece alguna sucesión de dos o más dígitos varias veces, por ejemplo: en la lista

3, 5, 9, 8, 7, 4, 3, 3, 5, 9, 1, 7, 4, 3, 8, 3...

aparecen las series 3, 5, 9 y 7, 4, 3 dos veces:

$\underbrace{3, 5, 9, 8, 7, 4, 3}, \underbrace{3, 5, 9, 1, 7, 4, 3}, 8, 3 \dots$

La existencia de repetición de una misma sucesión de números indica que los números no se generaron por un proceso aleatorio.

Esto muestra que nosotros no somos buenos para generar números al azar. Para tener una serie de 20 dígitos al azar es conveniente usar papelitos numerados del cero al nueve, para hacer la elección.

EJERCICIO 1.3. En cada uno de los siguientes casos, indique si el resultado es determinista o aleatorio.

- (a) El tiempo de espera en la parada del autobús.
- (b) El resultado observado al abrir el grifo de agua.
- (c) El resultado observado al lanzar un dado.
- (d) El tiempo de espera para que entre una llamada telefónica.

EJERCICIO 1.4. Dé tres ejemplos cuyos resultados sean deterministas y tres con resultados aleatorios.

EJERCICIO 1.5. Describa un modelo determinista y un modelo aleatorio de las llegadas del metro, por espacio de una hora en una estación determinada.

2. Espacio de probabilidades

La característica común de los fenómenos que estudia la probabilidad es que en ellos se puede observar la ocurrencia de “algo”: al lanzar una moneda se observa si cayó “águila” o cayó “sol”; al sembrar una semilla se observa si ésta germina o no germina; al obtener una muestra de 20 peces, se observa cuántos están marcados, etc.

En este contexto, experimentar equivale a observar.

En general, los fenómenos estudiados por la probabilidad tienen las siguientes características:

1. Se conocen todos los posibles resultados antes de realizarse el experimento.
2. No se sabe cuál de los posibles resultados se obtendrá en un experimento en particular.
3. El experimento puede repetirse.

Al modelar un fenómeno, primero se describe el experimento, luego se identifican todos sus posibles resultados y finalmente se encuentra la probabilidad asociada a cada resultado.

La probabilidad es una medida de la posibilidad de ocurrencia que tiene cada uno de los resultados de un experimento.

Para ejemplificar los conceptos de la teoría de probabilidades, se analizará el caso de una rifa.

Suponga que la rifa tiene un único premio y 100 boletos disponibles. El número premiado se selecciona mediante un proceso al azar que garantiza igualdad de oportunidades para todos los números participantes.

El experimento consiste en elegir al azar un número entre 1 y 100.

En este ejemplo se van a diferenciar dos aspectos fundamentales de un fenómeno aleatorio: el aspecto **cualitativo** y el aspecto **cuantitativo**. De su correcta diferenciación y utilización depende en gran medida el éxito que obtengamos.

Aspecto cualitativo de la rifa

- El número premiado puede estar entre el 1 y el 100.
- Se puede participar con uno o más boletos; por ejemplo, el conjunto $\{18, 27, 56\}$ significa que se participa con tres boletos cuyos números son los indicados.
- Se gana de manera segura cuando se compran todos los boletos.

Aspecto cuantitativo de la rifa

- Como el boleto premiado se elige mediante un proceso al azar (aleatorio) que da la misma oportunidad a todos los números del 1 al 100, la probabilidad de ganar con el boleto número 1 es igual a la probabilidad de ganar con cualquiera de los otros boletos.
- Una persona con dos boletos tendrá doble oportunidad de ganar que con sólo uno; y en general, con más boletos se tendrá, proporcionalmente, mayor oportunidad de ganar.
- Una medida de la posibilidad de ganar en la rifa es igual a la proporción de boletos que se tiene; esta medida se llama probabilidad. Así, la probabilidad de ganar con un boleto es igual a $1/100 = 0.01$, la probabilidad de ganar con dos boletos es $2/100 = 0.02$, etc.

Con base en este ejemplo, se pueden establecer los fundamentos de la teoría de probabilidades.

DEFINICIÓN 1.1. Se llama **espacio muestral** de un experimento al conjunto de todos los posibles resultados, y se denota con la letra griega Ω .

En el ejemplo de la rifa, el espacio muestral es el conjunto

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}.$$

Se debe puntualizar que en el desarrollo de la teoría de probabilidades se usan las nociones y la notación de la teoría de conjuntos. En este sentido, el espacio muestral equivale al conjunto universal.

DEFINICIÓN 1.2. Un evento es un subconjunto del espacio muestral.

La proposición inversa es falsa, ya que no todo subconjunto del espacio muestral es un evento.

Los eventos se denotan, generalmente, con las letras mayúsculas del alfabeto, y para establecer las relaciones entre ellos se utiliza la misma notación que en la teoría de conjuntos.

Los siguientes son tres eventos relacionados con la rifa:

$$E_1 = \{4\}, \quad A = \{8, 13, 44\} \text{ y} \\ C = \{x \mid x \text{ es un número par } \leq 100\}.$$

Los eventos pueden combinarse para dar lugar a nuevos eventos. Por ejemplo: si A y B son dos eventos, entonces:

- $A \cap B$ es la ocurrencia simultánea de los dos eventos.
- $A \cup B$ es la ocurrencia de al menos uno de los dos eventos.
- $A - B$ ocurre A , pero no ocurre B .
- A^c no ocurre el evento A .

En este contexto, se dice que un evento ocurre cuando alguno de los elementos que lo conforman ocurre; por ejemplo, en la rifa el evento $A = \{8, 13, 44\}$ ocurre cuando el número premiado es cualquiera de estos tres números: 8, 13 o 44.

EJEMPLO 1.1. De una urna que contiene 10 bolas rojas y 5 bolas negras se extraen sin reemplazo dos bolas al azar. A es el evento: la primera bola es negra, y B es el evento: la segunda bola es roja. Observe cómo se describen los siguientes eventos.

- $A \cap B$ La primera bola es negra y la segunda bola es roja.

$$A \cap B = \{(n, r)\}$$

- $A \cup B$ La primera bola es negra y/o la segunda bola es roja.

$$A \cup B = \{(n, n), (n, r), (r, r)\}$$

- $B - A$ La segunda bola es roja y la primera bola no es negra.

$$B - A = \{(r, r)\}$$

- A^c La primera bola no es negra.

$$A^c = \{(r, n), (r, r)\}$$

DEFINICIÓN 1.3. Un evento elemental es aquel que no puede subdividirse en eventos más simples.

En el caso de la rifa, los eventos elementales están formados por un solo número y son:

$$E_1 = \{1\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{3\}, E_4 = \{4\}, \dots, E_{100} = \{100\}.$$

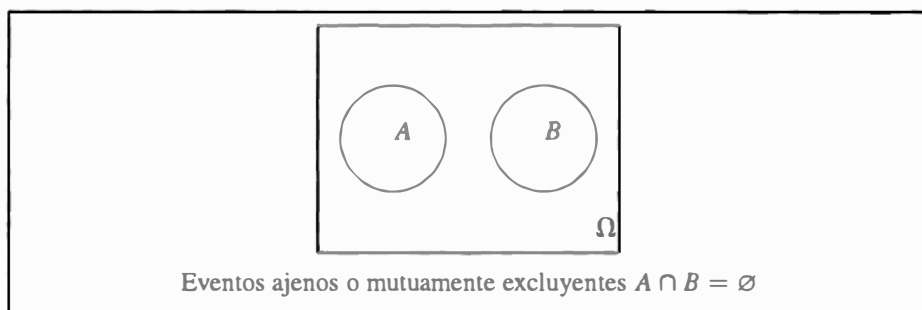
DEFINICIÓN 1.4. Se llama evento seguro al evento que siempre ocurre. El evento seguro es igual a Ω .

Cuando se compran todos los boletos de la rifa, se participa con el evento seguro.

El complemento del evento seguro es el evento imposible, cuya definición es:

DEFINICIÓN 1.5. Se llama evento imposible al evento que no puede ocurrir, y se denota con el símbolo del conjunto vacío: $\emptyset$.

En el caso de la rifa, no se puede ganar si no se tiene ningún boleto, así que el evento imposible es ganar sin tener boleto.



DEFINICIÓN 1.6. Dos eventos son mutuamente excluyentes (o ajenos) si la ocurrencia de uno de ellos imposibilita la ocurrencia del otro. Esto es: dos eventos A y B son mutuamente excluyentes; si es imposible que los dos ocurran en forma simultánea, esto implica que $A \cap B = \emptyset$.

En este sentido, los números de la rifa forman eventos mutuamente excluyentes, porque al salir premiado un número excluye la posibilidad de que otro número sea premiado.

EJEMPLO 1.2. Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican como defectuosos (d) y buenos (b). En un día cualquiera se prueban los artículos como van saliendo de la línea de producción; el proceso se detiene al encontrar el primer artículo defectuoso o al inspeccionar 5 artículos, lo que ocurra primero.

Los posibles resultados de este experimento se denotan usando un sistema de coordenadas, y cada coordenada indica la condición del artículo inspeccionado en el orden predeterminado; por ejemplo, el vector (b, b, d) significa que el primer artículo observado fue bueno, el segundo bueno y el tercero defectuoso. Entonces, el espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{(d), (b, d), (b, b, d), (b, b, b, d), (b, b, b, b, d), (b, b, b, b, b)\}.$$

Observe cómo se describen los siguientes eventos:

- A : se detiene en el tercer intento: $A = \{(b, b, d)\}$.
- B : no se detiene antes del tercer intento:
 $B = \{(b, b, d), (b, b, b, d), (b, b, b, b, d), (b, b, b, b, b)\}$.
- C : el tercer artículo es bueno:
 $C = \{(b, b, b, d), (b, b, b, b, d), (b, b, b, b, b)\}$.

EJEMPLO 1.3. En determinado momento (a las X horas) dentro de un periodo de 24 horas, un interruptor se pone en posición de “encendido”; posteriormente, en otro momento (a las Y horas, en el mismo periodo de 24 horas), el interruptor se pone en posición de “apagado”.

- **El espacio muestral de este experimento** es el par ordenado (X, Y) tal que

$$0 \leq X < Y \leq 24,$$

y se puede representar mediante la gráfica dada por la figura 1.5:

$$\text{O sea que } \Omega = \{(X, Y) \mid 0 \leq X < Y \leq 24\}.$$

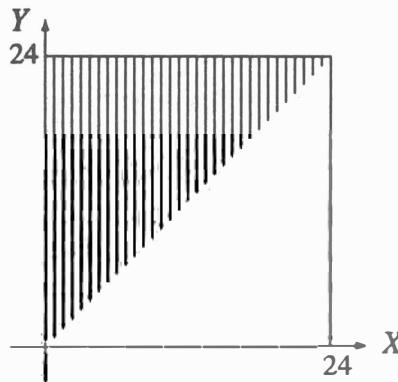


FIGURA 1.5 *Espacio muestral del ejemplo 1.14.*

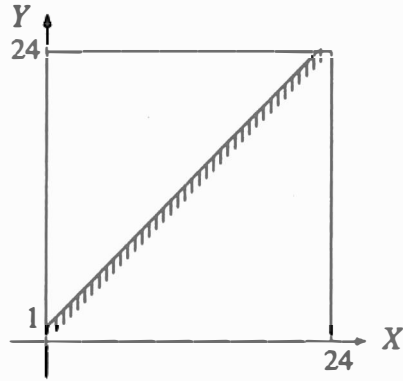


FIGURA 1.6

Los siguientes son algunos eventos de este espacio muestral. Observa cómo se describen y cómo es su gráfica.

- A : El circuito dura funcionando a lo sumo una hora.

El tiempo que dura funcionando el circuito es igual a la diferencia entre X y Y ; entonces el evento A se puede escribir como:

$$A = \{(X, Y) \in \Omega \mid Y - X \leq 1\}.$$

La frontera de A está determinada por la recta $Y = X + 1$, y su gráfica está dada por la figura 1.6

- El evento:

B : El circuito empieza a funcionar antes del tiempo t_1 y deja de funcionar después del tiempo t_2 . ($0 < t_1 < t_2 < 24$).

Se denota con:

$$B = \{(X, Y) \in \Omega \mid X \leq t_1 \text{ y } Y \geq t_2\},$$

y tiene la gráfica de la figura 1.7.

- El evento:

C : El tiempo que el circuito dura funcionando es el doble o más del tiempo que dura apagado.

El circuito está apagado de 0 a X , y de Y a 24 horas; así, el tiempo total que el circuito se encuentra apagado es igual a $X + (24 - Y)$ horas. El circuito está funcionando de X a Y horas; así, el tiempo que el circuito se encuentra funcionando es igual a $Y - X$ horas, y entonces

$$C = \{(X, Y) \mid Y - X \geq 2(X + 24 - Y)\} = \{(X, Y) \mid Y \geq X + 16\},$$

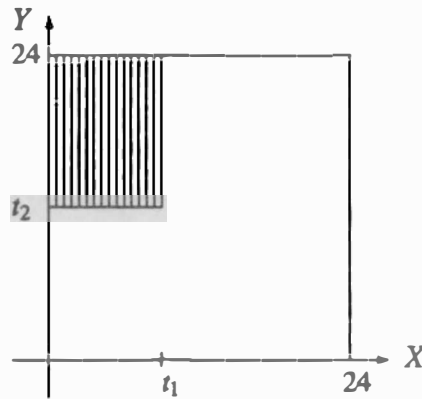


FIGURA 1.7

y su gráfica está dada en la figura 1.8

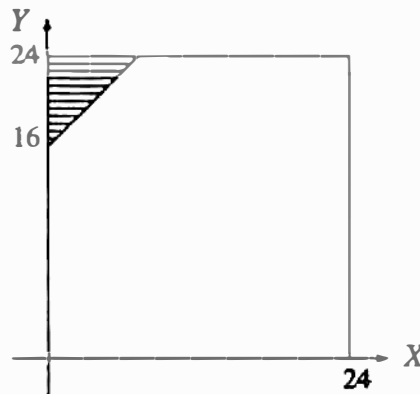


FIGURA 1.8

En general, no todo subconjunto del espacio muestral es un evento. La condición para que un subconjunto sea un evento, es que el conjunto de todos los eventos forman una σ -álgebra. La definición de σ -álgebra se da en seguida:

DEFINICIÓN 1.7. Una σ -álgebra de conjuntos es una familia de subconjuntos de Ω que es denotado por $\mathcal{A}$ y que cumple los tres axiomas siguientes:

Un axioma es una propiedad básica que no necesita demostración.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. Si $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Una vez establecidos los axiomas, todos los resultados son consecuencia de ellos.

El primer axioma supone la existencia del evento seguro (se pueden comprar todos los boletos). El segundo axioma supone que si algo puede ocurrir, también puede no ocurrir (puedo ganar, pero también puedo perder). El tercer axioma supone la aditividad a lo más numerable de los eventos (puedo comprar uno, dos o más boletos, con lo que se tiene un nuevo evento). Cabe aclarar que la mayor parte de los resultados presentados en este libro considera sólo la aditividad finita de los eventos.

Ahora se van a deducir algunos resultados importantes de la σ -álgebra.

Un teorema es un resultado que se deduce de los axiomas o de otros teoremas.

TEOREMA 1.1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Demostración

Se sabe que $\Omega \in \mathcal{A}$ (por el 1^{er} axioma).

Si $\Omega \in \mathcal{A} \implies \Omega^c \in \mathcal{A}$ (por el 2^{do} axioma).

Y como $\Omega^c = \emptyset$, se prueba que $\emptyset \in \mathcal{A}$.

TEOREMA 1.2. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Demostración

Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{A}$ (por el 2^{do} axioma).

Y si $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$ (por el 3^{er} axioma).

Entonces, si $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A} \implies (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c \in \mathcal{A}$ (por el 2^{do} axioma).

Y finalmente, por las leyes de Morgan, se tiene que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i^c)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

que es lo que afirma el teorema.

EJEMPLO 1.4. Pruebe que la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{ \emptyset, \Omega \}$$

es una σ -álgebra.

Solución

Para probar que $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra, se debe ver que sus elementos cumplen los tres axiomas que definen una σ -álgebra.

- El primer axioma se cumple, ya que $\Omega \in \mathcal{A}$.
- El segundo axioma se cumple, ya que el complemento de todos los conjuntos de $\mathcal{A}$ ($\Omega^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = \Omega$) son a su vez elementos de $\mathcal{A}$.
- El tercer axioma se cumple, ya que la unión entre cualquiera de los elementos de $\mathcal{A}$ es otro elemento de $\mathcal{A}$.

Ésta es la σ -álgebra más pequeña que existe.

Una vez que se han identificado los aspectos cualitativos del experimento, se establecerá una medida de la incertidumbre de ocurrencia de los eventos.

Esta medida se denomina **probabilidad**.

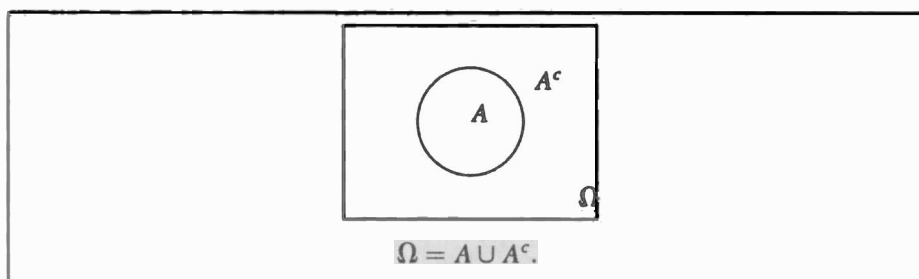
DEFINICIÓN 1.8. Dado un espacio muestral Ω y su σ -álgebra, $\mathcal{A}$, se llama probabilidad a la función P ,

$$P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R},$$

que cumple los tres axiomas siguientes:

1. $P(A) \geq 0$ para todo evento $A \in \mathcal{A}$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ si los eventos A_i ($i = 1, 2, \dots$) son mutuamente excluyentes por pares ($A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$).

A partir de los tres axiomas, se pueden demostrar los siguientes resultados.



TEOREMA 1.3. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para toda $A \in \mathcal{A}$.

Demostración

Se sabe que para todo evento $A \in \mathcal{A}$,

$$\Omega = A \cup A^c.$$

Por un lado,

$$P(\Omega) = 1,$$

2^{do} axioma

y por otro,

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c), \text{ ya que } A \cap A^c = \emptyset.$$

3^{er} axioma

Conjuntando estos dos resultados, se tiene que

$$P(A) + P(A^c) = 1,$$

de donde se despeja $P(A^c)$:

$$P(A^c) = 1 - P(A),$$

con lo que se prueba el teorema.

TEOREMA 1.4. $P(\emptyset) = 0$.

Demostración

Se sabe que

$$\emptyset = \Omega^c;$$

entonces,

$$P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega),$$

por el teorema anterior

por lo que

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

2^{do} axioma

Con esto se demuestra el teorema.

TEOREMA 1.5 (Probabilidad total 1). *Para dos eventos A y $B \in \mathcal{A}$, se cumple que*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

Demostración

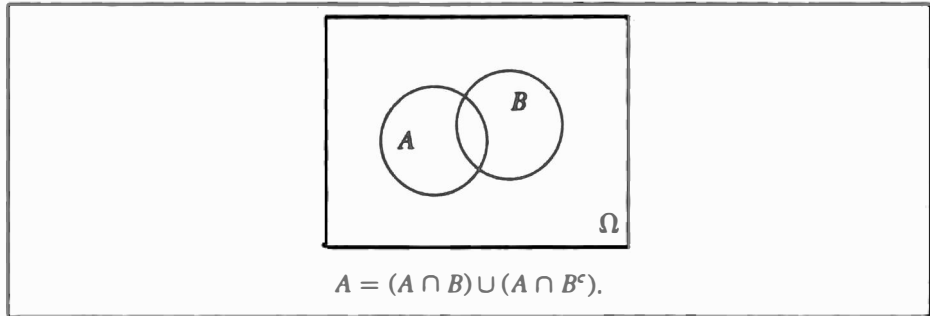
Se sabe que

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c),$$

donde $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, por lo tanto:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

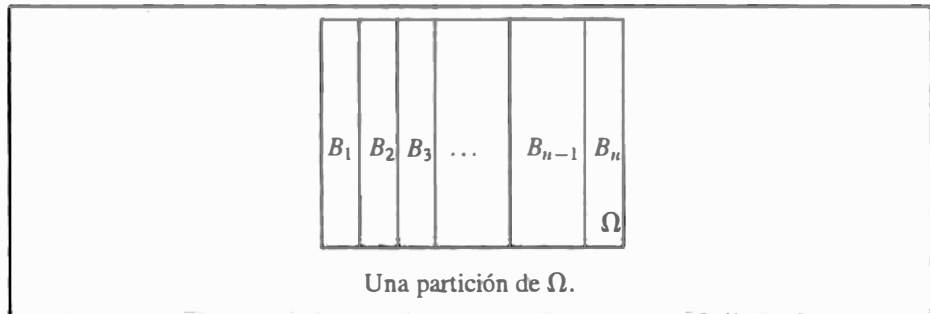
por el 3^{er} axioma



Este teorema se puede generalizar de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1.9. Dado el espacio muestral Ω , se dice que el conjunto de eventos $\{B_i\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$ constituye una partición de Ω si:

- $B_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.
- $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i, j = 1, 2, 3, \dots, n; i \neq j$.
- $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.



TEOREMA 1.6 (Probabilidad total 2). Si $\{B_i\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$ constituye una partición de Ω ; entonces, para cualquier evento A , se tiene que

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i).$$

Demostración

El evento A se puede escribir como la unión de los eventos mutuamente excluyentes,

$$A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i);$$

entonces, por el tercer axioma de probabilidad, se tiene el resultado del teorema.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i).$$

TEOREMA 1.7. *Para cualesquier dos eventos A y $B \in \mathcal{A}$, se cumple la relación*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

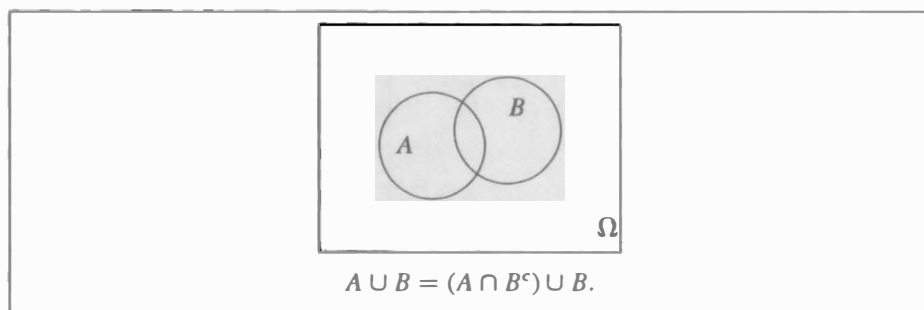
Este teorema es una generalización del tercer axioma de probabilidad, cuando A y B no son eventos mutuamente excluyentes, por lo que $A \cap B \neq \emptyset$.

Demostración

Se sabe que

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B \quad \text{y} \quad (A \cap B^c) \cap B = \emptyset,$$

entonces, por el 3^{er} axioma,



$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B). \quad (1.1)$$

Ahora, por el teorema de la probabilidad total se sabe que

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B),$$

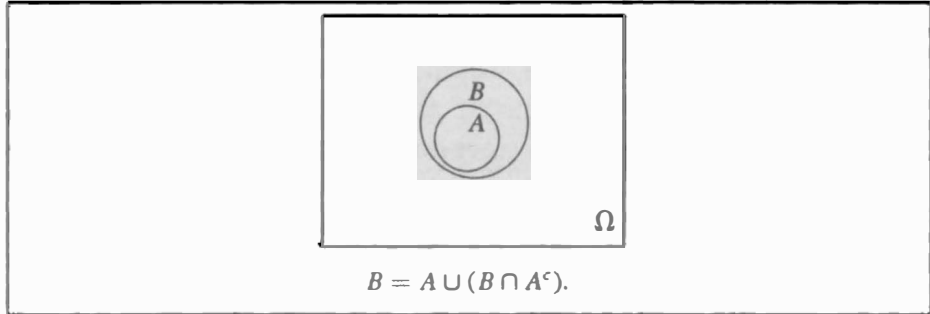
por lo que al sustituir esta expresión en la última ecuación, se tiene finalmente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

que es lo que afirma el teorema.

Este resultado puede explicarse diciendo que al sumar la probabilidad de A más la probabilidad de B , se ha sumado dos veces la probabilidad de los elementos comunes; por ello, se debe restar la probabilidad de $A \cap B$.

TEOREMA 1.8. Para cualesquier dos eventos A y $B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$, se tiene que $P(A) \leq P(B)$.



Demostración

Como A es un subconjunto de B , se tiene que $B = A \cup (B \cap A^c)$ y $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$; entonces, al aplicar el axioma (3) de la probabilidad se tiene que

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c), \quad (1.2)$$

y como $B \cap A^c$ es un evento, por el axioma (1) se sigue que

$$P(B \cap A^c) \geq 0. \quad (1.3)$$

Al sumar $P(A)$ en ambos lados de la desigualdad (1.3), se llega a

$$P(A) + P(B \cap A^c) \geq P(A) \implies P(B) \geq P(A),$$

que es lo que se quería probar.

EJEMPLO 1.5. Una instalación consta de dos calderas y un motor. Para que la instalación funcione, es necesario que el motor y al menos una de las calderas funcione correctamente. Si el experimento consiste en poner a funcionar la instalación, se pueden definir los siguientes eventos:

- A : el motor está en buenas condiciones.
- C_i : la caldera i está en buenas condiciones, $i = 1, 2$.
- D : la instalación funciona.

Escriba el evento D en términos de los otros eventos.

Solución

El evento: al menos una de las dos calderas funciona, se cumple cuando alguna de las dos o las dos funcionan en forma simultánea, esto es,

$\text{al menos una de las calderas funciona} = C_1 \cup C_2.$

Ahora, la instalación funciona cuando funcionan **simultáneamente** el motor y alguna de las dos calderas, lo que se escribe como

$$D = A \cap (C_1 \cup C_2).$$

EJEMPLO 1.6. Un motor eléctrico puede fallar por una y sólo una de las siguientes causas: por obstrucción de los cojinetes, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Suponga que es doblemente probable que ocurra la obstrucción que la combustión, y es cuatro veces más probable que ocurra la combustión que la inutilización de las escobillas. Si la probabilidad de que el motor falle es igual a 0.01, ¿cuál es la probabilidad de que el motor no funcione debido a cada una de las tres causas posibles?

Solución

Primero se establecerán los eventos,

- A : la falla ocurre por obstrucción de los cojinetes,
- B : la falla ocurre por combustión del embobinado,
- C : la falla ocurre por desgaste de las escobillas.

El evento: el motor falla, equivale a la unión $A \cup B \cup C$ y estos tres eventos son mutuamente excluyentes; esto es,

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$$

y entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.1$$

y como $P(B) = 4P(C)$ y $P(A) = 2P(B) = 8P(C)$, se sigue que

$$8P(C) + 4P(C) + P(C) = 13P(C) = 0.1,$$

por lo que $P(C) = \frac{1}{130}$, $P(B) = \frac{4}{130}$ y $P(A) = \frac{8}{130}$.

De lo expuesto, se puede ver que existen tres elementos básicos: el espacio muestral Ω , el conjunto de eventos del espacio muestral $\mathcal{A}$ (la σ -álgebra) y la medida de probabilidad P , definida sobre $\mathcal{A}$. Estos tres elementos forman una terna que se conoce como espacio de probabilidades.

DEFINICIÓN 1.10. Se llama espacio de probabilidades a la terna formada por el espacio muestral, la σ -álgebra generada y la medida de probabilidad, y se denota como $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Espacios muestrales equiprobables

DEFINICIÓN 1.11. Un espacio muestral finito se llama **equiprobable** si cada uno de sus eventos elementales tiene la misma probabilidad de ocurrir (tiene igual oportunidad de ser observado).

El espacio muestral generado por la rifa es un ejemplo de espacio muestral equiprobable, ya que cada boleto tiene la misma probabilidad de salir premiado.

TEOREMA 1.9. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ es un espacio muestral equiprobable, entonces la probabilidad de sus eventos elementales, $E_i = \{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, es igual a

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}.$$

Demostración

Los eventos elementales forman una partición de Ω ; entonces son mutuamente excluyentes y

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n,$$

de donde

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(E_i) = 1.$$

Dado que Ω es un espacio muestral equiprobable, entonces $P(E_i) = P(E_j) \forall i, j = 1, 2, \dots, n$, y se sigue que

$$P(\Omega) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots + P(E_n) = nP(E_1) = 1,$$

de donde se obtiene el valor de la probabilidad $P(E_1) = P(E_i) = \frac{1}{n}$. Queda probado el teorema.

DEFINICIÓN 1.12. Se llama cardinalidad de un conjunto finito A al número de elementos que lo conforman.

La cardinalidad del conjunto A es un número natural y se denota con el símbolo $\#A$.

Se puede definir el concepto de cardinalidad para conjuntos no finitos, pero para las necesidades de este libro no es necesario.

Ejemplos

Si $A = \{x \mid x \text{ es una vocal}\} = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $\#A = 5$.

Si $B = \{x \mid x \text{ es un planeta del sistema solar}\} =$
 $\{\text{mercurio, venus, tierra, marte, júpiter,}$
 $\text{saturno, urano, neptuno, plutón}\},$

entonces $\#B = 9$.

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de tus hermanos?

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de los dedos de tus manos?

TEOREMA 1.10 (Definición clásica de probabilidad). *Si Ω es un espacio muestral equiprobable y $A \subset \Omega$ es un evento, entonces*

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos en } A}{\text{número de elementos en } \Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Demostración

Si $A \subset \Omega$ y $E_i, i = 1, 2, \dots, n$ son los eventos elementales de Ω , entonces existe un conjunto $\mathcal{J} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $A = \cup_{i \in \mathcal{J}} E_i$, y por el axioma (3) se tiene que

$$P(A) = P(\cup_{i \in \mathcal{J}} E_i) = P(\cup_{i \in \mathcal{J}} E_i) = \sum_{i \in \mathcal{J}} P(E_i) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \frac{1}{n} = \frac{\#\mathcal{J}}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega};$$

entonces queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 1.7. En una caja hay 2 bolas blancas y 2 bolas negras, se eligen al azar dos bolas sin devolverlas a la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que a) una bola sea negra y la otra blanca y b) las dos bolas sean negras?

Solución

Todas las bolas tienen la misma oportunidad de ser seleccionadas, así que el espacio muestral generado por el experimento es equiprobable. Para determinar el espacio muestral, a cada bola se le asocia un número natural del 1 al 4:



El espacio muestral puede entonces representarse por el conjunto de parejas ordenadas (x, y) con $1 \leq x < y \leq 4$; entonces

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

Así, los eventos:

A : una bola es negra y la otra blanca y B : las dos bolas son negras, se representan como

$$A = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B = \{(1, 2)\}$$

Así,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{1}{6}.$$

EJEMPLO 1.8. Diez hombres y 5 mujeres están de acuerdo con un proyecto de desarrollo, 5 hombres y 5 mujeres lo desaprueban y 5 hombres están indecisos. Se elige una persona al azar de este grupo. Encuentre la probabilidad de que **a)** la persona sea hombre, **b)** la persona esté a favor del proyecto, **c)** la persona sea un hombre que esté a favor del proyecto.

Solución

El espacio muestral es equiprobable y está formado por las 30 personas que forman el grupo.

a) $A = \{x \mid x \text{ es un hombre}\}$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{10 + 5 + 5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0.666$$

b) $B = \{x \mid x \text{ está a favor del proyecto}\}$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{10 + 5}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0.5$$

c) El evento: que la persona sea un hombre que aprueba el proyecto, se representa con $A \cap B$ y

$$P(A \cap B) = \frac{\#A \cap B}{\#\Omega} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0.333.$$

Una definición más general de equiprobabilidad se relaciona con los espacios muestrales continuos y acotados.

DEFINICIÓN 1.13. Un espacio muestral continuo y acotado (como un segmento de recta o una superficie acotada) se llama equiprobable o de **probabilidad uniforme** si la probabilidad de cualquier evento es proporcional a la medida asociada al espacio muestral.

Los espacios muestrales se asocian con las medidas comunes de longitud, área o volumen, según sea el caso. Entonces, en un espacio muestral infinito equiprobable: segmentos de recta de igual longitud tienen la misma probabilidad; superficies de igual área tienen la misma probabilidad, etc.

Si μ es la medida asociada con el espacio muestral (μ representa una longitud, un área o un volumen, según sea el caso) y A es un evento de un espacio muestral equiprobable infinito, entonces

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

EJEMPLO 1.9. Un auto parte de un punto A hacia un punto B por una carretera cuya longitud es de 20 kilómetros; en el camino el auto se descompone y no puede proseguir. Si la falla pudo ocurrir en cualquier punto del camino con la misma probabilidad, entonces ¿cuál es la probabilidad de que el auto esté más cerca de A que de B ?

Solución

Sea Q el punto entre A y B en donde se descompone el auto y sea x la distancia entre los puntos A y Q ; así, el espacio muestral asociado al experimento es igual a

$$\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq 20\}.$$

Sea E el evento: el auto se descompone más cerca de A que de B , y entonces E se define como

$$E = \{x \mid 0 \leq x \leq 10\}$$

y

$$P(E) = \frac{\text{longitud de } E}{\text{longitud de } \Omega} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0.5$$

EJEMPLO 1.10. Sobre un radio de un círculo de longitud igual a R se elige un punto al azar. Encuentre la probabilidad de que la cuerda ortogonal al radio que pasa por Q tenga una longitud menor que R .

Solución

Sea Q el punto elegido al azar sobre el radio determinado. Se quiere determinar la probabilidad del evento A : la cuerda que pasa por Q y es ortogonal al radio tiene longitud menor a R .

Para calcular esta probabilidad, considere que x corresponde a la longitud entre el centro del círculo y el punto Q ; entonces el espacio muestral asociado al experimento es

$$\Omega = \{x \mid 0 \leq x \leq R\}.$$

Para encontrar la longitud del evento A se dibuja la cuerda ortogonal al radio cuya longitud es igual a R . Con esta cuerda y dos radios se puede formar un triángulo equilátero, cuya altura se encuentra sobre el radio determinado.

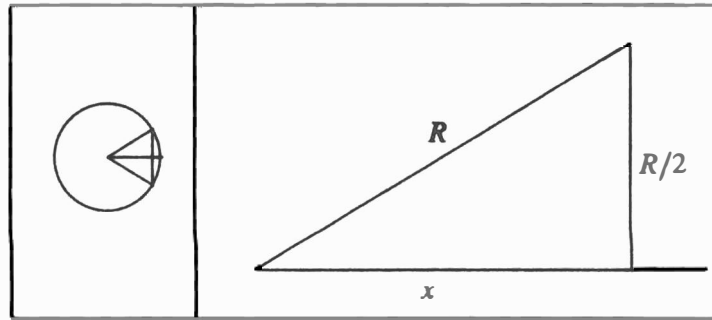


FIGURA 1.9 Triángulo equilátero formado por dos radios y una cuerda.

Si Q está dentro del triángulo equilátero, ocurre A^c ; si Q está fuera del triángulo ocurre A . Es más fácil calcular la longitud de A^c , la cual corresponde a la altura del triángulo equilátero, x .

Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$R^2 = x^2 + \frac{R^2}{4},$$

de donde se despeja el valor de x^2 :

$$x^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2,$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Entonces,

$$P(A^c) = \frac{\text{longitud de } A^c}{R} = \frac{\sqrt{3}R/2}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Y como se quiere encontrar la probabilidad de A , entonces

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

EJEMPLO 1.11. Un bote tarda una hora en cruzar la bahía de un lado al otro. A lo largo de la bahía cruza una lancha; si la ruta de la lancha intercepta la ruta del bote en cualquier punto con igual probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que en un punto cualquiera de la travesía del bote esté a menos de 20 minutos de la interceptación de la travesía de la lancha?

Solución

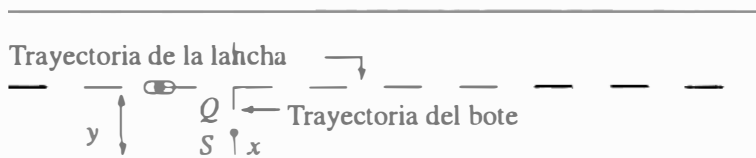


FIGURA 1.10 Esquema del ejemplo 1.11.

Suponga que la longitud del ancho de la bahía es igual a L . Sea S el punto donde se encuentra el bote y Q el punto donde la trayectoria de la lancha cruza la trayectoria del bote. Sea x la distancia entre el punto S y la orilla de la bahía, y sea y la distancia entre el punto Q y la orilla de la bahía; entonces el espacio muestral asociado al experimento es igual a

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < L\}.$$

Ahora considere el evento

A : el bote se encuentra a no más de 20 minutos de la interceptación de la ruta de la lancha.

Como en 20 minutos se recorre la tercera parte de la distancia entre las dos orillas de la bahía, se tiene que

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid |y - x| \leq \frac{1}{3}L\} = \{(x, y) \in \Omega \mid -\frac{1}{3}L \leq y - x \leq \frac{1}{3}L\}.$$

El evento A corresponde al área sombreada en el cuadrado de la siguiente figura, y el evento A^c corresponde al área no sombreada del mismo cuadrado.

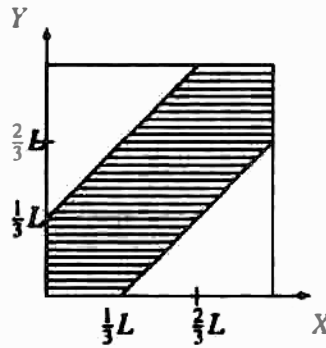


FIGURA 1.11

El área no sombreada equivale a dos mitades de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud igual a $2/3$ de L ; entonces

$$P(A^c) = \frac{\text{área de } A^c}{\text{área de } \Omega} = \frac{4/9 L^2}{L^2} = \frac{4}{9},$$

y finalmente se llega a

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

EJEMPLO 1.12. Un segmento de recta de 1 m de longitud es cortado en dos puntos al azar, dando lugar a tres segmentos de recta. ¿Cuál es la probabilidad de que con los tres segmentos de recta se pueda formar un triángulo?

Solución

Si x , y y z son las longitudes de los tres segmentos de recta, y como $x + y + z = 1$, entonces $z = 1 - x - y$. Así, el espacio muestral asociado se puede escribir como

$$\{(x, y) \mid x, y > 0 \text{ y } x + y < 1\},$$

cuya gráfica es la sección sombreada.

Sea el evento

A : los tres segmentos de recta forman un triángulo.

Para que los tres segmentos de recta formen un triángulo, la suma de la longitud de dos de ellos debe ser mayor que la longitud del tercero; entonces se deben cumplir tres desigualdades:

$$A = \{(x, y, z) \mid x + y > z, \quad x + z > y \quad \text{y} \quad y + z > x\}.$$

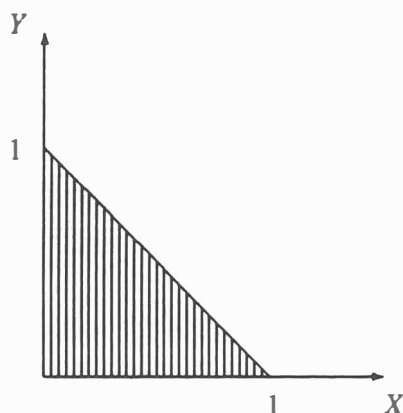


FIGURA 1.12 Espacio muestral del ejemplo 1.12.

Considerando cada desigualdad, se tiene

Primera desigualdad

$$\begin{aligned}
 x + y &> z, && \text{se suma el término } x + y \\
 2(x + y) &> \underbrace{x + y + z}_1 \\
 x + y &> \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Segunda desigualdad

$$\begin{aligned}
 x + z &> y, && \text{se suma el término } y \\
 \underbrace{x + y + z}_1 &> 2y \\
 \frac{1}{2} &> y
 \end{aligned}$$

Tercera desigualdad

$$\begin{aligned}
 y + z &> x, && \text{se suma el término } x \\
 \underbrace{x + y + z}_1 &> 2x \\
 \frac{1}{2} &> x
 \end{aligned}$$

El evento A corresponde al área sombreada de la figura 1.13. Por ello, al final se tiene que

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } \Omega} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}.$$

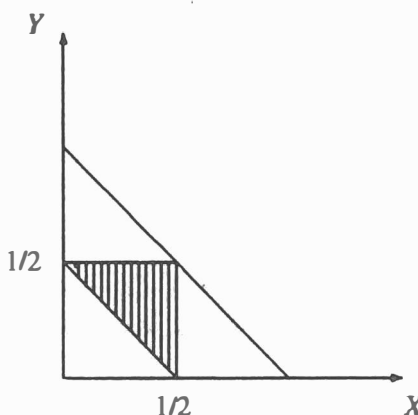


FIGURA 1.13

EJEMPLO 1.13. Sobre una circunferencia se colocan tres puntos A , B y C al azar; encuéntrese la probabilidad de que los tres puntos formen un triángulo acutángulo.

Se dice que un triángulo es acutángulo si sus tres ángulos internos son agudos, esto es, si miden menos de 90° .

Solución

Sin perder generalidad, considere que el radio del círculo es igual a 1 y que los puntos A , B y C están colocados sobre la circunferencia en ese orden, en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj.

Sea x la longitud del arco AB y sea y la longitud del arco BC ; entonces el espacio muestral del experimento está dado por

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \text{ y } x + y \leq 2\pi\}.$$

La figura 1.14 corresponde a los puntos A , B y C sobre la circunferencia, mientras que la figura 1.15 representa el espacio muestral correspondiente.

El teorema del ángulo inscrito dice que todo ángulo inscrito en un círculo mide la mitad del ángulo central subtendido por el mismo arco.

Por el teorema del ángulo inscrito, se sabe que el triángulo es acutángulo si el arco entre dos puntos consecutivos (A , B o C) mide menos de π ; esto es, el evento E : el triángulo formado por los tres puntos es acutángulo, corresponde a la región representada en la figura 1.16:

$$E = \{0 < x < \pi \text{ y } 0 < y < \pi \text{ y } 0 < 2\pi - x - y < \pi\}.$$

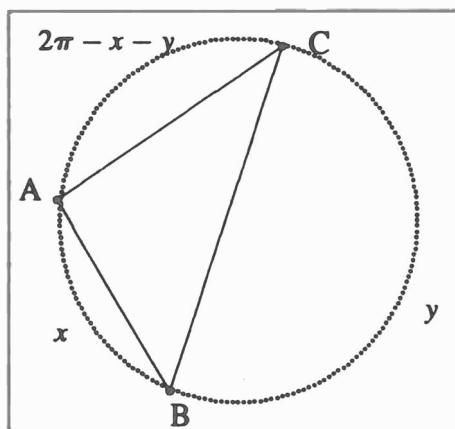


FIGURA 1.14 Tres puntos A, B y C localizados sobre una circunferencia.

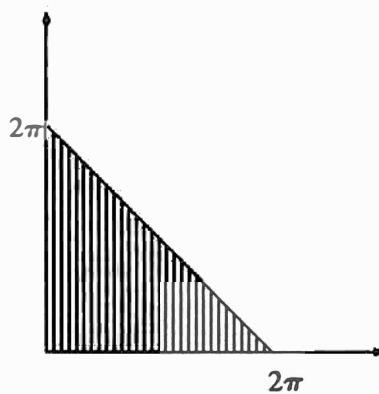


FIGURA 1.15 Espacio muestral del experimento del ejemplo 1.13.

El área correspondiente a E es igual a la cuarta parte del área del espacio muestral; así,

$$P(E) = 1/4.$$

Ejercicios

En los ejercicios del 1.6 al 1.8,

(a) escriba el espacio muestral correspondiente,

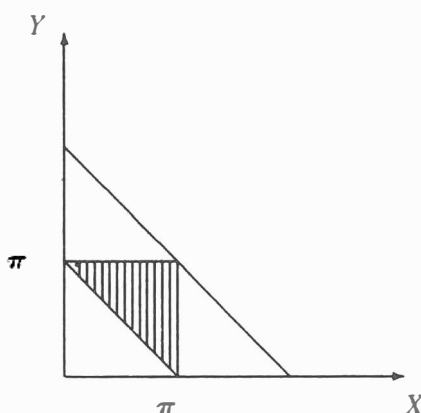


FIGURA 1.16 Evento: el triángulo es acutángulo.

- (b) escriba los eventos E y F ,
 (c) escriba la probabilidad de los eventos E y F ,
 (d) diga si el espacio muestral es equiprobable, y
 (e) describa en palabras los eventos:

$$E^c, \quad F^c, \quad E \cup F, \quad (E \cup F)^c, \quad E \cap F \quad \text{y} \quad E - F.$$

EJERCICIO 1.6. Se tira un dado no cargado. El evento E es: sale un número mayor que 3. El evento F es: sale un número par.

EJERCICIO 1.7. Se tira un par de dados no cargados. El evento E es: al menos sale un 5. El evento F es: la suma de los dos resultados es 10.

EJERCICIO 1.8. Se tiran 3 monedas al aire. El evento E es: por lo menos sale un águila. El evento F es: no sale más de un sol.

EJERCICIO 1.9. Escoja una página al azar de un libro, cerrando los ojos y abriendo el libro al azar. ¿Es equiprobable el espacio muestral de este experimento?

EJERCICIO 1.10. Pruebe lo siguiente:

1. Si $A \subset \Omega$ es tal que $A \neq \Omega$ y $A \neq \emptyset$, entonces la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

es una σ -álgebra.

2. Para un espacio muestral finito, el conjunto de todos sus posibles subconjuntos es una σ -álgebra de conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \Omega\}.$$

EJERCICIO 1.11. Dados los eventos A , B y C , demuestre la siguiente identidad:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

EJERCICIO 1.12. Dada la sucesión de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$, pruebe que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

EJERCICIO 1.13. Dada la sucesión de eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$, pruebe que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

EJERCICIO 1.14. Dados los eventos A y B , pruebe que

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

EJERCICIO 1.15. En un estudio de 270 estudiantes, se halló que 90 sobresalían en matemáticas, 90 en música y 90 en deportes. A su vez, se halló que 30 sobresalían en matemáticas y música, 30 en matemáticas y deportes y 30 en deportes y música. Sólo se encontraron 10 estudiantes que sobresalían en las tres asignaturas. Encuentre el número de estudiantes que (a) sobresale exactamente en una asignatura, (b) no más de dos asignaturas, (c) en más de dos asignaturas, (d) los que no sobresalen en ninguna asignatura.

EJERCICIO 1.16. Con respecto al ejercicio anterior, se elige al azar un estudiante de los 270 en el estudio. Encuentre la probabilidad de que ese estudiante sobresalga exactamente en dos asignaturas.

EJERCICIO 1.17. A y B son eventos mutuamente excluyentes tales que $P(A) = 0.18$ y $P(B^c) = 0.25$. Encuentre la probabilidad de $A \cup B$.

EJERCICIO 1.18. Los autobuses de la línea A llegan a la estación cada 4 minutos, mientras que los autobuses de la línea B llegan cada 6 minutos. El intervalo de tiempo entre la llegada de un autobús de la línea A y uno de la línea B es un número al azar. Encuentre la probabilidad de que (a) el primer autobús que llegue pertenezca a la línea A; (b) un autobús de cualquier línea llegue dentro de un lapso de 2 minutos.

EJERCICIO 1.19. Una barra de 20 cm de longitud L se corta en pedazos. Encuentre la probabilidad de que las piezas midan al menos 1 cm si el número de pedazos en que se rompió fue (a) 2, (b) 3.

4. Métodos de conteo

Para calcular la probabilidad de un evento A en un espacio muestral finito Ω , se requiere conocer cuántos elementos tiene Ω y cuántos elementos tiene A . En esta sección se estudiarán algunos métodos que permiten contar fácilmente los elementos de un conjunto.

Hay dos reglas básicas en el proceso de conteo:

1. **Regla de la suma:** Si se tiene una colección de conjuntos finitos, ajenos dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, entonces

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \dots + \#A_n.$$

2. **Regla del producto:** Si se tiene una colección de conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, el conjunto de n -adas

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3, \dots, x_n \in A_n\},$$

es tal que

$$\#A = \#A_1 \times \#A_2 \times \#A_3 \times \dots \times \#A_n.$$

La regla de la suma está asociada con el tercer axioma de probabilidad, y de manera llana significa que si un fenómeno puede ocurrir en m diferentes formas (representadas por los eventos $A_1, A_2 \dots A_m$), tales que dos de estas formas no pueden ocurrir simultáneamente ($A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$), y cada una de estas formas, puede a su vez, realizarse de n_i maneras, entonces el proceso puede efectuarse de $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ formas.

En lenguaje simple, la regla del producto se puede enunciar así: si un proceso consta de m etapas, la primera etapa puede ocurrir de n_1 formas;

la segunda etapa, en n_2 formas, y así sucesivamente hasta la etapa m , que puede ocurrir en n_m formas. Las formas en que puede ocurrir el proceso son iguales a $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$.

EJEMPLO 1.14. En la biblioteca de la universidad hay 40 libros de sociología, 35 de antropología y 50 de psicología. Para ampliar su cultura, a un estudiante de ciencias básicas se le pide que:

1. Lea uno de estos libros. ¿En cuántas formas diferentes puede hacer la elección?
2. Lea un libro de cada área. ¿En cuántas formas diferentes puede hacer la elección?

Solución

Cuando el estudiante elige el libro, puede ocurrir cualquiera de los eventos:

- A_1 : el libro es de sociología.
 - A_2 : el libro es de antropología.
 - A_3 : el libro es de psicología.
1. Si el estudiante tiene que leer solamente un libro, dos eventos no pueden ocurrir en forma simultánea (A_1 , A_2 y A_3 son mutuamente excluyentes por pares); A_1 puede ocurrir de 40 maneras, A_2 de 35 maneras y A_3 de 50 maneras. El total de formas en que se puede hacer la elección es igual a

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 40 + 35 + 50 = 125.$$

2. Si el estudiante tiene que leer un libro de cada área, puede hacer su elección por etapas: primero elige el libro de sociología, luego el libro de antropología y finalmente el libro de psicología. Por la regla del producto, se tiene que el total de formas de hacer la selección de los tres libros es igual a

$$40 \times 35 \times 50 = 70\,000.$$

EJEMPLO 1.15. Se tira un par de dados y se gana si la suma de sus caras es menor o igual que 4. ¿En cuántas formas se puede ganar?

Solución

Sea el evento

A : se gana en el juego,

que es igual a la unión de los tres eventos mutuamente excluyentes:

- A_1 : la suma es igual a 2.
- A_2 : la suma es igual a 3.
- A_3 : la suma es igual a 4.

A_1 ocurre sólo en una forma: $A_1 = \{(1, 1)\}$.

A_2 ocurre en dos formas: $A_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

A_3 ocurre en tres formas: $A_3 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

Y

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

por lo que el total de formas en que se puede ganar es

$$\#A = 1 + 2 + 3 = 6.$$

EJEMPLO 1.16. Los automóviles Alpha se producen en 4 modelos de 10 colores cada uno, 2 potencias de motor y 3 tipos de transmisión. ¿Cuántos tipos diferentes de automóviles pueden fabricarse?

Solución

Los 4 modelos se pueden dar en 10 colores, y con esto se tienen $4 \times 10 = 40$ tipos, cada uno de los cuales puede tener dos tipos de motor, lo que da $4 \times 10 \times 2 = 80$ diferentes tipos. Finalmente, a cada una de estas posibilidades se les pueden poner 3 clases de transmisión, con lo que se tiene un total de diferentes tipos de automóviles igual a

$$4 \times 10 \times 2 \times 3 = 240.$$

EJEMPLO 1.17. El viaje desde la ciudad de México hasta la ciudad de Puebla se puede efectuar en dos etapas:

- El viaje desde la casa hasta la central camionera, el cual se puede hacer en taxi, en microbús, en metro o en automóvil particular (4 formas).
- El viaje de la central camionera a la ciudad de Puebla, que se puede hacer en autobuses de superlujo, en autobuses de primera clase y en autobuses de segunda clase (3 formas).

Entonces, por la regla del producto, hay $3 \times 4 = 12$ maneras de hacer el viaje.

DEFINICIÓN 1.14. Dado un conjunto con n elementos distintos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

se llama **ordenación con repetición de n en m** a cada una de las distintas formas de colocar en m lugares cualquiera de los elementos del conjunto A , permitiéndose que un mismo elemento aparezca más de una vez en la ordenación.

Por ejemplo, si

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

las ternas

$$(a_1, a_2, a_1) \text{ y } (a_3, a_1, a_2)$$

representan dos diferentes ordenaciones con repetición en tres lugares.

El total de ordenaciones con repetición de los n elementos en m lugares se denota con el símbolo O_m^n .

Aplicando la regla del producto, se tiene que

$$O_m^n = \overbrace{n \times n \times \dots \times n}^{m \text{ veces}} = n^m$$

$$O_m^n = n^m.$$

Por ejemplo, para $m = 2$, las ordenaciones con repetición se incluyen en la tabla 1.4.

TABLA 1.4 *Ordenaciones con repetición de n elementos en 2 lugares.*

	n			
n	(a_1, a_1)	(a_2, a_1)	$\dots$	(a_n, a_1)
	(a_1, a_2)	(a_2, a_2)	$\dots$	(a_n, a_2)
	(a_1, a_3)	(a_2, a_3)	$\dots$	(a_n, a_3)
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	(a_1, a_n)	(a_2, a_n)	$\dots$	(a_n, a_n)

En esta tabla se muestra el total de ordenaciones con repetición de n elementos en 2 lugares. El total es igual a $n \times n = n^2$.

DEFINICIÓN 1.15. Dado un conjunto con n elementos distintos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

se llama **ordenación sin repetición de n en m** a cada una de las distintas formas de colocar en m lugares distintos cualquiera de los elementos del conjunto A , sin que un mismo elemento aparezca más de una vez en la ordenación.

Por ejemplo: si

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

la ordenación

$$(a_1, a_2, a_1)$$

no está permitida porque a_1 se repite en el primer y tercer lugar. En cambio, la ordenación

$$(a_3, a_1, a_2)$$

sí está permitida.

El total de ordenaciones sin repetición de n elementos en m lugares se denota con el símbolo P_m^n .

El primer lugar de la ordenación puede ser ocupado por cualquiera de los n elementos de A , el segundo lugar ya no puede ser ocupado por el elemento que está en el primer lugar, sólo puede ser ocupado por los restantes $(n - 1)$ elementos, etc.

$$\underbrace{\boxed{n} \boxed{n-1} \boxed{n-2} \boxed{\dots} \boxed{n-(m-1)}}_{m \text{ lugares}}$$

Por la regla del producto, se tiene que el número total de ordenaciones sin repetición de los n elementos en m lugares es igual a

$$\boxed{P_m^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times (n-(m-1))}$$

Si m y n coinciden, las ordenaciones sin repetición se llaman permutaciones de n .

DEFINICIÓN 1.16. Dado un conjunto con n elementos distintos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

se llama **permutación** de los elementos de A a cada una de las distintas formas de ordenar sus n elementos.

TABLA 1.5 *Ordenaciones sin repetición de n elementos en 2 lugares.*

	n			
$n - 1$	(a_1, a_2)	(a_2, a_1)	$\dots$	(a_n, a_1)
	(a_1, a_3)	(a_2, a_3)	$\dots$	(a_n, a_2)
	(a_1, a_4)	(a_2, a_4)	$\dots$	(a_n, a_3)
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	(a_1, a_n)	(a_2, a_n)	$\dots$	(a_n, a_{n-1})

El total de permutaciones de los n elementos se denota con el símbolo P_n ; entonces,

$$P_n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$$

4.1 Notación factorial. Observando las fórmulas de P_m^n y de P_n , se ve la necesidad de tener una notación compacta para los productos de números enteros positivos consecutivos, lo cual se tiene en la definición de la función factorial.

DEFINICIÓN 1.17. Dado un número entero no negativo, n , se llama **factorial** de n y se escribe como $n!$, a la función

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplos

Significado	Lectura
• $0! = 1$	(0 factorial)
• $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$	(5 factorial)
• $9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362\,880$	(9 factorial)

TEOREMA 1.11. *Para cualquier natural $n > 1$ se tiene que*

$$n! = n \times (n - 1)!$$

Demostración

Por la definición de n factorial, se tiene

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times (n-1)}_{(n-1)!} \times n = n \times (n-1)!$$

Usando la notación factorial, se puede escribir nuevamente el número de ordenaciones sin repetición de n en m lugares de una manera compacta:

$$P_m^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times (n-m+1) \times \frac{(n-m)!}{(n-m)!},$$

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!},$$

y el número de permutaciones de n elementos ($n = m$)

$$P_n = n!$$

EJEMPLO 1.18. En un salón de clases hay 7 sillas para 7 alumnos, los cuales entran y se acomodan. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los alumnos?

Solución

La respuesta es: las permutaciones son de 7 elementos, o sea $7!$, ya que si cambiamos de lugar a dos personas el acomodo es diferente; además, ninguna persona puede ocupar más de un lugar al mismo tiempo:

$$7! = 5040.$$

DEFINICIÓN 1.18. Dado un conjunto de n elementos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\},$$

se llama **combinación de n en m** ($m \leq n$) a cada uno de los subconjuntos de A con exactamente m elementos.

El número de combinaciones de n en m se denota con el símbolo

$$C_m^n, \quad \text{o bien como} \quad \binom{n}{m}.$$

Ahora se va a deducir una fórmula para obtener el total de combinaciones que existe.

TEOREMA 1.12. Para $n \geq m \geq 0$, se tiene que

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Demostración

Cada ordenación sin repetición de n en m está formada por m elementos de un conjunto de n elementos. El total de ordenaciones sin repetición es igual al número de diferentes subconjuntos por el número de ordenaciones en que aparecen los elementos de un mismo subconjunto. Un subconjunto de m elementos aparece en $m!$ distintas ordenaciones; entonces

$$P_m^n = P_m \times \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

de donde se despeja el término

$$\binom{n}{m} = \frac{P_m^n}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!};$$

por lo tanto, queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 1.19. Si $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, se tiene que el total de ordenaciones sin repetición en tres lugares es: $5 \times 4 \times 3 = 60$, las cuales son:

$(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_3, a_2), (a_2, a_1, a_3), (a_2, a_3, a_1), (a_3, a_1, a_2), (a_3, a_2, a_1)$
 $(a_1, a_2, a_4), (a_1, a_4, a_2), (a_2, a_1, a_4), (a_2, a_4, a_1), (a_4, a_1, a_2), (a_4, a_2, a_1)$
 $(a_1, a_2, a_5), (a_1, a_5, a_2), (a_2, a_1, a_5), (a_2, a_5, a_1), (a_5, a_1, a_2), (a_5, a_2, a_1)$
 $(a_1, a_3, a_4), (a_1, a_4, a_3), (a_3, a_1, a_4), (a_3, a_4, a_1), (a_4, a_1, a_3), (a_4, a_3, a_1)$
 $(a_1, a_3, a_5), (a_1, a_5, a_3), (a_3, a_1, a_5), (a_3, a_5, a_1), (a_5, a_1, a_3), (a_5, a_3, a_1)$
 $(a_1, a_4, a_5), (a_1, a_5, a_4), (a_4, a_1, a_5), (a_4, a_5, a_1), (a_5, a_1, a_4), (a_5, a_4, a_1)$
 $(a_2, a_3, a_4), (a_2, a_4, a_3), (a_3, a_2, a_4), (a_3, a_4, a_2), (a_4, a_2, a_3), (a_4, a_3, a_2)$
 $(a_2, a_3, a_5), (a_2, a_5, a_3), (a_3, a_2, a_5), (a_3, a_5, a_2), (a_5, a_2, a_3), (a_5, a_3, a_2)$
 $(a_2, a_4, a_5), (a_2, a_5, a_4), (a_4, a_2, a_5), (a_4, a_5, a_2), (a_5, a_2, a_4), (a_5, a_4, a_2)$
 $(a_3, a_4, a_5), (a_3, a_5, a_4), (a_4, a_3, a_5), (a_4, a_5, a_3), (a_5, a_3, a_4), (a_5, a_4, a_3)$

Cada renglón corresponde a las 6 permutaciones de un mismo subconjunto de tres elementos ($3 \times 2 \times 1$), esto es, cada renglón representa un

subconjunto de 3 elementos diferentes. Así, el total de subconjuntos es

$$\binom{5}{3} \times P_3 = P_3^5$$

$$\binom{5}{3} \times 3! = \frac{5!}{(n-3)!}.$$

Al despejar se sigue que

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10,$$

y hay 10 diferentes subconjuntos:

$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_2, a_5\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_1, a_3, a_5\},$$

$$\{a_1, a_4, a_5\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_5\}, \{a_2, a_4, a_5\}, \{a_3, a_4, a_5\}.$$

EJEMPLO 1.20. Un lote consta de 8 artículos sin defectos, 4 con defectos leves y 2 con defectos graves. Se eligen al azar dos artículos del lote. Encuentre la probabilidad de que:

- Ambos artículos no tengan defectos.
- Uno de los artículos no tenga defectos graves y el otro sí.
- Uno de los artículos no tenga defectos y el otro tenga defectos graves.

Solución

En el lote hay 14 artículos y se eligen 2 al azar; por lo tanto, el espacio muestral Ω de este experimento está formado por los subconjuntos de dos artículos del total de catorce. Este espacio muestral es equiprobable, y

$$\#\Omega = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!(14-2)!} = 91.$$

Los eventos asociados a los incisos (a), (b) y (c) son:

- A_1 : los dos artículos son buenos.
- A_2 : uno de los artículos no tiene defectos graves y el otro sí.
- A_3 : uno de los artículos no tiene defectos y el otro tiene defectos graves.

Así, las soluciones correspondientes a cada inciso son:

- a) La cardinalidad de A_1 es igual al total de subconjuntos de 2 elementos de los 8 no defectuosos:

$$\#A_1 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28.$$

Así, fácilmente calculamos la probabilidad de A_1 .

$P(\text{los dos artículos son buenos}) = P(A_1) = \frac{28}{91}.$

- b) El total de formas de tener un artículo con defectos graves y el otro no, es igual a las formas de elegir uno de los dos artículos con defectos graves por el número de formas de elegir el otro de los 12 artículos que no tienen defectos graves.

$$\#A_2 = \binom{12}{1} \binom{2}{1} = 12 \times 2 = 24.$$

Así:

$$P(A_2) = \frac{24}{91}.$$

- c) Las posibles formas de elegir un artículo no defectuoso y uno con defectos graves es el producto

$$\#A_3 = \binom{8}{1} \binom{2}{1} = \frac{8!}{1!(8-1)!} \times \frac{2!}{1!(2-1)!} = 8 \times 2 = 16$$

$$P(A_3) = \frac{16}{91}.$$

EJEMPLO 1.21. Un equipo de futbol tiene 22 jugadores registrados, de los cuales: 2 juegan la posición de portero, 7 la posición de defensa, 6 la posición de medio y 7 la posición de delantero.

Si se quiere una alineación de: 1 portero, 3 defensas, 3 medios y 4 delanteros, ¿de cuántas maneras se puede elegir al equipo que jugará?

