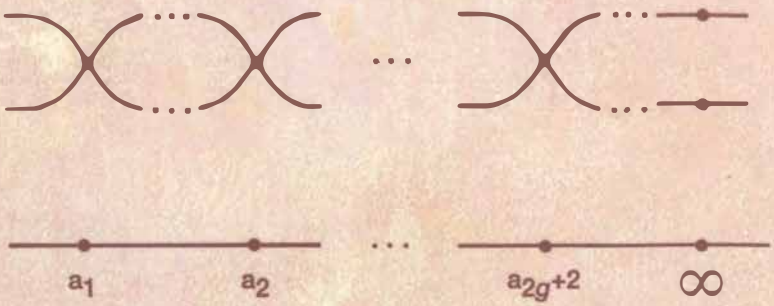
Funciones Algebraicas de una Variable Compleja

Felipe Zaldívar



Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA



El Dr. Felipe Zaldivar estudió la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México, y obtuvo su Doctorado en Matemáticas en la University of Western Ontario (Canadá). Ha sido profesor en la University of Western Ontario (1986), George Washington University (Washington, D.C.) (1986-1987), y la Universidad Autónoma Metropolitana-I desde 1987, donde actualmente es Profesor Titular. Su área de interés en Matemáticas es la Geometría Diofantina.

Funciones algebraicas de una variable compleja



A Mayra

Primera edición: 1995

©UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
Av. Michoacán y La Purísima
Iztapalapa, 09340, México, D. F.

ISBN: 970-620-607-8
Impreso y hecho en México / *Printed in Mexico*

Indice

Introducción ix

1 Superficies de Riemann 1
- 1.1 Variedades holomorfas 2
- 1.2 Aplicaciones holomorfas 11
- 1.3 Ramificación 18
- 1.4 Funciones meromorfas 22

2 Espacios cubrientes 27
- 2.1 Aplicaciones cubrientes no ramificadas 28
- 2.2 Propiedades homotópicas de las aplicaciones cubrientes . . . 32
- 2.3 Aplicaciones cubrientes ramificadas 46
- 2.4 Cubrientes universales y transformaciones cubrientes 51

3 Continuación analítica y funciones algebraicas 61
- 3.1 Gavillas 62
- 3.2 Continuación analítica 72
- 3.3 Funciones algebraicas 83

4 Cohomología de Gavillas 111
- 4.1 La Categoría de Gavillas 112
- 4.2 Cohomología de Čech 143
- 4.3 Resoluciones Finas y Cubiertas de Leray 157
- 4.4 El Teorema de Dolbeaut 170

5 Superficies de Riemann Compactas 179
- 5.1 El Teorema de Finitud 180
- 5.2 El Teorema de Riemann-Roch 200
- 5.3 El Teorema de dualidad de Serre. 211
- 5.4 Aplicaciones de Riemann-Roch 233

5.5 Formas armónicas y la descomposición de Hodge 253
5.6 El Teorema de Abel-Jacobi 265
5.7 Encajes en espacios proyectivos 283
5.8 El grupo de automorfismos 288

Bibliografía **293**

Índice Alfabético **294**

Introducción

todos los nombres son un solo nombre
todos los rostros son un solo rostro
O. Paz

What is in a name? That which we call a rose
By any other word would smell as sweet
W. Shakespeare

La Teoría de Funciones Algebraicas de una Variable Compleja, como el Análisis Complejo en general, se encuentra en forma privilegiada en la intersección de las principales ramas de la Matemática: Es, por supuesto, Geometría y Análisis, pero también es Algebra y Aritmética y ha servido de inspiración a muchas otras áreas de nuestra ciencia.

Surgida el siglo pasado al tratar de explicar una de las tantas confusiones en la caracterización del concepto de función, en especial el problema de la extensión de una funcion dada a un mayor dominio (la continuación analítica de una función), gracias a la penetración de Riemann, pronto se encontró en la corriente principal de la Matemática.

En este libro encontraremos algunas de las formas en que se presentan los objetos asociados a las funciones algebraicas, las *superficies de Riemann compactas*: (i) como objetos analítico-geométricos, i.e., *variedades complejas de dimension uno*; (ii) como objetos topológico-geométricos, i.e., como *espacios cubrientes de la recta proyectiva compleja* ; (iii) como objetos aritmético-geométricos, i.e., como *extensiones de grado de trascendencia uno del campo de los números complejos.*

J.L. Borges escribía alguna vez que el Corán debería, en efecto, ser un libro escrito por árabes ya que en él no se encuentran mencionados los camellos. Este libro es, en efecto, un texto de *curvas algebraicas complejas* aún cuando éstas no se encuentran mencionadas explícitamente, y de alguna manera perderemos esa presentación, importante, de las superficies de Riemann compactas.

Al considerar superficies de Riemann compactas, probaremos dos de los resultados de la Teoría de Funciones del siglo XIX que ameritan inmortalidad, a saber, el Teorema de Riemann-Roch y el Teorema de Abel-Jacobi. Después, con el Teorema de Dualidad de Serre, empezaría propiamente el análisis profundo de las superficies de Riemann compactas, y aquí presentaremos tan sólo algunas consecuencias geométricas de los teoremas arriba mencionados, apenas esbozando la riqueza de esta teoría.

El carácter introductorio de este libro nos permite tan sólo dar un panorama de los resultados clásicos desarrollados por los matemáticos de la segunda mitad del siglo pasado, principalmente Riemann, Abel, Jacobi y Weierstrass, pero usando el enfoque moderno de la cohomología de gavillas introducido por Serre, Grothendieck y otros matemáticos de nuestro siglo, que ha aclarado muchas de las ideas involucradas en este campo y áreas afines, permitiendo un punto de vista unificador, no sólo para ir de una a varias variables complejas, sino también incluyendo, además del campo complejo, otros campos no necesariamente algebraicamente cerrados de tal forma que se pueda hacer aritmética, uno de los requerimientos impuestos por Weil para fundamentar la Geometría Algebraica, de la cual este texto puede considerarse una introducción a una de sus partes clásicas. Hemos dejado fuera muchos otros temas clásicos importantes, que la falta de espacio nos ha impedido considerar: variedades Jacobianas, divisores theta, el Teorema de Torelli, el Teorema de de Franchis, y otros más, ameritan un libro mucho mayor que éste.

Para un panorama más completo del contenido de este libro se sugiere consultar el índice del mismo. Cada capítulo contiene una introducción donde se detallan las ideas a desarrollar.

Capítulo 1

Superficies de Riemann

En este capítulo comenzamos el estudio de las superficies de Riemann como variedades complejas de dimensión uno. Este punto de vista es fácilmente generalizable a variedades holomorfas de dimensión superior, y muchas de las propiedades que obtendremos serán también válidas en ese contexto.

Se introducen los conceptos de funciones holomorfas en una superficie de Riemann y de aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann. Se obtienen generalizaciones del Teorema de las Singularidades Removibles de Riemann, Teorema de la Identidad, Teorema de la Función Abierta, Teorema del Módulo Máximo y el Teorema de Liouville.

Uno de los resultados importantes en este contexto es el teorema que caracteriza la conducta local de las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann como funciones esencialmente de la forma $F(z) = z^k$ con $k \geq 1$ un entero. Se introduce entonces el concepto de ramificación, de importancia capital en el desarrollo subsecuente de la teoría.

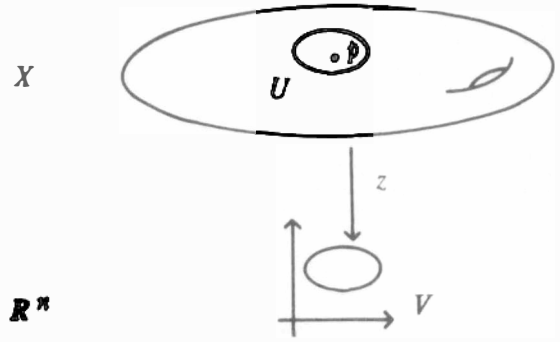
Finalmente, se estudian las funciones meromorfas en una superficie de Riemann, interpretándolas como aplicaciones holomorfas en la esfera de Riemann.

Se supone cierta familiaridad con conceptos topológicos básicos, en particular nuestras variedades son espacios topológicos Hausdorff con una base numerable de su topología.

Asumiremos conocidos los resultados básicos del análisis complejo de una variable. Las referencias [Conway] y [Ahlfors] son más que suficientes.

1.1 Variedades holomorfas

Recordemos que una *variedad topológica* de dimensión n, o *n-variedad*, es un espacio topológico X Hausdorff con una base numerable de su topología tal que todo punto $p \in X$ tiene una vecindad abierta que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$:



Llamaremos *cartas coordenadas* de X a los pares (U, z) con $U \subseteq X$ abierto y $z : U \to V$ un homeomorfismo en V, un abierto de $\mathbb{R}^n$. Un *atlas* en X es una familia $\mathrm{A} = \{U_\alpha, z_\alpha\}$ de cartas coordenadas que cubren a X.

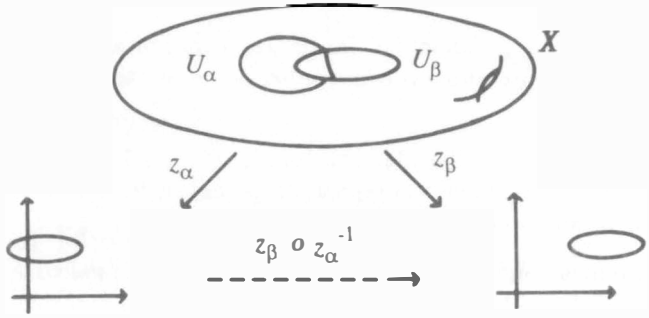
Nosotros estaremos interesados en variedades de dimensión 2, y pensaremos a las cartas coordenadas con dominio en $\mathbb{C}$ mas que en $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1 Sea X una 2-variedad. Consideremos las cartas coordenadas $z_\alpha : U_\alpha \subseteq X \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}$

(i) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ para dos cartas de X, a las funciones:

$$z_{\alpha\beta} := z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

se les llama *funciones de transición* o *cambios de coordenadas*:



(ii) Un atlas $\mathrm{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ en X se llama un *atlas holomorfo* o *complejo* si todas sus funciones de transición son funciones holomorfas (de hecho, son biholomorfas).

(iii) Dos atlas complejos $\mathrm{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}_\Gamma$ y $\mathrm{A}' = \{(V_\beta, w_\beta)\}_{\Gamma'}$ en X se llaman *equivalentes* si siempre que $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ los cambios de coordenadas $z_\alpha \circ w_\beta^{-1}$ y $w_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ son holomorfos. En otras palabras, las funciones $z_\alpha \circ w_\beta^{-1}$ son *biholomorfas* con inversas $w_\beta \circ z_\alpha^{-1}$.

Lema 1.2 *La relación anterior entre atlas complejos sobre X es de hecho una relación de equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN: Reflexividad y simetría son fáciles.

Transitividad: Sean $A = \{U_\alpha, z_\alpha\}$, $A' = \{U'_\beta, z'_\beta\}$ y $A'' = \{U''_\gamma, z''_\gamma\}$, atlas complejos en X tales que $A \sim A'$ y $A' \sim A''$.

Supongamos que $U_\alpha \cap U''_\gamma \neq \emptyset$, queremos mostrar que $z_\alpha \circ (z''_\gamma)^{-1}$ es holomorfa en cada punto $z''_\gamma(p)$ con $p \in U_\alpha \cap U''_\gamma$.

Ahora, como A' es un atlas de X, existe una carta (U'_β, z'_β) tal que $p \in U'_\beta$. Entonces $p \in U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma$, que es abierto, y así existe una vecindad abierta de $z''_\gamma(p)$ tal que restringiendo las funciones a esa vecindad W se tiene que:

$$z_\alpha \circ (z''_\gamma)^{-1} = \left(z_\alpha \circ (z'_\beta)^{-1}\right) \circ \left(z'_\beta \circ (z''_\gamma)^{-1}\right)$$

y como por hipótesis las dos funciones entre paréntesis de la derecha son holomorfas, la función de la izquierda también lo es. Q.E.D.

Observaciones: (1) Si dos atlas complejos A y A' en X son equivalentes, su *unión* $A \cup A'$ es un atlas complejo en X ya que por definición de equivalencia los cambios de coordenadas entre cartas de A y cartas de A' también son holomorfos. Obsérvese que la unión $A \cup A'$ tiene más funciones de transición que la unión de los conjuntos de cambios de coordenadas de A y de A' respectivamente, ya que además de estos cambios, también contiene a los cambios asociados a las intersecciones no vacías $U_\alpha \cap U'_\beta$.

(2) Claramente $A \sim (A \cup A') \sim A'$ y así la unión de dos atlas equivalentes es de nuevo un atlas en la misma clase de equivalencia.

(3) Podemos definir una *relación de orden parcial* entre atlas complejos equivalentes como sigue:

$$A \leq A' \Leftrightarrow A \subseteq A' \quad \text{y} \quad A \sim A'$$

Como $\sim$ es de equivalencia, se tiene claramente que:

(i) $A \leq A$

(ii) $A \leq A'$ y $A' \leq A \Rightarrow A = A'$

(iii) $A \leq A'$ y $A' \leq A'' \Rightarrow A \leq A''$

(4) Como la unión de atlas complejos equivalentes es de nuevo un atlas complejo en la misma clase de equivalencia, entonces cada clase de equivalencia de atlas complejos contiene un único *atlas máximo* con respecto a la relación de orden definida arriba.

Explícitamente, si $A = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ es un atlas complejo en X, el atlas máximo A^* equivalente a A está dado por: $A^* = \{(U, z)$ carta compleja en $X : z \circ z_\alpha^{-1}$ y $z_\alpha \circ z^{-1}$ son holomorfas para toda $z_\alpha \in A\}$.

Definición 1.3 Una *superficie de Riemann* es una pareja (X, Σ) donde X es una 2-variedad *conexa* y Σ es una clase de equivalencia de atlas complejos en X. A Σ se le llama una *estructura compleja* en X. Usualmente escribiremos X en lugar de (X, Σ), si la estructura compleja Σ se sobreentiende.

Observaciones: (1) Como por la observación (4) después de (1.2) toda clase de equivalencia Σ contiene un atlas máximo A^*, especificar la estructura compleja Σ en X es dar este atlas máximo A^*, y así : $X = (X, \Sigma) = (X, A^*)$. También, por la misma observación (1.3)(4), cada atlas complejo A está contenido en un único atlas máximo A^*, así que al definir una superficie de Riemann basta dar un atlas complejo A en X, i.e., $X = (X, \Sigma) = (X, A^*) = (X, A)$.

(2) Más adelante, veremos ejemplos de superficies de Riemann donde la variedad topológica X está fija y lo que cambia es la estructura compleja.

Nótese que esto es totalmente diferente con lo que sucede si en lugar de estructuras complejas estuviéramos considerando estructuras diferenciales, i.e., si hubiéramos requerido que los cambios de coordenadas del atlas fueran diferenciales de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ en lugar de holomorfos, porque en este caso, por un resultado de Munkres (Ann. of Math. 72 (1960), 521-554) existe una única estructura diferencial en una 2-variedad (lo cual no es cierto para variedades diferenciales de dimensión $n \geq 3$).

A continuación veremos algunos ejemplos de superficies de Riemann. Por la observación (1) de arriba, en los ejemplos basta dar un atlas complejo en la superficie.

Ejemplo 1: **El Plano Complejo:** Este es por supuesto el ejemplo más sencillo de una superficie de Riemann. Su estructura compleja está dada por el atlas $A = \{(\mathbb{C}, id)\}$.

Ejemplo 2: **Regiones:** Cualquier *abierto conexo* U de $\mathbb{C}$ es también una superficie de Riemann, con atlas complejo la restricción del atlas del ejemplo previo.

En general, si (X, A) es una superficie de Riemann y $Y \subseteq X$ es una región, i.e., un abierto conexo de X, entonces Y es una superficie de Riemann de forma natural: Su atlas es $A_Y = \{(U, z)\}$ con $(U, z) \in A$ y $U \subseteq Y$.

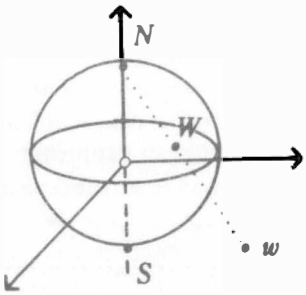
Ejemplo 3: **La Esfera de Riemann o Línea Proyectiva Compleja:** De las 2-variedades compactas, la 2-esfera

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

es, sin duda, la más sencilla. Esta superficie, que es claramente conexa, tiene una estructura compleja dada como sigue: Sean N y S los polos norte y sur de la esfera S^2. Consideremos los abiertos $U_1 = S^2 - N$ y $U_2 = S^2 - S$, y obsérvese que cubren la esfera. Las cartas correspondientes están definidas como sigue:

$$z_1 : U_1 \to \mathbb{C}$$

es la proyección estereográfica desde el polo norte.



Así z_1 es un homeomorfismo cuya inversa $z_1^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - N$, está dada como sigue: Identifiquemos a $\mathbb{C}$ con el plano XY; sea pues $w = x + iy = (x, y, 0) \in \mathbb{C}$. Entonces, $z_1^{-1}(w) =$ punto de intersección de la recta que pasa por $z = (x, y, 0)$ y el polo norte $N = (0, 0, 1)$, con la esfera S^2. Obsérvese que $z_1(S) = 0 \in \mathbb{C}$.

La otra carta

$$z_2 = U_2 \to \mathbb{C}$$

está dada por:

$$z_2(p) := \begin{cases} 1/z_1(p) & \text{si } p \neq N \\ 0 & \text{si } p = N \end{cases}$$

Nótese que como $p \neq S$ entonces $z_1(p) \neq 0$ y así $z_2(p)$ está bien definida.

Claramente z_2 es biyectiva, y es un ejercicio probar que en efecto es un homeomorfismo.

Finalmente, los únicos cambios de coordenadas son de la forma:

$$z_{12} := z_2 \circ z_1^{-1} : z_1(U_1 \cap U_2) \to z_2(U_1 \cap U_2)$$

donde $U_1 \cap U_2 = S^2 - \{N, S\}$ y $z_j(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$ ya que $z_1(S) = 0$ y $z_2(N) = 0$, así para todo $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ se tiene:

$$z_{12}(w) = z_2\left(z_1^{-1}(w)\right) = 1/z_1\left(z_1^{-1}(w)\right) = 1/w$$

es claro entonces que $z_{12}(w) = 1/w$ es holomorfa en $\mathbb{C} - \{0\}$, de hecho, es una *inversión* y así manda el interior de un disco alrededor del $0 \in \mathbb{C}$ al exterior de dicho disco.

Uno podría preguntarse por qué en lugar de usar la carta (U_2, z_2) anterior que es poco "natural", no usamos la proyección estereográfica desde el polo sur. La respuesta es sencilla: Si escribimos explícitamente esta proyección estereográfica, el cambio de coordenadas z_{12} estaría ahora dado por

$$z_{12}(w) = 1/\bar{w} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}$$

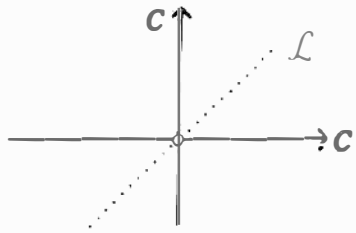
si $w = x + iy \neq 0$, que es claramente diferenciable pero no holomorfo.

Es importante notar que la *esfera de Riemann* (S^2, Σ) definida anteriormente es de hecho el *espacio proyectivo complejo de dimensión uno*: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, del cual recordamos a continuación su definición:

Sea $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y consideremos el subespacio $\mathbb{C}^2 - (0,0)$. El grupo multiplicativo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ opera sobre $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ como sigue: Si $w \in \mathbb{C}^*$ y $(\zeta_0, \zeta_1) \in \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, entonces $w(\zeta_0, \zeta_1) = (w\zeta_0, w\zeta_1)$.

Se define $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}/\mathbb{C}^*$ como el espacio cociente o espacio de órbitas de la acción de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$.

Cada punto de $\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ determina una recta en $\mathbb{C}^2$, a saber, la recta que pasa por ese punto y el origen de $\mathbb{C}^2$:



y la acción de $\mathbb{C}^*$ manda puntos de la recta $\mathcal{L}$ a puntos en la misma recta. Así, los puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ son las rectas de $\mathbb{C}^2$ que pasan por el origen.

A los puntos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ los denotaremos por $[\zeta_0, \zeta_1]$, y a las coordenadas $(\zeta_0, \zeta_1) \neq (0,0)$ de un representante del punto $[\zeta_0, \zeta_1]$ se les llamará *coordenadas homogéneas* del punto en cuestión. Así, por definición $(\zeta_0', \zeta_1') \in [\zeta_0, \zeta_1]$ si y sólo si existe $0 \neq w \in \mathbb{C}$ tal que $w(\zeta_0, \zeta_1) = (\zeta_0', \zeta_1')$.

Una estructura compleja en la línea proyectiva compleja está dada como sigue: se tiene una cubierta abierta de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dada por:

$$W_0 := \{[\zeta_0, \zeta_1] \,:\, \zeta_0 \neq 0,\ \zeta_0,\ \zeta_1 \in \mathbb{C}\}$$

y

$$W_1 := \{[\zeta_0, \zeta_1] \,:\, \zeta_1 \neq 0\ ,\ \zeta_0,\ \zeta_1 \in \mathbb{C}\}$$

Si ahora definimos $\psi_0 : W_0 \to \mathbb{C}$ por $\psi_0[\zeta_0, \zeta_1] := \zeta_1/\zeta_0$ y $\psi_1 : W_1 \to \mathbb{C}$ como $\psi_1[\zeta_0, \zeta_1] := \zeta_0/\zeta_1$, claramente ψ_0 y ψ_1 son funciones bien definidas, i.e. no dependen de los representantes de $[\zeta_0, \zeta_1]$ elegidos, más aún, son trivialmente suprayectivas, y son inyectivas ya que, por ejemplo, si $\zeta_1/\zeta_0 = \zeta_1'/\zeta_0'$, entonces $\zeta_1\zeta_0' = \zeta_1'\zeta_0$, y como $\zeta_0, \zeta_0' \neq 0$, entonces $\lambda := \zeta_0/\zeta_0' \in \mathbb{C}^*$. Se sigue que $\lambda\zeta_0' = \zeta_0$ y $\lambda\zeta_1' = (\zeta_0/\zeta_0')\zeta_1' = (\zeta_1\zeta_0')/\zeta_0' = \zeta_1$, es decir, $\lambda(\zeta_0', \zeta_1') = (\zeta_0, \zeta_1)$, i.e., $[\zeta_0', \zeta_1'] = [\zeta_0, \zeta_1]$.

Más aún, es un ejercicio sencillo probar que ψ_0 y ψ_1 son homeomorfismos, y así $\mathbb{P}^1$ es una 2-variedad, y como W_0 y W_1 son conexos con intersección no vacía, entonces $\mathbb{P}^1$ es conexa.

Nótese que $\psi_0(W_0 \cap W_1) = \mathbb{C} - \{0\} = \psi_1(W_0 \cap W_1)$ y los únicos cambios de coordenadas son de la forma:

$$\psi_{10}(w) = \psi_1 \circ \psi_0^{-1}(w/1) = \psi_1[1, w] = 1/w$$

para $w = w/1 \neq 0$ en $\mathbb{C}$. Y así observamos que son las mismas funciones de transición que para la esfera de Riemann.

Un tercer punto de vista es el siguiente: Consideremos el conjunto

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Se define una topología, en este conjunto, tomando los abiertos usuales $U \subseteq \mathbb{C}$ y como vecindades del ∞ los conjuntos

$$V_\infty := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$$

Se tiene un homeomorfismo $h : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ dado por

$$h(z) := \begin{cases} \phi^{-1}(z) \in S^2 - \{N\} & \text{si } z \neq \infty \\ N \in S^2 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

donde $\phi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - \{N\}$ es la inversa de la proyección estereográfica.

Un atlas complejo en $\mathbb{C}_\infty$ está dado por: $U_1 := \mathbb{C}$, $\psi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ la función identidad, $U_2 := (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty - \{0\}$, y $\psi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ dada por

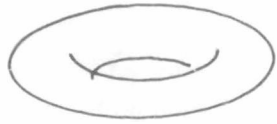
$$\psi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Los cambios de coordenadas son de la forma

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

$\psi_1 \circ \psi_2^{-1}(z) = \psi_1(1/z) = 1/z$, y observamos también, que son las mismas funciones de transición que para la esfera de Riemann.

Ejemplo 4: **Los Toros:** De las superficies compactas, después de la esfera la más simple es un *toro*, una superficie de género uno. Recordemos que, topológicamente, el toro es $S^1 \times S^1$:

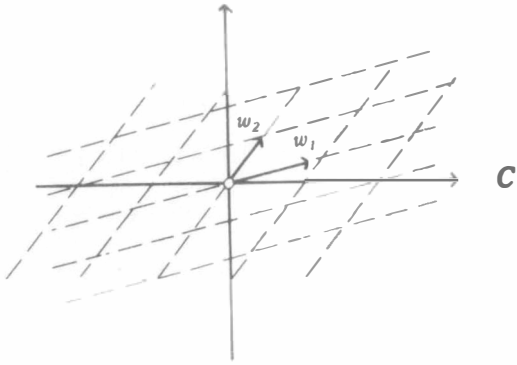


Aquí recordaremos la construcción del toro como un espacio cociente y para esto necesitamos los siguientes conceptos:

(i) **Retículas:** Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ dos complejos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Así, w_1 y w_2 no son cero y $w_1/w_2 \notin \mathbb{R}$. El conjunto:

$$\Lambda := \mathbb{Z} \cdot w_1 + \mathbb{Z} \cdot w_2 := \{aw_1 + bw_2 \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$$

es un *subgrupo aditivo discreto* de $\mathbb{C}$ de rango máximo, al que llamamos una *retícula*:



(ii) Consideremos ahora al *grupo cociente* $\mathbb{C}/\Lambda$ y al epimorfismo canónico $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$. Al cociente $\mathbb{C}/\Lambda$ le damos la *topología cociente*, i.e., $U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en la topología usual de $\mathbb{C}$. Con esta topología, y por definición, π es continua, y claramente $\mathbb{C}/\Lambda$ es Hausdorff. También, como π es suprayectiva y $\mathbb{C}$ es conexo, entonces $\mathbb{C}/\Lambda$ es conexo.

Más aún, es claro que $\mathbb{C}/\Lambda = \pi(R)$ donde $R \subseteq \mathbb{C}$ es el *paralelogramo fundamental* $R := \{\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\}$ (véase el area sombreada en la figura anterior), y así como este rectángulo es compacto y π es continua entonces $\mathbb{C}/\Lambda$ también es compacto.

Una última observación: π es una función abierta. En efecto, si $V \subseteq \mathbb{C}$ es abierto queremos probar que $\pi(V)$ es abierto, i.e., queremos probar que $\tilde{V} := \pi^{-1}(\pi(V)) \subseteq \mathbb{C}$ es abierto. Ahora como

$$\begin{aligned}
\tilde{V} &= \pi^{-1}(\pi(V)) = \{w \in \mathbb{C} : w + \Lambda \in \pi(V)\} \\
&= \{w \in \mathbb{C} : w + \Lambda = v + \Lambda \text{ con algún } v \in V\} \\
&= \{w \in \mathbb{C} : w - v \in \Lambda \text{ con } v \in V\} \\
&= \{w \in \mathbb{C} : w = v + \tilde{v} \text{ con } v \in V \text{ y } \tilde{v} \in \Lambda\} \\
&= \bigcup_{u \in \Lambda} (u + V) \subseteq \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Y como $V \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, entonces cada conjunto $v + V$ también es abierto y así también $\tilde{V}$ es abierto.

(iii) El *toro* $S^1 \times S^1$ y el *grupo cociente* $\mathbb{C}/\Lambda$.

Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ el círculo unitario en $\mathbb{C}$. Se tiene una función $F : \mathbb{C}/\Lambda \to S^1 \times S^1$ definida como sigue: $F(a \cdot w_1 + b \cdot w_2 + \Lambda) := (\exp(2\pi i a), \exp(2\pi i b))$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Obsérvese que F está bien definida ya que si $a \cdot w_1 + b \cdot w_2 + \Lambda = a' \cdot w_1 + b' \cdot w_2 + \Lambda$ entonces $a - a', b - b' \in \mathbb{Z}$ y así $\exp(2\pi i(a - a')) = 1 = \exp(2\pi i(b - b'))$; se sigue que $\exp(2\pi i a) = \exp(2\pi i a')$ y $\exp(2\pi i b) = \exp(2\pi i b')$.

También, $|\exp(2\pi i a)| = 1 = |\exp(2\pi i b)|$, i.e. $(\exp(2\pi i a), \exp(2\pi i b)) \in S^1 \times S^1$. Es un ejercicio sencillo ver que F es un homeomorfismo.

(iv) Una estructura compleja en el toro $\mathbb{C}/\Lambda$ está dada como sigue: Consideremos abiertos $V \subseteq \mathbb{C}$ que no contengan puntos equivalentes módulo el subgrupo Λ (por ejemplo, podemos tomar como V al interior del rectángulo fundamental o al interior de los rectángulos trasladados, etc.) Nótese que los abiertos con esta propiedad todavía cubren a $\mathbb{C}$.

Como π es abierta, los conjuntos $U := \pi(V) \subseteq \mathbb{C}/\Lambda$ son abiertos y claramente cubren al toro $\mathbb{C}/\Lambda$.

Más aún, $\pi|_V : V \subseteq \mathbb{C} \to U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda$ es *biyectiva* ya que es suprayectiva por definición de $U = \pi(V)$, y es inyectiva ya que los conjuntos

V no contienen puntos congruentes módulo Λ. Así como π es continua y abierta, entonces su restricción a V es un homeomorfismo para todo tal conjunto V. Sea $\phi : U \subseteq \mathbb{C}/\Lambda \to V \subseteq \mathbb{C}$ la inversa de $\pi \mid_V$. Sea $A = \{(U, \phi) : U = \pi(V), \text{con } V \text{ como antes}\}$. Entonces A es un *atlas complejo* en el toro $\mathbb{C}/\Lambda$ ya que si (U_α, ϕ_α), $(U_\beta, \phi_\beta) \in A$ son dos cartas con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

está dado como sigue: si $z \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ como $\phi_\alpha^{-1} = \pi \mid_{V_\alpha}$ y $\phi_\beta = (\pi \mid_{V_\beta})^{-1}$, entonces $\pi(\phi_{\alpha\beta}(z)) = \pi\left(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(z)\right) = \pi(\phi_\beta(\pi(z))) = \pi(z)$ y así $\phi_{\alpha\beta}(z) - z \in \Lambda$, y como Λ es *discreto* y $\phi_{\alpha\beta}(z) - z$ es *constante* en cada componente conexa del abierto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}$, i.e., $\phi_{\alpha\beta}(z) = z + \textit{constante}$ en cada componente conexa y así $\phi_{\alpha\beta}$ es claramente holomorfa.

1.2 Aplicaciones holomorfas

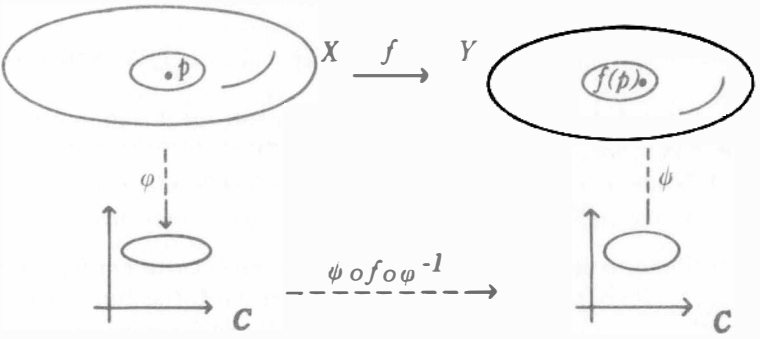
Regresando a la observación (2) después de (1.3), podríamos preguntarnos si las estructuras complejas en los ejemplos anteriores son o no únicas. Primero, por supuesto, tenemos que aclarar lo que queremos decir con *únicas*, i.e., queremos poder diferenciar entre estructuras complejas en una 2-variedad X, i.e., queremos poder clasificar las superficies de Riemann y así necesitamos criterios y conceptos de clasificación. Esto es parte de lo que haremos a continuación.

Por supuesto, lo que queremos es que nuestros morfismos preserven la estructura compleja de las superficies de Riemann involucradas, y esta estructura está en la condición de que los cambios de coordenadas respectivos sean holomorfos. La definición formal es la siguiente:

Definición 1.4 Sean X y Y superficies de Riemann. Una *aplicación holomorfa* entre X y Y es una función continua $f : X \to Y$ tal que para cada punto $p \in X$ y para cualesquiera cartas (U, ϕ) alrededor de $p \in X$ y (V, ψ) alrededor de $f(p) \in Y$, la función

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \to \psi(V)$$

es holomorfa en el sentido usual, i.e., como función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$:



Una aplicación holomorfa $f : X \to Y$ entre superficies de Riemann se llama un *isomorfismo* si es biyectiva y su inversa también es una aplicación holomorfa. Dos superficies de Riemann se llaman *isomorfas* si existe un isomorfismo entre ellas.

Dada una función continua $f : X \to Y$ entre superficies de Riemann, la propiedad de ser holomorfa es independiente de la elección de las cartas coordenadas de las estructuras complejas de X y Y. Así la verificación

de la condición para que $f : X \to Y$ sea holomorfa no tiene que hacerse para los atlas máximos de X y Y sino sólo para atlas cualesquiera de las estructuras complejas de X y Y.

Lema 1.5 *(1) Si X es una superficie de Riemann arbitraria, la identidad $1_X : X \to X$ es holomorfa.*

(2) Si X, Y, Z son superficies de Riemann y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son holomorfas, entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ también es holomorfa.

DEMOSTRACIÓN: (1) es trivial. (2): Sean (U, ϕ), (V, ψ), (W, ρ) cartas coordenadas en X, Y, Z respectivamente, tales que $f(U) \subseteq V$ y $g(V) \subseteq W$. Entonces claramente

$$\rho \circ (gf) \circ \phi^{-1} = (\rho g \psi^{-1}) \circ (\psi f \phi^{-1})$$

y como cada paréntesis de la derecha es por hipótesis holomorfo, entonces la composición es holomorfa (como funciones de abiertos de $\mathbb{C}$). Q.E.D.

Definición 1.6 Sea X una superficie de Riemann. Una *función holomorfa* en X es una aplicación holomorfa $f : X \to \mathbb{C}$ considerando a $\mathbb{C}$ como una superficie de Riemann. Explícitamente: $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa si para todo punto $p \in X$ y cualquier carta (U, z) alrededor de p, la función $f \circ z^{-1} : z(U) \to \mathbb{C}$, es holomorfa en el sentido usual.

Observaciones: Si X es una superficie de Riemann y $U \subseteq X$ es un abierto, entonces:

(i) La *suma* de funciones (definida puntualmente en el codominio $\mathbb{C}$) de funciones holomorfas en U también es holomorfa.

(ii) El *producto* de funciones holomorfas en U es holomorfo.

(iii) Las funciones *constantes* en U también son holomorfas.

Así el conjunto de funciones holomorfas de U en C es un *anillo*, al que se denota por $\mathcal{O}(U)$, y contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{C}$ (las funciones constantes en U). Al anillo $\mathcal{O}(U)$ se le llama el *anillo de funciones holomorfas* en U.

(iv) Toda carta (U, z), $z : U \to \mathbb{C}$, en X es una función holomorfa en U, ya que si (V, ψ) es cualquier carta de X y $U \cap V \neq \emptyset$, la composición $z \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbb{C}$ es un cambio de coordenadas en X y por lo tanto holomorfa.

A la función holomorfa z de una carta (U, z) de X se le suele llamar también una *coordenada local* de los puntos $p \in U \subseteq X$. En este contexto y abusando de la notación y el lenguage pensamos a la coordenada local z como una variable (local) en $p \in U$.

Si primero hubiéramos definido el concepto de función holomorfa en una superficie de Riemann de manera análoga a la definición de aplicación holomorfa entre superficies de Riemann (1.4), podríamos de hecho recuperar la noción de aplicación holomorfa usando los anillos de funciones holomorfas en X y Y respectivamente de la forma siguiente:

Observemos ahora que si X, Y son superficies de Riemann y $f : X \to Y$ una función continua, entonces para cualquier $V \subseteq Y$ abierto, se tiene que $f^{-1}(V) \subseteq X$ también es un abierto y consecuentemente tiene sentido el considerar los anillos $\mathcal{O}\left(f^{-1}(V)\right)$ y $\mathcal{O}(V)$ y preguntarnos por la relación entre estos. También, si $\phi : V \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces

$$f^*(\phi) := \phi \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{C}$$

es una función continua ya que f y ϕ lo son. Más aún, si f es un aplicación holomorfa, entonces $f^*(\phi) = \phi \circ f$ también lo es, por (1.5)(2). Hemos probado así que una aplicación holomorfa $f : X \to Y$ induce, para todo abierto $V \subseteq Y$, una función $f^* : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}\left(f^{-1}(V)\right)$ definida por $f^*(\phi) = \phi \circ f$. Es muy sencillo probar que f^* es un *morfismo de anillos.*

Proposición 1.7 *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre superficies de Riemann, entonces:*

(1) $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa si y sólo si para todo abierto $V \subseteq Y$ se tiene que $f^*\left(\mathcal{O}(V)\right) \subseteq \mathcal{O}\left(f^{-1}(V)\right)$.

(2) Si $g : Y \to Z$ es otra aplicación holomorfa entre superficies de Riemann y $W \subseteq Z$ es un abierto, entonces:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}\left(g^{-1}(W)\right) \to \mathcal{O}\left(f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right)\right)$$

(3) Si $1_X : X \to X$ es la aplicación identidad, entonces para cualquier abierto $U \subseteq X$ se tiene:

$$1_U^* = 1_{\mathcal{O}(U)} : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U).$$

DEMOSTRACIÓN: (2) y (3) son triviales. Para (1), la implicación ($\Rightarrow$) fue lo que se probó en el parágrafo previo al enunciado de la proposición. Recíprocamente, sea $p \in X$ y sean (U, z) carta alrededor de p y (V, ζ) carta alrededor de $f(p) \in Y$. Entonces, por hipótesis la función $f^*(\zeta) = \zeta \circ f$ es holomorfa en $f^{-1}(V) \subseteq X$ y así por definición (1.6) la función

$$(\zeta \circ f) \circ z^{-1} : z\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \to \zeta(V)$$

es holomorfa. Q.E.D.

Como la propiedad de que una función entre superficies de Riemann sea holomorfa es, por definición, una *propiedad local*, y como localmente una superficie de Riemann es como $\mathbb{C}$, entonces es sensato esperar que muchas de las propiedades usuales de las funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ sean válidas en el caso general. A continuación probamos algunas de estas propiedades. Nótese que las demostraciones consisten, en la mayoría de los casos, en una reducción al caso usual.

Teorema 1.8 (Singularidades Removibles de Riemann) *Sean X una superficie de Riemann, $U \subseteq X$ un abierto y $x_0 \in U$. Si $f \in \mathcal{O}(U - \{x_0\})$ es acotada en alguna vecindad de x_0, entonces f se puede extender de manera única a una función $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea W_0 una vecindad perforada (i.e., sin x_0) de x_0 en $U - \{x_0\}$ tal que $f|_{W_0}$ es acotada. Sea (U', φ) una carta de X alrededor de x_0.

Sean $V := \varphi(U' \cap W_0) \subseteq \mathbb{C}$, y $F = f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{C}$. Como f es acotada en $W_0 - \{x_0\}$ entonces f es acotada en $(U' \cap W_0) - \{x_0\}$, es decir, existe $R > 0$ tal que $|f(x)| \leq R$ para toda $x \in (U' \cap W_0) - \{x_0\}$.

Entonces, $F = f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{C}$ también es acotada en $V - \{\varphi(x_0)\}$ ya que para toda $z \in V - \{\varphi(x_0)\}$, como $V = \varphi(U' \cap W_0)$ y φ es homeomorfismo, entonces existe un único $x \in (U' \cap W_0) - \{x_0\}$ tal que $z = \varphi(x)$ y así

$$|F(z)| = |f \circ \varphi^{-1}(z)| = |f(x)| \leq R$$

ya que $x \in (U' \cap W_0) - \{x_0\}$.

Entonces $F : \varphi(U' \cap W_0) - \{\varphi(x_0)\} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es acotada y holomorfa (ya que f es holomorfa), y así

$$\lim_{z \to \varphi(x_0)} \big(F(z) \cdot (z - \varphi(x_0))\big) = 0 \cdot$$

i.e., $\varphi(x_0)$ es singularidad removible de F. Así, existe una única función $\widetilde{F} \in \mathcal{O}(\varphi(U' \cap W_0))$ tal que $\widetilde{F}\,|_{\varphi(U' \cap W_0) - \{\varphi(x_0)\}} = F$.

Finalmente, sea $\tilde{f} : U' \cap W_0 \to \mathbb{C}$ definida por

$$\tilde{f}\big|_{(U' \cap W_0) - \{x_0\}} = f \quad \text{y} \quad \tilde{f}(x_0) = \widetilde{F}(\varphi(x_0))$$

Claramente $\tilde{f}$ es holomorfa ya que $\tilde{f} \circ \varphi^{-1} = \widetilde{F}$ la cual es holomorfa. La unicidad de $\tilde{f}$ se sigue de la unicidad de $\widetilde{F}$. Q.E.D.

Proposición 1.9 (Teorema de la Identidad) . *Sean X, Y superficies de Riemann y sean $f_1, f_2 : X \to Y$ funciones holomorfas que coinciden en un subconjunto $A \subseteq X$, que tiene un punto de acumulación $w \in X$. Entonces $f_1 = f_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el conjunto

$$G := \{x \in X \mid \text{existe un abierto } W \subseteq X \text{ con } x \in W \text{ y } f_1|_W = f_2|_W\}$$

Por definición, claramente G es *abierto*. Probaremos que G es *cerrado*.

Nótese que una vez probado lo anterior, como X es conexo, entonces $G = \emptyset$ ó $G = X$. Pero como por hipótesis $f_1|_A = f_2|_A$ y el conjunto A tiene un punto de acumulación w, y ya que f_1, f_2 son continuas se sigue que $f_1(w) = f_2(w)$.

Ahora, si (U, φ) es un carta alrededor de $w \in X$ y (V, ψ) es una carta para $f(w) \in Y$ entonces sus imágenes $\tilde{U} = \varphi(U)$ y $\tilde{V} = \psi(V)$ en $\mathbb{C}$ son tales que: $F_1 = \psi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ y $F_2 = \psi \circ f_2 \circ \varphi^{-1}$ coinciden en $\varphi(U \cap A) \subseteq \mathbb{C}$, i.e., $F_1|_{\varphi(U\cap A)} = F_2|_{\varphi(U\cap A)}$ y como claramente $\varphi(w) \in \varphi(U \cap A)$ es un punto de acumulación, entonces por el Teorema de la Identidad para funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ [Conway 3.7 y 3.8 pág. 78-79], restringiéndonos a una región (i.e., escogiendo por ejemplo U conexo de tal forma que $\varphi(U)$ también sea conexo) que contenga a $\varphi(w)$ se tiene que $F_1 = F_2$ en todo $\varphi(U)$. Pero entonces $f_1 = f_2$ en un abierto que contiene a $x \in X$, i.e., $w \in G$ y así $G \neq \emptyset$, es decir, $G = X$, i.e., $f_1 = f_2$ en todo X.

Así, sólo resta por probar que G es *cerrado*: En efecto, sea $b \in \partial G$ un punto frontera. Queremos probar que $b \in G$, i.e., queremos mostrar que existe un abierto W tal que $b \in W$ y $f_1|_W = f_2|_W$.

Ahora, como $b \in \partial G$ y f_1, f_2 son continuas, entonces $f_1|_G = f_2|_G$ implica $f_1(b) = f_2(b)$.

Escojamos cartas (U, φ) de $b \in X$, (V, ψ) de $f_1(b) = f_2(b) \in Y$, y supongamos que U es conexo.

Las funciones $F_i := \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{C} \to \psi(V) \subseteq \mathbb{C}$ son holomorfas ya que las f_i lo son. Ahora, como $b \in U$ que es abierto y $b \in \partial G$, entonces $U \cap G \neq \emptyset$ (ya que de lo contrario b estaría en el interior de $X - G$, i.e., no en la frontera . Una contradicción). Q.E.D.

Proposición 1.10 (Teorema de la función abierta) *Si $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann entonces f es abierta, i.e., si $U \subseteq X$ es abierto, $f(U) \subseteq Y$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $W \subseteq X$ abierto y sea $b \in f(W) \subseteq Y$.

Sea $a \in W$ tal que $f(a) = b$ y sea (V, ψ) una carta de Y alrededor de b y sea (U, φ) una carta de X alrededor de a tal que $f(U) \subseteq V$, entonces por definición, la función $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es holomorfa.

Ahora, $W \cap U$ es abierto en X, y así $\varphi(W \cap U) \subseteq \mathbb{C}$ es abierto. Y como f *no* es constante, entonces F *no* puede ser constante ya que de lo contrario la función $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ sería constante, y claramente $f|_{W\cap U} = \tilde{f}|_{W\cap U}$,

y así por el Teorema de la Identidad anterior, se tendría que $f = \tilde{f}$, i.e., f sería constante en contradicción con la hipótesis inicial.

Así, como $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ no es constante (como función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$), entonces por el teorema de la función abierta para funciones holomorfas no constantes de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, [Conway 7.5 pág. 99], se tiene que $F(\varphi(W \cap U)) \subseteq C$ es abierto, i.e., $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\varphi(W \cap U)) = \psi f(W \cap U) \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y así $f(W \cap U) = \psi^{-1}(\psi f(W \cap U))$ es *abierto* en Y ya que ψ es un homeomorfismo.

Finalmente, como $a \in W \cap U$, entonces $b = f(a) \in f(U \cap W)$ y así $b \in f(W \cap U) \subseteq f(U)$ con $f(W \cap U)$ abierto en Y. Se sigue que $f(U)$ es abierto. Q.E.D.

Corolario 1.11 *Si X, Y son superficies de Riemann y $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa biyectiva entonces f es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que probar que $f^{-1} : Y \to X$ es holomorfa.

Observemos que como f es *abierta* (1.10), entonces $f^{-1} : Y \to X$ es un homeomorfismo.

Sea (V, ψ) una carta en Y y (U, φ) una carta en X tales que $f^{-1}(V) \subseteq U$. Consideremos la función

$$\tilde{F} := \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} : \psi(V) \subseteq \mathbb{C} \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$$

Como f es biyectiva, $V = ff^{-1}(V) \subseteq f(U)$, y como f es holomorfa entonces la función.

$$F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es holomorfa en el sentido usual y no es constante ya que f no lo es.

Claramente $\tilde{F}$ es la inversa de F y por el corolario correspondiente al Teorema de la función abierta en $\mathbb{C}$ [Conway Cor. 7.6 pag. 99], se tiene que $\tilde{F}$ es holomorfa, y así f^{-1} es holomorfa. Q.E.D.

Corolario 1.12 (Teorema del Módulo Máximo) *Si X es una superficie de Riemann y $f : X \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que alcanza su módulo máximo en X, i.e., existe $a \in X$ tal que $|f(x)| \leq |f(a)|$ para toda $x \in X$, entonces f es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f no es constante. Por hipótesis $f(X) \subseteq K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |f(a)|\}$.

Por el Teorema de la Función Abierta $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ es *abierto*, y así $f(X)$ estaría contenido en el interior de K. Pero esto contradice la hipótesis de que $f(a) \in \partial(K)$. Q.E.D.

El corolario anterior nos permite generalizar el Teorema de Liouville.

Corolario 1.13 *Sean X, Y superficies de Riemann, y sea $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no-constante. Si X es compacta entonces Y es compacta y f es suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema de la Función Abierta $f(X) \subseteq Y$ es abierto. Ahora como X es compacta y f continua, entonces $f(X) \subseteq Y$ es compacto, y así es *cerrado* ya que Y es Hausdorff.

Finalmente como Y es conexo y los únicos abiertos y cerrados de un conexo son el conjunto vacío y el total, entonces $f(X) = Y$, y así Y es compacto y f suprayectiva. Q.E.D.

Corolario 1.14 *Si X es una Superficie de Riemann compacta, entonces $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$, i.e., las únicas funciones holomorfas de X en $\mathbb{C}$ son las constantes.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del corolario anterior ya que $\mathbb{C}$ *no* es compacto.

Corolario 1.15 (Teorema de Liouville) *Toda función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada es constante.*

DEMOSTRACIÓN: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede pensar como $f : \mathbb{P}^1 - \{\infty\} \to \mathbb{C}$, y como por hipótesis f es holomorfa y acotada, entonces por el Teorema de Riemann de las Singularidades Removibles (1.8), existe una única función $\tilde{f} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\tilde{f}|_{\mathbb{C}} = f$. Pero $\mathbb{P}^1$ es compacta, y así por el corolario anterior se tiene que $\tilde{f}$ es constante, y consecuentemente, f es constante. Q.E.D.

1.3 Ramificación

En esta sección probamos el importante teorema sobre el comportamiento *local* de las aplicaciones holomorfas no-constantes entre superficies de Riemann. Con este resultado se introduce el concepto de ramificación y su interpretación geométrica.

Teorema 1.16 (Conducta local de las Aplicaciones Holomorfas) *Sean X y Y superficies de Riemann y $f : X \to Y$ una aplicación holomorfa no constante. Sean $a \in X$ y $b = f(a) \in Y$. Entonces, existe un entero $k \geq 1$ y cartas (U, φ) alrededor de $a \in X$ y (V, ψ) alrededor de $b \in Y$, tales que :*

(i) $\varphi(a) = 0$ *y* $\psi(b) = 0$
(ii) $f(U) \subseteq V$
(iii) La función $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ *está dada por:*

$$F(z) = z^k \quad \text{para toda} \quad z \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}.$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente siempre podemos elegir cartas (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) tales que (ii) se satisface. Entonces considerando homeomorfismos de $\varphi_1(U_1)$ y $\psi_1(V_1)$ en abiertos del plano $\mathbb{C}$ alrededor del 0, y tales que manden $\varphi_1(a)$ y $\psi_1(b)$ al cero, y luego componiendo con φ_1 y ψ_1, se obtienen cartas (U_1, φ_1) y (V_1, ψ_1) tales que (i) y (ii) se satisfacen.

Consideramos ahora la función

$$\widetilde{F} := \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \to \psi_1(V_1)$$

y nótese que como f no es constante entonces $\widetilde{F}$ tampoco lo es. Obsérvese además que:

$$\widetilde{F}(0) = \psi_1 \circ f \circ h^{-1}(0) = \psi_1 \circ f(a) = \psi_1(b) = 0$$

i.e., 0 es un *cero* de $\widetilde{F}$, y consecuentemente existe un entero $k \geq 1$ (llamado el *orden* ó *multiplicidad* del cero de $\widetilde{F}$) tal que $\widetilde{F}(z) = z^k \cdot g(z)$ con g holomorfa en $\varphi_1(U_1) \subseteq \mathbb{C}$ y $g(0) \neq 0$. Entonces, existe una vecindad de 0, $\widetilde{U}_1 \subseteq \varphi_1(U_1)$, donde g no se anula. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\widetilde{U}_1$ es un disco abierto alrededor del 0. Ahora, como funciones holomorfas que no se anulan en un disco de $\mathbb{C}$ tienen un logaritmo (véase, p.ej. [Conway; 2.21, p.40]), sea $\log(g(z))$ una tal rama holomorfa del logaritmo de $g(z)$ en $\widetilde{U}_1$.

Para el entero $k \geq 1$ anterior, definamos $h : \widetilde{U}_1 \to \mathbb{C}$ como $h(z) := \exp(1/k \cdot \log(g(z)))$. Claramente h es holomorfa, satisface que $(h(z))^k = g(z)$ y $h(0) \neq 0$.

Consideremos ahora la función $\alpha : \widetilde{U}_1 \to \widetilde{U}$ dada por $\alpha(z) := z \cdot h(z)$. Aquí $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{C}$ es una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$ que contiene a la imagen de h.

Claramente α es holomorfa, y restringiendo $\widetilde{U}_1$ si hiciera falta, y tomando $\widetilde{U} := \alpha(U_1)$, podemos suponer que α es biyectiva y por lo tanto *biholomorfa*. Pongamos $U := \varphi_1^{-1}\left(\widetilde{U}_1\right) \subseteq X$ y $\varphi = \alpha \circ \varphi_1 : U \to \widetilde{U}$. Entonces, (U, φ) es una carta alrededor de $a \in X$ que satisface (i). Más aún, si ponemos $V = V_1$ y $\psi = \psi_1$, entonces las cartas (U, ϕ) y (V, ψ) satisfacen (i) y también (ii) ya que:

$$f(U) = f(\varphi_1^{-1}(\widetilde{U}_1)) \subseteq f(U_1) \subseteq V$$

ya que $(\varphi_1)^{-1}(\widetilde{U}_1) \subseteq U_1$ y U_1 y $V_1 = V$ satisfacen (ii).

Finalmente, la función $F := \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es tal que si $z \in \varphi(U) = \alpha\varphi_1(U_1)$, entonces $z = \alpha\varphi_1(u)$ con $u \in U \subseteq X$, y así $F(z) = F(\alpha\varphi_1(u)) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\alpha\varphi_1(u)) = \psi \circ f \circ (\varphi_1^{-1} \circ \alpha^{-1})(\alpha\varphi_1(u)) = \widetilde{F}(\varphi_1(u)) = (\varphi_1(u))^k g(\varphi_1(u)) = (\varphi_1(u))^k (h(\varphi_1(u)))^k = (\varphi_1(u)h(\varphi_1(u)))^k = (\alpha(\varphi_1(u)))^k = (\alpha \circ \varphi_1(u))^k = z^k$ ya que $z = \alpha \circ \varphi_1(u)$. Q.E.D.

Observemos que el entero $k \geq 1$ asociado al punto $a \in X$ del teorema anterior es independiente de la carta local usada. De hecho, este entero k se puede caracterizar como sigue:

Para cada vecindad U_1 de $a \in X$, existen vecindades $U \subseteq U_1$ de $a \in X$ y V de $b = f(a) \in Y$ tales que para cada $y \in V - \{b\}$, el conjunto $f^{-1}(y) \cap U$ contiene exactamente k puntos.

Esto se sigue del hecho de que, en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$, la función $F(z) = z^k$ satisface que, si $z \neq 0$ entonces el conjunto $F^{-1}(z)$ tiene k puntos.

Definición 1.17 Con la notación del teorema (1.16), al entero $k \geq 1$ asociado al punto $a \in X$ y a la aplicación holomorfa $f : X \to Y$, se le llama la *multiplicidad* de la aplicación f en a, y usaremos la notación $k = \nu(f, a) = \nu_a(f)$. Algunas veces diremos que f toma el valor $b = f(a)$ k veces.

Al entero $b_a(f) := b(f, a) := \nu_a(f) - 1$ se le llama el *orden de ramificación* de f en el punto $a \in X$.

Si $a \in X$ es tal que $b_a(f) \geq 1$, diremos que f se *ramifica* en a, y que a es un *punto de ramificación* de f.

Si $a \in X$ es tal que $b_a(f) = 0$, diremos que f *no se ramifica* en a.

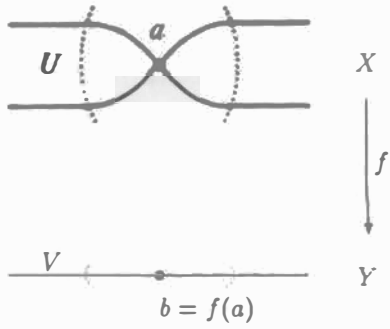
La aplicación f se llama *no ramificada* si no tiene puntos de ramificación.

Una interpretación geométrica de estos conceptos nos la da la observación siguiente: Es claro que una aplicación holomorfa $f : X \to Y$ tiene

un punto de ramificación en $a \in X$ si y sólo si para toda vecindad abierta U de $a \in X$, la restricción $f|_U : U \to Y$ *no* es inyectiva.

Esto se sigue del teorema (1.16) ya que en la expresión local de f alrededor de $a \in X$, $F(z) = z^k$ con $k \geq 1$, se tiene que F es inyectiva si y sólo si $k = 1$, i.e., si y sólo si $b_a(f) = 0$.

Entonces, geométricamente, el orden de ramificación $b_a(f) = k - 1$, nos dice que para $f : X \to Y$, *arriba* de $b = f(a)$ hay $b_a(f)$ *ramas* de X. Esto podemos visualizarlo como:



En esta figura, el punto $a \in X$ es un punto de ramificación de f ya que alrededor de los puntos $a \in X$ y $b = f(a) \in Y$ se tienen vecindades U y V respectivamente tales que para toda $y \in V - \{b\}$, la imagen inversa $f^{-1}(y) \cap U$ tiene más de un punto, i.e., $\nu_a(f) \geq 2$.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Sean $X = Y = \mathbb{C}$ y $k \geq 2$ un entero. Consideremos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^k$.

Entonces 0 es un punto de ramificación de f cuyo orden de ramificación es $b_0(f) = k - 1 \geq 1$. Pero, para todo $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, f no se ramifica en esa $a \neq 0$, i.e., $f|_{\mathbb{C}-\{0\}}$ es no ramificada.

La imagen que tendremos en mente es como la de la figura anterior, pero con k puntos de X arriba de cada $y \neq 0$ en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 2: Sean $X = \mathbb{C}$ y $Y = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Consideremos la aplicación exponencial $f = \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Entonces, la aplicación exp es no ramificada ya que aun cuando exp es periódica, de período $2\pi i$, dado un punto $a \in \mathbb{C}$ siempre podemos escoger una vecindad U de a que no contenga puntos que difieran por un múltiplo entero de $2\pi i$, y así $f|_U$ será inyectiva y por lo tanto no ramificada (1.16).

Ejemplo 9: Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ una retícula y sea $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ la proyección canónica de $\mathbb{C}$ al toro $\mathbb{C}/\Gamma$. Entonces, π es no ramificada.

1.4 Funciones meromorfas

Hemos considerado hasta ahora funciones holomorfas en una superficie de Riemann como una generalización natural de las funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Es natural entonces, el preguntarse por la generalización a una superficie de Riemann de las funciones en $\mathbb{C}$ más parecidas a las holomorfas, i.e., las funciones meromorfas. A continuación definimos éstas en una superficie de Riemann arbitraria X y luego las interpretamos como aplicaciones holomorfas de X en $\mathbb{P}^1$. También probaremos que el conjunto de funciones meromorfas en X, denotado $\mathcal{M}(X)$, es un *campo*, y que aplicaciones holomorfas $f : X \to Y$ inducen *extensiones de campos* $f^* : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$.

Definición 1.18 Sean X una superficie de Riemann y $U \subseteq X$ un abierto. Una *función meromorfa* en U es una función holomorfa $f : U' \to \mathbb{C}$, donde $U' \subseteq U$ es un abierto tal que:

(i) $U - U'$ contiene sólo *puntos aislados*, a los que llamaremos *polos* de f.

(ii) Para cada polo $p \in U - U'$ se tiene que

$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$$

Denotaremos por $\mathcal{M}(U)$ ó $\mathcal{M}_U$ al conjunto de funciones meromorfas en U.

Obsérvese que si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces $f : U \to X$ es una función meromorfa si y sólo si para cada carta (V, z) en X, la función $f \circ z^{-1} : z(V \cap U) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es meromorfa en el sentido usual, i.e., holomorfa salvo polos, que necesariamente son aislados.

Es importante observar que una función meromorfa en $U \subseteq X$ no es, propiamente hablando, una función de U en $\mathbb{C}$, sino que en general sólo está definida en un abierto $U' \subseteq U$.

Así en principio, el conjunto $\mathcal{M}_U$ no es comparable con los anillos $\mathcal{C}_U$ de funciones continuas en U, o con $\mathcal{C}^\infty_U$ (funciones diferenciables en U), o con $\mathcal{O}_U$ (funciones holomorfas en U).

El teorema siguiente nos da una interpretación de las funciones meromorfas como aplicaciones holomorfas en el plano extendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, i.e., en la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$, y así una función meromorfa en U será en efecto una función, sólo que su codominio no es $\mathbb{C}$ sino $\mathbb{P}^1$.

Teorema 1.19 *Sea X una superficie de Riemann.*

(1) Si f es una función meromorfa en X, y para cada polo p de f se define $\tilde{f}(p) := \infty \in \mathbb{P}^1$, entonces se obtiene una aplicación holomorfa $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1$, que extiende a f.

(2) Recíprocamente, si $f : X \to \mathbb{P}^1$ es una aplicación holomorfa, entonces:

(i) $f = \infty$, ó

(ii) $f^{-1}(\infty)$ consiste de puntos aislados, y la función

$$f|_{X-f^{-1}(\infty)} : X - f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$$

es holomorfa, i.e., $f : X \to \mathbb{C}$ es meromorfa.

En otras palabras, existe una *biyección* entre el conjunto de funciones meromorfas $f : X \to \mathbb{C}$ y el conjunto de aplicaciones holomorfas $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1$, y consecuentemente, podemos identificar las funciones meromorfas en X con las aplicaciones holomorfas de X en $\mathbb{P}^1$.

DEMOSTRACIÓN: **(1)**: Sea $f \in \mathcal{M}_X$ y sea P el conjunto de polos de f. La función $\tilde{f} : X \to \mathbb{P}^1$ que extiende a f se define como:

$$\tilde{f}(p) := \begin{cases} f(p) & \text{si } p \in X - P \\ \infty & \text{si } p \in P \end{cases}$$

y como f es meromorfa, por (1.18)(ii) se sigue que $\tilde{f}$ así definida es continua.

Probaremos ahora que es holomorfa. Sea (U, ϕ) una carta en X, y sea (V, ψ) una carta en $\mathbb{P}^1$. Recordemos ahora que a $\mathbb{P}^1$ lo podemos cubrir con dos cartas $V_1 = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$, $\psi_1 = id$ y $V_2 = \mathbb{P}^1 - \{0\}$, $\psi_2(w) = 1/w$. Entonces, tenemos dos casos:

Caso 1: Si $(V, \psi) = (V_1, \psi_1)$ entonces $\infty \notin V_1$, y como $f(U) \subseteq V_1$, entonces $P \cap U = \emptyset$, i.e., U no contiene polos de f. Como f es holomorfa en $X - P$ y $U \subseteq X - P$ entonces f es holomorfa en U, i.e., la composición $\psi_1 \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi_1(V_1)$ es holomorfa.

Caso 2: Si $(V, \psi) = (V_2, \psi_2)$ entonces $\infty \in V_2$ pero $0 \notin V_2$. Claramente la función $\psi_2 \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi_2(V)$ es holomorfa en $\phi(U) - \phi(P)$, ya que f es meromorfa.

Obsérvese que si $p \in P$ es un polo de f entonces su imagen $\phi(p) \in \phi(P)$ es tal que:

$$\lim_{z \to \phi(p)} \left| \left(\psi_2 \circ f \circ \phi^{-1}\right)(\phi(p)) \right| = \lim_{z \to \phi(p)} |1/f(p)| = 0$$

ya que $\psi_2(w) = 1/w$ y $\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$.

Así la función $\psi_2 \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) - \phi(P) \to \mathbb{C}$ es *acotada* y entonces por el teorema de las singularidades removibles de Riemann (1.8), existe una única función holomorfa $\tilde{F} : \phi(U) \to \mathbb{C}$ que extiende a $F := \psi_2 \circ f \circ \phi^{-1}$, y como $\lim_{z \to \phi(p)} |F(\phi(p))| = 0$, entonces, por la continuidad de $\tilde{F}$ se tiene que $\tilde{F}(\phi(p)) = 0$, es decir $\tilde{F}$ es la función $\tilde{F} = \psi_2 \circ \tilde{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{C}$ donde $\tilde{f}$ es la extensión de f dada por $\tilde{f}(p) := \infty$ para $p \in P$.

(2) Supongamos ahora que $f : X \to \mathbb{P}^1$ es holomorfa. Entonces:

(i) Si $\infty \notin f(X)$, entonces $f : X \to \mathbb{C}$ es holomorfa y por lo tanto meromorfa.

(ii) Si $\infty \in f(X)$ y f no es constante, por el teorema de la identidad para aplicaciones holomorfas, el conjunto $f^{-1}(\infty) = P$ consiste de puntos aislados. Claramente $f : X - P \to \mathbb{C}$ es holomorfa, y si $p \in P$ entonces $f(p) = \infty$ y $\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty$, i.e., f es meromorfa. Q.E.D.

Corolario 1.20 (Teorema de la Identidad) *(1) Si f, g son funciones meromorfas en X que coinciden en un conjunto $A \subseteq X$ que tiene un punto de acumulación en X, entonces $f = g$.*

(2) Si una función meromorfa f en X no es idénticamente cero, entonces f sólo tiene ceros aislados.

DEMOSTRACIÓN. (1): Por el teorema previo, a f, $g \in \mathcal{M}_X$ las podemos ver como aplicaciones holomorfas $f, g : X \to \mathbb{P}^1$, y así el resultado se sigue del teorema de la identidad para aplicaciones holomorfas.

La parte (2) se sigue de (1). Q.E.D.

Corolario 1.21 *Si X es una superficie de Riemann, al conjunto $\mathcal{M}_X$ se le puede dar una estructura de campo.*

DEMOSTRACIÓN: Dadas $f, g \in \mathcal{M}_X$ se definen $f + g$, $f \cdot g$ operando en el codominio, para $x \in X - (P_f \cup P_g)$, donde P_f y P_g son los conjuntos de polos de f y g respectivamente.

Claramente $f + g$, $f \cdot g \in \mathcal{M}_X$, y con estas operaciones $\mathcal{M}_X$ es un anillo conmutativo con uno.

Finalmente, si $f \in \mathcal{M}_X$ no es idénticamente cero, por la parte (2) del corolario anterior, el conjunto Z_f de ceros de f contiene sólo puntos aislados. Así, si definimos $1/f : X - Z_f \to \mathbb{C}$ como

$$1/f(x) := \begin{cases} 1/f(x) & \text{si } x \notin P_f \\ 0 & \text{si } x \in P_f \end{cases}$$

claramente $1/f \in \mathcal{M}_X$ y su conjunto de polos es Z_f. Q.E.D.

En las observaciones previas a (1.7) probamos que si $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa, entonces f induce un morfismo de anillos $f^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. El resultado análogo para funciones meromorfas es el siguiente:

Corolario 1.22 *Si $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa, entonces la función natural $f^* : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$, dada por $f^*(\alpha) := \alpha \circ f$, es un morfismo de campos.*

DEMOSTRACIÓN: Lo único que tiene que observarse es que si $\alpha \in \mathcal{M}_Y$ entonces $\alpha \circ f \in \mathcal{M}_X$. Pero esto se sigue de la interpretación (1.19) de $\alpha \in \mathcal{M}_Y$ como una aplicación holomorfa $\alpha : Y \to \mathbb{P}^1$, y así la composición $\alpha \circ f : X \to Y \to \mathbb{P}^1$ es holomorfa, es decir, $f^*(\alpha) \in \mathcal{M}_X$. Q.E.D.

Como todo morfismo de campos es inyectivo, podemos pensar al morfismo $f^* : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$ como una *extensión de campos*.

Antes de proseguir, veamos un ejemplo:

Proposición 1.23 *Toda función meromorfa en $\mathbb{P}^1$ es racional, es decir, se puede escribir como el cociente de dos polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese primero que una función meromorfa f en $\mathbb{P}^1$, no constante, sólo tiene un número finito de polos, ya que por definición éstos son aislados y como $\mathbb{P}^1$ es compacto el conjunto de polos no puede ser infinito, ya que de lo contrario tendría un punto de acumulación y así f sería constante por el teorema de la identidad para funciones meromorfas.

También, podemos suponer que ∞ no es un polo de f, ya que si lo fuera, considerando a $1/f$ se tendría que ∞ no es un polo de $1/f$, y si probamos que $1/f$ es racional entonces f también lo será.

Sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}^1 - \{\infty\} \overset{\psi_1}{=} \mathbb{C}$ los polos de f. Así la función

$$F := \psi_1 \circ f \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{C} - \{p_1, \ldots, p_n\} \to \mathbb{C}$$

es holomorfa.

Aquí ψ_1 es la carta en $\mathbb{P}^1$ correspondiente al abierto $U_1 = \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$. Entonces, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa con polos $p_1, \ldots, p_n$. Para cada uno de estos polos p_j, consideremos la parte principal de F en ese polo:

$$h_j(z) := \sum_{k=m_j}^{-1} a_{jk} \cdot (z - p_j)^k$$

Claramente la función $g := F - (h_1 + \cdots + h_n)$ es holomorfa en $\mathbb{P}^1$, y como $\mathbb{P}^1$ es compacta, entonces g es constante. Despejando F de la definición anterior se sigue que F es racional. Q.E.D.

Capítulo 2

Espacios cubrientes

Este capítulo, de sabor topológico, comienza con la demostración de que una aplicación holomorfa no constante, propia y no ramificada entre superficies de Riemann, es una aplicación cubriente en el sentido topológico clásico.

Después, se extiende el concepto de aplicación cubriente para incluir el caso cuando la aplicación holomorfa es ramificada, generalizándose el resultado anterior. En particular, y este es el caso que más nos interesa, si el dominio de la aplicación holomorfa es una superficie de Riemann compacta, entonces ésta es propia y todos los resultados anteriores son siempre ciertos.

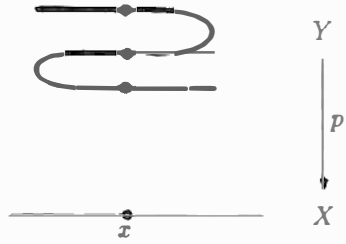
Se recuerdan también los conceptos de homotopía, grupo fundamental, y las propiedades homotópicas de las aplicaciones cubrientes no ramificadas con sus generalizaciones al caso ramificado. Con estas ideas topológicas se obtienen varios resultados interesantes para superficies de Riemann, incluyendo el teorema de monodromía.

Finalmente, se introducen los conceptos de aplicación cubriente universal y cubiertas de Galois, y se relaciona al grupo fundamental de una superficie de Riemann con el grupo de transformaciones cubrientes de ésta.

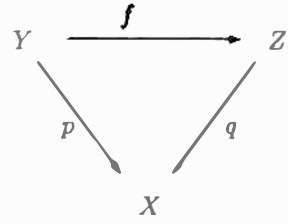
2.1 Aplicaciones cubrientes no ramificadas

En esta sección probamos que una aplicación holomorfa no constante, propia y no ramificada entre superficies de Riemann, es una aplicación cubriente en el sentido topológico usual. Recordemos primero los siguientes conceptos.

Definición 2.1 Sea $p : Y \to X$ una función continua entre espacios topológicos. Para cada $x \in X$, a la imagen inversa $p^{-1}(x) \subseteq Y$ se le llama la *fibra de p sobre x*, y diremos que cada $y \in p^{-1}(x)$ *está sobre x*.



Si $p : Y \to X$ y $q : Z \to X$ son funciones continuas, diremos que una función continua $f : Y \to Z$ *preserva las fibras* de p y q, si $q \circ f = p$, i.e., si el diagrama siguiente conmuta:



En otras palabras, para cada $x \in X$ se tiene que $f(p^{-1}(x)) \subseteq q^{-1}(x)$, es decir, f manda una fibra de q en una fibra de p. Algunas veces también diremos que f es un *levantamiento* de q con respecto a p.

Un subconjunto $A \subseteq X$ se llama *discreto* si para cada punto $a \in A$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $U \cap A = \{a\}$.

Una función continua $p : Y \to X$ se llama *discreta* si para cada punto $x \in X$ la fibra $p^{-1}(x) \subseteq Y$ es un conjunto discreto.

Lema 2.2 *Si $p : Y \to X$ es una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann, entonces p es abierta y discreta.*

DEMOSTRACIÓN. Por (1.10) p es abierta.

Ahora, si la fibra $p^{-1}(b)$ no fuera discreta para algún punto $b \in X$, entonces tendría un punto de acumulación, y como $p|_{p^{-1}(b)}$ es la función constante igual a b entonces p sería constante en todo Y por el teorema de la identidad (1.9). Q.E.D.

Lema 2.3 *Sea $p : Y \to X$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces, p es no ramificada si y sólo si p es un homeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que p es no ramificada y sea $b \in Y$ arbitrario. Por hipótesis b no es punto de ramificación de p, entonces por (1.17) existe una vecindad abierta U de b tal que $p|_U : U \subseteq Y \to X$ es inyectiva, y como p es holomorfa no constante, entonces es abierta (2.2) y así $p|_U : U \to p(U)$ es un homemomorfismo.

Recíprocamente, dado $b \in Y$ por hipótesis existe una vecindad abierta U de b tal que $p|_U : U \to p(U)$ es un homeomorfismo. En particular, $p|_U$ es inyectiva y así por (1.17) b no es punto de ramificación de p. Q.E.D.

Lema 2.4 *Sean $p : Y \to X$ una aplicación holomorfa no ramificada y $q : Z \to X$ otra aplicación holomorfa. Entonces, cualquier levantamiento de q con respecto a p es holomorfo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : Z \to Y$ un tal levantamiento, y sea $c \in Z$ arbitrario. Sean $b = g(c) \in Y$ y $a = q(c) = p(b) \in X$.

Como p es no ramificada, por (2.3) es un homeomorfismo local y así existen vecindades abiertas U de $b \in Y$ y V de $a \in X$ tales que $p|_U : U \to V$ es un homeomorfismo, y como p es holomorfa, entonces $p|_U$ es de hecho un biholomorfismo, i.e., su inversa $(p|_U)^{-1} : V \to U$ es holomorfa también.

Ahora como g es continua, entonces $g^{-1}(U) \subseteq Z$ es abierto y contiene a $c \in Z$. Así, existe una vecindad abierta W de $c \in Z$ tal que $g(W) \subseteq U$.

Finalmente, como $p \circ g = q$, entonces $p \circ g|_W = q|_W$, y como $g|_W(W) \subseteq U$ y $p|_U$ es invertible, entonces:

$$(p|_U)^{-1} \circ q|_W = (p|_U)^{-1} \circ p \circ g|_W = g|_W$$

con $(p|_U)^{-1}$ y $q|_W$ holomorfas. Se sigue que $g|_W$ es holomorfa. Q.E.D.

Definición 2.5 Un espacio topológico X se llama *localmente compacto* si es Hausdorff y todo punto de X tiene una vecindad compacta.

Una función continua $f : Y \to X$ entre espacios localmente compactos se llama *propia* si la preimagen $f^{-1}(K) \subseteq Y$ de cualquier compacto $K \subseteq X$, es compacta.

Obsérvese que si X es localmente compacto y Y es compacto, entonces toda función continua $p : Y \to X$ es *propia* ya que si $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto, entonces es cerrado y así $p^{-1}(K) \subseteq Y$ es cerrado, y como Y es compacto, entonces $p^{-1}(K)$ también es compacto.

También, si $f : Y \to X$ es propia, entonces es cerrada, ya que en un espacio localmente compacto un subconjunto es cerrado si y sólo si su intersección con cualquier compacto es compacto.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, y así toda n-variedad es localmente compacta también. En particular, las superficies de Riemann son localmente compactas.

El lema siguiente se usará en el resultado principal de esta sección.

Lema 2.6 *Sean X, Y espacios localmente compactos. Si $p : Y \to X$ es una aplicación propia y discreta, entonces:*

(1) La fibra $p^{-1}(x)$ es finita para cada punto $x \in X$.

(2) Si $x \in X$ y V es una vecindad de $p^{-1}(x)$, entonces existe una vecindad U de x con $p^{-1}(U) \subseteq V$.

DEMOSTRACIÓN. (1): Para cada $x \in X$, la fibra $p^{-1}(x) \subseteq Y$ es discreta, y como p es propia y $\{x\} \subseteq X$ es compacto, entonces la fibra $p^{-1}(x)$ es compacta, y como es discreta, entonces es finita.

(2): Podemos suponer que V es abierto. Así, $Y - V$ es cerrado y como p es cerrada por la observación después de (2.5), entonces $A := p(Y - V) \subseteq X$ es cerrado. Claramente $x \notin A$ ya que $p^{-1}(x) \subseteq V$. Así, $U := X - A$ es abierto y $x \in U$. Más aún, $p^{-1}(U) \subseteq V$, ya que si $y \in p^{-1}(U)$ y $y \notin V$ entonces $y \in Y - V$ y así $p(y) \in A$ en contradicción con $y \in p^{-1}(U)$, es decir $p(y) \in U = X - A$. Q.E.D.