Solución

Las formas de elegir a los jugadores en cada una de las posiciones, es igual al número de subconjuntos que se pueden formar del total de jugadores disponibles en el número requerido para el juego.

Entonces, para cada posición en el campo se tiene que el número de posibles elecciones es:

Posición en el juego	No. de formas de hacer la elección
• 1 portero de dos disponibles	$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$
• 3 defensas de 7 disponibles	$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$
• 3 medios de 6 disponibles	$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$
• 4 delanteros de 7 disponibles	$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$

Para cada forma en que se elija a los jugadores de cada posición, ésta se puede combinar con todas las formas de las otras posiciones. Por la regla del producto se tiene que la respuesta es

$$2 \times 35 \times 20 \times 35 = 49\,000.$$

El entrenador tiene 49 000 maneras de elegir a su equipo.

EJEMPLO 1.22. En un baile hay 11 hombres y 8 mujeres,

- ¿En cuántas formas se pueden seleccionar ocho de los hombres para formar un grupo de baile?
- ¿En cuántas formas se pueden emparejar las ocho mujeres con ocho de los 11 hombres?

Solución

- El total de formas en que se puede elegir un subconjunto de 8 hombres de los 11 que están en la fiesta es

$$\binom{11}{8} = \frac{11!}{8!(11-8)!} = 330.$$

- Una vez elegidos los 8 hombres, éstos se pueden emparejar con 8 mujeres en un número igual al total de las permutaciones de 8 elementos (es semejante a decir que los hombres son lugares, y las mujeres son los elementos que se pueden colocar en esos lugares). Entonces, el total de formas de elegir 8 hombres primero y luego

emparejarlos con las 8 mujeres es igual a

$$\binom{11}{8} 8! = \frac{11!}{8!(11-8)!} 8! = 330 \times 8! = 13,305,600.$$

EJEMPLO 1.23 (Arreglos circulares). Suponga que se tienen 5 elementos (a , b , c , d y e) dispuestos en forma circular, como se muestra en la figura 1.17.

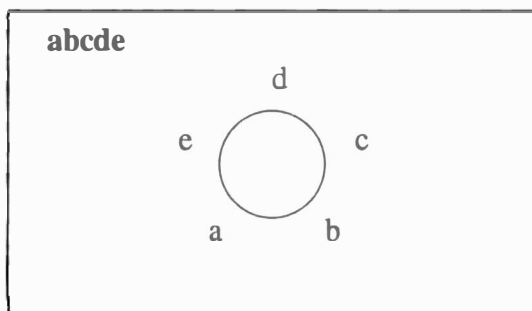


FIGURA 1.17 *Arreglo circular.*

La rotación de los elementos de un mismo arreglo circular no se consideran diferentes; así, en la figura 1.18 se tienen diferentes representaciones del mismo arreglo circular.

Las permutaciones lineales de los 5 elementos son iguales a 5 veces el número de arreglos circulares C_5 :

$$5 \times C_5 = 5!$$

De esta ecuación se puede despejar C_5 :

$$C_5 = \frac{5!}{5} = (5-1)! = 4! = 24.$$

En general, si se tienen n elementos en un arreglo circular se tendrán $(n-1)!$ arreglos circulares diferentes.

EJEMPLO 1.24. Se lanzan 3 pelotas numeradas ① ② ③ hacia 5 cajas también numeradas del 1 al 5 (c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5). El proceso de lanzamiento es tal que cada pelota tiene la misma oportunidad de caer en cualquiera de las cajas.

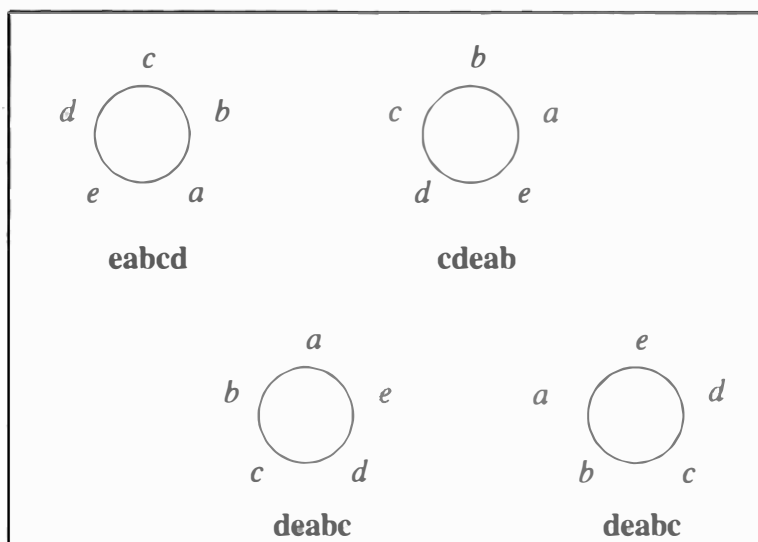


FIGURA 1.18 Las rotaciones dan un mismo arreglo circular. Hay cinco representaciones equivalentes para la misma ordenación lineal.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres pelotas queden en la caja 1?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres pelotas queden repartidas en las cajas 1, 4 y 5?

Solución:

Al lanzar las tres pelotas, se genera el espacio muestral

$$\Omega = \{(c_i, c_j, c_k) \mid 1 \leq i, j, k \leq 5\}.$$

La primera coordenada determina la caja donde cae la pelota 1, la segunda determina la caja donde cae la pelota 2, y la tercera determina la caja donde cae la pelota 3. En la terna (c_i, c_j, c_k) se permite tener coordenadas repetidas.

El número total de formas en que las pelotas pueden caer en las cajas coincide con las ordenaciones con repetición de 5 en 3.

$$\#\Omega = O_3^5 = 5^3 = 125.$$

- a) De estas 125 formas, sólo en uno de los casos se tienen las tres bolas en la caja 1.

①	②	③	Pelotas
c_5	c_3	c_2	La bola 1 en la caja 5 La bola 2 en la caja 3 La bola 3 en la caja 2 (c_5, c_3, c_2)
c_4	c_1	c_4	La bola 1 en la caja 4 La bola 2 en la caja 1 La bola 3 en la caja 4 (c_4, c_1, c_4)

FIGURA 1.19 Dos posibles resultados del experimento de lanzar 3 pelotas.

①	②	③
c_1	c_1	c_1

$$P(c_1, c_1, c_1) = \frac{1}{125}$$

- b) Las diferentes maneras en que las cajas c_1 , c_4 y c_5 pueden estar ocupadas por una pelota coinciden con las permutaciones de c_1 , c_4 y c_5 , las cuales son $3! = 6$:

(c_1, c_4, c_5) , (c_1, c_5, c_4) , (c_4, c_1, c_5) , (c_4, c_5, c_1) , (c_5, c_1, c_4) y (c_5, c_4, c_1) .

Entonces,

$$P(\text{las cajas 1, 4 y 5 estén ocupadas}) = \frac{6}{125}.$$

EJEMPLO 1.25 (Cuando Ω no es equiprobable). Con las condiciones del ejemplo anterior, suponga que las tres bolas que se lanzan tienen borrado el número, por lo que las bolas ya son indistinguibles. ¿Cuántos resultados distinguibles (a simple vista) hay en este experimento?

Si las pelotas son indistinguibles, no importa qué pelota cae en cada caja; sólo importa saber qué cajas están ocupadas y cuántas pelotas hay en cada una.

Hay tres formas de ocupar las cajas:

- (a) las tres pelotas pueden caer en una misma caja;
- (b) dos pelotas pueden caer en una misma caja y la tercera en otra caja distinta;
- (c) las tres pelotas pueden caer en cajas diferentes.

Se calcula entonces cuántas formas distinguibles hay en cada uno de estos casos.

- (a) Hay 5 formas de que las tres bolas estén en una misma caja (véase la Fig. 1.20).

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
				
				
				
				
				

FIGURA 1.20 Formas de tener las tres bolas en una misma caja.

- (b) El total de formas de tener 2 bolas en una caja y la tercera bola en otra caja es igual a

$$\binom{5}{2} \times 2 = 20,$$

o sea, las formas en que se pueden elegir dos cajas que serán ocupadas, por las formas en que se pueden repartir las bolas en las dos cajas.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
				
				

FIGURA 1.21 Formas de tener ocupadas las cajas 1 y 2.

- (c) Finalmente, el número de maneras de tener tres cajas ocupadas, de las cinco, coincide con el número de subconjuntos de tres elementos de un conjunto de cinco elementos (las combinaciones de 5 en 3).

Hay $\binom{5}{3} = 10$ maneras diferentes de tener las tres bolas en cajas diferentes.

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
●	●	●		

FIGURA 1.22 Un posible resultado de tener ocupadas 3 cajas.

El total de resultados distinguibles en este experimento es igual a

$$5 + 20 + 10 = 35.$$

El espacio muestral tiene 35 elementos, pero este espacio no es equiprobable ya que cada evento elemental no tiene la misma probabilidad de ocurrir. El espacio muestral equiprobable se presenta cuando se considera que las bolas se pueden distinguir. Por ejemplo, la probabilidad de que las tres pelotas estén en la caja 1 sigue siendo $1/125$, como en el ejemplo anterior, y no $1/35$. Que las pelotas no tengan numeración no modifica la probabilidad del mismo evento.

EJEMPLO 1.26 (Permutaciones con objetos no distinguibles). ¿Cuántas permutaciones distinguibles se pueden formar con 3 bolas negras ●, 5 bolas rojas ⊙ y 8 bolas blancas ○?

Solución

Cuando las bolas de un mismo color son indistinguibles, las permutaciones son distinguibles sólo si las bolas de un mismo color ocupan lugares diferentes.

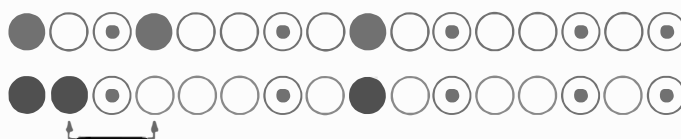


FIGURA 1.23 La permutación de dos bolas de diferente color dan ordenaciones diferentes.

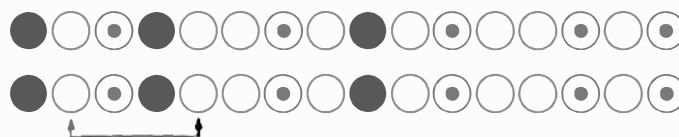


FIGURA 1.24 La permutación de dos bolas del mismo color dan la misma ordenación.

Lo que interesa es conocer el número de permutaciones distinguibles, esto es, cuando las bolas del mismo color están ocupando lugares diferentes. Para tener la respuesta se procede en tres etapas: (1) se eligen los 3 lugares (de los 16) para colocar las bolas negras; (2) se eligen los 5 lugares (de los 13 restantes) para colocar las bolas rojas; (3) las bolas blancas se colocan en los 8 lugares restantes. Utilizando la regla del producto y la fórmula de las combinaciones, se tiene que la solución es igual a

$$\binom{16}{3} \binom{13}{5} \binom{8}{8} = \frac{16!}{3!(13)!} \frac{13!}{5!(8)!} \frac{8!}{8!(0)!} = \frac{16!}{3!5!8!} = 720\,720.$$

Ejercicios

EJERCICIO 1.20. De una urna que tiene dos bolas negras y una bola blanca se sacan dos bolas al azar juntas. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan diferente color? (b) Efectúe 100 veces el experimento de sacar las dos bolas al azar de la urna; ¿cuántas veces aparecieron dos bolas de diferente color? Son casi 66 veces; ¿por qué crees que ocurre esto?

EJERCICIO 1.21. Se extraen dos cartas al azar de una baraja inglesa (52 cartas). Calcule la probabilidad de que (a) por lo menos una carta sea un as, (b) las dos cartas sean espadas.

EJERCICIO 1.22. Se extraen dos bolas de una urna que contiene 3 bolas verdes y 5 azules. Encuentre la probabilidad de que (a) las dos bolas sean azules, (b) por lo menos una bola sea azul.

EJERCICIO 1.23. Se extraen dos calcetines de un cajón que contiene 6 calcetines rojos, 8 amarillos y 2 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) los dos sean del mismo color, (b) los dos sean rojos?

EJERCICIO 1.24. Se extraen sin reemplazo 2 bolas de una urna que contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Encuentre la probabilidad de que las dos bolas sean de diferente color.

EJERCICIO 1.25. Considere que se lanzan 3 pelotas hacia 5 cajas numeradas, de tal manera que las pelotas pueden caer en cualquiera de las cajas con igual probabilidad. Calcule la probabilidad de que solamente las cajas 1 y 2 estén ocupadas.

EJERCICIO 1.26. Considere que se lanzan k pelotas hacia n cajas, de tal manera que las pelotas pueden caer en cualquiera de las cajas con igual probabilidad.

(a) Calcule la probabilidad de que dos cajas estén ocupadas.

(b) Calcule la probabilidad de que tres cajas estén ocupadas.

EJERCICIO 1.27. Si de un banco de 100 problemas se conoce la respuesta de 70 de ellas, ¿cuál es la probabilidad de pasar un examen de 10 preguntas que fueron tomadas al azar del banco de 100? La calificación aprobatoria es de 6 puntos.

EJERCICIO 1.28. Un lote de 100 artículos manufacturados es revisado por un inspector, quien examina 10 artículos elegidos al azar. Si ninguno es defectuoso, el lote se acepta. En otro caso, el lote es inspeccionado de nuevo. ¿Cuál es la probabilidad de que se acepte un lote con 10 artículos defectuosos?

EJERCICIO 1.29. Un convoy del metro está formado por n carros. En la estación terminal es abordado por r pasajeros ($r \leq n$), los cuales entran al metro completamente al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que cada pasajero haya abordado un carro diferente?

EJERCICIO 1.30. Considere a un profesor de una universidad que acostumbra contar exactamente tres chistes al año en su clase. (a) Si tiene la política de no contar en un año dado los mismos tres chistes que ya contó el año anterior, ¿cuál es el mínimo número de chistes que necesitará contar en 35 años? (b) ¿Cuál es el mínimo número de chistes que necesita en 35 años si su política es no contar nunca el mismo chiste dos veces?

EJERCICIO 1.31. ¿De cuántas maneras puede contestar un estudiante un examen de ocho preguntas, a las que hay que responder “falso” o “verdadero”, si (a) contesta la mitad de las preguntas como ciertas y la

otra mitad como falsas; **(b)** contesta de manera que nunca da dos respuestas consecutivas iguales?

EJERCICIO 1.32. Cinco políticos se encuentran en una fiesta; ¿cuántos saludos de mano se intercambian si cada político estrecha la mano de todos los demás sólo una vez?

EJERCICIO 1.33. Dado un grupo de 4 personas, encuentre la probabilidad de que por lo menos dos de ellas **(a)** cumplan años el mismo día, **(b)** hayan nacido el mismo mes.

EJERCICIO 1.34. Elija al azar dos números de un directorio telefónico; y encuentre la probabilidad de que los dos últimos dígitos **(a)** sean diferentes, **(b)** sean iguales.

5. Conteo en la física estadística

La intención de esta sección es presentar el fenómeno aleatorio del proceso físico sin entrar en los detalles teóricos.¹

La idea básica de la teoría cuántica es que la energía de una partícula encerrada en cierto volumen (no importa si éste es grande o pequeño) sólo puede tomar valores discretos (numerables); es decir, la energía de la partícula está cuantizada. El nivel más pequeño de energía que puede ocurrir se llama **nivel de energía inferior** o **nivel cero**, y se designa como ϵ_0 . El nivel de energía inmediato superior será denotado por ϵ_1 , y así sucesivamente. La separación entre los niveles de energía depende del sistema que se trate, y es diferente para un oscilador, para un rotor rígido o para una partícula encerrada en una caja.

La temperatura de una sustancia depende de la cantidad de energía térmica que comparten las partículas. En el cero absoluto, todas las partículas que componen el sistema se encontrarán en los niveles más bajos posibles. Para elevar la temperatura de la sustancia se debe añadir energía a las partículas, es decir, éstas deben ser elevadas a niveles superiores de energía.

El objetivo de la mecánica estadística es determinar cuántas partículas (de un total de N) hay en cada uno de los niveles de energía.

¹ Para más detalle, ver referencia 10 de la bibliografía.

n_0 número de partículas que poseen la energía ϵ_0 ,
 n_1 número de partículas que poseen la energía ϵ_1 ,
 n_2 número de partículas que poseen la energía ϵ_2 ,
 $\dots$
 n_M número de partículas que poseen la energía ϵ_M .

La energía total E del sistema es igual a la suma de las energías de las partículas componentes.

$$n_0\epsilon_0 + n_1\epsilon_1 + \dots + n_M\epsilon_M = \sum_{i=0}^M n_i\epsilon_i = E. \quad (1.4)$$

Así, la distribución de las N partículas en los diferentes niveles de energía genera el espacio muestral

$$\Omega = \{(n_0, n_1, n_2, \dots, n_M) \in \mathbb{N}^M \mid \sum_{i=0}^M n_i = N, \sum_{i=0}^M n_i\epsilon_i = E\}.$$

Se dice que cada uno de los elementos del espacio muestral es una distribución del sistema.

En una distribución dada, se tienen n_i partículas en el nivel de energía ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, M$. Cada nivel de energía está conformado por subniveles que pueden ser ocupados por las partículas que están en ese nivel de energía. El número de estos subniveles (para un nivel de energía ϵ_i) se conoce como la degeneración del nivel de energía y se denota con el símbolo g_i .

La pregunta por contestar, una vez que se han definido los supuestos del modelo, es: ¿De cuántas maneras se puede tener una distribución particular?

Para realizar este conteo se deben cumplir dos etapas:

- La primera consiste en la asignación de n_i partículas al nivel ϵ_i , para toda $i = 0, 1, 2, \dots, M$.
- La segunda consiste en repartir las n_i partículas, ya asignadas al nivel ϵ_i , en los g_i subniveles de energía.

Las formas de tener n_0 partículas en el nivel de energía ϵ_0 son $\binom{N}{n_0}$; las formas de tener n_1 partículas (de las $N - n_0$ que quedan) para el nivel de energía ϵ_1 son $\binom{N-n_0}{n_1}$, etc. Así, por la regla del producto, se tiene que

las maneras de repartir las N partículas en los M niveles de energía son

$$\binom{N}{n_0} \binom{N-n_0}{n_1} \dots \binom{N-n_0-\dots-n_{M-1}}{n_M} = \frac{N!}{n_0!n_1!n_2!\dots n_M!}$$

Para efectuar la segunda etapa del conteo, se pueden considerar dos posibilidades:

- Dos partículas diferentes no pueden estar en el mismo subnivel dentro de un nivel de energía.
- Dos o más partículas diferentes pueden estar en el mismo subnivel dentro de un nivel de energía.

Cada uno de estos casos da lugar a las estadísticas de Fermi-Dirac y de Maxwell-Boltzmann, respectivamente. Estas dos estadísticas se describen a continuación.

Se conoce como estadística a una función de datos muestrales.

5.1 Estadística de Fermi-Dirac. La estadística de Fermi-Dirac contempla aquellos casos en que se cumple el principio de exclusión de Pauli, esto es, ninguna partícula puede tener el mismo subnivel de energía dentro del nivel de energía ϵ_i ($i = 0, 1, \dots, M$). Las n_i partículas ocupan subniveles diferentes, por lo que un subnivel ocupado por una partícula ya no puede ser ocupado por otra. El número de maneras en que los subniveles pueden ser asociados a las partículas es igual a las ordenaciones sin repetición de g_i en n_i ,

$$P_{n_i}^{g_i} = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

Finalmente, se aplica la regla del producto a la primera y segunda etapa de conteo, y se tiene que el total de formas en que se puede dar una particular distribución $n_0, n_1, n_2, \dots, n_M$, es igual a

$$= \frac{N!}{n_0!n_1!n_2!\dots n_M!} \frac{g_0!}{(g_0 - n_0)!} \frac{g_1!}{(g_1 - n_1)!} \dots \frac{g_M!}{(g_M - n_M)!} =$$

$$N! \prod_{i=0}^M \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

Como no es importante saber qué partícula está en cada subnivel de energía (no importa el orden), se divide este término entre el total de permutaciones y entonces resulta la estadística de Fermi-Dirac

$$\prod_{i=0}^M \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (1.5)$$

Considerando la existencia de la regularidad frecuentista, es razonable pensar que las configuraciones más probables serán las observadas con mayor frecuencia. Por lo tanto, es conveniente conocer la distribución más probable porque será la más frecuente del sistema. Para determinar la distribución más frecuente basta maximizar la función

$$t(n_0, n_1, \dots, n_M) = \prod_{i=0}^M \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!},$$

sujeta a $\sum_{i=0}^M n_i = N$ y a $\sum_{i=0}^M n_i \epsilon_i = E$, donde N y E son constantes. Maximizar $t(n_0, n_1, \dots, n_M)$ equivale a maximizar $\ln(t(n_0, n_1, \dots, n_M))$; así, utilizando la técnica de multiplicadores indeterminados de Lagrange y la aproximación de Stirling, la distribución más probable en la estadística de Fermi-Dirac está dada por

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + 1}.$$

Las constantes α y β son aquellas con que se satisfacen las restricciones del sistema.

La aproximación de Stirling para N "grande" es

$$\ln(N!) \cong N \ln(N) - N.$$

5.2 Estadística de Maxwell-Boltzmann. La estadística de Maxwell-Boltzmann contempla aquellos casos en que no se cumple el principio de exclusión de Pauli y se permite que más de una partícula esté en el mismo subnivel, dentro de un nivel de energía.

Entonces, la primera partícula puede tener cualquiera de los subniveles de energía, la segunda partícula también, etc. Así, por la regla del producto, se sigue que el total de maneras en que las partículas pueden ocupar los diferentes subniveles es igual a

$$O_{n_i}^{g_i} = g_i^{n_i}.$$

Aplicando la regla del producto a la primera y segunda etapa del conteo, se tiene que el número de formas en que puede ocurrir la distribución dada por $n_0, n_1, \dots, n_M$, sin considerar el orden, es

$$N! \prod_{i=0}^M \frac{g_i^{n_i}}{(n_i)!}.$$

Como no es importante saber qué partículas están en cada subnivel de energía (no importa el orden), se divide este producto entre el total de permutaciones y entonces resulta la estadística de Maxwell-Boltzmann

$$\prod_{i=0}^M \frac{g_i^{n_i}}{(n_i)!}. \quad (1.6)$$

Para obtener la distribución más probable basta maximizar la función

$$t(n_0, n_1, \dots, n_M) = \prod_{i=0}^M \frac{g_i^{n_i}}{(n_i)!},$$

sujeta a $\sum_{i=0}^M n_i = N$ y a $\sum_{i=0}^M n_i \epsilon_i = E$, donde N y E son constantes.

Maximizar $t(n_0, n_1, \dots, n_M)$ equivale a maximizar $\ln(t(n_0, n_1, \dots, n_M))$; así, utilizando la técnica de multiplicadores indeterminados de Lagrange y la aproximación de Stirling, la distribución más probable en la estadística de Maxwell está dada por

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i}}.$$

Las constantes α y β son aquellas con que se satisfacen las restricciones del sistema. Las estadísticas de Fermi-Dirac y de Maxwell-Boltzmann pueden modelarse como si las partículas fueran bolas que se lanzan a cajas grandes con cajas pequeñas en su interior que representan a los niveles y subniveles de energía.

En general, cualquier experimento puede modelarse con bolas (extraer bolas de una caja, lanzar bolas a varias cajas, etc.); a ello obedece la recurrencia de este tipo de ejemplos.

EJEMPLO 1.27. Un oscilador armónico con frecuencia ν puede tomar los niveles de energía

$$\epsilon = \frac{1}{2}h\nu, \frac{3}{2}h\nu, \frac{5}{2}h\nu, \dots, (n + \frac{1}{2})h\nu, \dots,$$

donde h es la constante de Planck y n es el número cuántico del oscilador armónico.

Un sistema de N osciladores independientes tiene una energía total dada por la suma de las energías de sus componentes; esto es, si el oscilador i tiene el número cuántico n_i , su energía es $E_i = (n_i + \frac{1}{2})h\nu$, ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) y la energía total del sistema es

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N \left(n_i + \frac{1}{2}\right)h\nu \\ &= \sum_{i=1}^N n_i h\nu + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}h\nu = Mh\nu + \frac{1}{2}Nh\nu \end{aligned}$$

donde $M = \sum_{i=1}^N n_i$. Encuentre W_M , el número de posibles maneras de tener los $n_1, n_2, \dots, n_M$ números enteros no negativos que cumplan la relación $M = \sum_{i=1}^N n_i$ del sistema de osciladores con la energía total dada por un valor específico de M .

Se conoce como peso termodinámico, W_M , el número de posibles series de números enteros $n_1, n_2, \dots, n_M \geq 0$ que cumplen la ecuación $M = \sum_{i=1}^N n_i$.

Solución

El problema equivale a tener M bolas repartidas en N cajas etiquetadas y repartir las M bolas en las N cajas es equivalente a permutar M bolas blancas y $N - 1$ bolas negras; las bolas blancas representan a las bolas que están en las cajas y las bolas negras representan a la separación entre una y otra caja, como se ve en la figura 1.25.

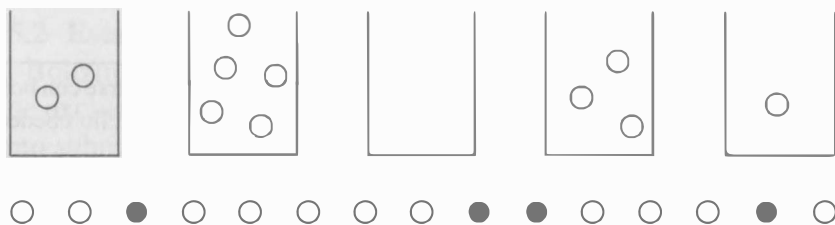


FIGURA 1.25 Dos representaciones de una manera de tener $M = 11$ partículas repartidas en $N = 5$ niveles de energía: $n_0 = 2, n_1 = 5, n_3 = 0, n_4 = 3, n_5 = 1$.

El número total de formas distinguibles de permutar las bolas negras y blancas, coincide con el número de subconjuntos de M elementos del total de $M + N - 1$ lugares para colocar ahí las bolas blancas; este número se llama peso termodinámico del sistema:

$$W_M = \binom{M + N - 1}{M} = \frac{(N + M - 1)!}{(N - 1)!M!}.$$

Esta expresión se conoce como **estadística de Bose-Einstein**.

EJEMPLO 1.28. Suponga que se tiene un sistema de N partículas independientes. Si cada partícula sólo puede tener uno de los dos niveles de energía, $-\varepsilon_0$ y ε_0 , entonces la energía total del sistema es la suma de las energías de cada una de las partículas que lo componen. Si hay n_1 partículas con el nivel de energía $-\varepsilon_0$ y n_2 partículas con el nivel de energía ε_0 ($N = n_1 + n_2$), la energía total del sistema es

$$E = -n_1\varepsilon_0 + n_2\varepsilon_0 = (n_2 - n_1)\varepsilon_0 = M\varepsilon_0,$$

donde $M = n_2 - n_1$. Encuentre el peso termodinámico W_M de un estado con un valor específico de M .

Solución

El peso termodinámico W_M del sistema con un valor específico de M , es igual al número de posibles maneras de tener n_1 partículas del total de N con el nivel de energía $-\varepsilon_0$ y el resto con el nivel de energía ε_0 ; esto es, coincide con el número de subconjuntos de n_1 elementos de un conjunto de N elementos, o sea, las combinaciones de N en n_1 . Entonces el peso termodinámico es igual a

$$W_M = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!n_2} = \frac{N!}{(\frac{1}{2}(N - M))!(\frac{1}{2}(N + M))!}$$

Ejercicios

EJERCICIO 1.35. Modele los siguientes experimentos usando elección de bolas.

- Lanzar una moneda al aire.
- Elegir una muestra de tres personas de un grupo de 20.
- Lanzar un dado no cargado.
- Elegir un artículo de un lote con artículos buenos y defectuosos.

EJERCICIO 1.36. Considere un sistema de 4 partículas que cumple la estadística de Maxwell-Boltzmann. Suponga que los niveles de energía son

$$\epsilon_0 = 0, \epsilon_1 = \epsilon, \epsilon_2 = 2\epsilon, \dots, \epsilon_n = n\epsilon.$$

Si los niveles de energía son no degenerados ($g_i = 1$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$) y el sistema de partículas tiene la energía total igual a $E = 7\epsilon$, encuentre:

- (a) Las posibles distribuciones.
- (b) Las diferentes maneras de colocar las partículas en cada una de las distribuciones.
- (c) El número total de maneras de colocar las partículas.

EJERCICIO 1.37. Considere un sistema de dos partículas en un nivel de energía ϵ , cuya degeneración es $g = 3$ ($N = 2, E = 2\epsilon$).

Encuentre las diferentes maneras de colocar las partículas, cuando se cumple:

- (a) La estadística de Maxwell-Boltzmann.
- (b) La estadística de Bose-Einstein (véase el ejemplo 1.5.1 de los osciladores).
- (c) La estadística de Fermi-Dirac.

EJERCICIO 1.38. Pruebe que cuando se cumple el principio de exclusión de Pauli, el total de maneras en que las N partículas pueden quedar repartidas en los diferentes niveles y subniveles de energía, cuando la energía total no es constante, es igual a las combinaciones

$$\binom{\sum_{i=0}^M g_i}{N} \quad (1.7)$$

EJERCICIO 1.39. Pruebe que cuando no se cumple el principio de exclusión de Pauli, el total de maneras en que las N partículas pueden quedar repartidas en los diferentes niveles y subniveles de energía, cuando la energía total no es constante, es igual a

$$\left(\sum_{i=0}^M g_i \right)^N \quad (1.8)$$

EJERCICIO 1.40. Sea un sistema de N osciladores con energía total E que está en equilibrio térmico. Encuentre la probabilidad de que un oscilador dado tenga un estado cuántico n .

CAPÍTULO 2

Probabilidad condicional e independencia

1. Probabilidad condicional

Al observar un fenómeno, o al realizar un experimento, es posible que se tenga alguna información que se pueda incorporar al modelo. Por ejemplo, la probabilidad de que llueva se puede determinar mejor si se observa el cielo y se ve si hay nubes. También se puede utilizar como información la época del año. Para explicar cómo afecta la información en el cálculo de las probabilidades, se desarrolla el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.1. En un grupo de 40 personas, hay 23 hombres y 17 mujeres; 12 de los hombres y 9 de las mujeres del grupo fuman.

Si se elige una persona al azar mediante un procedimiento que garantice a las 40 personas la igualdad de oportunidades de ser elegidas, entonces el espacio muestral asociado es equiprobable y se puede aplicar la definición clásica de probabilidad “casos favorables entre casos totales”.

Algunos eventos de este espacio muestral son:

- $A = \{x|x \text{ es una mujer}\}$
- $B = \{x|x \text{ es un hombre}\}$
- $C = \{x|x \text{ es un fumador}\}$
- $A \cap C = \{x|x \text{ es una mujer que fuma}\}$
- $B \cap C = \{x|x \text{ es un hombre que fuma}\}$
- $A \cap B = \{x|x \text{ es hombre y es mujer}\} = \emptyset$
- $A \cup C = \{x|x \text{ es mujer o } x \text{ fuma}\}$

Y sus probabilidades son:

$P(A)$	$=$	$17/40$	$P(A \cap C)$	$=$	$9/40$
$P(B)$	$=$	$23/40$	$P(B \cap C)$	$=$	$12/40$
$P(C)$	$=$	$21/40$	$P(A \cap B)$	$=$	0
			$P(A \cup B)$	$=$	1

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{(17 + 21 - 9)}{40} = \frac{29}{40}$$

Suponga que al realizar la selección se tienen las siguientes condiciones:

- Las cuarenta personas se encuentran dentro de un salón.
- Fuera del salón, sentada frente a un escritorio, está la persona que hará la elección.
- Detrás de una barda, sin poder ver lo que sucede, está la persona a la que se le pregunta sobre la probabilidad de que la persona elegida sea mujer.

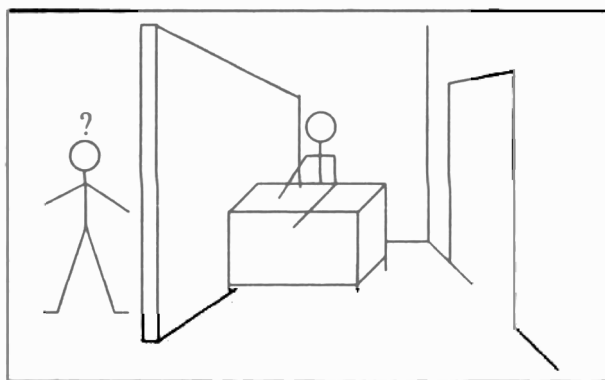


FIGURA 2.1 Condiciones del experimento.

Después de hacer la selección, se percibe el humo de un cigarro que la persona elegida está fumando.

¿Cómo utilizar esta información para contestar la pregunta?

Si se sabe que la persona elegida es fumadora, ya no es necesario considerar a las 40 personas del grupo, basta con considerar a los 21 fumadores. La pregunta original se transformaría en: ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida sea mujer, si se sabe que es una de las personas que fuman?

La respuesta a la pregunta original es

$$P(A) = \frac{\text{No. de mujeres}}{\text{No. de personas en el grupo}} = \frac{17}{40}.$$

De las 40 personas del grupo, 17 son mujeres.

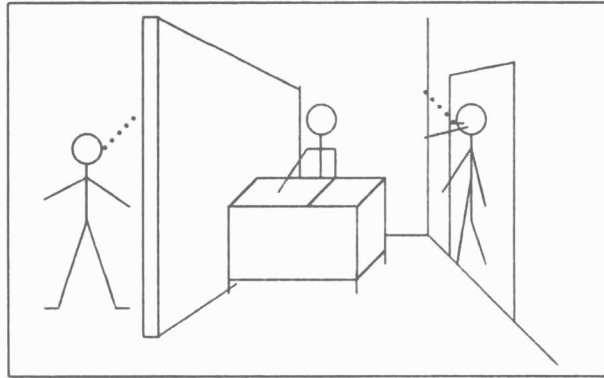


FIGURA 2.2 Información recibida.

La respuesta a la pregunta utilizando la información obtenida es

$$\begin{aligned}
 P(x \in A, \text{ si sé que } x \in C) &= \frac{\text{No. de mujeres que fuman}}{\text{No. de fumadores}} \\
 &= \frac{\#A \cap C}{\#C} = \frac{9}{21}.
 \end{aligned}$$

De los 21 fumadores del grupo, 9 son mujeres.

Como se ve, la información obtenida cambia el **espacio muestral**. En este ejemplo el espacio muestral está formado por las cuarenta personas; cuando se sabe que la persona fuma, el espacio muestral cambia a los 21 fumadores.

Notación: La probabilidad condicional se escribe usando una raya vertical entre los dos eventos que intervienen:

$$P(A \mid C) = P(x \in A, \text{ si se sabe que } x \in C),$$

y se lee

probabilidad de A dado C.

En este sentido, la probabilidad condicionada al evento C podría escribirse como $P_C(\cdot)$, mientras que la probabilidad no condicional como $P_\Omega(\cdot)$, indicando cuál es el espacio muestral. Así, queda definido un nuevo espacio de probabilidades:

$$(C, \mathcal{A}_C, P_C(\cdot)),$$

donde

- $\mathcal{A}_C = \{A \cap C \mid A \in \mathcal{A}\}$ y
- $P_C(\cdot) = P(\cdot|C)$.

Ahora observe que

$$P(A|C) = \frac{\#A \cap C}{\#C} = \frac{\frac{\#A \cap C}{\#\Omega}}{\frac{\#C}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}.$$

Esta fórmula es la base de la definición siguiente.

DEFINICIÓN 2.1. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$ y los eventos A y $B \in \mathcal{A}$, se llama **probabilidad condicional** del evento A , dado el evento B , a la relación

$$P(A|B) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{si } P(B) \neq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Directamente de la definición se desprende que si $P(B) \neq 0$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \quad (2.10)$$

y si $P(A) \neq 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Ya que la probabilidad condicional es una medida de probabilidad en un espacio muestral bien definido, entonces cumple todas las propiedades de la probabilidad ya estudiadas. Estas propiedades se enuncian en seguida, sin demostración.

1. $P(A|B) \geq 0$ para todo A y $B \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega|B) = 1$ y $P(B|B) = 1$, si $P(B) \neq 0$.
3. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces para cualquier evento $B \in \mathcal{A}$, $P(B) \neq 0$, se cumple que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i|B).$$

4. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$ para toda $A \in \mathcal{A}$.
5. $P(\emptyset|B) = 0$.

6. Si $\{C_i; i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ constituye una partición de Ω , entonces, para cualquier par de eventos A y B con $P(B) \neq 0$, se tiene que

$$P(A|B) = \sum_{i=1}^n P(A \cap C_i|B).$$

TEOREMA 2.1. *Dados los eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, se tiene que*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1|A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)P(A_2|A_3 \cap \dots \cap A_n) \dots P(A_n). \quad (2.11)$$

Demostración

Considerando los dos eventos: A_1 y $(A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$, por (2.10) se tiene que

$$P(A_1 \cap (A_2 \cap \dots \cap A_n)) = P(A_1|A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)P(A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n).$$

Ahora se puede hacer lo mismo con $P(A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$:

$$P(A_2 \cap (A_3 \cap \dots \cap A_n)) = P(A_2|A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n)P(A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n).$$

Este proceso se puede seguir hasta llegar a (2.11).

EJEMPLO 2.2. Se tienen dos urnas. La urna 1 contiene n_1 bolas blancas y m_1 bolas negras. La urna 2 contiene n_2 bolas blancas y m_2 bolas negras. Se escoge una bola al azar de la urna 1 y se coloca en la urna 2. Luego se elige una bola de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

Solución

Este experimento se realiza en dos etapas, por eso el espacio muestral está formado por pares ordenados, en los cuales la primera coordenada indica el color de la bola en la primera extracción, y la segunda coordenada, el color de la bola en la segunda extracción:

$$\Omega = \{(n, n), (n, b), (b, n), (b, b)\}.$$

En este espacio muestral se pueden definir los siguientes eventos:

- E_1 : la primera bola es blanca; $E_1 = \{(b, n), (b, b)\}$.
- E_2 : la segunda bola es blanca; $E_2 = \{(n, b), (b, b)\}$.

El resultado de la segunda elección depende del resultado de la primera elección; entonces, para conocer $P(E_2)$ se debe utilizar la probabilidad condicionada al resultado de la primera extracción. Dado que E_1 y E_1^c forman una partición de Ω , entonces se puede aplicar el teorema de la probabilidad total. Se tiene que

$$P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap E_1^c),$$

y por la definición de probabilidad condicional se llega a

$$P(E_2) = P(E_2 | E_1)P(E_1) + P(E_2 | E_1^c)P(E_1^c). \quad (2.12)$$

Para encontrar el valor de esta expresión, se deben establecer las probabilidades involucradas. En la urna 1 hay $n_1 + m_1$ bolas, y todas tienen igual probabilidad de ser seleccionadas. Entonces, para la primera selección, se tiene que

- $P(E_1) = \frac{n_1}{n_1 + m_1}$ y
- $P(E_1^c) = \frac{m_1}{n_1 + m_1}$.

Una vez que se coloca la bola en la urna 2, se tienen dos posibilidades:

Resultados de la 1ª elección	Condición de la urna 2 después de agregarle la bola
bola blanca	hay $n_2 + m_2 + 1$ bolas en la urna, de las cuales $n_2 + 1$ son blancas
bola negra	hay $n_2 + m_2 + 1$ bolas en la urna, de las cuales n_2 son blancas

Las probabilidades condicionales en cada caso son:

- $P(E_2 | E_1) = \frac{n_2 + 1}{n_2 + m_2 + 1}$.
- $P(E_2 | E_1^c) = \frac{n_2}{n_2 + m_2 + 1}$.

Al sustituir estos valores en (2.12), se tiene que

$$P(E_2) = \left(\frac{n_2 + 1}{n_2 + m_2 + 1} \right) \left(\frac{n_1}{n_1 + m_1} \right) + \left(\frac{n_2}{n_2 + m_2 + 1} \right) \left(\frac{m_1}{n_1 + m_1} \right).$$

EJEMPLO 2.3. Pruébese que para dos eventos A y B cuya probabilidad es diferente de cero, si $P(A|B) > P(A)$, entonces $P(B|A) > P(B)$.

Solución

Por definición:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

pero $P(A|B) > P(A)$, lo que implica que $\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} > P(A)$, de donde se sigue que

$$P(B|A) > P(B).$$

Ejercicios

EJERCICIO 2.1. Se lanzan dos dados; (i) encuentre la probabilidad de que la suma sea 10 si en el primer dado resultó un 5; (ii) encuentre la probabilidad de que la suma sea menor que 5 si en el primer dado cayó 2.

EJERCICIO 2.2. Tres objetos indistinguibles se colocan al azar en tres celdas. Encuentre la probabilidad condicional de que los tres objetos estén en la misma celda, dado que al menos dos de ellos están en la misma celda.

EJERCICIO 2.3. En el verano los alumnos toman dos cursos: química e historia. Los reportes registran que el 4% de los estudiantes inscritos reprueba química, el 3 por ciento reprueba historia y el 1% reprueba las dos materias.

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes pasa química y reprueba historia?
2. Entre los que reprueban química, ¿qué porcentaje reprueba historia?
3. Entre los que reprueban historia, ¿qué porcentaje reprueba química?

EJERCICIO 2.4. Dados los eventos A y B tales que $P(B) \neq 0$, muestre que si

$$P(A|B) > P(A), \quad \text{entonces} \quad P(A|B^c) < P(A).$$

¿Le parece que es intuitivamente cierto?

EJERCICIO 2.5. Pruebe las siguientes propiedades de la probabilidad condicional:

1. $P(A|A) = 1$, para $P(A) \neq 0$.
2. $P(\emptyset|A) = 0$, para $P(A) \neq 0$.
3. $P(A|B^c) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$.
4. Si $P(B) = 1$, entonces $P(A|B) = P(A)$.
5. Si $P(B) > 0$ y A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A|B) = 0$.

2. Teorema de Bayes: inferencia de causas

Una de las aplicaciones más útiles de la probabilidad condicional se da en el teorema de Bayes. Éste se aplica para calcular la probabilidad de ocurrencia de un resultado de un experimento anterior (causa) cuando se conoce el resultado de un experimento posterior (efecto). El teorema se enuncia así:

TEOREMA 2.2 (Bayes). Sean $E_i, i = 1, 2, \dots, n$ eventos que forman una partición de Ω en el espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$; si $D \in \mathcal{A}$ con $P(D) \neq 0$, entonces

$$P(E_k|D) = \frac{P(D|E_k)P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(D|E_i)P(E_i)}.$$

Demostración

- Por la definición de probabilidad condicional,

$$P(E_k|D) = \frac{P(D \cap E_k)}{P(D)} = \frac{P(D|E_k)P(E_k)}{P(D)}.$$

- Por el teorema de probabilidad total, el denominador de esta expresión puede expresarse como

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D \cap E_i).$$

- Por la definición de probabilidad condicional, cada sumando de la expresión anterior se convierte en

$$P(D) = \sum_{i=1}^n P(D \cap E_i) = \sum_{i=1}^n P(D|E_i)P(E_i).$$

Por lo que, finalmente, al sustituir el denominador, se llega a

$$P(E_k|D) = \frac{P(D|E_k)P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(D|E_i)P(E_i)},$$

que es lo sostenido por el teorema de Bayes.

Los experimentos en los que se aplica la fórmula de Bayes tienen una etapa anterior (un antes) y una etapa posterior (un después). La etapa anterior se relaciona con los eventos de la partición $(E_1, E_2, E_3, \dots, E_n)$, la etapa posterior se relaciona con el evento D .

EJEMPLO 2.4. La producción total de una fábrica se obtiene de tres máquinas que trabajan de manera independiente. La primera máquina elabora el 20% de la producción, la segunda el 30% y la tercera el 50%. De lo producido por cada máquina resulta defectuoso el 4%, el 5% y el 3% respectivamente.

- a) Se elige un artículo al azar de la producción diaria. ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo elegido sea defectuoso?
- b) Se elige un artículo al azar, se prueba y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que este artículo haya sido elaborado por la máquina 1?

Solución

- (a) El experimento consta de dos etapas: 1) elección del artículo producido por alguna de las tres máquinas, 2) la prueba del artículo para ver si es o no es defectuoso.

La primera etapa define la partición:

$$E_1 = \{x|x \text{ lo manufacturó la máquina 1}\},$$

$$E_2 = \{x|x \text{ lo manufacturó la máquina 2}\},$$

$$E_3 = \{x|x \text{ lo manufacturó la máquina 3}\}.$$

La segunda etapa define el evento D .

$$D = \{x|x \text{ es defectuoso}\}.$$

Los datos del problema son

$$P(E_1) = 0.20; \quad P(D|E_1) = 0.04,$$

$$P(E_2) = 0.30; \quad P(D|E_2) = 0.05,$$

$$P(E_3) = 0.50; \quad P(D|E_3) = 0.03.$$

Por el teorema de la probabilidad total se llega a que:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap E_1) + P(D \cap E_2) + P(D \cap E_3) \\ &= P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) + P(D|E_3)P(E_3) \\ &= (0.04)(0.20) + (0.05)(0.30) + (0.03)(0.50) = 0.038. \end{aligned}$$

- (b) La probabilidad de que el artículo sea de la máquina 1, dado que resultó ser defectuoso, se encuentra con la fórmula de Bayes:

$$\begin{aligned}P(E_1|D) &= \frac{P(D|E_1)P(E_1)}{P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) + P(D|E_3)P(E_3)} \\&= \frac{0.008}{0.038} = \frac{4}{19}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.5. En una urna hay 5 bolas rojas y 7 bolas verdes. Se revuelven y se extraen dos bolas sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja si la segunda es verde?

Solución

El espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{(r, v), (r, r), (v, r), (v, v)\}.$$

La primera coordenada corresponde al color de la bola en la primera extracción, y la segunda coordenada corresponde al color de la bola en la segunda extracción.

El color de la bola en la primera extracción define la partición:

- E_1 : la primera bola es roja; $E_1 = \{(r, r), (r, v)\}$.
- E_2 : la primera bola es verde; $E_2 = \{(v, r), (v, v)\}$.

El color de la bola en la segunda extracción define el evento D :

- D : la segunda bola es verde; $D = \{(r, v), (v, v)\}$, y se quiere conocer la probabilidad condicional $P(E_1|D)$.

Los datos del problema son:

- $P(E_1) = \frac{5}{12}$, $P(E_2) = \frac{7}{12}$ y
- $P(D|E_1) = \frac{1}{12}$, $P(D|E_2) = \frac{2}{12}$.

Para encontrar $P(E_1|D)$, se utiliza la fórmula de Bayes:

$$P(E_1|D) = \frac{P(D|E_1)P(E_1)}{P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2)} = \frac{5}{11}.$$

EJEMPLO 2.6. Una caja contiene 5 focos buenos y 7 focos defectuosos, y se sacan dos focos a la vez. Una vez fuera, se toma uno de los dos focos, se prueba y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro foco también sea bueno?

Solución

La primera etapa del experimento es seleccionar los dos focos de la caja. La segunda etapa consiste en elegir un foco de los dos que antes se seleccionaron.

La primera etapa define la partición:

- E_1 : los dos focos son buenos,
- E_2 : uno de los dos focos es bueno y el otro defectuoso,
- E_3 : los dos focos son defectuosos.

La segunda etapa define al evento D :

- D : el foco seleccionado es bueno.

Se sabe que D ocurrió porque el foco seleccionado en el segundo experimento resultó ser bueno; entonces lo que se pide es encontrar $P(E_1|D)$.

Para aplicar la fórmula de Bayes se requiere conocer las probabilidades de los eventos E_1 , E_2 y E_3 .

El total de elementos del espacio muestral generado por el primer experimento es igual a las combinaciones de 12 en 2.

$$\#\Omega = \binom{12}{2} = 66.$$

Los casos favorables, para cada uno de los eventos que forman la partición, son:

- Número de formas de obtener dos focos buenos,

$$\#E_1 = \binom{5}{2} = 10,$$

los subconjuntos de 2 elementos de los 5 focos buenos.

- Número de formas de obtener un foco bueno y otro malo,

$$\#E_2 = \binom{5}{1} \binom{7}{1} = 35.$$

Un foco de los 5 buenos y un foco de los 7 defectuosos.

- Número de formas de obtener dos focos defectuosos,

$$\#E_3 = \binom{7}{2} = 21.$$

Dos focos de los 7 defectuosos.

Entonces las probabilidades de los eventos son

$$P(E_1) = \frac{10}{66}; \quad P(E_2) = \frac{35}{66}; \quad P(E_3) = \frac{21}{66}.$$

Y las probabilidades condicionales son

$$P(D|E_1) = 1, \quad P(D | E_2) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(D | E_3) = 0.$$

Finalmente, se tiene que

$$P(E_1|D) = \frac{P(D|E_1)P(E_1)}{P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) + P(D|E_3)P(E_3)}$$
$$P(E_1|D) = \frac{\frac{10}{66}(1)}{\frac{10}{66}(1) + \frac{35}{66}(\frac{1}{2}) + \frac{21}{66}(0)} = \frac{4}{11}.$$

EJEMPLO 2.7. En un lote de cinco artículos se elige uno al azar. El artículo elegido se prueba y resulta ser defectuoso. Si el lote puede tener de 1 a 5 artículos defectuosos con igual probabilidad, ¿cuál es el número de artículos defectuosos más probable, dada la información de que se sacó un artículo defectuoso?

Solución

La primera etapa del experimento se relaciona con la condición de los artículos del lote (cuántos artículos defectuosos hay en el lote); la segunda etapa se relaciona con la prueba del artículo para ver si es bueno o defectuoso.

La primera etapa está relacionada con la partición:

- E_i : en el lote hay i artículos defectuosos; $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

La segunda etapa define el evento D :

- D : el artículo elegido del lote es defectuoso.

Por hipótesis del problema, se sabe que

$$P(E_i) = 1/5; \text{ además } P(D|E_i) = i/5, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Por la fórmula de Bayes, se tiene que

$$P(E_i|D) = \frac{P(D|E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^5 P(D|E_j)P(E_j)},$$

lo cual implica que

$$P(E_i|D) = \frac{\left(\frac{i}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{25}(1 + 2 + 3 + 4 + 5)} = \frac{i}{15}.$$

Se puede ver que la máxima probabilidad se tiene cuando todos los focos del lote son defectuosos.

Ejercicios

EJERCICIO 2.6. Tres urnas contienen bolas de colores, de acuerdo con la siguiente tabla:

Urna	rojo	blanco	azul
1	3	4	1
2	1	2	3
3	4	3	2

Una urna se elige al azar y de ella se extrae una bola también al azar. Resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna elegida sea la 2?

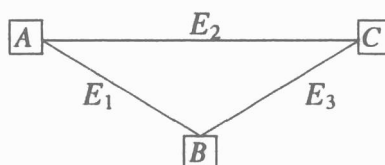
EJERCICIO 2.7. Dos urnas contienen bolas de colores como sigue: la urna uno contiene 5 verdes y 7 rojas; la urna dos contiene 4 verdes y 2 rojas.

Encuentre la probabilidad de sacar una bola verde si:

1. Se escoge una urna al azar y luego se saca una bola de ella.
2. Se ponen las bolas de las dos urnas en una tercera y luego se escoge la bola.

EJERCICIO 2.8. Un arquero tiene una probabilidad p de dar en el blanco con cada flecha. Sabiendo que de 6 flechas le ha atinado tres veces al blanco, encuentre la probabilidad de que su primer tiro haya dado en el blanco.

EJERCICIO 2.9. Se tiene un sistema de carreteras entre las ciudades A , B y C como se muestra en el dibujo siguiente:



Durante los meses de invierno, las carreteras pueden no estar abiertas al tráfico por las condiciones extremas del tiempo. Sean E_1 , E_2 y E_3 los eventos en que las carreteras AB , AC y CB están abiertas, respectivamente.

Supóngase que para un día cualquiera, se tienen las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= 2/5, & P(E_3|E_2) &= 4/5, \\ P(E_2) &= 3/4, & P(E_1|E_2 \cap E_3) &= 1/2, \\ P(E_3) &= 2/3. \end{aligned}$$

1. ¿Cuál es la probabilidad de que un viajero pueda hacer el viaje de A hasta B si tiene que pasar por la ciudad C ?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda llegar a la ciudad B si sale de A ?
3. ¿En qué ruta se tiene la mayor probabilidad de llegar a B ?

EJERCICIO 2.10. Hay dos lotes de productos homogéneos. El primer lote consta de 20 productos, de los cuales 5 son defectuosos. El segundo lote consta de 28 productos, de los cuales 6 son defectuosos. Del primer lote se sacan al azar 10 productos, del segundo lote se sacan también al azar 12 productos. Los 22 productos se mezclan entre sí, de modo que se constituye un lote nuevo. De este lote nuevo se saca un producto. Calcule la probabilidad de que sea defectuoso.

EJERCICIO 2.11. Un grupo de estudiantes está formado por a alumnos excelentes, b alumnos buenos y c alumnos malos. En un próximo examen un alumno excelente sólo puede obtener la calificación de “sobresaliente”, un alumno bueno puede obtener con igual probabilidad las calificaciones “notable” y “sobresaliente”, y un alumno malo puede obtener con igual probabilidad “insuficiente”, “suficiente” y “notable”. Determine la probabilidad de que un alumno escogido aleatoriamente obtenga en el examen la calificación “notable” o “sobresaliente”.

EJERCICIO 2.12. En un cesto se encuentran 10 pelotas nuevas y 15 pelotas viejas. En forma arbitraria se sacan 2 pelotas del cesto con las cuales se juega y se devuelven posteriormente. Después de cierto tiempo se sacan otras 2 pelotas. Encuentre la probabilidad de que ambas pelotas (a) sean usadas, (b) sean nuevas.

3. Eventos independientes

En algunas ocasiones puede ser que un evento A ya ocurrió, pero su ocurrencia no cambia la probabilidad de que ocurra un segundo evento

B. Si éste es el caso, entonces los dos eventos son independientes. La definición formal de independencia de eventos es la siguiente.

DEFINICIÓN 2.2. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$, se dice que los eventos A y $B \in \mathcal{A}$ son **independientes** si la ocurrencia de uno de ellos no afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro.

Esto es, A y B son independientes si y sólo si

$$P(A|B) = P(A) \text{ o bien } P(B|A) = P(B).$$

Como se puede ver, el concepto de independencia implica la no relevancia de la información adicional.

Es importante notar que dos eventos independientes no necesariamente son mutuamente excluyentes.

Si dos eventos A y B son tales que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces son **dependientes**.

TEOREMA 2.3. Si los eventos A y B son independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (2.13)$$

Demostración

Se sabe que para cualquier pareja de eventos A y B ,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B),$$

pero en el caso de que los dos eventos sean independientes, esta relación general se convierte en la relación particular

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

que es lo que afirma el teorema.

TEOREMA 2.4. Si los eventos A y B son independientes, entonces también lo son las parejas de eventos: A y B^c ; A^c y B^c ; y A^c y B .

La prueba se deja como ejercicio al lector.

DEFINICIÓN 2.3. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$, se dice que los eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son eventos mutuamente independientes si y sólo si

- a) $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$
- b) $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \forall i \neq j \neq k \neq i, i, j, k = 1, 2, \dots, n.$
- c) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$

Los siguientes son ejemplos de experimentos independientes.

- **El sexo de los sucesivos hijos de una familia.** Conocer el sexo de los hijos de una familia no altera las probabilidades para el sexo del siguiente hijo.
- **Los volados sucesivos.** El resultado de un volado no influye en los resultados de los otros volados.

Se puede creer que algunos eventos independientes no lo son, por ejemplo: si se han lanzado 100 volados y en todos ha salido águila, se puede pensar que el próximo volado debe caer sol.

Existen refranes entre los apostadores que pretenden reforzar estas falsas ideas: “Afortunado en el juego, desafortunado en amores”.

Posiblemente un apostador sí sea desafortunado en amores, pero no porque gane o pierda, sino porque el juego le impide mantener una relación afectiva.

Considere los siguientes razonamientos:

- *Si una de cada diez operaciones de un padecimiento es exitosa y las últimas 9 operaciones realizadas han fracasado, entonces la siguiente operación tiene que ser exitosa.*

Este razonamiento es incorrecto porque la reacción de cada paciente no depende de la reacción de los otros pacientes.

- *La probabilidad de que haya una bomba en un avión es igual a 0.01, y la probabilidad de que haya dos bombas es igual a 0.0001. Un pasajero mete entre su equipaje una bomba, para que se presente la probabilidad menor (0.0001): que haya dos bombas en lugar de una.*

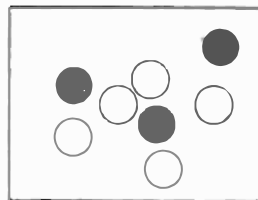
El que un pasajero lleve una bomba no modifica la probabilidad de que haya otra bomba en el avión; la probabilidad sigue siendo de 0.01 porque los eventos son independientes.

Ahora se va a analizar el caso de selección de una muestra con y sin reemplazo.

Se extraen sucesivamente bolas de una urna:

- Se dice que las extracciones son **sin reemplazo** si cada bola extraída de la urna no se devuelve a ésta antes de efectuar la siguiente extracción.
- Se dice que las extracciones son **con reemplazo** si cada bola extraída se devuelve a la urna antes de hacer la siguiente extracción.

Considere que de una urna con 3 bolas negras y 5 bolas blancas se extraen bolas, una tras otra.



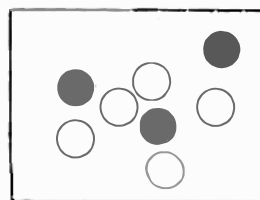
Sean los eventos E_i : la i -ésima bola extraída es blanca, $i = 1, 2, 3, \dots$

Si las bolas se extraen **sin reemplazo**, vamos a encontrar la probabilidad de tener una bola blanca en cada extracción.

Primera extracción

E_1 : la primera bola extraída es blanca

$$P(E_1) = \frac{5}{8}$$

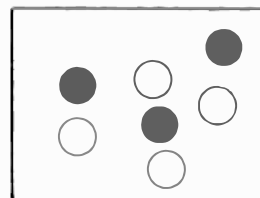


5 bolas blancas
3 bolas negras

Segunda extracción, cuando ya ha salido una bola blanca

 bolas fuera de la urna

$$P(E_2|E_1) = \frac{4}{7}$$

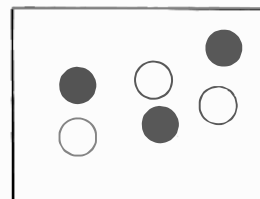


4 bolas blancas
3 bolas negras

Tercera extracción, cuando ya han salido dos bolas blancas

 bolas fuera de la urna

$$P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{3}{6}$$



3 bolas blancas
3 bolas negras

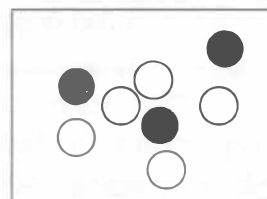
Cada nueva extracción modifica las condiciones de la urna. El espacio muestral cambia con las distintas extracciones.

En este caso el evento E_2 depende del evento E_1 , el evento E_3 depende de los eventos E_1 y E_2 , etcétera.

Ahora se analiza el mismo experimento, pero con un muestreo **con reemplazo**.

Primera extracción

$$P(E_1) = \frac{5}{8}$$



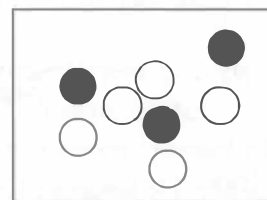
5 bolas blancas
3 bolas negras

Segunda extracción

La bola extraída se devuelve a la urna

$$P(E_2|E_1) = \frac{5}{8}$$

No hay bolas fuera de la urna



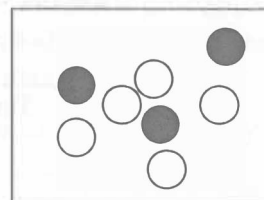
5 bolas blancas
3 bolas negras

Tercera extracción,

Las dos bolas extraídas se devuelven a la urna

$$P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{5}{8}$$

No hay bolas fuera de la urna



5 bolas blancas
3 bolas negras

En este caso los resultados de las extracciones anteriores no afectan la probabilidad de los resultados en las extracciones posteriores; esto es, los eventos E_1 , E_2 , E_3 , etc. son independientes.

- En particular, si el muestreo es sin reemplazo, se tiene que

$$P(E_2|E_1) \neq P(E_2).$$

Cada extracción modifica las condiciones de la urna y, por lo tanto, las probabilidades de las subsecuentes extracciones.

- Y si el muestreo es con reemplazo, se tiene que

$$P(E_2|E_1) = P(E_2).$$

Cada extracción no modifica las condiciones en la urna y las diferentes extracciones son independientes de las anteriores.

EJEMPLO 2.8. Los números binarios se forman con los dígitos 0 y 1. Suponga que un número binario está formado por n cifras y que la probabilidad de que alguno de los dígitos, en cualquiera de las posiciones, sea incorrecto es igual a p ; suponga, además, que los errores en los distintos dígitos son independientes, ¿cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto?

Solución

Sean los eventos

E_i : la i -ésima cifra es correcta; $i = 1, 2, \dots, n$.

Entonces, un número de n cifras es incorrecto si tiene al menos una cifra incorrecta, esto es, si el número de cifras incorrectas va de 1 a n ; al menos una E_i^c ocurre.

Un número de n cifras es correcto si no tiene cifras incorrectas, esto es, si todas las cifras son correctas; es decir, ningún evento E_i^c ocurre.

Considere el evento A :

A : el número es correcto; $A = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$,

entonces, el evento A^c es

A^c : el número es incorrecto, $A^c = E_1^c \cup E_2^c \cup \dots \cup E_n^c$.

Dado que los eventos E_i son independientes, es más fácil calcular la probabilidad de A que la de A^c .

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(\cap_{i=1}^n E_i) \\ &= \prod_{i=1}^n P(E_i) = (1 - p)^n \end{aligned}$$

De este resultado se tiene que

$$P(\text{el número es incorrecto}) = P(A^c) = 1 - (1 - p)^n.$$

EJEMPLO 2.9. Dos personas lanzan tres veces una moneda no cargada; ¿cuál es la probabilidad de que ambos tengan el mismo número de águilas?

Solución

El espacio muestral generado al lanzar tres veces una moneda está dado por

$$\Omega = \{(a, a, a), (a, a, s), (a, s, a), (s, a, a), (a, s, s), (s, a, s), (s, s, a), (s, s, s)\}.$$

En el experimento se pueden tener 0, 1, 2 o 3 águilas; además, Ω es equiprobable porque la moneda no está cargada.

Ahora, considere los eventos

A_i : la primera persona tuvo i águilas y

B_i : la segunda persona tuvo i águilas, donde $i = 0, 1, 2, 3$,

A_i y B_j son independientes $\forall i, j = 0, 1, 2, 3$.