El teorema siguiente es el resultado principal de esta sección. Nótese que las únicas propiedades que se usan en su demostración son: Los espacios involucrados son localmente compactos y la función $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, propio y discreto. Así que la conclusión es cierta en esta generalidad. Recordamos primero la siguiente definición.

Definición 2.7 Una función continua $p : Y \to X$ entre espacios topológicos, se llama una *aplicación cubriente* si es suprayectiva y cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U \subseteq X$, tal que su preimagen

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$$

es la unión disjunta de abiertos $V_\alpha \subseteq Y$, tales que la restricción $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo de V_α en U para cada α. En particular, p es un homeomorfismo local. También diremos que Y es un *espacio cubriente* de X.

Teorema 2.8 *Sea $p : Y \to X$ una aplicación holomorfa propia, no constante y no ramificada entre superficies de Riemann. Entonces p es una aplicación cubriente.*

DEMOSTRACIÓN. Por (2.2) p es discreto, y así para cualquier $x \in X$, por el lema (2.6)(1) $p^{-1}(x)$ es un conjunto finito. Escribamos $p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ con $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$.

Por (2.3) p es un homeomorfismo local y así para cada $j = 1, \ldots, n$ existe una vecindad abierta W_j de y_j y una vecindad abierta U_j de x tal que $p|_{W_j} : W_j \to U_j$ es un homeomorfismo. Restringiendo los conjuntos si hiciera falta, podemos suponer que los W_j son disjuntos dos a dos.

Entonces, $W_1 \cup \cdots \cup W_n$ es una vecindad abierta de $p^{-1}(x)$, y por (2.6)(2) existe una vecindad abierta U de x tal que $p^{-1}(U) \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_n$. De hecho podemos tomar $U \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$ ya que cada U_i es vecindad de x e intersectando el U original con $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ se tiene una vecindad de x contenida en ese U y p^{-1} respeta inclusiones.

Ahora, sean $V_j := W_j \cap p^{-1}(U)$ y obsérvese que como los W_j son disjuntos, los V_j también lo son. Más aún,

$$V_1 \cup \cdots \cup V_n = \left(W_1 \cap p^{-1}(U)\right) \cup \cdots \cup \left(W_n \cap p^{-1}(U)\right)$$

$$= (W_1 \cup \cdots \cup W_n) \cap p^{-1}(U) = p^{-1}(U)$$

ya que $p^{-1}(U) \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_n$.

Finalmente, como los $p|_{W_j} : W_j \to U_j$ son homeomorfismos, entonces

$$p|_{W_j} \cap p^{-1}(U) : V_j = W_j \cap p^{-1}(U) \to U_j \cap U = U$$

son homeomorfismos también ya que como $W_j \cap p^{-1}(U) \subseteq W_j$ y $p|_{W_j}$ es homeomorfismo, entonces la imagen directa preserva inclusiones y así

$$p\left(W_j \cap p^{-1}(U)\right) = p(W_j) \cap p\left(p^{-1}(U)\right) = U_j \cap U = U$$

ya que $U \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n$, es decir, $U \subseteq U_j$ para cada j. Q.E.D.

2.2 Propiedades homotópicas de las aplicaciones cubrientes

Tomando en cuenta el resultado principal de la sección anterior, en ésta comenzamos el estudio de algunas de las propiedades topológicas de las aplicaciones cubrientes.

Primero, se definen los conceptos de curvas homótopas, y se introduce el grupo fundamental de un espacio topológico, estudiándose algunas de sus propiedades. Varios ejemplos ilustrarán los conceptos anteriores.

Posteriormente, se estudian algunas propiedades homotópicas de los espacios cubrientes, incluyendo el levantamiento de curvas y el teorema de monodromía.

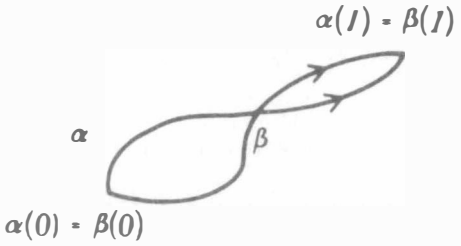
Definición 2.9 Una *trayectoria* en un espacio topológico X es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$. Al punto $\alpha(0) \in X$ se le llama el *extremo inicial* de la trayectoria α, y el punto $\alpha(1) \in X$ es el *extremo final* de α.



Al intervalo unitario también lo denotaremos por $I = [0,1]$. Pensaremos a la variable $t \in [0,1]$ como al *tiempo*, y al valor $\alpha(t) \in X$ como la posición de una partícula que se mueve en el espacio X, al tiempo t.

Una trayectoria $\alpha : [0,1] \to X$ se llama *cerrada* si $\alpha(0) = \alpha(1)$. También diremos que α es un *lazo* en X.

Si ahora consideramos trayectorias α y β en X que tengan el mismo extremo inicial y el mismo extremo final, la idea intuitiva de deformar contínuamente la trayectoria α en la trayectoria β, es considerar una *familia continua* de trayectorias $H_t : [0,1] \to X$, parametrizadas por $t \in [0,1]$, que comienza en α y termina en β, es decir $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$ (ver figura siguiente):



Estas ideas se formalizan como sigue:

Definición 2.10 Sean α, $\beta : [0,1] \to X$ dos trayectorias en X tales que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Una *homotopía* de α a β es una función continua

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

que satisface:

(i) $H(s,0) = \alpha(s)$ para toda $s \in [0,1]$
(ii) $H(s,1) = \beta(s)$ para toda $s \in [0,1]$
(iii) $H(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$ para toda $t \in [0,1]$
(iv) $H(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$ para toda $t \in [0,1]$.

Nótese que si definimos, para cada $t \in [0,1]$, las funciones $H_t : [0,1] \to X$ como $H_t(s) := H(s,t)$, entonces para cada $t \in [0,1]$ se tienen trayectorias H_t en X que comienzan en x_0 y terminan en x_1, por (iii) y (iv). Más aún, $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$ por (i) y (ii). Así, la definición anterior efectivamente recupera la idea intuitiva de deformación continua de trayectorias.

Usaremos la notación $\alpha \simeq \beta$ para denotar una homotopía entre α y β.

Lema 2.11 *Sea X un espacio topológico y sean a, b dos puntos de X. La relación de homotopía entre trayectorias de a a b en X, es una relación de equivalencia.*

A la clase de equivalencia de una trayectoria α en X la denotaremos por $[\alpha]$.

DEMOSTRACIÓN. (1): Claramente la relación de homotopía es reflexiva.

(2): Simetría: Sean $\alpha \simeq \beta$ trayectorias homotópicas en X, y consideremos una homotopía $H : I \times I \to X$ entre α y β.

Definamos $G : I \times I \to X$ como $G(s,t) := H(s, 1-t)$. Claramente G es continua, $G(0,t) = H(0,1-t) = a$ y $G(1,t) = H(1,1-t) = b$, y $G(s,0) =$

$H(s,1-0) = H(s,1) = \beta(s)$ y $G(s,1) = H(s,1-1) = H(s,0) = \alpha(s)$, es decir, $G : \beta \simeq \alpha$ es una homotopía.

(3): Transitividad: Supongamos que $F : \alpha \simeq \beta$ y $G : \beta \simeq \gamma$ son homotopías. Definamos $H : \alpha \simeq \gamma$ como sigue:

$$H(s,t) := \begin{cases} F(s,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(s,2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Claramente H es continua y es una homotopía de α a γ. Q.E.D.

El lema siguiente nos será útil para obtener ciertas homotopías:

Lema 2.12 *Sea $\alpha : I \to X$ una trayectoria y $\phi : I \to I$ una función continua tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$. Entonces $\alpha \simeq \alpha \circ \phi$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H : I \times I \to X$ dada por $H(s,t) := \alpha\big((1-t)s + t(\phi(s))\big)$ (esencialmente, dentro del paréntesis tenemos al segmento de recta que une a s con $\phi(s)$. Esto es posible porque I es convexo).

Claramente H es continua y además:

(i) $H(0,t) = \alpha(0)$

(ii) $H(1,t) = \alpha((1-t)\cdot 1 + t\cdot\phi(1)) = \alpha(1-t+t) = \alpha(1)$

(iii) $H(s,0) = \alpha(s)$

(iv) $H(s,1) = \alpha(\phi(s)) = \alpha \circ \phi(s)$.

Y así $H : \alpha \simeq \alpha \circ \phi$. Q.E.D.

A continuación veremos cómo podemos operar con trayectorias en X.

Definición 2.13 Sean $\alpha : a \to b$ y $\beta : b \to c$ trayectorias en X.

(i) La *trayectoria producto* de a a c está dada por

$$\alpha \cdot \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

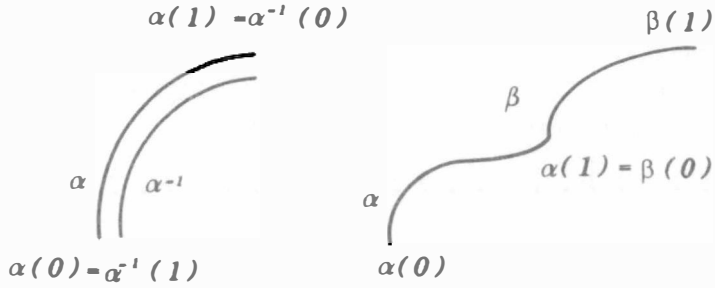
(ii) La *trayectoria inversa* a α está dada por

$$\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$$

Claramente $\alpha \cdot \beta : a \to c$ y $\alpha^{-1} : b \to a$ (ver figura siguiente):

Obsérvese que la trayectoria producto primero recorre la curva α al doble de velocidad y luego recorre la curva β también al doble de velocidad. La trayectoria inversa de α recorre la misma curva pero en sentido inverso.

Nótese que para poder definir el producto de dos trayectorias en X, se necesita que el extremo final de una coincida con el extremo inicial de la otra. Esta condición se tiene siempre en el caso trivial cuando las trayectorias son cerradas, i.e., cuando se consideran lazos en X.



Definición 2.14 Denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de clases de homotopía de lazos en X con punto base $x_0 \in X$. Veremos a continuación que este conjunto es de hecho un grupo, llamado el *grupo fundamental* de X.

Proposición 2.15 *Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un punto. Si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ son las clases de homotopía de dos lazos en X, se define $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha \cdot \beta]$. Con esta operación $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, la operación está bien definida ya que si $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$ entonces claramente $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta'$.

El neutro del grupo es $[x_0]$ donde $x_0 : I \to X$ es la trayectoria constante $x_0(t) := x_0$. Se verifica fácilmente que $\alpha \cdot x_0 \simeq \alpha \simeq x_0 \cdot \alpha$.

La inversa de $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ es $[\alpha^{-1}]$, ya que $\alpha \cdot \alpha^{-1} \simeq x_0$.

La asociatividad de la operación es consecuencia de $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \simeq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Q.E.D.

Dada una función continua $f : X \to Y$ y un punto $x_0 \in X$, sea $y_0 = f(x_0) \in Y$. La función f induce

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

dada por $f_*[\alpha] := [f \circ \alpha]$.

Proposición 2.16 $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *es un homomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. La función f_* está bien definida ya que si $\alpha \simeq \alpha'$ entonces $f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha'$, porque si $H : I \times I \to X$ es una homotopía entre α y α', entonces $G(s,t) := f \circ H(s,t)$ es una homotopía entre $f \circ \alpha$ y $f \circ \alpha'$.

Finalmente, si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces $f_*([\alpha] \cdot [\beta]) = f_*[\alpha] \cdot f_*[\beta]$ ya que $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$. Q.E.D.

Proposición 2.17 *Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones continuas e $id : X \to X$ la función identidad. Entonces*

(i) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(ii) $id_* = id$

Es decir, π_1 es un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos con punto base a la categoría de grupos.

DEMOSTRACIÓN. (i): Si $[\alpha] \in \pi_1(X)$ entonces

$$(g \circ f)_*[\alpha] = [g \circ f \circ \alpha] = g_*[f \circ \alpha] = g_* \circ f_*[\alpha]$$

(ii) es inmediato. Q.E.D.

Corolario 2.18 *Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : Y \to X$ la inversa de f. Entonces $g \circ f = id$ y $f \circ g = id$, y el resultado se sigue de la proposición anterior. Q.E.D.

El corolario anterior nos dice que el grupo fundamental de un espacio topológico es un invariante que nos puede ayudar a distinguir espacios no homeomorfos (cuando los grupos fundamentales no son isomorfos), y así se ha traducido un problema topológico a uno algebraico que en principio pudiera ser más tratable.

Obsérvese que el grupo fundamental de un espacio X depende del punto base elegido. Si $x_0, x_1 \in X$ son dos puntos base, y si $\gamma : I \to X$ es una trayectoria de x_0 a x_1, entonces γ induce un *isomorfismo*

$$\phi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$

dado por: $\phi_\gamma[\alpha] := [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma]$.

Nótese que el isomorfismo anterior no es natural, en el sentido de que depende de la trayectoria γ entre x_0 y x_1. Sin embargo, si $\gamma \simeq \gamma'$ son dos trayectorias homotópicas de x_0 a x_1, entonces $\phi_\gamma = c \cdot \phi_{\gamma'} \cdot c^{-1}$ donde $c = [\gamma \cdot \gamma'^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$, es decir, los isomorfismos son iguales salvo un automorfismo interno (conjugación).

Ejemplo 1: $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = 0$.

En efecto, sea $[\alpha] \in \pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$, entonces α es nulhomotópica, i.e., la podemos contraer al punto base. La homotopía está dada por:

$$H(s,t) := (1-t) \cdot \alpha(s) + t \cdot 0 = (1-t) \cdot \alpha(s)$$

Ejemplo 2: En general, cualquier espacio convexo tiene grupo fundamental trivial.

Ejemplo 3: $\pi_1(S^1, x_0) \approx \mathbb{Z}$.

Un isomorfismo está dado por

$$\phi[\alpha] := \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\alpha \frac{1}{z}\, dz = n(\alpha, 0)$$

es decir, $\phi[\alpha]$ es el índice de la curva α alrededor del origen $0 \in \mathbb{C}$.

La función ϕ está bien definida por el Teorema de Cauchy, y claramente es un isomorfismo.

Ejemplo 4: Si $T = S^1 \times S^1$ es el toro, entonces $\pi_1(T, x_0) \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Este ejemplo es consecuencia del ejemplo anterior y del siguiente resultado general:

Proposición 2.19 *Sean X, Y espacios topológicos con puntos base x_0 y y_0 respectivamente. En el espacio producto $X \times Y$ consideremos el punto base (x_0, y_0). Entonces, existe un isomorfismo $\pi_1(X \times Y) \approx \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y)$, definamos $[\alpha_1] := [pr_1 \circ \alpha] \in \pi_1(X)$ donde $pr_1 : X \times Y \to X$ es la proyección sobre el primer factor. Similarmente se define $[\alpha_2]$.

El isomorfismo deseado está dado por $\psi[\alpha] := ([\alpha_1], [\alpha_2])$. Q.E.D.

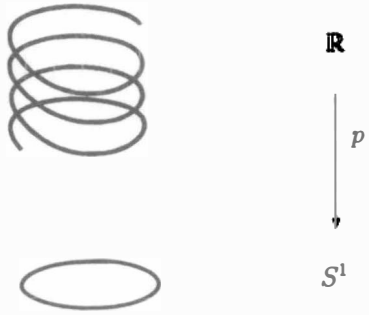
Espacios cubrientes. En la sección anterior recordamos la definición de espacio cubriente (2.7). Veremos a continuación cómo este concepto contiene la condición suficiente para que el levantamiento de curvas del espacio base X al espacio cubriente $\widetilde{X}$ sea siempre posible. Primero veamos algunos ejemplos, además de los provistos por el teorema (2.8), de espacios cubrientes.

Ejemplo 1: Sean $X = S^1$ y $\widetilde{X} = \mathbb{R}$. Entonces, la aplicación $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) := \exp(2\pi i t)$ es una aplicación cubriente.

(i) Claramente p es suprayectiva.

(ii) Al espacio base S^1 lo podemos cubrir con los abiertos $U_1 := S^1 - (1, 0)$ y $U_2 := S^1 - (-1, 0)$. La preimagen $p^{-1}(U_1)$ es la unión disjunta de los intervalos abiertos ajenos $(n - 1/2, n + 1/2)$ cada uno de ellos homeomorfo, mediante p, a U_1. Similarmente, la preimagen $p^{-1}(U_2)$ es la unión de los conjuntos $(n, n + 1)$, cada uno de ellos homeomorfo a U_2.

Pensaremos a esta función transformando a $\mathbb{R}$ como una espiral arriba de S^1:



Ejemplo 2: Generalizando el ejemplo anterior se tiene:

$$p : \mathbb{R}^n \to S^1 \times \cdots \times S^1$$

dada por $p(t_1, \ldots, t_n) := (\exp(t_1), \ldots, \exp(t_n))$ es una aplicación cubriente.

Es interesante observar que para el caso $n = 2$, la aplicación cubriente anterior

$$p : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$$

es de hecho el epimorfismo canónico $\pi : \mathbb{C} \to T \simeq S^1 \times S^1$ de $\mathbb{C}$ en el *toro* T una vez identificado éste con $S^1 \times S^1$.

Ejemplo 3: Si $n \geq 1$ es un entero, sea $p_n : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) := z^n$. Esta es una aplicación cubriente. Cada punto de S^1 es cubierto n veces.

Ejemplo 4: La aplicación $p : [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,1] \times S^1$ dada por $p(s,t) := (s, \exp(2\pi i t))$ es cubriente, por el ejemplo (1).

Ejemplo 5: Un ejemplo de una aplicación holomorfa, no constante y no ramificada (por lo tanto un homeomorfismo local) que ***no es una aplicación cubriente*** es la siguiente: Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{C}$, y sea $p : D \to \mathbb{C}$ la inclusión.

Claramente p es un homeomorfismo local, pero no es cubriente ya que los puntos $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ no tienen una vecindad U en $\mathbb{C}$ tal que $p^{-1}(U) = \bigcup V_j$ con V_j abiertos en D disjuntos y homeomorfos, mediante p, a U; esto es porque $p^{-1}(U) = U \cap D \neq U$.

Uno de los resultados más importantes de esta sección es:

Teorema 2.20 (Levantamiento de Curvas) *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente. Dada una curva $\alpha : I \to X$ y cualquier punto $y_0 \in \tilde{X}$ tal que $p(y_0) = \alpha(0)$, entonces existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$ de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = y_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{U_\lambda\}$ una familia de abiertos que cubren a X y que tienen la propiedad requerida por la definición de espacio cubriente. Entonces los abiertos $p^{-1}(U_\lambda)$ cubren I.

Sea $\epsilon > 0$ el número de Lebesgue de esta cubierta de I, es decir, si $A \subseteq I$ es cualquier conjunto y $\text{diam}(A) < \epsilon$, entonces existe un abierto U_λ tal que $A \subseteq p^{-1}(U_\lambda)$.

Escojamos entonces un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \epsilon$, y sean $t_k := k/n \in I$ para $0 \leq k \leq n$. Entonces $p[t_{k-1}, t_k] \subseteq U_{\lambda_k}$ para algún índice λ_k.

El levantamiento $\tilde{\alpha}$ lo construiremos recursivamente levantando α a curvas únicas $\tilde{\alpha}_k : [0, t_k] \to \tilde{X}$ tales que $\tilde{\alpha}_k|_{[0,t_{k-1}]} = \tilde{\alpha}_{k-1}$.

(1): Para $k = 0$, se define $\tilde{\alpha}_0(0) = y_0$.

(2): Supongamos que $\tilde{\alpha}_k$ está definida y es única con las propiedades requeridas. Construiremos $\tilde{\alpha}_{k+1}$, única con las propiedades deseadas.

Considerando al extremo final $\tilde{\alpha}_k(t_k) \in \tilde{X}$, como p es cubriente, y $\alpha_k(t_k) \in U_{\lambda_{k+1}}$, sea U la componente de $p^{-1}(U_{\lambda_{k+1}}) \subseteq \tilde{X}$ que contiene a $\tilde{\alpha}_k(t_k)$. Nótese que cualquier extensión α_{k+1} debe mandar $[t_k, t_{k+1}]$ en U ya que $[t_k, t_{k+1}]$ es arco-conexo.

Ahora como $p|_U : U \to U_{\lambda_{k+1}}$ es un homeomorfismo, entonces existe una única función $\rho : [t_k, t_{k+1}] \to U$ tal que $p \circ \rho = \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]}$. Se define:

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(s) := \begin{cases} \tilde{\alpha}_k(s) & 0 \leq s \leq t_k \\ \rho(s) & t_k \leq s \leq t_{k+1} \end{cases}$$

Entonces, por definición, $\tilde{\alpha}_{k+1}$ extiende a $\tilde{\alpha}_k$, y es un levantamiento de $\alpha|_{[0,t_{k+1}]}$ porque $p \circ \rho = \alpha|_{[t_k, t_{k+1}]}$. Más aún, $\tilde{\alpha}_{k+1}$ es única con las propiedades deseadas por la unicidad de ρ. Q.E.D.

Obsérvese que en la demostración del teorema anterior sólo se usó el hecho de que p es un homeomorfismo local. Para el teorema siguiente también se necesita esa condición únicamente.

Teorema 2.21 (Teorema de Monodromía Abstracto) *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente. Sean $\alpha \simeq \beta : x_0 \to x_1$ trayectorias homótopas en X, y sea $y_0 \in \tilde{X}$ un punto cualquiera. Si $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son levantamientos a $\tilde{X}$ de α y β respectivamente, con extremo inicial y_0, entonces $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ y $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H : I \times I \to X$ una homotopía entre α y β. Sea $\{U_\lambda\}$ una familia de abiertos que cubren a X y que tienen la propiedad requerida por la definición de espacio cubriente. Entonces, los abiertos $H^{-1}(U_\lambda)$ cubren $I \times I$.

Como en el teorema anterior, sea $\epsilon > 0$ el número de Lebesgue de la cubierta $H^{-1}(U_\lambda) \subseteq I \times I$. Escojamos números naturales m y n tales que $(1/m)^2 + (1/n)^2 < \epsilon^2$.

Consideremos dos particiones

$$0 = s_0 < \cdots < s_m = 1 \quad \text{y} \quad 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$$

del intervalo I en subintervalos de longitud $1/m$ y $1/n$ respectivamente.

Como los rectángulos $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}] \subseteq I \times I$ tienen diámetro $((1/m)^2+(1/n)^2)^{1/2} < \epsilon$, entonces existe un abierto U_{ij} tal que $H([s_i, s_{i+1}]\times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_{ij}$.

Levantaremos la homotopía H a una homotopía $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ recursivamente como en el teorema anterior.

(1): Se define $\tilde{H}(0,0) := y_0$.

(2): Supongamos definida $\tilde{H}$ en una unión conexa U de los rectángulos de la partición de $I \times I$. Veremos que podemos extender $\tilde{H}$ a cualquier rectángulo adyacente a esta unión U. Sea R_{ij} un rectángulo adyacente a U, y sea $w \in R_{ij} \cap U$. Sea $H(R_{ij}) \subseteq U_{ij}$ y sea V la componente de $p^{-1}(U_{ij})$ que contiene a $\tilde{H}(w) \in X$. Como $p|_V : V \to U_{ij}$ es un homeomorfismo, se extiende $\tilde{H} : U \to \tilde{X}$ a $\tilde{H} : U \cup R_{ij} \to \tilde{X}$ como $\tilde{H}|_{R_{ij}} := p^{-1}|_{U_{ij}} \circ H$.

Como las curvas $\tilde{H}_t$ son levantamientos de las curvas H_t, y como $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$, por la unicidad (2.20), se tiene que $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\alpha}(s)$ y $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}(s)$.

Más aún, la curva $\gamma(t) := \tilde{H}(1,t)$ es una trayectoria en $p^{-1}(\alpha(1))$ de $\tilde{\alpha}(1)$ a $\tilde{\beta}(1)$ ya que $\tilde{H}(1,0) = \tilde{\alpha}(1)$ y $\tilde{H}(1,1) = \tilde{\beta}(1)$, y $p(\tilde{H}(1,t)) = H(1,t) = x_1 = \alpha(1) = \beta(1)$.

Ahora, si U_λ es un abierto en X tal que $\alpha(1) \in U_\lambda$, entonces como $p^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_i V_i$ donde los V_i son abiertos disjuntos y homeomorfos, mediante p, a U_λ, entonces cada punto de $p^{-1}(x_1)$ está en una componente diferente de $p^{-1}(U_\lambda)$. En otras palabras, $p^{-1}(x_1)$ tiene la topología discreta, y como γ es una trayectoria en él, entonces γ tiene que ser constante. Se sigue que $\gamma(t) = \gamma(0) = \gamma(1)$, i.e., $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Q.E.D.

Corolario 2.22 *Sean $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ y $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in X$. Entonces, el morfismo $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}] \in \pi_1(\tilde{X})$ tales que $[p \circ \tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\beta}] \in \pi_1(X)$.

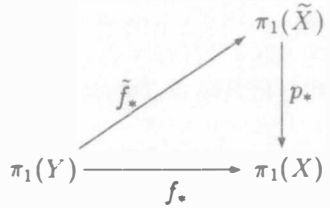
Entonces, los lazos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ en $\tilde{X}$ son levantamientos de los lazos $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$ y $\beta := p \circ \tilde{\beta}$ en X, respectivamente. Y como $[\alpha] = [\beta]$, i.e., $\alpha \simeq \beta$ entonces por (2.21) se tiene que $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$. Q.E.D.

Hemos visto, en (2.20), que las aplicaciones cubrientes levantan curvas de X a $\tilde{X}$, en forma única. El resultado siguiente nos da una condición necesaria y suficiente para que una función con codominio X se pueda levantar a $\tilde{X}$.

Teorema 2.23 *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente, y sea Y un espacio topológico conexo y localmente arco-conexo. Sea $f : Y \to X$ una función continua, y consideremos puntos arbitrarios $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, tales que $f(y_0) = x_0 = p(\tilde{x}_0)$.*

Entonces, existe un levantamiento $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$, de f, único tal que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, si y sólo si $f_*\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

DEMOSTRACIÓN. (1): La existencia de un levantamiento $\tilde{f}$, implica la existencia del diagrama conmutativo de grupos:



es decir, $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$, y por (2.22) p_* es inyectiva, y así

$$f_*\pi_1(Y) = p_* \circ \tilde{f}_*\pi_1(Y) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X})$$

(2): Recíprocamente, dado $y \in Y$, un levantamiento $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ de f se define de la forma siguiente: Sea $\alpha : I \to Y$ una trayectoria de y_0 a y. Entonces, $f \circ \alpha$ es una curva en X con punto inicial x_0. Sea $\tilde{\alpha}$ el levantamiento a $\tilde{X}$ de $f \circ \alpha$ con punto inicial $\tilde{x}_0$. Se define $\tilde{f}(y) := \tilde{\alpha}(1) \in \tilde{X}$. Entonces:

(i): $\tilde{f}$ está bien definida: En efecto, si $\alpha \simeq \beta$ son dos curvas en Y de y_0 a y, entonces $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ son dos curvas en X de x_0 a $f(y)$. Entonces, por el teorema de Monodromía (2.21) $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ y tienen el mismo extremo final, i.e., $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

Ahora, si $\alpha \not\simeq \beta$, considerando el lazo $\alpha \cdot \beta^{-1}$ en (Y, y_0) y su clase de homotopía en $\pi_1(Y, y_0)$, por hipótesis $f_*[\alpha \cdot \beta^{-1}] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, i.e., existe

una clase $[\gamma] \in \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p_*[\gamma] = [f_*(\alpha \cdot \beta^{-1})] = [f_*(\alpha)] \cdot [f_*(\beta)]^{-1}$, i.e., si levantamos la curva $(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)^{-1}$ de X a $\widetilde{X}$, resulta una curva cerrada basada en x_0, y así $\widetilde{(f \circ \alpha)}(1) = \widetilde{(f \circ \beta)}(1)$, i.e., $\tilde{f}$ está bien definida.

(ii): Claramente $p \circ \tilde{f}(y) = p(\tilde{\alpha}(1)) = f \circ \alpha(1) = f \circ \alpha(1) = f(y)$, i.e., $p \circ \tilde{f} = f$.

(iii): Sólo resta probar que $\tilde{f}$ es continua: Sea $y \in Y$, y sea V un abierto que contiene a $\tilde{f}(y) \in \widetilde{X}$. Queremos un abierto W que contenga a $y \in Y$ tal que $\tilde{f}(W) \subseteq V$.

Ahora, como p es un homeomorfismo local, podemos escoger vecindades abiertas V' de $\tilde{f}(y)$ en $\widetilde{X}$ y U de $p\tilde{f}(y) = f(y)$ en X tales que $p|_{V'} : V' \to U$ sea un homeomorfismo. Restringiendo V si hiciera falta, podemos suponer $V = V'$.

Como f es continua y Y es localmente arco-conexo, existe una vecindad arco-conexa W de $y \in Y$ tal que $f(W) \subseteq U$.

Probaremos ahora que $\tilde{f}(W) \subseteq V$: Sea $z \in W$ un punto cualquiera, y sea $\gamma : y \to z$ una trayectoria cualquiera en $W \subseteq Y$. La curva $f \circ \gamma$ está en $f(W) \subseteq U \subseteq X$, y va de $f(y)$ a $f(z)$.

Consideremos el levantamiento $\widetilde{f \circ \gamma}$ a $\widetilde{X}$, con punto inicial $\tilde{f}(y)$ de la curva anterior.

Obsérvese que como $(p|_V)^{-1} \circ f \circ \gamma$ es una curva en $V \subseteq \widetilde{X}$ con punto inicial $(p|_V)^{-1} \circ f \circ \gamma(0) = (p|_V)^{-1} f(y) = \tilde{f}(y)$, ya que $p \circ \tilde{f} = f$, entonces por unicidad de los levantamientos de curvas (2.24) se tiene que $\widetilde{f \circ \gamma} = (p|_V)^{-1} \circ (f \circ \gamma)$.

Finalmente, si $\alpha : y_0 \to y$ es una curva en Y, considerando la curva $f \circ \alpha$ en X de x_0 a $f(y)$, y su levantamiento a $\widetilde{X}$ con punto inicial $\widetilde{x_0}$, se tiene que la curva producto: $\widetilde{(f \circ \alpha)} \cdot \widetilde{(f \circ \gamma)} = \widetilde{(f \circ \alpha)} \cdot ((p|_V)^{-1} \circ f \circ \gamma)$ es un levantamiento de $(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \gamma)$ con punto inicial $\tilde{x}_0$, y así $\tilde{f}(z) := \widetilde{(f \circ \alpha)} \cdot ((p|_V)^{-1} \circ f\gamma)(1) = (p|_V)^{-1} \circ f\gamma(1) = \tilde{f}(1) \in V$, i.e., $\tilde{f}(W) \subseteq V$. Q.E.D.

La unicidad del levantamiento $\tilde{f}$ es clara de la demostración del teorema, pero también es consecuencia del siguiente resultado. Nótese, sin embargo, que en la demostración del resultado siguiente sólo se usa el hecho de que p es un homeomorfismo local entre espacios Hausdorff.

Proposición 2.24 (Unicidad de Levantamientos) *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un homeomorfismo local entre espacios Hausdorff. Sea Y un espacio conexo y $f : Y \to X$ una función continua.*

Si $g_1, g_2 : Y \to \widetilde{X}$ son dos levantamientos de f con respecto a p, y $g_1(y_0) = g_2(y_0)$ para algún punto $y_0 \in Y$, entonces $g_1 = g_2$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T := \{y \in Y : g_1(y) = g_2(y)\}$, entonces $y_0 \in T$, i.e., $T \neq \emptyset$.

Mostraremos que T es *abierto y cerrado* en Y, y como Y es conexo, entonces necesariamente $T = Y$, y así $g_1 = g_2$ en todo Y.

(1): T es *cerrado* ya que es la imagen inversa de la diagonal $\Delta \subseteq X \times X$ bajo la función continua $(g_1, g_2) : Y \to X \times X$ dada por $(g_1, g_2)(y) := (g_1(y), g_2(y))$, y Δ es cerrada porque Y es Hausdorff.

(2): T es *abierto*, ya que si $z \in Y$, sea $x = g_1(z) = g_2(z) \in \widetilde{X}$. Como p es un homeomorfismo local, existe una vecindad U de $x \in \widetilde{X}$ tal que bajo p es homeomorfa a una vecindad V de $p(x) = f(z) \in X$.

Ahora como g_1 y g_2 son continuas, entonces $g_1^{-1}(U)$, $g_2^{-1}(U) \subseteq Y$ son abiertos, y contienen a z y por lo tanto existe un abierto W, por ejemplo $W = g_1^{-1}(U) \cap g_2^{-1}(U)$ de Y, que contiene a z, y es tal que $g_i(W) \subseteq U$.

Finalmente como $p|_U : U \to V$ es un homeomorfismo, y $g_i(W) \subseteq U$, y $f = p \circ g_i$, entonces $p|_U \circ g_i|_W = p \circ g_i|_W = f|_W$, y así $g_i|_W = (p|_U)^{-1} \circ f|_W$.

Se sigue que $g_1|_W = (p|_U)^{-1} \circ f|_W = g_2|_W$, i.e., $W \subseteq T$, con W un abierto de Y, y así T es abierto. Q.E.D.

El resultado siguiente es importante para el desarrollo subsecuente de la teoría, en particular para el estudio de las aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann.

Teorema 2.25 *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente con X y $\widetilde{X}$ Hausdorff y X conexo por trayectorias. Entonces, para cualesquiera puntos $x_0, x_1 \in X$ las preimágenes $p^{-1}(x_0)$ y $p^{-1}(x_1)$ tienen la misma cardinalidad.*

DEMOSTRACIÓN. Como X es conexo por trayectorias, existe una curva $\gamma : I \to X$ de x_0 a x_1. Si $y \in p^{-1}(x_0)$ es un punto cualquiera, por (2.20) existe un único levantamiento $\widetilde{\gamma} : I \to \widetilde{X}$ de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = y$.

Definamos una función $\phi : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ como sigue: Si $y \in p^{-1}(x_0)$ se define $\phi(y) := \widetilde{\gamma}(1)$. Obsérvese que $\widetilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_1)$ ya que $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ y así $x_1 = \gamma(1) = p(\widetilde{\gamma}(1))$.

Por la unicidad (2.20) del levantamiento de curvas, la función ϕ está bien definida y es inyectiva.

Una inversa de ϕ está dada como sigue: Sea $z \in p^{-1}(x_1)$ y considérese a la curva $\gamma^{-1} : x_1 \to x_0$ en X y consideremos su levantamiento $\widetilde{(\gamma^{-1})}$ a $\widetilde{X}$ que comienza en z. Se define $\psi : p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$ como $\psi(z) := \widetilde{(\gamma^{-1})}(1)$.

Para ver que ϕ es suprayectiva probaremos que $\phi \circ \psi = 1$. En efecto, si

$z \in p^{-1}(x_1)$, como claramente $(\widetilde{\gamma^{-1}}) = \tilde{\gamma}^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\phi \circ \psi(z) &= \phi\left((\widetilde{\gamma^{-1}})(1)\right) = \phi\left(\tilde{\gamma}^{-1}(1)\right) = \phi\left(\tilde{\gamma}(1-1)\right) \\ &= \phi(\tilde{\gamma}(0)) = \phi(y) = \tilde{\gamma}(1) = z. \qquad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

Definición 2.26 Con la notación del teorema anterior, si $p : \tilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente, a la cardinalidad del conjunto $p^{-1}(x)$, $x \in X$, se le llama el *número de hojas* del espacio cubriente $\tilde{X}$. Este cardinal puede ser infinito por supuesto.

En la situación del teorema (2.25) anterior, si además los espacios $\tilde{X}$ y X son localmente compactos, y la aplicación p es propia y discreta, entonces por (2.6)(1) las fibras $p^{-1}(x)$, $x \in X$, son conjuntos finitos. Este será el caso que más nos interese ya que nosotros estaremos tratando con superficies de Riemann.

Nótese que la biyección ϕ construída en el teorema anterior depende en general de la curva γ. Así, no existe, en general, una forma canónica de contar globalmente las hojas de un espacio cubriente.

Ejemplo. Sea $X = \tilde{X} = S^1 = \{(r,\theta) : r = 1, \text{ y } \theta \in \mathbb{R}\}$ (en coordenadas polares). Para cualquier entero $n \in \mathbb{Z}$, la función

$$p_n : S^1 \to S^1 \qquad \text{dada por} \qquad p_n(1,\theta) := (1, n\theta)$$

es una aplicación cubriente si $n \neq 0$, y enrolla el círculo n veces alrededor de sí mismo. Es decir, es una aplicación cubriente de n hojas.

El resultado siguiente nos da un método para calcular el grupo fundamental de un espacio X cuando se tiene un cubriente simplemente conexo de X y se tiene una idea geométrica de la fibra o imagen inversa del punto base de X.

Teorema 2.27 *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente con $\tilde{X}$ simplemente conexo. Sea $F := p^{-1}(x_0)$ la preimagen del punto base de X. Entonces, existe una biyección $\phi : \pi_1(X, x_0) \to F$ dada por $\phi[\alpha] := \tilde{\alpha}(1)$, donde $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α.*

DEMOSTRACIÓN. Primero obsérvese que ϕ está bien definida ya que, por (2.20), dada α existe su levantamiento único $\tilde{\alpha}$, y por (2.21) si $\alpha \simeq \beta$ entonces $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.

La inversa de ϕ se define como sigue: Sea $x \in F$ un punto, y definamos $\psi : F \to \pi_1(X, x_0)$ como $\psi(x) := [p \circ \gamma]$ donde γ es una trayectoria en $\widetilde{X}$ de $\tilde{x}_0$ a x.

Obsérvese que como $\widetilde{X}$ es simplemente conexo γ siempre existe y cualesquiera dos tales trayectorias son homótopas.

También, como $\tilde{x}_0$, $x \in F$ entonces $p \circ \gamma(0) = x_0 = p \circ \gamma(1)$, es decir, $p \circ \gamma$ es en efecto un lazo en X, y así $[p \circ \gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ está bien definida. Claramente $\psi \circ \phi[\alpha] = \psi(\tilde{\alpha}(1)) = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]$, i.e., $\psi \circ \phi = id$. Similarmente $\phi \circ \psi = id$. Q.E.D.

2.3 Aplicaciones cubrientes ramificadas

En esta sección se generaliza el concepto de aplicación cubriente para incluir el caso cuando se tiene una aplicación holomorfa ramificada, propia y no constante entre superficies de Riemann.

Comenzamos con las siguientes observaciones:

Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann (que puede ser ramificada). Entonces, el conjunto de *puntos de ramificación* $B \subseteq \widetilde{X}$ de p es cerrado y discreto.

Más aún, como p es propia y por lo tanto cerrada por la observación después de (2.5), el conjunto $A := p(B) \subseteq X$ también es cerrado y discreto. Llamaremos a A el conjunto de *valores críticos* de p.

Ahora, si $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann, sean $B \subseteq \widetilde{X}$ y $A = p(B)$ los puntos de ramificación y valores críticos de p respectivamente.

Como A es cerrado entonces $p^{-1}(A) \subseteq \widetilde{X}$ también lo es. Claramente $B \subseteq p^{-1}(A)$. Se sigue que los complementos:

$$\widetilde{X}' := \widetilde{X} - p^{-1}(A) \quad \text{y} \quad X' := X - A$$

son abiertos, y así, son superficies de Riemann.

Más aun, la restricción $p : \widetilde{X}' \to X'$ es *no ramificada* ya que $\widetilde{X}' = \widetilde{X} - p^{-1}(A) \subseteq \widetilde{X} - B$, y así por el teorema (2.8), $p|_{\widetilde{X}'} : \widetilde{X}' \to X'$ es una aplicación cubriente.

También, como X' es conexo por trayectorias ya que X lo es, entonces por la observación después de (2.28) el cubriente $\widetilde{X}'$ tiene un número finito de hojas $n := p^{-1}(x)$, para toda $x \in X'$. Así, cada punto $c \in X'$ es tomado por p exactamente n veces.

Para poder decir lo mismo para los valores críticos $c \in A \subseteq X$ tenemos que considerar las multiplicidades:

Definición 2.28 Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación holomorfa propia y no constante. Diremos que p *toma el valor* $c \in X$, *contando multiplicidades,* m *veces*, si

$$m = \sum_{y \in p^{-1}(c)} \nu_y(p)$$

El teorema siguiente generaliza el teorema (2.25) al caso ramificado.

Teorema 2.29 *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann. Entonces, existe un número natural n tal que p toma cada valor $c \in X$, contando multiplicidades, exactamente n veces.*

DEMOSTRACIÓN. Con la notación anterior, sean $B \subseteq \widetilde{X}$ y $A := p(B) \subseteq X$ el conjunto de puntos de ramificación de p y el conjunto de valores críticos de p respectivamente.

Sean $X' := X - A \subseteq X$ y $\widetilde{X}' := \widetilde{X} - p^{-1}(A) \subseteq \widetilde{X}$, y sea $n :=$ número de hojas de la aplicación cubriente no ramificada $p : \widetilde{X}' \to X'$.

Así, cada $c \in X'$ es tomado por p exactamente n veces. Ahora, si $c \in A = p(B)$ es un valor crítico de p, como p es discreta, entonces $p^{-1}(c)$ es un conjunto finito (2.6), digamos $p^{-1}(c) = \{y_1, \ldots, y_r\} \subseteq \widetilde{X}$, y sea $k_j := \nu(p, y_j)$ la multiplicidad de p en y_j, para $1 \leq j \leq r$.

Por (1.16), existen vecindades abiertas (que podemos elegir disjuntas) $U_j \subseteq \widetilde{X}$ de y_j y $V_j \subseteq X$ de c, tales que para cada $x \in V_j - \{c\}$ se tiene $k_j = \#p^{-1}(x) \cap U_j$, para $1 \leq j \leq r$.

Ahora, por (2.6)(2) como $U_1 \cup \cdots \cup U_r$ es una vecindad de $p^{-1}(c) = \{y_1, \ldots, y_r\}$, entonces existe una vecindad V de $c \in X$ tal que $p^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_r$.

De hecho, como las V_j son vecindades de c, podemos escoger la vecindad V de c tal que $V \subseteq V_1 \cap \cdots \cap V_r$, y $p^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_r$.

Así, para cada $x \in V \cap X'$ se tiene que $x \in V_j$ para toda j, y como $x \in X'$ entonces $x \neq c$ y así $\#p^{-1}(x) \cap U_j = k_j$. Ahora, como $p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(V)$ entonces

$$p^{-1}(x) = p^{-1}(x) \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_r) = \big(p^{-1}(x) \cap U_1\big) \cup \cdots \cup \big(p^{-1}(x) \cap U_r\big)$$

con los U_j disjuntos. Se sigue que

$$\#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(x) \cap U_1 + \cdots + \#p^{-1}(x) \cap U_r = k_1 + \cdots + k_r.$$

Ahora, como $x \in X'$, entonces por la observación después de (2.26) $p^{-1}(x) =$ número de hojas de la cubierta $p : \widetilde{X}' \to X' = n$.

Consecuentemente, $n = k_1 + \cdots + k_r$, es decir, el valor crítico $c \in A \subseteq X$ es tomado n veces ya que

$$n = k_1 + \cdots + k_r = \nu(p, y_1) + \cdots + \nu(p, y_r) = \sum_{y_j \in p^{-1}(c)} \nu(p, y_j) \qquad \text{Q.E.D.}$$

Definición 2.30 Una aplicación holomorfa, propia y no constante $p : \widetilde{X} \to X$ entre superficies de Riemann, se llama una *aplicación cubriente holomorfa de n hojas* si n es el entero del teorema anterior.

Nótese que aquí el uso del término *cubriente* ha sido generalizado para incluir el caso ramificado. Si queremos enfatizar que una cierta aplicación cubriente lo es en el sentido usual, lo diremos explícitamente.

Un corolario interesante del teorema anterior es:

Corolario 2.31 *Si X es cualquier superficie de Riemann compacta, entonces toda función meromorfa no constante $f : X \to \mathbb{P}^1$ tiene el mismo número de ceros y polos, contando sus multiplicidades.*

DEMOSTRACIÓN. $f : X \to \mathbb{P}^1$ es una aplicación holomorfa, no constante y propia ya que X es compacta (2.5).

El conjunto de polos de f es $f^{-1}(\infty)$, y su conjunto de ceros es $f^{-1}(0)$. Por el teorema (2.29), tomando en cuenta multiplicidades

$$\sum_{y \in f^{-1}(\infty)} \nu_y(f) = \sum_{y \in f^{-1}(0)} \nu_y(f) \qquad \text{Q.E.D.}$$

A continuación veremos algunos ejemplos de aplicaciones cubrientes ramificadas o no ramificadas.

Ejemplo 1: Sea $k \geq 2$ un entero y consideremos la función: $p_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $p_k(z) := z^k$.

Entonces, por el ejemplo (1) de (1.17), p_k es una aplicación holomorfa cuyo único punto de ramificación es $0 \in \mathbb{C}$. Así

$$p_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad \text{donde} \quad \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$$

es una aplicación holomorfa no ramificada y por lo tanto un homeomorfismo local (2.3). Nótese que no sabemos si p_k es propia y así no podemos usar el teorema (2.8) para ver que $p_k|_{\mathbb{C}^*}$ es una aplicación cubriente no ramificada de k hojas. Esto lo probaremos verificándolo directamente de la definición: Sea $x \in \mathbb{C}^*$ arbitrario y sea $y \in \mathbb{C}^*$ tal que $p_k(y) = y^k = x$, i.e., y es una raíz k-ésima de x. Como p_k es no ramificado y por lo tanto un homeomorfismo local, existen vecindades V_0 de y y U_0 de x tales que $p_k : V_0 \to U_0$ es un homeomorfismo. Entonces,

$$p_k^{-1}(U_0) = V_0 \cup (\omega \cdot V_0) \cup \cdots \cup (\omega^{k-1} \cdot V_0)$$

donde ω es una raíz k-ésima de la unidad.

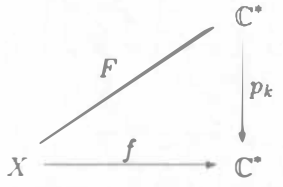
Claramente los conjuntos $V_j := \omega^j \cdot V_0$, $j = 0, \ldots, k-1$, son abiertos, disjuntos por pares, y p_k restringido a cada uno de ellos es un homeomorfismo sobre U_0.

Finalmente, como $\mathbb{C}^*$ es arco-conexo, el número de hojas de la cubierta es la cardinalidad de cualquiera de las fibras $p_k^{-1}(y)$, por ejemplo $p_k^{-1}(1) = \{1 = \omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^{k-1}\}$, y así $k =$ número de hojas.

Observación: (Las *raíces* de una función): Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa y sea $f : X \to \mathbb{C}^*$ una función holomorfa en X (i.e., que no se anula en ningún punto de X). Sea $k \geq 2$ un entero.

Queremos hallar la *raíz k-ésima de* X, i.e., queremos una función $F = \sqrt[k]{f} : X \to \mathbb{C}^*$ holomorfa y tal que $p_k \circ \sqrt[k]{f} = f$, donde $p_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es la función $p_k(z) := z^k$.

En otras palabras, lo que queremos es un *levantamiento* de f con respecto a la aplicación cubriente $p_k : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$:



Fijemos $x_0 \in X$ y sea $c \in \mathbb{C}^*$ cualquier raíz k-ésima de $f(x_0) \in \mathbb{C}^*$, i.e., $p_k(c) = c^k = f(x_0)$. Como p_k es cubriente, por (2.23) existe un único levantamiento $F : X \to \mathbb{C}^*$ de f tal que $F(x_0) = c$. Por el lema (2.4) F es holomorfa. A F se le llama una *rama holomorfa* de $\sqrt[k]{f}$.

Ejemplo 2. La aplicación $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es cubriente no ramificada con un número infinito de hojas. Es no ramificada porque es un homeomorfismo local, ya que aun cuando es periódica, si la restringimos a un abierto $V \subsetneq \mathbb{C}$ que no contenga puntos que difieran por un múltiplo entero de $2\pi i$, $\exp : V \to \exp(V) \subsetneq \mathbb{C}^*$ es un homeomorfismo.

De nuevo, no sabemos que exp sea propia, así que para probar que es cubriente tenemos que hacerlo directamente. Sea $x \in \mathbb{C}^*$ arbitrario. Como exp es suprayectiva, sea $y \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(y) = x$. Como exp es homeomorfismo local, existen vecindades V_0 de y y U de x, tales que $\exp|_{V_0} : V_0 \to U$ es un homeomorfismo. Entonces,

$$\exp^{-1}(U) = V_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

donde $V_n := 2\pi i n + V_0$.

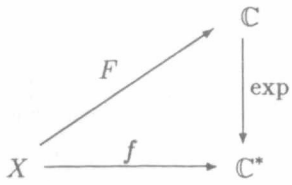
Claramente los V_n son abiertos, disjuntos dos a dos, y $\exp|_{V_n} : V_n \to U$ es un homeomorfismo.

Finalmente, como $\mathbb{C}^*$ es conexo por trayectorias, el número de hojas de este cubriente es la cardinalidad de cualquier fibra, y si $x \in \exp^{-1}(y)$ con $y \in \mathbb{C}^*$, entonces $x + 2\pi i n \in \exp^{-1}(y)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto $\#\exp^{-1}(y) = \#\mathbb{Z}$.

Observación: (El *logaritmo* de una función): Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa y sea $f : X \to \mathbb{C}^*$ una función holomorfa en X que nunca se anula.

Análogamente al ejemplo anterior, nos gustaría hallar el *logaritmo* de f, i.e., una función holomorfa $F = \log(f) : X \to \mathbb{C}$ tal que $\exp \circ \log(f) = f$

De nuevo, en términos de espacios cubrientes, lo que queremos es un *levantamiento* de f con respecto a la aplicación cubriente $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$



Fijemos un $x_0 \in X$ y sea $c \in \mathbb{C}$ cualquier solución de $\exp(c) = f(x_0) \in \mathbb{C}^*$, (exp es suprayectiva).

Como exp es cubriente, existe un único levantamiento $F : X \to \mathbb{C}$ de f tal que $F(x_0) = c$. Por (2.4) F es holomorfa. A F se le llama una *rama holomorfa* de $\log(f)$.

2.4 Cubrientes universales y transformaciones cubrientes

Hasta ahora, hemos estudiado algunas propiedades de espacios cubrientes y ejemplos de estos. En esta sección, probaremos que dada una variedad X, siempre existe un cubriente $p : \widetilde{X} \to X$. Más aún, se tiene un tal $\widetilde{X}$ simplemente conexo y consecuentemente (2.35) este cubriente $\widetilde{X}$ es cubriente de cualquier otro espacio cubriente Y de X. Por esta razón se le llamará el cubriente universal de X.

Como estamos interesados en superficies de Riemann, comenzamos esta sección probando que si X es superficie de Riemann y $p : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente de X, entonces existe una única estructura compleja en $\widetilde{X}$ tal que p resulta holomorfa.

Finalmente, para obtener más información acerca de los cubrientes de X, consideraremos los automorfismos de cada cubriente, probaremos que es un grupo y en ciertos casos interesantes, cubrientes normales o de Galois, este grupo es isomorfo al grupo fundamental de X.

Teorema 2.32 *Sean X una superficie de Riemann y $p : \widetilde{X} \to X$ un homeomorfismo local, con $\widetilde{X}$ un espacio Hausdorff.*

Entonces existe una única estructura compleja en $\widetilde{X}$ tal que p resulta una aplicación holomorfa.

DEMOSTRACIÓN. Sea (V, ζ) una carta de X y supongamos que $U \subseteq \widetilde{X}$ es un abierto no vacío tal que $p|_U : U \to p(U) \subseteq V$ es un homeomorfismo. Sin perder generalidad podemos suponer que $p(U) = V$.

Definamos $z : U \subseteq \widetilde{X} \to z(U) =: U' \subseteq \mathbb{C}$ como $z := \zeta \circ p|_U$. Como $p|_U$ y ζ son homeomorfismos, entonces z también lo es. Claramente $U' = \zeta(V) =: V'$.

Entonces, (U, z) es una carta en $\widetilde{X}$, y como p es un homeomorfismo local, las cartas (U, z) cubren $\widetilde{X}$.

Finalmente, los cambios de coordenadas en $\widetilde{X}$ son tales que: Si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ en $\widetilde{X}$, entonces $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ en X, donde $V_i = p(U_i)$. Entonces,

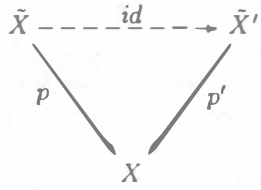
$$z_2 \circ z_1^{-1} := (\zeta_2 \circ p|_{U_2}) \circ (\zeta_1 \circ p|_{U_1})^{-1} = \zeta_2 \circ p|_{U_2} \circ (p|_{U_1})^{-1} \circ \zeta_1^{-1} = \zeta_2 \circ \zeta_1^{-1}$$

en alguna vecindad contenida en $U_1 \cap U_2$.

Como X es superficie de Riemann, los cambios de coordenadas $\zeta_2 \circ \zeta_1^{-1}$ son holomorfos y consecuentemente también los cambios $z_2 \circ z_1^{-1}$ lo son. Así, $\widetilde{X}$ es una superficie de Riemann con este atlas complejo; $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación holomorfa ya que si (U, z) y (V, ζ) son cartas en $\widetilde{X}$ y X respectivamente, tales que $p(U) = V$, entonces la función $\zeta \circ p \circ z^{-1} : U' \subseteq$

$\mathbb{C} \to V' \subseteq \mathbb{C}$ es: $\zeta \circ p \circ z^{-1} := \zeta \circ p \circ (\zeta \circ p|_U)^{-1} = \zeta \circ \zeta^{-1} = id$, en alguna vecindad, y así es holomorfa.

La unicidad de la estructura compleja en $\tilde{X}$ tal que p resulta holomorfa es clara, ya que si $\{(W, \rho)\}$ es otro atlas complejo en $\tilde{X}$ tal que $p' : \tilde{X}' \to X$ es holomorfa, con $\tilde{X}' = \tilde{X}$, con la nueva estructura dada por $\{(W, \rho)\}$ y $p' = p$, entonces el diagrama siguiente conmuta:



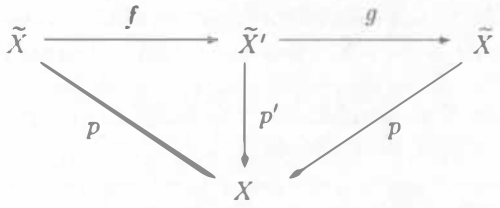
con p' y p holomorfas. Entonces $id : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ también es holomorfa, y consecuentemente $\tilde{X}$ es isomorfa a $\tilde{X}'$. Q.E.D.

Consideraremos ahora los cubrientes universales:

Definición 2.33 Una aplicación cubriente $p : \tilde{X} \to X$ se llama un *cubriente universal* de X si para cualquier otro cubriente $q : Y \to X$ con Y conexo y dados cualesquiera puntos $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $y_0 \in Y$, con $p(\tilde{x}_0) = q(y_0)$, existe una única función continua $f : \tilde{X} \to Y$ que preserva las fibras de p y q, y tal que $f(x_0) = y_0$.

Como es usual con objetos definidos por propiedades universales, si un cubriente universal de X existe, este es único salvo *isomorfismos*, i.e., si $p : \tilde{X} \to X$ y $p' : \tilde{X}' \to X$ son cubrientes universales de X, entonces existe un único homeomorfismo que preserva las fibras de p y p', $f : \tilde{X} \to \tilde{X}'$, y tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$.

En efecto, como p es cubriente universal y p' es cubriente, por definición existe una única función $f : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ tal que el triángulo izquierdo en el diagrama siguiente conmuta:



Invirtiendo los papeles de p y p', existe una única función $g : \widetilde{X}' \to \widetilde{X}$ tal que el triángulo de la derecha en el diagrama anterior conmuta.

Así, la función $g \circ f$ hace conmutar el triángulo externo, y como p es cubriente universal y claramente la identidad $id_{\widetilde{X}}$ también hace conmutar ese triángulo, por unicidad se tiene que $g \circ f = id_{\widetilde{X}}$.

Similarmente $f \circ g = id_{\widetilde{X}'}$. Q.E.D.

Los resultados siguientes serán usados para demostrar la existencia de cubrientes universales de variedades conexas.

Lema 2.34 *Si X es una variedad, $\widetilde{X}$ es Hausdorff, y $p : \widetilde{X} \to X$ es un homeomorfismo local que levanta curvas, entonces p es cubriente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera y consideremos $p^{-1}(x_0) =: \{y_j\}_{j \in J}$. Sea U una vecindad abierta de x_0 que es homeomorfa a una bola de $\mathbb{R}^n$; aquí n es la dimensión de la variedad X. Sea $f : U \to X$ la inclusión.

Para cada $j \in J$ existe un levantamiento $\widehat{f}_j : U \to \widetilde{X}$ de $f : U \to X$ tal que $\widehat{f}_j(x_0) = y_j$. Defínanse $V_j := \widehat{f}_j(U) \subseteq \widetilde{X}$. Entonces,

(i) Los V_j son abiertos disjuntos

(ii) $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$

(iii) $p|_{V_j} : V_j \to U$ es un homeomorfismo para cada $j \in J$. Q.E.D.

Proposición 2.35 *Sean X, $\widetilde{X}$ variedades conexas con $\widetilde{X}$ simplemente conexa. Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente, entonces es un cubriente universal.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $q : Y \to X$ es otra aplicación cubriente, y sean $y_0 \in Y$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ tales que $q(y_0) = p(\widetilde{x}_0)$.

Queremos una función continua $f : \widetilde{X} \to Y$ tal que $p = q \circ f$, y única con la propiedad $f(y_0) = \widetilde{x}_0$.

Ahora, como $p_*\pi_1(\widetilde{X}) = 0 \subseteq q_*\pi_1(Y)$, entonces por el teorema (2.23) la función f existe con las propiedades requeridas. Q.E.D.

Usando los resultados anteriores podemos probar ahora la existencia de un cubriente universal de una variedad X.

Teorema 2.36 *Sea X una variedad conexa. Entonces existe una variedad conexa y simplemente conexa $\widetilde{X}$ y una aplicación cubriente p de $\widetilde{X}$ en X.*

Nótese que como $\widetilde{X}$ es simplemente conexa, por la proposición anterior p es de hecho el cubriente universal de X.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un punto $x_0 \in X$. Para $x \in X$ sea $\pi(x_0, x)$ el conjunto de clases de homotopía de trayectorias en X de x_0 a x.

Definamos $\widetilde{X} := \{(x,\alpha) : \ x \in X, \ \alpha \in \pi(x_0, x)\}$, y $p : \widetilde{X} \to X$ como $p(x,\alpha) := x$.

En $\widetilde{X}$ definimos una topología como sigue: Dado un punto $(x,\alpha) \in \widetilde{X}$, sea $U \subseteq X$ una vecindad abierta, conexa y simplemente conexa de x.

Definamos el conjunto $[U,\alpha] := \{(y,\beta) : \ y \in U, \ \beta = [u \cdot v]\}$, donde $u : x_0 \to x$ es una trayectoria en X tal que su clase de homotopía es $\alpha = [u]$ y $v : x \to y$ es una trayectoria en U (recuérdese qu U es conexo). Como U es simplemente conexo entonces β es independiente de la elección de la trayectoria v. La familia $\{[U,\alpha]\}$ es una base para una topología en $\widetilde{X}$:

(i): Claramente todo punto de $\widetilde{X}$ está en al menos uno de los básicos $[U,\alpha]$.

(ii): Si $(z,\gamma) \in [U,\alpha] \cap [V,\beta]$ entonces $z \in U \cap V$ y así, existe una vecindad abierta, conexa y simplemente conexa de x, $W \subseteq U \cap V$. Se sigue que $(z,\gamma) \in [W,\gamma] \subseteq [U,\alpha] \cap [V,\beta]$.

La función $p : \widetilde{X} \to X$ es un homeomorfismo local (en particular, es continua) ya que para cualquier $[U,\alpha]$ básico se tiene que $p|_{[U,\alpha]} : [U,\alpha] \to U$ es claramente un homeomorfismo.

El espacio $\widetilde{X}$ es Hausdorff ya que dados $(x,\alpha) \neq (y,\beta) \in \widetilde{X}$ entonces: $x \neq y$ y en este caso los podemos separar en X, ó $x = y$ pero $\alpha \neq \beta$; en este último caso, sea $U \subseteq X$ una vecindad abierta, conexa y simplemente conexa de x. Entonces, $[U,\alpha] \cap [U,\beta] = \emptyset$ ya que de lo contrario existiría un (z,γ) en la intersección, y si $w : x \to z$ es una trayectoria en U y $\alpha = [u]$, $\beta = [v]$, entonces $\gamma = [u \cdot w] = [v \cdot w]$ y por lo tanto $[u] = [v]$, i.e., $\alpha = \beta$, una contradicción.

El espacio $\widetilde{X}$ es conexo y p levanta curvas: En efecto, sea $u : I \to X$ una curva arbitraria tal que $u(0) = x_0$. Para cada $s \in I$ sea $u_s : I \to X$ la curva dada por $u_s(t) := u(st)$, así la curva u_s recorre la parte de la curva u correspondiente al segmento $[0,s]$.

Ahora, si v es una curva cerrada en X tal que $v(0) = x_0 = v(1)$, entonces la función $\widehat{u} : I \to \widetilde{X}$ dada por $\widehat{u}(t) := (u(t), [v \cdot u_t])$ es continua y claramente es un levantamiento de u con punto inicial $\widehat{u}(0) = (u(0), [v \cdot u_0]) = (x_0, [v])$.

Se sigue, del lema (2.34), que $p : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente, y de la demostración del teorema (2.32) se sigue que $\widetilde{X}$ es una variedad.

Finalmente, $\widetilde{X}$ es simplemente conexo ya que si $w : I \to \widetilde{X}$ es una curva cerrada con $w(0) = w(1) = (x_0, \epsilon)$ y $\epsilon = [x_0]$ la clase de homotopía de la curva constante en x_0, entonces $u := p \circ w$ es una curva cerrada en X con $u(0) = u(1) = x_0$. Ahora, si $\widetilde{u}$ es el levantamiento de u a $\widetilde{X}$ con punto inicial $\widetilde{u}(0) = (x_0, \epsilon)$, entonces por la unicidad de los levantamientos se tiene que $\widetilde{u} = w$. Se sigue que $\widetilde{u}(1) = (x_0, [u]) = w(1) = (x_0, \epsilon)$, y así $[u] = \epsilon = [x_0]$, es decir, $u \simeq x_0$, i.e., u es nulhomótopa y así, por el Teorema de Monodromía, $\widetilde{u} = w$ también lo es. Q.E.D.

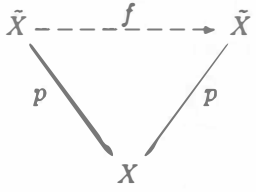
El teorema anterior muestra la existencia de cubrientes (universales) de una variedad. Existen teoremas de existencia de cubrientes de otros espacios que no sean necesariamente variedades, pero nosotros sólo estaremos interesados en variedades donde el teorema de existencia es fácil de probar.

Corolario 2.37 *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es cubriente universal de la variedad conexa X, entonces $\widetilde{X}$ es simplemente conexa.*

DEMOSTRACIÓN. Dada X variedad conexa, por el teorema anterior existe Y simplemente conexa y $q : Y \to X$ cubriente universal. Por unicidad de los cubrientes universales (2.43), se sigue que $\widetilde{X}$ es homeomorfa a Y. Q.E.D.

Una vez probada la existencia de cubrientes, para estudiarlos más a fondo es necesario introducir transformaciones entre ellos.

Definición 2.38 Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un cubriente. Una *transformación cubriente* de p es un homeomorfismo $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ que preserva las fibras de p, i.e., tal que el diagrama siguiente conmute:



El conjunto de transformaciones cubrientes de p, $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) := \mathrm{Aut}(p : \widetilde{X} \to X)$ es un *grupo* con la composición de transformaciones como operación.

Ejemplo 1: Como $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, entonces $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es cubriente universal.

El grupo de transformaciones cubrientes es:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{C}^*) \approx \{\tau_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \text{ donde } \tau_n(z) := z + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

En efecto, si $n \in \mathbb{Z}$ y τ_n es la traslación por $2n\pi i$, entonces $\exp \circ \tau_n(z) = \exp(z + 2\pi i n) = \exp(z)$, i.e., τ_n preserva las fibras de exp. Claramente τ_n es un homeomorfismo, y así, es una transformación cubriente.

Recíprocamente, si $\sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$, entonces $\exp \circ \sigma(0) = \exp(0) = 1$ y así existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\sigma(0) = 2\pi i n$. Y como $\tau_n(0) = 2\pi i n$ también, entonces $\sigma = \tau_n$. Obsérvese que $\{\tau_n : n \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2: Sea $\Gamma := \mathbb{Z}\cdot\gamma_1 + \mathbb{Z}\cdot\gamma_2$ una retícula en $\mathbb{C}$. Entonces, la aplicación canónica $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ es cubriente universal del toro $\mathbb{C}/\Gamma$.

Ahora, para $\gamma \in \Gamma$ sea $\tau_\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la traslación $z \to z + \gamma$. Claramente τ_γ manda la retícula Γ en si misma.

Como en el ejemplo anterior se prueba que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Gamma) \approx \{\tau_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \approx \Gamma \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Definición 2.39 Una aplicación cubriente $p : \widetilde{X} \to X$ entre espacios conexos Hausdorff se llama *normal o de Galois* si dados cualesquiera par de puntos $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \widetilde{X}$ con $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$, existe una transformación cubriente $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.

Nótese que por (2.24) si una tal función f existe, entonces es única.

Ejemplo. La aplicación $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dada por $p(z) := z^k$ es cubriente de Galois ya que para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ con $p(z_1) = p(z_2)$, i.e., $z_1^k = z_2^k$, se tiene que $z_2 = \omega z_1$ con ω una raíz k-ésima de 1. Entonces, la aplicación $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dada por $f(z) = \omega z$ es transformación cubriente y satisface que $f(z_1) = z_2$.

Teorema 2.40 *Si X es una variedad conexa y $p : \widetilde{X} \to X$ es cubriente universal, entonces p es de Galois y* $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \approx \pi_1(X)$.

DEMOSTRACIÓN. (a): p es Galois: En efecto, si $y_0, y_1 \in \widetilde{X}$ son dos puntos tales que $p(y_0) = p(y_1)$, como p es cubriente universal, entonces existe una única $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ que preserva las fibras de p, y tal que $f(y_0) = y_1$. Similarmente, existe una única g, que preserva las fibras de p y tal que $g(y_1) = y_0$.

Claramente $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas, preservan las fibras de p, y $(f \circ g)(y_1) = y_1$ y $(g \circ f)(y_0) = y_0$. Por la propiedad universal de los cubrientes universales se sigue que $f \circ g = id$ y $g \circ f = id$.

(b): $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \approx \pi_1(X)$: En efecto, sean $x_0 \in X$ y $y_0 \in \widetilde{X}$ tales que $p(y_0) = x_0$. Definamos $\phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \to \pi_1(X, x_0)$ como $\phi(\sigma) := [p \circ v]$, donde $v : y_0 \to \sigma(y_0)$ es una curva en $\widetilde{X}$ (Nótese que como $\widetilde{X}$ es cubriente universal entonces es simplemente conexa (2.37), y no importa cual curva se escoja de y_0 a $\sigma(y_0)$). Claramente $p \circ v$ es una curva cerrada en X.

(i): ϕ es un homomorfismo de grupos ya que si $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ y si $v : y_0 \to \sigma(y_0)$, $w : y_0 \to \tau(y_0)$ son curvas en $\widetilde{X}$, entonces $\sigma \circ w : \sigma(y_0) \to \sigma\tau(y_0)$ es una curva en $\widetilde{X}$ y $p\circ(\sigma\circ w) = p\circ w$. Ahora, la curva necesaria para definir $\phi(\sigma\tau)$ es $v \cdot (\sigma \circ w) : y_0 \to \sigma\tau(y_0)$, y entonces: $\phi(\sigma\tau) = [p \circ (v \cdot (\sigma \circ w))] = [p \circ v] \cdot [p \circ (\sigma \circ w)] = [p \circ v] \cdot [p \circ w] = \phi(\sigma) \cdot \phi(\tau)$.

(ii): ϕ es inyectiva ya que si $\phi(\sigma) = [p \circ v_\sigma] = [p \circ v_\tau] = \phi(\tau)$, con $v_\sigma : y_0 \to \sigma(y_0)$ y $v_\tau : y_0 \to \tau(y_0)$ curvas en $\widetilde{X}$, entonces $p \circ v_\sigma \simeq p \circ v_\tau$ son curvas cerradas homótopas en X, y así por monodromía sus levantamientos tienen el mismo extremo final, i.e., $\sigma(y_0) = \tau(y_0)$, y esto para cualquier punto $y_0 \in \widetilde{X}$, es decir, $\sigma = \tau$.

(iii): ϕ es suprayectiva ya que dado $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, sean y_0, $y \in \widetilde{X}$ puntos cualesquiera tales que $p(y_0) = x_0 = p(y)$, entonces, como $\widetilde{X}$ es Galois, existe $\sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ tal que $\sigma(y_0) = y$. Sea $v : y_0 \to y = \sigma(y_0)$, claramente $\phi(\sigma) = [p \circ v] = \alpha$. Q.E.D.

Definición 2.41 Sea $p : \widetilde{X} \to X$ cubriente y sea $H \subseteq \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ un subgrupo. Dos puntos $x, x' \in \widetilde{X}$ se llaman *equivalentes módulo H* si existe $\sigma \in H$ tal que $\sigma(x) = x'$.

Claramente la relación anterior es de equivalencia.

Teorema 2.42 *Sean $q : Y \to X$ una aplicación cubriente entre variedades y $p : \widetilde{X} \to X$ el cubriente universal. Sea $f : \widetilde{X} \to Y$ la función dada por la propiedad universal de $\widetilde{X}$.*

Entonces, f es una aplicación cubriente y existe un subgrupo $H \subseteq \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$, tal que dos puntos cualesquiera $x, x' \in \widetilde{X}$ van, mediante f, al mismo punto de Y si y sólo si x y x' son equivalentes módulo H. Más aún, $H \approx \pi_1(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. (1): f es cubriente: En efecto, (i): f es homeomorfismo local, ya que si $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ es cualquier punto, $p(\tilde{x}) = s$ y $f(\tilde{x}) = z$, como p es homeomorfismo local, existen vecindades W_1 de $\tilde{x}$ y U_1 de s tales que $p|_{W_1} : W_1 \to U_1$ es un homeomorfismo.

Ahora, como q es cubriente, existe una vecindad U de s, que podemos tomar contenida en U_1, y abiertos disjuntos V_i en $\widetilde{X}$ tales que $q^{-1}(U) = \bigcup V_i$ y $q|_{V_i} : V_i \to U$ son homeomorfismos.

Denotemos por V al abierto V_i que contiene al punto z, y sea $W := p^{-1}(U) \cap W_1$. Entonces $z \in f(W) \subseteq q^{-1}(U)$, y como $f(W)$ es conexo entonces $f(W) = V$.

Finalmente, como $p|_W : W \to U$ y $q|_V : V \to U$ son homeomorfismos, entonces $f|_W : W \to V$ también lo es.

(ii): f levanta curvas: Sea $\alpha : I \to Y$ una curva con punto inicial y_0, y sea $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ un punto tal que $f(\tilde{x}_0) = y_0$. Queremos levantar α a $\tilde{X}$ con punto inicial $\tilde{x}_0$.

Como p es cubriente, la curva $q \circ \alpha$ de X se puede levantar a una curva $\widetilde{q \circ \alpha}$ en $\tilde{X}$ con punto inicial $\tilde{x}_0$.

Ahora, las curvas $f \circ (\widetilde{q \circ \alpha})$ y α en Y son levantamientos de $q \circ \alpha$ con el mismo punto inicial y_0 ya que $q \circ f \circ (\widetilde{q \circ \alpha}) = p \circ (\widetilde{q \circ \alpha}) = q \circ \alpha$. Se sigue que $f \circ (\widetilde{q \circ \alpha}) = \alpha$ y así $\widetilde{q \circ \alpha}$ es el levantamiento deseado de α. Por el lema (2.3w3) f es cubriente.

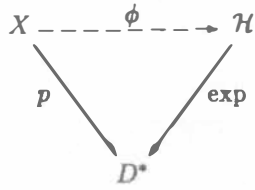
(2): Sea $H := \mathrm{Aut}(\tilde{X}/Y)$. Entonces claramente $H \subseteq \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$ es un subgrupo. Como $\tilde{X}$ es simplemente conexo, entonces $f : \tilde{X} \to Y$ es cubriente universal y así es Galois por (2.40) y además $H \approx \pi_1(Y)$.

Finalmente, como f es Galois, $f(x) = f(x')$ si y sólo si existe $\sigma \in H := \mathrm{Aut}(\tilde{X}/Y)$ tal que $\sigma(x) = x'$. Q.E.D.

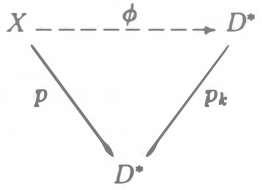
Usaremos el teorema (2.43) anterior para determinar todos los cubrientes del disco perforado: $D^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Proposición 2.43 *Sean X una superficie de Riemann y $p : X \to D^*$ una aplicación cubriente no ramificada. Entonces, se tiene uno de los casos siguientes:*

(1): Si p tiene un número infinito de hojas, entonces existe un biholomorfismo $\phi : X \to \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{C}$ es el semiplano izquierdo, tal que el diagrama siguiente conmuta:



(2): Si p tiene un número finito k de hojas, entonces existe un biholomorfismo $\phi : X \to D^*$ tal que el diagrama siguiente conmuta:



donde $p_k(z) = z^k$.

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese primero que como $\mathcal{H}$ es simplemente conexo, entonces $\exp : \mathcal{H} \to D^*$ es el cubriente universal. Entonces, existe una única aplicación holomorfa $f : \mathcal{H} \to X$ tal que $\exp = p \circ f$.

Sea $H \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{H}/D^*)$ el subgrupo asociado a f dado por el teorema (2.43) anterior. Así, $H \approx \pi_1(X)$. Se tienen los dos casos siguientes:

(1): Si $H = \{1\}$ es el grupo trivial, entonces por (2.43) $f(x) = f(x')$ si y sólo si x es equivalente a x' módulo $H = 1$, i.e., si y sólo si $x = x'$, i.e., si y sólo si f es biyectiva y por lo tanto un biholomorfismo. Entonces, se define $\phi := f^{-1} : X \to \mathcal{H}$.

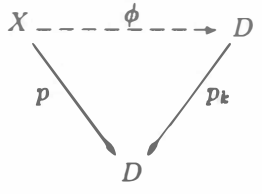
(2): Si $H \neq \{1\}$, observemos primero que $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}/D^*) = \{\tau_n : n \in \mathbb{Z},\ \tau_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\}$, donde $\tau_n : z \to z + 2\pi i n$ es una traslación. Así, para el subgrupo $H \neq 1$, existe un entero $k \geq 1$ tal que $H = \{\tau_{nk} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Sea $g : \mathcal{H} \to D^*$ el cubriente dado por $g(z) := \exp(z/k)$. Obsérvese que $g(z) = g(z')$ si y sólo si $\exp(z/k) = \exp(z'/k)$, i.e., si y sólo si $z = z' + 2\pi i k n$, i.e., si y sólo si z es equivalente a z' módulo H.

Definamos $\phi(x) := g(f^{-1}(x))$, y nótese que si $z, z' \in f^{-1}(x)$, entonces $f(z) = x = f(z')$, i.e., por (2.45) z es equivalente a z' módulo H y así por la observación previa $g(z) = g(z')$, i.e., g está bien definida. Claramente g es biyectiva y es un biholomorfismo. Q.E.D.

Usando el ejemplo anterior, podemos determinar los cubrientes del disco $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ que son no ramificados en el disco perforado D^*:

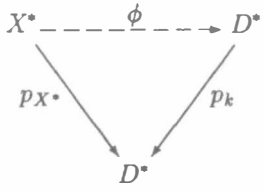
Proposición 2.44 *Sean X una superficie de Riemann y $p : X \to D$ una aplicación holomorfa, propia, no constante, y no ramificada en D^*. Entonces, existe un entero $k \geq 1$ y un biholomorfismo $\phi : X \to D$ tal que el diagrama siguiente conmuta:*



donde $p_k(z) = z^k$.