El evento: “las dos personas tienen el mismo número de águilas” se escribe como la unión disjunta

$$(A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_3).$$

La probabilidad se encuentra aplicando el tercer axioma de probabilidad y considerando el hecho de que A_i y B_i son independientes ($i = 0, 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} P((A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_3)) \\ = P(A_0)P(B_0) + P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + P(A_3)P(B_3) \\ = \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.10. Los artículos de una fábrica pueden tener un tipo de defecto con una probabilidad de 0.08, y un segundo tipo de defecto con una probabilidad de 0.06. Los dos tipos de defectos se presentan independientemente uno del otro. Al elegir un artículo al azar, calcule la probabilidad de que ocurran los eventos siguientes:

- E : El artículo no tiene ambas clases de defectos.
- F : El artículo es defectuoso.
- Si el artículo tiene el defecto tipo 1, ¿qué probabilidad hay de que tenga los dos defectos?

Solución

Sean los eventos:

- A : el artículo tiene el primer tipo de defecto.
- B : el artículo tiene el segundo tipo de defecto.

(a) Se tiene que el evento: el artículo tiene ambas clases de defectos, es igual a $E^c = A \cap B$.

Se sabe que A y B son independientes; entonces

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.08)(0.06) = 0.0048,$$

y la probabilidad de E es

$$P(E) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.0048 = 0.9952.$$

(b) Un artículo es defectuoso si tiene el primer tipo de defecto, si tiene el segundo tipo de defecto o si tiene ambos tipos de defectos. Este evento es $F = A \cup B$ y su probabilidad es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = (0.08) + (0.06) - 0.0048 = 0.1352.$$

(c) Se sabe que el artículo tiene el defecto tipo 1, y se quiere conocer la probabilidad de que tenga los dos tipos de defectos, esto es, la probabilidad de $A \cap B$ dado A :

$$P((A \cap B)|A) = \frac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.0048}{0.08} = 0.006.$$

EJEMPLO 2.11. En el circuito de la figura 2.3 cada relevador E_i , para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, se cierra o se abre de manera independiente de los otros relevadores, y cada relevador se cierra con una probabilidad igual a p . Encuentre la probabilidad de que la corriente pase de I a D .

Solución

Sean los eventos:

E_i : el relevador i está cerrado, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, entonces existen 3 maneras independientes de pasar de I a D :

1. $A_1 = (E_1 \cup E_2) \cap E_3$,
2. $A_2 = E_4$,
3. $A_3 = E_5 \cap E_6$.

El evento: se pasa de I a D , es igual a la unión $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Ahora se calculan las probabilidades de estos eventos:

$$P(A_1) = P((E_1 \cup E_2) \cap E_3) = P(E_1 \cup E_2)P(E_3),$$

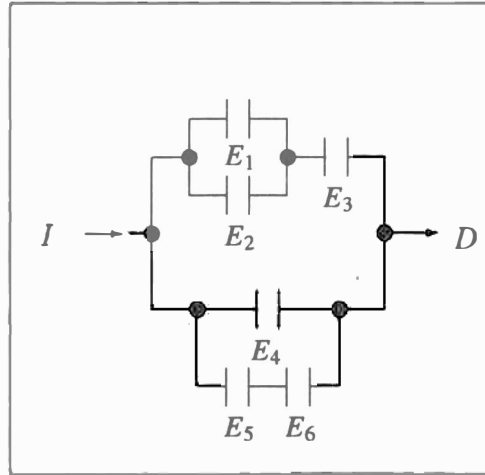


FIGURA 2.3 Circuito con 6 relevadores.

El producto es por la independencia de los eventos. Ahora se calcula

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_3) = p + p - p^2 = p(2 - p),$$

y el resultado es $P(A_1) = p^2(2 - p)$, $P(A_2) = p$ y $P(A_3) = p^2$.

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= p^2(2 - p) + p + p^2 - p^3(2 - p) - p^4(2 - p) - p^3 \\ &\quad + p^5(2 - p). \end{aligned}$$

4. Ejercicios

EJERCICIO 2.13. Durante una batalla aérea un bombardero es atacado por dos aviones caza. El bombardero abre fuego y efectúa un disparo sobre cada uno de los cazas. Puede derribar un caza con probabilidad p_1 . Si un caza no es derribado, entonces dispara sobre el bombardero y lo derriba con probabilidad igual a p_2 , independientemente de la suerte que haya podido correr el otro caza. Determine la probabilidad de los siguientes desenlaces de la lucha.

- (a) A : El bombardero es derribado.
- (b) B : Ambos cazas son derribados.

(c) C : Por lo menos un caza es derribado.

(d) D : Un solo caza es derribado.

EJERCICIO 2.14. Considere a una persona que lanza dos veces un dado. Sean los eventos

A_i : El resultado del i -ésimo lanzamiento es 1 o 2 ($i = 1, 2$).

B : El resultado de la suma es igual a 7.

C : El resultado de la suma es igual a 2.

D : El resultado en un dado es 1 y en el otro es 2.

Califique cada una de las siguientes proposiciones como falsa o verdadera.

Proposición 1: A_1 depende del segundo lanzamiento.

Proposición 2: A_1 y A_2 son eventos mutuamente excluyentes.

Proposición 3: B depende del primer lanzamiento.

Proposición 4: B y C son eventos mutuamente excluyentes.

Proposición 5: $A_1 \cap A_2$ está contenido en D .

Proposición 6: D está contenido en C .

EJERCICIO 2.15. Un grupo de 3 aviones ataca un objetivo. El objetivo está protegido por 4 piezas de artillería antiaérea. Cada batería tiene un ángulo de tiro de 60 grados; por ello, de los 360 grados sólo 240 son protegidos. Al volar por un sector protegido un avión es atacado y aniquilado con probabilidad p_1 ; en cambio, si vuela por un sector sin protección llega sin problema al objetivo, el cual es aniquilado con probabilidad p_2 . Los aviones desconocen la ubicación de las baterías. Determine la probabilidad de aniquilación del objetivo, para cada uno de los planes de ataque siguientes:

(a) 3 aviones se acercan al objetivo por una misma dirección elegida aleatoriamente.

(b) Cada uno elige su dirección de acercamiento de manera independiente de los otros 2 y en forma aleatoria.

EJERCICIO 2.16. Dos cazadores efectúan, independientemente uno del otro, 2 tiros cada uno sobre su propio blanco; la probabilidad de que el primer cazador dé en el blanco está dada por p_1 y la probabilidad de que el segundo cazador dé en el blanco es p_2 . Determine la probabilidad de que el primer cazador dé más veces en el blanco que el segundo.

EJERCICIO 2.17. Si A y B son eventos independientes y $P[A] = 1/3$ y $P[B^c] = 1/4$, encuentre $P[A \cup B]$.

EJERCICIO 2.18. Si $P[A] = P[B] = P[B | A]$, diga si A y B son eventos independientes.

EJERCICIO 2.19. Si A y B son eventos independientes y

$$P[A] = P[B] = 1/2,$$

¿a qué es igual $P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)]$?

EJERCICIO 2.20. Si $P[B] = P[A|B] = P[C|A \cap B] = 1/2$, ¿cuánto es $P[A \cap B \cap C]$?

EJERCICIO 2.21. Dado $P[A] = 0.5$ y $P[A \cup B] = 0.7$, encuentre la probabilidad de B si:

- (a) A y B son eventos independientes.
- (b) A y B son eventos disjuntos.
- (c) Para $P[B|A] = 0.5$.

CAPÍTULO 3

Variables aleatorias

*Los números no son
todo lo que existe,
pero cómo ayudan.*

1. Definición

Frecuentemente, al realizar un experimento se tiene interés en estudiar algún aspecto cuantitativo del mismo (costos de producción, inversión de una empresa, ganancias en un juego de azar, número de artículos defectuosos en una muestra, número de intentos fallidos en el lanzamiento de un cohete, tiempo de vida útil de un artículo electrónico, etc.). Estas características cuantitativas definen una función entre el espacio muestral y el conjunto de los números reales.

Las funciones de interés para la probabilidad deben cubrir dos requisitos:

- representar la característica cuantitativa de interés y
- permitir establecer una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ inducida por el espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$.

El siguiente ejemplo explica cómo establecer este tipo de funciones.

EJEMPLO 3.1. Un juego de azar consiste en tirar dardos a una ruleta giratoria. Si el dardo no pega a la ruleta, el intento se repite.

En cada realización del experimento el dardo puede caer en la zona coloreada de azul, verde o rojo. El premio se otorga de acuerdo con el color donde se clave el dardo.

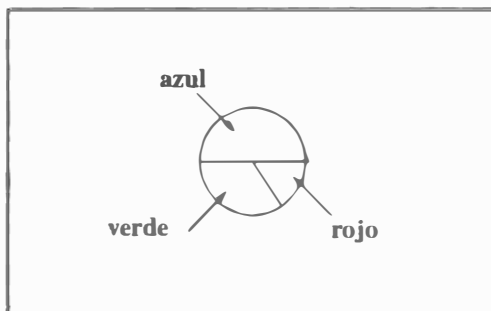
El espacio muestral del experimento es el conjunto

$$\Omega = \{\text{verde, rojo, azul}\}.$$

La probabilidad de que el dardo caiga en la zona de cada color es proporcional al área que ocupa dentro del círculo de la ruleta, esto es,

TABLA 3.1 *Asignaciones de la ganancia de acuerdo con el color.*

Si el dardo cae en	el jugador	ganancia
rojo	gana \$30	30
verde	gana \$15	15
azul	pierde \$10	-10

FIGURA 3.1 *Disposición de colores en la ruleta.*

- $P(\{\text{rojo}\}) = \frac{1}{6}$.
- $P(\{\text{verde}\}) = \frac{1}{3}$.
- $P(\{\text{azul}\}) = \frac{1}{2}$.

La ganancia del juego es una función dada por

$$G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

- $G(\text{rojo}) = 30$.
- $G(\text{verde}) = 15$.
- $G(\text{azul}) = -10$.

En cada intento, la ganancia del juego $G(\omega)$ depende del azar, esto es, la ganancia es un valor aleatorio.

Entonces es razonable preguntarse sobre la probabilidad de que la ganancia pueda ser 30, 15 o -10.

Es claro que la probabilidad de ganar 30 pesos coincide con la probabilidad de que el dardo atine en el área roja, y así para los otros valores.

Entonces la probabilidad asociada a la ganancia es:

- $P(G = 30) = P(\text{rojo}) = \frac{1}{6}$.

- $P(G = 15) = P(\text{verde}) = \frac{1}{3}$.
- $P(G = -10) = P(\text{azul}) = \frac{1}{2}$.

Como se ve, la función $G(\omega)$ induce un espacio de probabilidades en el conjunto de los números reales. La función G es un ejemplo de variable aleatoria.

DEFINICIÓN 3.1. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$, se dice que la función

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

es **medible** si y sólo si los conjuntos de la forma

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < r\} \in \mathcal{A} \quad \forall r \geq 0$$

son eventos.

DEFINICIÓN 3.2. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$, se llama **variable aleatoria** (v. a.) a una función medible cuyo dominio es Ω y cuyo codominio es $\mathbb{R}$.

Esto es, X es una variable aleatoria si

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

es medible.

Las variables aleatorias, por lo general, se denotan con las últimas letras mayúsculas del alfabeto.

EJEMPLO 3.2. Se lanzan tres volados con una moneda no cargada. El espacio muestral asociado a este experimento es

$$\Omega = \{(s, s, s), (s, s, a), (s, a, s), (a, s, s), (s, a, a), (a, s, a), (a, a, s), (a, a, a)\}.$$

Sea $X(\omega)$ la variable que indica el número de águilas al efectuarse el experimento; entonces los valores que puede tomar $X(\omega)$ son: 0, 1, 2 y 3.

Por ejemplo, $X = 1$ corresponde al evento

$$\{(s, s, a), (s, a, s), (a, s, s)\}.$$

En la tabla siguiente se presentan los elementos del espacio muestral Ω , agrupados de acuerdo con los valores que toma la variable aleatoria X ; en la última columna están los valores de la probabilidad correspondiente.

elementos de Ω	X	
(a, a, a)	3	$P(X = 3) = \frac{1}{8},$
(a, a, s)		
(a, s, a)	2	$P(X = 2) = \frac{3}{8},$
(s, a, a)		
(a, s, s)		
(s, a, s)	1	$P(X = 1) = \frac{3}{8},$
(a, s, s)		
(s, s, s)	0	$P(X = 0) = \frac{1}{8}.$

La probabilidad de que la variable X tome un valor específico k es igual a:

$$P(X = k) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}).$$

EJEMPLO 3.3. Al lanzar un dado se gana \$10 con el evento $\{1, 2\}$; en otro caso se pierden \$5.

Sea Y la variable que indica la ganancia del juego; entonces Y puede tomar dos únicos valores, $Y = -5, 10$. La probabilidad asociada a la ganancia se encuentra en la siguiente tabla:

Evento	Ganancia	Probabilidad
$\{1, 2\}$	10	$P(Y = 10) = 2/6 = 1/3,$
$\{3, 4, 5, 6\}$	-5	$P(Y = -5) = 4/6 = 2/3.$

DEFINICIÓN 3.3. Dada una variable aleatoria X , se llama **rango o recorrido de X** , R_X , al conjunto de puntos imagen de la variable

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{existe } \omega \in \Omega \text{ con } X(\omega) = x\}.$$

De esta manera, se tiene que

$$P(R_X) = P(\Omega) = 1 \quad \text{y} \quad P(R_X^c) = P(\emptyset) = 0.$$

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas.

DEFINICIÓN 3.4. Se dice que una variable aleatoria X es **discreta** si y sólo si R_X es finito, o infinito pero numerable.

Un conjunto A es numerable si existe una relación biunívoca entre A y un subconjunto de los números naturales.

DEFINICIÓN 3.5. Se dice que una variable aleatoria X es **continua** si y sólo si el conjunto R_X es un intervalo, o la unión de dos o más intervalos.

EJEMPLO 3.4. Se lanza sucesivamente una moneda no cargada hasta que aparece la primera águila. Sea X la variable que indica el número de intentos por realizar antes de detener el proceso. Describa el rango de X .

Solución

Si en el primer lanzamiento cae águila, ahí se termina el experimento; pero si cae “sol”, se continúa hasta tener la primera águila. Por lo tanto, el proceso puede continuar indefinidamente.

El espacio muestral del experimento está dado por

$$\Omega = \{(a), (s, a), (s, s, a), (s, s, s, a), \dots\}.$$

Aquí se ve que el recorrido de X coincide con el conjunto de los números enteros. El número de intentos posibles antes de tener la primera águila va de uno a infinito, esto es:

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

R_X es un conjunto infinito pero numerable, por lo que la variable aleatoria X es una v. a. discreta.

EJEMPLO 3.5. Se elige un foco al azar y se pone a funcionar. X es la variable aleatoria que indica el tiempo de vida útil del foco.

Solución

El mínimo valor que puede tomar la variable X es cero, y esto ocurre cuando el foco es defectuoso de fabricación. No puede determinarse el máximo valor de la variable X , sólo se puede afirmar que entre más tiempo pase, es menos probable que el foco siga funcionando; además, es claro que los valores que puede tomar X no son discretos. Entonces, es razonable considerar que el rango de la variable X es

$$R_X = [0, \infty);$$

por lo tanto, X es una variable aleatoria continua. El foco puede descomponerse en cualquier momento, y no necesariamente tiene que completar unidades de tiempo enteras.

Ejercicios

EJERCICIO 3.1. Considere que en un lago con “muchos” peces, se han marcado 10 de ellos y se elige una muestra de 15 peces al azar. Sea X la variable aleatoria que indica el número de peces marcados en la muestra, y (a) escriba el rango de X , (b) ¿ X es discreta o continua?

EJERCICIO 3.2. Suponga que se lanza repetidamente una moneda hasta que se obtienen 3 águilas, sea X la variable aleatoria que indica el número de intentos que se deben realizar para ello, ¿cuál es el recorrido de X ?

EJERCICIO 3.3. Se lanza un dardo hacia una ruleta giratoria de un metro de diámetro; sea X la distancia entre el punto donde cayó el dardo y el centro de la ruleta, (a) describa el rango de X , (b) ¿ X es discreta o continua?

2. Distribuciones de probabilidad

La función de distribución de probabilidades corresponde a la probabilidad acumulada de la variable aleatoria.

DEFINICIÓN 3.6. Se llama **función de distribución de probabilidades** de la variable aleatoria X a la función

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Observe que x representa a un número real y X a la variable aleatoria.

TEOREMA 3.1. *La función de distribución $F(x)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $F(x)$ es una función creciente.
2. $F(x)$ es continua por la derecha. Esto es, $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Demostración

1. Para probar que $F(x)$ es creciente, se observa que para los números $x_1 \leq x_2$ se tiene que: $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x_1\} \subset \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x_2\}$, y por el teorema (1.2.8) se sigue que

$$P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x_1\}) \leq P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x_2\}),$$

que es equivalente a: $F(x_1) \leq F(x_2)$, con lo que se concluye que $F(x)$ es creciente.

$A \subset B \text{ implica } P(A) \leq P(B).$
--

2. Para probar que $F(x)$ es continua por la derecha, observe que

$$\{x | X \leq a\} \subset \{x | X \leq a + h, h > 0\},$$

y que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{x | X \leq a + h, h > 0\} = \{x | X \leq a\},$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} P(X \leq a + h) = P(X \leq a) = F(a).$$

3. Para probar que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, observe que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x) = P(X \leq \infty) = P(R_X) = 1.$$

4. Para probar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, observe que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = P(X \leq -\infty) = P(R_X^c) = 0.$$

TEOREMA 3.2. *Para una variable aleatoria X se tiene que*

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$

Demostración

Como

$$\{X | X \leq b\} = \{X | X \leq a\} \cup \{X | a < X \leq b\},$$

se tiene que

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b),$$

y entonces

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a),$$

que es lo que se quería probar.

EJEMPLO 3.6. Sea X una variable aleatoria continua tal que su función de distribución es igual a

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule

- (a) $P(X > 2)$.
- (b) $P(0.5 < X \leq 1.5)$.
- (c) $P(\ln(2) < X \leq \ln(3))$.

Solución:

Como $F(x) = P(X \leq x)$ entonces se tiene que

- (a) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}$.
- (b) $P(0.5 < X \leq 1.5) = P(X \leq 1.5) - P(X \leq 0.5)$
 $= F(1.5) - F(0.5) = e^{-0.5} - e^{-1.5}$.
- (c) $P(\ln(2) < X \leq \ln(3)) = F(\ln(3)) - F(\ln(2))$
 $= e^{-\ln(2)} - e^{-\ln(3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

2.1 Función de densidad de variables aleatorias discretas

DEFINICIÓN 3.7. Se llama **función de densidad de probabilidades** de una variable aleatoria **discreta** X a la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

definida como $f(x) = P(X = x)$.

Observe que las funciones de distribución se escriben con una letra mayúscula, mientras que las funciones de densidad de la misma variable se escriben con la misma letra pero minúscula.

TEOREMA 3.3. Dada una variable aleatoria discreta X , su función de densidad $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

- 1. $f(x) \geq 0$,
- 2. $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Demostración

- 1. Por definición

$$f(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}),$$

y el primer axioma de la probabilidad dice que la probabilidad de cualquier evento es un número no negativo. Con esto se prueba la proposición.

2. Si X es una variable aleatoria y $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es numerable, entonces los eventos $E_i = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} = \{X = x_i\}$ forman una partición de Ω .

Así, por el segundo y tercer axioma de la probabilidad, se tiene que

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1.$$

TEOREMA 3.4. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces para toda $A \in \mathbb{R}$ se cumple

$$P(A) = \sum_{x_i \in R_X \cap A} f(x_i).$$

Demostración

Se sabe que $P(R_X^c) = 0$ y, por el teorema de la probabilidad total, se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap R_X) + P(A \cap R_X^c) = P(A \cap R_X) + 0 \\ &= \sum_{x_i \in R_X \cap A} P(X = x_i) = \sum_{x_i \in R_X \cap A} f(x_i), \end{aligned}$$

y entonces queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 3.7. Sea X la variable aleatoria que indica el número de águilas que aparecen al hacer dos lanzamientos con una moneda no cargada.

- El espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{(s, s), (s, a), (a, s), (a, a)\}.$$

- El rango o recorrido de la variable es

$$R_X = \{0, 1, 2\}.$$

- La función de densidad de la variable aleatoria X y los elementos de Ω correspondientes son

$$\begin{array}{ll} f(0) = \frac{1}{4} & (s,s), \\ f(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} & (s,a), (a,s), \\ f(2) = \frac{1}{4} & (a,a). \end{array}$$

- La función de distribución de la variable aleatoria X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$F(-1) = P(X \leq -1) = 0,$$

$$F(0.5) = P(X \leq 0.5) = 1/4,$$

$$F(1.5) = P(X \leq 1.5) = 3/4,$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 1.$$

Las respectivas gráficas de las funciones de densidad y distribución son

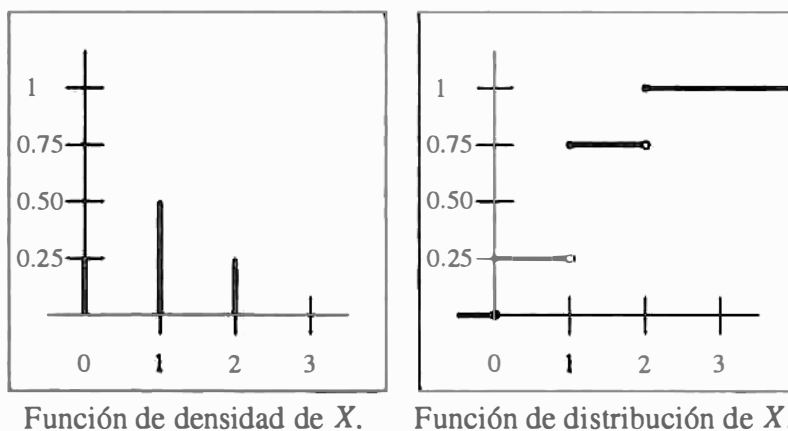


FIGURA 3.2 Funciones de densidad y distribución de X .

En todos los casos, la gráfica de la función de densidad de una variable aleatoria discreta, se representa con líneas verticales cuya altura es igual a la probabilidad del valor correspondiente; y la gráfica de su función de distribución es escalonada, con el primer escalón de altura igual a cero y el último escalón de altura igual a 1.

EJEMPLO 3.8. Se lanza sucesivamente una moneda no cargada hasta que aparece la primera águila. X es la variable aleatoria que indica el

número de intentos antes de detenerse. Encuentre las funciones de densidad y de distribución de la variable X .

Solución

El rango o recorrido de X es: $X = 1, 2, 3, \dots$

La función de densidad se encuentra considerando que si se detiene el proceso en el k -ésimo volado, es porque en los primeros $k - 1$ volados salieron soles y en el volado k cayó un águila; entonces la probabilidad de que X tome el valor k es igual a

$$P(X = k) = \underbrace{P((s, s, \dots, s, a))}_{k-1},$$

y como los volados son eventos independientes, esta probabilidad se convierte en un producto de probabilidades.

$$P(X = k) = \underbrace{P((s, s, \dots, s, a))}_{k-1} = \underbrace{P(s)P(s) \dots P(s)}_{k-1} P(a) = 1/2^k.$$

Entonces, la función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2^k}.$$

Sólo para complementar el ejemplo, se probarán las dos propiedades:

- $f(x_i) \geq 0$,
- $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

La primera propiedad se cumple trivialmente ya que $\frac{1}{2^k} > 0$ para todo número $k \geq 1$.

La segunda propiedad dice que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Note que esta suma es el caso límite de una suma del tipo

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{i=0}^n x^i$$

y

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \\ xS_n & = & x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} \\ \hline S_n - xS_n & = & 1 - x^{n+1}, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Se restan los} \\ \text{dos términos.} \end{array}$$

despejando S_n se tiene que

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

y en el caso que $|x| < 1$, cuando $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$.

Así, cuando $x = \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

La función de distribución de X es

$$F(x) = \sum_{i \leq x} \frac{1}{2^i}.$$

2.2 Función de densidad de variables aleatorias continuas. En el caso de una variable aleatoria discreta, se definió la función de densidad para los elementos de su recorrido, como

$$f_X(x) = P(X = x).$$

En el caso continuo no se puede hacer esto, pero se puede ver que

$$P(x < X \leq x + h) = F(x + h) - F(x),$$

y si la función de distribución $F(x)$ es diferenciable en x , se tiene que

$$f_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = F'(x),$$

y

$$f_X(x)h \approx P(x < X \leq x + h).$$

De aquí se desprende la definición siguiente.

DEFINICIÓN 3.8. Se llama **función de densidad de probabilidades** de una variable aleatoria **continua** X a la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

En este sentido, se tiene que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx,$$

y

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Considerando que la integral definida corresponde al área bajo la gráfica de la función de densidad, y como una línea carece de área, entonces en el caso de una variable aleatoria continua,

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

Como caso particular, se tiene que

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

TEOREMA 3.5. *Dada una variable aleatoria continua X , su función de densidad $f(x)$ cumple las propiedades:*

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Demostración

1. Como

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

y $F(x)$ es creciente, entonces $f(x)$ es no negativa.

2. Por definición:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} F(a) - F(-a) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

TEOREMA 3.6. *Para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$,*

$$P(A) = \int_A f(x)dx.$$

Demostración

Si $A \subset \mathbb{R}$, entonces A está formado por un conjunto de intervalos (abiertos o cerrados) cuyos extremos son a_i y b_i ($a_i < b_i$), para $i = 1, 2, 3, \dots$, y

un conjunto discreto de puntos $\{x_1, x_2, \dots\}$. Sin perder generalidad, se puede suponer que los intervalos son abiertos; entonces

$$A = (\cup_i (a_i, b_i)) \cup \{x_1, x_2, \dots\}$$

y

$$P(A) = \sum_i P(a_i, b_i) + \underbrace{\sum_i P(X = x_i)}_0 = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

EJEMPLO 3.9. X es una variable aleatoria continua cuya función de densidad es

$$f(x) = kx, \text{ si } 0 \leq x \leq 2.$$

1. ¿Cuál debe ser el valor de k para que $f(x)$ sea función de densidad?
2. Encuentre $P(X > 1)$.

Solución

1. El valor de k debe ser tal que se cumplan las dos propiedades de las funciones de densidad. La primera propiedad se cumple cuando $k > 0$. La segunda propiedad implica que

$$\int_0^2 f(x) dx = 1.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 kx dx = \left. \frac{kx^2}{2} \right|_0^2 = 2k = 1,$$

y al despejar se tiene que $k = 1/2$.

2. $P(X > 1) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{2} x dx = \left. \frac{x^2}{4} \right|_1^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

Ejercicios

EJERCICIO 3.4. Verifique si las siguientes son funciones de distribución.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ \frac{x}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5; \\ 1 & \text{si } x > 5. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}^{-1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(c) F(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{si } -\infty < x \leq 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

EJERCICIO 3.5. Suponga que la función de distribución de la variable aleatoria X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ \frac{\lambda}{1+x} & \text{para } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Verifique que es creciente.
- (b) Encuentre la función de densidad de X .
- (c) Calcule la probabilidad $P(1 \leq X \leq 5)$.

EJERCICIO 3.6. Suponga que una variable aleatoria discreta X tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) Determine el valor de la constante c .
- (b) Determine la función de distribución de X .
- (c) Grafique las funciones de densidad y de distribución de X .

EJERCICIO 3.7. Demuestre que las siguientes son funciones de densidad de probabilidad de una variable aleatoria.

1. $f(x) = e^x$ para $x \in (0, \infty)$, 0 en otro caso.
2. $g(x) = 2e^{-2x}$ para $x \in (0, \infty)$, 0 en otro caso.
3. $h(x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$ con $\lambda \in (0, 1)$ y $f(x)$ y $g(x)$ de los incisos anteriores.

EJERCICIO 3.8. Demuestre la certeza o falsedad de la siguiente propuesta: Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones de densidad y λ_1, λ_2 constantes no negativas tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, y entonces $h(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ es una función de densidad.

EJERCICIO 3.9. Sea X la variable aleatoria discreta con función de densidad $f(-1) = 1/8$, $f(0) = 6/8$ y $f(1) = 1/8$.

Evalúe $P(|x - 1/2| \geq 1)$.

3. Distribuciones de funciones de variables aleatorias

En ocasiones no se observa en forma directa la variable aleatoria de interés. Posiblemente se conoce la función de distribución de una variable auxiliar de la cual depende, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.10. Una máquina elabora balines de plata. El radio de los balines R , que puede controlarse calibrando la máquina, es una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $(0.9, 1.1)$ con igual probabilidad; esto es, su función de densidad está dada por

$$f_R(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0.9 \leq x \leq 1.1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Al fabricante le interesa conocer la cantidad de plata que requiere comprar, y no el radio de los balines. Por lo tanto, su variable de interés es el volumen de los balines:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

En este caso, V es una variable aleatoria que depende de R y se quiere conocer su función de densidad.

Solución

Se tiene interés en conocer la función de densidad del volumen de los balines, V . Para determinarla se parte de su definición y de ahí se despeja la variable R . De esta manera, se obtiene la función de distribución de V en términos de la función de distribución de R .

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) && \text{por definición} \\ &= P\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \leq x\right) && \text{al sustituir a } V \\ &= P\left(R \leq \sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}}\right) && \text{despejando a } R \\ &= F_R\left(\sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}}\right) && \text{por definición.} \end{aligned}$$

Esto es,

$$F_V(x) = F_R\left(\sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}}\right).$$

Observe que para distinguir las funciones de distribución de las diferentes variables, éstas se identifican mediante un subíndice como etiqueta.

El recorrido de V se determina a partir del recorrido de la variable R , con la fórmula:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

El recorrido de R cumple la desigualdad: $0.9 \leq R \leq 1.1$, y esto implica que

$$0.9 \leq \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \leq 1.1 \implies (0.9)^3 \frac{4\pi}{3} \leq V \leq (1.1)^3 \frac{4\pi}{3}.$$

La función de densidad de V , f_V , se encuentra al derivar la función de distribución correspondiente usando la regla de la cadena:

$$f_V(x) = \frac{d}{dx} F_V(x) = \frac{d}{dx} F_R \left(\sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}} \right) = f_R \left(\sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi}} \right) \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi x^2}} \right).$$

Entonces,

$$f_V(x) = 5 \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi x^2}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi x^2}} \quad \text{si} \quad (0.9)^3 \frac{4\pi}{3} \leq V \leq (1.1)^3 \frac{4\pi}{3}.$$

En este ejemplo se obtuvo una composición de funciones dada por $V(R(\omega))$. La función de densidad de V se encuentra en términos de la función de densidad de R .

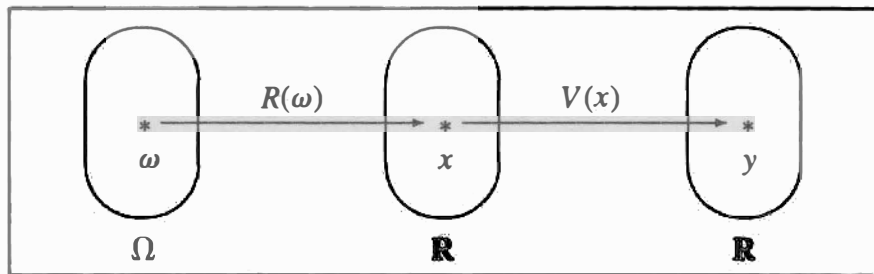


FIGURA 3.3 Diagrama de la función de una variable aleatoria.

Si X es una variable aleatoria y $h(x)$ es continua por trozos, entonces la variable $Y = h(X)$ es medible. Su recorrido está dado por

$$R_Y = \{y \mid y = h(x), x \in R_X\},$$

y su función de densidad puede darse en términos de la función de densidad de X .

EJEMPLO 3.11. Suponga que el tiempo de vida útil de un foco es una variable aleatoria X , no negativa, con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} \quad \text{para } x \geq 0,$$

con x medida en meses.

El sistema de mantenimiento de una empresa ha decidido cambiar los focos cuando fallen o al cumplir 6 meses de haberse cambiado, lo que ocurra primero. Si el foco se cambia antes de los 6 meses, su falla genera un costo de \$5. Si el foco se cambia a los 6 meses, su reemplazo genera un costo de \$4.50. ¿Cuál es la función de densidad del costo generado por el cambio de un foco?

Solución

Sea C la variable aleatoria que indica el costo generado al cambiar un foco, así, el recorrido de C es

$$R_C = \{4.5, 5\},$$

$C = 4.5$ si el tiempo de vida útil del foco es mayor o igual a 6 meses, y $C = 5$, si el tiempo de funcionamiento del foco es menor que 6 meses.

La función de densidad de la variable aleatoria C es

$$\begin{aligned} f_C(4.5) &= P(C = 4.5) = P(X \geq 6) \\ &= \int_6^{\infty} 0.1e^{-0.1x} dx = -e^{-0.1x} \Big|_6^{\infty} = e^{-0.6} = 0.55 \\ f_C(5) &= P(C = 5) = P(X \leq 6) \\ &= \int_0^6 0.1e^{-0.1x} dx = -e^{-0.1x} \Big|_0^6 = 1 - e^{-0.6} = 0.45. \end{aligned}$$

TEOREMA 3.7. Dada X , una variable aleatoria discreta, y $U = h(X)$, una función medible, la función de densidad de U en el punto u , es de la forma

$$f_U(u) = \sum_{x_i \in A_u} f_X(x_i),$$

donde $A_u = \{x \in R_X \mid h(x) = u\}$.

Observe que A_u es la imagen inversa de la función $h(x)$ en el número u .

Demostración

Si $A_u = \{x \in R_X \mid h(x) = u\}$, entonces

$$f_U(u) = P(U = u) = P(X \in A_u) = \sum_{x_i \in A_u} f_X(x_i).$$

Queda demostrado el teorema.

TEOREMA 3.8. Dada X , una variable aleatoria continua, $U = h(X)$, una función real de variable real continua y diferenciable en $\mathbb{R}$ y A_u , el evento $A_u = \{x \in R_X \mid h(x) = u\}$, entonces la función de densidad de U en el punto u es

$$f_U(u) = \begin{cases} \sum_{x_i \in A_u} f_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{du} \right| & \text{si } A_u \text{ es un conjunto discreto,} \\ \int_{A_u} f_X(x) dx & \text{si } A_u \text{ es un conjunto no discreto.} \end{cases}$$

Demostración

En las siguientes gráficas se esquematiza el conjunto A_u en los dos casos: discreto y no discreto.

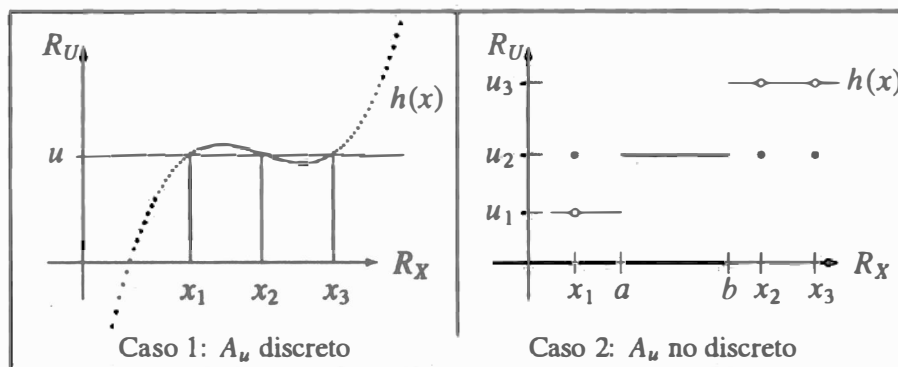


FIGURA 3.4 Imagen inversa de $u = h(x)$.

En la primera gráfica de la figura 3.4, la imagen de $h(x)$ es un intervalo y para todos los valores u en la imagen de $h(x)$, A_u es un conjunto discreto. En la gráfica, para la u indicada se tiene

$$A_u = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

En la segunda gráfica, la imagen de $h(x)$ tiene sólo 3 puntos, u_1 , u_2 y u_3 . Para estos valores u , A_u es un conjunto no discreto, por ejemplo para u_2 , en la gráfica

$$A_{u_2} = (a, b) \cup \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Cada uno de estos casos se analiza en seguida.

Caso 1: A_u es un conjunto discreto: Como el conjunto A_u es discreto, se puede escribir como $A_u = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Entonces, la función de densidad de la variable aleatoria U en u , no se puede calcular con la integral

$$P(U = u) = \int_{A_u} f(x)dx = 0.$$

La función de densidad de U se encuentra a partir de la definición

$$f_U(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F_U(u + \Delta u) - F_U(u - \Delta u)}{2\Delta u}.$$

Para calcular el límite, se define el siguiente conjunto:

$$B_{u, \Delta u} = \{x \mid u - \Delta u < h(X) < u + \Delta u\} = \cup_i V_i,$$

donde $V_i = \{x \mid x_i - \Delta i_1 < x < x_i + \Delta i_2\}$. Entonces,

$$F_U(u + \Delta u) - F_U(u - \Delta u) = P(B_{u, \Delta u}) = \sum_i P(V_i) - \sum_{i < j} P(V_i \cap V_j) + \dots$$

Ahora bien, como $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, para valores menores a un Δ_u fijo $P(V_i \cap V_j) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{F_U(u + \Delta u) - F_U(u - \Delta u)}{2\Delta u} &\approx \frac{1}{2\Delta u} \sum \int_{x_i - \Delta u}^{x_i + \Delta u} f_X(x)dx \\ &= \sum f_X(\xi_i) \frac{\Delta i_1 + \Delta i_2}{2\Delta u}. \end{aligned}$$

La última relación se obtiene utilizando el teorema del valor medio para $\xi_i \in V_i$; finalmente

$$f_U(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F_U(u + \Delta u) - F_U(u - \Delta u)}{2\Delta u} = \sum f_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{du} \right|$$

Caso 2: A_u es un conjunto no discreto: En este caso, la probabilidad de que X esté en A no es cero, por lo que

$$f_U(u) = P(U = u) = \int_{A_u} f_X(x) dx.$$

El teorema queda demostrado.

COROLARIO 3.1. Sea X una variable aleatoria continua, con función de densidad igual a $f_X(x)$, y sea $h(x)$ una función estrictamente monótona (creciente o decreciente) y diferenciable $\forall x \in R_X$; entonces, la función de densidad de la variable aleatoria $Y = h(X)$ está dada por

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|.$$

Demostración

Como $h(x)$ es estrictamente monótona, el conjunto

$$A_y = \{x \in R_X \mid h(x) = y\}$$

es un conjunto discreto con un único elemento. Entonces,

$$f_Y(y) = \sum_{x_i \in A_y} f_X(x_i) \left| \frac{dx_i}{dy} \right| = f_X(x) \frac{dx}{dy}.$$

EJEMPLO 3.12. Sea X la variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{si } 0 < x < 2; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de $Y = X^2$.

Solución

La función $h(x) = x^2$ es una función continua y creciente en el intervalo $(0, 2)$; por lo tanto, se puede aplicar el corolario del teorema anterior. La función inversa es $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$, y

$$f_Y(x) = f_X(\sqrt{x}) \left| \frac{d\sqrt{x}}{dx} \right| = \frac{3x^2}{16\sqrt{x}}.$$

EJEMPLO 3.13. Sea X la variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = e^{-x} \quad x > 0.$$

Encuentre la función de densidad de la variable aleatoria $U = \sin(X)$.

Solución

La función $h(x) = \sin(x)$ es una función continua y diferenciable en los reales; entonces se puede aplicar el teorema anterior.

Observe que para cualquier $u \in [-1, 1]$, el conjunto de puntos x_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, que cumplen la relación $\sin(x_i) = u$ es infinito, pero numerable. En la gráfica siguiente se pueden ver cuatro de estos puntos.

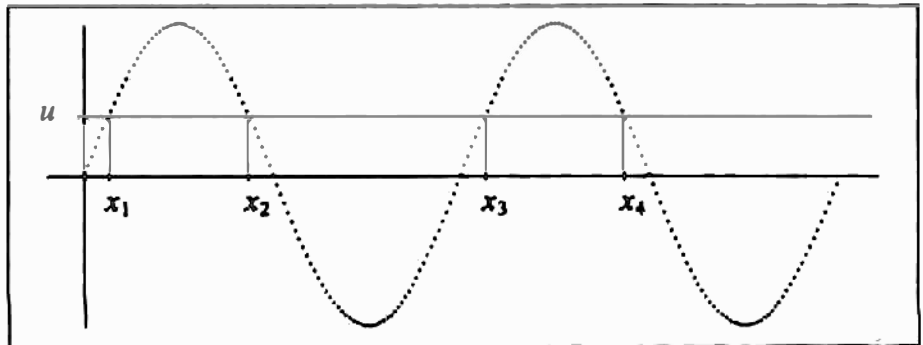


FIGURA 3.5 Cuatro puntos de la imagen inversa de $\sin x = u$.

Los números con índices impares son

$$x_1 = \sin^{-1}(u), x_3 = \sin^{-1}(u) + 2\pi, \dots$$

y los números con índices pares son

$$x_2 = \pi - \sin^{-1}(u), x_4 = 3\pi - \sin^{-1}(u), \dots$$

Así, A_u es un conjunto discreto

$$A_u = \{x \mid \sin(x) = u\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\},$$

donde $x_{2k+1} = \sin^{-1}(u) + 2k\pi$ y $x_{2k} = (2k+1)\pi - \sin^{-1}(u)$, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ahora observe que

$$\left| \frac{dx_i}{du} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}},$$

y

$$f_U(u) = \sum_{k=1}^{\infty} f_X(x_k) \left| \frac{dx_i}{du} \right| = \frac{\left(e^{-\sin^{-1} u} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} + e^{\sin^{-1} u - \pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k} \right)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{(e^{-\sin^{-1} u} + e^{\sin^{-1} u - \pi})e^{2\pi}}{(e^{2\pi} - 1)\sqrt{1-u^2}},$$

para $u \in [-1, 1]$.

EJEMPLO 3.14. En una línea de microbuses se ha encontrado que la función de densidad de la variable

X = kilómetros viajados por un pasajero

es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{[(x-5)^2 + 1](\tan^{-1}(12) - \tan^{-1}(-5))} & \text{si } 0 < x < 17, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2.86((x-5)^2 + 1)} & \text{si } 0 < x < 17, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que un pasajero que sube al microbús

- (a) viaje más de 6 kilómetros,
- (b) viaje entre 3 y 6 kilómetros.

Solución

1. La probabilidad de que un pasajero viaje más de 6 kilómetros, se encuentra con la integral

$$P(X > 6) = \int_6^{17} f_X(x) dx = \frac{1}{2.86} \int_6^{17} \frac{1}{(x-5)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{\tan^{-1}(12) - \tan^{-1}(1)}{2.86} = 0.2455.$$

Note que $\tan^{-1}(12) - \tan^{-1}(-5) = 2.86$.

2. De igual manera, la probabilidad de que un pasajero viaje entre 3 y 6 kilómetros se encuentra con la integral

$$\begin{aligned} P(3 < X < 6) &= \int_3^6 f_X(x) dx = \frac{1}{2.86} \int_3^6 \frac{1}{(x-5)^2 + 1} dx \\ &= \frac{\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-2)}{2.86} = 0.6617. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.15. A los concesionarios del transporte del ejemplo anterior, les interesa conocer el ingreso por pasajero, así que quieren determinar la función de densidad del costo por viaje.

El costo por viaje depende de los kilómetros que se transporten, de acuerdo con la siguiente regla:

$$Y = C(x) = \begin{cases} \$2.00 & \text{si } 0 < x < 5 \\ \$2.50 & \text{si } 5 \leq x < 12 \\ \$3.50 & \text{si } 12 \leq x \leq 17 \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad del costo del pasaje.

Solución

El costo del pasaje sólo tiene 3 valores, 2, 2.50 y 3.50, por lo que el rango de Y es

$$R_Y = \{2, 2.50, 3.50\}.$$

Para cada valor se tiene un subconjunto A_u dado por

- $A_2 = \{x \mid C(x) = 2\} = (0, 5)$
- $A_{2.50} = \{x \mid C(x) = 2.50\} = [5, 12)$
- $A_{3.50} = \{x \mid C(x) = 3.50\} = [12, 17]$

En los tres casos, A_u es no discreta.

Finalmente, los valores de la función de densidad del costo del pasaje son

- $f_Y(2) = \int_{A_2} f_X(x) dx = \int_0^5 \frac{1}{2.86((x-5)^2+1)} dx = 0.4801$
- $f_Y(2.50) = \int_{A_{2.50}} f_X(x) dx = \int_5^{12} \frac{1}{2.86((x-5)^2+1)} dx = 0.4995$
- $f_Y(3.50) = \int_{A_{3.50}} f_X(x) dx = \int_{12}^{17} \frac{1}{2.86((x-5)^2+1)} dx = 0.0204$

Ejercicios

EJERCICIO 3.10. Se dispara un proyectil en una dirección con un ángulo α respecto a la tierra y con una velocidad de magnitud v . El punto en que el proyectil regresa a la tierra está a una distancia R del punto donde se realizó el disparo. Las dos variables se relacionan mediante la ecuación $R = (v^2/g)\sin\alpha$, donde $g = 981 \text{ cm/s}^2$ es la aceleración de la gravedad. Si α es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de R .

EJERCICIO 3.11. La temperatura T de cierto objeto, medida en grados Fahrenheit, es una variable con función de densidad

$$f_T(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(x-98.6)^2/4},$$

la temperatura Θ medida en grados centígrados está relacionada con T mediante la ecuación $\Theta = \frac{5}{9}(T - 32)$. Encuentre la función de densidad de Θ .

EJERCICIO 3.12. El número de tostadores que se vende en una tienda de electrodomésticos es una variable aleatoria X , cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{para } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al vender cada tostador se obtiene una ganancia de \$20. Si al principio de la semana hay 10 tostadores la ganancia está dada por

$$G(X) = 20 \min\{X, 10\},$$

encuentre la función de densidad de G .

EJERCICIO 3.13. La longitud de los lados de un cuadrado X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} (x - 4.95)(5.05 - x)/4 & \text{para } 4.95 < x < 5.05 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad del área del cuadrado.

EJERCICIO 3.14. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f(x) = x/2$ si $0 < x < 2$ y sea $Y = (X - 1)^2$. Encuentre la función de densidad de Y .

EJERCICIO 3.15. A partir de la función de densidad de la velocidad, v ,

$$g_v(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad \text{para } 0 < v < \infty,$$

encuentre la función de densidad de la energía cinética $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$.

EJERCICIO 3.16. A partir de la función de densidad de la velocidad de las partículas que escapan a través de un orificio pequeño en un horno

$$\phi_v(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad \text{para } 0 < v < \infty,$$

encuentre la función de densidad de la energía cinética $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$.

4. Variables aleatorias multivariadas

En ocasiones a una misma unidad de muestreo se le miden dos o más características de interés, por ejemplo: a una persona se le puede medir su edad (X), ingreso (Y), nivel de escolaridad (Z), etc. Entonces cada persona i tiene asociado un dato multivariado $(X_i, Y_i, Z_i, \dots)$.

EJEMPLO 3.16. Se tiene una muestra de 40 estudiantes, 10 de los cuales estudian ciencias básicas, 13 estudian ciencias naturales y los restantes estudian ciencias sociales. A estos estudiantes se les pide su opinión sobre el servicio de cómputo que se ofrece en su escuela, y las respuestas pueden ser tres: malo, regular o bueno.

Si se escoge un estudiante al azar, se genera un espacio muestral equiprobable en donde se define un vector aleatorio (X, Y) :

- X identifica el área de estudio.
- Y identifica su opinión sobre el servicio de cómputo,

de acuerdo con las siguientes reglas:

Suponga que las dos variables aleatorias X y Y clasifican a los cuarenta estudiantes con los dos criterios, como se ve en la tabla.

Como el experimento es: elegir una persona al azar, la probabilidad de los diferentes eventos se calcula con la fórmula clásica:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

TABLA 3.2 Valor de las variables X y Y .

Área de estudio	Opinión
$C. \text{ básicas} \rightarrow X = 1$	$\text{malo} \rightarrow Y = 0$
$C. \text{ naturales} \rightarrow X = 2$	$\text{regular} \rightarrow Y = 1$
$C. \text{ sociales} \rightarrow X = 3$	$\text{bueno} \rightarrow Y = 2$

TABLA 3.3 Frecuencia de las variables X y Y .

		variable X			
		1	2	3	Total
variable Y	0	3	4	5	12
	1	2	1	3	6
	2	5	5	12	22
Total		10	10	20	40

En la tabla 3.4 se muestra la probabilidad **conjunta** de las dos variables aleatorias.

TABLA 3.4 Probabilidad conjunta de x y y .

		variable X			
		1	2	3	Total
variable Y	0	.075	.100	.125	.300
	1	.050	.025	.075	.150
	2	.125	.125	.300	.500
Total		.250	.250	.500	1

En seguida se analiza qué significa esto.

- En el cruce de la columna i y el renglón j se encuentra la probabilidad de que X tome el valor i y Y tome el valor j : $P(X = i, Y = j)$, $i = 1, 2, 3$ y $j = 0, 1, 2$; esto equivale a una intersección de eventos: $\{\omega \in \Omega \mid (X, Y) = (i, j)\} = \{\omega \in \Omega \mid X = i\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y = j\}$.
- En el **margen inferior** se encuentran las probabilidades correspondientes a la variable X : $P(X = i)$, $i = 1, 2, 3 \dots$. El evento

$\{\omega \in \Omega \mid X = i\}$ corresponde a

$$\{\omega \in \Omega \mid X = i\} = \bigcup_{j=0}^2 \{\omega \in \Omega \mid X = i, Y = j\}.$$

- En el **margen derecho** se encuentran las probabilidades correspondientes a $P(Y = i)$, $i = 0, 1, 2$, y

$$\{\omega \in \Omega \mid Y = j\} = \bigcup_{i=1}^3 \{\omega \in \Omega \mid X = i, Y = j\}.$$

Explícitamente:

- La probabilidad de que el estudiante elegido estudie ciencias básicas y esté de acuerdo con el servicio de cómputo se encuentra en la columna 1 y el renglón 3, y es igual a

$$P(X = 1 \text{ y } Y = 2) = .125.$$

- La probabilidad de que el estudiante elegido esté en desacuerdo con el servicio de cómputo (sin considerar su área de estudio) se encuentra en el primer renglón de la columna Total, y es igual a la suma de los valores del primer renglón.

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 3, Y = 0) \\ &= .300. \end{aligned}$$

- La probabilidad de que un estudiante elegido estudie ciencias básicas o ciencias naturales se encuentra sumando el valor de la primera columna con el valor de la segunda columna del renglón Total.

$$P(X = 1 \text{ o } X = 2) = .250 + .250 = .500.$$

La probabilidad que se encuentra en el **interior** de la tabla corresponde a los eventos

$$\{\omega \in \Omega \mid X = i, Y = j\} = \{\omega \in \Omega \mid X = i\} \cap \{\omega \in \Omega \mid Y = j\}$$

y se llama probabilidad conjunta de X y Y .

La probabilidad que se encuentra en el **margen inferior** y en el **margen derecho** corresponde a la probabilidad de los eventos

$$\{\omega \in \Omega \mid X = i\} \quad \text{y} \quad \{\omega \in \Omega \mid Y = j\}$$

respectivamente, $i = 1, 2, 3$ y $j = 0, 1, 2$. Esta probabilidad se conoce como probabilidad marginal de las variables.

DEFINICIÓN 3.9. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$ se llama vector aleatorio o variable aleatoria bivariada a la función bivariada:

$$(X, Y): \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

con X y Y variables aleatorias.

DEFINICIÓN 3.10. Se llama **función de distribución de probabilidades conjunta** del vector (X, Y) a la función definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Así, con referencia al ejemplo 3.4.1, se tiene que

$$\begin{aligned} F(2, 1) &= P(X \leq 2, Y \leq 1) = P(1, 0) + P(1, 1) + P(2, 0) + P(2, 1) \\ &= 0.075 + 0.05 + 0.1 + 0.025 = 0.25. \end{aligned}$$

TEOREMA 3.9. *La función de distribución conjunta de una variable aleatoria bivariada (X, Y) cumple las siguientes propiedades:*

1. $F(x, y)$ es creciente en x y en y .
2. $F(x, y)$ es continua por la derecha de x y de y .
3. $\lim_{x, y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$,
4. $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$.

Demostración

1. Si $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$, entonces

$$\{\omega \in \Omega \mid X \leq x_1, Y \leq y_1\} \subset \{\omega \in \Omega \mid X \leq x_2, Y \leq y_2\},$$

y por el teorema 1.2.8, se sigue que

$$P(X \leq x_1, Y \leq y_1) \leq P(X \leq x_2, Y \leq y_2),$$

lo que equivale a

$$F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2).$$

2. El límite por la derecha de la función de distribución es

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ y \rightarrow b^+}} F(x, y) &= \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0^+ \\ h_2 \rightarrow 0^+}} P(X \leq a + h_1, Y \leq b + h_2) \\ &= P(X \leq a, Y \leq b) = F(a, b). \end{aligned}$$

3. Observe que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} P(X \leq x, Y \leq y) = P(\emptyset) = 0.$$

4. Observe que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} P(X \leq x, Y \leq y) = P(\Omega) = 1.$$

DEFINICIÓN 3.11. Se llama **función de densidad conjunta** del vector aleatorio (X, Y) a

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad \text{si } X \text{ y } Y \text{ son v. a. discretas,}$$

y

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \text{si } X \text{ y } Y \text{ son v. a. continuas.}$$

TEOREMA 3.10. *La función de densidad conjunta de un vector aleatorio (X, Y) cumple las siguientes propiedades:*

- Si (X, Y) es un vector aleatorio discreto:
 1. $f(x, y) \geq 0$,
 2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$.
- Si (X, Y) es un vector aleatorio continuo:
 1. $f(x, y) \geq 0$,
 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

La demostración es trivial y se deja como ejercicio.

COROLARIO 3.2. Si A es un evento $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$P(A) = \sum_{(x,y) \in A} f(x, y), \quad \text{para el caso discreto,}$$

$$P(A) = \iint_A f(x, y) dx dy, \quad \text{para el caso continuo.}$$

DEFINICIÓN 3.12. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$ y una variable aleatoria bivariada (X, Y) definida en él, se llama **función de densidad marginal de X** a la función

$$f_X(x) = \sum_y f(x, y), \quad \text{en el caso discreto,}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad \text{en el caso continuo.}$$

Y se llama **función de densidad marginal de Y** a la función

$$f_Y(y) = \sum_x f(x, y), \quad \text{en el caso discreto,}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx, \quad \text{en el caso continuo.}$$

Como se puede ver, la función de densidad marginal de la variable X es la sumatoria (o la integral) de la función de densidad conjunta, manteniendo fijo el valor de x y recorriendo todos los valores de y . Precisamente coincide con los valores que se encuentran en los márgenes de una tabla de probabilidad de doble entrada. De ahí el nombre de **densidad marginal**.

EJEMPLO 3.17. El costo del material, X , y el costo de la mano de obra, Y , de un proyecto de construcción es modelada por

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2ye^{-y(2+x)} & \text{si } x, y \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde la unidad monetaria es un millón de pesos.

1. Encuentre la probabilidad de que los costos del material y de la mano de obra del siguiente proyecto de construcción sea mayor que un millón y dos millones de pesos, respectivamente.
2. Determine la densidad marginal del costo del material.
3. Determine la densidad marginal del costo de la mano de obra.

Solución

1. Como la unidad monetaria es igual a un millón de pesos, se quiere obtener la probabilidad $P(X \geq 1, Y \geq 2)$, cuyo cálculo se hace con la siguiente integral:

$$P(X \geq 1, Y \geq 2) = \int_2^{\infty} \int_1^{\infty} 2ye^{-y(2+x)} dx dy = \frac{2}{3}e^{-6} = 0.00165.$$

2. La función de densidad marginal del costo del material se encuentra integrando la función de densidad conjunta con respecto al costo de la mano de obra.

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} 2ye^{-y(2+x)} dy = \int_0^{\infty} 2ye^{-y(2+x)} dy = \frac{2}{(2+x)^2} \quad x \geq 0.$$

La integración se hace por partes con

$$du = e^{-y(2+x)} dy, \quad v = 2y.$$

3. La función de densidad marginal del costo de la mano de obra se encuentra integrando la función de densidad conjunta con respecto al costo del material.

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_0^{\infty} 2ye^{-y(2+x)} dx \\&= 2ye^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-xy} dx = 2e^{-2y}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.18. Si (X, Y) es un vector seleccionado al azar sobre el rectángulo $(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$, encuentre su función de densidad conjunta.

Solución

Como el vector aleatorio se distribuye uniformemente sobre el rectángulo $(a, b) \times (c, d)$, la probabilidad de cualquier región dentro del mismo es proporcional a su área, esto es si $A \in (a, b) \times (c, d)$, entonces

$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área del rectángulo}}.$$

La función de distribución de (X, Y) está dada por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}.$$

La función de densidad se encuentra derivando la función.

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)}.$$

EJEMPLO 3.19. Si el vector aleatorio (X, Y) tiene función de distribución

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

encuentre la probabilidad que un punto elegido al azar esté en el rectángulo dado por

$$1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2.$$

Solución

Se quiere conocer la probabilidad del evento A :

$$A = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\},$$

Para ello se utilizan los eventos

$$B = \{(x, y) \mid x \leq 2, y \leq 2\},$$

$$C = \{(x, y) \mid x \leq 2, y < 1\},$$

$$D = \{(x, y) \mid x < 1, y \leq 2\}.$$

Observe que los eventos A y $C \cup D$ son mutuamente excluyentes y que $B = A \cup (C \cup D)$, de lo que se sigue

$$P(B) = P(A) + P(C \cup D) = P(A) + P(C) + P(D) - P(C \cap D),$$

y como $C \cap D = \{(x, y) \mid x < 1, y < 1\}$; entonces:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) - P(C) - P(D) + P(C \cap D) \\ &= F(2, 2) - F(2, 1) - F(1, 2) + F(1, 1) \\ &= a^{-12} - a^{-6} - a^{-9} + a^{-3} = a^{-3}(1 - a^{-3} - a^{-6} + a^{-9}). \end{aligned}$$

Ejercicios

EJERCICIO 3.17. En una urna hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Se eligen 3 bolas al azar sin reemplazo. Sea X el mínimo número que aparece en las bolas seleccionadas, y sea Y el máximo número.

- (a) Encuentre la función de densidad conjunta de X y Y .
- (b) Encuentre la función de densidad marginal de X y Y .
- (c) Encuentre $P(X \geq 2)$.

EJERCICIO 3.18. Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} & 0 < y < \infty \text{ y } -y < x < y \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) Encuentre la función de densidad marginal de X y Y .
- (b) Encuentre $P(X \geq 2)$.

EJERCICIO 3.19. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-y}(1 - e^{-x}) & 0 < y < \infty \text{ y } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad marginal de X y de Y .

EJERCICIO 3.20. Suponga que las personas de una población pueden profesar una de cuatro religiones ($X = 0, 1, 2, 3, 4$; $X = 0$ si la persona no profesa ninguna de las cuatro religiones), y pueden simpatizar con uno de tres partidos políticos ($Y = 0, 1, 2, 3$; $Y = 0$ si la persona no simpatiza con ninguno de los tres partidos). Si se elige una persona al azar, la probabilidad de que ella tenga una religión determinada y simpatice con un partido político está dada en la siguiente tabla:

Y	X				
	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

Determine cada una de las probabilidades siguientes:

- (a) $P(X = 2)$ (b) $P(X \geq 2)$ (c) $P(X \leq 2, Y \leq 2)$
 (d) $P(X = Y)$ (e) $P(X > Y)$.

5. Dependencia y condicionalidad

DEFINICIÓN 3.13. Dadas dos variables aleatorias X y Y , la **función de densidad condicional** de la variable X , dada la variable Y , es igual a

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{si } f_Y(y) > 0, \\ 0 & \text{si } f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Directamente de la definición, se llega a

$$f_{XY}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y).$$

La probabilidad condicional es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

DEFINICIÓN 3.14. Se dice que dos variables aleatorias X y Y , son **independientes** si y sólo si

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x).$$

A y B son independientes si y sólo si

$$P(A|B) = P(A).$$

TEOREMA 3.11. *Las variables aleatorias X y Y son independientes si y sólo si*

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Demostración

Se sabe que para todas las variables aleatorias X y Y se cumple que

$$f_{XY}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y),$$

y en el caso de que ambas variables sean independientes, se tiene que $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$; sustituyendo este término en la ecuación anterior se llega a lo que afirma el teorema. La demostración para el sentido inverso es trivial.

El concepto de independencia se puede generalizar a más de dos variables, esto se ve en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.15. Se dice que las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son **variables aleatorias independientes** si

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n).$$

EJEMPLO 3.20. La posición de una partícula que se mueve aleatoriamente en un plano está determinada por su distancia al origen, R , y por el ángulo que forma con un eje fijo, X . Si los valores de X y de R son independientes y la función de densidad conjunta es igual a

$$f(x, r) = \frac{2e^{-r}}{\pi} \quad r \geq 0 \quad y \quad 0 \leq x \leq \pi/2,$$

encuentre la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región limitada por $0 \leq x \leq \pi/4$ y $1 \leq r \leq 2$.

Solución

Como las dos variables son independientes, se puede encontrar la probabilidad integrando cada variable en forma separada:

$$P(0 \leq X \leq \pi/4, 1 \leq R \leq 2) = \int_0^{\pi/4} dx \int_1^2 \frac{2e^{-r}}{\pi} dr = \frac{e-1}{2e^2}.$$

Ejercicios

EJERCICIO 3.21. Suponga que se mide la respuesta de cierto aparato electrónico en cinco ocasiones diferentes. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 las observaciones obtenidas. Suponga que X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de acuerdo con la distribución

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}e^{-x^2/2} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que el máximo de los valores X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 sea mayor que 4.

EJERCICIO 3.22. Suponga que un equipo de radar tiene una ley de descomposturas con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000}e^{-x/1000} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿En qué intervalo de tiempo 10 equipos de radar que trabajan de manera independiente, operarán satisfactoriamente con una probabilidad de 0.50?

EJERCICIO 3.23. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (a) Encuentre las funciones de densidad marginales de X y de Y .
(b) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

EJERCICIO 3.24. Se eligen sin reemplazo tres bolas de una urna que contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Sea X el mínimo número asignado a las bolas elegidas, y sea Y el máximo número.

Encuentre la función de densidad condicional de X , dado $Y = 4$.

EJERCICIO 3.25. Sean X y Y variables aleatorias discretas independientes, con la misma función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3^x} & \text{para } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que X y Y sean iguales.

EJERCICIO 3.26. Sean X y Y dos variables aleatorias conjuntamente continuas, con función de densidad de probabilidades dada por

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad \text{para } x, y \in \mathbb{R}.$$

- (a) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?
- (b) ¿Tienen X y Y la misma función de densidad marginal?
- (c) Encuentre $P(X^2 + Y^2 < 4)$.

EJERCICIO 3.27. En una caja hay 10 monedas numeradas del 1 al 10. La probabilidad de que al lanzar la moneda i , ésta caiga en águila es igual a $i/10$. Se elige una moneda al azar de la caja y se lanza hasta que aparece la primera águila. Sea N la variable aleatoria que indica el número de lanzamientos necesarios antes de detenerse. Encuentre la función de densidad de N .