DEMOSTRACIÓN. El abierto $X^* := p^{-1}(D^*) \subseteq X$ es tal que la aplicación $p_{X^*} : X^* \to D^*$ es cubriente no ramificada.

Entonces, por el ejemplo previo (2.43), existe un biholomorfismo ϕ de X^* a D^* tal que el diagrama siguiente conmuta:



Obsérvese que $p^{-1}(0)$ consiste de un solo punto: En efecto, si suponemos que tiene al menos $n \geq 2$ puntos $b_1, \ldots, b_n \in p^{-1}(0)$, entonces existen vecindades abiertas V_i de b_i y un disco $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ tales que: $p^{-1}(D_r) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$.

Si $D_r^* := D_r - \{0\}$ entonces $p^{-1}(D^*)$ es homeomorfa a $p_k^{-1}(D_r^*) = D^*(\sqrt[k]{r})$ y así, es conexa. Ahora, como cada punto b_i es punto de acumulación de $p^{-1}(D_r^*)$, entonces $p^{-1}(D_r)$ también es conexo. Pero esto contradice la contención $p^{-1}(D_r) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Así, $p^{-1}(0) = \{b\}$, y si definimos $\phi(b) := 0$ entonces $\phi : X^* \to D^*$ se extiende a una función $\phi : X \to D$ también biholomorfa y que hace conmutar el diagrama deseado. Q.E.D.

Capítulo 3

Continuación analítica y funciones algebraicas

Aunque a estas alturas sea casi ofensivo recordarlo, cada número complejo $z \neq 0$ tiene dos raíces cuadradas y así *no* existe una función *raíz cuadrada*. En tiempos pretéritos solía hablarse de "funciones multivaluadas" para referirse a entes tales como el anterior, que por supuesto *no* son funciones estrictamente hablando.

Uno de los objetivos de Riemann y Weierstrass era dar sentido a la idea de considerar a la "raíz cuadrada" y objetos similares como una verdadera función. Para esto introdujeron, Weierstrass usando series de potencias y Riemann con un punto de vista geométrico, el concepto de *continuación analítica*. En este capítulo recordaremos este concepto y lo interpretaremos en términos de *gavillas* de gérmenes de funciones holomorfas, aun cuando este último concepto y su importancia fueron descubiertos más recientemente por Leray, Serre y Cartan.

Por supuesto que la relación $w = \sqrt{z}$, que satisface la ecuación algebraica $w^2 = z$, es un caso particular de una *función algebraica*, i.e., una función $w = f(z)$ que satisface una ecuación algebraica:

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0$$

donde los coeficientes $a_j(z)$ son funciones meromorfas de z.

En este capítulo introduciremos el concepto de *gavilla* en una superficie de Riemann, formalizamos la idea de *continuación analítica* y construímos la superficie de Riemann de una *función algebraica*. Explícitamente, veremos que esta superficie de Riemann es una cubierta ramificada de n hojas de la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$, donde n es el grado de la ecuación algebraica.

3.1 Gavillas

Sea X un espacio topológico y sea $\mathrm{Top}(X)$ la familia de abiertos de X. Podemos considerar a $\mathrm{Top}(X)$ como una *categoría* con *objetos* los abiertos $U \in \mathrm{Top}(X)$ y *morfismos* las inclusiones entre ellos, i.e., $\rho \in \mathrm{Hom}(U, V)$ si $\rho : U \hookrightarrow V$ es la inclusión.

Definición 3.1 Una *pregavilla* de grupos abelianos en X es un funtor contravariante

$$F : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Ab}$$

A los elementos $s \in F(U)$ de las imágenes de abiertos U de X se les llama *secciones* de la pregavilla F en U.

A los morfismos $F(\rho) : F(V) \to F(U)$ correspondientes a inclusiones $\rho : U \hookrightarrow V$ se les llama *restricciones*.

Usaremos la notación $F(\rho)(s) = s|_U = \rho_U^V(s) \in F(U)$, con $s \in F(V)$ para denotar a la *restricción* a U de la *sección* s de V. Esta notación proviene de los ejemplos naturales que veremos a continuación donde las secciones son funciones y las restricciones lo son en efecto.

Por supuesto que también consideraremos pregavillas de grupos, anillos, campos, espacios vectoriales, módulos, etc. según la naturaleza del problema que estemos considerando.

Antes de considerar ejemplos de pregavillas introduciremos el concepto de gavilla. Informalmente hablando, una gavilla es una pregavilla donde sus secciones están determinadas localmente:

Definición 3.2 Una *gavilla* en un espacio topológico X es una pregavilla $F : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Ab}$, tal que:

(i) Si $U \in \mathrm{Top}(X)$ es tal que $U = \bigcup_\Gamma U_j$ con $U_j \in \mathrm{Top}(X)$, entonces para cualesquiera secciones $s, s' \in F(U)$ tales que $s|_{U_i} = s'|_{U_j}$ para todas los $i, j \in \Gamma$, se tiene que $s = s'$.

(ii) Si $U = \bigcup_\Gamma U_j$ y si se tienen secciones $s_j \in F(U_j)$ que coinciden en las intersecciones, i.e., tales que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

para todas las $i, j \in \Gamma$, entonces existe una sección $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para toda $i \in \Gamma$.

Observaciones. (1): La sección global $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para toda $i \in \Gamma$ en 3.2(ii), es única con esta propiedad por la condición (3.2)(i).

(2): $F(\emptyset) = 0$ (el grupo trivial) ya que $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i$, y así para cualesquiera $s, s' \in F(\emptyset)$ se tiene que $s|_{U_i} = s'|_{U_j}$ para todos los $i, j \in \emptyset$. Consecuentemente $s = s'$ por 3.2(i). Entonces, si $F(\emptyset)$ tiene algún elemento, éste es único.

Finalmente, por 3.2(ii) $F(\emptyset)$ sí tiene elementos ya que para cualesquiera $i, j \in \emptyset$ todas las secciones $s_i \in F(U_i)$ satisfacen $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ y así por 3.2(ii) existe $s \in F(\emptyset)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$.

Ejemplo 1: La *gavilla de funciones continuas*: Sea X un espacio topológico. Para cada abierto $U \subseteq X$ sea

$$\mathcal{C}(U) := \{ f : U \to \mathbb{C} \ : \ f \quad \text{es continua} \}.$$

Claramente, con las operaciones de $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}(U)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Ahora, si $\rho : V \hookrightarrow U$ es la inclusión entre dos abiertos de X, sea

$$\rho_U^V : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$$

la restricción usual: $\rho_U^V(f) := f|_V$.

Entonces, $\mathcal{C} : \mathrm{Top}(X) \to \mathbb{C}-\mathrm{Mod}$ es una gavilla de espacios vectoriales.

Ejemplo 2: La *gavilla de funciones holomorfas*: Sea X una superficie de Riemann. Para cada abierto $U \subseteq X$ (el cual es por lo tanto también superficie de Riemann), sea

$$\mathcal{O}(U) := \{ f : U \to \mathbb{C} \ : \ f \quad \text{es holomorfa} \}.$$

Ya hemos visto en el capítulo 1 que con las operaciones de $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}(U)$ es un anillo conmutativo con 1.

Si $V \hookrightarrow U$ es la inclusión entre dos abiertos de X, sea

$$\rho : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$$

la restricción de funciones. Entonces, $\mathcal{O} : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{An}$ es una gavilla de anillos.

Ejemplo 3: La *gavilla de funciones diferenciables*: Sea X una variedad diferenciable. Para cada abierto $U \subseteq X$ el conjunto

$$\mathcal{C}^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{C} \ : \ f \quad \text{es diferenciable} \}.$$

es un anillo, y así $\mathcal{C}^\infty$ es una gavilla de anillos.

Ejemplo 4: La *gavilla de funciones meromorfas*: Sea X una superficie de Riemann. Para cada abierto $U \subseteq X$ considerado como superficie de Riemann, sea:

$$\mathcal{M}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ es meromorfa}\}.$$

Con las restricciones usuales, $\mathcal{M}$ es una gavilla de campos.

Ejemplo 5: La *gavilla de funciones holomorfas que nunca se anulan*: Si X es una superficie de Riemann y $U \subseteq X$ es un abierto, se define

$$\mathcal{O}^*(U) := \{f : U \to \mathbb{C}^* \ : \ f \quad \text{es holomorfa}\}.$$

Este conjunto es un *grupo multiplicativo* con el producto del grupo $\mathbb{C}^*$, y $\mathcal{O}^*$ resulta una gavilla de grupos abelianos.

Ejemplo 6: Similarmente se define la *gavilla de funciones meromorfas que nunca se anulan* $\mathcal{M}^*$.

Ejemplo 7: La *pregavilla constante*: Este es un ejemplo de pregavilla que en general no es gavilla: Sea X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano. Definamos

$$F_G : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Ab}$$

como:

(i) Si $\emptyset \neq U \subseteq X$, sea $F_G(U) := G$.

(ii) Si $\emptyset = U$, sea $F_G(\emptyset) := 0$ (el grupo trivial).

Los morfismos restricción son:

(i) Si $\emptyset \neq U \subseteq V$, $\rho : F_G(V) = G \to F_G(U) = G$ es la identidad $\rho = id_G : G \to G$.

(ii) Si $\emptyset = U \subseteq V$, $\rho : F_G(V) \to 0 = F_G(\emptyset)$ es el morfismo cero.

Claramente F_G es una *pregavilla*.

Si $G = 0$ es el grupo trivial, entonces F_0 es claramente una gavilla, la *gavilla constante cero*. Lo mismo si $X = \emptyset$ por la observación (2) de (3.2).

Si $G \neq 0$ y X tiene al menos dos abiertos no vacíos disjuntos, entonces F_G no es gavilla:

En efecto, sean U_1, U_2 abiertos no vacíos disjuntos de X, y sea $U := U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$. Sean g_1, g_2 en $F_G(U) = G$. Entonces, como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, se tiene que $F_G(U_1 \cap U_2) = 0$ y así las restricciones $g_1|_{U_1 \cap U_2} = 0 = g_2|_{U_1 \cap U_2}$.

Sin embargo, no existe $g \in F_G(U) = G$ tal que $g|_{U_1} = g_1$ y $g|_{U_2} = g_2$ porque $\rho_U^{U_i} = id_G : F_G(U) = G \to F_G(U) = G$ y así $g|_{U_i} = id_G(g) = g$, y si $g = g|_{U_i} = g_i$ entonces $g_1 = g_2$, una contradicción.

Ejemplo 8: La *gavilla de funciones localmente constantes*: Sea X un espacio topológico y sea G un grupo abeliano dado.

Para cada abierto $U \subseteq X$ sea

$$\widetilde{F}_G(U) := \{ f : U \to G : f \text{ es localmente constante} \}$$

(f es constante en cada componente conexa de U).

Si U es conexo no vacío, entonces $\widetilde{F}_G(U) \approx G$, y así la gavilla $\widetilde{F}_G$ merece en efecto llamarse "localmente constante". Es un ejercicio sencillo probar que con las restricciones usuales, $\widetilde{F}_G$ es una gavilla de grupos abelianos.

La fibra de una pregavilla: Sea $F : \mathrm{Top}(X) \to \mathcal{A}$ una pregavilla en un espacio topológico X. Sea $p \in X$ un punto y consideremos la familia $\mathcal{U}(p) := \{U \in \mathrm{Top}(X) : p \in U\}$ de vecindades abiertas de p en X. Obsérvese que dados U_α, $U_\beta \in \mathcal{U}(p)$ la intersección $U_\gamma := U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{U}(p)$ es tal que $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ y $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$. En otras palabras, el conjunto $\mathcal{U}(p)$ es un *conjunto dirigido* con el orden parcial: $U \leq V$ si y sólo si $U \supseteq V$.

Así, aplicando el funtor contravariante F a los objetos de $\mathcal{U}(p)$ y sus morfismos, i.e., las inclusiones $i_\alpha^\beta : U_\alpha \subseteq U_\beta$, se obtienen morfismos $\phi_\alpha^\beta := F(i_\alpha^\beta) : F(U_\beta) \to F(U_\alpha)$, que forman una *familia directa* en la categoría $\mathcal{A}$ al que denotamos $(F(\mathcal{U}(p)), \leq)$.

Definición 3.3 Al *límite directo* de la familia $(F(\mathcal{U}(p)), \leq)$ en la categoría $\mathcal{A}$ se le llama la *fibra* de la pregavilla F en el punto $p \in X$. Si este límite existe, se le denotará

$$F_p := \varinjlim F(U_\alpha).$$

Recordamos a continuación los conceptos involucrados en la definición anterior:

Límites directos. Recuérdese que un *conjunto dirigido* es un conjunto parcialmente ordenado $(\Gamma, \leq)$ tal que dados cualesquiera elementos α, β, $\in \Gamma$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Si $(\Gamma, \leq)$ es un conjunto dirigido, una *familia directa* o *filtrada* en una categoría $\mathcal{A}$, es una familia de objetos $\{M_\alpha\}$, indicada por Γ, y morfismos $\phi_\alpha^\beta : M_\alpha \to M_\beta$ para cualesquiera índices $\alpha \leq \beta$ tales que:

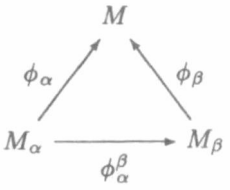
(i): $\phi_\alpha^\alpha : M_\alpha \to M_\alpha$ es el morfismo identidad: $\phi_\alpha^\alpha = id_{M_\alpha}$ para todos los $\alpha \in \Gamma$.

(ii): Y, siempre que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, se tiene que $\phi_\beta^\gamma \circ \phi_\alpha^\beta = \phi_\alpha^\gamma$, i.e., el diagrama siguiente conmuta:

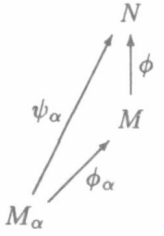
$$M_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha^\beta} M_\beta \xrightarrow{\phi_\beta^\gamma} M_\gamma.$$

Si $\{M_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ es una familia directa en una categoría $\mathcal{A}$, un ***límite directo*** de esta familia consiste de un objeto M de $\mathcal{A}$ y morfismos $\phi_\alpha : M_\alpha \to M$ para cada objeto M_α de la familia, tales que:

(a): Los morfismos ϕ_α son compatibles con los morfismos ϕ_α^β, i.e., si $\alpha \leq \beta$ entonces el diagrama siguiente conmuta:



(b): Más aún, (M, ϕ_α) tiene la *propiedad universal* siguiente: Si N es otro objeto de $\mathcal{A}$ con morfismos $\psi_\alpha : M_\alpha \to N$ que también son compatibles con los morfismos ϕ_α^β, entonces existe un ***único*** morfismo $\phi : M \to N$ que hace conmutar los triángulos del diagrama siguiente para toda $\alpha \in \Gamma$:



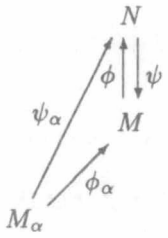
Como sucede en general con objetos definidos con propiedades universales, si el límite directo de una familia existe en la categoría $\mathcal{A}$, éste es único salvo isomorfismo. Se justifica así usar la notación

$$\varinjlim M_\alpha$$

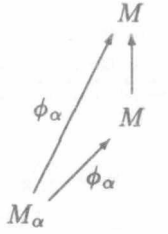
para el límite directo de una familia $(M_\alpha, \phi_\alpha^\beta)$ de $\mathcal{A}$.

Para probar lo anterior, supongamos que (M, ϕ_α) y (N, ψ_α) son límites directos de una familia $\{M_\alpha, \phi_\alpha^\beta\}$.

Entonces, existen morfismos únicos $\phi : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ y $\psi : N \to M$ tales que los diagramas siguientes conmutan (es decir, $\psi_\alpha = \phi \circ \phi_\alpha$ y $\phi_\alpha = \psi \circ \psi_\alpha$, para todos los $\alpha \in \Gamma$):



Ahora, por la propiedad universal de (M, ϕ_α), existe un único morfismo de M en M tal que el diagrama siguiente conmuta:



Y como tanto la composición $\phi \circ \psi : M \to M$ como la identidad $id : M \to M$ hacen conmutar el diagrama anterior, entonces por la unicidad en la propiedad universal se tiene que $\phi \circ \psi = id_M$.

Similarmente, $\psi \circ \phi = id_N$.

En general, la existencia del límite directo en una categoría dada tiene que probarse en cada caso específico.

En las categorías Top, Ab, An, Campos, Mod, el límite directo $\varinjlim M_\alpha$ existe, y se construye tomando el *coproducto* (unión disjunta en Top, suma directa en Ab, Mod, etc.) de los objetos M_α y luego se identifican elementos $s \in M_\alpha$, $s' \in M_\beta$, denotado $s \sim s'$, si y sólo si existe un índice $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$, y $s = s'$ en M_γ, i.e., $\phi_\alpha^\gamma(s) = \phi_\beta^\gamma(s') \in M_\gamma$. Así,

$$\varinjlim M_\alpha := \left(\coprod_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha \right) / \sim .$$

Los morfismos canónicos

$$\phi_\alpha : F(U_\alpha) \to \coprod_\alpha F(U_\alpha) \to \varinjlim F(U_\alpha) =: F_p.$$

están dados en forma natural como sigue: La primera flecha es la inclusión natural y la segunda flecha es el epimorfismo canónico. Nótese que las imágenes de los morfismos ϕ_α *generan* F_p.

Algunas veces, a la imagen $\phi_\alpha(s) \in F_p$ de una sección $s \in F(U_\alpha)$ se le llama un *germen* de s en p y lo denotamos por

$$[s] = \langle U_\alpha, s\rangle = \langle p, [s]_p\rangle = \phi_\alpha(s)$$

Dado un punto $p \in X$, a la fibra F_p de F en p podemos pensarla como sigue: Los "puntos" de F_p son los *gérmenes* $\langle p, [s]_p\rangle$ donde s es una sección de un abierto $U_\alpha \subseteq X$ que contiene a p. En los ejemplos que hemos visto $F(U_\alpha)$ es casi siempre un conjunto de funciones definidas en U_α, así podemos pensar a s como $s : U_\alpha \to \mathbb{C}$. Entonces un germen $\langle p, [s]_p\rangle$ lo podèmos pensar como una función s definida en una vecindad no especificada de p.

Ejemplo 1: Sea X una superficie de Riemann y $\mathcal{O} : \mathrm{Top}(X) \to An$ la gavilla de funciones holomorfas en X. Sea $p \in X$ un punto y consideremos la fibra $\mathcal{O}_p := \varinjlim \mathcal{O}(U)$.

Un germen $[s] = \langle U_\alpha, s\rangle \in \mathcal{O}_p$ está representado localmente por una sección $s \in \mathcal{O}(U_\alpha)$, i.e., por una función holomorfa $s : U_\alpha \to \mathbb{C}$. Entonces, eligiendo cartas (V, z) alrededor de $p \in U_\alpha$ y alrededor de su imagen $z(p) \in \mathbb{C}$, la función s tiene una expansión en serie de Taylor

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z(p))^n$$

con radio de convergencia positivo.

Obsérvese que si $[s] = \langle U_\alpha, s\rangle = \langle U_\beta, s'\rangle$, entonces existe $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ tal que $s|_{U_\gamma} = s'|_{U_\gamma}$ y consecuentemente las series de Taylor de s y s' son iguales.

Podemos entonces definir la función

$$\psi : \mathcal{O}_p \to \mathbb{C}\{z - z(p)\}$$

donde el codominio es el anillo de series de Taylor convergentes alrededor de $z(p) \in \mathbb{C}$. Es un ejercicio probar que esta función es de hecho un *isomorfismo de anillos*.

Ejemplo 2: Análogamente, si $\mathcal{M} : \mathrm{Top}(X) \to$ Campos es la gavilla de funciones meromorfas en X y $p \in X$ es un punto, entonces existe un isomorfismo de anillos

$$\psi : \mathcal{M}_p \to \mathbb{C}[[z - z(p)]]$$

de la fibra $\mathcal{M}_p$ en el anillo de series de Laurent convergentes que tienen parte principal finita:

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot (z - z(p))^n$$

con $k \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \mathbb{C}$.

A continuación probamos algunas propiedades de las fibras: Sea $[s] \in F_p$ un germen de una pregavilla F en X. Si definimos $[s](p) := s(p)$ para cualquier elección de un representante $s \in [s]$, entonces $[s](p)$ está bien definida, i.e., no depende de la elección del representante s del germen $[s]$.

En efecto, si $s \sim s'$, i.e., si $\langle U_\alpha, s\rangle = \langle U_\beta, s'\rangle$, entonces existe γ tal que $s|_{U_\gamma} = s'|_{U_\gamma}$ y $p \in U_\gamma$, se sigue que $s(p) = s'(p)$.

Proposición 3.4 *Si $F : \mathrm{Top}(X) \to$ Ab es una gavilla de grupos abelianos en un espacio topológico X y $U \subseteq X$ es cualquier abierto, entonces: $s \in F(U)$ es cero si y sólo si $\langle U, s\rangle = 0$ en todos los F_p con $p \in U$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $0 = s \in F(U)$, usando los morfismos $\phi : F(U) \to F_p$, se tiene que $0 = \phi(0) = \phi(s) = \langle U, s\rangle$.

Recíprocamente, si $0 = \phi(s) \in F_p$ para todo $p \in U$, entonces por definición de límite directo existe una vecindad U_p de p tal que $s|_{U_p} = 0$, y como $U = \bigcup_{p\in U} U_p$ y $s|_{U_p} = 0$ para todo $p \in U$, y como F es gavilla, por (3.2)(i) se sigue que $s = 0$ en U. Q.E.D.

El espacio topológico y la proyección asociados a una pregavilla. Sea $F : \mathrm{Top}(X) \to \mathcal{A}$ una pregavilla en un espacio topológico X. A esta pregavilla F le asociamos un espacio topológico $|F|$ y una función continua suprayectiva $p : |F| \to X$ de la forma siguiente:

(1): El *espacio* $|F| := \bigcup_{p\in X} F_p$ es la unión disjunta de las fibras de F.

(2): La *proyección* $p : |F| \to X$ se define como: $p(x) := x$ si $x \in X$, i.e., p manda cada fibra F_x en el punto $x \in X$.

Al conjunto $|F|$ le damos una topología especificando una base $\mathcal{B}$ para ésta, como sigue: Sea $U \subseteq X$ un abierto y sea $s \in F(U)$ una sección. Pongamos

$$[U, s] := \{\phi_x(s) = \langle U, s\rangle \in F_x \ : \ x \in U\} \subseteq |F|.$$

La base de la topología es:

$$\mathcal{B} := \{[U,s] \,:\, U \subseteq X \text{ abierto}, \ s \in F(U)\}.$$

Proposición 3.5 *Sea $F : \mathrm{Top}(X) \to \mathcal{A}$ una pregavilla.*

(1): El conjunto $\mathcal{B}$ es una base para una topología en $|F|$.

(2): Con esa topología en $|F|$, la proyección $p : |F| \to X$ es un homeomorfismo local.

DEMOSTRACIÓN. (1): Primero, todo punto $\langle p, [s]_p\rangle$ de $|F|$ está contenido en algún básico $[U,s]$ ya que $\langle p,[s]_p\rangle = \langle U,s\rangle = \rho_U(s)$ con $s \in F(U)$ y $p \in U$. Así, $\langle p,[s]_p\rangle \in [U,s]$.

Segundo, si $\langle p,[s]_p\rangle \in [U,s]\cap[U',s']$, entonces existe $[U'',s''] \in \mathcal{B}$ tal que $\langle p,[s]_p\rangle \in [U'',s''] \subseteq [U,s]\cap[U',s']$. En efecto, como $p \in U\cap U'$, $s \in F(U)$ y $s' \in F(U')$, existe un abierto $U'' \subseteq U\cap U'$ tal que $p \in U''$, y poniendo $s'' := s|_{U''} = s'|_{U''}$, se tiene que $\langle p,[s]_p\rangle \in [U'',s'']$.

(2): Para ver que $p : |F| \to X$, dada por $p : \langle x,[s]_x\rangle \mapsto x$ es un homeomorfismo local, sea $\langle x,[s]_x\rangle \in |F|$ un punto arbitrario.

Como $\langle x,[s]_x\rangle = \rho_U(s)$ con $s \in F(U)$ y $x \in U$, entonces $[U,s] \in \mathcal{B}$ y $\langle x,[s]_x\rangle \in [U,s]$. Así $[U,s]$ es un abierto de $|F|$ que contiene a $\langle x,[s]_x\rangle$ y U es un abierto de X que contiene a x.

Ahora, $p|_{[U,s]} : [U,s] \to U$ dada por $p(\langle u,[s]_u\rangle) := u$ es claramente biyectiva.

También, $p|_{[U,s]}$ es continua y abierta (ejercicio) y por lo tanto es un homeomorfismo de $[U,s]$ en U. Q.E.D

Si ahora consideramos una superficie de Riemann X, y una pregavilla F en X, para el homeomorfismo local asociado $p : |F| \to X$, sabemos (2.32) que si $|F|$ fuera Hausdorff, entonces para cualquiera de las componentes conexas de $|F|$ existiría una única estructura compleja en esa componente, i.e., sería en forma natural una superficie de Riemann, de tal forma que la restricción de p a esa componente resultaría una aplicación holomorfa no ramificada entre superficies de Riemann.

El teorema siguiente (3.7), después de una definición que rescata una propiedad esencial de las gavillas $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{M}_X$ (1.9) y (1.20), nos dice en qué caso el espacio $|F|$ es Hausdorff.

Si X es una superficie de Riemann y $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{M}_X$ son las gavillas de funciones holomorfas y meromorfas respectivamente, sabemos (1.9) y (1.20) que si $U \subseteq X$ es un abierto conexo, y por lo tanto una superficie de Riemann, y si $s, s' \in \mathcal{O}(U)$ (respectivamente, en $\mathcal{M}(U)$), son secciones tales que sus gérmenes $\langle x,[s]_x\rangle$ y $\langle x,[s']_x\rangle$ coinciden para un punto $x \in U$, entonces $s = s'$ en todo U.

Definición 3.6 Una pregavilla F en un espacio topológico X se dice que *satisface el Teorema de la Identidad* si para cualquier abierto conexo $U \subseteq X$ y secciones $s, s' \in F(U)$ tales que existe un punto $x \in U$ tal que los gérmenes $\langle x, [s]_x \rangle$ y $\langle x, [s']_x \rangle$ son iguales, entonces $s = s'$ en $F(U)$.

Teorema 3.7 *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente conexo, y sea F una pregavilla en X que satisface el Teorema de la Identidad. Entonces, $|F|$ también es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos puntos cualesquiera $[s] = \langle x, [s]_x \rangle$ y $[s'] = \langle y, [s']_y \rangle$ en $|F|$ tales que $[s] \neq [s']$. Queremos hallar vecindades disjuntas de ellos.

Caso 1: Si $p[s] = x \neq y = p[s']$ en X, entonces los gérmenes $[s]$ y $[s']$ están en fibras diferentes F_x y F_y respectivamente. Ahora, como X es Hausdorff, y $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U y V de X, tales que $x \in U$ y $y \in V$. Entonces claramente $p^{-1}(U)$ y $p^{-1}(V)$ son abiertos disjuntos de $|F|$ que contienen a $[s]$ y $[s']$ respectivamente.

Caso 2: Si $p[s] = x = p[s']$ en X, entonces los gérmenes $[s]$ y $[s']$ están en la misma fibra $F_x = p^{-1}(x)$. Veremos que los podemos separar en F_x.

Supongamos que $[s] = \langle s, U \rangle$ y $[s'] = \langle s', U' \rangle$. Sea $W \subseteq U \cap U'$ un abierto conexo tal que $x \in W$ (recordemos que X es localmente conexo). Entonces, por definición de la topología en $|F|$, (3.5), se tiene que $[W, s|_W]$ y $[W, s'|_W]$ son abiertos en $|F|$ que contienen a $[s]$ y $[s']$ respectivamente. Probaremos que de hecho, son disjuntos: Supongamos que existe $[s''] \in [W, s|_W] \cap [W, s'|_W]$. Entonces, si $p[s''] = y \in W$, se sigue que: $[s''] = \rho_y(s) = \rho_y(s')$ porque $y \in W$ y $[s''] \in [W, s|_W]$ y $[s''] \in [W, s'|_W]$.

Ahora, como F satisface el Teorema de la Identidad, se sigue que $s|_W = s'|_W$ con $W \subseteq U \cap U'$ un abierto conexo. Así los gérmenes $[s]$ y $[s']$ son iguales en F_x, en contradicción con la elección $[s] \neq [s']$. Q.E.D.

Corolario 3.8 *Si X es una superficie de Riemann y F es una pregavilla en X que satisface el Teorema de la Identidad, entonces la proyección $p : |F| \to X$ es un cubriente no ramificado de X.*

3.2 Continuación analítica

Un problema típico en matemática es el de extender una función dada a un dominio más grande de tal forma que se preserven las propiedades de la función original. En nuestro caso el problema es el siguiente: Dada f una función holomorfa en una región (abierto conexo) X del plano complejo $\mathbb{C}$, cuándo y cómo se puede encontrar una función g en un dominio $Y \supset X$ con g holomorfa y tal que $g|_X = f$. Es claro que si Y se obtiene añadiendo a X un abierto disjunto, entonces definiendo $g = f$ en X y como sea en el complemento $Y - X$, por supuesto en forma holomorfa, entonces trivialmente g extiende a f. Así pues, el caso interesante es cuando $Y \supset X$, $Y \neq X$ e Y es abierto conexo.

En esta sección, precisamos estos problemas y los extendemos al caso cuando f es una función holomorfa en una superficie de Riemann X, y en general no exigimos que $Y \supset X$ sino que pedimos una aplicación holomorfa no ramificada $p : Y \to X$. También consideramos el caso de la continuación de una función meromorfa. Sin embargo, comenzamos con el caso elemental y un ejemplo importante:

Supongamos que $f : X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa con polos p_i y ceros z_j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, y sea γ una curva cerrada rectificable en X que no pasa por los polos y ceros de f, digamos $\gamma : [0,1] \to X$. Supongamos que $\gamma \simeq 0$ (nulhomótopa en X).

Si pudiéramos definir $\log(f(z))$, este sería una primitiva de f'/f, pero entonces, si f'/f tuviera una primitiva en X, como $\gamma \simeq 0$, entonces se tendría que $\int_\gamma f'/f = 0$.

Sin embargo, esto no es cierto en general, es decir, $\log(f(z))$ no se puede definir globalmente, por lo siguiente: Ya que ningún cero o polo de f está en $\{\gamma\} = \textit{imagen de } \gamma \subseteq X$, entonces para cada $a \in \{\gamma\}$ existe un disco $B(a;\delta)$ que no contiene ceros ni polos de f. Consecuentemente, se puede definir una *rama holomorfa* de $\log(f(z))$ en $B(a;\delta)$.

Ahora, los discos $B(a;\delta)$ forman una cubierta abierta de $\{\gamma\}$, que es compacta porque γ es continua. Entonces, existe un $\epsilon > 0$ tal que los discos $B(a;\epsilon)$ cubren $\{\gamma\}$ (ϵ es el número de Lebesgue de la cubierta $B(a;\delta)$) y tal que para todo punto $a \in \{\gamma\}$ existe una rama holomorfa de $\log(f(z))$ en el disco correspondiente $B(a;\epsilon)$.

También, como γ es continua en el compacto $[0,1]$, entonces es uniformemente continua y por lo tanto para el $\epsilon > 0$ anterior, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ del intervalo $[0,1]$ tal que $\gamma[t_{j-1}, t_j] \subseteq B(\gamma(t_{j-1});\epsilon)$ para $1 \leq j \leq n$.

Sea $\log_j(f)$ una rama holomorfa de $\log(f)$ en $B(\gamma(t_{j-1});\epsilon)$, $1 \leq j \leq n$.

Obsérvese que $\gamma(t_j) \in B(\gamma(t_{j-1});\epsilon) \cap B(\gamma(t_j);\epsilon)$, $1 \leq j \leq n$. Así, podemos elegir $\log_1(f), \ldots, \log_n(f)$ tales que:

$$\begin{aligned} \log_1(f(\gamma(t_1))) &= \log_2(f(\gamma(t_1))) \\ \log_2(f(\gamma(t_2))) &= \log_3(f(\gamma(t_2))) \\ &\vdots \\ \log_{n-1}(f(\gamma(t_{n-1}))) &= \log_n(f\gamma(t_{n-1}))) \end{aligned}$$

Escribamos $\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$. Ahora, como $(\log_j)'(f) = f'/f$ en el disco $B(\gamma(t_{j-1});\epsilon)$ y como $\mathrm{Im}(\gamma_j) = \gamma[t_{j-1},t_j] \subseteq B(\gamma(t_{j-1});\epsilon)$, entonces

$$\int_{\gamma_j} f'/f = \log_j(f(\gamma(t_j))) - \log_j(f(\gamma(t_{j-1})))$$

(por el Teorema Fundamental del Cálculo), para $1 \leq j \leq n$.

Ahora, como

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f'}{f} &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f'}{f} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\log_j(f(t_j))) - \log_j(f(\gamma(t_{j-1})))\right] \\ &= \log_n(f(a)) - \log_1(f(a)) \end{aligned}$$

ya que por la propiedad telescópica de arriba, $\log_j = \log_{j+1}$, y donde $a := \gamma(0) = \gamma(1)$.

Pero entonces, por el *principio del argumento* [Conway, p.123], se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} &= \sum_{j=1}^{n} n(\gamma; z_j) - \sum_{k=1}^{m} n(\gamma; p_k) =: k \in \mathbb{Z} \\ &= (\text{índice de } \gamma \text{ en los ceros } z_j) - (\text{índice de } \gamma \text{ en los polos } p_k) \end{aligned}$$

Así, $\log_n(f(a)) - \log_1(f(a)) = 2\pi i k$, i.e., en general $\log_n f(z) \neq \log_1 f(z)$ (para $k \neq 0$), i.e., al "continuar" $\log_1$ de B_1 a $B_1 \cup B_2$ y luego a $B_1 \cup B_2 \cup B_3$, etc., al llegar a B_n ya no se tiene que $\log_1 = \log_n$. Así, $\log(f)$ no se puede definir globalmente en X.

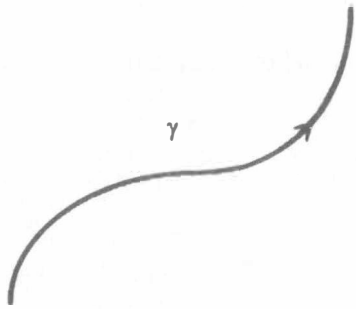
Este es uno de los problemas que deben considerarse al continuar analíticamente una función: Dar un criterio que asegure que la continuación a lo largo de una curva cerrada resulte en la misma función que comienza la continuación.

Sin embargo, el hecho "desafortunado" de que esto no siempre es así, llevó a Riemann, desde un punto de vista geométrico, al estudio de lo que hoy conocemos como *superficies de Riemann*.

Comenzamos precisando lo que entenderemos por la continuación analítica de una función a lo largo de una curva.

Continuación analítica a lo largo de una curva: Sea X una superficie de Riemann y sea $\gamma : [0,1] \to X$ una curva en X, no necesariamente cerrada. Sean $a = \gamma(0)$ y $b = \gamma(1)$.

Si queremos copiar lo que hicimos con el logaritmo en el ejemplo anterior, primero nos olvidamos de los discos en X y sólo consideramos abiertos de X y pensamos a la imagen de γ cubierta por estos abiertos:



Así, podemos pensar que para cada punto $t \in [0,1]$ se tiene un abierto $U_t \subseteq X$ tal que $\gamma(t) \in U_t$.

Supongamos que se tienen funciones holomorfas $f_t : U_t \to \mathbb{C}$ para cada t. Ahora, como $\gamma : [0,1] \to X$ es continua y los $U_t \subseteq X$ son abiertos entonces requerimos que siempre que $s, t \in [0,1]$ estén cercanos, se tenga que en la intersección $U_s \cap U_t$, o en algún abierto $W \subseteq U_s \cap U_t$ que contenga a $\gamma(t)$, las funciones f_s y f_t coincidan: En forma precisa, queremos que para cada $t \in [0,1]$ exista un $\delta > 0$ tal que si $|s - t| < \delta$ entonces $\gamma(s) \in U_t$ y las funciones (f_t, U_t) y (f_s, U_s) coincidan en un abierto $W \subseteq U_s \cap U_t$ que contenga a $\gamma(s)$.

En otras palabras, se requiere que las funciones (f_s, U_s) y (f_t, U_t) determinen el *mismo germen* en la fibra $\mathcal{O}_{\gamma(s)}$.

Si lo anterior sucede, diremos que el representante (f_1, U_1) del germen $[f_1] \in \mathcal{O}_b$, $b = \gamma(1)$, es una *continuación analítica a lo largo de la curva* γ del representante (f_0, U_0) del germen $[f_0] \in \mathcal{O}_a$, $a = \gamma(0)$.

Definición 3.9 Sea X una superficie de Riemann y sea $\gamma : [0,1] \to X$ una curva, $a = \gamma(0)$ y $b = \gamma(1)$. Un germen $\psi \in \mathcal{O}_b$ se dice que *resulta de la continuación analítica a lo largo de la curva* γ del germen $\phi \in \mathcal{O}_a$, si:

(i): Para cada $t \in [0,1]$ existen gérmenes $\phi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ tales que $\phi_0 = \phi$ y $\phi_1 = \psi$, con la propiedad:

(ii): Para cada $\tau \in [0,1]$ existe una vecindad abierta $V_\tau \subseteq [0,1]$ de τ y un abierto $U \subseteq X$ tal que $\gamma(V_\tau) \subseteq U$, y existe una función $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $[f]_{\gamma(t)} = \phi_t$ para toda $t \in V_\tau$.

Observación: Como $[0,1]$ es compacto, entonces $\psi \in \mathcal{O}_b$ es la continuación analítica de $\phi \in \mathcal{O}_a$ si y sólo si

(1): Existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$, existen abiertos $U_j \subseteq X$, $1 \leq j \leq n$, tales que $\gamma[t_{j-1}, t_j] \subseteq U_j$, y existen funciones holomorfas $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $1 \leq j \leq n$, tales que:

(2): $\phi = [f_1]_a$ y $\psi = [f_n]_b$.