6. Distribuciones de funciones de vectores aleatorios

En ocasiones se quiere conocer la función de densidad de una variable aleatoria que depende de dos o más variables que se muestrean. Así, en el problema de los proyectos de construcción, (Ej. 3.4.2), podría ser más importante para el dueño de la obra conocer la distribución del costo total del proyecto ($X + Y$), y no sólo las distribuciones de los precios de cada concepto por separado. Entonces, es importante tener una forma de conocer la función de densidad de una función del vector aleatorio.

TEOREMA 3.12. Si (X, Y) es un vector aleatorio discreto con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$, y $Z = h(X, Y)$ es una variable aleatoria, entonces la función de densidad de Z está dada por

$$f_Z(z) = \sum_{h(x,y)=z} f_{XY}(x, y).$$

Demostración

Observe que

$$P(Z = z) = P(h(X, Y) = z) = \sum_{h(x,y)=z} f_{XY}(x, y);$$

por lo tanto, queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 3.21. Se lanzan dos tetraedros no cargados, cuyas caras están numeradas del 1 al 4. Sean X_1 y X_2 las variables aleatorias que indican la cara que cae hacia abajo en cada uno de los tetraedros, respectivamente. Sea $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Encuentre la función de densidad de Y .

Solución

Cada una de las 4 caras del tetraedro tiene igual probabilidad de caer hacia abajo, por lo que el espacio muestral del experimento es equiprobable con 16 posibles resultados. La función de densidad conjunta de X_1 y X_2 es

$$f_{X_1, X_2}(x, y) = \frac{1}{16}, \quad \text{para } x = 1, 2, 3, 4 \text{ y } y = 1, 2, 3, 4.$$

Los valores que puede tomar $Y = \max\{X_1, X_2\}$ son 1, 2, 3 y 4. La relación de Y con el vector (X_1, X_2) se describe en la tabla 3.5.

TABLA 3.5 Distribución del valor máximo en la muestra.

	Rango de Y			
	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$
Valores de (X_1, X_2) que dan el mismo valor de Y .	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
		(2,1)	(2,3)	(2,4)
		(2,2)	(3,3)	(3,4)
			(3,1)	(4,4)
			(3,2)	(4,1)
				(4,2)
				(4,3)
Total	1	3	5	7

De acuerdo con el teorema 3.12, la función de densidad de Y es igual a la suma de las probabilidades de los puntos que dan el mismo valor de

Y . Por ejemplo, la función de densidad de Y en el punto 3 es

$$f_Y(3) = f_{X_1 X_2}(1, 3) + f_{X_1 X_2}(2, 3) + f_{X_1 X_2}(3, 3) + f_{X_1 X_2}(3, 1) \\ + f_{X_1 X_2}(3, 2) = \frac{5}{16}.$$

Entonces, se tiene que

$$f_Y(1) = \frac{1}{16}, \quad f_Y(2) = \frac{3}{16}, \quad f_Y(3) = \frac{5}{16}, \quad f_Y(4) = \frac{7}{16},$$

o, en forma general,

$$f_Y(x) = \frac{2x-1}{16}, \quad \text{para } x = 1, 2, 3, 4.$$

TEOREMA 3.13. Si (X, Y) es un vector aleatorio continuo y $(U, V) = h(X, Y)$ es una función continua y diferenciable, excepto en un conjunto finito de puntos, y

$$A_{uv} = \{(x, y) \in R_{XY} \mid h(x, y) = (u, v)\},$$

entonces la función de densidad de (U, V) en el punto (u, v) es

$$f_{UV}((u, v)) = \begin{cases} \sum_{(x_i, y_j) \in A_{uv}} f_{XY}((x_i, y_j)) |J| & \text{si } A_{uv} \text{ es discreto,} \\ \int_{A_{uv}} f_{XY}((x, y)) dx dy & \text{si } A_{uv} \text{ es no discreto.} \end{cases}$$

En esta fórmula, $|J|$ es el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

Demostración

Caso 1. A_{uv} es un conjunto discreto. Si

$$A_{uv} = \{(x, y) \in R_{XY} \mid h(x, y) = (u, v)\}$$

es un conjunto discreto $A_{uv} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$, entonces, por definición,

$$f_{UV}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{UV}(u, v) = \\ \lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \frac{F_{UV}(u+\Delta u, v+\Delta v) - F_{UV}(u+\Delta u, v) - F_{UV}(u, v+\Delta v) + F_{UV}(u, v)}{\Delta u \Delta v}.$$

Ahora observe que

$$F_{UV}(u+\Delta u, v+\Delta v) - F_{UV}(u+\Delta u, v) - F_{UV}(u, v+\Delta v) + F_{UV}(u, v) = P(B_{u,v}),$$

donde

$$B_{uv} = \{(x, y) | h(x, y) = (w, t) \text{ con } u \leq w \leq u + \Delta u \text{ y } v \leq t \leq v + \Delta v\}.$$

Este conjunto se puede ver como una unión de conjuntos V_i :

$$B_{uv} = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \dots,$$

tal que

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} V_i = \{(x_i, y_i)\} \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} V_i \cap V_j = \emptyset.$$

$$P(B_{uv}) \leq \sum_i P(V_i) = \sum_i \iint_{V_i} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Por el teorema del valor medio,

$$\iint_{V_i} f_{XY}(x, y) dx dy = f_{XY}(\xi_i, \zeta_i) \text{Área}(V_i) \quad (\xi_i, \zeta_i) \in V_i.$$

El límite de esta expresión, cuando Δu y Δv tienden a cero, es

$$\lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} f_{XY}(a, b) \text{Área}(V_i) = f_{XY}(x(u, v), y(u, v)) |J(x(u, v), y(u, v))| du dv.$$

Entonces se puede concluir que

$$f_{UV}(u, v) = \sum_{(x, y) \in A_{uv}} f_{XY}(x(u, v), y(u, v)) |J|.$$

Caso 2. A_{uv} es un conjunto no discreto. En este caso,

$$f_{UV}(u, v) = P((U, V) = (u, v)) = P((X, Y) \in A_{uv}) = \int_{A_{uv}} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

COROLARIO 3.3. Dado un vector aleatorio (X, Y) y una función invertible y diferenciable $(u, v) = h(x, y)$, la función de densidad conjunta del vector $(U, V) = h(X, Y)$ es

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(h^{-1}(u, v)) |J|,$$

donde $|J|$ es el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

Demostración

Como la función $h(x, y)$ es invertible, entonces cuando el conjunto A_{uv} es no vacío tiene únicamente un punto, por lo que es un conjunto discreto y entonces

$$f_{UV}(u, v) = f_{XY}(x(u, v), y(u, v)) |J| = f_{XY}(h^{-1}(u, v)) |J|.$$

TEOREMA 3.14. Si (X, Y) es un vector aleatorio y $U = h(X, Y)$ una función continua y diferenciable, entonces

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(g_1(u, v), g_2(u, v)) |J| dv,$$

donde $v = h_1(x, y)$ es una función continua y diferenciable tal que la transformación $(u, v) = (h(x, y), h_1(x, y))$ es invertible y su inversa está dada por $(x, y) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$.

Demostración

Si $(U, V) = (h(X, Y), h_1(X, Y))$ es invertible y diferenciable y su función inversa está dada por $(X, Y) = (g_1(U, V), g_2(U, V))$, entonces

$$f_{U,V}(u, v) = f_{XY}(g_1(u, v), g_2(u, v)) |J|,$$

y la función de densidad marginal de U es

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(g_1(u, v), g_2(u, v)) |J| dv,$$

que es lo que se quería probar.

COROLARIO 3.4. La función de densidad de la variable aleatoria $U = X + Y$ está dada por

$$f_U(u) = \sum_i f_{XY}(v_i, u - v_i) \quad \text{caso discreto,}$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u - v) dv \quad \text{caso continuo.}$$

Demostración

Considere la transformación $(U, V) = (X + Y, X)$, cuya transformación inversa es $(X, Y) = (V, U - V)$.

Caso discreto

$$\begin{aligned} f(u, v) &= P(U = u, V = v) = P(X + Y = u, X = v) \\ &= \sum_v P(X = v, Y = u - v) = \sum_i f(v_i, u - v_i) \end{aligned}$$

Caso continuo

El valor absoluto del jacobiano de la transformación es igual a 1, y

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(g_1(u, v), g_2(u, v)) |J| dv, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u - v) dv. \end{aligned}$$

Esta suma (o integral) se conoce con el nombre de **convolución**.

EJEMPLO 3.22. Sea el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad dada por

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de $U = X + Y$.

Solución

De acuerdo con el resultado anterior, se tiene que la función de densidad de la suma de dos variables aleatorias está dada por

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u - v) |J| dv.$$

La región de integración se reduce al conjunto donde $f_{XY}(x, y)$ es diferente de cero, esto es:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 1 - x \\ \implies 0 \leq x \leq x + y \leq 1 \implies 0 \leq V \leq U \leq 1, \end{aligned}$$

$$f_U(u) = \int_0^u 24v(u - v) dv = 12uv^2 - 8v^3 \Big|_0^u = 12u^3 - 8u^3 = 4u^3$$

para $0 \leq u \leq 1$.

Ejercicios

EJERCICIO 3.28. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas cuya función de densidad conjunta es $f_{XY}(x, y)$. Determine la función de densidad conjunta de las variables $U = X + Y$ y $V = \frac{X}{X+Y}$.

EJERCICIO 3.29. Sean X y Y variables aleatorias independientes con función de densidad marginal dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5e^{-5y} & \text{para } y \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de $Z = \min\{X, Y\}$.

EJERCICIO 3.30. Sean X y Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad común dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{para } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función de densidad de $Z = (X + Y)/X$.

CAPÍTULO 4

Esperanza matemática

1. Definición

Todos sabemos lo que es el promedio de un conjunto finito de datos; por ejemplo, el promedio de los números 4, 8, 7, 9 y 6 es igual a

$$\frac{4 + 8 + 7 + 9 + 6}{5} = \frac{34}{5} = 6.8$$

El promedio indica la posición de los datos, por lo que se puede considerar como un representante de los mismos.

EJEMPLO 4.1. En la tabla 4.1 se presentan los datos observados de 60 tiradas de un dado no cargado,

Los valores en la tabla indican que de las 60 veces que se lanzó el dado, en ocho de ellas apareció el 1, en once de ellas apareció el 2, etc. La frecuencia relativa de un valor es el resultado de dividir el número total de veces que apareció ese valor entre el total de datos observados.

TABLA 4.1 *Resultados de 60 tiradas de un dado.*

X	frecuencia absoluta (f_a)	frecuencia relativa (f_r)
1	8	8/60
2	11	11/60
3	13	13/60
4	9	9/60
5	8	8/60
6	11	11/60

El promedio $\bar{X}$ de los 60 resultados es igual a

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} \\ &= \frac{(1 \times 8) + (2 \times 11) + (3 \times 13) + (4 \times 9) + (5 \times 8) + (6 \times 11)}{60} \\ &= 3.5166.\end{aligned}$$

El promedio de los datos también se puede calcular sumando cada dato multiplicado por su frecuencia relativa:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_{i=1}^{60} x_i f_r(x_i) \\ &= 1 \frac{8}{60} + 2 \frac{11}{60} + 3 \frac{13}{60} + 4 \frac{9}{60} + 5 \frac{8}{60} + 6 \frac{11}{60} = 3.5166.\end{aligned}$$

El número 3.5166 indica la posición promedio de los datos.

Siguiendo esta idea, es posible calcular un “promedio teórico ideal” o “promedio esperado” (**el valor esperado**) de una variable aleatoria, utilizando la frecuencia **esperada** en lugar de la frecuencia observada.

Como cada cara del dado tiene la misma probabilidad de ser observada, entonces en un caso “ideal”, al lanzar 60 veces el dado se esperaría observar 10 veces cada valor; así, la frecuencia relativa esperada coincide con la probabilidad. Esto se resume en la tabla 4.2.

TABLA 4.2 *Resultados observado y esperado de 60 tiradas de un dado.*

X	frecuencia observada (f)	frecuencia relativa (f _r)	frecuencia esperada	probabilidad
1	8	8/60	10	1/6
2	11	11/60	10	1/6
3	13	13/60	10	1/6
4	9	9/60	10	1/6
5	8	8/60	10	1/6
6	11	11/60	10	1/6

El promedio “ideal” es igual a

$$\bar{X}_{ideal} = 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{6} = 3.5,$$

lo que significa que, en condiciones “ideales”, los datos se encuentran alrededor de 3.5.

La gráfica 4.1 muestra la frecuencia relativa observada y esperada de este experimento.

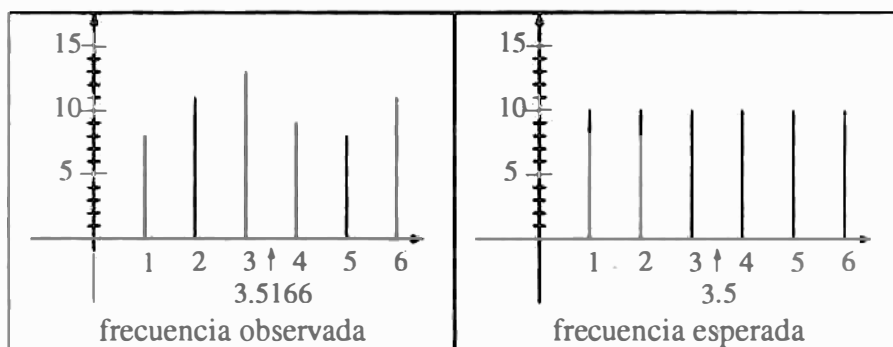


FIGURA 4.1 Frecuencia de las 60 tiradas de un dado.

DEFINICIÓN 4.1. Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$, se llama **valor esperado** de X , o **esperanza matemática** de X , al promedio “teórico” o promedio esperado, y se calcula mediante

- $E(X) = \sum_i x_i f_X(x_i)$ si X es una variable aleatoria discreta.
- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ si X es una variable aleatoria continua.

El valor esperado de X se conoce como **media** de X . La media es una medida de posición y se denota con la letra griega μ .

$$\mu = \mu_X = E(X).$$

El valor esperado de una variable aleatoria X existe si y sólo si la suma $\sum_i x_i f_X(x_i)$ (o la integral $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$) converge a un número real.

EJEMPLO 4.2. Encuentre el valor esperado para la variable aleatoria X , cuya función de densidad es igual a

$$f_X(x) = 6x(1 - x) \text{ si } 0 \leq x \leq 1.$$

Solución

La variable aleatoria es continua, y entonces su valor esperado es la integral

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 6x^2(1-x) dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{6x^4}{4} \Big|_0^1 = 0.5.$$

La figura 4.2 muestra la función de densidad de X y su valor esperado.

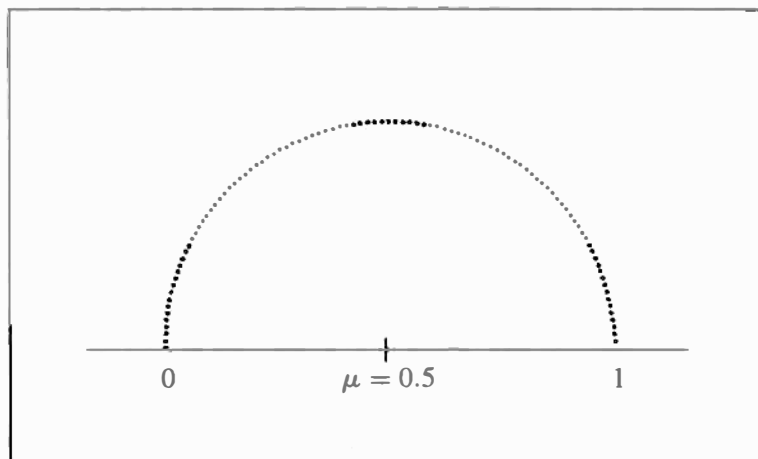


FIGURA 4.2 Valor esperado de $f(x) = 6x(1-x)$.

EJEMPLO 4.3. Se prueban sucesivamente los artículos que van saliendo en una banda de producción hasta que aparece el primer artículo defectuoso. Se sabe que el 5% de los artículos producidos son defectuosos, y X es la variable aleatoria que indica el número de intentos que deberán realizarse antes de detenerse. Encuentre su valor esperado.

Solución

El estado de un artículo en la banda de producción (defectuoso, no defectuoso) es independiente del estado de otro artículo en la misma banda de producción. Entonces, los resultados de las sucesivas inspecciones son eventos independientes.

El primer artículo defectuoso puede ser el primer artículo inspeccionado, pero también puede ser el segundo, o el tercero, etc. Esto significa que el recorrido de X es igual al conjunto de los números naturales: $X = 1, 2, 3, 4, \dots$

Ahora, observe que el evento $X = k$ es equivalente al evento

$$\underbrace{\{(b, b, b, \dots, b, d)\}}_{k-1 \text{ veces}},$$

donde b significa que el artículo inspeccionado es bueno y d que es defectuoso. La posición de la coordenada indica el orden en que el artículo se inspeccionó.

Considerando que los resultados de las distintas inspecciones son independientes, se tiene que la función de densidad es

$$\begin{aligned} f_X(k) &= P(X = k) = \underbrace{P(b, b, b, \dots, b, d)}_{k-1 \text{ veces}} \\ &= \underbrace{P(b)P(b)P(b) \dots P(b)}_{k-1 \text{ veces}} P(d) = (0.95)^{k-1}(0.05), \end{aligned}$$

y el valor esperado de X es igual a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_X(k) = 0.05 \sum_{k=1}^{\infty} k (0.95)^{k-1}.$$

Esta suma es de la forma

$$T_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right),$$

por lo que

$$T_n = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Recuerde que si $|x| < 1$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

Aplicando esta fórmula al caso $x = 0.95$, se tiene que

$$E(X) = 0.05 \sum_{k=1}^{\infty} k (0.95)^{k-1} = \frac{0.05}{(1-0.95)^2} = \frac{1}{0.05} = 20.$$

Esto significa que en promedio se tendrán que hacer 20 observaciones para tener el primer artículo defectuoso. Es muy probable que el número de intentos para encontrar el primer artículo defectuoso se ubique alrededor del número 20.

1.1 El juego de mayores y menores. El juego de azar de mayores y menores es muy popular en las ferias de pueblo. Se juega con dos dados y la ganancia, G , depende de la suma de los resultados en los dos dados. Si la suma es superior a siete ganan mayores; si es inferior a siete, ganan menores; y si es igual a siete, gana la casa. Una persona puede apostar a mayores o a menores; si gana recibe una cantidad igual a la apuesta, si pierde, se despidе del dinero que apostó.

Si una persona está apostando 10 pesos a los mayores, ¿cuál será su ganancia esperada en 12 juegos?

Para tener la respuesta, primero se encuentra la función de densidad de la suma. Considere que X_1 y X_2 indican el resultado en el primer dado y en el segundo, respectivamente. La ganancia se determina mediante la suma $Y = X_1 + X_2$.

Si los dados no están cargados, se tiene que

$$P(X_i = k) = \frac{1}{6},$$

para $i = 1, 2$ y $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

El espacio muestral de la tirada de dos dados se muestra en la tabla 4.3.

TABLA 4.3 *Espacio muestral de la tirada de dos dados.*

		Primer dado					
							
Segundo dado		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
		(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
		(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
		(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
		(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
		(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Este espacio muestral tiene 36 elementos, y es equiprobable.

El rango o recorrido de Y está dado por

$$R_Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

La función de densidad se encuentra contando cuántas parejas (X_1, X_2) dan cada valor de la suma $Y = X_1 + X_2$.

• $f_Y(2) = 1/36$	$(X_1, X_2) = (1, 1),$
• $f_Y(3) = 2/36$	$(X_1, X_2) = (1, 2), (2, 1),$
• $f_Y(4) = 3/36$	$(X_1, X_2) = (1, 3), (2, 2), (3, 1),$
• $f_Y(5) = 4/36$	$(X_1, X_2) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1),$
• $f_Y(6) = 5/36$	$(X_1, X_2) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1),$
• $f_Y(7) = 6/36$	$(X_1, X_2) = (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1),$
• $f_Y(8) = 5/36$	$(X_1, X_2) = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2),$
• $f_Y(9) = 4/36$	$(X_1, X_2) = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3),$
• $f_Y(10) = 3/36$	$(X_1, X_2) = (4, 6), (5, 5), (6, 4),$
• $f_Y(11) = 2/36$	$(X_1, X_2) = (5, 6), (6, 5),$
• $f_Y(12) = 1/36$	$(X_1, X_2) = (6, 6).$

Cuando una persona apuesta 10 pesos a los mayores, gana 10 pesos con una probabilidad igual a

$$f_G(10) = P(G = 10) = P(Y > 7) = \frac{15}{36}$$

y pierde 10 pesos con una probabilidad igual a

$$f_G(-10) = P(G = -10) = P(Y \leq 7) = \frac{21}{36}.$$

El valor esperado de la ganancia por cada juego es entonces

$$\begin{aligned} E(G) &= 10f_G(10) + (-10)f_G(-10) \\ &= 10\left(\frac{15}{36}\right) - 10\left(\frac{21}{36}\right) = -\frac{60}{36} = -\frac{10}{6}, \end{aligned}$$

y la ganancia esperada de los doce juegos es igual a $12 \times (-10/6) = -20$. Se ve que la ganancia esperada es negativa, lo cual no significa que un jugador que apueste a los mayores siempre va ya a perder, sino que algunos juegos va a perder y otros va a ganar; sin embargo, es muy posible que pierda en la mayoría de ellos, y es muy probable que su ganancia sea negativa.

Lo mismo ocurre para una persona que está apostando a los menores. En estos casos, la casa gana en promedio.

Sin embargo, ¿cuál es la ganancia de la casa con dos jugadores, uno apostando a los mayores y el otro a los menores?

En este caso, si uno de los jugadores gana, el otro pierde y se paga al ganador con la apuesta del perdedor: **la casa no obtiene ganancia, pero tampoco pierde**. Si la suma de los dos resultados es siete, ninguno de los jugadores gana, los dos pierden 10 pesos y **la ganancia de la casa es igual a 20**. Entonces, el recorrido de G es $R_G = \{0, 20\}$ y su función de densidad es

$$f_G(20) = 6/36 = 1/6 \quad \text{y} \quad f_G(0) = 30/36 = 5/6,$$

con la cual se calcula el valor esperado:

$$E(G) = 0f_G(0) + (20)f_G(20) = 0 \left(\frac{5}{6} \right) + 20 \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{20}{6};$$

o sea que también en este caso gana la casa.

En este ejemplo se puede ver que la casa siempre gana, pues en un gran número de juegos (la casa juega todos los juegos) es muy probable que su ganancia promedio sea positiva.

Ejercicios

EJERCICIO 4.1. Un dado no cargado tiene en tres de sus caras el número 1, en dos de sus caras el número -4 y en la última cara el número 5. Se lanza el dado una vez, con X como la variable que indica el número de la cara que cae hacia arriba. Encuentre

- (a) el recorrido de X ,
- (b) la función de densidad de X ,
- (c) el valor esperado de X ,
- (d) ¿a una casa de juego le convendría jugar?

EJERCICIO 4.2. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es $f(x) = x/2$ cuando $0 \leq x \leq 2$, y cero en otro caso. Encuentre el valor esperado de X .

EJERCICIO 4.3. Suponga que en una lotería se venden 10 000 boletos con valor unitario de un peso. El ganador recibe un premio de 5 000 pesos. Si alguien compra cuatro boletos, ¿cuál es su ganancia esperada?

EJERCICIO 4.4. Un hombre apuesta a favor de un evento que tiene una probabilidad de 0.25 de ocurrir. Paga 100 pesos por apuesta, acordando que los perderá si no ocurre el evento, pero recibirá 300 pesos si ocurre éste.

- (a) Determine la ganancia esperada en un juego.
 (b) ¿Le conviene jugar varias veces?

EJERCICIO 4.5. Un vendedor de helados puede ganar 300 pesos en días soleados y 200 pesos en días lluviosos. ¿Cuál es la ganancia esperada un día en que la probabilidad de lluvia es 0.3?

2. Propiedades de la esperanza matemática

TEOREMA 4.1. Dada una variable aleatoria X y $U = h(X)$, una función de X , se tiene que

- $E(U) = \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) f_X(x_i)$ en el caso discreto.
- $E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$ en el caso continuo.

Demostración

Caso discreto: $E(U) = \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) f_X(x_i)$.

$$\begin{aligned} \sum_{x_i \in R_X} h(x_i) f_X(x_i) &= \sum_{u_i \in R_U} u_i \left(\sum_{h(x_j)=u_i} f_X(x_j) \right) \\ &= \sum_{u_i \in R_U} u_i f_U(u_i) = E(U), \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

Caso continuo: $E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx$.

El caso continuo se probará únicamente cuando $u = h(x)$ sea una función continua y diferenciable.

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx.$$

Se efectúa el cambio de variable $u = h(x)$; entonces $x = h^{-1}(u)$ y $dx = [h^{-1}(u)]' du$, quedando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \underbrace{f_X(h^{-1}(u)) [h^{-1}(u)]'}_{f_U(u)} du = E(U),$$

que es lo que se quería probar.

De acuerdo con el teorema anterior, el valor esperado de U se denota indistintamente como $E(U)$ o como $E(h(X))$.

TEOREMA 4.2. *Dada C , una constante,*

$$E(C) = C.$$

El teorema afirma que si en un experimento siempre se obtiene un mismo valor, entonces el promedio esperado del experimento es ese valor único.

Demostración

Si se tiene una variable aleatoria X que toma un único valor $X = C$, entonces el recorrido de X es $R_X = \{C\}$ y su función de densidad es $f_X(x) = 1$ si $x = C$ y 0 en otro caso. Así,

$$E(X) = C f_X(C) = C,$$

que prueba el teorema.

TEOREMA 4.3. *Sean X y Y dos variables aleatorias, y sea $U = h(X, Y)$ una función continua y diferenciable; entonces el valor esperado de U es igual a*

$$E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

cuando X y Y son continuas, y a

$$E(U) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) f_{XY}(x_i, y_j),$$

cuando X y Y son discretas.

Demostración

Caso discreto: Considere la suma

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} h(x_i, y_j) f_{XY}(x_i, y_j)$$

y reagrupe los sumandos de manera que

$$= \sum_{i=1} u_i \left(\sum_{k,j | h(x_k, y_j) = u_i} f_{XY}(x_k, y_j) \right) = \sum_{i=1} u_i f_U(u) = E(U).$$

que es lo que se quería demostrar.

Caso continuo: Considere la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy,$$

y efectúe el cambio de variable $(u, v) = (h(x, y), x)$; entonces $dx dy = |J| dv du$, donde J es el jacobiano de la transformación. Haciendo la sustitución se llega a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} u \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{f_{XY}(x(u, v), y(u, v)) |J|}^{f_{UV}(u, v)} dv}_{f_U(u)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u f_U(u) du = E(U), \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 4.4 (Propiedad de linealidad). *Si X y Y son dos variables aleatorias y a y b dos constantes, entonces*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Demostración

Si $Z = aX + bY$, entonces

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f_{XY}(x, y) dx dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ax \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy}_{f_X(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} by \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx}_{f_Y(y)} dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ax f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} by f_Y(y) dy = aE(X) + bE(Y). \end{aligned}$$

COROLARIO 4.1. *Si X y Y son variables aleatorias y a y b dos constantes, entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

- $E(aX) = aE(X)$.
- $E(a + bX) = a + bE(X)$.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

La demostración se deja como ejercicio.

TEOREMA 4.5 (Propiedad multiplicativa). *Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces*

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Demostración

Como X y Y son variables aleatorias independientes, se tiene que $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ y entonces

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(X)E(Y), \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

COROLARIO 4.2. Si X y Y son dos variables aleatorias independientes, entonces para cualquier par de funciones: $h(X)$ y $g(Y)$, se tiene que

$$E(h(X)g(Y)) = E(h(X))E(g(Y)).$$

2.1 Aplicación de la distribución de Maxwell. En la sección 1.5.2 se vio que la distribución más probable de un sistema de Maxwell de N partículas con energía total E , en diferentes niveles de energía, está dada por $(n_1, n_2, \dots, n_M)$, donde

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i}} = g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i},$$

con las restricciones $N = \sum n_i$ y $\mathcal{E} = \sum n_i \epsilon_i$.

Para el caso de un gas ideal, la energía en cada nivel y la constante β están dadas por

$$\epsilon_i = \frac{1}{2} m v_i^2 \quad y \quad \beta = \frac{1}{kT},$$

donde k , T , m y ϵ_i son la constante de Boltzmann, la temperatura absoluta, la masa de la partícula y la energía cinética, respectivamente; y $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es el vector de velocidad de la partícula con $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Además, si se considera a $g_i = 1$ y a la energía como una variable continua, la distribución más probable se puede reescribir como

$$n = c e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad \text{con} \quad c = e^{-\alpha},$$

el número de partículas en la región determinada por

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad y \quad d\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) + (dv_x, dv_y, dv_z),$$

se puede presentar mediante el modelo continuo siguiente:

$$dn_{\vec{v}} = f_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} = c e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\vec{v}.$$

Para determinar el valor de c de esta expresión, se utiliza el hecho de que el total de partículas es N ($\sum n_i = N$). En el caso continuo, la suma se transforma en integral:

$$\int f_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} = N.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int f_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} &= c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z \\ &= c \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dx \right)^3 = c \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} = N. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$c = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2},$$

de manera que

$$f_{\vec{v}}(\vec{v}) d\vec{v} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d\vec{v}.$$

Con esta expresión se puede tener una función de densidad del vector $\vec{v}$ y de su magnitud, v . La primera es la expresión

$$g_{\vec{v}}(\vec{v}) = \frac{f_{\vec{v}}(\vec{v})}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

La segunda se obtiene aplicando el teorema 3.5.3, generalizado a $\mathbb{R}^3$.

Para encontrar la función de densidad de $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ se introducen dos variables auxiliares, θ y ϕ , las cuales junto con v forman una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, invertible y dada por

$$v_x = v \sin \theta \cos \phi, \quad v_y = v \sin \theta \sin \phi \quad y \quad v_z = v \cos \theta,$$

donde $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$ y $0 < v < \infty$.

Como el valor absoluto del jacobiano de la transformación es $|J| = v^2 \sin \theta$, entonces

$$g_{v,\theta,\phi}(v, \phi, \theta) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \sin \theta.$$

A partir de esta expresión, se encuentra la función de densidad marginal de v :

$$\begin{aligned} g_v(v) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(v, \phi, \theta) d\theta d\phi \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sin \theta d\theta d\phi \right) \\ &= \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2, \end{aligned}$$

entonces

$$g_v(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

La relación

$$Ng_v(v)dv = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

indica el número de partículas con magnitud de velocidad entre v y $v + dv$ y se conoce como **distribución de Maxwell**.

EJEMPLO 4.4. Encuentre el valor esperado de v y el valor esperado de la energía cinética de un gas ideal maxweliano.

Solución

El valor esperado de v se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{v} = E(v) &= \int_0^\infty v g_v(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-2} \\ &= 2\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2kT}{\pi m} \right)^2 = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La energía cinética esperada del sistema es igual a la suma (o la integral) de las energías ($\bar{E} = \frac{1}{N} \sum \epsilon_i n_i$). Como v es continua, la suma se transforma en integral:

$$\bar{E} = E(\mathcal{E}) = \int_0^\infty \frac{mv^2}{2} g_v(v) dv = \frac{m}{2} \int_0^\infty v^2 g_v(v) dv = \frac{m}{2} E(v^2).$$

El valor esperado de v^2 es

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= E(v^2) = \int v^2 g_v(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-5/2} = \frac{3kT}{m}.\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{\epsilon} = \frac{m}{2} \frac{3kT}{m} = \frac{3kT}{2}.$$

EJEMPLO 4.5. Considere un gas ideal contenido en un horno a una temperatura absoluta T , el cual escapa a través de un pequeño orificio en la pared. El orificio es tan pequeño que no altera el equilibrio en el horno. Encuentre la función de densidad de la velocidad de las partículas que escapen del horno, así como la energía cinética esperada de ellas.

Solución

El número de partículas que emergen a través de un pequeño orificio (proceso de efusión) es igual al número de partículas que golpearán el área ocupada por el orificio si éste estuviera cerrado. Así que el número medio de partículas con velocidad entre $\vec{v}$ y $\vec{v} + d\vec{v}$ que golpea una unidad de área de la pared por unidad de tiempo, está dado por

$$\Phi(\vec{v})d\vec{v} = \frac{Nv_z}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

con $-\infty \leq v_x, v_y < \infty$, $0 < v_z < \infty$ y V como el volumen del horno. En coordenadas esféricas (v, θ, ϕ) , la expresión anterior queda así:

$$\Phi(v, \phi, \theta)d\vec{v} = \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi dv,$$

con $0 \leq \phi < 2\pi$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $0 < v < \infty$.

De esta manera, el número medio de partículas con rapidez entre v y $v + dv$ por unidad de área de recipiente y por unidad de tiempo está dado por la función de densidad marginal de v :

$$\begin{aligned}\Phi(v)dv &= \left(\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= \frac{\pi N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.\end{aligned}$$

El número total de partículas que chocan contra la pared por unidad de tiempo es

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \int \Phi(v) dv = \pi \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= \frac{1}{4} \frac{N}{V} 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{1}{4} \frac{N}{V} E(v) = \frac{N}{4V} \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

La función de densidad de v de las partículas que escapan por el orificio del recipiente está dada por

$$\frac{\Phi(v)}{\Phi_0} = \frac{\pi \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}{\frac{1}{4} \frac{N}{V} \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}.$$

Con esta función de densidad se puede encontrar el valor esperado de v^2 , para después calcular la energía promedio de las partículas que escapan:

$$\overline{v^2} = E(v^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \int_0^\infty v^5 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^{-3} = \frac{4kT}{m}$$

Así, la energía cinética esperada de las partículas que se escapan es

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{4kT}{2}.$$

Ejercicios

EJERCICIO 4.6. Suponga que en una lotería se venden 10 000 boletos a un peso cada uno para un premio de 6 000 pesos, 2 000 boletos a dos pesos cada uno para un premio de 1 500 pesos y 3 000 boletos a 4 pesos cada uno para un premio de 2 500 pesos. Una persona compra dos boletos del primer tipo, uno del segundo tipo y tres del tercer tipo. ¿Cuál es su ganancia esperada?

EJERCICIO 4.7. Un hombre apuesta a favor de un evento que tiene una probabilidad de 0.20 de que ocurra. Paga 100 pesos por apuesta, acordando que los perderá si no ocurre el evento, pero recibirá 300 pesos si ocurre el mismo.

- (a) Determine su ganancia esperada si al jugar dobla su apuesta.
- (b) Determine su ganancia esperada si apuesta 10 veces en este juego.

EJERCICIO 4.8. Suponga que el número de pasajeros que sube a un microbús por viaje es una variable aleatoria cuya media es 50, y que el importe de un viaje por pasajero es una variable aleatoria cuya media es 2.80 pesos. Considerando que ambas variables son independientes, encuentre el ingreso esperado de un microbús por viaje.

EJERCICIO 4.9. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidades $f_X(x) = (x + 2)/18$, para $x \in (-2, 4)$, y 0 en otro caso. Encuentre el valor esperado de X , de $(X + 2)^3$ y de $6X - 2(X + 2)^3$.

EJERCICIO 4.10. Considere $f_X(x) = 1/5$, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$, y 0 en otro caso. Calcule la esperanza de X , X^2 y de $(X + 2)^2$.

EJERCICIO 4.11. Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad de probabilidades $f(x)$ diferente de cero en $x = -1, 0, 1$.

- (a) Si $f(0) = 1/2$ y la esperanza de X es de $1/6$, determine $f(1)$ y $f(-1)$.
 (b) Con los datos de (a) determine la esperanza de X^2 .

EJERCICIO 4.12. Una urna contiene 10 bolas, ocho de las cuales están marcadas con el número 2, y dos con el número 5. Una persona saca de la urna tres bolas al azar sin reemplazo, y recibe tantos miles de pesos como marquen las tres bolas. Encuentre el valor esperado de la ganancia de esa persona.

EJERCICIO 4.13. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidades $f(x)$. Si m es la mediana de la distribución de X ($P(X \leq m) = 1/2$) y b es una constante real, demuestre que

$$E(|x - b|) = E(|x - m|) - 2 \int_b^m (x - b)f(x)dx.$$

¿Para qué valor de b se hace mínimo $E(|x - b|)$?

EJERCICIO 4.14. Suponga que en promedio 1 500 personas entran a un cine diariamente, y que cada persona gasta en promedio \$70. ¿Cuál es el ingreso promedio diario del cine?

3. La varianza

La varianza es una medida de la dispersión de los datos, cuya definición formal es

DEFINICIÓN 4.2. Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$, se conoce como **varianza** de X al promedio de las diferencias al cuadrado entre cada valor y su media, y se denota como

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx, & \text{caso continuo.} \\ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f_X(x_i), & \text{caso discreto.} \end{cases}$$

Si los datos están concentrados en un punto, la varianza es pequeña; si los datos están dispersos, la varianza es grande.

La varianza de una variable aleatoria X se denota como

$$\sigma^2 = V(X).$$

TEOREMA 4.6. Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$,

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \mu_X^2.$$

Demostración

Observe que $\mu_X = E(X)$ es un valor constante; entonces, en la expresión

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2),$$

se aplican las siguientes propiedades de linealidad:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(2X\mu_X) + E(\mu_X^2) = E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2, \end{aligned}$$

lo que demuestra el teorema.

TEOREMA 4.7. La varianza de una variable aleatoria X cumple las siguientes propiedades:

1. $V(C) = 0$, para cualquier constante C .
2. $V(X + C) = V(X)$, para cualquier constante C .
3. $V(CX) = C^2 V(X)$, para cualquier constante C .
4. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, si X y Y son variables aleatorias independientes.

Demostración

1. Considere la función $h(X) = C$; entonces $E(h(X)) = E(C) = C$ y

$$V(h(X)) = V(C) = E(C - E(C))^2 = E(0^2) = 0.$$

Esta propiedad afirma que si en un proceso aleatorio siempre ocurre el mismo valor, en el proceso no hay variación y su dispersión es nula.

2. Considere la función $h(X) = X + C$; entonces

$$\begin{aligned} E(h(X)) &= E(X + C) = E(X) + C \quad \text{y} \\ V(h(X)) &= V(X + C) = E(X + C - E(X + C))^2 \\ &= E(X + C - E(X) - C)^2 = E(X - E(X))^2 = V(X). \end{aligned}$$

Esta propiedad afirma que si en un proceso aleatorio a cada posible valor se le suma una misma cantidad, se cambia su posición pero no su dispersión.

3. Considere la función $h(X) = CX$; entonces

$$\begin{aligned} E(h(X)) &= E(CX) = CE(X), \quad \text{y} \\ V(h(X)) &= V(CX) = E(CX - E(CX))^2 = E(CX - CE(X))^2 \\ &= E(C^2(X - E(X))^2) = C^2 E(X - E(X))^2 = C^2 V(X). \end{aligned}$$

4. Si X y Y son variables aleatorias independientes, se tiene que $E(XY) = E(X)E(Y)$, de modo que

$$\begin{aligned} E(X - E(X))(Y - E(Y)) &= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = 0. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E(X + Y - E(X + Y))^2 \\ &= E((X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2 \\ &= \underbrace{E(X - E(X))^2}_{V(X)} + 2 \underbrace{E(X - E(X))E(Y - E(Y))}_0 \\ &\quad + \underbrace{E(Y - E(Y))^2}_{V(Y)}. \end{aligned}$$

Al anularse el segundo sumando, queda solamente

$$V(X + Y) = E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 = V(X) + V(Y),$$

lo que demuestra el teorema.

EJEMPLO 4.6. Sea X una variable aleatoria tal que $V(X) = 25$ y $E(X) = 13$. Encuentre los valores a y b tales que $Y = aX + b$, $E(Y) = 0$ y $V(Y) = 1$.

Solución

Se sabe que

$$E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b = 13a + b,$$

y por hipótesis este valor esperado es cero. Además, se sabe que

$$V(Y) = V(aX + b) = V(aX) = a^2 V(X) = 25a^2,$$

que también por hipótesis es igual a 1. Entonces se tiene que resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$13a + b = 0 \quad \text{y} \quad 25a^2 = 1,$$

cuya solución es: $a = \pm 1/5$ y $b = \mp 13/5$.

Ejercicios

EJERCICIO 4.15. Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

- (a) Encuentre la media de $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- (b) Encuentre la varianza de $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- (c) Encuentre el valor esperado de $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

EJERCICIO 4.16. Sea X una variable aleatoria que representa el número de llamadas telefónicas que recibe un conmutador en un intervalo de 5 minutos, y cuya función de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

1. Encuentre las probabilidades de que en un intervalo de 5 minutos se reciba al menos una llamada.
2. Determine la función de distribución de X .
3. Determine el valor esperado de X y de X^2 , y la varianza de X .

EJERCICIO 4.17. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x) = kx^2$, para $x \in (-1, 1)$.

1. Determine el valor de k .
2. Determine la función de distribución acumulativa y gráfíquela.

3. Calcule $P(X \geq 1/2)$ y $P(-1/2 \leq X \leq 1/2)$.
4. Determine el valor esperado de X y de X^2 , y la varianza de X .

EJERCICIO 4.18. Encuentre la media y la varianza, si existen, de cada una de las variables aleatorias con las siguientes distribuciones:

1. $f(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!}(1/2)^3$, con $x = 0, 1, 2, 3$; 0 en otro caso.
2. $f(x) = 6x(1-x)$, con $x \in (0, 1)$; 0 en otro caso.
3. $f(x) = 2/x^3$, con $x \in (1, \infty)$; 0 en otro caso.

EJERCICIO 4.19. Se lanzan dos bolas a cuatro cajas, de tal manera que cada bola tiene igual probabilidad de caer en cualquiera de las caja. Sea X la variable aleatoria que indica el número de bolas en la primera caja.

1. ¿Cuál es la función de densidad de X ?
2. ¿Cuál es la función de distribución acumulativa de X ?
3. Encuentre la media y la varianza de X .

EJERCICIO 4.20. Sea una variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = k \left(\frac{1}{\beta}\right) \left(1 - \frac{(x-\alpha)}{\beta^2}\right)$, para $x \in (\alpha - \beta, \alpha + \beta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$.

1. Encuentre k tal que $f(x)$ sea función de densidad.
2. Encuentre la media y la varianza de X .
3. Encuentre $E(|X - \alpha|)$.

4. Covarianza y correlación

Se vio que en la expresión

$$V(X+Y) = E(X - E(X))^2 + 2E(X - E(X))E(Y - E(Y)) + E(Y - E(Y))^2,$$

el segundo término es igual a cero cuando X y Y son independientes. Ahora vamos a revisar lo que ocurre en el caso de que X y Y no sean independientes.

DEFINICIÓN 4.3. Sean X y Y dos variables aleatorias definidas en un espacio muestral Ω ; la **covarianza** de X y Y se define con la relación

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y),$$

donde μ_X y μ_Y son las medias de X y de Y , respectivamente.

La covarianza es una medida de la concordancia con que varían las dos variables. De la definición anterior se sigue que

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X).$$

TEOREMA 4.8. Sean X y Y dos variables aleatorias definidas en un espacio muestral Ω ; entonces

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y.$$

Demostración

Al desarrollar la expresión $E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$, y aplicando la propiedad de linealidad de la esperanza matemática, se tiene que

$$\begin{aligned} E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) &= E(XY - Y\mu_X - X\mu_Y + \mu_X\mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X\mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X\mu_Y, \end{aligned}$$

quedando demostrado el teorema.

Así, en general la varianza de la suma de dos variables aleatorias es igual a

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + \text{Cov}(X, Y).$$

EJEMPLO 4.7. Sean X y Y dos variables aleatorias definidas en un espacio muestral Ω , cuya función de densidad conjunta es

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la covarianza de X y Y .

Solución

Primero se encuentran las medias de las dos variables,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} 24x^2 y dy dx = \frac{2}{5},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} 24xy^2 dx dy = \frac{2}{5},$$

luego se encuentra el valor esperado del producto XY :

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} 24x^2 y^2 dx dy = \frac{2}{15}.$$

Finalmente, se tiene que

$$\text{Cov}(XY) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{15} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{2}{75}.$$

TEOREMA 4.9. Sean X y Y dos variables aleatorias definidas en un espacio muestral Ω , y se cumplen las siguientes propiedades:

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$.
2. $Cov(aX, bY) = abCov(Y, X)$, donde a y b son dos constantes.
3. $Cov(X, -Y) = -Cov(Y, X)$.

Demostración

1. Como el producto es conmutativo, se tiene que $Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) = E(Y - \mu_Y)(X - \mu_X) = Cov(Y, X)$.
2. Usando la propiedad de linealidad del valor esperado, se tiene que

$$\begin{aligned} Cov(aX, bY) &= E(aXbY) - E(aX)E(bY) \\ &= ab[E(XY) - (X)E(Y)] = abCov(XY). \end{aligned}$$

3. El resultado se obtiene como corolario de la propiedad anterior, cuando $a = 1$ y $b = -1$.

Una manera de medir la asociación lineal entre las dos variables es con el coeficiente de correlación.

DEFINICIÓN 4.4. Dadas dos variables aleatorias X y Y definidas en un espacio muestral Ω , se define el **coeficiente de correlación** de X y Y por la relación

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

TEOREMA 4.10. El coeficiente de correlación de las variables X y Y cumple la desigualdad

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$$

Demostración

Considere las nuevas variables aleatorias $X^* = (X - \mu_X)/\sigma_X$ y $Y^* = (Y - \mu_Y)/\sigma_Y$, las cuales tienen media cero y varianza igual a 1, ya que

$$E(X^*) = E\left[\frac{(X - \mu_X)}{\sigma_X}\right] = \frac{E(X) - \mu_X}{\sigma_X} = 0,$$

y

$$V(X^*) = V\left(\frac{(X - \mu_X)}{\sigma_X}\right) = \frac{V(X - \mu_X)}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1.$$

Observe que

$$Cov(X^*, Y^*) = \rho_{XY}$$

y que

$$\begin{aligned} V(X^* + Y^*) &= V(X^*) + V(Y^*) + 2Cov(X^*, Y^*) \\ &= 2 + 2\rho_{XY} = 2(1 + \rho_{XY}). \end{aligned}$$

Como la varianza es positiva, se sigue que $1 + \rho_{XY} \geq 0$, lo que implica que $-1 \leq \rho_{XY}$. Ahora observe que

$$\begin{aligned} V(X^* - Y^*) &= V(X^*) + V(Y^*) - 2Cov(X^*, Y^*) = \\ &= 2 - 2\rho_{XY} = 2(1 - \rho_{XY}), \end{aligned}$$

y $1 - \rho_{XY} \geq 0$, lo que implica que $\rho_{XY} \leq 1$, y queda probado el teorema.

TEOREMA 4.11. Sean X y Y dos variables aleatorias relacionadas mediante la ecuación $Y = a + bX$; entonces $\rho_{XY} = \pm 1$.

Demostración

Si $E(X) = \mu_X$ y $V(X) = \sigma_X^2$, se sigue que

$$E(Y) = \mu_Y = E(a + bX) = a + b\mu_X \quad \text{y} \quad V(Y) = b^2 V(X) = b^2 \sigma_X^2,$$

entonces la covarianza es igual a

$$Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) = bE(X - \mu_X)^2 = b\sigma_X^2$$

y el coeficiente de correlación es

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{b\sigma_X^2}{|b|\sigma_X^2} = \pm 1.$$

El signo de ρ_{XY} coincide con el signo de b , la pendiente de la recta

$$Y = a + bX.$$

TEOREMA 4.12. Si X y Y son dos variables aleatorias independientes, entonces $\rho_{YX} = 0$.

Demostración

Como X y Y son dos variables aleatorias independientes, entonces

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \mu_X \mu_Y$$

y

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y = 0,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

El resultado inverso es falso: si la covarianza de dos variables aleatorias es cero, entonces las variables aleatorias no necesariamente son independientes.

EJEMPLO 4.8. Sea X una variable aleatoria continua, con función de densidad igual a $f_X(x) = 1/2$, si $-1 \leq x \leq 1$ y cero en otra parte. Sea $Y = X^2$ otra variable aleatoria. Encuentre la covarianza entre X y Y .

Solución

Observe que

$$E(X) = \int_{-1}^1 \frac{xdx}{2} = 0,$$

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{2} = \frac{1}{3},$$

y

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{2} = 0;$$

entonces se tiene que

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = 0.$$

Aquí claramente se ve que Y depende de X y, sin embargo, la covarianza de X y Y es igual a cero.

4.1 Problema de tanques de guerra. Suponga que usted es estratega militar y quiere determinar cuántos tanques tiene el ejército contrario. Usted tiene la información de que los tanques están numerados del 1 al N , y puede suponer que existe la misma probabilidad de observar cualquier tanque.

Suponga que se tomó una muestra aleatoria de 5 tanques ($n = 5$) y los números observados fueron

19, 8, 35, 57, 71.

Considerando esta muestra, ¿cómo puede estimarse el total de tanques que tiene el enemigo?

Lo primero que se debe hacer es ordenar los datos.

8, 19, 35, 57, 71.

Primera solución: Un grupo de sus colaboradores cree que el total de tanques puede estimarse con el valor máximo de la muestra; esto es, ellos proponen que

$$\hat{N}_1 = \max\{X_i\} = 71.$$

Segunda solución: Otro grupo cree que si no se observó el tanque con el número más pequeño (el número 1), no es necesariamente cierto que se haya observado el tanque con el número mayor (el número N). Ellos proponen considerar una distancia entre el máximo valor de la muestra y el valor de N . Se propone que esta distancia sea el promedio de las distancias entre cada dos datos consecutivos de la muestra ($d_i = X_i - X_{i-1}$).

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 8 & 19 & 35 & 57 & 71 & N \\
 \underbrace{}_{d_1} & \underbrace{}_{d_2} & \underbrace{}_{d_3} & \underbrace{}_{d_4} & \underbrace{}_{d_5} & \underbrace{}_{d_6} &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 d_6 &= \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} \\
 &= \frac{(8-1) + (19-8) + (35-19) + (57-35) + (71-57) + (N-71)}{5} \\
 &= \frac{71-1}{5} = \frac{\text{máx}\{X_i\} - 1}{n}.
 \end{aligned}$$

El estimador propuesto es

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_2 &= \text{máx}\{X_i\} + d_6 = \text{máx}\{X_i\} + \frac{\text{máx}\{X_i\} - 1}{n} \\
 &= \frac{n+1}{n} \text{máx}\{X_i\} - \frac{1}{n} = \frac{6}{5}71 - \frac{1}{5} = 85.
 \end{aligned}$$

Tercera solución: Un tercer grupo piensa que la distancia entre el máximo valor y N debe ser semejante a la distancia entre el 1 y el mínimo valor de la muestra, esto es

$$N - \text{máx}\{X_i\} = \text{mín}\{X_i\} - 1.$$

Así, el estimador que proponen es

$$\hat{N}_3 = \text{máx}\{X_i\} + \text{mín}\{X_i\} - 1 = 78.$$

Ahora usted tiene el dilema de elegir cuál es el mejor estimador de los tres propuestos: $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ o $\hat{N}_3$,

¿Cómo tomar la decisión?

Parece razonable pensar que un buen estimador es aquel que en promedio está cerca del valor que ha estimado.

¿Qué método de estimación da mejores estimadores?

Es importante ver que los tres estimadores son variables aleatorias; por tanto, para diferentes muestras los valores obtenidos serán diferentes. Se

sabe que el valor esperado de una variable aleatoria indica la posición promedio de sus posibles valores, y que la varianza mide la dispersión de estos valores. En estas circunstancias, parece razonable pedir que

1. el valor esperado de los estimadores coincida con el parámetro que estima, garantizando que los posibles valores del estimador estén alrededor del parámetro;
2. la varianza del estimador no sea muy grande, para garantizar que los posibles valores del estimador estén cerca del parámetro.

DEFINICIÓN 4.5. Se dice que un estimador es **insesgado** si su valor esperado coincide con el parámetro que estima.

Para calcular la media y la varianza de los tres estimadores, se requiere tener la función de densidad marginal y la función de densidad conjunta de los valores máximo y mínimo de la muestra.

Notación: Para simplificar la notación, en lo que sigue se va a utilizar $X_{(1)}$ para designar el mínimo y $X_{(n)}$ para designar el máximo valor en la muestra ($X_{(1)} = \min\{X_i\}$ y $X_{(n)} = \max\{X_i\}$).

La función de densidad del máximo y del mínimo valor en el problema de los tanques

Sean los eventos

- A_x : el valor máximo en la muestra es x .
- B_x : el valor mínimo en la muestra es x .

El evento A_x consiste en todos los subconjuntos que contienen al tanque número x , y los otros $n - 1$ tanques constituyen un subconjunto de los $x - 1$ tanques con número menor que x .

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots \quad x-1}_{n-1 \text{ tanques tienen uno de estos números}} \quad \underbrace{x}_{\text{máx}}$$

El evento B_y consiste de todos los subconjuntos que contienen al tanque número y y los otros $n - 1$ tanques constituyen un subconjunto de los $N - y$ tanques con número mayor que y .

$$\underbrace{y}_{\text{mín}} \quad \underbrace{y+1 \quad y+2 \quad y+3 \quad y+4 \quad \dots \quad N}_{\text{los otros } n-1 \text{ tanques tienen uno de estos números}}$$

Y el evento $A_x \cap B_y$ consiste en todos los subconjuntos que contienen a los tanques con los números x y y ($y < x$), y los otros $n - 2$ tanques

constituyen un subconjunto de los $x - 1 - y$ tanques con número mayor que y y menor que x .

$\underbrace{y}_{\text{mín}} \quad \underbrace{y+1 \quad y+2 \quad y+3 \quad y+4 \quad \dots \quad x-1}_{\text{los otros } n-2 \text{ tanques tienen uno de estos números}} \quad \underbrace{x}_{\text{máx}}$

El espacio muestral consiste de todos los subconjuntos de n elementos del total de los N tanques.

Así,

$$\begin{aligned} \#\Omega &= \binom{N}{n}, & \#A_x &= \binom{x-1}{n-1} \\ \#B_y &= \binom{N-y}{n-1} \quad \text{y} \quad \#A_x \cap B_y = \binom{x-1-y}{n-2}. \end{aligned}$$

Entonces la función de densidad marginal del número máximo en la muestra es

$$f_{(n)}(x \mid n, N) = P(X_{(n)} = x) = \frac{\#A_x}{\#\Omega} = \frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{N}{n}},$$

para $x = n, n+1, \dots, N$.

La función de densidad marginal del mínimo valor en la muestra es

$$f_{(1)}(y \mid n, N) = P(X_{(1)} = y) = \frac{\#B_y}{\#\Omega} = \frac{\binom{N-y}{n-1}}{\binom{N}{n}},$$

para $x = 1, 2, 3, \dots, N - n + 1$.

Y la función de densidad conjunta del mínimo y el máximo valor en la muestra es

$$f_{(1)(n)}(x, y \mid n, N) = P(X_{(1)} = y, X_{(n)} = x) = \frac{\#A_x \cap B_y}{\#\Omega} = \frac{\binom{x-1-y}{n-2}}{\binom{N}{n}},$$

para $y = 1, 2, 3, \dots, N - n + 1$ y $x = y + n - 1, \dots, N$.

Las tres funciones de densidad cumplen las siguientes relaciones:

$$\sum_{x=n}^N f_{(n)}(x | n, N) = 1, \quad \sum_{x=1}^{N+1-n} f_{(1)}(x | n, N) = 1 \quad \text{y}$$

$$\sum_{x=n}^N \sum_{y=1}^{x-1} f_{(1)(n)}(x, y | n, N) = 1$$

Valor esperado del máximo y del mínimo

Una técnica utilizada para encontrar el valor esperado de una variable aleatoria X es llevar la suma de la forma $\sum x f_X(x)$ a la suma $k \sum f_Y(y) = k$, donde $f_Y(y)$ es una función de densidad de una variable aleatoria del mismo tipo que $f_X(x)$, pero con otros parámetros. Esta técnica se va a utilizar aquí.

Por definición, se tiene que

$$E(X_{(n)}) = \sum_{x=n}^N x f_{(n)}(x) = \sum_{x=n}^N x \frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Observe que

$$x \binom{x-1}{n-1} = n \binom{x}{n} \quad \text{y} \quad \binom{N}{n} = \frac{n+1}{N+1} \binom{N+1}{n+1}.$$

Entonces,

$$E(X_{(n)}) = \frac{n(N+1)}{(n+1)} \sum_{x=n}^N \frac{\binom{x}{n}}{\binom{N+1}{n+1}}.$$

Haciendo el cambio de variables $x^* = x + 1$, $n^* = n + 1$ y $N^* = N + 1$, se tiene que

$$E(X_{(n)}) = \frac{n(N+1)}{(n+1)} \underbrace{\sum_{x^*=n^*}^{N^*} \frac{\binom{x^*-1}{n^*-1}}{\binom{N^*}{n^*}}}_{\sum_{x^*=n^*}^{N^*} f_{\max}(x^* | n^*, N^*) = 1} = \frac{n(N+1)}{(n+1)}.$$

Por otro lado, el valor esperado del número mínimo es

$$E(X_{(1)}) = \sum_{y=1}^{N-n+1} y f_{(1)}(y) = \sum_{y=1}^{N-n+1} y \frac{\binom{N-y}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Para obtener este valor esperado, se comienza con una suma de la forma $\sum (N+1-x)f_X(x)$, que se puede transformar en otra suma de la forma $k \sum f_Y(y) = k$, igual que antes.

$$\begin{aligned} E(N+1-X_{(1)}) &= \sum_{y=1}^{N-n+1} (N+1-y) \frac{\binom{N-y}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{n(N+1)}{(n+1)} \underbrace{\sum_{y=1}^{N-n+1} \frac{\binom{N+1-y}{n}}{\binom{N+1}{n+1}}}_{\sum_{y=1}^{N^*-n^*+1} f_{(1)}(y|n^*,N^*)=1} = \frac{n(N+1)}{(n+1)}, \end{aligned}$$

ya que

$$(N+1-y) \binom{N-y}{n-1} = n \binom{N+1-y}{n}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E(N+1-X_{(1)}) &= E(N+1) - E(X_{(1)}) \\ &= N+1 - E(X_{(1)}) = \frac{n(N+1)}{(n+1)}. \end{aligned}$$

Despejando el valor esperado del mínimo, se tiene que:

$$E(X_{(1)}) = N+1 - \frac{n(N+1)}{(n+1)} = \frac{N+1}{n+1}.$$

Varianza del máximo y del mínimo

Por definición, se tiene que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$; entonces para

$$E(X(X+1)) = E(X^2) + E(X)$$

la varianza se puede reescribir como

$$V(X) = E(X(X+1)) - E(X) - (E(X))^2.$$

Utilizando esta relación se va a encontrar la varianza del máximo en la muestra.

$$E(X_{(n)}(X_{(n)}+1)) = \sum_{x=n}^N (x+1)x f(x) = \sum_{x=n}^N (x+1)x \frac{\binom{x-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Observe que

$$(x+1)x \binom{x-1}{n-1} = (n+1)n \binom{x+1}{n+1}$$

y

$$\frac{(n+1)(n+2)}{(N+1)(N+2)} \binom{N+2}{n+2} = (n+1)n \binom{N}{n}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} E((X_{(n)}+1)X_{(n)}) &= \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)} \underbrace{\sum_{x=n}^N \frac{\binom{x+1}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}}}_{\sum_{x=n}^N f_{(n)}(x+2|n+2, N+2)=1} \\ &= \frac{n(N+1)(N+2)}{(n+2)}. \end{aligned}$$

Y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} V(X_{(n)}) &= \frac{n(N+1)(N+2)}{(n+2)} - \frac{n(N+1)}{(n+1)} - \left(\frac{n(N+1)}{(n+1)} \right)^2 \\ &= \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Para calcular la varianza del mínimo, primero se encuentra

$$\begin{aligned}
 & E((N+1-X_{(1)})(N+2-X_{(1)})) \\
 &= \frac{n(n+1)(N+1)(N+2)}{(n+1)(n+2)} \sum_{y=1}^{N+1-n} \underbrace{\frac{\binom{N+2-y}{n+1}}{\binom{N+2}{n+2}}}_{\sum_{y=1}^{N+1-n} f_1(y+2|n+2, N+2)=1} \\
 &= \frac{n(N+1)(N+2)}{(n+2)}.
 \end{aligned}$$

De aquí se calcula la varianza de $X_{(1)}$, utilizando el hecho de que $V(X) = E(N+1-X)(N+2-X) - (N+1)(N+2) + (2N+3)E(X) - (E(X))^2$, en particular para $X_{(1)}$:

$$V(X_{(1)}) = \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Ya se tienen los elementos para obtener la media y la varianza de los tres estimadores.

- Para el primer estimador: $\hat{N}_1 = X_{(n)}$

$$E(\hat{N}_1) = \frac{n(N+1)}{n+1} = N - \frac{N-n}{n+1}$$

$$V(\hat{N}_1) = V(X_{(n)}) = \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

- Para el segundo estimador: $\hat{N}_2 = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$

$$E(\hat{N}_2) = E\left(\frac{n+1}{n} \hat{N}_1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n} E(\hat{N}_1) - \frac{1}{n} = N + \frac{n-1}{n}$$

$$V(\hat{N}_2) = V\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{(N+1)(N-n)}{(n+2)n}.$$

- Para el tercer estimador: $\hat{N}_3 = X_{(n)} + X_{(1)} - 1$

$$E(\hat{N}_3) = E(X_{(n)} + X_{(1)} - 1) = N.$$

$$V(\hat{N}_3) = V(X_{(n)} + X_{(1)}) = \frac{2(N+1)(N-n)(n-1)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Si revisamos la media de los tres estimadores, se puede ver que el valor esperado del primero presenta un sesgo negativo ($-\frac{N-n}{n+1}$), que puede ser considerable si N es mucho mayor que n . La media del segundo estimador también presenta un sesgo, pero ahora positivo ($\frac{n-1}{n}$), y éste

aumenta conforme el tamaño de la muestra crece, pero no sobrepasa el uno. El valor esperado del tercer estimador no tiene sesgo, es decir, es **insesgado**. Así, considerando la media de los estimadores, se tiene que el mejor es $\hat{N}_3$, luego sigue $\hat{N}_2$ y al final $\hat{N}_1$.

En cuanto a la varianza de los tres estimadores, se observa que para todo n y N , ($n < N$), $V(\hat{N}_1) < V(\hat{N}_2)$, pero conforme aumenta el tamaño de la muestra, la diferencia entre las dos varianzas disminuye. Por otro lado, cuando n es mayor o igual a 5, se tiene $V(\hat{N}_2) < V(\hat{N}_3)$, y conforme n crece la diferencia aumenta.

Conclusión: el estimador con menor varianza tiene un sesgo grande, lo cual significa que los valores del estimador para las diferentes muestras en promedio están lejos de N . Por otro lado, el estimador insesgado tiene una varianza que puede ser considerablemente grande, mientras que el segundo estimador tiene un sesgo que puede ser corregido porque sólo depende del tamaño de la muestra, y su varianza no es tan grande con respecto a las otras.

Con este análisis se ve que, corrigiendo el sesgo de $\hat{N}_2$, el mejor método de estimación es el segundo. Así,

$$\hat{N} = \hat{N}_2 - \frac{n-1}{n} = \frac{n+1}{n} X_{(n)} - \frac{n-1}{n},$$

es un buen estimador ya que es insesgado, $E(\hat{N}) = N$, y su varianza no es tan grande.

Entonces, para establecer sus acciones de guerra, usted debe considerar que el enemigo tiene

$$\hat{N} = 84.2$$

tanques.

Para el cálculo de la varianza del tercer estimador se utilizó la covarianza entre el máximo y el mínimo valor; se deja como ejercicio calcular esta covarianza.

Ejercicios

EJERCICIO 4.21. Calcule la covarianza del valor máximo y mínimo de la muestra en el problema de los tanques.

EJERCICIO 4.22. Sean X y Y variables aleatorias continuas, con función de densidad conjunta dada por

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la covarianza de X y Y .

EJERCICIO 4.23. Muestre que

$$(a) \quad x \binom{x-1}{n-1} = n \binom{x}{n}.$$

$$(b) \quad \binom{N}{n} = \frac{n+1}{N+1} \binom{N+1}{n+1}.$$

$$(c) \quad (N+1-x) \binom{N-x}{n-1} = \binom{N+1-x}{n}.$$

5. Esperanza condicional

DEFINICIÓN 4.6. Dadas dos variables aleatorias X y Y con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$, se llama **esperanza condicional** de la variable X , dado que la variable Y toma un valor y , a la expresión

- $E(X|Y = y) = \sum x_i f_{X|Y}(x_i|y)$, en el caso discreto.
- $E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$, en el caso continuo.

Como se ve, la esperanza condicional $E(X|Y = y)$ es una función de y , que se puede escribir como $h(y) = E(X|Y = y)$; entonces $h(Y) = E(X|Y)$ es una variable aleatoria.

TEOREMA 4.13. Dadas dos variables aleatorias X y Y , se tiene que

$$E(E(X|Y)) = E(X).$$

Demostración

La demostración se hace sólo para el caso continuo; para el caso discreto basta sustituir las integrales por sumas.

Se sabe que

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)},$$

por lo tanto,

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx,$$

y el valor esperado de $E(X|Y)$ es

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E(X); \end{aligned}$$

queda demostrado el teorema.

TEOREMA 4.14. *Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces*

$$E(X|Y) = E(X).$$

Demostración

Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x),$$

de esto se sigue que

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = E(X);$$

queda demostrado el teorema.

TEOREMA 4.15. *Si X y Y son variables aleatorias, entonces*

$$V(E(X|Y)) \leq V(X).$$

Demostración

Sea X tal que $E(X) = \mu_X$ y sea $\varphi(y) = E(X|Y = y)$; entonces

$$V(E(X|Y)) = E(E(X|Y) - E(E(X|Y)))^2 = E(\varphi(Y) - \mu_X)^2,$$

y

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X - \mu_X)^2 = E(X - \varphi(Y) + \varphi(Y) - \mu_X)^2 \\ &= E(X - \varphi(Y))^2 + E(\varphi(Y) - \mu_X)^2 + 2E(X - \varphi(Y))(\varphi(Y) - \mu_X). \end{aligned}$$

Ahora se analiza el último sumando

$$\begin{aligned}
 E(X - \varphi(Y))(\varphi(Y) - \mu_X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \varphi(y))(\varphi(y) - \mu_X) f_{X|Y}(x, y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \varphi(y))(\varphi(y) - \mu_X) f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(y) - \mu_X) f_Y(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \varphi(y)) f_{X|Y}(x|y) dx}_{E(X|Y=y) - E(X|Y=y)=0} dy.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$V(X) = E(X - \varphi(Y))^2 + E(\varphi(Y) - \mu_X)^2 \geq E(\varphi(Y) - \mu_X)^2 = V(E(X|Y));$$

queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 4.9. Suponga que N representa al número de accidentes ocurridos en cierta fábrica en un mes y X_i al número de hombres heridos en cada accidente, $i = 1, 2, \dots, N$. Suponga además que N y X_i son variables aleatorias independientes. ¿Cuál es el valor esperado del número de hombres heridos cada mes?

Solución

Suponga que N denota el número de accidentes que ocurren, y sean $X_1, X_2, \dots, X_N$ las variables que denotan el número de heridos en cada uno de estos accidentes. Entonces, el número total de accidentados es $\sum_{i=1}^N X_i$. Ahora

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right).$$

Observe que

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = nE(X).$$

Finalmente,

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^N X_i \mid N\right)\right) = E(NE(X)) = E(N)E(X).$$

EJEMPLO 4.10. Un prisionero ha sido puesto en una celda que tiene tres puertas. La primera puerta lleva directamente a la calle; la segunda lleva a un túnel que lo devuelve a la misma celda después de un día de caminata; la tercera puerta lo lleva a otro túnel que termina en su celda

después de tres días de caminata. Suponga que el prisionero puede elegir cualquiera de las puertas con igual probabilidad. Si elige una puerta que lo lleva de nuevo a la celda, vuelve a intentarlo, pero **no escoge las puertas que eligió anteriormente**. Entonces, ¿cuál es el tiempo esperado para que el prisionero alcance la libertad?

Solución

Suponga que Y indica el número de días que requiere el prisionero para alcanzar su libertad, y sea X_i el número de la puerta que elige en el i -ésimo intento, $i = 1, 2, 3$. Si elige una puerta que lo lleva a un túnel, al regresar elegirá otra puerta únicamente de entre las dos que no ha elegido; de igual manera se hace la tercera elección.

El recorrido de Y es

$$R_Y = \{0, 1, 3, 4\},$$

$Y = 0$: cuando se elige la puerta 1 en el primer intento, o sea que $X_1 = 1$.

$Y = 1$: cuando se elige la puerta 2 en el primer intento y la puerta 1 en el segundo intento, o sea que $X_1 = 2$ y $X_2 = 1$.

$Y = 3$: cuando se elige la puerta 3 en el primer intento y la puerta 1 en el segundo intento, o sea cuando $X_1 = 3$ y $X_2 = 1$.

$Y = 4$: cuando se eligen las puertas 2 y 3 en los dos primeros intentos y la puerta 1 en el tercer intento, o sea

$(X_1 = 2, X_2 = 3 \text{ y } X_3 = 1)$ o $(X_1 = 3, X_2 = 2 \text{ y } X_3 = 1)$.

Se va a utilizar el resultado $E(Y) = E(E(Y | X_1))$, por eso se deben encontrar las probabilidades condicionales.

$P(Y = 0 | X_1 = 1) = 1$; entonces

$$E(Y | X_1 = 1) = 0 \times 1 = 0$$

$P(Y = 1 | X_1 = 2) = P(X_2 = 1 | X_1 = 2) = 1/2$ y

$P(Y = 4 | X_1 = 2) = P(X_2 = 3 | X_1 = 2) = 1/2$; entonces

$$E(Y | X_1 = 2) = 1(1/2) + 4(1/2) = 2.5$$

$P(Y = 3 | X_1 = 3) = P(X_2 = 1 | X_1 = 3) = 1/2$ y

$P(Y = 4 | X_1 = 3) = P(X_2 = 2 | X_1 = 3) = 1/2$; entonces

$$E(Y | X_1 = 3) = 3(1/2) + 4(1/2) = 3.5$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[E(Y | X_1)] \\ &= E(Y | X_1 = 1)P(X_1 = 1) + E(Y | X_1 = 2)P(X_1 = 2) \\ &\quad + E(Y | X_1 = 3)P(X_1 = 3) \\ &= 0 \frac{1}{3} + 2.5 \frac{1}{3} + 3.5 \frac{1}{3} = 2. \end{aligned}$$

5.1 Problema de mantenimiento, reparación y reemplazo de equipo. Considere una máquina que produce una ganancia de

- 100 unidades monetarias (u.m.) si trabaja toda la semana, y
- 0 u.m. si no lo hace.

Si al principio de la semana la máquina está trabajando, se puede realizar o no un mantenimiento preventivo, con un costo de 20 u.m.

- Si se realiza el mantenimiento preventivo, la probabilidad de que la máquina trabaje toda la semana es de 0.7.
- Si no se realiza el mantenimiento, la probabilidad de que la máquina trabaje toda la semana es de 0.2.

Si al principio de la semana la máquina no trabaja, puede repararse inmediatamente a un costo de 35 u.m., o bien, puede ser reemplazada por una nueva máquina a un costo de 125 u.m.

- Si se realiza la reparación, la probabilidad de que la máquina trabaje toda la semana es igual a 0.6.
- Si la máquina se reemplaza, ésta trabajará toda la semana sin problema.

• Cuando la máquina trabaja bien toda la semana, al inicio de la siguiente semana se encontrará trabajando. Si la máquina se descompone durante la semana, al inicio de la siguiente no se encontrará trabajando.

Suponiendo que se dispone de una máquina nueva al inicio del proceso, se desea establecer la política óptima de reparación, mantenimiento y reemplazo que proporcione la utilidad total esperada máxima en un periodo de cuatro semanas.

Solución

Primero se va a identificar toda la información útil.

La primera semana no habrá un factor aleatorio, ya que se tiene una máquina nueva, y ésta trabajará toda la primera semana con una ganancia

de 100 u.m. Al inicio de la segunda semana, la máquina estará trabajando. En las subsecuentes semanas, se tendrán los siguientes elementos:

1. **Estados posibles de la máquina al inicio de la semana i :**

- T_s : la máquina sí trabaja.
- T_n : la máquina no trabaja.

T_s y T_n son eventos complementarios, esto es: $T_s = T_n^c$. El estado de la máquina al inicio de la semana i se denota como E_i ; así, $E_i = T_s$ o $E_i = T_n$.

2. **Decisiones si la máquina trabaja al inicio de la semana:**

- M_s : se da mantenimiento preventivo.
- M_n : no se da mantenimiento preventivo.

También M_s y M_n son eventos complementarios.

3. **Decisiones si la máquina no trabaja al inicio de la semana:**

- R_s : se reemplaza la máquina.
- R_n : se da mantenimiento correctivo.

R_s y R_n no son eventos complementarios, puesto que se puede también tomar la decisión de que no se trabaje esa semana. La decisión tomada en la semana i se denota como D_i , $i = 1, 2, 3$ y 4 ; así, si la máquina está trabajando al inicio de la semana i , se tiene que $D_i = M_s$ o $D_i = M_n$. Si la máquina no trabaja al inicio de la semana i , se tiene que $D_i = R_s$ o $D_i = R_n$.

4. **La ganancia obtenida en la semana i se denota como $G_i(\cdot)$, por lo que se tiene que**

$$G_i(E_{i+1} = T_s) = 100 \quad \text{y} \quad G_i(E_{i+1} = T_n) = 0.$$

Si la máquina trabaja toda la semana, al inicio de la siguiente se encuentra trabajando.

Observe que si $E_{i+1} = T_s$, esto implica que la máquina trabajó toda la semana i , por eso al inicio de la semana $i + 1$ está trabajando.

5. **El costo de tomar una decisión se denota como $C_i(\cdot)$; por tanto, se tiene que**

$$C_i(M_n) = 0, \quad C_i(M_s) = 20, \quad C_i(R_n) = 35, \quad C_i(R_s) = 125.$$

6. **La utilidad es igual a la ganancia menos los costos,**

$$U_i(\cdot) = G_i(\cdot) - C_i(\cdot).$$

7. **Las probabilidades implícitas en el proceso son las siguientes:**

- (a) La probabilidad de que la máquina trabaje toda la semana i , condicionada a que estaba trabajando al inicio de la semana i , de acuerdo con la decisión tomada, es
- $P(E_{i+1} = T_s | E_i = T_s, D_i = M_s) = 0.7$,
 - $P(E_{i+1} = T_s | E_i = T_s, D_i = M_n) = 0.2$,
- (b) y la correspondiente probabilidad de su complemento:
- $P(E_{i+1} = T_n | E_i = T_s, D_i = M_s) = 0.3$,
 - $P(E_{i+1} = T_n | E_i = T_s, D_i = M_n) = 0.8$.
- (c) La probabilidad de que la máquina trabaje toda la semana i , condicionada a que no estaba trabajando al inicio de la semana i , de acuerdo con la decisión tomada, es
- $P(E_{i+1} = T_s | E_i = T_n, D_i = R_s) = 1$,
 - $P(E_{i+1} = T_s | E_i = T_n, D_i = R_n) = 0.6$,
- (d) y la correspondiente probabilidad de su complemento:
- $P(E_{i+1} = T_n | E_i = T_n, D_i = R_s) = 0$,
 - $P(E_{i+1} = T_n | E_i = T_n, D_i = R_n) = 0.4$.

En el diagrama de la figura 4.3 se muestran las diferentes posibilidades de la terna:

Estado (E_i), Decisión (D_i), Estado (E_{i+1})

que representan la situación de la máquina desde el principio hasta el final de la semana i . En cada rama del diagrama se escribió el valor de la utilidad o su probabilidad.

La utilidad esperada, de acuerdo con las diferentes decisiones, está dada por

- **Cuando la máquina sí trabaja al inicio de la semana:**

$$\begin{aligned}
 E(U | M_s) &= E(G | M_s) - C(M_s) \\
 &= G(T_s)P(T_s | M_s) + G(T_n)P(T_n | M_s) - C(M_s) \\
 &= P(T_s | M_s)100 + P(T_n | M_s)0 - C(M_s) \\
 &= 100(0.7) + 0(0.3) - 20 = 50, E(U | M_n) \\
 &= E(G | M_n) - C(M_n) \\
 &= 100P(T_s | M_n) + 0P(T_n | M_n) - C(M_n) \\
 &= 100(0.2) + 0(0.8) - 0 = 20.
 \end{aligned}$$

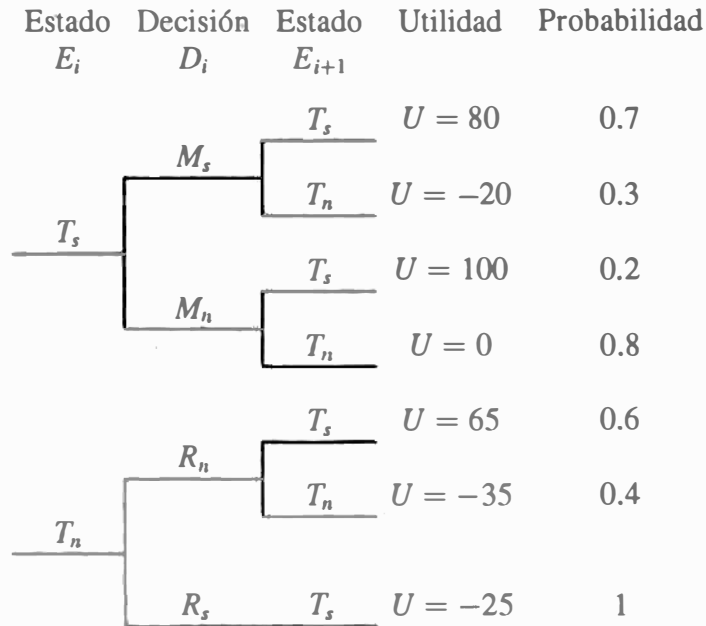


FIGURA 4.3 Diagrama de estado al principio de la semana, la decisión tomada y estado al final de la semana.

La decisión que da la máxima utilidad esperada se obtiene cuando se da mantenimiento preventivo.

• Cuando la máquina no trabaja al inicio de la semana:

$$\begin{aligned} E(U|R_s) &= E(G|R_s) - C(M_s) = 100P(T_s|R_s) + 0P(T_n|R_s) - C(R_s) \\ &= 100(1) + 0(0) - 125 = -25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(U|R_n) &= E(G|R_n) - C(R_n) = 100P(T_s|R_n) + 0P(T_n|R_n) - C(R_n) \\ &= 100(0.6) + 0(0.4) - 35 = 25. \end{aligned}$$

La decisión que da la máxima utilidad esperada se obtiene cuando se da mantenimiento correctivo.

En resumen, si al inicio de la semana la máquina no trabaja, lo conveniente es darle mantenimiento correctivo; y cuando la máquina sí trabaja, lo conveniente es darle mantenimiento preventivo.

En la tabla 4.4 se resume esta información desde el inicio de la semana (E_i) hasta el final de la misma (E_{i+1} , $i = 1, 2, 3, 4$). No se considera la

TABLA 4.4 *Utilidad obtenida de acuerdo con la decisión tomada.*

Estado al inicio de la semana	Mejor Decisión	Estado al final de la semana	Utilidad U	Probabilidad $P(E_{i+1} D_i, E_i)$
$E_i = T_s$	M_s	$E_{i+1} = T_s$	80	0.7
$E_i = T_s$	M_s	$E_{i+1} = T_n$	-20	0.3
$E_i = T_n$	R_n	$E_{i+1} = T_s$	65	0.7
$E_i = T_n$	R_n	$E_{i+1} = T_n$	-35	0.3

información de la primera semana ($i = 1$), porque en esa semana la máquina va a trabajar bien pues es nueva.

La utilidad durante las cuatro semanas dependerá del estado de la máquina al inicio de cada semana, cuando se toma la decisión que da la máxima utilidad. Y como el estado de la máquina al final de la semana sólo depende del estado de la máquina al principio de la semana, la probabilidad de los posibles estados de las cuatro semanas es

$$\begin{aligned}
 P(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) &= P(E_5|E_4)P(E_4|E_3)P(E_3|E_2) \underbrace{P(E_2|E_1)P(E_1)}_1 \\
 &= P(E_5|E_4)P(E_4|E_3)P(E_3|E_2).
 \end{aligned}$$

La tabla 4.5 muestra los posibles estados de la máquina durante las cuatro semanas, así como la probabilidad y la utilidad en cada caso.

TABLA 4.5 *Espacio muestral de estados, probabilidad y utilidad de las cuatro semanas.*

Estados					Probabilidad	Utilidad total
E_1	E_2	E_3	E_4	E_5		
T_s	T_s	T_s	T_s	T_s	$0.7 \times 0.7 \times 0.7 = \mathbf{0.343}$	215
T_s	T_s	T_s	T_s	T_n	$0.7 \times 0.7 \times 0.3 = \mathbf{0.147}$	115
T_s	T_s	T_s	T_n	T_s	$0.7 \times 0.3 \times 0.6 = \mathbf{0.126}$	100
T_s	T_s	T_s	T_n	T_n	$0.7 \times 0.3 \times 0.4 = \mathbf{0.084}$	0
T_s	T_s	T_n	T_s	T_s	$0.3 \times 0.6 \times 0.7 = \mathbf{0.126}$	100
T_s	T_s	T_n	T_s	T_n	$0.3 \times 0.6 \times 0.3 = \mathbf{0.054}$	0
T_s	T_s	T_n	T_n	T_s	$0.3 \times 0.4 \times 0.6 = \mathbf{0.072}$	-15
T_s	T_s	T_n	T_n	T_n	$0.3 \times 0.4 \times 0.4 = \mathbf{0.048}$	-115

La utilidad esperada de las cuatro semanas es igual a

$$E(U) = 215(0.343) + 115(0.147) + \dots + (-115)(0.048) = 109.25.$$

La utilidad esperada es positiva, lo cual implica que conviene trabajar en esta forma.

Ejercicios

EJERCICIO 4.24. Un prisionero ha sido puesto en una celda que tiene tres puertas. La primera puerta lleva directamente a la calle. La segunda lleva a un túnel que lo devuelve a la misma celda después de un día de caminar. La tercera puerta lo lleva a otro túnel que termina en su celda después de tres días de caminata. Suponga que el prisionero puede elegir cualquiera de las puertas con igual probabilidad. Si elige una puerta que lo lleva de nuevo a la celda, vuelve a intentarlo, **pero olvida qué puerta eligió anteriormente**, esto es, no tiene memoria. Entonces, ¿cuál es el tiempo esperado para que el prisionero alcance la libertad?

EJERCICIO 4.25. En una urna hay 20 bolas rojas y 30 bolas azules. Se extraen sucesivamente las bolas de la urna. ¿Cuál es el número de intentos esperado para obtener la segunda bola roja? si el muestreo se hace (a) con reemplazo, (b) sin reemplazo.

6. Función generatriz de momentos

Cada función de distribución caracteriza a su media y su varianza, $E(X)$ y $E(X^2) - (E(X))^2$, respectivamente. Esto es, si se conoce la función de distribución, se puede determinar cuál es su media y cuál su varianza; ahora, la pregunta es: si se conoce la media y la varianza de una variable aleatoria, ¿se puede identificar su función de distribución? La respuesta es no; sin embargo, si se conoce el valor esperado de todas las potencias de X , $E(X^i)$, es posible identificar la función de distribución de esa variable aleatoria. Esto es lo que se estudiará en la presente sección.

DEFINICIÓN 4.7. Se llama **momento de orden r alrededor del número a de la variable aleatoria X** al valor esperado

$$m_r(a) = E((X - a)^r).$$

En este sentido, la media μ_X es el primer momento de X alrededor de cero, y la varianza σ^2 es el segundo momento de X alrededor de μ_X .

Para simplificar, los momentos alrededor de cero $m_r(0)$ se denotan como m_r .

Si para una variable aleatoria existen todos sus momentos de orden r , entonces se puede definir la función generatriz de momentos.

DEFINICIÓN 4.8. La **función generatriz de momentos** de la variable aleatoria X , $M_X(t)$, está dada por la expresión

$$M_X(t) = E(e^{tX}).$$

El nombre viene del desarrollo en serie de potencias de la función exponencial:

$$e^{tX} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i X^i}{i!},$$

ya que al aplicar las propiedades de linealidad del valor esperado, se convierte en

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i E(X^i)}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m_i}{i!} t^i.$$

que es una serie de potencias de t con m_i como coeficientes.

TEOREMA 4.16. Si $M_X(t)$ es la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X , entonces

$$M_X^{(r)}(0) = m_r.$$

Demostración

Si se deriva sucesivamente la función generadora de momentos, se tiene que

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i m_{i+1}}{i!}, \\ M_X''(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i m_{i+2}}{i!}, \\ &\vdots \\ M_X^{(k)}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i m_{i+k}}{i!}. \end{aligned}$$

Así, al evaluar en $t = 0$, se tiene

$$M_X^{(k)}(0) = m_k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0^i m_{i+k}}{i!} = m_k,$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Recuerde que la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

TEOREMA 4.17. *Si X y Y son dos variables aleatorias tales que*

$$M_X(t) = M_Y(t),$$

entonces $f_X(x) = f_Y(x)$, excepto quizás en un conjunto de probabilidad igual a cero.

Este teorema afirma que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria es una transformación inyectiva. El teorema se presenta sin demostración, ya que los elementos para hacerlo salen del alcance de este libro.¹

EJEMPLO 4.11. Utilizando la función generatriz de momentos encuentre la función de densidad de $X + Y$.

Solución

Considere las variables aleatorias X y Y cuya función de densidad conjunta está dada por $f_{XY}(x, y)$ y suponga que $U = X + Y$. Entonces la función generatriz de momentos de la variable aleatoria U es igual a

$$M_U(t) = E(e^{tU}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} f_U(u) du.$$

Por otro lado, la función generatriz de momentos de la variable aleatoria U se puede escribir como

$$M_U(t) = E(e^{tU}) = E(e^{t(x+y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+y)} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

¹Una demostración de este teorema se encuentra en W. Feller 1985. *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. Vol. 2, 2a. ed. México, Limusa, p. 482

Al hacer el cambio de variable $u = x + y$ y $v = x$, para resolver la integral la función generatriz de momentos se transforma en

$$\begin{aligned} M_U(t) &= E(e^{tU}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} f_{XY}(v, u-v) dv du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u-v) dv}_{g(u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} g(u) du. \end{aligned}$$

Si la región donde f_{XY} es diferente de cero no es todo el plano, la región de integración, después del cambio de variable, queda determinada por esa región.

El teorema 4.6.2 afirma que la función generadora de momentos es una transformación inyectiva; entonces

$$f_U(u) = g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u-v) dv.$$

Este resultado ya se había mostrado antes, y se puede constatar que es más fácil obtenerlo usando esta técnica.

EJEMPLO 4.12. Encuentre la función de densidad de $U = X + Y$ si se sabe que la función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f_{XY}(x, y) = e^{x+y} \quad \text{si } x, y \geq 0; 0 \text{ en otro caso.}$$

Solución

Por el resultado anterior, se tiene que

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(v, u-v) dv,$$

y como $f_{XY}(x, y)$ es diferente de cero en el primer cuadrante del plano cartesiano, la integral se debe calcular en la región $0 \leq v$ y $0 \leq u-v$, o bien $0 \leq v$ y $v \leq u$.

$$f_U(u) = \int_0^u e^{v+(u-v)} dv = e^u \int_0^u dv = ue^u, \quad \text{para } u \geq 0.$$

EJEMPLO 4.13. Suponga que la función generatriz de momentos de X y de Y converge; entonces encuentre la función de densidad de $\frac{X}{Y}$.

Solución

Considere que $U = \frac{X}{Y}$; entonces

$$M_U(t) = E(e^{tU}) = E(e^{t(x/y)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t \frac{x}{y}} f_{XY}(x, y) dx dy,$$

se hace el cambio de variable $u = x/y$ y $v = y$, cuya transformación inversa es $x = uv$ y $y = v$ y cuyo jacobiano es $|J| = v$. Entonces, la función generatriz de momentos está dada por

$$\begin{aligned} M_U(t) &= E(e^{tU}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} v f_{XY}(uv, v) dv du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} v f_{XY}(uv, v) dv}_{g(u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} g(u) du. \end{aligned}$$

Y por el teorema 4.6.2, se tiene que la función generadora de momentos es una transformación inyectiva; entonces se sigue que

$$f_U(u) = g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} v f_{XY}(uv, v) dv.$$

Ejercicios

EJERCICIO 4.26. Encuentre la función de densidad del costo total de un proyecto de construcción, cuya función de densidad conjunta de los costos del material X y de la mano de obra Y es

$$f_{XY}(x, y) = \frac{2y}{(x + y + 1)^4}, \quad \text{si } x, y \geq 0; \quad 0 \text{ en otro caso.}$$

(Costo total $U = X + Y$).

EJERCICIO 4.27. Sea la función de densidad de la variable aleatoria X , $f_X(x) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{x-1}{2}\pi\right)$, cuando $x \in (0, 2)$ y cero en otro caso. Encuentre la función de densidad de $Y = \sin\left(\frac{(X-1)\pi}{2}\right)$.

- (a) Usando el corolario del teorema 3.3.2.
- (b) Usando la función generatriz de momentos.

CAPÍTULO 5

Algunas funciones de distribución

La probabilidad es tan importante como para dejarla en manos de los expertos.

En este capítulo se van a estudiar las características de las funciones de distribución que aparecen más frecuentemente.

1. Distribuciones discretas

1.1 Distribución Bernoulli. Un experimento que sólo tiene dos posibles resultados se conoce como experimento Bernoulli.

Éstos son algunos ejemplos de experimentos Bernoulli:

Experimento	Resultados	
Nacimientos	niño	niña
Volados	águila	sol
Análisis clínicos	negativo	positivo
Control de calidad	defectuoso	no defectuoso
Una rifa	gana	pierde

Todos estos ejemplos se pueden estudiar con un modelo de “éxito–fracaso”.

La designación de éxito o fracaso en un experimento Bernoulli es arbitraria y totalmente subjetiva: lo que para unos puede ser éxito, para otros puede ser fracaso. Por ejemplo, el resultado positivo de un análisis clínico, para el investigador puede ser un éxito, pero para el paciente será un fracaso.

El éxito es, en general, el resultado que interesa estudiar.

La probabilidad de que ocurra un éxito se denota con la letra p , y en consecuencia la probabilidad de que ocurra un fracaso es igual a $q = 1 - p$, donde $0 < p < 1$.

DEFINICIÓN 5.1. La variable aleatoria X que asigna el número 1 al éxito y el número 0 al fracaso ($X(\text{éxito}) = 1$, $X(\text{fracaso}) = 0$) se conoce como variable aleatoria Bernoulli.

La función de densidad de la variable aleatoria Bernoulli es: $f(0) = q$; y $f(1) = p$, o

$$f(x) = p^x q^{1-x}, \quad \text{para } x = 0, 1.$$

EJEMPLO 5.1. Un foco pasa el control de calidad si su vida útil es mayor o igual a 2 años. Éxito equivale a que el foco pase el control de calidad, y la probabilidad de tener un éxito en uno de los experimentos es igual a $p = .90$. Entonces, la variable aleatoria X , que vale 1 cuando el foco pasa el control de calidad y cero cuando no lo pasa ($X(\text{fracaso}) = 0$ y $X(\text{éxito}) = 1$), es una variable aleatoria Bernoulli con función de densidad igual a

$$f(x) = (.90)^x (.10)^{1-x}; \quad x = 0, 1.$$

TEOREMA 5.1. Si X es una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito p , entonces

- $E(X) = p$,
- $V(X) = pq$,
- $M_X(t) = q + pe^t$,

donde $E(X)$, $V(X)$ y $M_X(t)$ son la media, la varianza y la función generatriz de momentos de X , respectivamente.

Demostración

Por la definición, se tiene que

- $E(X) = \sum_{i=0}^1 i f(i) = 0f(0) + 1f(1) = p$
- $V(X) = \sum_{i=0}^1 (i - E(X))^2 f(i) = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 (p)$
 $= pq(p + 1 - p) = pq$
- $M(t) = E(e^{tX}) = e^{t(0)} q + pe^{t(1)} = q + pe^t$.

1.2 Distribución binomial

DEFINICIÓN 5.2. La variable aleatoria X , que indica el número de éxitos en n experimentos independientes Bernoulli con probabilidad de éxito p , se conoce como variable aleatoria binomial con parámetros n y p (" $X \sim B(n, p)$ ").

Si X indica el número de éxitos al realizar n experimentos Bernoulli independientes, entonces el recorrido de X es igual a

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

EJEMPLO 5.2. Se lanzan 20 volados con una moneda no cargada; sea la variable aleatoria X el número de águilas observadas. X es una variable aleatoria binomial con parámetros $n = 20$ y $p = 0.5$. ($X \sim B(20, 0.5)$).

El recorrido de X es $R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$

TEOREMA 5.2. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias Bernoulli independientes y con probabilidad de éxito igual a p , entonces la variable aleatoria

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p .

Demostración

Dado que las variables aleatorias Bernoulli toman el valor 1 cuando ocurre un éxito y el valor 0 cuando ocurre un fracaso, en la sumatoria $\sum_{i=1}^n X_i$ sólo contarán los resultados que corresponden a los éxitos, y la suma $\sum_{i=1}^n X_i$ será igual al número de éxitos en los n experimentos Bernoulli. Esta es la definición de la variable aleatoria binomial.

TEOREMA 5.3. La función de densidad de una variable aleatoria binomial es igual a

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, n.$$

Demostración

Como $X = \sum_{i=1}^n X_i$, donde las $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ son variables aleatorias Bernoulli, iguales e independientes, entonces tener x éxitos en los n experimentos equivale a tener un subconjunto con x elementos del conjunto $\{X_1, \dots, X_n\}$, que son iguales a 1 y el resto igual a cero. Entonces, las posibles maneras de tener x éxitos corresponde a las combinaciones de n en x :

$$\binom{n}{x}$$

Cada manera individual de tener x éxitos tiene la misma probabilidad de ocurrir, así que basta con calcular la probabilidad de uno de estos casos.

Una realización que da como resultado x éxitos es la siguiente:

$$\underbrace{X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_x = 1}_{x \text{ éxitos}}, \underbrace{X_{x+1} = 0, \dots, X_n = 0}_{n-x \text{ fracasos}}.$$

La probabilidad de esta realización se encuentra considerando que las variables aleatorias Bernoulli son independientes:

$$\underbrace{P(X_1 = 1) \dots P(X_x = 1)}_{x \text{ veces}} \underbrace{P(X_{x+1} = 0) \dots P(X_n = 0)}_{n-x \text{ veces}} = p^x q^{n-x}.$$

Finalmente, sumando la probabilidad de todos los posibles casos, se tiene que

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

EJEMPLO 5.3. Se lanzan 10 volados con una moneda no cargada. Sea X la variable aleatoria que indica el número de águilas que se observan. Ya que los resultados de los 10 volados son independientes, X es una v.a. binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 1/2 = 0.5$.

El recorrido de la variable X es: $X = 0, 1, 2, \dots, 10$, y la función de densidad es

$$f_X(x) = \binom{10}{x} (0.5)^x (1 - 0.5)^{10-x} = \binom{10}{x} (0.5)^{10}.$$

EJEMPLO 5.4. Si el 10% de la producción de focos de una fábrica resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir 20 focos al azar, la muestra tenga de 17 a 19 focos buenos?

Solución

La situación de cada foco (si es bueno o defectuoso) es independiente de la situación de los otros focos. Sea Y la variable que indica el número de focos buenos en la muestra. Y es una variable aleatoria binomial con parámetros $n = 20$ y $p = .90$ (éxito es que el foco sea bueno). Así se pide entonces encontrar

$$\begin{aligned} P(17 \leq Y \leq 19) &= P(Y = 17) + P(Y = 18) + P(Y = 19) \\ &= \binom{20}{17} (0.9)^{17} (.1)^3 + \binom{20}{18} (0.9)^{18} (.1)^2 + \binom{20}{19} (0.9)^{19} (.1) = 0.7454. \end{aligned}$$

En el apéndice 1, se incluye una tabla con los valores de la distribución binomial ($F(k) = P(X \leq k)$), correspondientes a los valores de $n = 2, 3, \dots, 25$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y $p = .05, .10, .15, \dots, .95$.

En la figura 5.1 se muestra el formato de la tabla para $n = 5$ y $p = .05, \dots, .50$.

n	k	p									
		.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
5	0	..	..	..		..	..	..	..	..	..
	1	..	..	..		..	..	..	..	..	..
	2	..	..	..		..	..	..	..	..	..
	3	..	..	..		..	..	..	..	..	..
	4	..	..	..	0.9999	..	..	..	..	..	..
	5	..	..	..		..	..	..	..	..	..

FIGURA 5.1 Formato de la distribución normal estándar.

El valor en el recuadro corresponde a la probabilidad de $P(X \leq 4)$, con los parámetros $n = 5$ y $p = .15$.

Para ejemplificar el uso de la tabla, se va a encontrar la misma probabilidad del ejemplo anterior, $P(17 \leq X \leq 19)$. Siga los pasos y compruebe los resultados directamente de la tabla:

1. Encuentre en la tabla el valor de $n = 20$.
2. Encuentre en esta parte de la tabla el valor de $p = .90$ y de $k = 19$. El punto donde se cruza la columna de $p = .90$ y de $k = 19$ corresponde a $P(X \leq 19)$ y es igual a 0.8784.
3. En seguida, encuentre el valor de $k = 16$. El punto donde se cruza la columna de $p = .90$ y de $k = 16$ corresponde a $P(X \leq 16)$ y es igual a 0.1330.
4. Finalmente, observe que

$$P(17 \leq X \leq 19) = P(X \leq 19) - P(X \leq 16)$$

$$\overbrace{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}^{\text{se quita}}, \underbrace{17, 18, 19}_{\text{queda}}$$

$$P(17 \leq X \leq 19) = 0.8784 - 0.1330 = 0.7454.$$

Se pueden usar las siguientes relaciones para calcular diferentes probabilidades de la v. a. binomial, utilizando las tablas incluidas en los apéndices.

- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1) = F(b) - F(a - 1)$
- $P(X = b) = P(X \leq b) - P(X \leq b - 1) = F(b) - F(b - 1)$
- $P(a \geq X) = 1 - P(X \leq a - 1) = 1 - F(a - 1).$

TEOREMA 5.4. Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p , entonces se tiene que

- $E(X) = np,$
- $V(X) = npq,$
- $M_X(t) = (q + pe^t)^n.$

Demostración

Se sabe que si X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p , entonces X es igual a la suma de n variables Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p : $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$. Entonces, por las propiedades del valor esperado y la varianza,

Si $X_i \sim \text{Bernoulli}(p),$

$$E(X_i) = p \quad V(X_i) = pq \quad y \quad M_{X_i}(t) = q + pe^t.$$

- $E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) =$
 $E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_n) = np$

El valor esperado de una suma de variables es igual a la suma de los valores esperados.

- $V(X) = V(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) =$
 $V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + \dots + V(X_n) = npq$

La varianza de una suma de variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas.

- $M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)}) =$
 $E(e^{tX_1} e^{tX_2} e^{tX_3} \dots e^{tX_n}) =$
 $E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) E(e^{tX_3}) \dots E(e^{tX_n}) = (q + pe^t)^n.$

El valor esperado del producto de variables aleatorias independientes es igual al producto de los valores esperados de los factores.

EJEMPLO 5.5. Considere un gas ideal de N partículas contenidas en un recipiente de volumen V_0 . Interesa investigar el número de partículas que se encuentran dentro de un subvolumen V del recipiente. Si el gas está en equilibrio, las partículas se encuentran uniformemente distribuidas dentro del recipiente. Dada una partícula específica, ésta puede o no estar contenida en V y la probabilidad de que esté contenida ahí es $p = \frac{V}{V_0}$.

Obviamente, el hecho de que una partícula esté o no dentro de V define un experimento Bernoulli, donde éxito equivale a “la partícula está contenida en V ” y fracaso, el caso contrario. Entonces la variable que indica cuántas partículas del total de N están en V es una variable aleatoria binomial con parámetros $n = N$ y $p = \frac{V}{V_0}$. Así, el número esperado de partículas en V es $E(X) = Np$.

1.3 Distribución hipergeométrica

DEFINICIÓN 5.3. Considere una población finita compuesta por M elementos que tienen una característica determinada y K elementos que no la tienen. Se elige una muestra aleatoria de tamaño n sin reemplazo, y sea X la variable aleatoria que indica el número de elementos muestrales con la característica determinada. X se conoce como variable aleatoria hipergeométrica con parámetros M y K .

TEOREMA 5.5. Si X es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros M y K , el recorrido de X está comprendido por

$$\max\{0, n - K\} \leq X \leq \min\{n, M\}$$

y su función de densidad es igual a

$$f_X(k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{K}{n-k}}{\binom{M+K}{n}}.$$

Demostración

Si la población está formada por M elementos con la característica determinada y K elementos sin esa característica, entonces cuando se toma una muestra de tamaño n sin reemplazo y X indica el número de elementos en la muestra con la característica, se pueden tener los siguientes casos:

1. $K \geq n$. En este caso es posible tener alguna muestra formada únicamente por elementos sin la característica, y el mínimo valor de X es cero.
2. $K < n$. En este caso, ninguna muestra puede estar formada únicamente por elementos sin la característica; lo más que puede ocurrir es que en la muestra estén los K elementos sin la característica y $n - K$ elementos con la característica. El mínimo valor de X es $n - K$.
3. $M \geq n$. En este caso, se pueden tener muestras totalmente formadas por elementos con la característica, y entonces el máximo valor que puede tomar X es n .
4. $M < n$. En este caso, no se pueden tener muestras totalmente formadas por elementos con la característica, así que el máximo valor que puede tomar X es M .

El mínimo valor de X es igual al máximo entre 0 y $n - K$, mientras que el máximo valor de X es igual al mínimo entre n y M .

Para encontrar la probabilidad de tener k éxitos en una muestra de tamaño n , $\max\{0, n - K\} \leq k \leq \min\{n, M\}$, es necesario contar el número de muestras diferentes de n elementos, y de estas posibles muestras en cuántas de ellas se tiene exactamente k éxitos.

El número total de maneras en que se puede elegir la muestra de tamaño n , de una población de tamaño $M + K$, es

$$\binom{M + K}{n}.$$

El número total de casos en que se pueden tener k éxitos en la muestra es

$$\binom{M}{k} \binom{K}{n - k}.$$

Los k éxitos son los elementos que están en la muestra pertenecientes al primer subconjunto; los $n - k$ fracasos son los elementos que están en la muestra del segundo subconjunto.

Entonces

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{K}{n - k}}{\binom{M + K}{n}}$$

con

$$\max\{0, n - K\} \leq k \leq \min\{n, M\}.$$

EJEMPLO 5.6. En una urna se tienen 13 bolas: 6 blancas y 7 rojas. Se elige una muestra de 8 bolas sin reemplazo. Sea X la variable que indica el número de bolas rojas en la muestra. ¿Cuál es la función de densidad de X ?

Solución

El total de bolas en la urna es $N = 13$, de las cuales $M = 7$ son rojas, y el tamaño de la muestra es $n = 8$. El muestreo es sin reemplazo; entonces X , el número de bolas rojas (éxitos) en la muestra, es una variable aleatoria hipergeométrica.

El recorrido de X está entre

$$\max\{0, n - K\} = \max\{0, 8 - 6\} = \max\{0, 2\} = 2 \text{ y}$$

$$\min\{n, M\} = \min\{8, 7\} = 7$$

Entonces, $X = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y

$$P(X = k) = \frac{\binom{7}{k} \binom{6}{8-k}}{\binom{13}{8}},$$

para $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Observe que el recorrido de X no va de 0 a 8 porque sólo hay 7 bolas rojas y 6 bolas blancas.

EJEMPLO 5.7. El ejemplo de los peces del lago, visto en la introducción, genera una variable aleatoria hipergeométrica. La población es el conjunto de carpas en el lago, el primer subconjunto lo forman los peces marcados en la primera extracción (M elementos) y el segundo subconjunto son los peces sin marca ($N - M$ elementos). La variable aleatoria hipergeométrica es el número de carpas marcadas en la segunda muestra.

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Observe que al elegir una muestra de una población fraccionada en dos subconjuntos, y X representa el número de elementos del primer subconjunto:

- Si el muestreo es con reemplazo, X es una v.a. binomial.
- Si el muestreo es sin reemplazo, X es una v.a. hipergeométrica.

TEOREMA 5.6. *Si X es una variable aleatoria hipergeométrica con parámetros M , K y n , entonces se tiene que*

- $E(X) = \frac{nM}{M+K}.$
- $V(X) = \frac{nMK(M+K-n)}{(M+K-1)(M+K)^2}.$

Demostración

Considerando que la función de densidad hipergeométrica cumple la propiedad

$$\sum_k \frac{\binom{M}{k} \binom{K}{n-k}}{\binom{M+K}{n}} = 1,$$

y por definición se tiene que

$$\begin{aligned} \bullet E(X) &= \sum k f(k) = \sum_k k \frac{\binom{M}{k} \binom{K}{n-k}}{\binom{M+K}{n}} \\ E(X) &= \frac{nM}{M+K} \underbrace{\sum_{k'} \frac{\binom{M'}{k'} \binom{K}{n'-k'}}{\binom{M'+K}{n'}}}_1 = \frac{nM}{M+K}, \end{aligned}$$

con $n' = n - 1$, $M' = M - 1$ y $m' = m - 1$.

- Para calcular la varianza, se utilizará el hecho de que

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2.$$

Así:

$$\begin{aligned}
 E(X(X-1)) &= \sum k(k-1)f(k) = \sum k(k-1) \frac{\binom{M}{k} \binom{K}{n-k}}{\binom{M+K}{n}} \\
 &= \frac{nMK(M+K-n)}{(M+K-1)(M+K)^2} \sum \frac{\binom{M'}{k'} \binom{K}{n'-k'}}{\binom{M'+K}{n'}} \\
 &= \frac{nMK(M+K-n)}{(M+K-1)(M+K)^2},
 \end{aligned}$$

con $n' = n - 2$, $M' = M - 2$ y $m' = m - 2$.

1.4 Distribución uniforme (discreta)

DEFINICIÓN 5.4. La variable que puede tomar cualquiera de los valores entre 1 y n con igual probabilidad, se conoce como variable aleatoria **uniforme** discreta con parámetro n . $X \sim U(n)$.

TEOREMA 5.7. Si $X \sim U(n)$, entonces su recorrido es

$$R_X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

y su función de densidad es

$$f_X(k) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Demostración

La variable aleatoria uniforme discreta indica el número de la bola que se elige de una caja con n bolas numeradas del 1 al n , el número en la bola está entre uno y n ; por ello el recorrido de X , la variable que indica el número en la bola, es

$$R_X = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Por otro lado, el proceso de selección es completamente al azar, de manera que todos los números tienen la misma probabilidad de aparecer; esto es, el espacio muestral es equiprobable, y por ello su función de

densidad es

$$f_X(k) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

EJEMPLO 5.8. La variable aleatoria que indica el resultado obtenido en la tirada de un dado es una variable aleatoria uniforme con parámetro $n = 6$.

El recorrido de X es: $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y su función de densidad es $f(x) = \frac{1}{6}$, para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

TEOREMA 5.8. Si X es una variable aleatoria uniforme con parámetro n , entonces se tiene que

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
- $V(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$.
- $M_X(t) = \frac{(1-e^{nt})e^t}{1-e^t}$.

Demostración

Por la definición

$$E(X) = \sum_{i=1}^n i f(i) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n i^2 f(i) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{ti}}{n} = \frac{(1-e^{nt})e^t}{1-e^t}.$$

1.5 Distribución Poisson. Un experimento que puede tener cualquier número de éxitos en una región continua, acotada y bien determinada, es una variable Poisson. Algunos ejemplos de experimentos Poisson son los siguientes: el número de accidentes automovilísticos que ocurren en una ciudad durante un año; el número de partículas que emite un material radiactivo durante un minuto; el número de huevecillos que pone una mariposa durante una semana; el número de cometas que se observan al año en un área celeste; el número de tiburones que se observan en una región del Caribe en un lapso de una semana; el número de errores tipográficos en la hoja de un libro, etc.

Los éxitos en un experimento de Poisson pueden ocurrir de manera independiente en cualquier punto de la región objetivo, y si la región se divide, la probabilidad de observar un éxito en cada subregión es proporcional al área, longitud, volumen, de dicha subregión, etc.

DEFINICIÓN 5.5. La variable aleatoria que indica el número de éxitos en una región continua bien determinada, en donde los éxitos pueden aparecer de manera independiente en cualquier punto de la región, se conoce como **variable Poisson**.

En general, la variable aleatoria Poisson indica el número de éxitos que ocurren en una región $\mathcal{J}$ del espacio $\mathbb{R}^n$. La medida asociada a la región se denotará con μ (μ puede ser una longitud, un área, un volumen, etc.).

TEOREMA 5.9. Sea X una variable aleatoria que se distribuye de acuerdo con una ley de probabilidades Poisson; entonces su recorrido es el conjunto

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},$$

para $\lambda > 0$.

Demostración

Considere que $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_n$ es una partición de la región $\mathcal{J}$ tal que

- $\mu(\mathcal{J}_i) = \frac{\mu(\mathcal{J})}{n}$, para toda $i \neq 1, 2, \dots, n$.
- La ocurrencia de un éxito en $\mathcal{J}_i$ es independiente de la ocurrencia de un éxito en $\mathcal{J}_j$, para $i \neq j$ e $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.
- La probabilidad de que ocurra un éxito en cada $\mathcal{J}_i$ es igual a p_n , con $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$.
- La probabilidad de que ocurra más de un éxito en cada $\mathcal{J}_i$ es igual a p_n^* y $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n^* = 0$.

Así entonces, la probabilidad de observar x éxitos en el conjunto $\mathcal{J}$ es casi igual a tener un éxito en exactamente x subconjuntos de la partición, esto es, tener x éxitos en n experimentos de éxito-fracaso, iguales e independientes.

El número de éxitos en J es aproximadamente una variable aleatoria binomial, con parámetros n y p_n ; entonces, la probabilidad de que ocurran x éxitos en el espacio de observación es casi igual a

$$P(X = x) \approx \binom{n}{x} p_n^x (1 - p_n)^{n-x}.$$

La densidad Poisson se encuentra en el límite de esta expresión, cuando se hace crecer el valor de n :

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} p_n^x (1 - p_n)^{n-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n+1-x)}{x!} \frac{(np_n)^x}{n^x} \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n (1 - p_n)^{-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n+1-x)}{n^x x!} (np_n)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n (1 - p_n)^{-x} \\ &= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

COROLARIO 5.1. *Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p tales que n es “grande” y p es “pequeña”, entonces la función de densidad de X se puede aproximar por medio de una función de distribución Poisson, con $\lambda = np$.*

EJEMPLO 5.9 (Problema de billetes de lotería). En una lotería se venden 10 000 000 boletos para una rifa con 100 premios. ¿Cuántos billetes de lotería deben comprarse para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea igual a 0.10?

Solución

Si hay 10 000 000 boletos de la lotería y hay 100 premios para repartir, entonces la probabilidad de que un boleto tenga premio es igual a $p = 100/10\,000\,000 = 0.000001$. Se puede considerar que cada boleto representa un experimento de éxito-fracaso, donde la probabilidad de éxito es p . Si n es el número de boletos comprados, la probabilidad de tener k boletos premiados es aproximadamente una Poisson con parámetro

$$\lambda = np = 0.000001n.$$

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

La probabilidad de que al menos un boleto sea premiado es

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}.$$

El número n que se busca es el menor entero positivo que cumple la desigualdad

$$e^{-\lambda} = e^{-0.000001n} \leq .90,$$

lo cual, implica que n es igual a 105 361.

EJEMPLO 5.10 (Las pasas en un pastel). En una pastelería hornearon varios pasteles con pasas en su interior. El número de pasas varía de un pastel a otro, pero en promedio tienen 10 pasas cada uno. Si se compra uno de estos pasteles, ¿cuál es la probabilidad de que ese pastel contenga al menos 1 pasa?

Solución

Suponga que el total de pasas utilizadas es igual a n y que el volumen de las n pasas es mucho menor que el volumen total de la pasta del pastel V ; entonces, durante el proceso de mezclado las pasas se pudieron mover en forma libre e independiente en el interior de la pasta, y por tanto se distribuyeron uniformemente en los diferentes pasteles horneados. Cada pasa en la pasta tiene la misma probabilidad p de estar en uno de los pasteles, y se sabe que el número de pasas promedio en un pastel es $\lambda = np = 10$. El número de pasas que puede tener el pastel que se compró es una variable aleatoria Poisson con parámetro $\lambda = 10$:

$$P(X = k) \approx \frac{10^k}{k!} e^{-10}.$$

La probabilidad de que al menos se tenga una pasa es igual a

$$1 - P(X = 0) = 1 - e^{-10} = . = 0.9999546$$

EJEMPLO 5.11 (Decaimiento radiactivo). En forma experimental, se ha observado que el radio decae gradualmente hacia el radón al emitir partículas alfa (núcleos de helio). Las distancias interatómicas son lo bastante grandes para suponer que cada átomo de radio se desintegra de manera independiente de los otros átomos. Sin embargo, cada uno de

los n_0 átomos de radio iniciales tienen la misma probabilidad $p(t)$ de descomponerse durante un intervalo de t segundos. La desintegración de un átomo se considera como éxito. Sea $\xi(t)$ la variable aleatoria que indica el número de partículas alfa emitidas en t segundos, entonces $\xi(t)$ indica el número de éxitos en los n_0 experimentos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito $p(t)$. Los valores de $p(t)$ y de n_0 son tales que la función de distribución de la variable aleatoria $\xi(t)$ es semejante a una distribución Poisson con parámetro $\lambda = n_0 p(t)$ ($p(t)$ es suficientemente pequeña y n_0 es suficientemente grande). Es decir, la probabilidad de que un número exacto k de partículas alfa sean emitidas está dada por

$$P(\xi(t) = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

TEOREMA 5.10. Si X es una variable aleatoria Poisson con parámetro λ , entonces se tiene que

- $E(X) = \lambda$.
- $V(X) = \lambda$.
- $M_X(t) = e^{(e^t - 1)\lambda}$.

Demostración

Por definición

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i f(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j)!} e^{-\lambda} = \lambda,$$

donde $j = i - 1$.

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) f(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j)!} e^{-\lambda} = \lambda^2, \end{aligned}$$

donde $j = i - 2$.

Los dos primeros sumandos se anulan, porque para $i = 0$ y para $i = 1$ el producto $i(i-1)$ es cero.

La varianza de X es igual a

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk} \lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = e^{(e^t - 1)\lambda}.$$

Queda demostrado el teorema.

2. Distribuciones continuas

En esta sección se enumeran algunas de las distribuciones continuas más comunes.

2.1 Distribución uniforme (continua)

DEFINICIÓN 5.6. Se llama variable aleatoria **uniforme**, en el intervalo (a, b) ($X \sim U(a, b)$), a la variable X que tiene como función de densidad a

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{para } x \in (a, b), \text{ 0 en otro caso.}$$

La función de densidad uniforme es entonces constante y su integral es igual a 1.

Todos los intervalos de igual longitud contenidos en (a, b) tienen igual probabilidad.

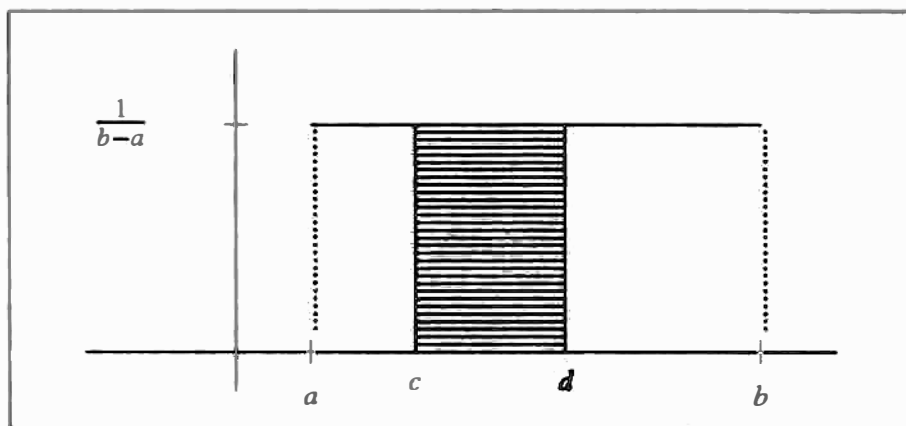


FIGURA 5.2 El área sombreada corresponde a $P(c \leq X \leq d)$.

EJEMPLO 5.12. En un conmutador telefónico puede entrar una llamada con igual probabilidad en cualquier momento, dentro del intervalo de tiempo de las 11:30 a las 11:40; ¿cuál es la probabilidad de que la llamada se reciba entre las 11:34 y las 11:38?

Solución

Si la llamada puede entrar en cualquier momento entre las 11:30 y las 11:40 con igual probabilidad, y X indica el momento en que entra la llamada, entonces X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(11 : 30, 11 : 40)$ y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad \text{si } x \in (11 : 30, 11 : 40).$$

La probabilidad que se pide es

$$P(11 : 34 \leq X \leq 11 : 38) = \int_{11:34}^{11:38} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}.$$

Observe que el problema se resolvió teniendo como unidades los minutos; no se hizo la conversión a la notación decimal porque el intervalo así lo permitió.

TEOREMA 5.11. Si X es una variable aleatoria uniforme con parámetros a y b , entonces se tiene que

- $E(X) = \frac{a+b}{2}.$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$
- $M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}.$

Demostración

Por definición,

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12},$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a} dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}.$$

2.2 Distribución exponencial

DEFINICIÓN 5.7. Se dice que una variable aleatoria X es **exponencial** si su función de densidad está dada por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{para } x > 0, \text{ 0 en otro caso; } \lambda > 0.$$

EJEMPLO 5.13. Suponga que la variable que indica la vida útil de un foco se distribuye de acuerdo con una ley exponencial con $\lambda = 1$.

- (a) Encuentre la probabilidad de que el foco funcione la primera hora.
 (b) Encuentre la probabilidad de que funcione durante la cuarta hora.

Solución

- (a) Si X es una variable aleatoria exponencial con $\lambda = 1$, entonces su función de densidad es igual a

$$f(x) = e^{-x}, \quad \text{para } x > 0, \text{ 0 en otro caso.}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(\text{el foco funciona la primera hora}) &= P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= 1 - e^{-1} = 0.6321 \end{aligned}$$

- (b) $P(\text{el foco funciona durante la cuarta hora}) = P(3 \leq X \leq 4)$

$$P(3 \leq X \leq 4) = \int_3^4 e^{-x} dx = e^{-3} - e^{-4} = 0.03115.$$

Como se puede observar, conforme más tiempo pase es menos probable que el foco continúe funcionando.

TEOREMA 5.12. Si X es una variable aleatoria exponencial con parámetro λ , entonces se tiene que

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
- $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, para $t < \lambda$.

Demostración

Por definición,

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \\
 E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} \\
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \\
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} \lambda e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t},
 \end{aligned}$$

para $t > \lambda$.

Las integrales se resolvieron por partes.

2.3 Distribución gamma

DEFINICIÓN 5.8. Se conoce como función gamma a la función definida por la integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy,$$

la cual existe para $\alpha > 0$.

TEOREMA 5.13. Si $\alpha > 1$, entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$.

Demostración

Integrando por partes la función gamma, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \underbrace{y^{\alpha-1} e^{-y}}_0 \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} (\alpha - 1) y^{\alpha-2} e^{-y} dy \\
 &= (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1),
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

COROLARIO 5.2. Si α es un entero positivo, entonces $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

EJEMPLO 5.14. Encuentre el valor de la función $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Solución

En este caso se tiene que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx,$$

y al integrar por sustitución, haciendo que $x = y^2$ y que $2dy = dx/\sqrt{x}$, se obtiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

El valor de esta integral se encuentra pasando a una integral doble,

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

La última integral se resuelve por sustitución, cambiando a coordenadas polares; la sustitución está dada por

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad 0 \leq r \leq \infty; 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

El valor absoluto del jacobiano de la transformación es $|J| = r$, y la integral se convierte en

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} r e^{-r^2} d\theta dr = \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4},$$

de donde se sigue que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}.$$

A partir de la función gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy,$$

se obtiene una función de distribución al introducir un nuevo parámetro, haciendo $y = x/\beta$, lo que da

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} (x/\beta)^{\alpha-1} e^{-x/\beta} (1/\beta) dx,$$

y luego, se normaliza para que la integral en todo el recorrido sea igual a 1:

$$1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx,$$

DEFINICIÓN 5.9. La variable aleatoria X , cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad \text{para } x > 0, \quad 0 \text{ en otro caso,}$$

se conoce como variable aleatoria **gamma** con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

EJEMPLO 5.15. Suponga que la cantidad de lluvia semanal, medida en *mm*, que cae en una región en cierta época del año, se distribuye como una variable aleatoria gamma, con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana caiga de 1 a 3 cm de precipitación pluvial?

Solución

Como la precipitación pluvial, X , se distribuye como una variable aleatoria gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, entonces su función de densidad es igual a

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(2)1^2} x^{2-1} e^{-x} = x e^{-x}, \quad \text{si } x > 0.$$

Entonces, la probabilidad de que la precipitación pluvial de dicha semana esté entre 1 y 3 cm se encuentra al calcular la integral

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 x e^{-x} dx = (-x e^{-x} - e^{-x}) \Big|_1^3 = 2e^{-1} - 4e^{-3} = 0.5366.$$

TEOREMA 5.14. Si X es una variable aleatoria gamma con parámetro α y β , entonces se tiene que

- $E(X) = \alpha\beta$.
- $V(X) = \alpha\beta^2$.
- $M_X(t) = (1 - t\beta)^{-\alpha}$.

Demostración

Por definición,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \frac{x}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\ &= \alpha\beta \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{(\alpha+1)-1} e^{-x/\beta} dx = \alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \int_0^\infty \frac{x^2}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}} x^{(\alpha+2)-1} e^{-x/\beta} dx = \alpha(\alpha+1)\beta^2 \\
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2 \\
M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x) dx = \int_0^\infty \frac{e^{tx}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha(1/\beta - t)^\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1/\beta - t)^\alpha} x^{(\alpha)-1} e^{-x(1/\beta - t)} dx \\
&= \frac{1}{(1 - t\beta)^\alpha}.
\end{aligned}$$

2.4 Distribución normal. La función de distribución normal es, sin exagerar, la más importante en la teoría de la estadística. Las propiedades que presenta la hacen única, y por ello su estudio es de suma importancia.

Se considera que los errores en un proceso de medición se distribuyen como una variable aleatoria normal.

DEFINICIÓN 5.10. Una variable aleatoria X tiene una distribución **normal**, con parámetros μ y σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

La gráfica de la función de densidad normal es simétrica y tiene la forma de una campana, centrada en el valor del parámetro μ .

La distancia entre el centro y el punto de inflexión de la curva normal coincide con el valor de σ .

Se puede probar que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68268$$

y

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95450.$$

Esto significa que para una variable aleatoria normal se tiene que en un intervalo alrededor de la media, con una separación de una desviación estándar, se encuentra aproximadamente el 68% de la población. Y con

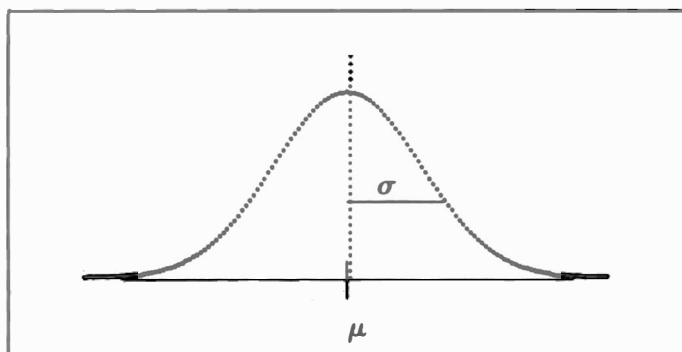


FIGURA 5.3 Función de densidad normal con media μ y varianza σ^2 .

una separación de dos desviaciones estándar se encuentra el 95% de la misma.

TEOREMA 5.15. Si X es una variable aleatoria normal con parámetros μ y σ^2 , entonces se tiene que

- $E(X) = \mu$,
- $V(X) = \sigma^2$,
- $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}$.

Demostración

Por definición,

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2} dx = \mu$,
- $E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (x - \mu)^2 e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2} dx = \sigma^2$,
- $M(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2} dx$.

Al desarrollar el exponente en el integrando $tx - (x - \mu)^2 / 2\sigma^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} tx - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{[x^2 - 2x(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^2] + (\mu + \sigma^2 t)^2 - \mu^2}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x - (\mu + \sigma^2 t))^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu t + \sigma^2 t^2}{2}, \end{aligned}$$

lo que implica que la función generatriz de momentos es

$$M(t) = e^{\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - (\mu + \sigma^2 t))^2 / 2\sigma^2} dx}_1 = e^{\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$M(t) = e^{\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

La probabilidad de que X se encuentre entre los valores de a a b está dada por la integral

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2} dx.$$

Esta función no tiene una antiderivada analítica, por lo que la integral se debe calcular numéricamente.

TEOREMA 5.16. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

es tal que $Z \sim N(0, 1)$.

Demostración

El teorema se prueba usando los resultados vistos en el capítulo 3.

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2}.$$

Ahora considere la transformación $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, de donde al despejar X se encuentra que $X = Z\sigma + \mu$ y $\frac{dx}{dz} = \sigma$; entonces,

$$f_Z(z) = f_X(x(z)) \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z\sigma + \mu - \mu)^2 / 2\sigma^2} \sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2/2},$$

de donde se infiere que $Z \sim N(0, 1)$ y se completa la demostración.

Este teorema permite tener una tabla única con los valores de la distribución normal de media cero y varianza uno; con ella se pueden calcular las probabilidades de una distribución normal, con cualquier media y cualquier varianza. En este libro se anexa una tabla con los valores de la integración numérica, correspondientes a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-x^2/2} dx,$$

para valores de z entre $0 \leq z \leq 3.99$ con dos cifras decimales.