(3): $f_i|_{W_i} = f_{i+1}|_{W_i}$, $1 \leq i \leq n-1$, donde W_i es la componente conexa de $U_i \cap U_{i+1}$ que contiene a $\gamma(t_i)$.

Antes de continuar, pensemos un poco acerca del ejemplo motivador: La construcción de ramas holomorfas de $\log(f(z))$ en abiertos U_j, que no contienen ceros de f (ni polos), a lo largo de una curva γ. Estas ramas las fuimos construyendo como primitivas de f'/f en esos abiertos (convexos). Ahora, si recordamos que en §2 construímos estas ramas como levantamientos de $f|_{U_j}$ con respecto al cubriente $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, entonces podemos preguntarnos por la relación entre estas dos construcciones, y la respuesta está dada por:

Teorema 3.10 *Sean X una superficie de Riemann, $\gamma : [0,1] \to X$ una curva con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Sea $p : |\mathcal{O}| \to X$ la aplicación cubriente (no ramificada) asociada a la gavilla $\mathcal{O}$ de funciones holomorfas en X.*

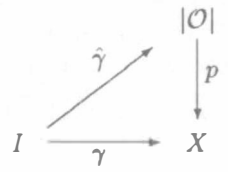
Un germen $\psi \in \mathcal{O}_b$ es la continuación analítica de un germen $\phi \in \mathcal{O}_a$ a lo largo de la curva γ, si y sólo si existe un levantamiento $\widehat{\gamma} : [0,1] \to |\mathcal{O}|$ de la curva γ tal que $\widehat{\gamma}(0) = \phi$ y $\widehat{\gamma}(1) = \psi$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi_t \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$, $t \in I := [0,1]$, la familia de gérmenes dada por la continuación analítica. Definamos

$$\widehat{\gamma} : [0,1] \to |\mathcal{O}| := \bigcup_{x \in X} \mathcal{O}_x$$

como $\widehat{\gamma}(t) := \phi_t$.

Para todo $t \in I = [0,1]$ se tiene que $p \circ \widehat{\gamma}(t) = p(\phi_t) = \gamma(t)$ por definición de $p : |\mathcal{O}| \to X$, y así, el siguiente diagrama conmuta:



Más aún, $\widehat{\gamma}$ es continua ya que si $t \in [0,1]$ y $\widehat{\gamma}(t) \in |\mathcal{O}| = \phi_t$ es su imagen, por definición de continuación analítica (3.9)(ii), existen vecindades abiertas V_t de t y U de $\gamma(t)$ tales que $\gamma(V_t) \subseteq U$. Entonces el abierto básico $[U, f] \subseteq |\mathcal{O}|$ con $f \in \mathcal{O}(U)$ es vecindad de ϕ_t y claramente $\widehat{\gamma}(V_t) \subseteq [U, f]$.

Claramente $\widehat{\gamma}(0) = \phi_0 = \phi$ y $\widehat{\gamma}(1) = \phi_1 = \psi$.

Recíprocamente, sea $\widehat{\gamma}$ un levantamiento de γ con respecto al cubriente $p : |\mathcal{O}| \to X$ con $\widehat{\gamma}(0) = \phi$ y $\widehat{\gamma}(1) = \psi$. Definamos la familia de gérmenes $\phi_t := \widehat{\gamma}(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ para $t \in [0,1]$.

(i): Claramente $\phi_0 = \phi$ y $\phi_1 = \psi$

(ii): Ahora, para $t \in [0,1]$ sea $\phi_t := \widehat{\gamma}(t) \in \mathcal{O}_{\gamma(t)}$ su imagen. Como $\widehat{\gamma}$ es continua, existen vecindades abiertas V de t y $[U, f]$ con $f \in (U)$ de ϕ_t, tales que $\widehat{\gamma}(V) \subseteq U$. Así, para todo $t \in V$ se tiene que $\gamma(t) = p \circ \widehat{\gamma}(t)$ con $\widehat{\gamma}(t) \in [U, f]$ y así $p(\widehat{\gamma}(t)) \in U$, i.e., $\gamma(V) \subseteq U$.

Más aún, como para todo $t \in V$ se tiene que $\widehat{\gamma}(t) \in [U, f]$ con $f \in \mathcal{O}(U)$, entonces $\phi_t \in [U, f]$ y entonces $f \in \mathcal{O}(U)$ es una sección que representa al germen ϕ_t, i.e., $\phi_t = [f]_{\gamma(t)}$ para todo $t \in V$. Q.E.D.

Corolario 3.11 *Por la unicidad de los levantamientos (2.24), se sigue del teorema (3.10), que si la continuación analítica de un germen ϕ existe, éste está unívocamente determinado.*

Ahora, si α y β son dos curvas en X con extremos iniciales a y extremos finales b, y si $\phi \in \mathcal{O}_a$ es un germen que se puede continuar analíticamente a lo largo de las dos curvas dadas, entonces no necesariamente (ejercicio) los gérmenes resultantes en $\mathcal{O}_b$ tienen por qué ser iguales. Sin embargo, si las curvas α y β son homótopas, entonces sí lo son:

Corolario 3.12 (Teorema de Monodromía) *Sea X una superficie de Riemann, y sean γ_0, $\gamma_1 : [0,1] \to X$ curvas homótopas de a a b.*

Si un germen $\phi \in \mathcal{O}_a$ admite continuaciones analíticas a lo largo de cada curva γ_s, $0 \leq s \leq 1$, en una homotopía de γ_0 a γ_1, entonces las continuaciones analíticas de ϕ a lo largo de γ_0 y γ_1 dan el mismo germen $\psi \in \mathcal{O}_b$.

DEMOSTRACIÓN: Por (3.7) $|\mathcal{O}|$ es Hausdorff y por (3.5) $p : |\mathcal{O}| \to X$ es un homeomorfismo local.

Ahora, como la homotopía $\gamma_s : \gamma_0 \simeq \gamma_1$, $s \in [0,1]$, es tal el germen $\phi \in \mathcal{O}_a$ se puede continuar a lo largo de cada curva γ_s, entonces por el teorema (3.10) anterior cada curva γ_s se puede levantar a una curva $\widehat{\gamma}$ en $|\mathcal{O}|$, que comienza en el punto $\widehat{\gamma}_s(0) = \phi \in \mathcal{O}_a$.

Entonces, por el Teorema de Monodromía Abstracto (2.21), los levantamientos $\widehat{\gamma}_0$ y $\widehat{\gamma}_1$ son curvas homótopas y tienen el mismo punto final $\psi = \widehat{\gamma}_0(1) = \widehat{\gamma}_1(1)$, que por el teorema (3.10) es la continuación analítica de ϕ a lo largo de γ_0 y γ_1. Q.E.D.

El corolario siguiente es la consecuencia más importante del Teorema de Monodromía anterior.

Corolario 3.13 *Sea X una superficie de Riemann simplemente conexa y sea $a \in X$ un punto. Sea $\phi \in \mathcal{O}_a$ un germen que admite una continuación analítica a lo largo de toda curva en X que comience en $a \in X$, entonces existe una única función holomorfa global $F \in \mathcal{O}(X)$ tal que $[F]_a = \phi$.*

DEMOSTRACIÓN: *Unicidad:* Si $F, F' \in \mathcal{O}(X)$ satisfacen que $[F]_a = \phi = [F']_a$, entonces existe una vecindad W de a en X, tal que para toda $x \in W$ se tiene que $F(x) = F'(x)$, y así, por el Teorema de la Identidad (1.9) para funciones holomorfas, se tiene que $F = F'$ en todo X.
Existencia: Queremos definir $F : X \to \mathbb{C}$ holomorfa. Sea pues $x \in X$ y consideremos cualquier curva $\alpha : a \to x$, la cual existe por ser X conexo. Como por hipótesis existe una continuación analítica de ϕ a lo largo de α, sea $\psi_x \in \mathcal{O}_x$ una tal continuación. Nótese que este ψ_x es único por el corolario (3.11), y más aún, como X es simplemente conexo, cualesquiera curvas de a a x son homótopas, y así, por el Teorema de Monodromía (3.12) el germen ψ_x tampoco depende de la curva $\alpha : a \to x$.

Se define $F(x) := \psi_x(x) \in \mathbb{C}$. La función F es holomorfa ya que para cualquier $x \in X$ se tiene que $F(x) = \psi_x(x)$, i.e., existe una vecindad W de x tal que $F|_W = \psi_x|_W$ con ψ_x holomorfa.

Claramente $[F]_a = \phi$. Q.E.D.

El corolario (3.13) anterior resuelve el problema de la existencia de la continuación analítica de una función local (i.e., un germen holomorfo) f en X, a todo X, en el caso cuando X es *simplemente conexa*, ya que en este caso existe una función $F \in \mathcal{O}(X)$ que coincide con f en una vecindad del punto donde está definido el germen f.

En general, cuando X no es simplemente conexa, aun cuando la continuación analítica de f (un germen en X) sea posible a lo largo de curvas con extremos iguales, no siempre se tiene monodromía, i.e., los gérmenes resultantes pueden ser diferentes (esto es lo que sucedía en el ejemplo inicial con la función $f = \log$).

El problema sigue siendo el de asociarle a un tal f en X una verdadera función $\mathcal{F}$ que tome en cuenta todas estas continuaciones analíticas de f, pero esta $\mathcal{F}$ ya no la podremos definir como la F del corolario (3.13) anterior, ya que no habiendo monodromía, F ya no sería una función, i.e., no sería univaluada.

Como veremos a continuación, (3.14), esta nueva función $\mathcal{F}$, ya no se definirá, en general, sobre X como en el caso de la función F del corolario (3.13) anterior, sino en una nueva superficie de Riemann Y, que en un cierto sentido que se precisará más adelante, nos da la *máxima superficie de Riemann* donde se puede continuar analíticamente a f.

El requerimiento en el corolario (3.13) de que F restringida a donde f está localmente definida, coincida con f, i.e., los gérmenes $[F]_a = f$ sean iguales, tendrá que relajarse, ya que en general $\mathcal{F}$ no estará definida sobre X.

La idea de la construcción de $\mathcal{F}$ es la siguiente: Como dominio Y de $\mathcal{F}$ se tomará el conjunto de todos los gérmenes de la gavilla $\mathcal{O}_X$ que sean continuaciones analíticas del germen dado $f \in \mathcal{O}_{X,a}$, $a \in X$, a lo largo de curvas en X que comienzan en a:

$$\begin{aligned} Y :&= \{(z,[f]_z) : z \in X \text{ y existe una curva } \gamma : a \to z \text{ en } X \text{ tal que } [f]_z \\ &\quad \text{es la continuación analítica de } [f]_a \text{ a lo largo de } \gamma \} \\ &\subseteq |\mathcal{O}_X| \end{aligned}$$

Después, se considera la proyección $p : |\mathcal{O}| \to X$ y se restringe a Y, obteniéndose así una aplicación holomorfa no ramificada $p : Y \to X$, dada por $p(z,[f]_z) := z$. Usando la aplicación holomorfa no ramificada $p : Y \to X$, con $Y \subseteq |\mathcal{O}_X|$, el siguiente paso es definir $\mathcal{F} : Y \to \mathbb{C}$. Esto es fácil: dado $(z,[f]_z) \in Y$ se define $\mathcal{F}(z,[f]_z) := f(z)$.

En lo que resta de esta sección precisamos estas ideas, y probamos que Y es una superficie de Riemann y $\mathcal{F}$ es una aplicación holomorfa.

Sea $p : Y \to X$ una aplicación holomorfa no ramificada entre superficies de Riemann. Sabemos que p induce un morfismo de anillos para cada $y \in Y$:

$$p^* : \mathcal{O}_{X,p(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$$

y como p es no ramificada, entonces es un biholomorfismo local y así p^* es un *isomorfismo de anillos*. Sea $p_* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,p(y)}$ el *inverso de* p^*.

Definición 3.14 Sea X una superficie de Riemann. Sean $a \in X$ un punto y $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ un germen. Una *continuación analítica* de f es una tétrada (Y,p,F,b) donde:

(i): Y es una superficie de Riemann y $p : Y \to X$ es una aplicación holomorfa no ramificada.

(ii): $F \in \mathcal{O}_Y$.

(iii): $b \in Y$ es un punto tal que $p(b) = a$.

(iv): $p_*([F]_b) = f$, donde $p_* : \mathcal{O}_{Y,b} \to \mathcal{O}_{X,p(b)=a}$ es el isomorfismo de anillos dado arriba.

La idea detrás de esta definición es que estamos extendiendo (continuando) la función local f en X por medio de la función global F en Y, de tal forma que (iv) nos dice que el germen de F, donde tiene sentido, es decir en $b \in Y$, es esencialmente el germen f dado en $a = p(b)$ (ya que p_* es isomorfismo).

Esto es lo mejor que podemos esperar al tratar de generalizar el corolario (3.13) cuando X era simplemente conexa. Ahora, como queremos que una tal continuación analítica sea la mejor (más grande) posible, definimos:

Definición 3.15 Sean X, $a \in X$, $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ como antes. Una *continuación analítica máxima* de f es una continuación analítica (Y, p, F, b) de f que "sea continuación de cualquier otra", es decir, que satisfaga la siguiente *propiedad universal*: Si (Z, q, F', b') es cualquier otra continuación analítica de f, entonces existe una única aplicación holomorfa $\phi : Z \to Y$ tal que:

(i): ϕ preserva las fibras de p y q, i.e., $p \circ \phi = q$,

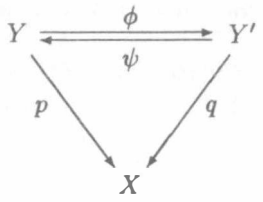
(ii): $\phi(b') = b$,

(iii): $\phi^* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Z$ es tal que $\phi^*(F) = F'$.

Lema 3.16 *Si una continuación analítica máxima existe, entonces ésta es única salvo isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: La usual para objetos definidos con propiedades universales.

Supongamos, en la notación anterior, que (Y, p, F, b) y (Y', p', F', b') son dos continuaciones analíticas máximas de $f \in \mathcal{O}_{X,a}$. Entonces, existen aplicaciones holomorfas únicas $\phi : Y \to Y'$ y $\psi : Y' \to Y$ que preservan las fibras de p y q, y tales que que $\phi(b) = b'$, $\psi(b') = b$, $\phi^*(F') = F$ y $\psi^*(F) = F'$:



Entonces, la composición $\psi \circ \phi : Y \to Y$ es holomorfa, preserva las fibras de p, y $\psi \circ \phi(b) = \psi(b') = b$, i.e., deja fija a b, además, $(\psi \circ \phi)^*(F) = \phi^* \circ \psi^*(F) = \phi^*(F') = F$.

Ahora, como la identidad $id : Y \to Y$ claramente también tiene las propiedades anteriores de $\psi \circ \phi$, entonces por unicidad en la definición (3.15), se sigue que $\psi \circ \phi = id_Y$. Similarmente, $\phi \circ \psi = id_{X'}$, y así ϕ es un biholomorfismo con inversa ψ. Q.E.D.

Antes de probar la *existencia* de una continuación analítica máxima, teorema (3.18), necesitaremos el siguiente resultado que relaciona el concepto anterior con el de continuación analítica a lo largo de una curva:

Lema 3.17 *Sean X una superficie de Riemann, $a \in X$ un punto y $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ un germen. Supongamos que existe una continuación analítica máxima (Y, p, F, b) de f. Entonces:*

Si $\alpha : [0,1] \to Y$ es una curva en Y con $\alpha(0) = b$ y $\alpha(1) =: y$, entonces el germen $g := p_*([F]_y) \in \mathcal{O}_{X,p(y)}$ es una continuación analítica de f a lo largo de la curva $\beta := p \circ \alpha : [0,1] \to X$.

DEMOSTRACIÓN: Obsérvese primero que $\beta(0) = p \circ \alpha(0) = p(b) = a$ y $\beta(1) = p \circ \alpha(1) = p(y) \in X$, y así, β es una curva en X de a a $p(y)$.

Ahora, usando el morfismo $p_* : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$, definamos para cada $t \in [0,1]$ el germen

$$\phi_t := p_*([F]_{\alpha(t)}) \in \mathcal{O}_{X,p(\alpha(t))} = \mathcal{O}_{X,\beta(t)}$$

Claramente, $\phi_0 = p_*([F]_b) = f$ por (3.14)(iv). Pongamos $g := \phi_1 = p_*([F]_y) \in \mathcal{O}_{X,p(y)}$.

Sólo resta probar la propiedad (ii) de la definición (3.9) para que g sea la continuación analítica de f a lo largo de la curva β.

Sea pues $\tau \in [0,1]$ y consideremos los puntos $\alpha(t) \in Y$ y $\beta(t) = p\alpha(t) \in X$. Como $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, existen abiertos $V \subseteq Y$ y $U \subseteq X$ vecindades de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ respectivamente, tales que $p : V \to U$ es un biholomorfismo. Sea $p' : U \to V$ la *inversa* de p.

Como $F \in \mathcal{O}_Y$ y $V \subseteq Y$ es un abierto, entonces $F|_V \in \mathcal{O}_Y(V)$ y así, el isomorfismo $(p')^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$ lleva F a $G := (p')^*(F|_V) \in \mathcal{O}_X(U)$.

Obsérvese ahora que para todo $y \in V \subseteq Y$ se tiene que $p_*([F]_y) = [G]_{p(y)}$ ya que $p_* := (p')^*$ en V.

Ahora, como $V \subseteq Y$ es abierto y $\alpha : [0,1] \to Y$ es continua y $\alpha(\tau) \in V$, entonces existe un abierto $T \subseteq [0,1]$ vecindad de τ, tal que $\alpha(T) \subseteq V$, y así $\beta(T) = p \circ \alpha(T) \subseteq p(V) = U$, i.e., $\beta(T) \subseteq U \subseteq X$.

Finalmente, para todo $t \in T$ se tiene que $[G]_{\beta(t)} = [G]_{p(\alpha(t))} = p_*([F]_{\alpha(t)}) =: \phi_t$. Q.E.D.

El resultado principal de esta sección es la existencia y unicidad de la continuación analítica máxima:

Teorema 3.18 (Continuación analítica máxima) *Sean X una superficie de Riemann, $a \in X$ un punto y $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ un germen. Entonces, existe una única continuación analítica máxima (Y, p, F, b) de f.*

DEMOSTRACIÓN: La *unicidad* salvo isomorfismos es el contenido del lema (3.16).

Existencia: Sea $Y :=$ la componente conexa de $|\mathcal{O}_X|$ que contiene al germen $f \in \mathcal{O}_{X,a}$.

Sea $p : |\mathcal{O}_X| \to X$ la proyección canónica, y denotemos también por $p : Y \to X$ su restricción a $Y \subseteq |\mathcal{O}_X|$.

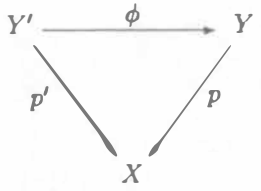
Entonces, $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local ya que $p : |\mathcal{O}_X| \to X$ lo es. Más aún, como $|\mathcal{O}_X|$ es Hausdorff, entonces Y también lo es. Entonces, por (2.32) existe una única estructura compleja en Y de tal forma que la aplicación $p : Y \to X$ resulta holomorfa.

(1): Queremos ahora definir una función $F : Y \to \mathbb{C}$ holomorfa. Esto es fácil: Como los elementos de Y son gérmenes que resultan de continuaciones analíticas de f, sus puntos son de la forma ψ_x, entonces tiene sentido definir $F(\psi_x) := \psi_x(p(\psi_x)) := \psi_x(x)$.

(2): Ahora, si $b := f \in Y$, entonces $p(b) = p(f) = a$ ya que $f \in \mathcal{O}_{X,a}$.

(3): Obsérvese ahora que para este $b = f \in Y$ se tiene que $p_*([F]_f) = f \in \mathcal{O}_{X,a}$, y así, (Y, p, F, b) es en efecto una continuación analítica de f.

(4): Para ver que en efecto es máxima, supongamos que (Y', p', F', b') es otra continuación analítica de f. Entonces, definamos la función $\phi : Y' \to Y$ en el diagrama siguiente como sigue:



Dada $y' \in Y'$, sea $p(y') = x \in X$. Consideremos entonces el germen $[F']_{y'} \in \mathcal{O}_{Y',y'}$ y su imagen $p([F']_y) \in \mathcal{O}_{X,x}$.

Ahora, si $\alpha : [0,1] \to Y'$ es una curva con $\alpha(0) = y$ (α existe por ser Y' conexo), entonces por el lema (3.17), el germen $p'_*([F']_{y'}) \in \mathcal{O}_{X,x}$ es la continuación analítica del germen $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ a lo largo de la curva $\beta := p' \circ \alpha : [0,1] \to X$ de a a x.

Ahora, por definición de Y al inicio de esta demostración, Y consiste de todos los gérmenes que se obtienen por continuación analítica de f a lo largo de curvas en X, y como $p'_*([F']_{y'})$ es uno de tales gérmenes, se tiene entonces que $p'_*([F']_{y'}) =: y \in Y$. Se define entonces $\phi : Y' \to Y$ como $\phi(y') := y$.

(i): Claramente ϕ es una función que preserva las fibras de p y p', ya que si $y' \in Y'$ entonces $\phi(y') = p'_*([F']_{y'})$ y así $p \circ \phi(y') = p \circ p'_*([F']_{y'}) = x = p'(y')$, ya que p es la proyección canónica de la fibra y $p'_*([F']_{y'}) \in \mathcal{O}_{Y,p'(y')}$.

(ii): $\phi(b') := p'_*([F']_{y'}) = f =: b$ ya que (Y', p', F', b') es una continuación analítica de f.

(iii): $\phi^*(F) = F'$ ya que $\phi^*(F) : Y' \to \mathbb{C}$ satisface que para todo $y' \in Y'$ se tiene $\phi^*(F)(y') = F \circ \phi(y') = F(p'_*([F']_{y'}))$

(iv): Es un ejercicio probar que ϕ es holomorfa. Q.E.D.

Continuación de funciones meromorfas: La continuación de gérmenes de funciones meromorfas $\phi \in \mathcal{M}_{X,a}$ se maneja en forma análoga a como hicimos para gérmenes de funciones holomorfas $f \in \mathcal{O}_{X,a}$, sólo se tiene que considerar a la gavilla $\mathcal{M}_X$ y a la aplicación $p : |\mathcal{M}_X| \to X$.

3.3 Funciones algebraicas

Como recordamos en la introducción de este capítulo, las funciones algebraicas, i.e., funciones $w = f(z)$ que satisfacen una ecuación algebraica:

$$w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \qquad (*)$$

con coeficientes $a_j(z) \in \mathbb{C}(z)$, aparecen temprano en el análisis complejo. Aparecen también cuando se consideran extensiones algebraicas de un campo dado, por ejemplo $\mathbb{C}(z)$. Más adelante (3.38) veremos que estas dos "apariciones" son en un cierto sentido la misma.

En esta sección construímos la superficie de Riemann asociada a una función algebraica dada, que en particular resultará una cubierta ramificada $\widetilde{X}$ de $\mathbb{P}^1$, de n hojas, donde n es el grado de la ecuación algebraica $(*)$; más aún, $\widetilde{X}$ resultará compacta.

Esto es tan sólo el principio del estudio de la *naturaleza algebraica* de las superficies de Riemann compactas. Más adelante probaremos que de hecho toda superficie de Riemann compacta es la superficie de Riemann asociada a una función algebraica, i.e., dada una superficie de Riemann compacta X (diferente de $\mathbb{P}^1$), existen funciones w y z en X que satisfacen un polinomio irreducible $P(z, w) = 0$ y tales que X es la superficie de Riemann asociada a la función algebraica $w = f(z)$.

Más aun, probaremos en (3.38) que existe una biyección entre el conjunto de *clases de isomorfismo de superficies de Riemann compactas* y el conjunto de *clases de isomorfismo de campos de funciones algebraicas en una variable.*

Polinomios en dos variables: Consideremos un polinomio irreducible en dos variables con coeficientes complejos $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$. Agrupando términos podemos escribir este polinomio como:

$$P(z, w) = p_0(z)w^n + p_1(z)w^{n-1} + \cdots + p_n(z)$$

donde los $p_j(z)$ son polinomios en z con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Supongamos que el grado en w de $P(z, w)$ es $n \geq 1$, de tal forma que $p_0(z) \not\equiv 0$ (i.e., no es el polinomio constante cero).

Dividiendo entre $p_0(z)$ se obtiene

$$p(w) = \frac{P(z, w)}{p_0(z)} = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z)$$

donde los $a_j(z) = p_j(z)/p_0(z) \in \mathbb{C}(z)$ son funciones racionales de z. Así,

$$p(w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) \in \mathbb{C}(z)[w]$$

es un polinomio en w con coeficientes en el campo $\mathbb{C}(z)$ de funciones racionales en z.

Obsérvese que como $P(z,w) \in \mathbb{C}[z,w] = \mathbb{C}[z][w]$, y como $p(w) \in \mathbb{C}(z)[w]$, donde $\mathbb{C}(z)$ es el *campo de fracciones* de $\mathbb{C}[z]$, entonces por el Lema de Gauss, $P(z,w)$ es irreducible si y sólo si $p(w)$ es irreducible.

Discriminante de un polinomio. Recordemos que dos polinomios $P(z,w)$ y $Q(z,w)$ en $\mathbb{C}[z][w]$ se llaman *primos relativos* si no tienen factores en común de grado ≥ 1. Escribamos

$$\begin{aligned} P(z,w) &= p_0(z)w^n + \cdots + p_n(z) \\ Q(z,w) &= q_0(z)w^m + \cdots + q_m(z) \end{aligned}$$

Supongamos que el grado en w de P es mayor o igual que el grado en w de Q. Entonces dividiendo P entre Q se obtiene:

$$P(w) = q \cdot Q(w) + r(w) \quad \text{con } q, r \in \mathbb{C}(z)[w]$$

y multiplicando por el común denominador de q y r (que es un polinomio en z) se obtiene:

$$c_0 \cdot P = Q_0 \cdot Q + R_1 \quad \text{con} \quad c_0 \in \mathbb{C}[z] \quad \text{y} \quad Q_0, R_1 \in \mathbb{C}[z,w]$$

Continuando este proceso, se obtiene:

$$\begin{aligned} c_0 P &= Q_0 Q + R_1 \\ c_1 Q &= Q_1 R_1 + R_2 \\ c_2 R_1 &= Q_2 R_2 + R_3 \\ &\vdots \\ c_{n-1} R_{n-2} &= Q_{n-1} R_{n-1} + R_n \end{aligned}$$

donde $Q_k, R_k \in \mathbb{C}[z,w]$ y $c_k \in \mathbb{C}[z]$, los grados en w de R_k decrecen y el grado en w de R_n es *cero*, i.e., R_n es un polinomio en z, i.e., la división acaba cuando el grado en w de R_n es cero.

Obsérvese que si $R_n = 0$, entonces por el teorema de factorización única se tendría que cualquier factor irreducible de R_{n-1}, de grado positivo en w, dividiría a R_{n-2}, y también a R_{n-3}, etc., y consecuentemente también sería un divisor de P y Q, lo cual es una contradicción ya que estos son primos relativos.

A R_n se le llama el *resultante* de los polinomios P y Q. Este resultante está bien definido si los $c_k \in \mathbb{C}[z]$ se eligen del menor grado posible.

Si $P(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ es un polinomio irreducible y $P_w(z,w)$ es su derivada parcial con respecto a w, al resultante de P y P_w se le llama el *discriminante* de P, y lo denotaremos por $\Delta(z)$. Es claro que el discriminante de P es una función de los coeficientes $p_j(z)$ de $P(z,w)$.

De la sucesión de igualdades que se usaron para definir el resultante de dos polinomios, es claro que el resultante $R_n(z)$ de dos polinomios P y Q puede escribirse como:

$$R = p \cdot P + q \cdot Q \quad \text{con } p, q \in \mathbb{C}[z,w]$$

Proposición 3.19 *Si $P(z,w), Q(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ son primos relativos, entonces existe sólo un número finito de valores $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que $P(z_0,w)$ y $Q(z_0,w)$ tienen una raíz w en común.*

DEMOSTRACIÓN: Si w_0 es tal que $P(z_0,w_0) = 0 = Q(z_0,w_0)$. Substituyendo en la cadena de ecuaciones en la definición de discriminante, se obtiene que $R_1(z_0,w_0) = 0, \ldots, R_{n-1}(z_0,w_0) = 0$ y $R_n(z_0) = 0$. Pero como $R_n \not\equiv 0$ entonces existe sólo un número finito de z_0 que satisfacen la ecuación $R_n(z_0) = 0$. Q.E.D.

Corolario 3.20 *Si $P(z,w)$ es un polinomio irreducible, los ceros del discriminante $\Delta(z)$ de P son los valores z_0 tales que $P(z_0,w) = 0$ tiene raíces múltiples w.*

Gérmenes de funciones definidas por un polinomio: Después de los preliminares algebraicos anteriores, regresemos ahora a la cuestión de hasta qué punto la ecuación algebraica

$$P(z,w) = p_0(z)w^n + \cdots + p_n(z) = 0$$

determina a w como una función de z, digamos $w = f(z)$.

Comenzamos excluyendo el punto ∞, los ceros del discriminante $\Delta(z)$ de P y del denominador $p_0(z)$; estos ceros son, por supuesto, un conjunto finito. Denotemos por z_j, $1 \leq j \leq m$ a estos punto excluídos, incluyendo al ∞, y sea $X' := \mathbb{P}^1 - \{z_1, \ldots, z_m\}$.

Ahora, como el grado en w de $P(z,w)$ es n y como $\Delta(z) \not\equiv 0$ para un punto z fijo, no excluído, por (3.38) la ecuación

$$P(z,w) = 0$$

no tiene raíces múltiples, i.e., tiene n raíces distintas $w_1(z), \ldots, w_n(z)$, que, por supuesto, varían con z.

A continuación veremos cómo se pueden obtener gérmenes de funciones holomorfas $w_{10}, \ldots, w_{n0}$, alrededor de cada punto no excluído z_0, que satisfacen $P(z_0, w_{j0}) = 0$.

Sea pues $z_0 = x_0+iy_0 \in X'$ un punto no excluído. Escribamos $z = x+iy$, $w = u + iv$ y $P(z,w) = U(x,y;u,v) + iV(x,y;u,v)$.

Consideremos uno de los puntos $w_j(z_0)$. Si probamos que el Jacobiano

$$\det \begin{pmatrix} U_u & U_v \\ V_u & V_v \end{pmatrix} = U_u \cdot V_v - U_v \cdot V_u \mid_{(z_0, w_j(z_0))} \neq 0$$

entonces por el teorema de la función implícita, existirá una vecindad de z_0 y una función w_{j0} definida en esa vecindad, que satisface $P(z_0, w_{j0}) = 0$.

En efecto, $P(z_0, w)$ es holomorfa en w y así, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $U_u = V_v$ y $U_v = -V_u$, y como el discriminante de P en el punto z_0 es diferente de cero, entonces la parcial $P_w = U_u + iV_u \neq 0$. Se sigue que:

$$U_u \cdot V_v - U_v \cdot V_u = U_u^2 + V_u^2 = |P_w|^2 \neq 0$$

Fácilmente se prueba que la función w_{j0} así definida satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, i.e., es holomorfa.

Hemos obtenido así n distintos gérmenes de funciones holomorfas $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ que satisfacen $P(z, w_j(z)) = 0$.

Lema 3.21 *Los gérmenes $w_1, \cdots, w_n$ obtenidos se pueden continuar analíticamente a lo largo de toda curva en $X' = \mathbb{P}^1 - \{z_j\}$ que comienza en z_0. Cada germen $w = w(z)$ obtenido en esta continuación satisface la ecuación $P(z,w) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que no fuera posible continuar algún germen $w_j(z)$ en X' a lo largo de cualquier curva que comienza en z_0, sea γ una curva en X' de z_0 a a, tal que el germen $w_j(z)$ en z_0 se puede continuar, a lo largo de γ, a todo punto b anterior a a. Ahora, eligiendo un radio s suficientemente pequeño de tal forma que el disco $B(a;s)$ esté contenido totalmente en X', entonces para todo punto $z \in B(a;s)$ existen n funciones $W = W(z) = W_l(z)$ en ese disco, que satisfacen $P(z,W) = 0$, y son todas las soluciones de esta ecuación. Escojamos b de tal forma que el arco de γ entre b y a esté enteramente contenido en $B(a;s)$. Sea $w(z)$ el germen en b que resulta de continuar analíticamente $w_j(z)$ de z_0 a b a lo largo de γ.

Como $P(z, w(z)) = 0$ ya que w resulta de la continuación de w_j, entonces $w(z)$ debe coincidir con uno de los $W_l(z)$ en todo $z \in B(b; s - |b-a|)$.

Pero claramente los gérmenes $W_l(z)$ se pueden continuar de b a a a lo largo del arco correspondiente de γ.

Por el teorema de la identidad (1.9), se sigue que como el germen inicial $w_j(z)$ en z_0 satisface $P(z, w_j(z)) = 0$, entonces cualquiera de sus continuaciones también satisface al polinomio P. Q.E.D.

Hasta ahora tan sólo hemos probado que cada germen $w_j(z)$ en $z_0 \in X'$ se puede continuar a lo largo de cualquier curva γ en X' que comienza en z_0. Por supuesto que esto no implica la independencia de la trayectoria γ, i.e., un mismo germen $w_k(z)$ en z_0 al ser continuado a lo largo de distintas curvas γ y γ' de z_0 a $a \in X'$ puede dar lugar a distintos gérmenes en a.

El paso siguiente es construir un cubriente no ramificado $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$, (y así, por (2.32), $\widetilde{X}'$ será una unión finita de superficies de Riemann) y una función holomorfa global $f : \widetilde{X}' \to \mathbb{C}$, tales que:

(i): f satisface al polinomio $P(z, w)$ dado.
(ii): f extiende globalmente a los n gérmenes $w_j(z)$.
Esto es precisamente el contenido del siguiente teorema:

Teorema 3.22 *Sea* $P(z, w) = p_0(z)w^n + p_1(z)w^{n-1} + \cdots + p_n(z) \in \mathbb{C}[z, w]$ *un polinomio irreducible de grado* n *en* w *y sea* $\Delta(z)$ *su discriminante. Sea* $X' := \mathbb{P}^1 - \{\infty,$ *ceros de* $p_0(z)$, *ceros de* $\Delta(z)\}$.

Entonces, existe un cubriente no ramificado (de n *hojas)* $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ *y una función global* $f : \widetilde{X}' \to \mathbb{C}$ *que es holomorfa en cada componente conexa de* $\widetilde{X}'$, *y que satisface:*

(i): $P(\pi'(s), f(s)) = 0$ *para todo* $s \in \widetilde{X}'$,

(ii): Si $z_0 \in \widetilde{X}'$ *y* $w_1(z), \ldots, w_n(z)$ *son los* n *gérmenes holomorfos en* z_0 *dados en (3.39), entonces existen* $s_j \in \widetilde{X}'$, $1 \leq j \leq n$, *tales que* $\pi'(s_j) = z_0$ *y tales que si* $[f]_{s_j}$ *es el germen de* f *en* s_j, *se tiene que* $\pi'_*[f]_{s_j} = w_j$ *para* $1 \leq j \leq n$.

En otras palabras, $\widetilde{X}'$ es una unión finita de superficies de Riemann y f es una función global en $\widetilde{X}'$, que es holomorfa en cada componente conexa de $\widetilde{X}'$ y que continúa analíticamente a los gérmenes w_j.

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$p(w) := \frac{P(z, w)}{p_0(z)} = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) \in \mathbb{C}(z)[w]$$

Sea $\widetilde{X}' \subseteq |\mathcal{O}_{X'}|$ el subconjunto de aquellos gérmenes $s \in \mathcal{O}_{X',z}$, $z \in X'$, que satisfacen al polinomio $p(w)$, i.e., $p(s) = 0$.

Sea $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ la restricción de la proyección canónica $p : |\mathcal{O}_{X'}| \to X'$ a $\widetilde{X}'$.

Por definición de gérmenes definidos por un polinomio, para cada punto $z \in X'$ existe una vecindad $U \subseteq X'$ (por ejemplo un disco U alrededor de z que no contenga a ningún otro punto excluído) y existen n funciones holomorfas $w_j(z) \in \mathcal{O}_{X'}(U)$, $1 \leq j \leq n$, que satisfacen $p(w_j(z)) = 0$ en U.

Entonces, se tiene la factorización:

$$p(w) = \prod_{j=1}^{n}(w - w_j(z)) \quad \text{en } U.$$

Se sigue que

$$(\pi')^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n}[U, w_j]$$

donde los básicos $[U, w_j]$ de $\widetilde{X}'$ son disjuntos, (2.46), ya que las w_j son distintas, y además

$$\pi'|_{[U,w_j]} : [U, w_j] \to U$$

es un homeomorfismo para cada $1 \leq j \leq n$.

Hemos probado así que $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ es una cubierta no ramificada de n hojas.

Nótese que $\widetilde{X}'$ puede ser disconexa, sin embargo, como π' es un homeomorfismo local, por (2.32) π' es holomorfa en cada componente conexa de $\widetilde{X}'$.

Ahora, definamos $f : \widetilde{X}' \to \mathbb{C}$ como la función evaluación, i.e., si $[s]_z \in \widetilde{X}'$ es un germen en $z \in X'$, entonces $f([s]_z) := [s]_z(z) := s(z) \in \mathbb{C}$.

Como el germen $[s]_z$ es holomorfo, se sigue que f es holomorfa, y por definición de $\widetilde{X}'$ se tiene que para todo $[s]_z \in \widetilde{X}'$, $p([s]_z) = 0$, i.e., $p(\pi'(s), f(s)) = 0$, i.e.,

$$f(s)^n + a_1(\pi'(s))f(s)^{n-1} + \cdots + a_n(\pi'(s)) = 0$$

Finalmente, sea $z_0 \in X'$ y sea $s \in \widetilde{X}'$ tal que $\pi'(s) = z_0$, y sea $U \subseteq X'$ una vecindad de z_0 tal que $(\pi')^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n}[U, w_j]$. Así, existen n posibilidades para s. Si $s \in [U, w_j]$ entonces por definición de este básico, (3.5), se tiene que un representante del germen s es la sección w_j en U, y así $\pi'_*[f]_s = w_j$. Q.E.D.

El paso siguiente es extender la cubierta no ramificada $\pi' : \widetilde{X} \to X'$ a una cubierta (ramificada) $\pi : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ incluyendo a los puntos críticos que se habían excluído: ∞, los ceros de $p_0(z)$ y los ceros del discriminante $\Delta(z)$ de $P(z, w)$.

Como veremos a continuación, al incluir estos puntos críticos aparecen puntos de ramificación y el teorema siguiente nos dice cómo se construye el cubriente $\widetilde{X}$, primero en el caso cuando $\widetilde{X}'$ es conexo, i.e., es una superficie de Riemann, pero, como se verá en la demostración, no se hace uso de la conexidad de $\widetilde{X}'$, el resultado también es válido cuando $\widetilde{X}'$ es una unión

disjunta de un número finito de superficies de Riemann, que es el caso que tenemos nosotros.

Proposición 3.23 *Sean X una superficie de Riemann y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado discreto, y sea $X' := X - A$. Supongamos que $\widetilde{X}'$ es una superficie de Riemann y que $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ es una aplicación cubriente, no ramificada, propia y holomorfa. Entonces, π' se extiende a una aplicación cubriente ramificada de X, i.e., existe una superficie de Riemann $\widetilde{X}$ y una aplicación cubriente ramificada, propia y holomorfa $\pi : \widetilde{X} \to X$, y un biholomorfismo $\sigma : \widetilde{X} - \pi^{-1}(A) \to \widetilde{X}'$ que preserva las fibras de π y π'.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $a \in A$ escojamos una carta coordenada (U_a, z_a) en X tal que:

(i): $z_a(U_a) = D$ el disco unitario en $\mathbb{C}$.

(ii): $z_a(a) = 0$

(iii): $U_a \cap U_b = \emptyset$ si $a \neq b$ (A es discreto).

Consideremos la vecindad perforada $U_a^* := U_a - \{a\}$. Entonces, como $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ es propia, la preimagen $(\pi')^{-1}(U_a^*)$ consiste de un número finito de componentes conexas V_{aj}^*, $1 \leq j \leq n(a)$.

Para cada índice j, la aplicación $\pi'|_{V_{aj}^*} : V_{aj}^* \to U_a^*$ es un cubriente no ramificado de, digamos, k_{aj} hojas.

Ahora, como se tiene un biholomorfismo $z_a : U_a^* \to D^*$ y una cubierta no ramificada de este disco de k_{aj} hojas, por (2.43) existe un biholomorfismo $\xi_{aj} : V_{aj}^* \to D^*$ en el disco perforado, que hace conmutar el diagrama siguiente (donde $\pi_{aj}(\zeta) := \zeta^{k_{aj}}$):

$$\begin{array}{ccc} V_{aj}^* & \xrightarrow{\xi_{aj}} & D^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_a^* & \xrightarrow{z_a} & D^* \end{array}$$

Para cada $a \in A$, escojamos $n(a)$ "puntos ideales" y_{aj}, $1 \leq j \leq n(a)$, i.e., escojamos puntos distintos en algún conjunto disjunto de $\widetilde{X}'$, y pongamos:

$$\widetilde{X} := \widetilde{X}' \cup \{y_{aj} \ : \ a \in A,\ 1 \leq j \leq n(a)\}$$

A $\widetilde{X}$ se le da la topología siguiente: Como basta definir los básicos alrededor de los nuevos puntos, entonces si W es una vecindad básica de $a \in A \subseteq X$, definimos

$$\{y_{aj}\} \cup \left((\pi')^{-1}(W) \cap V_{aj}^*\right) \subseteq \widetilde{X}$$

como una vecindad básica de y_{aj}.

Claramente $\widetilde{X}$ es entonces Hausdorff, y se define la función $\pi : \widetilde{X} \to X$ como $\pi|_{\widetilde{X}'} = \pi'$ y $\pi(y_{aj}) := a$. Es claro que π es continua y propia.

Ahora, para darle a $\widetilde{X}$ una estructura de superficie de Riemann, añadimos a las cartas de $\widetilde{X}' \subseteq \widetilde{X}$ cartas (V_{aj}, ξ_{aj}) alrededor de los nuevos puntos y_{aj} definidas por $V_{aj} := V_{aj}^* \cup \{y_{aj}\}$, y $\xi_{aj} : V_{aj} \to D$ la extensión de la aplicación $\xi_{aj} : V_{aj}^* \to D^*$ dada en el diagrama conmutativo de arriba, definiendo $\xi_{aj}(y_{aj}) := 0 \in D$.

Como ξ_{aj} es holomorfa en V_{aj}^* con respecto a la estructura compleja de $\widetilde{X}'$, entonces las nuevas cartas (V_{aj}, ξ_{aj}) son holomórficamente compatibles con las cartas de $\widetilde{X}'$, y así $\widetilde{X}$ es en efecto una superficie de Riemann. Claramente la aplicación $\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ resulta holomorfa, y como $\widetilde{X} - \pi^{-1}(A) = \widetilde{X}'$ y π extiende a π', entonces podemos elegir al biholomorfismo $\sigma : \widetilde{X} - \pi^{-1}(A) \to \widetilde{X}'$ como la *identidad*. Q.E.D.

El resultado siguiente nos dice que la extensión $\widetilde{X}$ de $\widetilde{X}'$ que se construyó arriba, es única salvo isomorfismo:

Proposición 3.24 *Sean X, $\widetilde{X}$, Y superficies de Riemann, y sean $\pi : \widetilde{X} \to X$ y $\tau : Y \to X$ aplicaciones cubrientes holomorfas propias. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado discreto, y sean $X' := X - A$, $\widetilde{X}' := \widetilde{X} - \pi^{-1}(A)$, $Y' := Y - \tau^{-1}(A)$. Entonces, todo biholomorfismo $\sigma' : \widetilde{X}' \to Y'$ que preserva las fibras de π y τ se puede extender a un biholomorfismo $\sigma : \widetilde{X} \to Y$ que preserva las fibras de π y τ.*

En particular, toda transformación cubriente $\sigma' \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}'/X')$ se puede extender a una transformación cubriente $\sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in A$ y sea (U, z) una carta coordenada alrededor de a tal que $z(a) = 0$ y $z(U) = D$ el disco unitario en $\mathbb{C}$.

Sea $U^* := U - \{a\}$. Podemos suponer que U es suficientemente pequeño de tal forma que π y τ sean no ramificadas sobre U^*.

Sean $V_1, \ldots, V_n$ (respectivamente $W_1, \ldots, W_m$) las componentes conexas de $\pi^{-1}(U)$ (respectivamente $\tau^{-1}(U)$). Entonces, $V_j^* := V_j - \pi^{-1}(a)$ (respectivamente $W_r^* := W_r - \tau^{-1}(a)$) son las componentes conexas de $\pi^{-1}(U^*)$ (respectivamente $\tau^{-1}(U^*)$).

Ahora, como $\sigma'|_{\pi^{-1}(U^*)} : \pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ es un biholomorfismo ya que U^* no contiene puntos de A y $\sigma' : \widetilde{X}' \to Y'$ es un biholomorfismo por hipótesis, y U se eligió de tal forma que π (y τ) sean no ramificadas en U^*, entonces, se sigue que $m = n$ y renumerando si hiciera falta podemos suponer que $\sigma'(V_j^*) = W_j^*$.

Entonces, como $\pi|_{V_j^*} : V_j^* \to U^*$ es un cubriente no ramificado de un número finito de hojas (respectivamente para $\tau|_{W_j^*}$), se sigue que $V_j \cap \pi^{-1}(a)$

(respectivamente $W_j \cap \tau^{-1}(a)$) consiste, por (2.44), de exactamente un solo punto b_j (respectivamente c_j) y por lo tanto $\sigma'|_{\pi^{-1}(U^*)} : \pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ se puede extender a una función biyectiva $\sigma|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \to \tau^{-1}(U)$ definiendo $\sigma(b_j) := c_j$.

Ahora, como $\pi|_{V_j} : V_j \to U$ y $\tau|_{W_j} : W_j \to U$ son propias, la extensión anterior es un homeomorfismo y por el Teorema de Singularidades Removibles de Riemann, el cual se puede aplicar ya que V_j y W_j son biholomorfos al disco unitario de $\mathbb{C}$ por (2.44), entonces la continuación anterior es de hecho un biholomorfismo.

Aplicando esta construcción a cada punto $a \in A$ se obtiene el biholomorfismo deseado $\sigma : \widetilde{X} \to Y$. Q.E.D.

Finalmente, para poder extender la función $f : \widetilde{X}' \to \mathbb{C}$ a todo $\widetilde{X}$ necesitaremos algunos resultados acerca de las funciones simétricas elementales asociadas a f.

Comenzamos con un estudio de las funciones simétricas elementales asociadas a una función meromorfa $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ y a una cubierta no ramificada $\pi : \widetilde{X} \to X$, y después, consideramos el caso cuando la aplicación $\pi : \widetilde{X} \to X$ es ramificada.

Funciones simétricas elementales: Sean X, $\widetilde{X}$ superficies de Riemann y $\pi : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente holomorfa no ramificada de n hojas. Sea $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$.

Cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta $U \subseteq X$ tal que su imagen inversa $\pi^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos $V_1, \ldots, V_n$ de $\widetilde{X}$, tales que $\pi|_{V_j} : V_j \to U$ es un biholomorfismo para cada $1 \leq j \leq n$.

Denotemos con $\tau_j := (\pi|_{V_j})^{-1} : U \to V_j$ a la inversa de π restringida a V_j, y sean $f_j := \tau_j^* \circ f := f \circ \tau_j \in \mathcal{M}_X(U)$.

Sea w una indeterminada y consideremos al polinomio

$$\prod_{j=1}^{n}(w - f_j) = w^n + c_1 w^{n-1} + \cdots + c_n$$

donde $c_j := (-1)^j s_j(f_1, \ldots, f_n)$ con $s_j = j$-ésima función simétrica elemental en n variables. Así $c_j \in \mathcal{M}_X(U)$.

Obsérvese que si $x' \in X$ es otro punto y $U' \subseteq X$ es una vecindad abierta de x' con $\pi^{-1}(U') = \bigcup_{j=1}^{n} V_j'$, y $\tau_j' := (\pi|_{V_j'})^{-1} : U' \to V_j'$, haciendo la misma construcción, se obtiene

$$\prod_{j=1}^{n}(w - f_j') = w^n + c_1' w^{n-1} + \cdots + c_n'$$

donde $f_j' := f \circ \tau_j'$ y $c_j' = (-1)^j s_j(f_1', \ldots, f_n')$.

Ahora, si $x, x' \in U \cap U'$ entonces $\tau_j = \tau_j'$ en esa intersección, y así $f_j = f_j'$ en $U \cap U'$ y por lo tanto $c_j = c_j'$ en $U \cap U'$, i.e., las secciones locales $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{M}_X(U)$, donde los abiertos U cubren X, son compatibles en las intersecciones $U \cap U'$, y en consecuencia, como $\mathcal{M}$ es una gavilla, existen secciones globales únicas $c_1, \cdots, c_n \in \mathcal{M}_X$ tales que $c_j|_U = c_j$.

Definición 3.25 Las $c_j \in \mathcal{M}_X$, $1 \leq j \leq n$, anteriores se llaman las *funciones simétricas elementales* de $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ con respecto al cubriente (no ramificado) $\pi : \widetilde{X} \to X$.

La proposición siguiente nos dice que las funciones simétricas elementales de $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ también están definidas cuando $\pi : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente holomorfo ramificado.

Proposición 3.26 *Sea $\pi : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente, holomorfa ramificada de n hojas entre superficies de Riemann. Supongamos que $A \subseteq X$ es un subconjunto cerrado discreto que contiene a todos los valores críticos de π, y sea $B = \pi^{-1}(A) \subseteq \widetilde{X}$. Supongamos que f es una función holomorfa (meromorfa) en $\widetilde{X}' := \widetilde{X} - B$, y sean $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{O}_X(X - A)$ (en $\mathcal{M}_X(X - A)$) las funciones simétricas elementales de f con respecto al cubriente $\pi : \widetilde{X}' \to X' := X - A$. Entonces, f se puede continuar en forma holomorfa (meromorfa) a todo $\widetilde{X}$ si y sólo si todas las c_j se pueden continuar en forma holomorfa (meromorfa) a todo X.*

Demostración. Sea $a \in A$ y sean $b_1, \ldots, b_m \in \pi^{-1}(a)$ las preimágenes de a. Supongamos que (U, z) es una carta coordenada alrededor de a con $U \subseteq X$ relativamente compacta, $z(a) = 0$ y $U \cap A = \{a\}$. Entonces, $V := \pi^{-1}(U) \subseteq \widetilde{X}$ es una vecindad relativamente compacta de cada uno de los $b_j \in \pi^{-1}(a)$.

(1): Consideremos primero el caso cuando $f \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\widetilde{X} - B)$.

(i): Supongamos que f se puede extender en forma holomorfa a todos los puntos b_j, es decir, existe $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(V)$ tal que $\widetilde{f}|_{V - \{b_1, \ldots, b_m\}} = f$, y en consecuencia f es acotada en $V - \{b_1, \ldots, b_m\}$.

Entonces, como $c_j = (-1)^j s_j(f_1, \ldots, f_n)$, con $f_j = f \circ \tau_j$ donde $\tau_j = (\pi_{V_j})^{-1} : U \to V_j$, se sigue que c_j es acotada en $U - \{a\}$ y así por el Teorema de las Singularidades Removibles de Riemann las c_j se pueden extender en forma holomorfa a a.

(ii): Recíprocamente, supongamos que todas las c_j se pueden extender en forma holomorfa a a. Entonces, todas estas c_j están acotadas en $U - \{a\}$.

Pero esto implica que f está acotada en $V - \{b_1, \ldots, b_m\}$ ya que si $y \in V - \{b_1, \ldots, b_m\}$ y $x = \pi(y)$, entonces substituyendo $w = f$ en

$$\prod_{j=1}^{n}(w - f_j) = w^n + c_1 w^{n-1} + \cdots + c_n$$

se obtiene

$$\prod_{j=1}^{n}(f(y) - f_j(x)) = f(y)^n + c_1(x)f(y)^{n-1} + \cdots + c_n(x) = 0$$

ya que $f_j(x) = f \circ \tau_j(x) = f(y)$.

Pero f acotada en $V - \{b_1, \ldots, b_m\}$ implica, usando de nuevo el Teorema de las Singularidades Removibles de Riemann, que f se puede extender en forma holomorfa a todos los puntos b_j.

(2): Consideremos ahora el caso cuando $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}(\widetilde{X} - B)$.

(i): Supongamos que f se puede extender en forma meromorfa a todos los puntos b_j. Obsérvese que la función $\zeta := \pi^* z \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(V)$ se anula en todos estos puntos b_j ya que $\zeta(b_j) = \pi^* z(b_j) = z \circ \pi(b_j) = z(a) = 0$. Entonces, la función $\zeta^k \cdot f$, para k suficientemente grande, se puede extender en forma holomorfa a todos los puntos b_j ya que si b_j es un polo de orden k_j de f, como $\zeta(b_j) = 0$ entonces $\zeta^{k_j}(b_j) \cdot f$ cancela a ese polo y así escogiendo $k \geq \sum k_j$ se cancelan a todos los puntos b_j que sean polos de f.

Ahora, las funciones simétricas elementales de $\zeta^k \cdot f$, que es holomorfa, son las funciones $z^{k_j} \cdot c_j$ y así por la parte (1) de esta demostración se pueden extender en forma holomorfa a a ya que la función $\zeta^k \cdot f$ se puede extender en forma holomorfa a todos los puntos b_j. Se sigue que todas las c_j se pueden extender en forma meromorfa a a.

(ii): Recíprocamente, supongamos que todas las c_j se puedan extender en forma meromorfa a a. Con la notación anterior, se sigue que las funciones $z^{k_j} \cdot c_j$ se pueden extender en forma holomorfa a a, y así para $k \geq \sum k_j$ la función $\zeta^k \cdot f$ se puede extender en forma holomorfa a todos los puntos b_j y por lo tanto f se puede extender en forma meromorfa a todos los puntos b_j. Q.E.D.

Nótese que la demostración anterior no usa el hecho de que $\widetilde{X}$ es conexo y así la proposición es cierta también cuando $\widetilde{X}$ es la unión disjunta de un número finito de superficies de Riemann.

Con los resultados previos estamos ahora preparados para probar el resultado principal de esta sección, extendiendo la construcción del teorema (3.22) a los puntos críticos:

Teorema 3.27 *Sea X una superficie de Riemann y sea*

$$p(w) = w^n + c_1 w^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathcal{M}_X[w]$$

un polinomio irreducible de grado n en w. Entonces:

(i): Existe una superficie de Riemann $\widetilde{X}$, un cubriente holomorfo ramificado de n hojas $\pi : \widetilde{X} \to X$ y una función meromorfa global $F \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ que satisface el polinomio $p(w)$, i.e.,

$$(\pi^* p)(F) = F^n + (\pi^* c_1)F^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_n) = 0$$

(ii): Más aun, la terna $(\widetilde{X}, \pi, F)$ está unívocamente determinada en el siguiente sentido: Si (Y, τ, G) es otra terna con las propiedades correspondientes, entonces existe un único biholomorfismo $\sigma : Y \to \widetilde{X}$ que preserva las fibras de π y τ y tal que $G = \sigma^* F$.

Definición 3.28 A la terna $(\widetilde{X}, \pi, F)$ se le llama la *función algebraica* definida por el polinomio $p(w)$. A veces por abuso de lenguaje diremos que F es la función algebraica definida por $p(w)$, sobreentendiendo su dominio $\widetilde{X}$. Esta terminología se justifica por (3.27)(i) ya que la función F satisface el polinomio

$$\pi^* p(w) = w^n + (\pi^* c_1)w^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_n) \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}[w]$$

En el caso clásico, cuando $X = \mathbb{P}^1$ y $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(z)$, como $\pi : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ es *propia*, entonces $\widetilde{X}$ resulta *compacta*. En otras palabras, la superficie de Riemann asociada a una función algebraica definida por un polinomio irreducible $p(w) = P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ es compacta. Más adelante probaremos que de hecho todas las superficies de Riemann compactas aparecen como superficies de Riemann asociadas a funciones algebraicas.

DEMOSTRACIÓN (del teorema): Sea Δ el discriminante del polinomio $p(w) \in \mathcal{M}_X[w]$. Así, Δ es un polinomio en los coeficientes de $p(w)$. Sea $X' := X - \{\text{ceros de } \Delta, \text{ ceros de } c_j(x)\}$ y sean $\widetilde{X}' \subseteq |\mathcal{O}_{X'}|$, $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ y $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}'}$, como en el teorema (3.22).

Por la proposición (3.23) el cubriente $\pi' : \widetilde{X}' \to X'$ se puede extender a un cubriente holomorfo propio $\pi : \widetilde{X} \to X$, donde hemos identificado a $\widetilde{X}'$ con $\pi^{-1}(X')$.

Ahora, como las $c_j \in \mathcal{M}_X$ entonces por (3.26) la función $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}'}$ se puede extender a una función meromorfa $F \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$, y como por (3.22) f

satisface el polinomio $p(w)$, entonces F satisface al polimonio $(\pi^* p)(w)$ por el Teorema de la Identidad para funciones meromorfas, i.e.,

$$(\pi^* p)(F) = F^n + (\pi^* c_1)F^{n-1} + \cdots + \pi^* c_n = 0$$

Mostraremos ahora que $\widetilde{X}$ es conexa y por lo tanto una superficie de Riemann. Supongamos que $\widetilde{X}$ no es conexa. Entonces, $\widetilde{X}$ tiene un número finito de componentes conexas $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_k$ y las restricciones $\pi|_{\widetilde{X}_i} : \widetilde{X}_i \to X$ son cubrientes de n_i hojas, holomorfos y propios, donde $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Considerando las funciones simétricas elementales $c_j^{(i)}$ de $F|_{\widetilde{X}_i} \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}_i}$ se obtienen polinomios

$$P_i(w) := \prod_{j=1}^{n_i} \left(w - F_j^{(i)}\right) = w^{n_i} + c_1^{(i)} w^{n_i - 1} + \cdots + c_{n_i}^{(i)} \in \mathcal{M}_X[w]$$

de grado n_i, $1 \leq i \leq k$, y claramente se tiene que

$$p(w) = P_1(w) \cdot \ldots \cdot P_k(w)$$

en contradicción con la hipótesis de que $p(w)$ es irreducible. Esto prueba la parte (i) del teorema.

Finalmente, para probar la unicidad (ii), supongamos que (Y, τ, G) es otra función algebraica definida por el mismo polinomio $p(w)$. Sea $B \subsetneq Y$ el conjunto de polos de G y puntos de ramificación de τ, y sea $A' = \tau(B) \subsetneq X$. Sean

$$X'' := X' - A', \quad \widetilde{X}'' := \pi^{-1}(X''), \quad Y'' := \tau^{-1}(X'')$$

Definamos una aplicación $\sigma'' : Y'' \to \widetilde{X}''$, que preserva las fibras de π y τ, como sigue:

Sean $z \in Y''$, $\tau(z) = x \in X'' \subsetneq X$ y sea $\phi \in \mathcal{O}_{X,x}$ el germen dado por $\phi := \tau_* G_z$. Entonces, $p(\phi) = 0$ ya que

$$(\tau^* p)(G) = G^n + (\tau^* c_1)G^{n-1} + \cdots + (\tau^* c_n) = 0$$

y así

$$\begin{aligned} 0 = \tau_*(0) &= (\tau_* G_z)^n + (\tau_* \tau^* c_1)(\tau_* G_z)^{n-1} + \cdots + (\tau_* \tau * c_n) \\ &= \phi^n + c_1 \phi^{n-1} + \cdots + c_n = p(\phi) \end{aligned}$$

Por la construcción de $\widetilde{X}'$ (3.22) se sigue que $\phi \in \widetilde{X}'$, y como es un germen en $x \in X''$ entonces $\phi \in \widetilde{X}''$

Se define entonces $\sigma''(z) := \phi := \tau_* G_z \in \widetilde{X}''$. De esta definición se sigue inmediatamente que σ'' es continua, preserva las fibras de π y τ y por lo

tanto es holomorfa. Más aun, σ'' es propia ya que $\pi|_{\widetilde{X}''} : \widetilde{X}'' \to X''$ es continua y $\tau|_{Y''} : Y'' \to X''$ es propia.

Más aún, σ'' es suprayectiva y como $\pi : \widetilde{X}'' \to X''$ y $\tau : Y'' \to X''$ tienen el mismo número de hojas, entonces $\sigma'' : Y'' \to \widetilde{X}''$ es un biholomorfismo.

También, de la definición de σ'' se tiene que $G|_{Y''} = (\sigma'')^*(F|_{\widetilde{X}''})$. Entonces, por la proposición (3.24) $\sigma'' : Y'' \to \widetilde{X}''$ se puede extender a un biholomorfismo $\sigma : Y \to \widetilde{X}$ que preserva las fibras de π y τ, y por el Teorema de la Identidad se sigue que $G = \sigma^* F$

Más aún, la aplicación σ está unívocamente determinada por la propiedad $G = \sigma^* F$ ya que de otra forma existiría una transformación cubriente $\alpha : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, distinta de la identidad, tal que $\alpha^* F = F$. Pero esto no es posible ya que F toma valores distintos en la fibra $\pi^{-1}(x)$ sobre todo punto $x \in X$. Q.E.D.

Ejemplo: Consideremos $f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ donde las $a_j \in \mathbb{C}$ son distintas. Pensemos a $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1} = \mathbb{C}(z)$.

El polinomio $p(w) = w^2 - f = w^2 - (z - a_1) \cdots (z - a_n)$ es irreducible y así define una función algebraica, usualmente denotada

$$w = \sqrt{f(z)} = \sqrt{(z - a_1) \cdots (z - a_n)}$$

El dominio $\widetilde{X}$ de w y el cubriente de dos hojas $\pi : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ se pueden describir, usando las construcciones (3.22) y (3.27), como sigue:

(i): Sean $A := \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{P}^1$, $X' := \mathbb{P}^1 - A$ y $\widetilde{X}' := \pi^{-1}(X')$, donde $\pi : |\mathcal{O}_{X'}| \to X'$ es la proyección canónica.

Ahora, como $\pi : \widetilde{X}' \to X'$ es un cubriente holomorfo no ramificado de dos hojas entonces todo germen $\phi \in \mathcal{O}_{X',x}$ que satisface el polinomio p, i.e., es tal que $\phi^2 = f(z)$ se puede continuar analíticamente a lo largo de cualquier curva en X' (3.21).

(ii): Consideremos ahora el cubriente sobre los puntos excluídos:

(a): Primero, para los puntos $a_j \in A$ escojamos un disco, de radio $r_j > 0$, alrededor de a_j y que no contenga a ningún otro punto de A:

$$U_j := \{a \in \mathbb{C} : |z - a_j| < r_j\}$$

Ahora, como la función $g(z) := \prod_{k \neq j}(z - a_k)$ no tiene ceros en el disco U_j y el disco es simplemente conexo, entonces $g(z)$ tiene raíz cuadrada en U_j, i.e., existe una función holomorfa $h : U_j \to \mathbb{C}$ tal que $h^2 = g$ en U_j, y así

$$f(z) = (z - a_j)h(z)^2 \quad \text{en } U_j.$$

Consideremos ahora $0 < \rho < r_j$, $\theta \in \mathbb{R}$ y sea $\zeta = a_j + \rho e^{i\theta}$. Por (3.39) existe un germen $\phi_\zeta \in \mathcal{O}_{X',\zeta}$ tal que $\phi_\zeta^2 = f$ y así

$$\phi_\zeta(\zeta) = \sqrt{f(\zeta)} = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\theta/2} h(\zeta)$$

y si ahora continuamos analíticamente este germen a lo largo del círculo $\zeta = a_j + \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, al cambiar θ a $\theta + 2\pi$, como $e^{i(\theta+2\pi)/2} = -e^{i\theta/2}$, entonces: el germen ϕ_ζ cambia a $-\phi_\zeta$, es decir, el germen ϕ_ζ regresa a su negativo.

Usando esta observación, si ahora ponemos $U_j^* := U_j - \{a_j\}$ y $V_j^* := \pi^{-1}(U_j^*)$ entonces $\pi : V_j^* \to U_j^*$ es un cubriente conexo de dos hojas (2.43), ya que si no fuera conexo, entonces se separaría en dos cubrientes de una hoja cada uno, y en consecuencia la continuación analítica del germen ϕ_ζ a lo largo del círculo $\zeta = a_j + \rho e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, regresaría al mismo germen, pero esto no es cierto como vimos anteriormente.

Se sigue entonces que la superficie de Riemann $\widetilde{X}$ tiene exactamente un punto sobre cada $a_j \in X$.

(b): Consideremos ahora el punto $\infty \in A$: Sea $r > \text{máx}\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ y sea

$$U^* := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$$

entonces $U := U^* \cup \{\infty\}$ es una vecindad de ∞, que es homeomorfa a un disco de $\mathbb{C}$ y no contiene a ningún otro punto de A.

En U podemos escribir $f = z^n \cdot F$ donde F es una función holomorfa que no tiene ceros en U. De nuevo, como U es simplemente conexo, F tiene una raíz cuadrada en U, i.e., existe $H : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F = H^2$. Distinguimos ahora dos casos:

(1): n es *impar*: En este caso la función f se puede escribir como:

$$f(z) = z \cdot h(z)^2$$

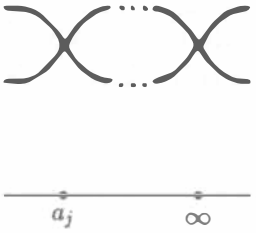
con h meromorfa en U.

(2): n es *par*: En este caso f se puede escribir como

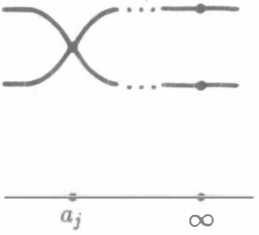
$$f(z) = h(z)^2$$

con h meromorfa en U.

Sea $V^* := \pi^{-1}(U^*)$ y consideremos el cubriente $\pi : V^* \to U^*$. Como se hizo en (a), se puede demostrar en el caso (1) que π es un cubriente conexo de dos hojas y así en este caso $\widetilde{X}$ tiene un solo punto sobre ∞. Para el caso (2) π se separa en dos cubrientes de una hoja cada uno y así en este caso $\widetilde{X}$ tiene dos puntos sobre ∞. Podemos visualizar estos casos como en la siguiente figura:

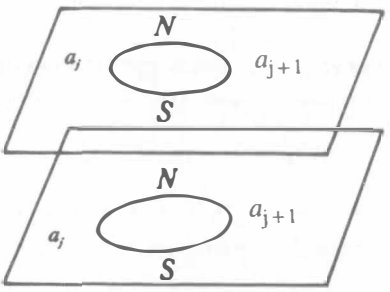


n impar



n par

Otra forma de visualizar la superficie de Riemann $\widetilde{X}$ alrededor de los puntos de A es como sigue: Consideremos curvas simples en X' que unan dos puntos consecutivos a_j y a_{j+1} de A (suponiendo que hemos ordenado estos puntos, digamos siguiendo el sentido de las manecillas del reloj) que no se intersecten excepto en los extremos. "Cortando" a lo largo de estas curvas, separemos los bordes del corte a los que etiquetamos N y S siguiendo el sentido de las manecillas del reloj (digamos N abierto y S cerrado), luego "pegamos" dos copias de X' a lo largo de estas aristas cuidando de unir el borde N de una con el borde S de la otra y viceversa, obteniendo así la superficie de Riemann $\widetilde{X}$ (ver la figura siguiente):



Observemos ahora que en los puntos de ramificación a_j, si tomamos un círculo pequeño alrededor de a_j que comience digamos en un punto P de una de las hojas de $\widetilde{X}$, al recorrer el círculo cuando se llega al borde S de esta hoja, digamos H_1, pasamos al borde N de la otra hoja, digamos H_2, y continuando el recorrido del círculo, pero ahora en la hoja H_2 llegamos a

la otra copia del punto P, y luego llegamos al borde S en la hoja H_2 y se pasa entonces al borde N de la hoja H_1 para finalmente regresar al punto inicial.

Aplicaciones cubrientes y extensiones de campos: Si X y $\widetilde{X}$ son superficies de Riemann y $\pi : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación holomorfa no constante, entonces π induce un monomorfismo de campos

$$\pi^* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$$

dado por $\pi^*(f) := f \circ \pi$, (1.22).

El resultado siguiente nos dice que si $\pi : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente de n hojas, entonces la extensión correspondiente es finita (y por lo tanto algebraica) de grado n. De hecho, para ver que el grado de la extensión es precisamente n usaremos el siguiente resultado que probaremos en (5.17):

(*): *Si $\pi : \widetilde{X} \to X$ es una aplicación cubriente holomorfa de n hojas, entonces existe una $f \in \mathcal{M}_X$ y un punto $x \in X$ con preimágenes, bajo π, $y_1, \ldots, y_n \in \widetilde{X}$, tales que f los separa, i.e., $f(y_j) \neq f(y_k)$ para $j \neq k$.*

Teorema 3.29 *Sean X, $\widetilde{X}$ superficies de Riemann y $\pi : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente, holomorfa, ramificada de n hojas. Sea $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ y sean $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{M}_X$ las funciones simétricas elementales de f. Entonces:*

(1): $f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_n) = 0$.
(2): La extensión de campos $\pi^* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es finita de grado $\leq n$.
(3): Más aun, asumiendo (*), la extensión es de hecho de grado exactamente n.

DEMOSTRACIÓN; (1): Sea $x \in X$ y sea U una vecindad abierta de x tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n} V_j$ es la unión disjunta de abiertos biholomorfos, mediante π, a U. Entonces, restringiendo la expresión de la izquierda en (1) a U, y con la notación de la definición de funciones simétricas elementales, se tiene:

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_n) \mid_U = \prod_{j=1}^{n} (f - \pi^* f_j) \mid_U$$

y como $c_j = (-1)^j s_j(f_1, \ldots, f_n)$, entonces $\pi^* c_j = (-1)^j s_j(\pi^* f_1, \ldots, \pi^* f_n)$ donde $\pi^* f_j = f_j \circ \pi|_{V_j} = (f \circ \tau_j) \circ \pi|_{V_j} = f|_U$ ya que $\tau_j = (\pi|_{V_j})^{-1}$, y así

$$\prod_{j=1}^{n} (f - \pi^* f_j) \mid_U = \prod_{j=1}^{n} (f|_U - f|_U) = 0$$

es decir, $f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \cdots + (\pi^* c_n)|_U = 0$, i.e., esta expresión es cero localmente, y como $\mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es una gavilla, entonces la expresión también es cero globalmente.

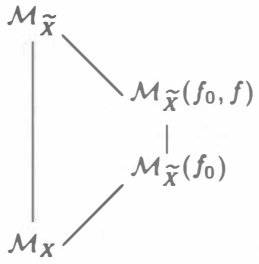
(2): Consideremos ahora la extensión de campos $\pi^* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$. Por la parte (1) todo elemento $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ satisface un polinomio $p(w) = w^n + c_1 w^{n-1} + \cdots + c_n$ con coeficientes $c_j \in \mathcal{M}_X$, y así es algebraico sobre $\mathcal{M}_X$ y su polinomio mónico irreducible tiene grado $\leq n$.

Sea $f_0 \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ un elemento tal que el grado $n_0 \leq n$ de su polinomio irreducible $\mathrm{Irr}(f_0, \mathcal{M}_X)$ sea máximo.

Probaremos que $\mathcal{M}_{\widetilde{X}} = \mathcal{M}_X(f_0)$, y así

$$[\mathcal{M}_{\widetilde{X}} : \mathcal{M}_X] = \mathrm{gr}(\mathrm{Irr}(f_0, \mathcal{M}_X)) = n_0 \leq n$$

En efecto, como $f_0 \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ y $\mathcal{M}_X \subseteq \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ entonces $\mathcal{M}_X(f_0) \subseteq \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es arbitrario, consideremos las extensiones:



Como la extensión $\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X$ es algebraica, entonces todas las otras subextensiones también lo son, y además todos estos campos son de característica cero ya que contienen a $\mathbb{C}$. En particular, para la extensión algebraica $\mathcal{M}_X(f_0, f)/\mathcal{M}_X$, por el Teorema del Elemento Primitivo (ver, p.ej., [Artin]), existe un elemento $g \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ tal que $\mathcal{M}_X(f_0, f) = \mathcal{M}_X(g)$.

Ahora, por definición de f_0, $n_0 = \mathrm{gr}(\mathrm{Irr}(f_0, \mathcal{M}_X)) \geq \mathrm{gr}(\mathrm{Irr}(g, \mathcal{M}_X))$, y así

$$n_0 \geq \mathrm{gr}(\mathrm{Irr}(g, \mathcal{M}_X)) = [\mathcal{M}_X(g) : \mathcal{M}_X] = [\mathcal{M}_X(f_0, f) : \mathcal{M}_X]$$

entonces

$$n_0 \geq \dim_{\mathcal{M}_X}(\mathcal{M}_X(g)) = \dim_{\mathcal{M}_X}(\mathcal{M}_X(f_0, f)) \geq \dim_{\mathcal{M}_X}(\mathcal{M}_X(f_0)) = n_0$$

y por lo tanto

$$\dim_{\mathcal{M}_X}(\mathcal{M}_X(f_0, f)) = \dim_{\mathcal{M}_X}(\mathcal{M}_X(f_0))$$

y como $\mathcal{M}_X(f_0) \subseteq \mathcal{M}_X(f_0, f)$ entonces $\mathcal{M}_X(f_0) = \mathcal{M}_X(f_0, f)$ y así $f \in \mathcal{M}_X(f_0)$, i.e., $\mathcal{M}_{\widetilde{X}} \subseteq \mathcal{M}_X(f_0)$, i.e., $\mathcal{M}_{\widetilde{X}} = \mathcal{M}_X(f_0)$, y en consecuencia

$$[\mathcal{M}_{\widetilde{X}} : \mathcal{M}_X] = [\mathcal{M}_X(f_0) : \mathcal{M}_X] = \mathrm{gr}(\mathrm{Irr}(f_0, \mathcal{M}_X)) = n_0 \leq n$$

(3): Finalmente, asumiendo la hipótesis (*), si sucediera que $n_0 < n$, entonces todo $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ tendría un polinomio mínimo $\phi(t)$ de grado $\mathrm{gr}(\phi(t)) = m < n$, y así si escribimos $\phi(t) = t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m$, entonces $\phi(f) = 0$, i.e.,

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

y así para toda $y \in \widetilde{X}$, si $x = \pi(y) \in X$, se tiene que

$$f(y)^m + a_1(x) f(y)^{m-1} + \cdots + a_m(x) = 0$$

pero por la hipótesis (*) existe $x_0 \in X$ tal que $\pi^{-1}(x_0) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ y existe $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ tal que los valores $f(y_j)$ son distintos, $1 \leq j \leq n$, y así el polinomio

$$f(y)^m + a(x_0) f(y)^{m-1} + \cdots + a(x_0)$$

de grado $m < n$ tendría n raíces $f(y_j)$ distintas, lo cual no es posible. Q.E.D.

La definición siguiente tiene sentido debido a la proposición (3.24):

Definición 3.30 Sean X, $\widetilde{X}$ superficies de Riemann y $\pi : \widetilde{X} \to X$ una aplicación cubriente holomorfa ramificada. Sea $A \subsetneq X$ el conjunto de valores críticos de π y sean $X' := X - A$ y $\widetilde{X}' := \pi^{-1}(X')$. El cubriente $\pi : \widetilde{X} \to X$ se llama de *Galois* si el cubriente no ramificado $\pi|_{\widetilde{X}'} : \widetilde{X}' \to X'$ es de Galois.

El grupo de transformaciones cubrientes y el grupo de Galois. Si X y $\widetilde{X}$ son superficies de Riemann y $\pi : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente holomorfo ramificado, el grupo de transformaciones cubrientes $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ tiene una *representación* en el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$ (i.e., el grupo de automorfismos del campo $\mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ que dejan fijo al subcampo $\mathcal{M}_X$):

$$\phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$$

dada como sigue:

Si $\sigma \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$, entonces $\phi(\sigma) : \mathcal{M}_{\widetilde{X}} \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es el automorfismo dado por $\phi(\sigma)(f) := f \circ \sigma^{-1}$, para toda $f \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$. Claramente:

(i): $\phi(\sigma) : \mathcal{M}_{\widetilde{X}} \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es un automorfismo de campos.

(ii): Estos automorfismos dejan fijo al subcampo $\pi^* \mathcal{M}_X \subseteq \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$.