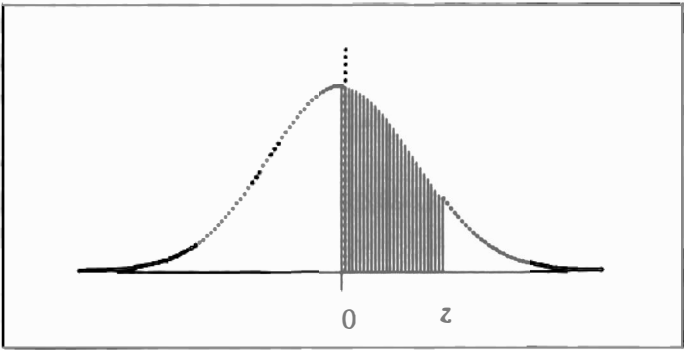


FIGURA 5.4 Área reportada en el área anexa.

La tabla presenta el formato mostrado en la figura 5.5.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0.1	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0.2	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
0.3	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

FIGURA 5.5 Formato de la tabla normal estándar.

En el margen izquierdo se encuentra la parte entera y el primer decimal del número z , y en la parte superior se encuentra el segundo decimal. En el interior de la tabla se encuentran los valores de la probabilidad, por ejemplo, en la tabla anterior el valor en el recuadro corresponde a la probabilidad

$$P(0 \leq Z \leq 0.32) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{0.32} e^{-x^2/2} dx.$$

Debido a que la gráfica es simétrica y el área total bajo la curva es igual a 1, se puede calcular la probabilidad en cualquier intervalo; considerando el área bajo la gráfica normal, se tiene que

$$\alpha + \beta = 0.5$$

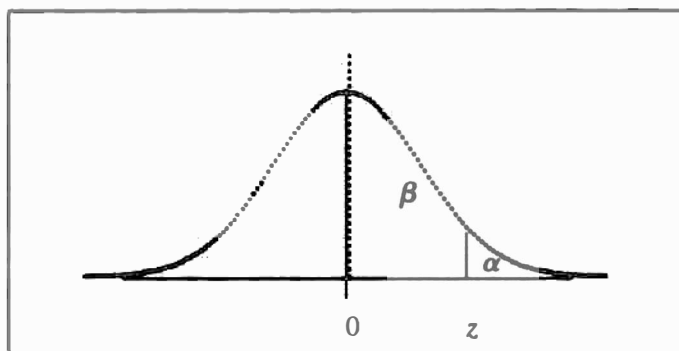


FIGURA 5.6 Partición del área bajo la curva normal en $\alpha + \beta = 0.5$.

COROLARIO 5.3. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right).$$

La demostración es directa.

EJEMPLO 5.16. Supongamos que el coeficiente intelectual de un grupo de personas X es una variable aleatoria normal con media 100 y varianza 100. ¿Qué porcentaje de la población tiene un coeficiente intelectual entre 90 y 110?

Solución

Se quiere la probabilidad

$$\begin{aligned} P(90 \leq X \leq 110) &= P\left(\frac{90 - 100}{10} \leq Z \leq \frac{110 - 100}{10}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1), \end{aligned}$$

y por simetría de la gráfica,

$$P(90 \leq X \leq 110) = 2P(0 \leq Z \leq 1) = 2(.34134) = 0.68268.$$

Conclusión: el 68.26% de la población tiene un coeficiente intelectual entre 90 y 110.

COROLARIO 5.4. La función generatriz de momentos de una variable aleatoria normal, $Z \sim N(0, 1)$, es igual a

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Ejercicios

EJERCICIO 5.1. Un tirador atina al blanco con una probabilidad igual a 0.30; ¿cuál es la probabilidad de que acierte al menos una vez en el blanco si hace 5 disparos?

EJERCICIO 5.2. Encuentre el valor de p tal que la variable aleatoria Bernoulli tenga varianza máxima.

EJERCICIO 5.3. Un programa para salvar al halcón peregrino de la extinción incluye la recolección e incubación de sus huevos. Se ha visto que sólo el 25% de los huevos en incubación da lugar a un nuevo halconcito, y que la mitad de los halcones que nacen vivos son hembras. ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 huevos en incubación

- (a) nazcan vivos al menos dos halconcitos?
- (b) nazca al menos una pareja (macho y hembra) de nuevos halconcitos?

EJERCICIO 5.4. (Problema de tiempo de espera) Se efectúan sucesivamente una serie de experimentos Bernoulli independientes, X es la variable que indica el número de intentos antes de tener n éxitos. La distribución de X se conoce como binomial negativa o de Pascal.

- (a) Encuentre la función de densidad de X .
- (b) Encuentre la función generatriz de momentos de X .
- (c) Encuentre la media y la varianza de X , usando la función generatriz de momentos.

EJERCICIO 5.5. Sea $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas, con media cero y varianza uno. La variable aleatoria $Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2$ se conoce como χ^2 (ji-cuadrada) con n grados de libertad.

- (a) Encuentre la función generatriz de momentos de la variable Y .
- (b) Encuentre la media y la varianza de Y , usando la función generatriz de momentos.

EJERCICIO 5.6. Se sabe que la probabilidad de que en un análisis clínico se dé un resultado falso positivo es igual a .05, y la probabilidad de que una persona de la población padezca la enfermedad es igual 0.15.

Si se aplica el análisis a 100 personas elegidas al azar, ¿cuántos resultados falsos positivos se esperaría tener?

EJERCICIO 5.7. Un hombre asegura tener la habilidad de localizar agua. Para probar su aseveración se le muestran 5 latas tapadas, dos de ellas con agua y tres vacías. Se le pide que, sin levantarlas, identifique las dos latas que tienen agua. Si el hombre está adivinando, ¿cuál es la probabilidad de que identifique las dos latas llenas de agua?

EJERCICIO 5.8. Un pescador ha atrapado 8 peces, dos de los cuales no tienen el tamaño reglamentario; un inspector toma tres peces al azar de la cesta y los mide. ¿Cuál es la probabilidad de que pase la inspección sin problemas?

EJERCICIO 5.9. Considere una instalación de cinco focos en serie, de tal manera que si alguno de ellos no sirve, ninguno funcionará. Si los focos de la instalación se eligen de un lote de 500 focos, de los cuales 50 son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que los focos funcionen?

EJERCICIO 5.10. Sea X una variable aleatoria Poisson con parámetro λ , y sea λ una variable aleatoria exponencial con parámetro igual a uno. Demuestre que

$$P(X = x) = (1/2)^{x+1}.$$

EJERCICIO 5.11. Una lotería vende 100 boletos con un único premio.

- (a) Si se compra un boleto, ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?
- (b) Si se compran 5 boletos, ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio?

EJERCICIO 5.12. Se ha visto que el 0.05% de la población de un país desarrolla cierta enfermedad cada año. Una compañía de seguros tiene aseguradas a 10,000 personas con una póliza que cubre esta enfermedad. Encuentre la probabilidad de que en este año la compañía aseguradora tenga que pagar (a) 4 pólizas exactamente, (b) más de dos pólizas.

EJERCICIO 5.13. Suponga que el 0.1% de los caracteres impresos en una imprenta son incorrectos. Si la página de un libro contiene aproximadamente 6,000 caracteres impresos, encuentre la probabilidad de que en una página dada haya al menos un carácter equivocado.

EJERCICIO 5.14. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes cuya función de distribución es exponencial con parámetro λ . Utilice la función generatriz de momentos para probar que la distribución de la variable aleatoria $\sum_{i=1}^n X_i$ es una función de distribución gamma. Encuentre los parámetros de la función de densidad gamma.

EJERCICIO 5.15. Utilice la función generatriz de momentos para probar que la suma de n variables aleatorias independientes, que se distribuyen de acuerdo con una normal con media μ y varianza σ^2 , tiene una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.

EJERCICIO 5.16. Pruebe, utilizando la función generatriz de momentos, que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes con función de densidad normal, con media μ y varianza σ^2 , entonces la variable $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1.

EJERCICIO 5.17. El tiempo, medido en minutos, que cierta persona invierte en ir de su casa a la estación del tren es un fenómeno aleatorio que obedece una ley de probabilidad uniforme en el intervalo de 20 a 25 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona alcance el tren que sale de la estación a las 7:28 a.m. si sale de su casa exactamente a las 7:05 a.m.?

EJERCICIO 5.18. Se divide la circunferencia de una rueda en 37 arcos iguales, que se numeran de 0 a 36 (éste es el principio de construcción de la ruleta). La rueda se monta sobre un eje y se coloca un marcador fijo. Se hace girar la rueda y cuando se detiene, se anota el punto señalado por el marcador fijo. La variable aleatoria que indica el número señalado se distribuye de manera uniforme. Calcule la probabilidad de que:

- (a) el número esté entre 1 y 10, incluyéndolos;
- (b) el número sea par,
- (c) el número sea el 3.

EJERCICIO 5.19. Se escoge un número del intervalo $[0, 1]$ por medio de un mecanismo aleatorio que obedece una ley de probabilidades uniforme en dicho intervalo. Calcule la probabilidad de que

- (a) el primer decimal de su raíz cuadrada sea 3;
- (b) su logaritmo natural sea mayor que -3 .

EJERCICIO 5.20. Suponga que la vida en horas de un bulbo es una variable aleatoria exponencial; ¿cuál es el valor de λ en horas si la probabilidad de que el bulbo funcione entre 100 y 200 horas es igual a 0.25?

EJERCICIO 5.21. En cierta ciudad, el consumo diario de agua, en millones de litros, es aproximadamente una variable aleatoria gamma con

$\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Si la capacidad de abasto diario de dicha ciudad es de nueve millones de litros de agua, ¿cuál es la probabilidad de que en determinado día el suministro de agua sea inadecuado?

EJERCICIO 5.22. Se sabe que la duración de cierto transistor sigue una distribución gamma, con media de 10 semanas y varianza de 50.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor dure por lo menos 50 semanas?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor no pase de las 10 semanas funcionando?

EJERCICIO 5.23. La vida de cierto dispositivo se distribuye como una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 0.01$.

- (a) ¿Cuál es el tiempo esperado de falla?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 200 horas antes de que se observe una falla?

EJERCICIO 5.24. Si $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, su función de densidad conjunta está dada por

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\exp \frac{(x-\mu_x)^2 \sigma_y^2 - 2(x-\mu_x)(y-\mu_y)\sigma_{xy} + (y-\mu_y)^2 \sigma_x^2}{2(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)}}{2\pi \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}}.$$

- (a) Encuentre la covarianza de X y Y .
- (b) Pruebe que si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, entonces necesariamente X y Y son independientes.

EJERCICIO 5.25. La longitud de los cerrojos que produce una máquina es una variable aleatoria normal, con media de 25 cm y desviación estándar 0.15 cm. Las especificaciones requieren que los cerrojos tengan una longitud de 25 ± 0.12 cm. Cuando un cerrojo no cumple estas especificaciones, se dice que es defectuoso.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cerrojo producido por esa máquina sea defectuoso?
- (b) Se ajusta la máquina para que los tornillos producidos tengan media 26 cm y la misma desviación estándar. ¿Cuál es la probabilidad de que un cerrojo producido por esa máquina sea defectuoso?
- (c) Se ajusta la máquina para que los tornillos producidos tengan una media de 25.5 cm y la misma desviación estándar. ¿Cuál es la probabilidad de que un cerrojo producido por esa máquina sea defectuoso?

EJERCICIO 5.26. La estatura promedio de un hombre de 21 años es una variable aleatoria normal, con media de 170 cm y desviación estándar de 5 cm. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que un hombre de 21 años de edad mida más de 170 cm, dado que mide más de 169 cm?

EJERCICIO 5.27. Las calificaciones de un grupo de estudiantes constituyen una variable aleatoria normal con media 7.5 y desviación estándar 1. ¿Qué proporción de la población tiene una calificación acreditada?

CAPÍTULO 6

Temas adicionales

*Causas pequeñas,
grandes efectos.*

En este capítulo se estudiarán algunos temas de especial importancia en la teoría de la probabilidad y la estadística.

1. Teorema central del límite

Sin duda alguna, éste es uno de los teoremas más importantes en la teoría de la estadística y justifica el papel preponderante de la distribución normal en ella.

TEOREMA 6.1 (Teorema central del límite). Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ observaciones aleatorias e independientes de una función de distribución arbitraria tal que $E(X_i) = \mu$ y $V(E_i) = \sigma^2$ (μ y σ finitos). Entonces la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)$$

converge a una variable aleatoria normal, con media 0 y varianza 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Z \sim N(0, 1).$$

Demostración

Observe que

$$\frac{\sum_1^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sum_1^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma} = \sum_1^n Z_i$$

donde $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$.

La función generatriz de momentos de Z_i , $i = 1, \dots, n$,

$$E(e^{tZ}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f(z) dz \\ \sum_i e^{tz_i} f(z_i) \end{cases}$$

es tal que

$$M_{Z_i}(0) = 1; \quad M'_{Z_i}(0) = E(Z_i) = 0; \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} M''_{Z_i}(t) = V(Z_i) = \frac{1}{n}.$$

Y por el teorema de Taylor, se sabe que existe un número real $\xi \in (0, t)$ tal que

$$M_{Z_i}(t) \approx M_{Z_i}(0) + M'_{Z_i}(0)t + \frac{M''_{Z_i}(\xi)t^2}{2} = 1 + \frac{M''_{Z_i}(\xi)t^2}{2}.$$

Entonces,

$$M_{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) = M_{\sum_{i=1}^n Z_i}(t),$$

y por la independencia de las variables aleatorias X_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (las variables aleatorias Z_i también son independientes), se tiene

$$M_{\sum_{i=1}^n Z_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{Z_i}(t) = \left(1 + \frac{M''_{Z_i}(\xi)t^2}{2}\right)^n.$$

De todo esto se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) = e^{t^2/2},$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución normal, con media igual a cero y varianza igual a uno. Y como la función generatriz de momentos es inyectiva, se prueba el teorema.

El teorema central del límite afirma que para cualquier muestra aleatoria, con la única condición de que su media y varianza sean valores finitos, la función de distribución de $\sum_1^n X_i$, de $\bar{X}$ y de $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ se puede aproximar con una distribución normal, y se cumple tanto con distribuciones continuas como con discretas. Cuando la variable aleatoria es discreta, se introduce un factor de corrección, como se verá más adelante.

De acuerdo con el teorema central del límite, cuando el tamaño de la muestra es “grande”, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

El tamaño de la muestra requerido para tener una “buena” aproximación normal depende de la distribución particular de las variables.

El siguiente ejemplo es un caso en que la convergencia hacia la distribución normal es excepcionalmente rápida.

EJEMPLO 6.1. Se lanza sucesivamente un dado no cargado. X_i indica el número de la cara del dado que cae hacia arriba en el i -ésimo lanzamiento; así, $i = 1, 2, 3, 4, \dots$. Como se puede ver, X_i es una variable aleatoria uniforme discreta cuyo rango es $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y cuya función de densidad es $f(x) = 1/6$.

La media de X es

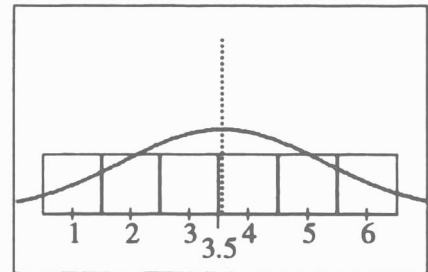
$$E(X) = 1 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{6} + 3 \frac{1}{6} + 4 \frac{1}{6} + 5 \frac{1}{6} + 6 \frac{1}{6} = 3.5$$

y su varianza es

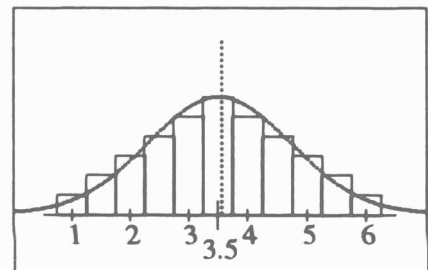
$$V(X) = (1 - 3.5)^2 \frac{1}{6} + (2 - 3.5)^2 \frac{1}{6} + \dots + (5 - 3.5)^2 \frac{1}{6} + (6 - 3.5)^2 \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

En seguida se presenta gráficamente el comportamiento de la función de densidad de $\bar{X}$, donde $X_1, X_2, \dots, X_n$ indican los resultados de las observaciones de n tiradas de un dado no cargado para una muestra de tamaño n , con $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 . En la gráfica se dibujó la función de distribución exacta de $\bar{X}$, distribución que es discreta, y la aproximación normal correspondiente, que es continua.

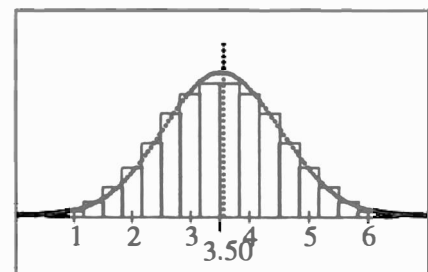
Resultados de la tirada de un dado. $n = 1$ y $\bar{X}_1 = X_1$, $\bar{X} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Las barras representan la densidad de $\bar{X}_1$; la curva punteada, la aproximación normal correspondiente.



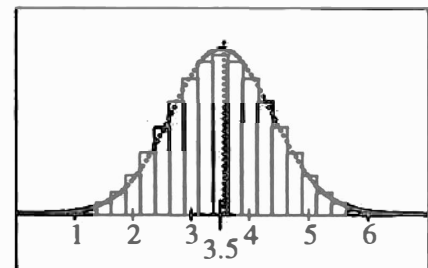
Resultados de las tiradas de dos dados. $n = 2$, $\bar{X}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$, $\bar{X} = 1, 1.5, 2, \dots, 5.5, 6$. Las barras representan la densidad de $\bar{X}_2$; la curva punteada, la aproximación normal correspondiente.



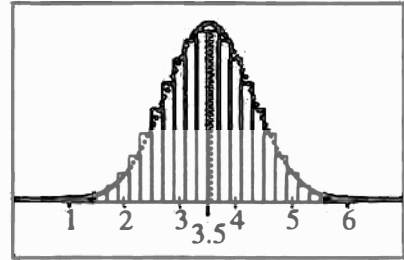
Resultados de las tiradas de tres dados. $n = 3$, $\bar{X}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$, $\bar{X} = 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{35}{3}, 6$. Las barras representan la densidad de $\bar{X}_3$; la curva punteada, la aproximación normal correspondiente.



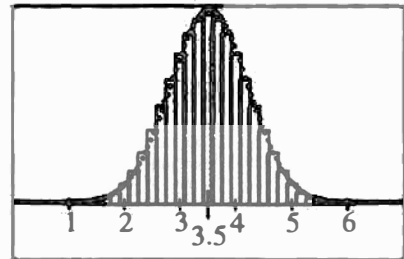
Se tiene el resultado de las tiradas de cuatro dados. $n = 4$, $\bar{X}_4 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$. Las barras representan la densidad de $\bar{X}_4$; la curva punteada, la aproximación normal correspondiente.



Se tiene el resultado de las tiradas de cinco dados. $n = 5$, $\bar{X}_5 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$. Las barras representan la densidad de $\bar{X}_5$; la curva punteada, la aproximación normal correspondiente.



Se tiene el resultado de las tiradas de seis dados. $n = 6$, $\bar{X}_6 = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6}{6}$. Las barras representan la densidad de $\bar{X}_6$; la curva punteada, la aproximación normal correspondiente.



En este ejemplo se puede observar lo siguiente:

- En los primeros casos la aproximación es muy mala y conforme aumenta el tamaño de la muestra, la aproximación mejora.
- Además, conforme n crece, la curva normal se concentra más, esto es, su varianza disminuye.

La probabilidad en la distribución discreta corresponde a la suma de las áreas de las barras; la probabilidad en la distribución continua corresponde al área bajo la curva en el intervalo correspondiente a las barras consideradas.

1.1 La binomial, aproximada por la normal. Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p (n , número de experimentos Bernoulli, y p , probabilidad de éxito en cada uno de estos experimentos), entonces

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

donde $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, $i = 1, \dots, n$. Por ser X igual al resultado de una suma de variables aleatorias para valores “grandes” de n la distribución binomial se puede aproximar con una distribución normal.

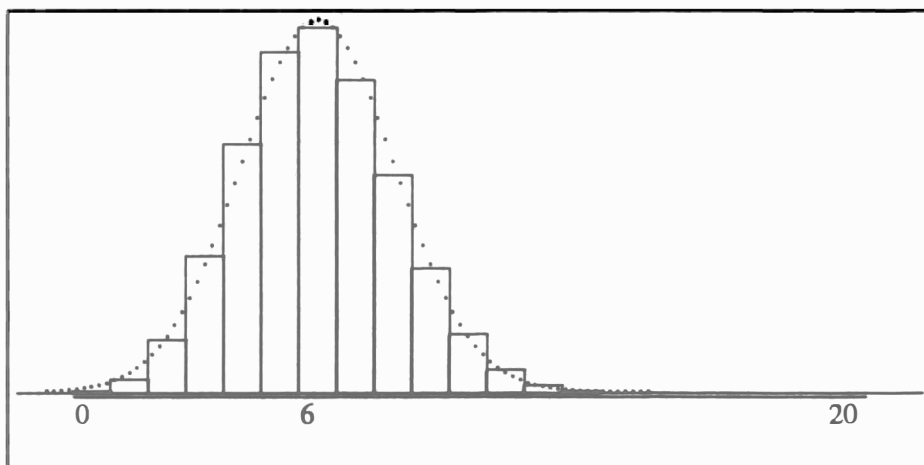


FIGURA 6.1 *Función de densidad binomial con $n = 20$ y $p = 0.30$. La gráfica está recargada hacia el cero, ya que la media es 6.*

La media y la varianza de la aproximación normal coinciden con la media y la varianza de la distribución binomial: $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$.

Si X es una variable aleatoria binomial y Y es la correspondiente variable normal que la aproxima, entonces se cumple la relación

$$P(X = k) \simeq P(k - 0.5 < Y < k + 0.5) = \int_{k-0.5}^{k+0.5} f_Y(y) dy.$$

El valor de 0.5 es el **factor de corrección** para compensar el cambio de una distribución discreta a una continua. En un caso se tiene que la probabilidad es el área de una barra, en el otro caso es el área bajo la curva.

En general, se tiene que

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 \leq Y \leq b + 0.5).$$

EJEMPLO 6.2. Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros $n = 15$ y $p = 0.15$, encuentre la probabilidad de que X esté entre 5 y 10.

Solución

La probabilidad “exacta” se encuentra con la tabla de la distribución binomial, con $n = 15$ y $p = 0.15$.

$$P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(4) = 1 - 0.9383 = 0.0617$$

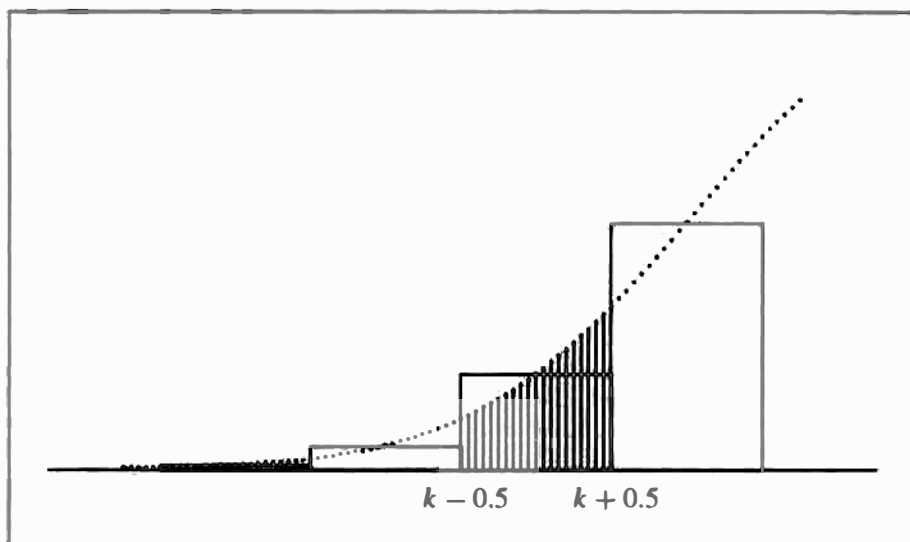


FIGURA 6.2 Área de una barra aproximada por el área bajo la curva normal.

La probabilidad “aproximada” se encuentra con la tabla de la distribución normal. Para ello, primero se encuentran la media y la varianza de la variable aleatoria binomial.

$$\mu = np = 15(0.15) = 2.25$$

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 15(0.15)(0.85) = 1.9125$$

$$\sigma = 1.3829317$$

con estos valores se estandariza la variable aleatoria:

$$\begin{aligned} P(5 - 0.5 \leq X \leq 10 + 0.5) &= P\left(\frac{4.5 - 2.25}{1.3829} \leq Z \leq \frac{10.5 - 2.25}{1.3829}\right) \\ &= P(1.63 \leq Z \leq 5.96) \\ &= P(0 \leq Z \leq 5.96) - P(0 \leq Z \leq 1.63) \\ &= 0.5 - 0.4484 = 0.0516. \end{aligned}$$

La diferencia entre el valor “real” y el valor “aproximado” de la probabilidad es igual 0.0101.

EJEMPLO 6.3. Sea X una variable aleatoria binomial con $n = 15$ y $p = 0.35$; encuentre el valor exacto y el valor aproximado de

$$P(5 \leq X \leq 10).$$

Solución

La probabilidad “exacta” se encuentra con la tabla de la distribución binomial, con $n = 15$ y $p = 0.35$.

$$P(5 \leq X \leq 10) = 0.9972 - 0.3519 = 0.6453.$$

La probabilidad aproximada se encuentra con la tabla de la distribución normal,

$$\mu = np = 15(0.35) = 5.25$$

$$\sigma^2 = np(1 - p) = 15(0.35)(0.65) = 3.4125$$

$$\sigma = 1.8473$$

y

$$\begin{aligned} P(4.5 \leq X \leq 10.5) &= P\left(\frac{4.5 - 5.25}{1.8473} \leq Z \leq \frac{10.5 - 5.25}{1.8473}\right) \\ &= P(-0.40 \leq Z \leq 2.84) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.40) + P(0 \leq Z \leq 2.84) \\ &= 0.1554 + 0.4977 = 0.6531. \end{aligned}$$

La diferencia entre el valor exacto y el aproximado es igual a 0.0078. La diferencia es menor que en el caso anterior, y este hecho no es casual ya que mientras el valor de p se encuentre más cerca de 0.5, la convergencia hacia la normal será más rápida (0.35 está más cerca de 0.50 que 0.15).

EJEMPLO 6.4. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros $n = 18$ y $p = 0.5$. Encuentre el valor exacto y el aproximado de la probabilidad que X sea igual a 9.

Solución

Utilizando la tabla de la distribución binomial, se tiene que

$$P(X = 9) = F(9) - F(8) = 0.5927 - 0.4073 = 0.1854,$$

mientras que por la aproximación normal se tiene que

$$\mu = 18(0.5) = 9 \quad \sigma^2 = 18(0.5)(0.5) = 4.5 \quad \sigma = 2.1713203$$

y

$$\begin{aligned} P(8.5 \leq X \leq 9.5) &= P\left(\frac{8.5 - 9}{2.1713203} \leq Z \leq \frac{9.5 - 9}{2.1713203}\right) \\ &= P(-0.2354 \leq Z \leq 0.2354) = 0.1850. \end{aligned}$$

La diferencia entre los dos valores es 0.0004.

De estos tres últimos ejemplos se puede ver que aunque n no sea muy grande, la aproximación normal ya es buena. El teorema central del límite afirma que esta aproximación mejora conforme n aumenta de valor.

La tabla de la distribución binomial que se incluye en este libro, sólo tiene los cálculos para valores de n menores o iguales a 25; para valores mayores que 25, se puede hacer el cálculo de las probabilidades con la función de densidad exacta (lo que resulta muy latoso y poco preciso por los redondeos), o aplicar el teorema central del límite y utilizar una aproximación normal.

En los casos en que la probabilidad de éxito sea casi 0, o casi de 1, y n sea grande, la distribución binomial se puede aproximar con una distribución de Poisson.

1.2 El promedio muestral aproximado por una normal. Se tiene una población de tamaño N , y X es la variable de interés (X podría ser: edad, ingreso, número de hijos, etc.).

La media y la varianza poblacionales de la variable X son $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$ respectivamente.

De esta población se extrae una muestra aleatoria de n unidades, $X_1, X_2, \dots, X_n$. Sin importar cuál sea la distribución de la variable X , con base en el teorema central del límite se puede afirmar que el promedio $\bar{X}$ tiene una distribución aproximadamente normal, con media μ y varianza σ^2/n , cuando n es grande.

EJEMPLO 6.5. La media y la varianza poblacional de la variable X son: $\mu = 67$ y $\sigma^2 = 81$; ¿qué porcentaje de las muestras de tamaño 100 tiene un promedio muestral entre 65 y 69?

Solución

El teorema central del límite afirma que $\bar{X}$ es aproximadamente $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, así que

$$\bar{X} \sim N(67, 81/100)$$

y

$$\begin{aligned} P(65 \leq \bar{X} \leq 69) &\approx P\left(\frac{65 - 67}{9/10} \leq Z \leq \frac{69 - 67}{9/10}\right) \\ &= P(-2.22 \leq Z \leq 2.22) = 0.9736. \end{aligned}$$

Este resultado implica que el 97.36% de las muestras tienen un promedio entre 65 y 67.

EJEMPLO 6.6. Se proyecta hacer un muestreo de 100 unidades de una población cuya varianza poblacional es 9.

1. ¿Qué porcentaje de las posibles muestras tiene un promedio que no difiere del promedio poblacional en más de 0.5?
2. Al realizar el muestreo se encontró que $\bar{X} = 29$. ¿Cómo se puede utilizar esta información para hacer inferencias con respecto a μ ?

Solución

1. Se pide encontrar la probabilidad

$$P(-0.50 \leq \bar{X} - \mu \leq 0.50),$$

para lo cual se utiliza el hecho de que $\bar{X} \sim N(\mu, 9/100)$.

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.50) &= P(-0.50/0.3 \leq (\bar{X} - \mu)/0.3 \leq 0.50/0.3) \\ &= P(-1.66 \leq Z \leq 1.66) = 0.9030. \end{aligned}$$

El 90.30% de las muestras tiene un promedio entre $\mu - 0.5$ y $\mu + 0.5$.

2. Se sabe que el 90.30% de todas las posibles muestras tiene un promedio que difiere menos de 0.5 del valor de μ . Si la muestra que se obtuvo pertenece a este grupo, se tendrá

$$|29 - \mu| \leq 0.5 \implies \mu \in (28.5, 29.5).$$

Si la muestra no forma parte de ese grupo, se tendrá que

$$|29 - \mu| > 0.5 \implies \mu \notin (28.5, 29.5).$$

Entonces, al obtener la muestra se tiene un 90.30% de confianza de que la media poblacional estará contenida en el intervalo señalado.

Ejercicios

EJERCICIO 6.1. El 5% de la producción de tornillos de una fábrica resulta tener algún tipo de defecto. Si se empacan cajas con 250 tornillos y se garantiza que no más del 7% de los mismos son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que una caja dada no cumpla la garantía?

EJERCICIO 6.2. Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{50}$ el tiempo que duran funcionando 50 focos. Encuentre el intervalo de 90% de confianza para el valor medio de vida de la población de focos, si $\bar{X} = 305$ horas y $\sigma^2 = 50$. Use la aproximación normal.

EJERCICIO 6.3. Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{50}$ una muestra de variables aleatorias Bernoulli independientes. Si $\bar{X} = 0.39$, encuentre un intervalo de 95% de confianza para el parámetro p . Use la aproximación normal.

EJERCICIO 6.4. Sea $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{50}$ una muestra de variables aleatorias Poisson independientes. Si $\bar{X} = 17$, encuentre un intervalo de 99% de confianza para el parámetro λ . Use la aproximación normal.

2. Números aleatorios y simulación

Una serie de números aleatorios está formada por los resultados de elegir sucesivamente con reemplazo uno de los 10 dígitos.

Los números aleatorios se utilizan para dos cosas:

1. Para seleccionar una muestra de una distribución particular.
2. Para simular un proceso aleatorio que sondee sus propiedades estadísticas.

Una simulación permite tener resultados cuando es muy difícil efectuar el experimento o bien cuando resulta difícil analizar las características de los estimadores.

La herramienta indispensable para hacer una simulación es **una tabla de números aleatorios**.

Una **tabla de números aleatorios** presenta, en una serie numérica, los resultados de elegir al azar, sucesivamente y con reemplazo, uno de los diez dígitos: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0**. Entonces, la tabla representa los resultados de una muestra de una distribución uniforme discreta con 10 valores posibles.

En realidad el proceso para generar los números aleatorios no es aleatorio. Se obtienen utilizando algoritmos que aprovechan las propiedades de congruencia de los números enteros. En la actualidad se pueden utilizar las subrutinas de algunos lenguajes de cómputo, como Pascal o C, los cuales tienen una función $\text{RANDOM}(X)$ que proporciona un número "aleatorio".

Por lo general, las tablas de números aleatorios se presentan en columnas de cinco cifras cada una. Uno puede iniciar la elección de los números aleatorios en cualquier columna o renglón, y se puede recorrer la tabla en cualquier dirección: hacia atrás o hacia adelante, hacia arriba o hacia abajo. En los ejemplos aquí presentados se iniciará siempre en la primera columna y en el primer renglón, y se recorre la tabla hacia adelante.

El siguiente es un fragmento de una tabla de números aleatorios.

10480	15011	01536	02011	81647
94739	31648	30598	29650	94383

con este fragmento se resolverán los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6.7. Simule la tirada de 10 volados usando la tabla de números aleatorios.

Solución

Como al lanzar una moneda se tiene igual probabilidad de que salga un águila o un sol, se considerará que si en la tabla de números aleatorios aparece un número par, el resultado del volado es águila, y si el número es non el resultado del volado es sol. Así, los dos posibles eventos tienen igual probabilidad.

$$\{\text{águila}\} \approx \{0, 2, 4, 6, 8\} \quad \text{y} \quad \{\text{sol}\} \approx \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

De esta manera, el primer renglón del fragmento de la tabla de números aleatorios (10480 15011) daría un resultado para los diez volados de

S, a, a, a, a, S, S, a, S, S

EJEMPLO 6.8. Simule 8 veces la tirada de un dado no cargado usando la tabla de números aleatorios.

Solución

Si el resultado de lanzar un dado es un número entero entre 1 y 6, cada vez que uno de estos números esté en la tabla se considerará que es el resultado de una tirada, y si se tiene uno de los números 7, 8, 9 o 0, se pasará al siguiente número. Observe los resultados que se tienen utilizando los primeros números del fragmento de la tabla de números aleatorios.

Números en la tabla:

10480 15011 01536 02011 8164 7

Note que se han escrito en negritas los números que, de acuerdo con el ejemplo, se pueden elegir.

Resultados de las ocho tiradas del dado (simulación):

1, 4, 1, 5, 1, 1, 1, 5

EJEMPLO 6.9. Simule la elección al azar de 5 personas de un total de 20, si el muestreo se hace

- 1. sin reemplazo,
- 2. con reemplazo.

Solución

Como el total de personas es 20, se toman números de dos dígitos para representar a cada una. Observe que desde 01, 02, etc., hasta 99 y 00 hay un total de 100 valores.

A cada persona le corresponden 5 números de la tabla; por ejemplo, la asociación puede ser la siguiente:

Persona	Números que se le asocian
1	01, 21, 41, 61, 81
2	02, 22, 42, 62, 82
3	03, 23, 43, 63, 83
...	...
20	20, 40, 60, 80, 00

1. Muestreo con reemplazo:

Se elige a una persona de acuerdo con el número en la tabla, sin restringirlos.

Números en la tabla:
10480 15011 01536 02011 81647
Elección con reemplazo de 5 personas:
10, 8, 1, 10, 11.

2. Muestreo sin reemplazo:

Se elige una persona de acuerdo con el número en la tabla, pero si aparece un número que ya antes apareció, no se escoge y se pasa al siguiente número.

Números en la tabla:
10480 15011 01536 02011 81647
Elección sin reemplazo de 5 personas:
10, 8, 1, 11, 3.

EJEMPLO 6.10. Simule la elección de 2 números de una distribución normal, con media 0 y varianza 1.

Solución

La tabla de números aleatorios es el resultado de las observaciones de una distribución uniforme discreta. Por el teorema central del límite, se sabe que el promedio de n observaciones tiene una distribución que tiende a la normal; y, como se vio en el ejemplo de las tiradas sucesivas de un dado, cuando la distribución de las observaciones es uniforme, la convergencia hacia la normal es muy rápida.

Si X es la variable aleatoria uniforme con recorrido igual a

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

entonces $E(X) = 4.5$, $V(X) = 8.25$ y $\sigma/n = \sqrt{0.825} = 0.908$.

Considere el promedio de 10 observaciones de una distribución uniforme. Por el teorema central del límite, se tiene que

$$\bar{X} \sim N(4.5, 0.825)$$

y, finalmente, se tiene que la variable aleatoria

$$Z = \frac{\bar{X} - 4.5}{0.908} \sim N(0, 1).$$

Los números en la tabla de números aleatorios son

10480 15011 01536 02011 81647.

El promedio de 10 de ellos es

$$\begin{aligned}\bar{X}_1 &= \frac{1+0+4+8+0+1+5+0+1+1}{10} = 2.1 \\ \bar{X}_2 &= \frac{0+1+5+3+6+0+2+0+1+1}{10} = 1.9\end{aligned}$$

Las dos realizaciones de una normal con media 0 y varianza 1 son

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{\bar{X}_1 - 4.5}{0.908} = \frac{2.1 - 4.5}{0.908} = -2.64 \\ Z_2 &= \frac{\bar{X}_2 - 4.5}{0.908} = \frac{1.9 - 4.5}{0.908} = -2.86\end{aligned}$$

TEOREMA 6.2. Sea $X \sim U(0, 1)$ una variable aleatoria y sea $y = h(x)$ una función continua y estrictamente creciente; entonces la función de densidad de $Y = h(X)$ es $F_Y(y) = h^{-1}(y)$ y $f_Y(y) = \frac{d}{dy} h^{-1}(y)$.

Demostración

Si $X \sim U(0, 1)$, entonces $f_X(x) = 1$, para $0 < x < 1$.

Si $Y = h(X)$ y $h(x)$ es invertible, entonces

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \frac{d}{dy} h^{-1}(y) = \frac{d}{dy} h^{-1}(y)$$

queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 6.11. Simule la selección al azar de una observación exponencial con $\lambda = 1$.

Solución

Aplicando el teorema anterior, considere la función de distribución exponencial $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, cuya función inversa es $h(x) = -\ln(1 - x)$.

Entonces, si $X \sim U(0, 1)$ y $Y = -\ln(1 - X)$, Y es una variable aleatoria exponencial.

Para hacer la simulación escoja números de 6 dígitos, como se indica en seguida (pueden ser menos dígitos, pero no menos de 3).

Los números en la tabla de números aleatorios son

10480 15011 01536 02011 81647

Las observaciones uniformes son

$X_1 = 0.104801$, $X_2 = 0.501101$, $X_3 = 0.536020$, $X_4 = 0.118164$.

Las observaciones exponenciales correspondientes, $Y_i = -\ln(1 - X_i)$, son

$Y_1 = 0.11071$, $Y_2 = 0.69535$, $Y_3 = 0.76791$, $Y_4 = 0.12575$.

Ejercicios

EJERCICIO 6.5. Simule la elección de una observación de Poisson con parámetro $\lambda = 3$, usando la tabla de números aleatorios (considere la aproximación a la binomial cuando $n = 1000$ y $p = 0.003$).

EJERCICIO 6.6. Simule la selección con reemplazo de 4 bolas de una urna que contiene 3 bolas rojas y 7 bolas negras.

EJERCICIO 6.7. Simule la elección de una observación binomial con parámetros $n = 10$ y $p = 0.40$, usando la tabla de números aleatorios.

EJERCICIO 6.8. Simule la elección de 10 observaciones exponenciales con $\lambda = 3$, usando la tabla de números aleatorios (considere la función inversa de la exponencial).

EJERCICIO 6.9. Simule la elección al azar de una página de un directorio telefónico de 2000 páginas.

3. Mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados es uno de los muchos **métodos estadísticos** que se utilizan para **estimar** el valor de uno o más parámetros desconocidos en un modelo probabilístico. La idea del método es dar un estimador de la media, encontrando el valor “más cercano” a los datos.

EJEMPLO 6.12. La estatura promedio de una población de personas μ es un parámetro desconocido, para estimarlo se toma una muestra aleatoria. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$, las estaturas de las personas en la muestra. Se va a estimar la estatura promedio de la población usando el método de mínimos cuadrados.

Solución

Sea μ la media poblacional de la estatura de las personas, y entonces se puede considerar que cada dato en la muestra es de la forma

$$X = \mu + \varepsilon,$$

donde ε es el error aleatorio de la observación con $E(\varepsilon) = 0$ y $V(\varepsilon) = \sigma^2$. Dado que μ es un parámetro desconocido, un criterio para estimarlo es haciendo que la suma de los cuadrados de los errores, $h(\mu)$, sea mínima:

$$h(\mu) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

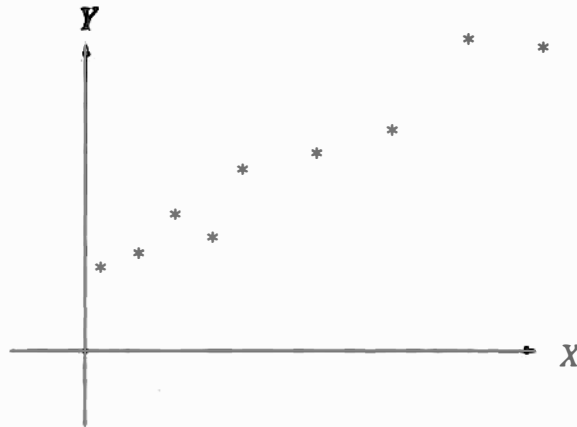
El valor que minimiza esta suma es el estimador de mínimos cuadrados de μ . El estimador de mínimos cuadrados se encuentra al derivar la función $h(\mu)$ e igualar a cero esta derivada.

$$\frac{d}{d\mu} h(\hat{\mu}) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\mu} (x_i - \mu)^2 = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \mu).$$

Esta expresión se hace cero cuando $\hat{\mu} = \bar{x}$; así, el estimador de mínimos cuadrados de μ es el promedio muestral.

Otra aplicación del método de mínimos cuadrados es la estimación de los parámetros de una función, que describe la asociación entre dos o más variables numéricas.

Por ejemplo, considere que en un proceso industrial, la temperatura y la presión están asociadas mediante una relación lineal. Al tomar algunas observaciones de la temperatura y presión del proceso, se obtiene la gráfica de la figura 6.3. X corresponde a la temperatura y Y a la presión asociada.

FIGURA 6.3 *Diagrama de la dispersión de X y Y.*

Al observar la gráfica se infiere que el modelo más simple para describir la presión como función de la temperatura es una recta; así, puede pensarse que cada dato de Y es igual a

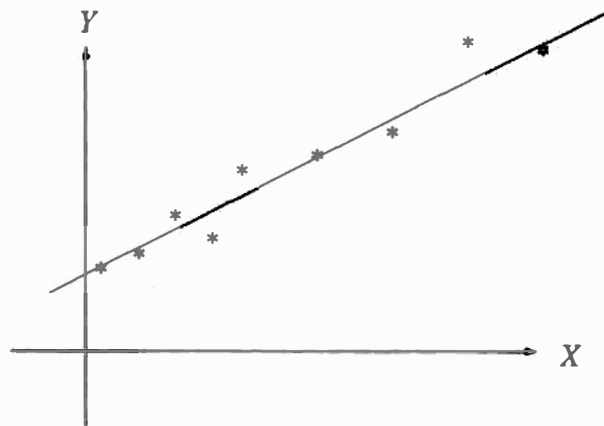
$$Y = a + bX + \varepsilon,$$

donde ε indica el error aleatorio de observación con las propiedades

$$E(\varepsilon) = 0 \quad y \quad V(\varepsilon) = \sigma^2.$$

De aquí se sigue que

$$E(Y | X = x) = a + bx \quad y \quad V(Y) = \sigma^2.$$

FIGURA 6.4 *Recta que describe la tendencia de los datos.*

La recta queda determinada cuando se conoce la ordenada al origen el número a , y la pendiente de la recta el número b . Los estimadores de mínimos cuadrados para a y b tienen la característica de hacer mínima la suma

$$H(a, b) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - (a + bX_i))^2.$$

Para encontrar los valores de a y b que hacen mínima esta suma, se deriva con respecto a las dos variables, se igualan a cero las derivadas respectivas y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales resultante.

$$\frac{\partial H(a, b)}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial H(a, b)}{\partial b} = 0$$

La solución es

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}; \quad \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}.$$

EJEMPLO 6.13. Los siguientes datos corresponden a la velocidad (en km/s) y a la altura (en km) de la estrella fugaz número 1242; con estos datos se quiere determinar una función que describa la asociación entre las dos variables:

zX (velocidad, km/s)	11.93	11.81	11.48	11.49	10.13	8.87
Y (altura, km)	62.56	57.78	53.10	48.61	44.38	40.57

Se propone como modelo la ecuación de una recta, para lo cual hay que obtener

- $\bar{X} = (11.93 + 11.81 + 11.48 + 11.49 + 10.13 + 8.87)/6 = 10.951$
- $\bar{Y} = (62.56 + 57.78 + 53.10 + 48.61 + 44.38 + 40.57)/6 = 51.167$
- $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 44.103$
- $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 7.271$

Los estimadores de a y b se calculan ahora fácilmente:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{44.103}{7.271} = 6.065$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} = 51.167 - 6.065 \times 10.951 = -15.259.$$

Así, la recta estimada es

$$\hat{Y} = -15.259 + 6.065X.$$

TEOREMA 6.3. Los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros del modelo $Y = a + bx + \varepsilon$ son insesgados.

Solución

Primero se van a encontrar algunas identidades que serán útiles en la demostración.

$$1. \quad \boxed{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) &= \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \bar{X} \\ &= \sum_{i=1}^n X_i - n\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n X_i = 0 \end{aligned}$$

$$2. \quad \boxed{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i - \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\bar{X} \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i \end{aligned}$$

$$3. \quad \boxed{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}$$

Esta demostración es análoga a la anterior.

Para probar que $\hat{b}$ es insesgado, se usa la identidad 3,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

y usando la propiedad de linealidad de la esperanza,

$$\begin{aligned} E(\hat{b}) &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})E(Y_i)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(a + bX_i)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\overbrace{a \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}^0 + b \overbrace{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i}^{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = b. \end{aligned}$$

Ahora, observe que

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\bar{X} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{X}(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i.\end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned}E(\hat{a}) &= E \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{X}(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{X}(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) E(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{\bar{X}(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) (a + bX_i) = a + b\bar{X} - b\bar{X} = a.\end{aligned}$$

Se concluye que los estimadores de los parámetros obtenidos por el método de mínimos cuadrados son insesgados.

COROLARIO 6.1. Sea $\hat{Y}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$ la recta estimada por el método de mínimos cuadrados, y entonces

$$E(\hat{Y}(x)) = a + bx.$$

La demostración del corolario es trivial.

TEOREMA 6.4. Sea $\hat{Y}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$ la recta estimada por el método de mínimos cuadrados, entonces para un valor fijo x_0 , se tiene que la varianza de $\hat{Y}(x_0)$ está dada por

$$V(\hat{Y}(x_0)) = \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) \sigma^2.$$

Demostración

Observe que

$$\begin{aligned}\hat{Y}(x_0) &= \hat{a} + \hat{b}x_0 = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} + \hat{b}x_0 = \bar{Y} + (x_0 - \bar{X})\hat{b} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i + (x_0 - \bar{X}) \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i.\end{aligned}$$

Por ser $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ variables aleatorias independientes,

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}(x_0)) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^2 V(Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2(x_0 - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2 (X_i - \bar{X})^2}{(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)^2} \right) \sigma^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) \sigma^2. \end{aligned}$$

TEOREMA 6.5. Sea $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$ el estimador de mínimos cuadrados de $Y(X_i)$, y entonces

$$\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-2}$$

es un estimador insesgado de σ^2 , esto es,

$$E \left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-2} \right) = E \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \right) = \sigma^2.$$

Demostración

Observe que

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \right) &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n E(Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\ &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (E(Y_i^2) - 2E(Y_i \hat{Y}_i) + E(\hat{Y}_i^2)). \end{aligned}$$

Antes de proseguir con esta expresión se analiza cada término:

$$E(Y_i^2) = V(Y_i) + [E(Y_i)]^2 = \sigma^2 + [E(Y_i)]^2$$

$$E(\hat{Y}_i^2) = V(\hat{Y}_i) + [E(\hat{Y}_i)]^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) \sigma^2 + [E(Y_i)]^2$$

y, por último,

$$E(Y_k \hat{Y}_k) = E(Y_k \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i)$$

$$= \underbrace{E(Y_k^2)}_{\sigma^2 + E(Y_k)^2} \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) + E(Y_k) \sum_{i \neq k} \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i$$

Con la contribución de uno de los términos del primer sumando, se completa la segunda suma sobre todos los índices.

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) + E(Y_k) \underbrace{E \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i \right)}_{Y_k}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) + (E(Y_k))^2.$$

$$E Y_k \hat{Y}_k = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_k - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) + (E(Y_k))^2.$$

Regresando a la primera expresión de la demostración, se obtiene

$$\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n E(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \frac{(n-2)\sigma^2}{n-2} = \sigma^2,$$

lo cual prueba que $\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n E(Y_i - \hat{Y}_i)^2$ es un estimador insesgado para σ^2 .

EJEMPLO 6.14. Se realiza un estudio sobre la cantidad de azúcar transformada en cierto proceso a varias temperaturas. Los datos se dan en la tabla 6.1.

Encuentre la recta de mínimos cuadrados para estos datos.

Solución

- $\bar{X} = (1 + 1.2 + 1.4 + 1.6 + 1.8 + 2)/6 = 1.5$
- $\bar{Y} = (7.8 + 8.5 + 9 + 8.8 + 9.3 + 10.2)/6 = 8.93$
- $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 1.42$
- $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0.7$

TABLA 6.1 Datos del ejemplo 6.14

Temperatura x	Azúcar transformada y
1	7.8
1.2	8.5
1.4	9.0
1.6	8.8
1.8	9.3
2	10.2

Así,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{1.42}{0.7} = 2.0286$$

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X} = 8.93 - 2.0286 \times 1.5 = 5.89.$$

Y la recta estimada es:

$$\hat{Y} = 5.89 + 2.0286X.$$

Además, el estimador de la varianza σ^2 es igual a

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2} = \frac{0.35276}{4} = 0.08819.$$

Para analizar la varianza de $\hat{Y}_i$ se calcula la varianza en cada punto de la muestra, y se escriben el máximo y mínimo de un intervalo de confianza para la recta estimada dado por $\hat{Y}_i - s$ y $\hat{Y}_i + s$.

En la tabla 6.2 se presentan los valores de $\hat{Y}_i$, $s^2 = \hat{V}(\hat{Y}_i)$ y de $\hat{Y}_i - s$ y $\hat{Y}_i + s$.

Observe que cuando X_i está más cerca de $\bar{X}$, la varianza de $\hat{Y}$ es menor. En la gráfica de la figura 6.5 se presenta la varianza alrededor de la recta estimada.

En la misma figura, los puntos (•) indican los extremos de los intervalos de confianza alrededor de la recta estimada, y los asteriscos (*) representan los datos muestrales.

TABLA 6.2 Intervalo de confianza para la recta.

Temp.	Az. t.	Pronóstico		Mínimo	Máximo
X	Y	$\hat{Y}$	$\hat{\sigma}^2 = s_p^2$	$\hat{Y}_i - s$	$\hat{Y}_i + s$
1	7.8	7.919	0.0367	7.7274	8.1106
1.2	8.5	8.325	0.0226	8.1847	8.4653
1.4	9.0	8.730	0.0156	8.6134	8.8466
1.6	8.8	9.136	0.0156	9.0194	9.2526
1.8	9.3	9.542	0.0226	9.4017	9.6823
2	10.2	9.948	0.0367	9.7564	10.1396

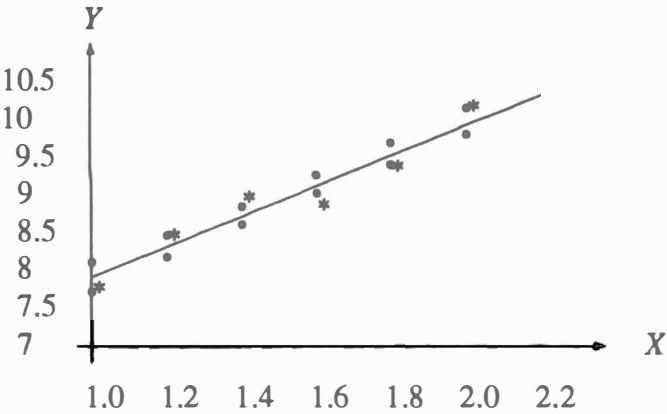


FIGURA 6.5 Extremos del intervalo de confianza de la recta en un punto dado.

Ejercicios

EJERCICIO 6.10. Probar que el punto $(\bar{X}, \bar{Y})$ es un punto de la recta $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$.

EJERCICIO 6.11. Dadas las variables aleatorias independientes $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tales que $V(Y_i) = \sigma^2$, para $i = 1, 2, \dots, n$, pruebe que:

- (a) $V(\hat{b}) = \sigma^2 / \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
- (b) $V(\hat{a}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 / n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = V(\hat{b}) \sum_{i=1}^n X_i^2 / n$.

EJERCICIO 6.12. Las cantidades de sustancia química (Y) diluidas en agua a diferentes temperaturas (X) se encuentran en la siguiente tabla:

x	0	0	0	15	15	15	30	30	30	45	45	45	60	60	60	75	75	75
y	8	6	8	12	10	14	25	21	24	31	33	28	44	39	42	48	50	44

- (a) Estime la recta de regresión lineal para estos datos.
 (b) Estime la cantidad de sustancia diluida en el agua cuando la temperatura es de 50 °C.

EJERCICIO 6.13. Una compañía refresquera quiere determinar la ecuación que asocia el costo de publicidad (X) con las ventas realizadas (Y). Se tienen 12 observaciones en miles de pesos.

x	40	20	25	20	30	50	40	20	50	40	25	50
y	385	400	395	365	475	440	490	420	560	525	480	510

- (a) Estime la recta de regresión lineal para estos datos.
 (b) Estime las ventas cuando el costo de publicidad es 50.

4. Caminatas aleatorias

Considere una partícula que se mueve sobre un plano con un movimiento de acuerdo con los resultados de una serie de experimentos independientes del tipo Bernoulli, con probabilidad de éxito igual a p . Cuando en el experimento Bernoulli ocurre un éxito, la partícula se mueve a la derecha l mm; si, por el contrario, ocurre un fracaso, la partícula se mueve l mm hacia la izquierda.

Al principio del proceso, la partícula se encuentra en el origen. Los experimentos Bernoulli se efectúan cada T segundos y los movimientos a la derecha se consideran positivos y hacia la izquierda negativos.

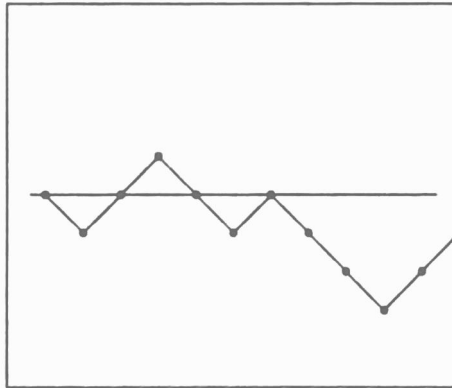
En este contexto, la variable aleatoria $X(t)$, que indica la posición de la partícula en el tiempo t , describe un procedimiento aleatorio conocido como caminatas aleatorias.

Por ejemplo, considere los siguientes 10 resultados del lanzamiento de una moneda no cargada.

s, a, a, s, s, a, s, s, s, a

La caminata aleatoria correspondiente a este resultado está dada en la gráfica de la figura 6.6.

DEFINICIÓN 6.1. Dada una sucesión de experimentos Bernoulli independientes, con probabilidad de éxito igual a p , se definen las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \dots$, tales que $X_i = l$ si ocurre éxito y $X_i = -l$

FIGURA 6.6 *Caminata aleatoria.*

si ocurre fracaso en el i -ésimo experimento Bernoulli ($l > 0$). Se llama **caminata aleatoria** a la sucesión dada por

$$X(ln) = \sum_{i=1}^n X_i;$$

esto es, una caminata aleatoria indica la diferencia entre el número de éxitos menos el número de fracasos de los n experimentos Bernoulli multiplicada por l .

TEOREMA 6.6. *Sea $X(ln)$ una caminata aleatoria definida por n experimentos Bernoulli independientes. El recorrido de $X(ln)$ está dado por*

$$R_{X(ln)} = \{-nl, -(n-2)l, -(n-4)l, \dots, (n-4)l, (n-2)l, nl\},$$

y su función de densidad por

$$P(X(ln) = ml) = \binom{n}{(n+m)/2} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}.$$

Demostración

Sea X la variable aleatoria que indica el número de éxitos en los n experimentos Bernoulli independientes, y entonces $X \sim B(n, p)$; el rango de X es

$$R_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

y su función de densidad es

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

La caminata aleatoria indica la diferencia entre el número de éxitos, X , menos el número de fracasos $n - X$, multiplicada por l ; así,

$$X(ln) = [X - (n - X)]l = (2X - n)l$$

y considerando el rango de X , el rango de $X(ln)$ es

$$R_{X(ln)} = \{-nl, -(n-2)l, -(n-4)l, \dots, (n-4)l, (n-2)l, nl\}.$$

Su función de densidad es

$$\begin{aligned} f_{X(ln)}(ml) &= P(X(ln) = ml) = P[(2X - n)l = ml] \\ &= P\left(X = \frac{m+n}{2}\right) = f_X\left(\frac{m+n}{2}\right) f_{X(ln)}(ml) \\ &= f_X\left(\frac{m+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}}. \end{aligned}$$

Esto es lo que se quería demostrar.

TEOREMA 6.7. Sea $X(ln)$ una caminata aleatoria, y entonces

$$E(X(ln)) = (2p - 1)nl \quad \text{y} \quad V(X(ln)) = 4np(1-p)l^2.$$

Demostración

$X(ln) = (2X - n)l$ y dado que se conoce la media y la varianza de la variable aleatoria binomial, se pueden utilizar las propiedades de linealidad del valor esperado y las propiedades de la varianza para calcular la media y la varianza de la caminata aleatoria. Así, se tiene que

$$E(X(ln)) = E[(2X - n)l] = [E(2X) - E(n)]l = (2np - n)l = (2p - 1)nl$$

y

$$V(X(ln)) = V[(2X - n)l] = V(2lX) = 4l^2 np(1-p);$$

entonces queda demostrado el teorema.

EJEMPLO 6.15. Un borrachito sale de la cantina y quiere llegar a su casa, pero sus pies no le responden. Así, él puede dar un paso hacia su casa con probabilidad $p = \frac{2}{3}$ y un paso hacia atrás con probabilidad $q = 1 - p = \frac{1}{3}$.

- (a) ¿Cuál es la posición esperada del borrachito, con respecto a la cantina, en el intento número 50?
- (b) Si su casa está a 40 pasos de la cantina, ¿cuál es el número esperado de intentos necesarios para llegar a ella?

Solución

- (a) La posición del borrachito con respecto a la cantina en el intento 50 es una caminata aleatoria con $l = 1$ y $n = 50$; entonces

$$E(X(50l)) = \left(\frac{4}{3} - 1\right)50 = \frac{50}{3} = 16.66.$$

Esto significa que en el intento 50, el borrachito estará en promedio a unos 17 pasos de la cantina, en dirección de su casa.

- (b) Sea $Y(i)$ la variable que indica el número de intentos necesarios para que el borrachito esté por primera vez a i pasos en dirección de su casa, partiendo desde cualquier punto. Así, para $i > 1$, $Y(i) = Y(i-1) + Y(1)$; esto es, el número de intentos para llegar por primera vez a la posición i desde un punto dado, es igual al número de intentos para llegar por primera vez a la posición $i-1$ más el número de intentos para llegar desde ahí por primera vez a la posición 1. En general, $Y(i) = Y_1(1) + Y_2(1) + \dots + Y_i(1)$.

Si la casa del borrachito está a 40 pasos de la cantina, entonces el número de intentos que éste requiere para llegar a su casa está dado por la variable $Y(40) = Y_1(1) + Y_2(1) + \dots + Y_i(1)$; así, el valor esperado de $Y(40)$ es

$$E(Y(40)) = E(Y_1(1)) + E(Y_2(1)) + \dots + E(Y_{40}(1)) = 40E(Y(1)).$$

Para encontrar el valor esperado de $Y(1)$ se utiliza la propiedad $E(E(Y(1) | X_1)) = E(Y_1)$, donde X_1 indica el resultado del experimento Bernoulli que determina el primer movimiento desde la posición dada.

Ahora observe que

$$E(Y_1 | X_1 = 1) = 1 \quad \text{y} \quad E(Y_1 | X_1 = -1) = 1 + E(Y_2) = 1 + 2E(Y_1),$$

de manera que

$$\begin{aligned} E(E(Y_1 | X_1)) &= E(Y_1 | X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\ &\quad + E(Y_1 | X_1 = -1)P(X_1 = -1) \\ &= \frac{2}{3} + (1 + 2E(Y_1))\frac{1}{3} = E(Y_1), \end{aligned}$$

y entonces

$$E(Y_1) = 3.$$

Finalmente,

$$E(Y_{40}) = 40E(Y_1) = 120.$$

Ejercicios

EJERCICIO 6.14 (Magnetismo). Un átomo tiene un *spin* $\frac{1}{2}$ y un momento magnético μ . De acuerdo con la mecánica cuántica, su *spin* puede apuntar hacia arriba o hacia abajo con respecto a una dirección dada. Cuando se tienen N átomos, el momento magnético es igual a μ veces el número de átomos con *spin* apuntando hacia arriba, menos μ veces el número de átomos con *spin* apuntando hacia abajo. Si las dos posiciones del *spin* son igualmente probables, ¿cuál es el momento magnético total neto?

EJERCICIO 6.15. Suponga que un apostador está jugando un peso cada vez en un juego de azar. La probabilidad de que gane o pierda un peso es igual a 0.5. Si comienza con 10 pesos, ¿cuál es la probabilidad de que después de 8 juegos tenga 6 pesos?

EJERCICIO 6.16. Considere una partícula que se mueve una unidad hacia la derecha, con probabilidad 0.3, o hacia la izquierda, con probabilidad 0.7. Cada movimiento es independiente de los anteriores. Después de 20 movimientos, ¿cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre 8 lugares a la derecha de su posición original?

Bibliografía

1. Ang, A. Y Tang, W. 1975. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*. Nueva York, John Wiley and Sons.
2. Feller, W. 1970. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Nueva York, John Wiley and Sons.
3. Gnedenko, B. V. 1969; *The Theory of probability*. Moscow, Mir.
4. Hamming, R. W. 1991. *The Art of Probability, for Scientists and engineers*. New York, Addison-Wesley (The Advanced Book Program).
5. Harris, B. 1966. *Theory of probability*. New York, Addison-Wesley.
6. Kubo, R. 1967. *Statistical Mechanics*. 2a. imp. Amsterdam, North-Holland.
7. Mood, A. M., Grabil, F. A. Y Boes, D. C. 1974. *Introduction to the theory of Statistics*. 3a. ed. Tokyo, McGraw-Hill.
8. Mosteller, F. 1987. *Fifty Challenging problems in Probability, with solution*. New York, Dover.
9. Parzen, E. 1973. *Teoría Moderna de Probabilidades y sus aplicaciones*. México, Limusa.
10. Pathria, R. K. 1985. *Statistical Mechanics*; Great Britain, Pergamon Press.
11. Reif, F. 1965. *Fundamentals of Statistical and thermal physics*. Tokyo, McGraw-Hill (International Student Edition).
12. Turner, J. C. 1981. *Matemática Moderna Aplicada, Probabilidades, Estadística e Investigación Operativa*. Madrid, Alianza Editorial.

APÉNDICE A

Tablas*

1. Tabla de distribución binomial

Los valores tabulados corresponden a

$$F(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P(X = i)$$

n \ k	p										
2	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	
	0	0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
	1	0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9927	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

*Todas las tablas fueron elaboradas por los autores.

3		0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	0	0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0080	0.0034	0.0010	0.0001
	1	0.5000	0.4253	0.3520	0.2818	0.2160	0.1562	0.1040	0.0608	0.0280	0.0073
	2	0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4		0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	0	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
	2	0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
	3	0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9687
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5		0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	0	0.0313	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0005	0.0000
	2	0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0086	0.0012
	3	0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0815	0.0226
	4	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

6	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
2	0.3437	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
3	0.6562	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0473	0.0158	0.0022
4	0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.5798	0.4661	0.3446	0.2235	0.1143	0.0328
5	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
3	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
4	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
5	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0444
6	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
3	0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0580	0.0273	0.0104	0.0029	0.0004	0.0000
4	0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.1941	0.1138	0.0563	0.0214	0.0050	0.0004

9	5	0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.4482	0.3215	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
	6	0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0572
	7	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
9	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	0	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
10	4	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
	5	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006
	6	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1409	0.0530	0.0084
	7	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6997	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
	8	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
10	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	0	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	1	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

10	3	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
	5	0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
	6	0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.0500	0.0128	0.0010
	7	0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115
	8	0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
	9	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	11	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
11	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	11	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
12	0	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.1133	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000
	5	0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0117	0.0027	0.0003	0.0000
	6	0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
	7	0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0185	0.0016
	8	0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
	9	0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3026	0.1019
	10	0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6862	0.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	12	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
12	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872

6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
12	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0095	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
6	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0.0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
7	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
8	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
9	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.0196
10	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
11	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

14	4	0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	6	0.5000	0.3563	0.2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.0000
	7	0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000
	8	0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.0003
	9	0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
	10	0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.1339	0.0245
	11	0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.1354
	12	0.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4867
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
14	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14		0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
	0	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0.0000
	8	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
	9	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
	10	0.9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
	11	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301
	12	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1530
	13	0.9999	0.9998	0.9992	0.9976	0.9932	0.9822	0.9560	0.8972	0.7712	0.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

15	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.1509	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.3036	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
7	0.5000	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
8	0.6964	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
9	0.8491	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0022	0.0001
10	0.9408	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
11	0.9824	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
12	0.9963	0.9893	0.9729	0.9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
13	0.9995	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
14	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9866	0.9648	0.9126	0.7941	0.5367
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

16	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010	0.0003
2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066	0.0021
3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281	0.0106
4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853	0.0384
5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976	0.1051
6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660	0.2272
7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629	0.4018
8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441	0.5982
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759	0.7728
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514	0.8949
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851	0.9616
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965	0.9894
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9979
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
8	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
9	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0267	0.0056	0.0005	0.0000
10	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
11	0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
12	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2101	0.0684	0.0070
13	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
14	0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9739	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
15	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

17	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006	0.0001
2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041	0.0012
3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184	0.0064
4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596	0.0245
5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471	0.0717
6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902	0.1662
7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743	0.3145
8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626	0.5000
9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166	0.6855
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174	0.8338
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699	0.9283
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914	0.9755
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9936
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9988
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
17	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
9	0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
10	0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
11	0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0.0319	0.0047	0.0001
12	0.9755	0.9404	0.8740	0.7652	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
13	0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
14	0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
15	0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0.2078
16	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

18	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003	0.0001
2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025	0.0007
3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120	0.0038
4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411	0.0154
5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077	0.0481
6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258	0.1189
7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915	0.2403
8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778	0.4073
9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473	0.5927
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720	0.7597
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463	0.8811
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817	0.9519
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9846
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9962
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
9	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
10	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000
11	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
12	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
13	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
14	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.2798	0.0982	0.0109
15	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
16	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
17	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

19	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002	0.0000
2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015	0.0004
3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077	0.0022
4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280	0.0096
5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777	0.0318
6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727	0.0835
7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169	0.1796
8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940	0.3238
9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710	0.5000
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159	0.6762
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129	0.8204
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658	0.9165
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891	0.9682
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9904
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
10	0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0067	0.0008	0.0000	0.0000
11	0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0233	0.0041	0.0003	0.0000
12	0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.0676	0.0163	0.0017	0.0000
13	0.9682	0.9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.1631	0.0537	0.0086	0.0002
14	0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.3267	0.1444	0.0352	0.0020
15	0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.5449	0.3159	0.1150	0.0132
16	0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.7631	0.5587	0.2946	0.0665

17	1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9690	0.9171	0.8015	0.5797	0.2453
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	0.9856	0.9544	0.8649	0.6226
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316
8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
11	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0001	0.0000
12	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000

13	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
14	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
15	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
16	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
17	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0.3231	0.0755
18	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3406	0.1094	0.0329	0.0092	0.0024	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.7170	0.3647	0.1550	0.0576	0.0190	0.0056	0.0014	0.0003	0.0001	0.0000
2	0.9151	0.6484	0.3705	0.1787	0.0745	0.0271	0.0086	0.0024	0.0006	0.0001
3	0.9811	0.8480	0.6113	0.3704	0.1917	0.0856	0.0331	0.0110	0.0031	0.0007
4	0.9968	0.9478	0.8025	0.5860	0.3674	0.1984	0.0924	0.0370	0.0126	0.0036
5	0.9996	0.9856	0.9173	0.7693	0.5666	0.3627	0.2009	0.0957	0.0389	0.0133
6	1.0000	0.9967	0.9713	0.8915	0.7436	0.5505	0.3567	0.2002	0.0964	0.0392
7	1.0000	0.9994	0.9917	0.9569	0.8701	0.7230	0.5365	0.3495	0.1971	0.0946
8	1.0000	0.9999	0.9980	0.9856	0.9439	0.8523	0.7059	0.5237	0.3413	0.1917
9	1.0000	1.0000	0.9996	0.9959	0.9794	0.9324	0.8377	0.6914	0.5117	0.3318
10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9936	0.9736	0.9228	0.8256	0.6790	0.5000
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9983	0.9913	0.9687	0.9151	0.8159	0.6682
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9976	0.9892	0.9648	0.9092	0.8083
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9877	0.9621	0.9054
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964	0.9868	0.9608
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9867
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9964
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0036	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0133	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0392	0.0132	0.0036	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

7	0.0946	0.0379	0.0123	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.1917	0.0908	0.0352	0.0108	0.0024	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.3318	0.1841	0.0849	0.0313	0.0087	0.0017	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.5000	0.3210	0.1744	0.0772	0.0264	0.0064	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000
11	0.6682	0.4883	0.3086	0.1623	0.0676	0.0206	0.0041	0.0004	0.0000	0.0000
12	0.8083	0.6587	0.4763	0.2941	0.1477	0.0561	0.0144	0.0020	0.0001	0.0000
13	0.9054	0.8029	0.6505	0.4635	0.2770	0.1299	0.0431	0.0083	0.0006	0.0000
14	0.9608	0.9036	0.7998	0.6433	0.4495	0.2564	0.1085	0.0287	0.0033	0.0000
15	0.9867	0.9611	0.9043	0.7991	0.6373	0.4334	0.2307	0.0827	0.0144	0.0004
16	0.9964	0.9874	0.9630	0.9076	0.8016	0.6326	0.4140	0.1975	0.0522	0.0032
17	0.9993	0.9969	0.9890	0.9669	0.9144	0.8083	0.6296	0.3887	0.1520	0.0189
18	0.9999	0.9994	0.9976	0.9914	0.9729	0.9255	0.8213	0.6295	0.3516	0.0849
19	1.0000	0.9999	0.9997	0.9986	0.9944	0.9810	0.9424	0.8450	0.6353	0.2830
20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9976	0.9908	0.9671	0.8906	0.6594
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
22	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3235	0.0985	0.0280	0.0074	0.0018	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6982	0.3392	0.1367	0.0480	0.0149	0.0041	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000
2	0.9052	0.6200	0.3382	0.1545	0.0606	0.0207	0.0061	0.0016	0.0003	0.0001
3	0.9778	0.8281	0.5752	0.3320	0.1624	0.0681	0.0245	0.0076	0.0020	0.0004
4	0.9960	0.9379	0.7738	0.5429	0.3235	0.1645	0.0716	0.0266	0.0083	0.0022
5	0.9994	0.9818	0.9001	0.7326	0.5168	0.3134	0.1629	0.0722	0.0271	0.0085
6	0.9999	0.9956	0.9632	0.8670	0.6994	0.4942	0.3022	0.1584	0.0705	0.0262
7	1.0000	0.9991	0.9886	0.9439	0.8385	0.6713	0.4736	0.2898	0.1518	0.0669
8	1.0000	0.9999	0.9970	0.9799	0.9254	0.8135	0.6466	0.4540	0.2764	0.1431
9	1.0000	1.0000	0.9993	0.9939	0.9705	0.9084	0.7916	0.6244	0.4350	0.2617
10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9900	0.9613	0.8930	0.7720	0.6037	0.4159
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9971	0.9860	0.9526	0.8793	0.7543	0.5841
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9957	0.9820	0.9449	0.8672	0.7383
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9942	0.9785	0.9383	0.8569
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9930	0.9757	0.9331
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9981	0.9920	0.9738
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9979	0.9915
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

22	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0085	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0262	0.0080	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0669	0.0243	0.0070	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.1431	0.0617	0.0215	0.0058	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.2617	0.1328	0.0551	0.0180	0.0043	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.4159	0.2457	0.1207	0.0474	0.0140	0.0029	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.5841	0.3963	0.2280	0.1070	0.0387	0.0100	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
12	0.7383	0.5650	0.3756	0.2084	0.0916	0.0295	0.0061	0.0007	0.0000	0.0000
13	0.8569	0.7236	0.5460	0.3534	0.1865	0.0746	0.0201	0.0030	0.0001	0.0000
14	0.9331	0.8482	0.7102	0.5264	0.3287	0.1615	0.0561	0.0114	0.0009	0.0000
15	0.9738	0.9295	0.8416	0.6918	0.5058	0.3006	0.1330	0.0368	0.0044	0.0001
16	0.9915	0.9729	0.9278	0.8371	0.6866	0.4832	0.2674	0.0999	0.0182	0.0006
17	0.9978	0.9917	0.9734	0.9284	0.8355	0.6765	0.4571	0.2262	0.0621	0.0040
18	0.9996	0.9980	0.9924	0.9755	0.9319	0.8376	0.6680	0.4248	0.1719	0.0222
19	0.9999	0.9997	0.9984	0.9939	0.9793	0.9394	0.8455	0.6618	0.3800	0.0948
20	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9959	0.9851	0.9520	0.8633	0.6608	0.3018
21	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9982	0.9926	0.9720	0.9015	0.6765
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.3074	0.0886	0.0238	0.0059	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6794	0.3151	0.1204	0.0398	0.0116	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.8948	0.5920	0.3080	0.1332	0.0492	0.0157	0.0043	0.0010	0.0002	0.0000
3	0.9742	0.8073	0.5396	0.2965	0.1370	0.0538	0.0181	0.0052	0.0012	0.0002
4	0.9951	0.9269	0.7440	0.5007	0.2832	0.1356	0.0551	0.0190	0.0055	0.0013
5	0.9992	0.9774	0.8811	0.6947	0.4685	0.2688	0.1309	0.0540	0.0186	0.0053
6	0.9999	0.9942	0.9537	0.8402	0.6537	0.4399	0.2534	0.1240	0.0510	0.0173
7	1.0000	0.9988	0.9848	0.9285	0.8037	0.6181	0.4136	0.2373	0.1152	0.0466
8	1.0000	0.9998	0.9958	0.9727	0.9037	0.7709	0.5860	0.3884	0.2203	0.1050
9	1.0000	1.0000	0.9990	0.9911	0.9592	0.8799	0.7408	0.5562	0.3636	0.2024
10	1.0000	1.0000	0.9998	0.9975	0.9851	0.9454	0.8575	0.7129	0.5278	0.3388
11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9954	0.9786	0.9318	0.8364	0.6865	0.5000
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988	0.9928	0.9717	0.9187	0.8164	0.6612
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9979	0.9900	0.9651	0.9063	0.7976

14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9970	0.9872	0.9589	0.8950
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9960	0.9847	0.9534
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9952	0.9827
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9947
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0053	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0173	0.0048	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0466	0.0153	0.0040	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.1050	0.0411	0.0128	0.0030	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.2024	0.0937	0.0349	0.0100	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.3388	0.1836	0.0813	0.0283	0.0072	0.0012	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.5000	0.3135	0.1636	0.0682	0.0214	0.0046	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.6612	0.4722	0.2871	0.1425	0.0546	0.0149	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000
13	0.7976	0.6364	0.4438	0.2592	0.1201	0.0408	0.0089	0.0010	0.0000	0.0000
14	0.8950	0.7797	0.6116	0.4140	0.2291	0.0963	0.0273	0.0042	0.0002	0.0000
15	0.9534	0.8848	0.7627	0.5864	0.3819	0.1963	0.0715	0.0152	0.0012	0.0000
16	0.9827	0.9490	0.8760	0.7466	0.5601	0.3463	0.1598	0.0463	0.0058	0.0001
17	0.9947	0.9814	0.9460	0.8691	0.7312	0.5315	0.3053	0.1189	0.0226	0.0008
18	0.9987	0.9945	0.9810	0.9449	0.8644	0.7168	0.4993	0.2560	0.0731	0.0049
19	0.9998	0.9988	0.9948	0.9819	0.9462	0.8630	0.7035	0.4604	0.1927	0.0258
20	1.0000	0.9998	0.9990	0.9957	0.9843	0.9508	0.8668	0.6920	0.4080	0.1052
21	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9884	0.9602	0.8796	0.6849	0.3206
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9941	0.9762	0.9114	0.6926
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

24	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.2920	0.0798	0.0202	0.0047	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6608	0.2925	0.1059	0.0331	0.0090	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.8841	0.5643	0.2798	0.1145	0.0398	0.0119	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000
3	0.9702	0.7857	0.5049	0.2639	0.1150	0.0424	0.0133	0.0035	0.0008	0.0001
4	0.9940	0.9149	0.7134	0.4599	0.2466	0.1111	0.0422	0.0134	0.0036	0.0008
5	0.9990	0.9723	0.8606	0.6559	0.4222	0.2288	0.1044	0.0400	0.0127	0.0033
6	0.9999	0.9925	0.9428	0.8111	0.6074	0.3886	0.2106	0.0960	0.0364	0.0113
7	1.0000	0.9983	0.9801	0.9108	0.7662	0.5647	0.3575	0.1919	0.0863	0.0320
8	1.0000	0.9997	0.9941	0.9638	0.8787	0.7250	0.5257	0.3279	0.1730	0.0758
9	1.0000	0.9999	0.9985	0.9874	0.9453	0.8472	0.6866	0.4891	0.2991	0.1537
10	1.0000	1.0000	0.9997	0.9962	0.9787	0.9258	0.8167	0.6502	0.4539	0.2706
11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9928	0.9686	0.9058	0.7870	0.6151	0.4194
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9979	0.9885	0.9577	0.8857	0.7580	0.5806
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9964	0.9836	0.9465	0.8659	0.7294
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9945	0.9783	0.9352	0.8463
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9925	0.9731	0.9242
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9905	0.9680
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9972	0.9887
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9967
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0033	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0113	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0320	0.0095	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0758	0.0269	0.0075	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.1537	0.0648	0.0217	0.0055	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.2706	0.1341	0.0535	0.0164	0.0036	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.4194	0.2420	0.1143	0.0423	0.0115	0.0021	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000

12	0.5806	0.3849	0.2130	0.0942	0.0314	0.0072	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000
13	0.7294	0.5461	0.3498	0.1833	0.0742	0.0213	0.0038	0.0003	0.0000	0.0000
14	0.8463	0.7009	0.5109	0.3134	0.1528	0.0547	0.0126	0.0015	0.0001	0.0000
15	0.9242	0.8270	0.6721	0.4743	0.2750	0.1213	0.0362	0.0059	0.0003	0.0000
16	0.9680	0.9137	0.8081	0.6425	0.4353	0.2338	0.0892	0.0199	0.0017	0.0000
17	0.9887	0.9636	0.9040	0.7894	0.6114	0.3926	0.1889	0.0572	0.0075	0.0001
18	0.9967	0.9873	0.9600	0.8956	0.7712	0.5778	0.3441	0.1394	0.0277	0.0010
19	0.9992	0.9964	0.9866	0.9578	0.8889	0.7534	0.5401	0.2866	0.0851	0.0060
20	0.9999	0.9992	0.9965	0.9867	0.9576	0.8850	0.7361	0.4951	0.2143	0.0298
21	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9881	0.9602	0.8855	0.7202	0.4357	0.1159
22	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9978	0.9910	0.9669	0.8941	0.7075	0.3392
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9953	0.9798	0.9202	0.7080
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
0	0.2774	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.6424	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.8729	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
3	0.9659	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
4	0.9928	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
5	0.9988	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
6	0.9998	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
7	1.0000	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
8	1.0000	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
9	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
10	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
11	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

25	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0020	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.0073	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.0216	0.0058	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.0539	0.0174	0.0043	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.1148	0.0440	0.0132	0.0029	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.2122	0.0960	0.0344	0.0093	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.3450	0.1827	0.0778	0.0255	0.0060	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
12	0.5000	0.3063	0.1538	0.0604	0.0175	0.0034	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
13	0.6550	0.4574	0.2677	0.1254	0.0442	0.0107	0.0015	0.0001	0.0000	0.0000
14	0.7878	0.6157	0.4142	0.2288	0.0978	0.0297	0.0056	0.0005	0.0000	0.0000
15	0.8852	0.7576	0.5754	0.3697	0.1894	0.0713	0.0173	0.0021	0.0001	0.0000
16	0.9461	0.8660	0.7265	0.5332	0.3231	0.1494	0.0468	0.0080	0.0005	0.0000
17	0.9784	0.9361	0.8464	0.6939	0.4882	0.2735	0.1091	0.0255	0.0023	0.0000
18	0.9927	0.9742	0.9264	0.8266	0.6593	0.4389	0.2200	0.0695	0.0095	0.0002
19	0.9980	0.9914	0.9706	0.9174	0.8065	0.6217	0.3833	0.1615	0.0334	0.0012
20	0.9995	0.9977	0.9905	0.9680	0.9095	0.7863	0.5793	0.3179	0.0980	0.0072
21	0.9999	0.9995	0.9976	0.9903	0.9668	0.9038	0.7660	0.5289	0.2364	0.0341
22	1.0000	0.9999	0.9996	0.9979	0.9910	0.9679	0.9018	0.7463	0.4629	0.1271
23	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9984	0.9930	0.9726	0.9069	0.7288	0.3576
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9962	0.9828	0.9282	0.7226
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

2. Probabilidad de la función de distribución normal estándar

		$P(0 \leq Z \leq z) \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$									
z		.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0		.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03138	.03586
0.1		.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2		.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3		.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4		.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5		.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6		.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7		.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8		.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31327
0.9		.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0		.34134	.34375	.34614	.34850	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1		.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2		.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3		.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41149	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4		.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42785	.42922	.43056	.43189
1.5		.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6		.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7		.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8		.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9		.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0		.47725	.47778	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.43077	.48124	.48169
2.1		.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2		.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899
2.3		.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4		.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5		.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6		.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7		.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8		.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9		.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861
3.0		.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49896	.49900
3.1		.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929
3.2		.49931	.49934	.49936	.49938	.49940	.49942	.49944	.49946	.49948	.49950
3.3		.49952	.49953	.49955	.49957	.49958	.49960	.49961	.49962	.49964	.49965
3.4		.49966	.49968	.49969	.49970	.49971	.49972	.49973	.49974	.49975	.49976
3.5		.49977	.49978	.49978	.49979	.49980	.49981	.49981	.49982	.49983	.49983
3.6		.49984	.49985	.49985	.49986	.49986	.49987	.49987	.49988	.49988	.49989
3.7		.49989	.49990	.49990	.49990	.49991	.49991	.49992	.49992	.49992	.49992
3.8		.49993	.49993	.49993	.49994	.49994	.49994	.49994	.49995	.49995	.49995
3.9		.49995	.49995	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49997	.49997

3. Tabla de números aleatorios

03138	86105	20258	27292	67165	31869	16180	37224	42567	08201
47479	07057	84085	05972	29330	91728	36791	77466	32793	69767
84417	71798	30664	16263	32950	46602	24665	82568	27903	48177
14918	87434	28729	77275	97646	49253	88794	82728	02030	14106
14350	50081	02168	59293	00965	77448	65066	77049	70811	55751
20603	68109	59285	95546	64406	99837	24378	67617	29570	08589
77232	49528	88168	50997	57332	95319	68483	33871	00761	70535
98894	77405	74957	19771	14365	91360	78420	58928	86471	68937
28783	09364	62892	28003	87718	16123	27319	54369	96079	17436
15707	26812	17746	57680	49816	28519	15594	60977	73969	74641
08035	07633	05978	10653	79551	80589	38160	61203	43683	74083
49392	34129	81888	81703	14140	09349	06717	06029	19392	67296
22748	57036	25448	36590	83709	31458	31489	65643	69227	90299
31864	47868	29648	76674	74052	55197	72359	41166	54206	59582
88053	66894	11240	47173	40366	11476	05388	54861	67342	08073
92175	83870	68142	92701	27727	70088	73449	50000	66378	15822
23001	94652	36492	12671	98691	30626	05447	10193	86669	55444
69716	10069	66886	01655	30985	90430	53521	32703	44243	90063
34718	35378	48780	07156	85080	76031	18038	92284	49356	12757
89238	40325	20754	80713	58740	10981	62322	92767	54057	32613
44832	22679	18467	69047	99605	62974	69163	54073	09721	74719
14871	23293	88033	71378	43884	98030	15446	03938	18439	00970
37883	39493	36383	08230	45383	50470	46056	67543	81758	56688
25339	37238	58261	87439	60799	25715	69694	55771	87871	36088
36395	62169	78002	45700	20535	69821	83723	75180	90183	18646
77553	26747	29546	70283	45693	96430	18849	01227	22451	89911
32280	86294	76311	96664	27433	39604	83614	02080	24699	05276
50768	42274	00033	15012	70930	31247	39538	54768	26099	15109
29300	07691	70560	33031	78921	65515	56609	89629	02175	25599
88499	68455	03232	15800	15555	41299	41887	14367	00376	52966
76229	57035	23077	86241	06192	48519	07508	36709	66415	20591
80373	52130	41865	03923	99208	16051	04648	05890	10133	80344
95445	11511	21337	76356	98018	49736	03216	59362	80223	92234

51111	66005	99955	76904	71583	89412	99486	73273	78155	01672
36603	31975	07472	78369	26012	85504	91803	04847	89431	92420
48832	68905	37808	42205	74663	69607	34108	62942	51000	96887
10104	99021	02410	61645	35612	51053	64632	81024	63596	95170
49850	48538	99602	23917	19882	43766	68935	75906	03218	61272
80035	46433	16833	63455	07475	96233	78738	87016	43032	00572
22175	57719	88258	05860	47424	93146	86995	85963	72134	98124
21263	15419	66136	82518	18974	01727	81655	56072	46892	43918
14884	79991	87287	09565	59829	79947	21718	47458	40386	50199
70383	78094	31574	03515	60473	29194	05867	46578	21963	08430
65562	85574	34291	30540	47117	91638	72344	41029	08403	80851
25202	03637	34798	88482	86077	43768	25072	42148	36873	65060
42993	63589	75818	81285	45590	53746	61599	30777	24016	40827
72438	65560	17949	96047	03547	32368	89462	46734	51398	87757
67301	41479	58248	14477	97517	47037	15358	31305	61379	81639
48338	13526	46509	14429	33054	66237	82180	85694	15550	17679
74711	27589	34404	24773	03894	90029	68960	08048	66401	01457
61886	58159	77088	19146	89474	81160	64163	48758	78146	74751
19127	37812	90572	52660	87443	72775	29872	59353	10863	34455
35303	42278	57353	91373	67907	73799	99556	35818	09523	40039
27725	92269	23619	38794	08063	52853	51388	53723	22418	19560
41517	96995	50258	57870	37100	37575	78871	91497	68115	57351
52720	92936	22896	02268	97907	49500	97056	20685	82657	09525
43288	06112	99790	38444	70474	86536	82089	39414	65560	27517
86528	18172	36612	41237	08275	96831	00507	18701	10427	06274
63690	27258	80396	11858	69429	40655	48899	52107	10023	93787
32482	95073	27373	79350	85513	42072	50386	28569	72592	33455
42621	43201	97300	36135	58633	70991	48244	17525	32440	41775
48312	35601	46564	06416	18097	99753	55068	45755	89420	82138
59040	41774	29877	84199	57957	28149	64374	88050	25355	62391
04559	47415	82268	86751	22107	97800	66846	70082	26794	90594
23610	47851	35286	80784	60768	02480	41593	22967	49037	51201
25120	55354	60406	33628	57254	76450	70281	16218	92416	44092

71443	55812	54540	51546	73256	89452	54880	60334	84579	42648
02115	94492	03791	73293	90672	25941	64396	93414	78214	05656
09625	35933	88215	20326	94478	58644	98582	79187	38651	02578
02244	60723	78774	46955	50649	73912	93407	27905	16115	13715
99220	13140	33960	15487	41816	49779	10358	38004	29603	27499
06855	29792	84183	24209	37481	58438	05678	26428	39399	07584
76432	41562	03025	71279	51536	44255	72561	00389	09601	24020
52871	80733	62224	26321	83646	47657	45585	04297	66792	66717
42607	23325	57972	35157	09125	85595	58257	83888	02489	66901
66799	84626	36054	82816	80489	91912	07978	26458	51513	74666
77785	45022	38768	16991	89105	47268	14052	92896	62058	59152
08984	44635	03690	69796	13584	19347	09927	34972	62445	43684
57459	30293	69444	41112	09008	71298	96929	21583	80412	42626
70306	98245	42965	03448	73989	10905	59441	61367	89617	60907
77257	31956	62510	87127	27194	26129	07274	37768	01128	32534
88510	17648	07196	87150	37556	15653	25849	47281	91199	42066
15213	12131	63303	30439	39211	57146	85280	83703	16872	74320
76346	69208	16269	35637	29504	92374	41526	21852	24184	03642
86328	83784	01479	18415	52371	28328	62918	54672	56193	46347
78717	17951	72818	24657	16429	88376	89656	09278	25948	89426
69101	12140	41804	43129	43240	78436	88666	41371	89153	56806
01022	88001	58191	39542	92940	91431	57719	64996	38879	12404
08720	99391	51464	96636	27725	40203	67171	46993	06495	08319
75865	14925	87892	21153	55120	15811	61383	63904	95258	97922
26606	01146	26056	19690	98444	95937	81046	14955	52036	28638
60348	50899	31171	32624	77981	08333	68498	89078	04580	39043
90984	48054	41464	79868	09073	67997	86984	28209	12969	90907
81101	08648	24479	95338	39118	85367	77874	94412	10511	00061
28180	71046	23797	40017	10351	67565	03373	66069	97760	71906
69269	55089	33443	67584	55739	36732	32536	39622	09651	29090
79334	53620	54584	02978	67427	50160	31603	29502	56334	21724
52612	90630	43073	64329	27260	57432	72125	21049	49309	65680
32199	59620	53413	43509	13256	51319	78250	70807	22231	43292

APÉNDICE B

Solución a los ejercicios propuestos

Ejercicios del capítulo 0

Ejercicio 0.6 (a) Primero se completa la tabla, considerando las características dominantes y recesivas de cada factor.

		clase de óvulo			
		L-A	L-v	a-A	a-v
clase de polen	L-A	LL-AA 	LL-Av 	La-AA 	La-Av 
	L-v	LL-Av 	LL-vv 	La-Av 	La-vv 
	a-A	La-AA 	La-Av 	aa-AA 	aa-Av 
	a-v	La-Av 	La-vv 	aa-Av 	aa-vv 

(b) Al revisar la tabla se encuentra que la relación entre los individuos que presentan las diferentes características es

L-A : L-v : a-A : a-v
9 : 3 : 3 : 1

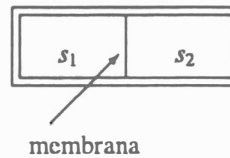
(c) Usando esta relación, se puede ver que de las 1600 plantas de la tercera generación, el número que se espera de cada una es:

-  Amarilla-lisa..... 900
-  Amarilla-arrugada.... 300
-  Verde-lisa..... 300
-  Verde-arrugada..... 100

Ejercicios del capítulo 1

Ejercicio 1.1 Proceso de separación de materiales.

Considere que P es igual a la proporción de soluto que queda en el solvente 1 y Q la proporción del mismo soluto que queda en el solvente 2; así, $P = 0.60$ y $Q = 0.40$. La proporción de material en cada parte del contenedor se calcula multiplicando este número por la cantidad total del soluto. La situación del contenedor es:



Modelo determinista

Un modelo determinista considera que la cantidad de soluto en cada solvente al final del proceso de separación es exactamente la que afirma la hipótesis. En la siguiente gráfica se muestra la situación del proceso de separación en cada etapa.

ETAPA	Inicio del proceso	Final del proceso				
PRIMERA	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	0	1	<table><tr><td>P</td><td>Q</td></tr></table>	P	Q
0	1					
P	Q					
SEGUNDA	<table><tr><td>0</td><td>Q</td></tr></table>	0	Q	<table><tr><td>PQ</td><td>Q^2</td></tr></table>	PQ	Q^2
0	Q					
PQ	Q^2					
TERCERA	<table><tr><td>0</td><td>Q^2</td></tr></table>	0	Q^2	<table><tr><td>PQ^2</td><td>Q^3</td></tr></table>	PQ^2	Q^3
0	Q^2					
PQ^2	Q^3					
CUARTA	<table><tr><td>0</td><td>Q^3</td></tr></table>	0	Q^3	<table><tr><td>PQ^3</td><td>Q^4</td></tr></table>	PQ^3	Q^4
0	Q^3					
PQ^3	Q^4					

Con este modelo se puede saber en una etapa determinada cuánto soluto existe en cada parte del compartimiento.

Modelo aleatorio

Un modelo aleatorio considera que la cantidad de soluto en cada solvente al final del proceso de separación no es exactamente la que afirma la hipótesis, sino que es un poco más o un poco menos debido a factores no controlados. En la siguiente gráfica se muestra la situación del proceso de separación en cada etapa.

Entonces ε_i es un término aleatorio del cual se puede determinar el recorrido y la frecuencia.

	1 ^{ra} etapa	
Inicio	0	1
Final	$P + \varepsilon_1$	$Q - \varepsilon_1$
	2 ^{da} etapa	
Inicio	0	$Q - \varepsilon_1$
Final	$P(Q - \varepsilon_1) + \varepsilon_2$	$Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2$
	3 ^{ra} etapa	
Inicio	0	$Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2$
Final	$P(Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2) + \varepsilon_3$	$Q(Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2) - \varepsilon_3$
	4 ^{ta} etapa	
Inicio	0	$Q(Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2) - \varepsilon_3$
Final	$P(Q(Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2) - \varepsilon_3) + \varepsilon_4$	$Q(Q(Q(Q - \varepsilon_1) - \varepsilon_2) - \varepsilon_3) - \varepsilon_4$

Ejercicio 1.3

- El tiempo de espera en la parada del autobús.
El tiempo que se debe esperar a que pase un autobús es aleatorio.
- El resultado observado al abrir el grifo de agua.
Si se supone que las presas están llenas y que no existe desabasto de agua, al abrir el grifo de agua siempre caerá agua. El resultado es determinista.
- El resultado observado al lanzar un dado.
El resultado al lanzar un dado es aleatorio.
- El tiempo de espera para que entre una llamada telefónica.
Si se está esperando una llamada telefónica, el tiempo de espera es aleatorio.

Ejercicio 1.5

El modelo determinista de las llegadas del convoy del metro considera que las llegadas son cada cuatro minutos exactamente.

El modelo aleatorio considera que las llegadas de los convoyes son en intervalos de tiempo variables, pero en promedio llegan cada 4 minutos.

Ejercicio 1.6

El experimento es tirar un dado no cargado.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{4, 5, 6\}$ y $F = \{2, 4, 6\}$
- $P(E) = 1/2$ y $P(F) = 1/2$
- Como el dado no está cargado, el espacio muestral es equiprobable y

- (e) E^c : los números menores o iguales a 3. $E^c = \{1, 2, 3\}$
 F^c : los números impares. $F^c = \{1, 3, 5\}$
 $E \cup F$: son los números pares o los números mayores que 3.
 $E \cup F = \{2, 4, 5, 6\}$
 $(E \cup F)^c$: son los números que no son pares o mayores que 3. $(E \cup F)^c = \{1, 3\}$
 $E \cap F$: son los números pares mayores que 3. $E \cap F = \{4, 6\}$
 $E - F$: Son los números mayores que 3 que no son pares.
 $E - F = \{5\},$

Ejercicio 1.7

El experimento es tirar dos dados no cargados.

- (a) Los elementos de Ω son

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6).

- (b)

$$E = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$$

$$F = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

- (c) $P(E) = 11/36$ y $P(F) = 3/36$
(d) Como los dados no están cargados, el espacio muestral es equiprobable.
(e) E^c : no sale ni un solo 5.
 F^c : la suma de los dos números no es 10.
 $E \cup F$: al menos aparece un cinco o la suma es igual a diez.
 $(E \cup F)^c$: no aparece un cinco ni la suma de los números es diez.
 $E \cap F$: al menos aparece un cinco y la suma es igual a diez.
 $E - F$: al menos aparece un cinco pero la suma no es igual a diez.

Ejercicio 1.8

El experimento es tirar tres monedas no cargadas al aire.

- (a) $\Omega = \{(a, a, a), (a, a, s), (a, s, a), (s, a, a), (a, s, s), (s, a, s), (s, s, a), (s, s, s)\}.$
(b) $E = \{(a, a, a), (a, a, s), (a, s, a), (s, a, a), (a, s, s), (s, a, s), (s, s, a)\},$
 $F = \{(a, a, a), (a, a, s), (a, s, a), (s, a, a)\}.$
(c) $P(E) = 7/8$ y $P(F) = 1/2.$
(d) Las monedas no están cargadas; entonces el espacio muestral es equiprobable.
(e) $E^c = \{(s, s, s)\},$
 $F^c = \{(a, s, s), (s, a, s), (s, s, a), (s, s, s)\},$
 $E \cup F = E$, ya que $F \subset E,$
 $(E \cup F)^c = \{(s, s, s)\}.$

$$E \cap F = F.$$

$$E - F = \{(a, s, s), (s, a, s), (s, s, a)\}.$$

Ejercicio 1.9

La elección al azar, con los ojos cerrados, de una página de un libro es un proceso aleatorio, pero el espacio muestral no es equiprobable ya que por lo general se tiende a abrir el libro por las páginas centrales; así, las páginas centrales tendrán mayor probabilidad de ser elegidas que las páginas de los extremos del libro. En general, los procesos de selección en los que se cierran los ojos y se escoge algo no son equiprobables, hay una tendencia a señalar lugares particulares.

Ejercicio 1.10

(a) Si $A \subset \Omega$ es tal que $A \neq \Omega$ y $A \neq \emptyset$, pruebe que

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

es una σ -álgebra.

Se debe probar que se cumplen los tres axiomas:

Se cumple el primer axioma porque $\Omega \in \mathcal{A}$

El segundo axioma se cumple porque el complemento de todos los elementos de $\mathcal{A}$ es también elemento de $\mathcal{A}$:

$$\emptyset^c = \Omega, A^c = A^c, (A^c)^c = A \text{ y } \Omega^c = \emptyset.$$

El tercer axioma se cumple porque la unión de dos o más elementos de $\mathcal{A}$ también es elemento de $\mathcal{A}$.

$$\emptyset \cup A = A, \emptyset \cup A^c = A^c, \emptyset \cup \Omega = \Omega, A \cup A^c = \Omega, A \cup \Omega = \Omega, A^c \cup \Omega = \Omega.$$

(b) Para probar que

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \subset \Omega\}$$

es una σ -álgebra, se deben probar los tres axiomas:

Se cumple el primer axioma porque $\Omega \subset \Omega$

El segundo axioma se cumple porque el complemento de todos los subconjuntos de Ω también son subconjuntos de Ω .

El tercer axioma se cumple ya que si $A_1, A_2, \dots \subset \Omega$, entonces $\cup A_i \subset \Omega$.

Ejercicio 1.11

Pruebe que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Para resolver éste y los dos siguientes ejercicios se debe recordar que:

(a) La unión e intersección de eventos son operaciones que cumplen la ley distributiva.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad \text{y} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

o en general

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap B = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup B) \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \cup B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B).$$

(b) Para dos eventos cualesquiera,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F),$$

de manera que

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - \underbrace{P((A \cup B) \cap C)}_{(A \cap C) \cup (B \cap C)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) \\ &\quad - P(A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Ejercicio 1.12

Pruebe que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Se prueba primero para $n = 2$.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2).$$

Se supone cierto para $n = k$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(A_i),$$

y ahora se prueba para $n = k + 1$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + P(A_{k+1}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i).$$

Ejercicio 1.13

Pruebe que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots$$

Se prueba primero para $n = 2$.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Se supone cierto para $n = k$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < l} P(A_i \cap A_j \cap A_l) - \dots$$

Ahora se prueba para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) + P(A_{k+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^k (A_i \cap A_{k+1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < l} P(A_i \cap A_j \cap A_l) - \dots \end{aligned}$$

Ejercicio 1.14

Pruebe que

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Observe que

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad \text{y} \quad (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset;$$

entonces

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \implies P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ejercicio 1.15

Sean los eventos

$$A = \{x \mid x \text{ sobresale en matemáticas}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ sobresale en música}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ sobresale en deportes}\}$$

Se sabe que

$$\#A = 90, \quad \#B = 90, \quad \#C = 90,$$

$$\#(A \cap B) = 30, \quad \#(A \cap C) = 30,$$

$$\#(B \cap C) = 30, \quad \#(A \cap B \cap C) = 10.$$

Los que sobresalen en al menos una asignatura son

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) &= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\ &\quad + \#(A \cap B \cap C) \\ &= 90 + 90 + 90 - 30 - 30 - 30 + 10 = 190. \end{aligned}$$

Los que sobresalen al menos en dos asignaturas son

$$\begin{aligned}
 \#((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) &= \#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C) \\
 &\quad - \#((A \cap B) \cap (A \cap C)) - \#((A \cap B) \cap (B \cap C)) \\
 &\quad - \#((A \cap C) \cap (B \cap C)) + \#((A \cap B) \cap (A \cap C) \cap (B \cap C)) \\
 &= \#(A \cap B) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C) - \#(A \cap B \cap C) \\
 &\quad - \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) \\
 &= 30 + 30 + 30 - 10 - 10 - 10 + 10 = 70.
 \end{aligned}$$

- (a) Los que sobresalen exactamente en una asignatura son $190 - 70 = 120$.
- (b) Los que sobresalen en no más de dos asignaturas son todos excepto los que sobresalen en tres asignaturas, y son $279 - 10 = 269$.
- (c) Los que sobresalen en más de dos asignaturas sobresalen en exactamente tres, o sea que son 10.
- (d) Los que no sobresalen en ninguna asignatura son $270 - 190 = 80$.

Ejercicio 1.16

El número de estudiantes que sobresale en exactamente dos asignaturas (el evento E) es igual al número de estudiantes que sobresale en al menos dos asignaturas, menos el número de estudiantes que sobresale en exactamente tres asignaturas, o sea $70 - 10 = 60$. Entonces $P(E) = 60/270$.

Ejercicio 1.17

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.25 = 0.75$$

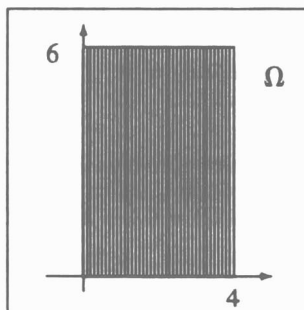
Como A y B son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.18 + 0.75 = 0.93.$$

Ejercicio 1.18

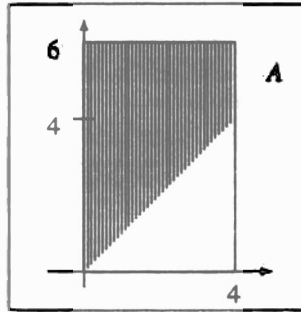
Considere que X es el tiempo que se tiene que esperar para que llegue un autobús de la línea A y Y es el tiempo que se tiene que esperar para que llegue un autobús de la línea B; entonces

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4 \text{ y } 0 \leq y \leq 6\}$$



(a) El evento: primero llega un autobús de la línea A, es

$$A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y\}$$

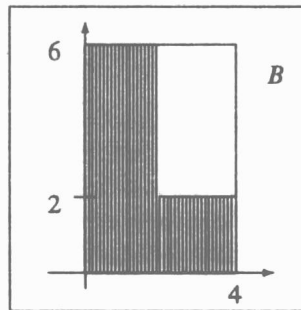


El área asociada a Ω es $6 \times 4 = 24$ y el área asociada a A es $24 - 4 \times 4/2 = 24 - 8 = 16$; así,

$$P(A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

(b) El evento: llega un autobús en un lapso de 2 minutos, es

$$B = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, \text{ ó } 0 \leq y \leq 2\}$$



Área de B es $24 - 8 = 16$; entonces $P(B) = 16/24 = 1/3$

Ejercicio 1.19

(a) Si el número de trozos en que se rompió la barra es igual a 2, entonces sólo se hizo un corte. Si x es la distancia entre el punto de corte y uno de los extremos, entonces

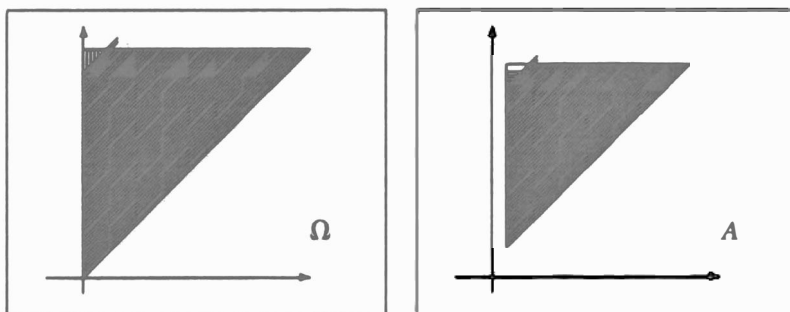
$$\Omega = \{x | 0 \leq x \leq 20\}$$

El evento: las dos piezas son al menos de un centímetro, es

$$A = \{x | 1 \leq x \leq 19\}$$

Así,

$$P(A) = \frac{\text{lon}(A)}{\text{lon}(\Omega)} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$



- (b) Si el número de trozos en que se parte la barra es igual a tres, entonces se hicieron dos cortes. Sea X la distancia entre uno de los cortes y uno de los extremos, y sea Y la distancia entre el otro punto de corte y el mismo extremo; se puede considerar que

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < y < 20\}$$

Sea

$$A = \{(x, y) | 1 \leq x \leq y < 19 \text{ y } y - x > 1\}$$

El área de la región Ω es igual a 20,000, el área de A es igual a $17 \times 17/2$.

$$P(A) = \frac{\text{área}(A)}{\text{área}(\Omega)} = \frac{17 \times 17}{20 \times 20} = 0.7225$$

Ejercicio 1.20

- (a) El espacio muestral tiene tres elementos; las dos bolas pueden ser las dos negras, puede ser la blanca y la primera negra, o puede ser la blanca y la segunda negra. La probabilidad de que las dos bolas sean de diferente color es $2/3$.
- (b) La regularidad frecuentista del experimento indica que se debe tener un número de veces aproximado a las dos terceras partes de 100; ésta es la razón del resultado numérico.

Ejercicio 1.21

La baraja inglesa tiene 13 cartas ($as, 2, 3, \dots, 10, J, Q, K$ con cuatro figuras (trébol, corazones, diamantes y espadas). Al extraer dos cartas el evento A , al menos una de las cartas es un as, significa que se tiene uno o dos ases y es el complemento del evento A^c , no hay ningún as. Entonces la probabilidad es

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}$$

La probabilidad que las dos cartas sean espadas es

$$\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$$

Ejercicio 1.22

(a) La probabilidad de que las dos bolas sean azules es

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$$

(b) Y la probabilidad de que por lo menos una bola sea azul es

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}$$

Ejercicio 1.23

El experimento es sacar dos calcetines:

Ω : es el conjunto de todas las posibles parejas de calcetines.

A : es el conjunto de parejas de dos calcetines rojos.

B : es el conjunto de parejas de dos calcetines amarillos.

C : es el conjunto de parejas de dos calcetines azules.

D : es el conjunto de parejas de dos calcetines del mismo color.

Los eventos A , B y C son mutuamente excluyentes y $D = A \cup B \cup C$. Entonces

$$P(D) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$P(D) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{16}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{11}{30}$$

La probabilidad que los dos calcetines sean rojos es

$$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = 1/8$$

Ejercicio 1.24

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = 3/5$$

Ejercicio 1.25

Si se lanzan 3 pelotas hacia 5 cajas, cada pelota puede caer en cualquiera de las 5 cajas. El número de posibles resultados es igual a $5^3 = 125$. El total de formas en que las pelotas caigan en las cajas 1 o 2 es igual a $2^3 = 8$, pero entre estos 8 posibles resultados están los dos casos en los que una de las cajas está vacía y las tres bolas están en la otra caja. Entonces, las posibles formas de que las cajas uno y dos tengan las tres bolas son $8 - 2 = 6$; así, la probabilidad de que las únicas cajas ocupadas sean la uno y la dos es igual a $6/125$.

Ejercicio 1.26

Las posibles formas en que las k pelotas caigan en cualquiera de las n cajas es n^k . Las posibles formas en que todas las pelotas caigan en dos de las cajas se puede calcular por etapas: primero se tienen las posibles formas de escoger las dos cajas que estarán ocupadas (las combinaciones de 2 en n). La segunda etapa es contar las formas en que las k pelotas pueden caer en cualquiera de las dos cajas menos las veces en que caen en una misma caja; esto es $2^k - 2$. Entonces la probabilidad de que dos cajas estén ocupadas es

$$\frac{\binom{n}{2}(2^k - 2)}{n^k}$$

La probabilidad que se tengan 3 cajas ocupadas es

$$\frac{\binom{n}{3}(3^k - 3(2^k) + 3)}{n^k}$$

Ejercicio 1.27

$$P(\text{acreditar}) = \frac{\sum_{i=6}^{10} \binom{70}{i} \binom{30}{10-i}}{\binom{100}{10}}$$

Ejercicio 1.28

$$\frac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}}$$

Ejercicio 1.29

$$\frac{\binom{n}{r}}{n^k}$$

Ejercicio 1.30 (a) 6; (b) $3 \times 35 = 105$ **Ejercicio 1.31** (a) 70; (b) 2**Ejercicio 1.32**

Es igual al número de subconjuntos de 2 elementos de los 5,

$$\binom{5}{2} = 10$$

Ejercicio 1.33

$$(a) 1 - \frac{364 \times 363 \times 362}{365^3}; (b) \frac{11 \times 10 \times 9}{12^3}$$

Ejercicio 1.34 (a) 9/10; (b) 1/10**Ejercicio 1.35**

Las respuestas dadas a esta pregunta no son únicas, puede haber algunas otras equivalentes.

- En una caja ponga dos bolas del mismo tamaño y material, pero de diferente color. Uno de los colores representa al águila y el otro al sol. Cada volado se puede modelar con la extracción de una bola de la caja.
- En una caja ponga veinte bolas del mismo tamaño y material, numeradas del 1 al 20, y asigne un número a cada persona. Elija tres bolas al azar sin reemplazo. Las personas elegidas corresponden al número de esas bolas.
- En una caja ponga seis bolas del mismo tamaño y material, numeradas del 1 al 6. El lanzamiento del dado se puede modelar con la extracción de una bola al azar de la caja.
- En una caja ponga tantas bolas de un color como artículos buenos hay en el lote, y tantas bolas de un color diferente como artículos defectuosos hay. Las bolas deben ser del mismo tamaño y material. La elección de un artículo del lote se puede modelar con la extracción de una bola de la caja.

Ejercicio 1.36

Como el sistema de las cuatro partículas es maxweliano, entonces en cada nivel de energía se puede tener más de una partícula. Los diferentes niveles de energía son

$$\epsilon_0 = 0, \quad \epsilon_1 = \epsilon, \quad \epsilon_2 = 2\epsilon, \quad \dots, \epsilon_k = k\epsilon, \quad \dots$$

En la siguiente tabla se muestra las posibles distribuciones de las cuatro partículas en los niveles de energía, de tal manera que la energía total del sistema es $E = 7\epsilon$. En la

Nivel de energía de las 4 partículas	Distribución	Número de microestados
7€ 0 0 0	$n_0 = 3, n_7 = 1$	4
6€ € 0 0	$n_0 = 2, n_1 = 1, n_6 = 1$	12
5€ 2€ 0 0	$n_0 = 2, n_2 = 1, n_5 = 1$	12
5€ € € 0	$n_0 = 1, n_1 = 2, n_5 = 1$	12
4€ 3€ 0 0	$n_0 = 2, n_3 = 1, n_4 = 1$	12
4€ 2€ € 0	$n_0 = 1, n_1 = 1, n_2 = 1, n_4 = 1$	24
4€ € € €	$n_1 = 3, n_4 = 1$	4
3€ 3€ € 0	$n_0 = 1, n_1 = 1, n_3 = 2$	12
3€ 2€ 2€ 0	$n_0 = 1, n_2 = 2, n_3 = 1$	12
3€ 2€ € €	$n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1$	12
2€ 2€ 2€ €	$n_1 = 1, n_2 = 3$	4
Total (Ω)		120

tabla, los valores de n_i que no aparecen tienen un valor de cero, y el número de formas de cada distribución se calcula con la fórmula

$$\frac{4!}{n_0!n_1!\dots n_7!}$$

Ejercicio 1.37

Según sea el caso, cada una de las estadísticas es

- (a) Maxwell-Boltzman $\rightarrow W_{MB} = 3^2 = 9$
 (b) Bose-Einstein $\rightarrow W_{BE} = \binom{3+2-1}{2} = 6$
 (c) Fermi-Dirac $\rightarrow W_{FD} = \binom{3}{1} = 3$

Ejercicio 1.38

Como la energía no es constante, la única restricción del sistema es $\sum_i n_i = N$. Cada partícula puede estar en cualquiera de los subniveles. El total de subniveles es $\sum g_i$.

Si cada subnivel puede ser ocupado por una única partícula, entonces el total de formas de colocar las N partículas en los diferentes subniveles es igual al número de subconjuntos de tamaño N que se pueden tener del total de subniveles. Esto es

$$\binom{\sum g_i}{N}.$$

Ejercicio 1.39

Igual que en el ejercicio anterior, la energía no es constante; entonces la única restricción del sistema es $\sum_i n_i = N$. Cada partícula puede estar en cualquiera de los subniveles. El total de subniveles es $\sum g_i$.

Como se tiene un sistema de Maxwell-Boltzman, cada subnivel puede ser ocupado por cualquier número de partículas; entonces cada partícula puede estar en cualquier

subnivel. Esto es

$$\left(\sum g_i\right)^N.$$

Ejercicio 1.40

En el ejemplo 1.5.1 se encontró que cuando el sistema está en equilibrio térmico, entonces la energía es

$$E = Mh\nu + \frac{1}{2}Nh\nu$$

y el peso termodinámico dado por los N osciladores es

$$W_M = \binom{M+N-1}{M}.$$

Ahora, considere que un oscilador tiene un estado cuántico igual a n ; entonces el nivel de energía de ese oscilador es igual $\epsilon_n = \frac{1}{2}h\nu + nh\nu$ y la energía de los restantes $N-1$ osciladores es igual

$$E - \epsilon_n = (M-n)h\nu + \frac{1}{2}(N-1)h\nu.$$

El peso termodinámico de los $N-1$ osciladores restantes es

$$W_{M-n} = \binom{(M-n)+(N-1)-1}{M-n}.$$

Así, la probabilidad que un oscilador tenga el estado cuántico n es

$$P(n) = \frac{W_{M-n}}{W_M}$$

Ejercicios del capítulo 2

Ejercicio 2.1

X_1 y X_2 son independientes,

(i) $P(X_1 + X_2 = 10 \mid X_1 = 5) = P(X_2 = 5) = 1/6$

(ii) $P(X_1 + X_2 < 5 \mid X_1 = 2) = P(X_2 < 3) = 2/6 = 1/3$

Ejercicio 2.2 1/3

Ejercicio 2.3

Sean los eventos

$$A = \{x \mid x \text{ reprueba química, y}\} \quad B = \{x \mid x \text{ reprueba historia}\}$$

entonces $P(A) = 0.04$; $P(B) = 0.03$; y $P(A \cap B) = 0.01$

(i) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.03 - 0.01 = 0.02$

(ii) $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 0.01/0.04 = 0.25$

(iii) $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0.01/0.03 = 1/3$

Ejercicio 2.4

Se sabe que $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$ y, por hipótesis, $P(A|B) > P(A)$; suponga que también $P(A|B^c) \geq P(A)$, y como $P(B) \neq 0$, se tiene que

$$\begin{array}{ccc} P(A|B) > P(A) & \text{y} & P(A|B^c) \geq P(A) \\ P(A|B)P(B) > P(A)P(B) & \text{y} & P(A|B^c)P(B^c) \geq P(A)P(B^c) \end{array}$$

Si se suman ambos lados de las desigualdades, se tiene que

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) > P(A)(P(B) + P(B^c)) = P(A);$$

no puede ser que $P(A|B) > P(A)$, y entonces la suposición es falsa.

Ejercicio 2.5

1. $P(A|A) = P(A \cap A) / P(A) = 1.$
2. $P(\emptyset|A) = P(\emptyset \cap A) / P(A) = P(\emptyset) / P(A) = 0.$
3. $P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}.$
4. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + 1 - 1 = P(A)$
 $(1 = P(B) \leq P(A \cup B))$
5. Como $P(B) > 0$ y A y B son mutuamente excluyentes, entonces
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$

Ejercicio 2.6

Dada la tabla

urna	rojo	blanco	azul
1	3	4	1
2	1	2	3
3	4	3	2

La primera etapa es elegir una urna, este experimento define la partición.

E_1 : la urna elegida es la primera.

E_2 : la urna elegida es la segunda.

E_3 : la urna elegida es la tercera.

La segunda etapa es elegir la bola; entonces se define el evento

D : la bola elegida es roja.

Se tienen así las siguientes probabilidades: $P(E_1) = 1/3$, $P(E_2) = 1/3$, $P(E_3) = 1/3$; $P(D|E_1) = 3/8$, $P(D|E_2) = 1/6$, $P(D|E_3) = 4/9$; entonces la probabilidad que se quiere es

$$P(E_2|D) = \frac{P(D|E_2)P(E_2)}{P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) + P(D|E_3)P(E_3)} = \frac{12}{71}$$

Ejercicio 2.7

1. La primera etapa es la elección de la urna. Esta etapa define la partición.

E_1 : la urna elegida es la primera.

E_2 : la urna elegida es la segunda.

La segunda etapa es elegir la bola, y entonces se define el evento

D : la bola elegida es verde.

Se tienen así las siguientes probabilidades: $P(E_1) = 1/2$, $P(E_2) = 1/2$, $P(D|E_1) = 5/12$, $P(D|E_2) = 4/6$; entonces la probabilidad que se quiere es

$$P(D) = P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) = \frac{13}{24}$$

2. Si las bolas se ponen juntas en una tercera urna, se tendrán 9 bolas verdes y nueve bolas rojas, así que $P(D) = 0.5$.

Ejercicio 2.8

E_1 : la primer flecha dio en el blanco.

E_2 : la primer flecha no dio en el blanco.

D : tres flechas dieron en el blanco.

Entonces se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(E_1) = p, \quad P(E_2) = 1 - p, \quad P(D) = 20p^3(1 - p)^3 \text{ y}$$

$$P(D|E_1) = \binom{5}{2} p^2(1 - p)^3 = 10p^2(1 - p)^3.$$

$$P(E_1|D) = \frac{P(D|E_1)P(E_1)}{P(D)} = \frac{10p^3(1 - p)^3}{20p^3(1 - p)^3} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.9

$$(1) \quad P(E_2 \cap E_3) = P(E_3|E_2)P(E_2) = \frac{3}{5}$$

$$(2) \quad P(E_1 \cup (E_2 \cap E_3)) = P(E_1) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \\ P(E_1) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 | E_2 \cap E_3)P(E_2 \cap E_3) = 7/10$$

- (3) Hay dos maneras de llegar de A a B: con el evento E_1 y con el evento $E_2 \cap E_3$; la ruta que tiene mayor probabilidad es $E_2 \cap E_3$ ya que $P(E_2 \cap E_3) = P(E_3 | E_2)P(E_2) = 3/5$.

Ejercicio 2.10

La primera etapa es elegir los artículos del tercer lote; en este experimento se definen los eventos

E_k : en el tercer lote hay k artículos defectuosos, $k = 0, 1, 2, \dots, 11$.

La segunda etapa es sacar un artículo del tercer lote, y se puede definir el evento

D : el artículo es defectuoso.

$$P(E_k) = \sum_{i=\max\{0, k-6\}}^{\min\{5, k\}} \frac{\binom{5}{i} \binom{15}{10-i} \binom{6}{k-i} \binom{22}{12-k+i}}{\binom{20}{10} \binom{28}{12}}$$

$$P(D|E_k) = k/22$$

$$P(D) = \sum_{i=0}^k P(D|E_i)P(E_i)$$

Ejercicio 2.11

E_1 : el alumno elegido es excelente.

E_2 : el alumno elegido es bueno.

E_3 : el alumno elegido es malo.

D : el alumno obtiene calificación notable o sobresaliente.

Entonces se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(E_1) = a/(a+b+c), \quad P(E_2) = b/(a+b+c),$$

$$P(E_3) = c/(a+b+c); \quad P(D|E_1) = 1,$$

$$P(D|E_2) = 1, \quad P(D|E_3) = 1/3,$$

así, la probabilidad que se quiere es

$$P(D) = P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) + P(D|E_3)P(E_3) = 1 - \frac{2c}{3(a+b+c)}$$

Ejercicio 2.12

En la primera etapa

E_1 : se sacaron 0 pelotas usadas.

E_2 : se sacó 1 pelota usada.

E_3 : se sacaron 2 pelotas usadas.

En la segunda etapa

D : las dos pelotas son usadas.

F : las dos pelotas son nuevas.

Entonces se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(E_1) = 5(9)/25(12), \quad P(E_2) = 15(10)/25(12),$$

$$P(E_3) = 15(7)/25(12); \quad P(D|E_1) = 8(17)/25(12),$$

$$P(D|E_2) = 8(15)/25(12), \quad P(D|E_3) = 15(7)/25(12).$$

La probabilidad que se quiere es

$$P(D) = P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) + P(D|E_3)P(E_3) = 0.3905.$$

De igual manera se obtiene que la probabilidad de que las pelotas sean nuevas es 0.1265.

Ejercicio 2.13

La primera etapa es el disparo del bombardero:

E_0 : caen cero cazas.

E_1 : cae un caza.

E_2 : caen dos cazas.

La segunda etapa es el disparo de los cazas.

C_1 : el primer caza da en el blanco.

C_2 : el segundo caza da en el blanco.

D : el bombardero es derribado.

$$D = C_1 \cup C_2$$

Entonces se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(E_0) = (1 - p_1)^2, \quad P(E_1) = 2p_1(1 - p_1), \quad P(E_2) = p_1^2,$$

$$P(D|E_0) = 2p_2 - p_2^2, \quad P(D|E_1) = p_2, \quad P(D|E_2) = 0,$$

$$(a) P(D) = P(D|E_0)P(E_0) + P(D|E_1)P(E_1) + P(D|E_2)P(E_2) = (1 - p_1)^2(2p_2 - p_2^2) + 2p_1(1 - p_1)p_2$$

$$(b) P(E_2) = p_1^2$$

$$(c) P(E_0^c) = 1 - (1 - p_1)^2$$

$$(d) P(E_1) = 2p_1(1 - p_1)$$

Ejercicio 2.14

$$A_i = \{x \mid x = 1 \text{ o } x = 2, \text{ en el lanzamiento } i\},$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$C = \{(1, 1)\}$$

$$D = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

P 1: A_1 depende del segundo lanzamiento. **FALSO**

P 2: A_1 y A_2 son eventos mutuamente excluyentes. **FALSO**

P 3: B depende del primer lanzamiento. **VERDADERO**

P 4: B y C son eventos mutuamente excluyentes. **VERDADERO**

P 5: $A_1 \cap A_2$ es un suceso de D . **FALSO**

P 6: D es un suceso de C . **FALSO**

Ejercicio 2.15

Sean los eventos:

E_i : el avión i es derribado, $i = 1, 2, 3$

G_i : el avión i da en el objetivo, $i = 1, 2, 3$

A : la ruta elegida por los aviones es la protegida.

B : el objetivo es aniquilado.

Observe que tanto E_1, E_2 y E_3 como G_1, G_2 y G_3 son eventos independientes.

Lo que se quiere determinar es la probabilidad de B . Para encontrar esta probabilidad se especifican las siguientes relaciones:

$$B = G_1 \cup G_2 \cup G_3$$

$$G_i = (G_i \cap E_i) \cup (G_i \cap E_i^c) = G_i \cap E_i^c;$$

esto último, porque si un avión es derribado no puede dar en el objetivo.

De acuerdo con la información,

$$\begin{aligned} P(E_i^c \mid A) &= 1 - p_1 & P(A) &= \frac{2}{3} \\ P(E_i^c \mid A^c) &= 1 & P(A^c) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De aquí se pueden obtener las probabilidades

$$\begin{aligned}
 P(E_i^c) &= P(E_i^c | A)P(A) + P(E_i^c | A^c)P(A^c) \\
 &= \frac{2}{3}(1 - p_1) + \frac{1}{3}1 = 1 - \frac{2}{3}p_1. \\
 P(G_i | A) &= P(G \cap E_i^c | A) = P(G_i | E_i^c, A)P(E_i^c | A) = p_2(1 - p_1) \\
 P(G_i | A^c) &= P(G_i | E_i^c, A^c)P(E_i^c | A^c) = p_2 \\
 P(G_i) &= P(G_i | E_i^c)P(E_i^c) = p_2\left(1 - \frac{2}{3}p_1\right) \\
 P(B | A) &= P(G_1 \cup G_2 \cup G_3 | A) \\
 &= \sum_{i=1}^3 P(G_i | A) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(G_i \cap G_j | A) + P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 | A) \\
 &= 3p_2(1 - p_1) - 3p_2^2(1 - p_1)^2 + p_2^3(1 - p_1)^3.
 \end{aligned}$$

De igual manera,

$$P(B | A^c) = 3p_2 - 3p_2^2 + p_2^3.$$

(a) Los 3 aviones eligen la misma ruta,

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(B | A)P(A) + P(B | A^c)P(A^c) \\
 &= (3p_2(1 - p_1) - 3p_2^2(1 - p_1)^2 + p_2^3(1 - p_1)^3)\frac{2}{3} + (3p_2 - 3p_2^2 + p_2^3)\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

(b) Los aviones eligen su ruta al azar independientemente de los otros.

$$\begin{aligned}
 P(B) &= \sum_{i=1}^3 P(G_i) - \sum_{1 \leq i, j \leq 3} P(G_i \cap G_j) + P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) \\
 &= 3p_2(1 - \frac{2}{3}p_1) - 3p_2^2(1 - \frac{2}{3}p_1)^2 + p_2^3(1 - \frac{2}{3}p_1)^3.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.16

Los dos cazadores dan en el blanco de manera independiente y ambos tiran dos veces. El espacio muestral del experimento se puede escribir como un conjunto de pares ordenados donde la primera coordenada corresponde al número de aciertos del primer cazador y la segunda al número de aciertos del segundo cazador.

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

El evento

A: el primer cazador acierta más veces es

$$A = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$$

y

$$P(A) = 2p_1(1 - p_1)(1 - p_2)^2 + p_1^2(1 - p_2)^2 + 2p_1^2p_2(1 - p_2).$$

Ejercicio 2.17

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 5/6$$

Ejercicio 2.18 Sí son independientes.**Ejercicio 2.19**

Observe que por el teorema de la probabilidad total y dado que los eventos son independientes,

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c); \end{aligned}$$

de igual manera se sigue que

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B),$$

y entonces se tiene que

$$P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = 1/2$$

Ejercicio 2.20 1/8**Ejercicio 2.21**

(a) $P(B) = 0.4$, (b) $P(B) = 0.2$, (c) $P(B) = 0.45$

Ejercicios del capítulo 3**Ejercicio 3.1**

$$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

La variable X es discreta y R_X es finita.

Ejercicio 3.2

Al menos se deben hacer 3 lanzamientos de la moneda para poder ver 3 águilas, así que

$$R_X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

El recorrido es infinito numerable y la v. a. es discreta.

Ejercicio 3.3

Como el diámetro es de un metro de longitud, el radio mide 50 centímetros; entonces, el punto donde cayó el dardo debe estar a una distancia del centro menor que el radio, por lo que

$$R_X = [0, 50)$$

y la v. a. es continua.

Ejercicio 3.4

Se debe probar que $F(x)$ es creciente, que es continua por la derecha, que el límite de $F(x)$ cuando x va a menos infinito es igual a cero, y que el límite de $F(x)$ cuando x va a infinito es igual a uno.

Ejercicio 3.5

(a) Para probar que $F(x)$ es creciente, basta ver que se puede escribir como

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+x},$$

y dado que conforme x crece $\frac{1}{1+x}$ decrece, entonces $F(x)$ crece.

(b) Como X es una v. a. continua, entonces su función de densidad se encuentra derivando la función de distribución.

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(c) P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3.6

(a) Para encontrar el valor de c se debe recordar que $\sum_i f(x_i) = 1$; entonces,

$$\sum_{i=1}^7 f(i) = \sum_{i=1}^7 ci = c(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 28c = 1$$

de donde $c = 1/28$.

(b) La función de distribución de X es

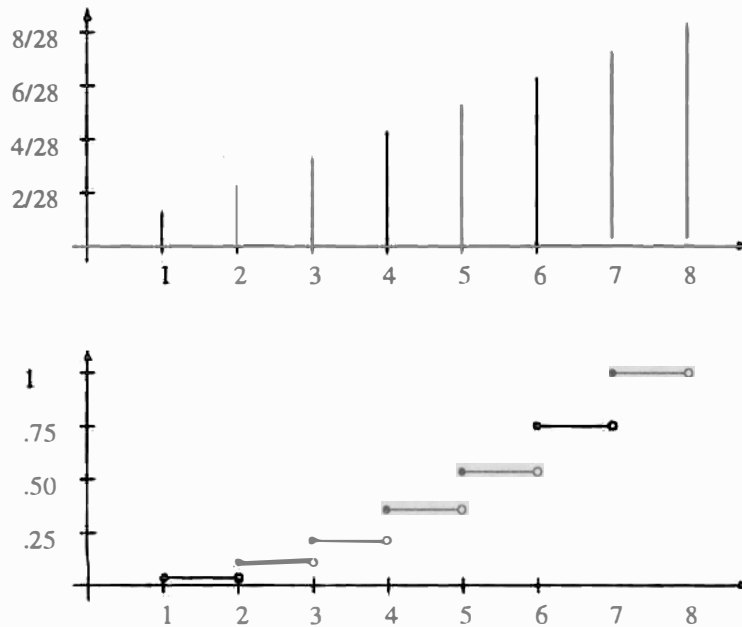
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1 \\ 1/28 & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 3/28 & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ 6/28 & \text{para } 3 \leq x < 4 \\ 10/28 & \text{para } 4 \leq x < 5 \\ 15/28 & \text{para } 5 \leq x < 6 \\ 21/28 & \text{para } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{para } x \geq 7 \end{cases}$$

(c) Ver figura B1

Ejercicio 3.7

En cada caso se debe probar

- (1) $f(x) > 0$,
- (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

FIGURA B.1 Gráfica de $F(x)$ y $f(x)$.

(a) $f(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, 0 en otro caso.

(1) $f(x) > 0$,

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Es una función de distribución.

(b) $g(x) = 2e^{-2x}$ para $x > 0$, 0 en otro caso.

(1) $g(x) > 0$,

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Es una función de distribución.

(c) $h(x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$ para $0 < \lambda < 1$ y $f(x)$ y $g(x)$ de los incisos anteriores.

(1) Como λ y $1 - \lambda$ son positivos entonces $(1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$ es mayor o igual a cero.

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)) dx = (1 - \lambda) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_1 + \lambda \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx}_1 = 1.$$

Es función de densidad.

Ejercicio 3.8

$h(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ para $0 \leq \lambda_1, \lambda_2$ y $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones de densidad.

(1) Como λ_1 y λ_2 son positivos entonces $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ es mayor o igual a cero.

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) dx = \lambda_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx}_1 + \lambda_2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx}_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$h(x)$ es función de densidad.

Ejercicio 3.9

El recorrido de la variable es $R_X = \{-1, 0, 1\}$.

$$\begin{aligned} P(|X - \frac{1}{2}| \geq 1) &= P(X - \frac{1}{2} \geq 1 \text{ o } -(X - \frac{1}{2}) \geq 1) \\ &= P(X \geq 1.5 \text{ o } X \leq -0.5) = P(X = -1) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.10

$$R = \frac{v^2}{g} \sin(\alpha), \text{ para } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

R es una función de densidad creciente en el recorrido de α , entonces

$$\sin(\alpha) = \frac{gR}{v^2}, \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{gR}{v^2}\right).$$

$$\text{Así } \frac{d\alpha}{dR} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2 R^2}{v^4}}}}{\frac{g}{v^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{v^4 - g^2 R^2}}$$

El recorrido de R se encuentra a partir del recorrido de α . $-1 \leq \frac{gR}{v^2} \leq 1$, lo cual implica que $-\frac{v^2}{g} \leq R \leq \frac{v^2}{g}$.

La función de densidad de R es

$$f_R(x) = f_\alpha(\arcsin\left(\frac{gx}{v^2}\right)) \frac{g}{\sqrt{v^4 - g^2 x^2}} = \frac{g}{\pi \sqrt{v^4 - g^2 x^2}},$$

para $-\frac{v^2}{g} \leq R \leq \frac{v^2}{g}$.

Ejercicio 3.11

$$\Theta = \frac{2}{9}(T - 32) \text{ así } T = \frac{9}{2}\Theta + 32 \text{ y la derivada de esta función es } \frac{dT}{d\Theta} = \frac{9}{2}$$

La función de densidad de Θ es

$$f_\Theta(\theta) = f_T(t(\theta)) \frac{dt}{d\theta} = \frac{9}{10\sqrt{\pi}} e^{-(9\theta/5 - 66.6)^2/4}$$

Ejercicio 3.12

Si $X \leq 9$ implica que $G = X$, y $P(G = x) = \frac{1}{2^x}$.

Si $X \geq 10$, entonces $G = 10$ y

$$P(G = 10) = P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^{10}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^9}.$$

Así,

$$f_G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{si } x = 1, 2, 3, \dots, 9 \\ \frac{1}{2^9} & \text{si } x \geq 10 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 3.13

$A = L^2$ en el recorrido $4.95 < L < 5.05$ es una función creciente y, por lo tanto, invertible; entonces

$L = \sqrt{A}$ y $\frac{dL}{dA} = \frac{1}{2\sqrt{A}}$. La función de densidad de A es

$$f_A(x) = \begin{cases} (\sqrt{x} - 4.95)(5.05 - \sqrt{x})/8\sqrt{x} & \text{si } (4.95)^2 < x < (5.05)^2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 3.14

Para $y = (x - 1)^2$ en el recorrido de $0 \leq y \leq 1$, se tiene que

$$A_y = \{1 + \sqrt{y}, 1 - \sqrt{y}\}$$

y dado que es un conjunto discreto se tiene que

$$f_Y(y) = \frac{1 - \sqrt{y}}{2} \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1 + \sqrt{y}}{2} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Ejercicio 3.15

En el recorrido de v , la función ϵ es una función creciente y, por lo tanto, invertible; esto es

$$v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} \quad \text{y} \quad \frac{dv}{d\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{2\epsilon m}},$$

y entonces

$$g_\epsilon(\epsilon) = g_v(v(\epsilon)) \frac{dv}{d\epsilon} = 2\pi(\pi kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/kT}.$$

Ejercicio 3.16

En el recorrido de v , la función ϵ es una función creciente y, por lo tanto, invertible; esto es

$$v = \sqrt{\frac{2\epsilon}{m}} \quad \text{y} \quad \frac{dv}{d\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{2\epsilon m}},$$

y entonces

$$\Phi_\epsilon(\epsilon) = \Phi_v(v(\epsilon)) \frac{dv}{d\epsilon} = (kT)^{-2} \epsilon e^{-\epsilon/kT}.$$

Ejercicio 3.17

X_1, X_2 y X_3 determinan los números que aparecen en las 3 bolas elegidas. El espacio muestral generado al seleccionar las tres bolas sin reemplazo es

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), \\ (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}.$$

Entonces $\#\Omega = 10$

- (a) Si $X = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ y $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$, una de las tres bolas tiene el valor más pequeño (X), otra tiene el valor más grande (Y) y la tercera tiene un valor entre X y Y , $Y - X - 1$ posibles valores. El número de casos favorables corresponde al número de posibles maneras de tener fijos los valores máximo y mínimo. La función de densidad conjunta de X y Y es

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{y-x-1}{10} & \text{para } 1 \leq x \leq y-2, y \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El recorrido conjunto de X y Y se puede escribir en las dos formas siguientes:

$$R_{XY} = \{(x, y) \mid 3 \leq y \leq 5; 1 \leq x \leq y-2\} \\ = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3; x+2 \leq y \leq 5\}$$

- (b) La función de densidad marginal de X

$$f_X(x) = \sum_{y=x+2}^5 \frac{y-x-1}{10}.$$

La suma se puede calcular fácilmente haciendo el cambio de variable $i = y - x - 1$, con $1 \leq i \leq 4 - x$.

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{4-x} \frac{i}{10} = \frac{(4-x)(5-x)}{20},$$

para $x = 1, 2, 3$.

La función de densidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{y-2} \frac{y-x-1}{10};$$

de igual manera que antes, se hace el cambio de variable $i = y - x - 1$, con $1 \leq i \leq y - 2$.

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{y-2} \frac{i}{10} = \frac{(y-2)(y-1)}{20},$$

para $y = 3, 4, 5$

- (c)

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^3 \frac{(4-x)(5-x)}{20} = \frac{2(3) + 1(2)}{20} = \frac{2}{5}$$

Ejercicio 3.18

El recorrido conjunto de (X, Y) se puede escribir en las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \{(x, y) \mid 0 < y < \infty, -y < x < y\} \\ &= \{(x, y) \mid -\infty < x < \infty, |x| < y < \infty\} \end{aligned}$$

(a) Las funciones de densidad

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{|x|}^{\infty} \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} dy = \frac{(|x| + 1)e^{-|x|}}{4}; \quad -\infty < x < \infty \\ f_Y(y) &= \int_{-y}^y \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} dx = \frac{y^3 e^{-y}}{6}; \quad 0 < y < \infty \end{aligned}$$

(b) $P(X \geq 2) = e^{-2}$

Ejercicio 3.19

El recorrido conjunto de (X, Y) se puede escribir en las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \{(x, y) \mid 0 < y < \infty, 0 < x < y\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 < x < \infty, x < y < \infty\} \\ f_X(x) &= \int_x^{\infty} 2e^{-y}(1 - e^{-x}) dy = 2e^{-x}(1 - e^{-x}) \quad x > 0 \\ f_Y(y) &= \int_0^y 2e^{-y}(1 - e^{-x}) dx = 2e^{-y}(y + e^{-y} - 1) \quad y > 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.20

(a) $P(X = 2) = 0.30$ (b) $P(X \geq 2) = 0.53$

(c) $P(X \leq 2, Y \leq 2) = 0.69$ (d) $P(X = Y) = 0.30$

(e) $P(X > Y) = 0.45$

Ejercicio 3.21

Considere que $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ y que la función de distribución de $X_{(n)}$ es

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \leq x).$$

Si el máximo de los 5 valores es menor o igual que x , entonces los 5 valores son menores que x .

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x, X_4 \leq x, X_5 \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)P(X_3 \leq x)P(X_4 \leq x)P(X_5 \leq x) \\ &= [F_X(x)]^5 \end{aligned}$$

$$P(X_{(n)} > 4) = 1 - P(X_{(n)} \leq 4) = 1 - [F_X(4)]^5 = 1 - \frac{(1 - e^{-8})^5}{4^5}.$$

Ejercicio 3.22

Si X determina el momento en que un radar deja de funcionar, si $X > t$, el radar funciona bien al menos hasta el tiempo t . La probabilidad de que los 10 radares estén funcionando bien al menos en el tiempo t es

$$\begin{aligned} P(X_1 > t, X_2 > t, \dots, X_{10} > t) &= \prod_{i=1}^{10} P(X_i > t) = \prod_{i=1}^{10} (1 - P(X_i \leq t)) \\ &= (1 - F_X(t))^{10} = 0.5, \end{aligned}$$

entonces $(1 - F_X(t))^{10} = e^{-t/100} = 0.5$, de lo cual se resulta que

$$t = -100 \ln(0.5) = 69.31471.$$

Ejercicio 3.23

El recorrido conjunto de (X, Y) se puede escribir en las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < x\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 < y < 2, y < x < 2\} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x \frac{1}{2}xy \, dy = \frac{1}{4}xy^2 \Big|_0^x = \frac{x^3}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ f_Y(y) &= \int_y^2 \frac{1}{2}xy \, dy = \frac{1}{4}x^2y \Big|_y^2 = y - \frac{y^3}{4}, \quad 0 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

(b) No son independientes ya que $f_X(x)f_Y(y) = \frac{x^3}{4}(y - \frac{y^3}{4})$ no es igual a $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2}xy$.

Ejercicio 3.24

En el ejercicio 3.17 se encontraron las funciones de densidad conjunta y las marginales del máximo y el mínimo de este experimento. Entonces

$$f_{X|Y}(x|4) = \frac{f_{XY}(x, 4)}{f_Y(4)} = \frac{3-x}{3} \quad x = 1, 2.$$

Ejercicio 3.25

Como X y Y son independientes, se tiene que

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{4}{3^{x+y}}, \quad \text{para } x, y = 1, 2, \dots,$$

y entonces

$$P(X = Y) = \sum_{x=1}^{\infty} f_{XY}(x, x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{4}{3^{2x}} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 3.26

Las funciones de densidad marginal de X y Y son

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

(a)

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad y \quad f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

De aquí se sigue que X y Y son variables aleatorias independientes.

(b) Sí tienen la misma función de densidad.

(c)

$$P(X^2 + Y^2) = \int_{\{x^2+y^2 < 4\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r e^{-\frac{1}{2}r^2} = 1 - e^{-2}.$$

Se utilizó la transformación: $x = r \cos(\theta)$ y $y = r \sin(\theta)$.

Ejercicio 3.27

Sean los eventos

A : el volado cae águila.

E_i : la moneda elegida es la número i , ($i = 1, 2, \dots, 10$).

y la probabilidad $P(A | E_i) = i/10$, entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{10} P(A | E_i) P(E_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{10} \frac{1}{10} = \frac{11}{20}$$

Para obtener $N = n$ se deben tener soles en los primeros $n - 1$ volados, mientras que en el volado número n se debe tener un águila. Además, los resultados de los volados son independientes; entonces

$$P(N = n) = (P(A^c))^{n-1} P(A) = \left(\frac{9}{20}\right)^{n-1} \frac{11}{20}.$$

Ejercicio 3.28

Sean las variables $U = X + Y$ y $V = X/(X + Y)$; de aquí se sigue que la transformación inversa está dada por: $X = UV$ y $Y = U - UV$. El jacobiano de la transformación es $-u$ y la función de densidad conjunta es

$$f_{UV}(uv, u - uv) | -u|.$$

Ejercicio 3.29

Sea $Z = \min\{X, Y\}$, y la función de distribución de Z es

$$\begin{aligned}P(Z \leq z) &= 1 - P(Z > z) = 1 - P(X_1, X_2 > z) = 1 - P(X_1 > z)P(X_2 > z) \\&= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = 8e^{-8z}.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.30

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2^{x+y}}$$

$$f_Z(z) = P(Z = z) = P(X + Y = Xz) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^{xz}} = \frac{1}{2^z - 1}$$

Ejercicios del capítulo 4**Ejercicio 4.1**

- (a) $R_X = \{-4, 1, 5\}$
- (b) $P(X = -4) = 2/6$, $P(X = 1) = 3/6$, $P(X = 5) = 1/6$
- (c) $E(X) = -4 \frac{2}{6} + 1 \frac{3}{6} + 5 \frac{1}{6} = 0$
- (d) No, porque el valor esperado de la ganancia es cero.

Ejercicio 4.2

$$E(X) = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 4.3

Si se gana en el juego, se obtiene 5 000 menos los cuatro pesos que costaron los boletos; si no se gana, se pierden cuatro pesos.

$$R_G = \{-4, 4996\}$$

$$P(G = 4996) = \frac{4}{10000} = \frac{1}{2500},$$

$$P(G = -4) = \frac{2499}{2500}$$

$$E(X) = 4996 \frac{1}{2500} - 4 \frac{2499}{2500} = -2$$

Ejercicio 4.4

$$R_G = \{-100, 300\}$$

$$f_G(-100) = \frac{3}{4}$$

$$f_G(300) = \frac{1}{4}$$

(a) $E(G) = (-100)(3/4) + 300(2/4) = 0$

(b) En promedio, no va a ganar ni a perder, por lo tanto da lo mismo jugar o no varias veces.

Ejercicio 4.5

$$R_G = \{200, 300\}$$

$$f_G(200) = 0.3$$

$$f_G(300) = 0.7$$

$$E(G) = 300(0.7) + 200(0.3) = 270.$$

Ejercicio 4.6

El análisis para el primer tipo de boletos

La variable aleatoria X determina el monto del premio.

El recorrido de X es $R_X = \{0, 6\,000\}$.

La función de densidad es $f_X(0) = 9\,999/10\,000$, $f_X(6\,000) = 1/10\,000$

El valor esperado de X es $E(X) = 6\,000/10\,000 = 3/5$

La variable aleatoria G_1 determina el monto de la ganancia.

El recorrido de G es $R_{G_1} = \{-1, 5\,999\}$.

$G_1 = X - 1$, $E(G_1) = E(X - 1) = 3/5 - 1 = -2/5$.

De igual manera se tienen los valores esperados de la ganancia de los otros tipos de boletos.

$$E(G_2) = -5/4 \quad y \quad E(G_3) = -19/6.$$

La ganancia por la compra de los 6 boletos es

$$G = 2G_1 + G_2 + 3G_3 \quad y$$

$$E(G) = 2\left(-\frac{2}{5}\right) + 1\left(-\frac{5}{4}\right) + 3\left(-\frac{19}{6}\right) = -11.55.$$

Ejercicio 4.7

$$R_G = \{-100, 300\}$$

$$f_G(-100) = 0.8$$

$$f_G(300) = 0.2$$

(a) $E(G) = -100(0.8) + 300(0.2) = -20$

(b) $E(10G) = -200$

Ejercicio 4.8

Sean las variables aleatorias:

N : número de pasajeros que suben al microbús por viaje.

C : costo del viaje por pasajero.

El ingreso total por viaje del microbús es $I = NC$, y como N y C son variables aleatorias independientes, entonces

$$E(I) = E(NC) = E(N)E(C) = 50(2.80) = 140.$$

Ejercicio 4.9

(a) $E(X) = 2$

(b) $E(X + 2)^3 = 86.4$

(c) $E(6X - 2(X + 2)^3) = 6E(X) - 2E((X + 2)^3) = -160.8$

Ejercicio 4.10

(a) $E(X) = 3$

(b) $E(X^2) = 11$

(c) $E((X + 2)^2) = 21$

Ejercicio 4.11

(a) $f(-1) = 1/6$ y $f(1) = 1/3$

(b) $E(X^2) = 1/2$

Ejercicio 4.12

El recorrido de la ganancia es $G = 6, 9, 12$ y la función de densidad es

$$f(12) = \frac{\binom{2}{2} \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{15}$$

$$f(9) = \frac{\binom{2}{1} \binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}$$

$$f(6) = \frac{\binom{2}{0} \binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}$$

$$E(G) = 12 \frac{1}{15} + 9 \frac{7}{15} + 6 \frac{7}{15} = 7.8$$

Ejercicio 4.13

$$E(|X - b|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - b| f(x) dx = \int_{-\infty}^b (b - x) f(x) dx + \int_b^{\infty} (x - b) f(x) dx.$$

Del primer término,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^b (b-x)f(x)dx &= \int_{-\infty}^m (b-x)f(x)dx + \int_m^b (b-x)f(x)dx \\ &= (b-m) \underbrace{\int_{-\infty}^m f(x)dx}_{1/2} + \int_{-\infty}^m (m-x)f(x)dx + \int_m^b (b-x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}(b-m) + \int_{-\infty}^m |m-x|f(x)dx + \int_m^b (b-x)f(x)dx.\end{aligned}$$

De igual manera, del segundo término se llega a

$$\int_b^{\infty} (x-b)f(x)dx = \frac{1}{2}(m-b) + \int_m^{\infty} |m-x|f(x)dx + \underbrace{\int_b^m (x-b)f(x)dx}_{-\int_m^b (x-b)f(x)dx}.$$

Al sumar los dos términos se tiene

$$E(|X-b|) = \int_{-\infty}^{\infty} |m-x|f(x)dx - 2 \int_m^b (x-b)f(x)dx.$$

Aquí el último término es mayor que cero, y $E(|X-b|)$ es mínimo cuando el segundo término se hace cero, lo que ocurre cuando $b = m$.

Ejercicio 4.14

Suponga que X determina el número de personas que entra al cine en un día y que Y determina la cantidad que gasta en el cine cada persona.

Se sabe que $E(X) = 1\,500$ y $E(Y) = 70$; además X y Y son independientes, y entonces el ingreso total $I = XY$ tiene el valor esperado

$$E(I) = E(X)E(Y) = 105\,000$$

Ejercicio 4.15

(a) $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu.$

(b) $V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$

(c) Observe que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i - \underbrace{\bar{X} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}_0 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2,\end{aligned}$$

entonces

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{E(X_i^2)}_{\sigma^2 + \mu} - n \underbrace{E(\bar{X}^2)}_{\frac{\sigma^2}{n} + \mu} \right) = \sigma^2$$

Ejercicio 4.16

1. Si al menos se recibió una llamada, entonces se recibieron una o más llamadas. Es más fácil calcular esta probabilidad si se ve como el complemento de no recibir ninguna llamada.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-3}.$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^k \frac{e^{-3} 3^i}{i!} & \text{si } x - 1 \leq k < x \end{cases}$$

3. $E(X) = 3$, $E(X^2) = 12$, $V(X) = 3$.

Ejercicio 4.17

1. $k = \frac{3}{2}$
2. $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^3}{2}$
3. $P(X \geq 1/2) = 7/16$ y $P(X \in (-1/2, 1/2)) = 1/8$
4. $E(X) = 0$, $E(X^2) = 3/5$ y $V(X) = 3/5$.

Ejercicio 4.18

1. $E(X) = 1.5$ y $V(X) = 0.75$
2. $E(X) = 0.5$ y $V(X) = 0.05$
3. $E(X) = 2$ y $V(X) = \infty$

Ejercicio 4.19

1. El recorrido de X es $R_X = \{0, 1, 2\}$ y $\#\Omega = 4^2 = 16$.
La función de densidad de X es

$$f_X(0) = P(X = 0) = \frac{9}{16},$$

$$f_X(1) = P(X = 1) = \frac{6}{16} \quad \text{y}$$

$$f_X(2) = P(X = 2) = \frac{1}{16}.$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 9/16 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 15/16 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 16/16 = 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

3. $E(X) = 1/2$ $V(X) = 3/8$

Ejercicio 4.20

1.- $k = 1/2$;

2.- $E(X) = \alpha - 1/3$, $V(X) = \beta^2/3 - 1/9$

3.- $E(|X - \alpha|) = \beta/2$.

Ejercicio 4.21

La función de densidad conjunta del mínimo y del máximo de la muestra, $X_{(1)} = \min\{X_i\}$ y $X_{(n)} = \max\{X_i\}$, es igual a

$$f(x, y) = P(X_{(1)} = x, X_{(n)} = y) = \frac{\binom{y-x-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$$

para

$$x = 1, 2, 3, \dots, N-n+1 \text{ y } y = x+n-1, x+n, \dots, N.$$

La covarianza de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$ se calcula con ayuda del siguiente valor esperado:

$$E[(X_{(n)} - X_{(1)})(X_{(n)} - X_{(1)} + 1)] = E(X_{(n)}^2) + E(X_{(1)}^2) - 2E(X_{(n)}X_{(1)}) + E(X_{(n)}) - E(X_{(1)}).$$

Así,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{(n)}, X_{(1)}) &= \frac{1}{2}(E(X_{(n)}^2) + E(X_{(1)}^2) + E(X_{(n)}) - E(X_{(1)})) \\ &\quad - E[(X_{(n)} - X_{(1)})(X_{(n)} - X_{(1)} + 1)] - 2E(X_{(n)}X_{(1)}). \end{aligned}$$

Ahora se calcula

$$E[(X_{(n)} - X_{(1)})(X_{(n)} - X_{(1)} + 1)]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^{N-n+1} \sum_{y=x+n-1}^N (y-x)(y-x+1) \frac{\binom{y-x-1}{n-2}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)(n-1)n}{(n+1)(n+2)} \sum_{x=0}^{N-n+1} \sum_{y=x+n-1}^N \frac{\binom{y-x+1}{n}}{\binom{N+2}{n+2}} \\ &= \frac{(N+1)(N+2)(n-1)n}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Considerando que

$$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$$

y usando las expresiones de la varianza y la media del máximo y del mínimo que se encontraron durante el desarrollo del problema de los tanques, se tiene que la covarianza

es igual a

$$\text{Cov}(X_{(n)}, X_{(1)}) = -\frac{(N+1)(N-n)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Ejercicio 4.22

El recorrido conjunto de X y Y se puede escribir en las dos formas siguientes:

$$\begin{aligned} R_{XY} &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1-y\} \end{aligned}$$

$$f_X(x) = 24x \int_0^{1-x} y dy = 12x(1-x)^2, \text{ para } 0 \leq x \leq 1.$$

$$E(X) = 12 \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

De igual manera, se tiene que

$$E(Y) = \int_0^1 y^2(1-y)^2 dy = \frac{2}{5}$$

$$E(XY) = 24 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 dy dx = \frac{2}{15}.$$

Finalmente

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = -\frac{2}{75}.$$

Ejercicio 4.23

En todos los casos se van a desarrollar ambos términos de la ecuación y se puede ver que los resultados son iguales:

(a)

$$\begin{aligned} x \binom{x-1}{n-1} &= \frac{x(x-1)!}{(n-1)!(x-1)!} = \frac{x!}{(n-1)!(x-1)!} \\ n \binom{x}{n} &= \frac{n x!}{n!(x-1)!} = \frac{x!}{(n-1)!(x-1)!} \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{n+1}{N+1} \binom{N+1}{n+1} = \frac{(n+1)(N+1)!}{(N+1)(n+1)!(N-n)!} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \binom{N}{n}$$

(c)

$$\begin{aligned} (N+1-x) \binom{N-x}{n-1} &= \frac{(N+1-x)(N-x)!}{(n-1)!(N-x-n+1)!} = \frac{(N-x+1)!}{(n-1)!(N-x-n+1)!} \\ n \binom{N+1-x}{n} &= \frac{n(N+1-x)!}{n!(N-x-n+1)!} = \frac{(N-x+1)!}{(n-1)!(N-x-n+1)!} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.24

Sea X la variable que determina el número de la puerta que se escoge, y sea Y la variable que determina el tiempo que tarda el prisionero en llegar a la calle.

Como el prisionero no tiene memoria, si no escoge la puerta uno, al regresar estará en la misma situación que al principio; entonces se tiene que

$$E(Y \mid X = 1) = 0$$

$$E(Y \mid X = 2) = 1 + E(Y)$$

$$E(Y \mid X = 3) = 3 + E(Y)$$

Así,

$$E(Y) = E(E(Y | X)) = 4$$

Ejercicio 4.25

Sean los eventos

$A_{n-1}::$ En las primeras $n - 1$ selecciones se obtuvo una bola roja y el resto azules.

$B_n::$ La bola seleccionada en el lugar n es roja.

Sea X la variable que determina el número de intentos necesarios para tener la segunda bola roja. Así,

$X = n$ equivale al evento $A_{n-1} \cap B_n$ y

$$f_X(n) = P(X = n) = P(A_{n-1} \cap B_n).$$

- (a) Si la selección de las bolas se hace con reemplazo, los eventos A_{n-1} y B_n son independientes y la función de densidad de X es:

$$f_X(n) = P(A_{n-1})P(B_n) = (n-1) \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}.$$

Ya se puede obtener el valor esperado de X ,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Esta suma es la segunda derivada de una suma de la forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x}, \quad \text{para } |x| < 1 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \text{para } |x| < 1. \end{aligned}$$

De manera que $E(X) = 5$.

- (b) Si la selección de las bolas se hace sin reemplazo la función de densidad de X es:

$$f_X(n) = P(B_n | A_{n-1})P(A_{n-1}) = \frac{\binom{20}{1} \binom{30}{n-2}}{\binom{50}{n-1}} \cdot \frac{19}{50 - (n-1)}.$$

Con esta función de densidad se obtiene el valor esperado de X ,

$$E(X) = \sum_{n=2}^{32} n f_X(n) = \sum_{n=2}^{32} n \frac{\binom{20}{1} \binom{30}{n-2}}{\binom{50}{n-1}} \cdot \frac{19}{51-n}.$$

Recuerde que

$$\sum_{n=2}^{32} f_X(n) = \sum_{n=2}^{32} \frac{\binom{20}{1} \binom{30}{n-2}}{\binom{50}{n-1}} \frac{19}{51-n} = 1.$$

Para calcular $E(X)$ se va a utilizar la técnica de encontrar una suma igual a 1 y el hecho de que $E(32 - X) = 32 - E(X)$.

$$\begin{aligned} E(32 - X) &= \sum_{n=2}^{32} (32 - n) \frac{\binom{20}{1} \binom{30}{n-2}}{\binom{50}{n-1}} \frac{19}{51-n} \\ &= \frac{30(19)}{21} \sum_{n=2}^{31} n \frac{\binom{21}{1} \binom{29}{n-2}}{\binom{50}{n-1}} \frac{20}{51-n} = \frac{30(19)}{21}. \end{aligned}$$

La suma es igual a 1 porque los sumandos son los valores de una función de densidad.

Así, $E(X) = 32 - E(32 - X)$, de lo que se sigue que

$$E(X) = 4.8571$$

Ejercicio 4.26

Si $U = X + Y$, se tiene que

$$\int_0^u f_{XY}(v, u-v) dv = \int_0^u \frac{2(u-v)}{(u+1)^4} dv = \frac{3u^2}{(u+1)^4}, \quad \text{para } u \geq 0.$$

Ejercicio 4.27

(a) Para $y = \sin\left(\frac{x-1}{2}\pi\right)$ se tiene

$$f_Y(y) = f_X(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

$$f_X(x(y)) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{x-1}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{x-1}{2}\pi\right)} = \frac{\pi}{4} \sqrt{1 - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}, \quad \text{para } -1 \leq y \leq 1.$$

(b) La función generatriz de momentos de la variable aleatoria Y es

$$M_Y(t) = \int_0^2 \frac{\pi}{4} e^{t \sin\left(\frac{x-1}{2}\pi\right)} \cos\left(\frac{x-1}{2}\pi\right) dx$$

Si se hace el cambio de variable $y = \sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$, se tiene que

$$M_Y(t) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{ty} dy$$

y dado que la función generatriz de momentos es una transformación inyectiva, se sigue que

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } -1 < y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicios del capítulo 5

Ejercicio 5.1

Sea X la variable aleatoria que indica el número de aciertos en el blanco; entonces $X \sim B(5, 0.30)$

La probabilidad de que al menos haya un acierto es

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.70)^5 = 0.83193$$

Ejercicio 5.2

Si la variable X se distribuye de acuerdo con una ley Bernoulli, entonces

$$V(X) = p(1 - p).$$

El valor de p que hace máxima la varianza se encuentra con el cálculo diferencial,

$$\frac{d}{dx} V(X) = 1 - 2p \quad y \quad \frac{d^2}{dx^2} V(X) = -2.$$

El punto crítico de $V(X)$ es $p = 0.5$, y dado que la segunda derivada es negativa en todos los puntos, en este punto crítico se alcanza el máximo.

Cuando $p = 0.5$, la variable aleatoria Bernoulli tiene la mayor varianza.

Ejercicio 5.3

Sea X la variable aleatoria que determina el número de halconcitos que nacen vivos de los 10 huevos incubados; entonces $X \sim B(10, 0.25)$, y los resultados se pueden encontrar en las tablas.

(a) Así, la probabilidad de que nazcan al menos dos halconcitos es igual a:

$$P(X \geq 2) = 1 - f_X(0) - f_X(1) = 1 - (0.75)^{10} - 10(0.25)(0.75)^9 = 0.7560.$$

(b) Sea Y la variable aleatoria que determina el número de haconcitos machos de los halconcitos que nacieron vivos.

Si nacen vivos x halconcitos ($X = x$), entonces $Y|_{X=x} \sim B(x, 0.5)$; y para que haya al menos una pareja de halconcitos, se debe cumplir:

1. El valor de X es mayor o igual a dos.
2. El valor de Y es mayor que cero y menor que x .

$$P(1 \leq Y \leq x - 1 \mid X = x)$$

La probabilidad de que al menos se tenga una pareja de halconcitos es

$$\begin{aligned}\sum_{x=2}^{10} P(1 \leq Y \leq x-1 \text{ y } X=x) &= \sum_{x=2}^{10} P(1 \leq Y \leq x-1 \mid X=x)P(X=x) \\ &= 1 + (0.75)^{10} - 2(0.875)^{10}.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.4

Si X es la variable aleatoria que indica el número de intentos necesarios para tener n éxitos, entonces el recorrido de X está dado por

$$R_X = \{n, n+1, n+2, n+3, \dots\}.$$

Cuando $X = k$, se tiene que en las primeras $k-1$ observaciones ya se obtuvieron $n-1$ éxitos y en la observación número k se obtiene el éxito número n .

$$X = k \text{ y } \sum_{i=1}^{k-1} X_i = n-1, \text{ y } X_k = 1,$$

son equivalentes.

- (a) Como la suma de variables aleatorias Bernoulli es una variable binomial, se tiene que

$$f_X(k) = P(X=k) = P\left(\sum_{i=1}^{k-1} X_i = n-1\right)P(X_k=1) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$

- (b) Para encontrar la función generatriz de momentos de X , observe primero que

$$\sum_{k=n}^{\infty} f_X(k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^k = 1;$$

entonces

$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^k = \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E(e^{tX}) = \left(\frac{p}{q}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^k e^{tk} \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^n \left(\frac{q e^t}{1 - q e^t}\right)^n = \left(\frac{p e^t}{1 - q e^t}\right)^n.\end{aligned}$$

- (c) Para calcular la media se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{n(p e^t)^n}{(1 - q e^t)^{n+1}} \\ E(X) &= \frac{d}{dt} M_X(0) = \frac{n}{p}.\end{aligned}$$

Para calcular la varianza se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = \frac{n(p e^t)^n (n + q e^t)}{(1 - q e^t)^{n+2}}$$

$$V(X) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(0) - [E(X)]^2 = \frac{nq}{p^2}.$$

Ejercicio 5.5

La función generatriz de momentos de X_i es

$$E(e^{tX^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2 - \frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-2t)x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}.$$

(a) Ahora se encuentra la función generatriz de momentos de Y ,

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i^2}) = (1 - 2t)^{-n/2}$$

(b) Para calcular la media se tiene

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = n(1 - 2t)^{-(n+2)/2}$$

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(0) = n.$$

Para calcular la varianza se tiene

$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = n(n+2)(1 - 2t)^{-(n+4)/2}$$

$$V(X) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(0) - [E(X)]^2 = 2n.$$

Ejercicio 5.6

Sea X la variable aleatoria que indica el número de personas que padece la enfermedad de las 100 a quienes se les aplica el análisis.

$$X \sim B(100, 0.15).$$

Sea Y la variable aleatoria que indica el número de falsos positivos de los 100 análisis. Si $X = x$, entonces aproximadamente el 5% de los sanos tendrá un resultado positivo falso.

$$Y|_{X=x} \sim B(100 - x, 0.05)$$

$$E(Y | X = x) = (100 - x)(0.05)$$

$$E(Y) = E(E(Y | X)) = E((100 - X)0.05) = 0.05(100 - E(X)) = 85(0.05)$$

Ejercicio 5.7

$X \sim \text{hipergeométrica} (M = 2, K = 3, n = 2)$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = 0.10$$

Ejercicio 5.8

$X \sim \text{hipergeométrica} (M = 2, K = 6, n = 3)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{6}{3} \binom{2}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{4}$$

Ejercicio 5.9

$X \sim \text{hipergeométrica} (M = 50, K = 450, n = 5)$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{450}{5} \binom{50}{0}}{\binom{500}{5}} = 0.589$$

Ejercicio 5.10

Sea $X|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ($f_{X|\lambda}(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$) y sea $\lambda \sim \text{exponencial}(1)$ ($f_\lambda(\lambda) = e^{-\lambda}$); entonces

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{X|\lambda}(x, \lambda) d\lambda = \int_0^\infty f_{X|\lambda}(x|\lambda) f_\lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2^{x+1}} \int_0^\infty \frac{\lambda^x e^{-2\lambda}}{x! (1/2)^{x+1}} d\lambda = 2^{-(x+1)} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.11

(a) $1/100$ (b) $5/100 = 1/20$.

Ejercicio 5.12

$p = 0.0005$ y $n = 10\,000$; entonces $\lambda = 10\,000(0.0005) = 5$.

(a) $f_X(4) = \frac{5^4 e^{-5}}{4!} = 0.1755$

(b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 0.9596$

Ejercicio 5.13

$p = 0.01$ y $n = 6\,000$; entonces $\lambda = 6\,000(0.001) = 6$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-6} = 0.9975$.

Ejercicio 5.14

La función generatriz de momentos de la función exponencial es

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

y la función de densidad de Y es

$$M_Y(t) = (E(e^{tX}))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n = (1 - t/\lambda)^{-n}$$

Ésta es la función generatriz de momentos de una distribución gamma, $M(t) = (1 - t\beta)^{-\alpha}$, y los parámetros de la función de distribución gamma son: $\lambda = n$ y $\beta = 1/\lambda$.

Ejercicio 5.15

Sean $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ variables aleatorias independientes y sea $Y = \sum_{i=1}^n X_i$; entonces

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t \sum X_i}) = E(e^{tX_1})E(e^{tX_2})E(e^{tX_3}) \dots E(e^{tX_n}) = (M_X(t))^n,$$

y considerando que la función generatriz de momentos de la función normal es $M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}$, entonces

$$M_Y(t) = \left(e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \right)^n = e^{n\mu t + n\sigma^2 t^2/2}$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$; entonces $Y \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

Ejercicio 5.16

Sean $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ variables aleatorias independientes y sea $Y = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$; entonces

$$M_Y(t) = \left(e^{t^2/2n} \right)^n = n e^{t^2/2}$$

que es la función generatriz de momentos de una distribución normal con media 0 y varianza 1; entonces $Y \sim N(0, 1)$.

Ejercicio 5.17

Sea $X \sim U(20, 25)$; así, $f_X(x) = 1/5$ para $20 < x < 25$. Se alcanza el tren si se llega antes de 23 minutos, y entonces se quiere determinar

$$P(X \leq 23) = \frac{1}{5} \int_{20}^{23} dx = \frac{3}{5}.$$

Ejercicio 5.18

(a) $\frac{10}{37}$ (b) $\frac{19}{37}$ (c) $\frac{1}{37}$

Ejercicio 5.19

Sea $X \sim U(0, 1)$, por lo que $f_X(x) = 1$ si $0 < x < 1$, entonces

- (a) $Y = \sqrt{X}$; se quiere determinar la probabilidad de que el primer decimal de Y sea 3, esto es,

$$P(0.3 \leq Y < 0.4) = (0.3 \leq \sqrt{X} < 0.4) = (0.09 \leq X < 0.16) \\ = \int_{0.09}^{0.16} dx = 0.07$$

- (b) $Y = \ln(X)$; se quiere determinar la probabilidad de que Y sea mayor que -3 , y dado que la función logaritmo es creciente, se tiene que

$$P(-3 \leq Y) = P(-3 \leq \ln(X)) = P(e^{-3} \leq X) = 1 - e^{-3} = 0.9502.$$

Ejercicio 5.20

$$P(100 < X < 200) = \int_{100}^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-100\lambda} - e^{-200\lambda} = 0.25$$

La solución se encuentra resolviendo la ecuación de segundo grado, $x - x^2 = 0.25$, donde $x = e^{-100\lambda}$. La solución es: $e^{-100\lambda} = 1/2$ y $\lambda = 0.00693$.

Ejercicio 5.21

Sea $X \sim \Gamma(\alpha = 2, \beta = 3)$; entonces

$$P(X < 9) = \int_0^9 \frac{x e^{-x/3}}{3^2} dx = 1 - 4e^{-3} = 0.801$$

Ejercicio 5.22

Se sabe que $E(X) = \alpha\beta = 10$ y $V(X) = \alpha\beta^2 = 50$; entonces se puede ver que $\alpha = 2$ y $\beta = 5$.

- (a)

$$P(X > 50) = \int_{50}^{\infty} \frac{x e^{-x/5}}{5^2} dx = 11e^{-10} = 0.0005$$

- (b)

$$P(X \leq 10) = \int_0^{10} \frac{x e^{-x/5}}{5^2} dx = 1 - 3e^{-2}$$

Ejercicio 5.23

- (a) $E(X) = 1/\lambda = 100$

- (b) $P(X \geq 200) = e^{-2} = 0.1353$

Ejercicio 5.24

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\exp \left[-\frac{(\lambda - \mu_x)^2 \sigma_y^2 - 2(\lambda - \mu_x)(y - \mu_y)\sigma_{xy} + (y - \mu_y)^2 \sigma_x^2}{2(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} \right]}{2\pi \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}}$$

(a) $Cov(X, Y) = \sigma_{xy}$

(b)

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\exp \left[- \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right) \right]}{2\pi\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-(x-\mu_x)^2/2\sigma_x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y-\mu_y)^2/2\sigma_y^2} = f_X(x)f_Y(y).$$

Se concluye que cuando $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ y $Cov(X, Y) = 0$; entonces X y Y son independientes.

Ejercicio 5.25

Sea $X \sim N(25, 0.15^2)$. Las probabilidades se calculan usando la tabla de la distribución normal, al hacer la transformación a una normal con media cero y varianza 1.

(a) $\mu = 25$ y $\sigma = 0.15$; la probabilidad de que el cerrojo sea bueno es

$$P(24.88 \leq X \leq 25.12) = P\left(\frac{24.88 - 25}{0.15} \leq Z \leq \frac{25.12 - 25}{0.15}\right)$$

$$= P(-0.8 \leq Z \leq 0.8) = 2(0.28814) = 0.57628.$$

La probabilidad de que el cerrojo sea defectuoso es $1 - 0.57628 = 0.42372$.

(b) $\mu = 26$ y $\sigma = 0.15$, la probabilidad de que el cerrojo sea bueno es

$$P(24.88 \leq X \leq 25.12) = P\left(\frac{24.88 - 26}{0.15} \leq Z \leq \frac{25.12 - 26}{0.15}\right)$$

$$= P(-7.46 \leq Z \leq -5.87) \approx 0.00000.$$

La probabilidad de que el cerrojo sea defectuoso es aproximadamente 1.

(c) $\mu = 25.5$ y $\sigma = 0.15$; la probabilidad de que el cerrojo sea bueno es

$$P(24.88 \leq X \leq 25.12) = P\left(\frac{24.88 - 25.5}{0.15} \leq Z \leq \frac{25.12 - 25.5}{0.15}\right)$$

$$= P(-4.13 \leq Z \leq -2.53)$$

$$= 0.50000 - 0.4943 = 0.0057.$$

La probabilidad de que el cerrojo sea defectuoso es $1 - 0.0057 = 0.9943$.

Ejercicio 5.26

$X \sim N(170, 25)$. Las probabilidades se calculan usando la tabla de la distribución normal.

$$P(X > 170 \mid X > 169) = \frac{P(X > 170 \text{ y } X > 169)}{P(X > 169)} = \frac{P(X > 170)}{P(X > 169)}$$

Ahora se calculan las probabilidades:

$$P(X > 170) = P(Z > 0) = 0.5$$

$$P(X > 169) = P(Z > -0.20) = 0.57926.$$

Finalmente,

$$P(X > 170 \mid X > 169) = \frac{0.5}{0.57926} = 0.8631.$$

Ejercicio 5.27

$X \sim N(7.5, 1)$. Las probabilidades se calculan usando la tabla de la distribución normal.

$$P(X \geq 6) = P((X - 7.5)/1 > (6 - 7.5)/1) = P(Z > -1.5) = 0.93319$$

Ejercicios del capítulo 6**Ejercicio 6.1**

Sea X la variable aleatoria que determina el número de tornillos defectuosos contenidos en una caja de 250 tornillos; entonces $X \sim B(250, 0.05)$. Se quiere determinar la probabilidad de que haya más de 7% de tornillos defectuosos en la caja, esto es, más de 17.5 tornillos defectuosos.

Como $n=250$ ya es un número grande, se puede considerar la aproximación normal; entonces

$$\mu = 250(0.05) = 12.5$$

$$\sigma^2 = 250(0.05)(0.95) = 11.875 \quad \text{o bien, } \sigma = 3.446$$

$$P(X > 17.5) = P(Z > 1.45) = .5 - 0.42647 = 0.07353$$

Ejercicio 6.2

Con $n = 50$ se considera que el teorema central del límite ya se cumple; entonces

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) = N(\mu, 1).$$

Así,

$$P(|\bar{X} - \mu| < a) = 0.90$$

implica que $a = 1.645$ y los extremos del intervalo de confianza están dados por 305 ± 1.645 , de manera que el intervalo de confianza es

$$(303.355, 306.645).$$

Ejercicio 6.3

Con $n = 50$, se considera que el teorema central del límite ya se cumple; entonces

$$\bar{X} \sim N(p, p(1-p)/n).$$

Así,

$$P\left(\frac{|\bar{X} - p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} < Z_0\right) = 0.95.$$

Se tiene que resolver la desigualdad

$$\frac{|\bar{X} - p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} < 1.96;$$

de aquí se sigue que

$$\frac{(\bar{X} - p)^2}{p(1-p)/n} < 1.96^2 = 3.8416,$$

lo cual da origen a la desigualdad cuadrática

$$\bar{X}^2 - p(2\bar{X} + 3.8416/50) + p^2(1 + 3.8416/50) < 0.$$

El intervalo es: (0.29936, 0.48897).

Ejercicio 6.4

Con $n = 50$, se considera que el teorema central del límite ya se cumple; además, para la distribución de Poisson, la media y la varianza son iguales a λ , por lo que

$$\bar{X} \sim N(\lambda, \lambda/n).$$

Entonces

$$P\left(\frac{|\bar{X} - \lambda|}{\lambda/n} < Z_0\right) = 0.99;$$

el intervalo de confianza es la solución de la desigualdad

$$(\bar{X} - \lambda)^2 < \frac{z_0^2 \lambda}{n},$$

de donde al resolver la ecuación de segundo grado se encuentra que

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{X} + z_0) - \sqrt{(\bar{X} + z_0)^2 - 4\bar{X}^2}}{2} = 15.56039$$

$$\lambda_2 = \frac{(\bar{X} + z_0) + \sqrt{(\bar{X} + z_0)^2 - 4\bar{X}^2}}{2} = 18.5727$$

Entonces, el intervalo de confianza para λ es

$$(15.56039, 18.5727).$$

Ejercicio 6.5

Considere la variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 3$, cuya función de densidad está dada por $f_X(x) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$. Para hacer la simulación de obtener una observación de Poisson se hace una partición del intervalo $[0, 1]$, donde cada elemento de la partición corresponde a un posible resultado de la de Poisson. La partición se hace de acuerdo con los valores de $f_X(x)$, como se ve en la tabla B1.

Ya que se tiene la partición del intervalo $[0, 1]$. Se escoge un número de 5 cifras en la tabla de números aleatorios, se divide entre 100,000 y se observa en qué intervalo de la partición está. La observación Poisson es el valor correspondiente a este intervalo.

Por ejemplo, si los dígitos que se obtienen de la tabla de números aleatorios son 73421, la observación de la distribución de Poisson es 4, porque 0.73421 está en el intervalo (0.64723, 0.81526].

Ejercicio 6.6

En la tabla de números aleatorios se escoge un solo dígito por observación. La asignación de los números con las bolas se hace de acuerdo con la tabla B.2:

Se eligen 4 dígitos de la tabla de números aleatorios y se hace la asociación con el color de las bolas, de acuerdo con la tabla B.2.

TABLA B.1 *Partición de acuerdo a la distribución de Poisson.*

Valor de la variable de Poisson X	Función de densidad $f_X(x)$	Función de distribución $F_X(x)$	Parte del intervalo $[0,1]$ correspondiente al valor de la variable X
0	0.04978	0.04978	$[0.00000, 0.04978]$
1	0.14936	0.19915	$(0.04978, 0.19915]$
2	0.22404	0.42319	$(0.19915, 0.42319]$
3	0.22404	0.64723	$(0.42319, 0.64723]$
4	0.16803	0.81526	$(0.64723, 0.81526]$
5	0.10082	0.91608	$(0.81526, 0.91608]$
6	0.05041	0.96649	$(0.91608, 0.96649]$
7	0.02160	0.98809	$(0.96649, 0.98809]$
8	0.00810	0.99619	$(0.98809, 0.99619]$
9	0.00270	0.99889	$(0.99619, 0.99889]$
10	0.00081	0.99970	$(0.99889, 0.99970]$
11	0.00022	0.99992	$(0.99970, 0.99992]$
12	0.00006	0.99998	$(0.99992, 0.99998]$

TABLA B.2

Color de las bolas	Número asignado
roja	0, 1, 2
negras	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Ejercicio 6.7

En la tabla de números aleatorios se eligen series de cuatro dígitos, y para hacer la asociación con los resultados de la binomial se utilizan los resultados de la tabla de la distribución binomial del apéndice A, para $n = 10$ y $p = 0.40$.

Por ejemplo, si el número seleccionado es 1048, el valor de X es 2 porque 0.1048 está en el intervalo $(0.0464, 0.1673]$; y si el número seleccionado es 0150; el valor de X es 1 por una razón semejante.

Ejercicio 6.8

En este caso se debe encontrar la función inversa de la distribución de probabilidades y aplicar el teorema 6.2.1.

$$f_X(x) = 3e^{-3x} \text{ para } x > 0$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-3x} \text{ para } x > 0$$

La función inversa de $F_X(x)$ es $h(u) = -\ln(1 - u)/3$.

TABLA B.3

Valor de la variable binomial X	Función de distribución $F_X(x)$	Intervalo de asignación del número de la tabla
0	0.0060	[0001, 0060]
1	0.0464	(0060, 0464]
2	0.1673	(0464, 1673]
3	0.3823	(1673, 3823]
4	0.6331	(3823, 6331]
5	0.8338	(6331, 8338]
6	0.9452	(8338, 9452]
7	0.9877	(9452, 9877]
8	0.9983	(9877, 9983]
9	0.9999	(9983, 9999]
10	1.0000	0000

Entonces, si $V \sim (0, 1)$, $X = -\ln(1 - V)/3$ se distribuye como una variable aleatoria exponencial con $\lambda = 3$.

Ahora, se elige una serie de cinco dígitos en la tabla de números aleatorios y se le agrega el punto decimal; la asociación se hace de acuerdo con la tabla B.3.:

TABLA B.4

Número elegido	v	10480	15011	81647
número entre 100,000	$u = v/100,000$	0.10480	0.15011	0.81647
Variable exponencial	$x = -\ln(1 - u)$	0.03690	0.05421	0.5651

Ejercicio 6.9

Elija una serie de cuatro dígitos en la tabla de números aleatorios; la asignación se hace de acuerdo con la siguiente tabla:

Número de página	Números asignados				
1	0001	2001	4001	6001	8001
2	0002	2002	4002	6002	8002
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1999	1999	3999	5999	7999	9999
2000	2000	4000	6000	8000	0000

Ejercicio 6.10

$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$; considere ahora que se calcula la recta en el valor $X = \bar{X}$,

$$\hat{Y}(\bar{X}) = \hat{a} + \hat{b}\bar{X} = (\bar{Y} - \hat{b}\bar{X}) + \hat{b}\bar{X} = \bar{Y}.$$

Con esto se prueba que el punto $(\bar{X}, \bar{Y})$ está sobre la recta $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$.

Ejercicio 6.11

(a)

$$\begin{aligned} V(\hat{b}) &= V\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 V(Y_i)}{(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} V(\hat{a}) &= V\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{(X_i - \bar{X})\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right) Y_i\right) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{(X_i - \bar{X})\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}\right)^2 = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned}$$

Ejercicio 6.12

(a) $\hat{Y} = 0.5644X + 5.8889$.

(b) $\hat{Y}(50) = 0.5644(50) + 5.8889 = 34.1089$.

Ejercicio 6.13

(a) $\hat{Y} = 3.2208X + 343.71$.

(b) $\hat{Y}(50) = 3.2208(50) + 343.71 = 504.75$.

Ejercicio 6.14

Si se tienen N átomos y X de ellos están apuntando hacia arriba, el momento magnético total neto es igual a $E(X\mu - (N - X)\mu)$. Como $X \sim B(N, 0.5)$, el momento magnético total neto es

$$E(X\mu - (N - X)\mu) = E(2X\mu - N\mu) = 0.$$

Ejercicio 6.15

Como $N = 8$, $X \sim B(8, 0.5)$ y se quiere encontrar la probabilidad de que $2X - 8 = -4$; entonces

$$P(2X - 8 = -4) = P(X = 2) = 0.1445 - 0.0352 = 0.1132.$$

Ejercicio 6.16

Se tiene que $N = 20$ y $X \sim B(20, 0.3)$; entonces

$$P(2X - 20 = 8) = P(X = 14) = 1 - 0.9997 = 0.0003.$$

Índice

- σ -álgebra, 23, 41
- aleatoria uniforme continua, 201
- aproximación de Stirling, 64
- arreglos circulares, 54
- axioma, 23
- caminata aleatoria, 242
- captura y recaptura, 4
- cardinalidad de un conjunto, 31
- coeficiente de correlación, 159
- cola de espera, 9
- combinación, 49
- condicionalidad, 126
- conjunto numerable, 96
- convolución, 134
- correlación, 157
- Correns, 1, 2
- covarianza, 157
- cualitativos, 18
- cuantitativos, 18
- definición clásica de probabilidad, 32
- dependencia, 126
- distinguibiles, 56
- distribución
 - de función
 - de variables aleatorias, 108
 - de vectores aleatorios, 129
 - de Maxwell, 150
 - de probabilidad, 98
- equiprobable o uniforme, 33
- espacio
 - de probabilidad, 93
 - de probabilidades, 30
 - muestral, 18
 - muestral equiprobable, 31
- esperanza
 - condicional, 170
 - matemática, 137, 139
- estadística
 - de Bose-Einstein, 67
 - de Fermi-Dirac, 63
 - de Maxwell-Boltzmann, 64
- estimador, 4–6
 - de mínimos cuadrados, 234
 - insesgado, 163, 234
- estimar, 4
- evento, 18
 - elemental, 19
 - imposible, 20
 - seguro, 20
- eventos
 - independientes, 82
 - mutuamente
 - excluyentes, 20
 - independientes, 83
- experimento, 17
- física estadística, 61
- factorial, 48
- fenómeno aleatorio, 18
- fila de espera, 10, 12
- función
 - de densidad
 - condicional, 126

- conjunta, 122
 - continua, 104
 - de variables aleatorias continuas, 104
 - de variables aleatorias discretas, 100
 - del máximo, 163
 - del mínimo, 163
 - marginal, 122
 - de distribución, 98
 - de probabilidades, 98
 - de probabilidades conjunta, 121
 - gamma, 204
 - generatriz de momentos, 179, 180
 - medible, 95
- independientes, 83
- indistinguibles, 56
- insesgado, 169
- intervalo
 - de confianza, 226, 239
- ji-cuadrada, 212
- juego(s)
 - de azar, 1, 5
 - de mayores y menores, 142
- media, 139
- medida de asociación, 159
- Mendel, G., 1–3, 5, 7
- modelo
 - aleatorio, 9, 13
 - determinista, 9, 13
- momento de orden r , 179
- muestra
 - con reemplazo, 84
 - sin reemplazo, 84
- nivel de energía, 61
- notación factorial, 48
- ordenación
 - con repetición, 46
 - sin repetición, 47
- parámetro, 4
- partición, 27
- permutación, 47
- permutaciones, 47
 - con objetos no distinguibles, 58
- peso termodinámico, 66
- probabilidad, 25
 - condicional, 69, 72
 - conjunta, 120
 - marginal, 120
 - total, 26, 27
- promedio, 137
 - esperado, 139
 - teórico, 139
- propiedad
 - de linealidad, 147
- rango de variable aleatoria, 96
- recta estimada, 234
- regla
 - de la suma, 43
 - del producto, 43
- sesgo, 168
- simulación, 227
- simulación, 5
- sin reemplazo, 78
- teoría
 - cuántica, 61
 - de probabilidades, 18
- teorema de Bayes, 76
- valor
 - esperado, 138, 139
 - del máximo, 165
 - del mínimo, 165
- variable
 - aleatoria, 95
 - Bernoulli, 186
 - binomial, 186
 - bivariada, 121
 - continua, 96, 97
 - de Pascal, 212

discreta, 96
gamma, 206
hipergeométrica, 191
uniforme discreta, 195
exponencial, 203
normal, 207
Poisson, 197
variables

aleatorias, 93
independientes, 126, 127
multivariadas, 118
independientes, 160
varianza, 153, 154
del máximo, 166
del mínimo, 166

Introducción a la probabilidad se terminó de imprimir en
noviembre del 2000 en la Sección de Impresiones y Diseño
de la UAM-I.

La edición consta de 1,000 ejemplares



Armando Castillo Ánimas estudió la licenciatura en Física y la maestría en Ciencias (Física) en la Facultad de Ciencias de la UNAM, y está inscrito en el plan del doctorado en Ciencias (Física) en la UNAM. Ha escrito artículos especializados en física atómica y

ha elaborado diversos materiales didácticos. Ha obtenido importantes reconocimientos por sus trabajos en los concursos nacionales de guiones para elaborar programas educativos en computadora para los niveles de primaria y secundaria, patrocinados por el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILSE) y la Secretaría de Educación Pública. En la UAM-Iztapalapa ha participado en los talleres para impartir los cursos de método experimental I y II y tiene amplia experiencia en los laboratorios de física. Es un estudioso de la física estadística, y sus conocimientos en la materia enriquecieron el contenido de este texto, dándole una orientación interdisciplinaria.



Sergio Gerardo de los Cobos Silva hizo la licenciatura en Matemáticas en la UAM-Iztapalapa y obtuvo el grado de Maestro en Ciencias (área de cómputo estadístico) en el Colegio de Posgraduados y el doctorado en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Ha

participado en diferentes foros a nivel nacional e internacional. Actualmente es profesor titular en la UAM-Iztapalapa. Sus principales líneas de investigación pertenecen al área de la programación estocástica en optimización.

Introducción a la probabilidad tiene la virtud de presentar esta materia como una herramienta útil para resolver un sinnúmero de problemas comunes en las áreas de ciencias básicas e ingeniería, y en general en cualquier área en la que se aplique la probabilidad. Con un lenguaje sencillo se plantean problemas prácticos con los cuales se va desarrollando la teoría hasta llegar a la presentación de los conceptos teóricos formales. Al resolver los ejercicios del capítulo introductorio el estudiante estará en condiciones de continuar exitosamente el estudio de la materia, además de que a lo largo del texto se introduce al lector de manera natural en el estudio de la probabilidad.

A grandes rasgos, el texto trata los siguientes temas: conceptos básicos de la probabilidad, probabilidad condicional e independencia estadística, variables aleatorias y funciones de distribución, esperanza matemática y algunos temas relacionados con la teoría de la inferencia estadística, como son la estimación por mínimos cuadrados y el teorema central del límite. Al terminar su lectura el lector estará en condiciones de aplicar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas propios de la física, la química, la ingeniería, etc., o bien podrá profundizar en sus conocimientos de probabilidad o de inferencia estadística.

Introducción a la probabilidad es un libro autosuficiente, ya que contiene la solución detallada de todos los ejercicios propuestos.

Por todo lo anterior, tenemos la convicción de que este texto será útil a cualquier persona que requiera de los conocimientos de la probabilidad en su desarrollo profesional.



ISBN 970-654-642-1



9 789706 546425