(iii): $\phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$ es un homomorfismo de grupos.

Teorema 3.31 *Sea X una superficie de Riemann y sea $p(w) \in \mathcal{M}_X[w]$ un polinomio mónico irreducible de grado n. Sea $(\widetilde{X}, \pi, F)$ la función algebraica definida por el polinomio $p(w)$ y consideremos la extensión de campos $\pi^* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$. Entonces:*

(1): La extensión $\mathcal{M}_{\widetilde{X}} \,/\, \mathcal{M}_X$ es de grado n y de hecho

$$\mathcal{M}_{\widetilde{X}} \approx \mathcal{M}_X[w] \,/\, (p(w))$$

(2): El homomorfismo $\phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$ es un isomorfismo.

(3): El cubriente $\pi : \widetilde{X} \to X$ es de Galois si y sólo si la extensión $\pi^* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es de Galois.

DEMOSTRACIÓN: (1): Como $\pi : \widetilde{X} \to X$ es cubriente de n hojas por (3.27), entonces la extensión $\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X$ es de grado n por (3.29)(3).

Ahora, si consideramos el morfismo (de anillos) evaluación

$$\mathrm{ev}_F : \mathcal{M}_X[w] \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$$

dado por: $\mathrm{ev}_F(q(w)) := q(F)$ (evaluación en $F \in \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$), entonces como $\mathrm{ev}_F(p(w)) = p(F) = 0$ por (3.27)(i), se tiene un morfismo de campos (ya que $p(w)$ es irreducible):

$$\mathrm{ev}_F : \mathcal{M}_X[w]/(p(w)) \longrightarrow \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$$

y como ambos campos son extensiones de grado n de $\mathcal{M}_X$, el morfismo anterior tiene que ser un isomorfismo.

(2): El homomorfismo $\phi : \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$ es *inyectivo* ya que $\sigma \cdot F \neq F$ para cualquier $\sigma \neq id$ en $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$. Es *suprayectivo* ya que si $\alpha \in \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$ entonces la terna $(\widetilde{X}, \pi, \alpha(F))$ también es una función algebraica definida por el polinomio $p(w)$ ya que $p(\alpha(F)) = \alpha(p(F)) = 0$. Entonces, por la unicidad en (3.27) existe una transformación cubriente $\tau \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ tal que $\alpha(F) = \tau^* F$.

Ahora, si ponemos $\sigma := \tau^{-1} \in \mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$, entonces $\sigma F := F \circ \sigma^{-1} = F \circ \tau = \tau^* F = \alpha(F)$, y como $\mathcal{M}_{\widetilde{X}} = \mathcal{M}_X(F)$, el automorfismo $\phi(\sigma) : f \mapsto \sigma f$ coincide con el automorfismo α, i.e., $\phi(\sigma) = \alpha$.

(3): Finalmente, como $\pi : \widetilde{X} \to X$ es un cubriente de Galois si y sólo si $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$ tiene exactamente n elementos (2.39), entonces (3) se sigue del isomorfismo en (2) y del hecho de que la extensión de campos (separable, ya que estamos en característica cero) $\pi^* : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{\widetilde{X}}$ es de Galois si y

sólo si el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{X}}/\mathcal{M}_X)$ tiene exactamente n elementos. Q.E.D.

En el caso clásico se tiene el siguiente corolario que describe completamente el campo de funciones meromorfas de una función algebraica:

Corolario 3.32 *Si $p(z,w)$ es un polinomio mónico irreducible con coeficientes en $\mathbb{C}$ y de grado n en w, y si $\widetilde{X}$ es la superficie de Riemann asociada a la función algebraica definida por $p(z,w)$, entonces $\widetilde{X}$ es compacta y su campo de funciones meromorfas es una extensión de grado n de $\mathbb{C}(z)$:*

$$\mathcal{M}_{\widetilde{X}} \approx \mathbb{C}(z)[w] \,/\, p(z,w)$$

Para mostrar la existencia de una biyección entre el conjunto de clases de equivalencia birracional de campos de funciones algebraicas en una variable compleja y el conjunto de clases isomorfismo de superficies de Riemann compactas, necesitaremos varios resultados importantes que serán demostrados en el capítulo 5, (5.17) y (5.31). Estos resultados son los siguientes:

(*): *Sean $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ puntos distintos en una superficie de Riemann compacta X. Entonces, existe una función $f \in \mathcal{M}_X$ que separa estos puntos, i.e., $f(x_j) \neq f(x_k)$ si $j \neq k$.*

(**): *Si X es una superficie de Riemann compacta, entonces existe una función meromorfa no constante $f \in \mathcal{M}_X$, y cualquier tal función $f : X \to \mathbb{P}^1$ es un cubriente posiblemente ramificado, con un número finito de hojas.*

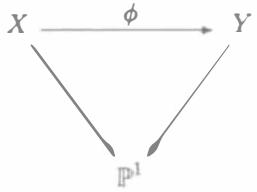
Usando (**), si denotamos con $\mathcal{SC}$ a la *categoría de superficies de Riemann compactas* y con $\mathbb{C}$-álg a la *categoría de extensiones finitas de* $\mathbb{C}(z)$ (cuyos morfismos son los morfismos de campos que dejan fijo a $\mathbb{C}(z)$), se tiene un funtor:

$$\mathcal{M} : \mathcal{SC} \to \mathbb{C}\text{-álg}$$

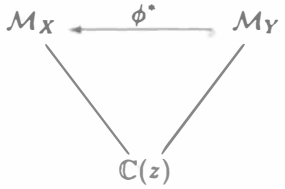
definido como sigue:

(1): Si X es una superficie de Riemann compacta, por (**) X es un cubriente (ramificado) de n hojas $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ y así, por (3.29) se tiene una extensión de campos de grado n, $\pi^* : \mathbb{C}(z) \approx \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{M}_X$.

(2): A cada morfismo de cubrientes (con un número finito de hojas):



se le asocia el morfismo de extensiones:



donde, para $g \in \mathcal{M}_Y$, $\phi^*(g) := g \circ \phi \in \mathcal{M}_X$.

Similarmente, ahora queremos un funtor:

$$\mathcal{S} : \mathbb{C}\text{-álg} \to \mathcal{SC}$$

y para definirlo recordemos que dada una extensión finita, de grado n, $K/\mathbb{C}(z)$ existe un polinomio mónico irreducible $p(w) \in \mathbb{C}(z)[w]$ de grado n tal que: $K \approx \mathbb{C}(z)[w]/p(w)$.

Sea $\pi : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^1$ la función algebraica (3.47) definida por el polinomio $p(w)$. Por la observación después de (3.28) $\widetilde{X}$ es compacta, el cubriente es de n hojas y por (3.31)

$$\mathcal{M}_{\widetilde{X}} \approx \mathbb{C}(z)[w] \,/\, p(w) \approx K.$$

(3): Se define entonces $\mathcal{S}(K/\mathbb{C}(z)) := (\pi : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^1)$.

(4): Ahora, si $\phi : (K/\mathbb{C}(z)) \to (L/\mathbb{C}(z))$ es un morfismo de extensiones finitas de $\mathbb{C}(z)$, sean $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ y $\tau : Y \to \mathbb{P}^1$ los cubrientes finitos construídos en la forma anterior. Así $K \approx \mathcal{M}_X$ y $L \approx \mathcal{M}_Y$ y se tiene un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_Y$. Queremos construir una aplicación holomorfa $\phi^+ : Y \to X$ asociada al morfismo de campos ϕ. Para esto, necesitamos describir todas las *valuaciones discretas* de los campos de funciones meromorfas $\mathcal{M}_X$, para X compacta. Primero recordamos los conceptos y resultados básicos acerca de las valuaciones en un campo. Recordemos que una valuación en un campo es una generalización del valor absoluto en $\mathbb{C}$.

Definición 3.33 Sea K un campo. Una *valuación discreta* en K es una función $v : K^* \to \mathbb{Z}$ ($K^* := K - \{0\}$) tal que:

(1): $v : K^* \to \mathbb{Z}$ es un epimorfismo de grupos.
(2): v satisface la desigualdad ultramétrica:

$$v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$$

Obsérvese que si definimos $v(0) := +\infty$, entonces con las convenciones usuales para ∞, se tiene que la función $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ satisface: $v(ab) = v(a) + v(b)$ para $a, b \in K$. La desigualdad ultramétrica es una versión de la desigualdad del triángulo no arquimediana.

Si $v : K^* \to \mathbb{Z}$ es una valuación, las propiedades siguientes son inmediatas:
(i): $v(1) = 0 = v(-1)$.
(ii): $v(a) = v(-a)$ para todo $a \in K$.

La propiedad (i) es porque v es un homomorfismo y (ii) se sigue de (i).

Lema 3.34 *Si $v : K^* \to \mathbb{Z}$ es una valuación en K, entonces para cualesquiera $a, b \in K$ tales que $v(a) \neq v(b)$ se tiene que:*

$$v(a+b) = \min\{v(a), v(b)\}$$

DEMOSTRACIÓN: Sin perder generalidad podemos suponer que $a \neq 0, b \neq 0$ y que $v(a) < v(b)$. Entonces:

$$v(a) = v(a+b-b) \geq \min\{v(a+b), v(-b)\} \geq \min\{v(a), v(b), v(b)\} = v(a)$$

y así todas estas desigualdades deben ser igualdades y en particular

$$v(a) = \min\{v(a+b), v(b)\} = v(a+b)$$

Podemos ahora clasificar todas las valuaciones discretas de $\mathcal{M}_X$, para X compacta:

Teorema 3.35 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Una función $v : \mathcal{M}_X^* \to \mathbb{Z}$ es una valuación discreta en $\mathcal{M}_X$ si y sólo si existe un único punto $x \in X$ tal que $v(f) = \mathrm{ord}_x f$ para todo $f \in \mathcal{M}_X$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $v(f) := \mathrm{ord}_x f$ define una valuación discreta en $\mathcal{M}_X$.

Recíprocamente, supongamos que $v : \mathcal{M}_X \to \mathbb{Z}$ es una valuación discreta. Como v es suprayectiva, escojamos una $f \in \mathcal{M}_X$ tal que $v(f) = 1$. Claramente $f \notin \mathbb{C}$ ya que para cualquier constante $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $v(\lambda) = v((\lambda^{1/n})^n) = nv(\lambda^{1/n})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y así $v(\lambda^{1/n}) = v(\lambda)/n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se sigue entonces que $v(\lambda) = 0$.

Sea $r(z) \in \mathbb{C}(z)$ una función racional. Entonces $v(r(f)) = \mathrm{ord}_0(r)$ ya que:

$$r \circ f = \lambda \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n}(f - \alpha_j)}{\prod_{j=0}^{m}(f - \beta_j)}$$

con $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Se sigue que:

$$v(r \circ f) = v(\lambda) + \sum_{j=0}^{n} v(f - \alpha_j) - \sum_{j=0}^{m} v(f - \beta_j)$$

y como $v(\lambda) = 0$, y por (3.34), si $0 \neq \gamma \in \mathbb{C}$, $v(f - \gamma) = \min\{v(f), v(\gamma)\} = \min\{1, v(\gamma)\} = 0$ (ya que $\gamma \in \mathbb{C}$); y si $\gamma = 0$ se tiene que $v(f - \gamma) = v(f) = 1$ y así

$$\begin{aligned} v(r \circ f) &= \sum 1 \text{ (tantas veces como 0 sea un cero del numerador)} \\ &\quad - \sum 1 \text{ (tantas veces como 0 sea un cero del denominador)} \\ &= \mathrm{ord}_0(r) \end{aligned}$$

Denotemos por $x_1, \ldots, x_n$ a los ceros de f listados con sus multiplicidades, y sea $F \in \mathcal{M}_X$ arbitraria.

Como X es compacta, y $f \in \mathcal{M}_X$ es no constante, por (**) el cubriente $f : X \to \mathbb{P}^1$ es de n hojas, ya que contando multiplicidades $f^{-1}(0) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y así por (3.52)(i) $F \in \mathcal{M}_X$ satisface una ecuación

$$F^n + \sum_{j=0}^{n-1} r_j F^j = 0$$

con $r_j \in \mathbb{C}(z)$. Se sigue que:

$$n \cdot v(F) = v(F^n) = v\Big(-\sum_{j=0}^{n-1} r_j F^j\Big) \geq \min\{\mathrm{ord}_0(r_j) + j \cdot v(F)\}_{0 \leq j \leq n-1}$$

así, si $v(F) < 0$ entonces algún $\mathrm{ord}_0(r_j) < 0$.

Ahora, por la definición de funciones simétricas elementales y (3.26), $r_j(0) = (-1)^j s_j(F_1(0), \ldots, F_n(0))$ donde $F_j(0) := F \circ \tau_j(0)$, $\tau_j(0) = f^{-1}(0) =$

x_j, y así $F_j(0) = F(x_j)$, entonces $r_j(0)$ es una función simétrica de los valores de F en los puntos $x_1, \ldots, x_n$, y así F debe tener un polo en uno de los puntos x_j.

Similarmente, si $v(F) > 0$, entonces $v(F^{-1}) < 0$ y así por el argumento anterior F debe tener un cero en uno de los puntos x_j.

Se sigue que, siempre que $0 \neq F(x_j) \neq \infty$ para todas las $j = 0, \ldots, m$ se debe tener que $v(F) = 0$.

Denotemos ahora con $x_1, \ldots, x_m$ a los ceros distintos de f (i.e., no los repetimos de acuerdo a su multiplicidad). Por (*) existe $h \in \mathcal{M}_X$ que separa a los puntos $x_1, \ldots, x_m$ y de hecho podemos suponer que $0 \neq h(x_j) \neq \infty$. Entonces, por el argumento de arriba se sigue que $v(h) = 0$.

Consideremos ahora la función:

$$\phi := \frac{f}{\prod_{j=1}^{m}(h - h(x_j))^{\mathrm{ord}_{x_j}(f)}}$$

Como los x_j son ceros de f de multiplicidad $\mathrm{ord}_{x_j}(f)$, entonces esta función ϕ está definida, es holomorfa y no cero en los puntos $x_1, \ldots, x_m$. Así, $0 \neq \phi(x_j) \neq \infty$, lo cual implica que $v(\phi) = 0$, i.e.,

$$0 = v(f) - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ord}_{x_j}(f) \cdot v\,(h - h(x_j))$$

es decir,

$$1 = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ord}_{x_j}(f) \cdot v(h - h(x_j))$$

Y como $v(h - h(x_j)) \geq 0$ ya que $v(h) = 0 = v(h(x_j))$ entonces existe un único k tal que $v(h - h(x_k)) = 1 = \mathrm{ord}_{x_k}(f)$ y tal que $v(h - h(x_j)) = 0$ para todas las $j \neq k$.

Ahora, para $F \in \mathcal{M}_X$ arbitraria consideremos la función

$$\Phi := \frac{F}{\prod_{j=1}^{m}(h - h(x_j))^{\mathrm{ord}_{x_j} F}}$$

y obsérvese que si F tuviera un cero (o polo) en x_j, éste se cancelaría con el denominador, y así esta función Φ satisface que $0 \neq F(x_j) \neq \infty$ para todas las j, y por lo tanto $v(\Phi) = 0$, i.e.,

$$v(F) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ord}_{x_j}(F)\, v\,(h - h(x_j)) = \mathrm{ord}_{x_k}(F)$$

y así $x := x_k$ es el punto deseado. Q.E.D.

Usando el teorema anterior tenemos el resultado principal:

Teorema 3.36 *Sean X, Y superficies de Riemann compactas, y sea $F : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras (y por lo tanto inyectivo). Entonces, existe una única aplicación holomorfa $F^+ : X \to Y$ tal que para cualesquiera $f \in \mathcal{M}_Y$ se tiene que $F(f) = f \circ F^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X$. Usando al morfismo F definimos una valuación $v_x : \mathcal{M}_Y \to \mathbb{Z}$ como: $v_x(f) := \mathrm{ord}_x(F(f))$.

Por el teorema anterior existe un único punto $y \in Y$ tal que $v_x(f) = \mathrm{ord}_x(F(f)) = \mathrm{ord}_y(f)$ para todo $f \in \mathcal{M}_Y$. Se define entonces $F^+ : X \to Y$ como $F^+(x) := y$.

Veamos ahora que esta función F^+ satisface la propiedad $F(f)(x) = f(F^+(x))$. En efecto, para los puntos $x \in X$ tales que $f(F^+(x)) = \infty$ se tiene que $\mathrm{ord}_{F^+x}(f) < 0$ y como por definición $\mathrm{ord}_x(F(f)) = \mathrm{ord}_{F^+x} < 0$ entonces $F(f)$ tiene un polo en x, i.e., $F(f)(x) = \infty$ y así $F(f)(x) = \infty = f(F^+(x))$.

Ahora, si $\lambda \in \mathbb{C}$ obsérvese que $\mathrm{ord}_{F^+x}(f - \lambda) \geq \min\{\mathrm{ord}_{F^+x}(f), \mathrm{ord}_{F^+x}(\lambda) = 0\}$, y si $f(F^+x) = \lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\mathrm{ord}_{F^+x}(f) \geq 0$, i.e., F^+x no es un polo de f. Se sigue que:

$$\begin{aligned} f(F^+x) = \lambda \in \mathbb{C} &\Leftrightarrow \mathrm{ord}_{F^+x}(f - \lambda) > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{ord}_x F(f - \lambda) = \mathrm{ord}_x(Ff - \lambda) > 0 \\ &\quad \text{(ya que } F : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X \text{ deja fijo a } \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}(z)) \\ &\Leftrightarrow (Ff)(x) = \lambda \end{aligned}$$

Para probar que $F^+ : Y \to X$ es continua, sea $\{y_n\}$ una sucesión en Y tal que $\lim_n y_n = y$. Si la sucesión $\{F^+y_n\}$ no converge a F^+y, entonces, como X es compacta, existiría una subsucesión de $\{F^+y_n\}$ que converge a un $x \neq F^+y$ en X. Sin perder generalidad podemos suponer que $\{F^+y_n\} \to x$.

Ahora, por (*) existe $f \in \mathcal{M}_X$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F^+y) = 1$. Se sigue que:

$$f(F^+y_n) = (Ff)(y_n) \longrightarrow (Ff)(y) = f(F^+y) = 1$$

y

$$f(F^+y_n) \longrightarrow f(x) = 0$$

lo cual es una contradicción.

Para probar que $F^+ : Y \to X$ es holomorfa, sea $y \in Y$ arbitrario y escojamos $f \in \mathcal{M}_X$ inyectiva en una vecindad U alrededor de $F^+y \in X$. Claramente Ff no es constante, ya que de lo contrario $f \circ F^+ = Ff$ sería constante. Entonces existe una vecindad V alrededor de $y \in Y$ tal que $F^+(V) \subseteq U$ y $(Ff)(V) \subseteq f(U)$. Entonces, como $F(f) = f \circ F^+$ con

f inyectiva en U, se sigue que $F^+ = f^{-1} \circ F(f)$ en V, con $F(f)$ y f^{-1} holomorfas en V. Consecuentemente F^+ es holomorfa en V.

Finalmente, F^+ es única con las propiedades anteriores porque $\mathcal{M}_Y$ separa puntos por (*). Q.E.D.

Corolario 3.37 *La correspondencia $F \mapsto F^+$ es funtorial, i.e.*

(1): Si $id : \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_X$ es el morfismo identidad, entonces $id^+ : X \to X$ es la aplicación identidad.

(2): Si $\mathcal{M}_Z \xrightarrow{G} \mathcal{M}_Y \xrightarrow{F} \mathcal{M}_X$ son morfismos de $\mathbb{C}$-álgebras, entonces $(F \circ G)^+ = G^+ \circ F^+$.

La consecuencia más importante es la siguiente:

Corolario 3.38 *Sean X y Y superficies de Riemann compactas. Entonces:*

(1): Si $F : X \to Y$ es una aplicación holomorfa y $F^* : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$ es el morfismo inducido entre sus álgebras de funciones meromorfas, entonces $F^{*+} : X \to Y$ es precisamente F.

(2): Recíprocamente, si $F : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$ es un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras y $F^+ : X \to Y$ es la aplicación inducida, entonces $F^{+*} : \mathcal{M}_Y \to \mathcal{M}_X$ es precisamente F.

En otras palabras: Los funtores

$$\mathcal{M} : \mathcal{SC} \to \mathbb{C}\text{-álg}$$

y

$$\mathcal{S} : \mathbb{C}\text{-álg} \to \mathcal{SC}$$

son inversos uno del otro, i.e., inducen una equivalencia de categorías.

Capítulo 4

Cohomología de Gavillas

En este capítulo introducimos la noción de cohomología de un espacio con coeficientes en una gavilla. Esto nos proporcionará importantes invariantes algebraicos para el estudio de las superficies de Riemann y de hecho muchos invariantes topológicos y geométricos de las superficies de Riemann se pueden definir usando grupos de cohomología. Se darán algunas aplicaciones de los conceptos y resultados introducidos en este capítulo, pero será hasta el siguiente cuando se tendrán resultados verdaderamente importantes.

Hay varias maneras de introducir grupos de cohomología con coeficientes en una gavilla y hemos elegido la cohomología de Čech por lo directo de su definición, y bajo circunstancias razonables (p.ej., el Teorema de Leray (4.43)) es fácil de computar. Probaremos que cuando X es paracompacto, la cohomología de Čech de X coincide con la cohomología del complejo de cadenas que resulta al aplicar el funtor secciones globales $\Gamma(X,-)$ a una *resolución fina* (introducida por Gunning y Rossi) de la gavilla en consideración.

Comenzamos profundizando nuestro estudio de la categoría de gavillas sobre un espacio topológico X, preparando el camino para poder usar métodos del álgebra homológica para obtener información sobre X. Para comenzar definimos la noción de morfismo entre gavillas $\varphi : F \longrightarrow G$ como una transformación natural entre funtores. Así tendrá sentido hablar de sucesiones exactas de gavillas

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

Si ahora, como es usual, para una gavilla F, denotamos por

$$\Gamma(-,F) = F(-)$$

al funtor correspondiente, al considerar las secciones globales de cada gavilla en la sucesión exacta $(*)$ se obtendrá una sucesión exacta de la forma:

$$O \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G) \to \Gamma(X, K),$$

donde el último morfismo *no* necesariamente es suprayectivo. De alguna manera, la "medida" de esta falta de suprayectividad es lo que nos lleva a considerar grupos de cohomología asociados a X y a una gavilla dada.

4.1 La Categoría de Gavillas

En esta sección extenderemos el estudio de las gavillas que iniciamos en §3.1 con la intención de poder usar métodos del álgebra homológica en el estudio de las superficies de Riemann.

Se introducirán los conceptos de morfismos entre (pre)gavillas, núcleos, imágenes y sucesiones exactas de gavillas, de tal forma que la categoría de gavillas resultante será adecuada para hacer álgebra homológica.

En este sentido también se introducirán las ideas de sub-gavillas, gavillas cociente, y se construye la gavilla asociada (en forma canónica) a una pregavilla. Las ideas anteriores se ilustrarán con ejemplos de gavillas de interés en el estudio de superficies de Riemann, nuestras ya familiares gavillas $\mathcal{O}_X$ y $\mathcal{M}_X$.

Por ser de importancia en el desarrollo posterior de la teoría, recordaremos los conceptos de formas diferenciales, formas holomorfas y formas meromorfas, introduciendo también las correspondientes gavillas y morfismos entre ellas.

Morfismos entre Pregavillas: Sea X un espacio topológico, recordemos que una pregavilla (de grupos abelianos, por ejemplo) en X es un funtor contravariante $F : \mathrm{Top}(X) \to \mathrm{Ab}$.

Así tiene sentido definir un *morfismo entre pregavillas* F, G, en X como una transformación natural entre funtores:

$$\eta : F \to G$$

En otras palabras, η consiste de una familia de morfismos $\eta_U : F(U) \to G(U)$ (uno para cada abierto $U \subseteq X$), tales que para cada inclusión de abiertos $V \subseteq U$, los cuadrados siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\eta_U} & G(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(V) & \xrightarrow{\eta_V} & G(V) \end{array}$$

donde las flechas verticales son las restricciones correspondientes.

Si F y G son gavillas, un *morfismo de gavillas* $\eta : F \to G$ es un morfismo entre las pregavillas subyacentes.

Observación: Si F es una (pre)gavilla en X, entonces

$$id : F \to F$$

definido obviamente como $id_U : F(U) \to F(U)$ el morfismo identidad, es un morfismo de (pre)gavillas llamado también el *morfismo identidad.*

Si $\alpha : F \to G$ y $\beta : G \to K$ son morfismos de (pre)gavillas, entonces la *composición* $\beta \circ \alpha : F \to K$ definida como: $(\beta \circ \alpha)_U = \beta_U \circ \alpha_U : F(U) \to G(U) \to K(U)$ también es un morfismo de (pre)gavillas.

Así se tienen las categorías $\mathcal{G}(X)$ y $\mathcal{P}(X)$ de gavillas y pregavillas sobre X respectivamente, con *objetos* las gavillas (respectivamente pregavillas) y *morfismos* los morfismos entre gavillas (respectivamente pregavillas).

Definición 4.1 Un morfismo de (pre)gavillas $\eta : F \to G$ se llama un *isomorfismo* si η tiene un inverso bilateral $\varphi : G \to F$, es decir, φ es un morfismo de (pre)gavillas tal que:

$$\eta \circ \varphi = id : G \to G \quad \text{y} \quad \varphi \circ \eta = id : F \to F.$$

Lema 4.2 *Un morfismo de (pre)gavillas $\eta : F \to G$ es un isomorfismo si y sólo si para todo abierto $U \subseteq X$, el morfismo $\eta_U : F(U) \to G(U)$ es un isomorfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación ($\Rightarrow$) es obvia. Recíprocamente, si cada $\eta_U : F(U) \to G(U)$ es un isomorfismo (de grupos), sea $\varphi_U : G(U) \to F(U)$ su inverso. Entonces $\varphi = \{\varphi_U\} : G \to F$ es claramente una transformación natural que es inversa de η. Q.E.D.

Obsérvese ahora que si $\eta : F \to G$ es un morfismo de pregavillas en X, entonces para cada $x \in X$, η induce morfismos entre las fibras:

$$\eta_x : F_x \to G_x$$

ya que para cualesquiera vecindades abiertas U, V de x en X con $V \subseteq U$, los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{\eta_V} & G(V) \\ \rho \uparrow & & \uparrow \rho \\ F(U) & \xrightarrow{\eta_U} & G(U) \end{array}$$

y así pasando al límite directo (sobre las vecindades de $x \in X$) se tiene el morfismo inducido en las fibras:

$$\eta_x : \lim_{U \ni x} F(U) \to \lim_{U \ni x} G(U)$$

La proposición siguiente (que como veremos en el ejemplo después de (4.9), es falsa, en general, para pregavillas) ilustra la naturaleza local de una gavilla:

Proposición 4.3 *Un morfismo $\eta : F \to G$ entre gavillas sobre X es un isomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$ los morfismos inducidos entre las fibras $\eta_x : F_x \to G_x$ son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\eta : F \to G$ es un isomorfismo entonces por (4.2) cada $\eta_U : F(U) \to G(U)$ es un isomorfismo y así en el límite $\eta_x : F_x \to G_x$ también es un isomorfismo para cada $x \in X$.

Recíprocamente, supongamos que para todo $x \in X$ los morfismos $\eta_x : F_x \to G_x$ son isomorfismos. Mostraremos que para cada abierto $U \subseteq X$ las aplicaciones $\eta_U : F(U) \to G(U)$ son isomorfismos, y así por (4.2) η será un isomorfismo de gavillas. Sea pues $U \subseteq X$ un abierto cualquiera:

(i): $\eta_U : F(U) \to G(U)$ es *inyectivo*: En efecto, sea $s \in F(U)$ una sección tal que $\eta_U(s) = 0$ en $G(U)$. Entonces, para todo $x \in U$ el germen $[\eta_U(s)]_x$ de $\eta_U(s) = 0$ en G_x es cero. Así, $0 = [\eta_U(s)]_x = \eta_x[s]_x$ y como $\eta_x : F_x \to G_x$ es un isomorfismo, entonces $[s]_x = 0$ en F_x, y esto para todo $x \in U$.

Entonces, como $[s]_x = 0$, por definición de límite, existe una vecindad abierta, W_x de x, con $W_x \subseteq U$, tal que $s|_{W_x} = 0$ (i.e., es cero en algún nivel). Y como las W_x, para $x \in U$, forman una cubierta abierta de U, y la sección $s \in F(U)$ es tal que $s|_{W_x} = 0$ para toda W_x en esta cubierta, entonces $s = 0$ en U ya que F es gavilla.

(ii): $\eta_U : F(U) \to G(U)$ es *suprayectivo:* En efecto, sea $t \in G(U)$ una sección cualquiera. Para cada $x \in U$ sea $[t]_x \in G_x$ el germen correspondiente. Como $\eta_x : F_x \to G_x$ es un isomorfismo, existe un único germen $[s]_x \in F_x$ tal que $\eta_x[s]_x = [t]_x$.

Representemos al germen $[s]_x$ en algún nivel por una sección $\langle s_x, V_x \rangle$ donde $V_x \subseteq U$ es una vecindad abierta de x y $s_x \in F(V_x)$ es una sección.

Así $\eta(s_x) \in G(V_x)$ y $t|_{V_x} \in G(V_x)$ son dos secciones cuyos gérmenes en x son iguales. Entonces, en algún nivel $W_x \subseteq V_x \subseteq U$ son iguales, i.e., $\eta(s_x)|_{W_x} = t|_{W_x}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $W_x = V_x$.

Claramente U está cubierto por las W_x, y en cada uno de los W_x tenemos secciones $s_x \in F(W_x)$.

Supongamos ahora que $x, z \in U$ son dos puntos y sean $s_x \in F(W_x)$, $s_z \in F(W_z)$ las secciones y abiertos construídos anteriormente. Entonces las restricciones $s_x|_{W_x \cap W_z}$ y $s_z|_{W_x \cap W_z}$ son dos secciones en $F(W_x \cap W_z)$ tales que

$$\eta(s_x|_{W_x \cap W_z}) = t|_{W_x \cap W_z} = \eta(s|_{W_x \cap W_z})$$

en $G(W_x \cap W_z)$, por definición de s_x y s_z.

Ahora, por la parte (i), $\eta : F(W_x \cap W_z) \to G(W_x \cap W_z)$ es inyectivo, Se sigue que $s_x|_{W_x \cap W_z} = s_z|_{W_x \cap W_z}$.

Así , para cada W_x (que cubran a U) se tienen secciones locales s_x que coinciden en las intersecciones. Por lo tanto, como F es gavilla, existe una única sección global $s \in F(U)$ tal que $s|_{W_x} = s_x$ para toda $x \in U$.

Probaremos finalmente que: $\eta_U(s) = t \in G(U)$. En efecto, $\eta_U(s), t \in G(U)$ son dos secciones tales que para cada $x \in U$ se tiene $\eta(s)|_{W_x} = t|_{W_x}$, y como G es gavilla (y los W_x cubren U), se sigue que $\eta(s) = t$ en $G(U)$. Q.E.D.

A continuación introducimos los conceptos esperados de sub-pregavilla, pregavilla cociente, núcleo, imagen y conúcleo de un morfismo de pregavillas, y después, con las adaptaciones necesarias en algunos casos, los correspondientes conceptos para gavillas.

Núcleo, imagen y conúcleo de un morfismo entre pregavillas: Sea $\varphi : F \to G$ un morfismo de pregavillas.

(i): La *pregavilla núcleo* de φ, denotada ker φ, está dada como sigue: Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces:

$$(\ker \varphi)(U) := \ker (F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U)).$$

(ii): La *pregavilla imagen de* φ, denotada Im φ, está dada como sigue: Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces:

$$(\text{Im } \varphi)(U) := \text{Im } (F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U).$$

(iii): La *pregavilla conúcleo de* φ, denotada Coker φ está dada por: Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces:

$$(\text{Coker } \varphi)(U) := \text{Coker } (\varphi_U) := G(U)/\text{Im } (\varphi_U).$$

En cada caso los morfismos restricción se definen en la forma obvia, y claramente ker φ, Im φ y Coker φ resultan pregavillas en X.

Definición 4.4 Si F y G son pregavillas en X, diremos que F es una *sub-pregavilla* de G, denotado $F \subseteq G$, si:

(i): Para cada abierto $U \subseteq X$, $F(U) \subseteq G(U)$ es un subgrupo.

(ii): Si $U \subseteq V$ son abiertos, entonces el morfismo $F(V) \to F(U)$ es la restricción del morfismo $G(V) \to G(U)$.

Si F es una sub-pregavilla de G, la *pregavilla cociente*, denotada G/F, está dada por:

(i) Para cada abierto $U \subseteq X$, $(G/F)(U) := G(U)/F(U)$

(ii) Si $U \subseteq V$ son abiertos, los morfismos $G(V) \to G(U)$ y $F(V) \to F(U)$ inducen, por paso al cociente, morfismos

$$(G/F)(V) \longrightarrow (G/F)(U).$$

Obsérvese que si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de pregavillas, entonces:

(1): $\ker \varphi \subseteq F$ es una sub-pregavilla.

(2): $\operatorname{Im} \varphi \subseteq G$ es una sub-pregavilla.

(3): $\operatorname{Coker} \varphi = G/\operatorname{Im} \varphi$ es una pregavilla cociente.

Antes de proseguir veamos algunos ejemplos:

Sea X una superficie de Riemann y consideremos las gavillas $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ en X y las (pre)gavillas constantes $\mathbb{C}_X$ y $\mathbb{Z}_X$ (con valores $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente) en X (§3).

(1) Como toda función holomorfa es diferenciable entonces $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{C}^\infty$ es una sub-pregavilla. Análogamente $\mathcal{C}^\infty \subseteq \mathcal{C}$. Entonces se tiene una cadena de sub-pregavillas:

$$\mathcal{O}^* \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{C}^\infty \subseteq \mathcal{C}.$$

(2): Similarmente, como las pregavillas $\mathbb{Z}_X$ y $\mathbb{C}_X$ se pueden considerar pregavillas de funciones constantes *ergo* holomorfas, entonces se tienen inclusiones de sub-pregavillas:

$$\mathbb{Z}_X \subseteq \mathbb{C}_X \subseteq \mathcal{O}_X.$$

(3): En general, si $F \subseteq G$ es una inclusión de pregavillas, entonces se puede considerar como un morfismo de pregavillas.

(4): El *morfismo exponencial* (muy importante, como se verá más adelante):

$$\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*,$$

se define como sigue: Sea $U \subseteq X$ un abierto, entonces $\exp : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U)$ está dado por: $\exp(s) := \exp(2\pi i s)$. Este es un homomorfismo de grupos ya que:

$$\begin{aligned} \exp(s+s): &= \exp(2\pi i(s+s')) = \exp(2\pi i s + 2\pi s s') \\ &= \exp(2\pi i s)\cdot\exp(2\pi i s') = \exp(s)\cdot\exp(s'). \end{aligned}$$

(5): *El núcleo del morfismo exponencial* es:

$$\ker(\exp)(U) := \{s \in \mathcal{O}(U) : \exp(2\pi i s) = 1\},$$

y como $\exp(2\pi i s) = 1 \Leftrightarrow s \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\ker(\exp) = \mathbb{Z}_X \subseteq \mathcal{O}_X.$$

(6) *El morfismo dado por las ecuaciones de Cauchy-Riemann*: Recordemos que $\mathcal{O}_X$ consiste de aquellas funciones diferenciables en X que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, i.e., si $f = u + iv \in \mathcal{C}^\infty_X$, entonces

$$\begin{aligned} f = u+iv \in \mathcal{O}_X &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ &\Leftrightarrow (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv) = 0, \end{aligned}$$

donde se define el operador diferencial

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u+iv) &= \frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)] \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})] \\ &= \frac{1}{2}[(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})]. \end{aligned}$$

Resumiendo: Dada $f = u + iv \in \mathcal{C}^\infty_X$, entonces

$$f \in \mathcal{O}_X \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f) = 0.$$

Obsérvese que como la diferenciación es un operador lineal (en particular aditivo), entonces

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{C}^{\infty}_{X} \to \mathcal{C}^{\infty}_{X}$$

es de hecho un *morfismo de gavillas*, y por las observaciones previas, se tiene que su núcleo es

$$\mathcal{O}_X = \ker \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Nota: El factor $1/2$ en la definición del operador $\partial/\partial\bar{z}$ se introduce para que al considerar el otro operador

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

se tenga lo que se espera, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

El resultado siguiente, aunque sencillo, es importante:

Proposición 4.5 *Si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de* gavillas, *entonces la pregavilla* ker $\varphi \subseteq F$ *es de hecho una gavilla.*

DEMOSTRACIÓN: (i): Sea $U \subseteq X$ un abierto y sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta de U. Supongamos que se tiene una sección $s \in (\ker \varphi)(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = O$ para toda U_α. Queremos mostrar que $s = 0$ en U.

En efecto, como $(\ker \varphi)(U) \subseteq F(U)$, entonces $s \in F(U)$ y como las restricciones de ker φ son las de F entonces $s|_{U_\alpha} = 0$ en $F(U_\alpha)$ para toda α, y por lo tanto $s = 0$ en $F(U)$ ya que F es gavilla. Entonces $s = 0$ en $(\ker \varphi)(U) \subseteq F(U)$.

(ii) Supongamos ahora que tenemos secciones $s_\alpha \in (\ker \varphi)(U_\alpha) \subseteq F(U_\alpha)$ tales que $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ para todos los α, β.

Entonces, como las restricciones de ker φ son las mismas que las de F, y como F es gavilla, existe una (única) $s \in F(U)$ tal que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ en $F(U_\alpha)$ para toda α.

Mostraremos que de hecho $s \in (\ker \varphi)(U)$. En efecto, como $s \in F(U)$ entonces $\varphi(s) \in G(U)$ y $\varphi(s|_{U_\alpha}) = \varphi(s_\alpha) = 0 \in G(U_\alpha)$ ya que $s_\alpha \in (\ker \varphi)(U_\alpha)$.

Ahora, como el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\varphi} & G(U) \\ \text{res}\downarrow & & \downarrow\text{res} \\ F(U\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & G(U_\alpha) \end{array}$$

entonces $\varphi(s)|_{U_\alpha} = \varphi(s|_{U_\alpha}) = 0$, y como G es gavilla se sigue que la sección $\varphi(s) = 0$ en $G(U)$, es decir, $s \in (\ker \varphi)(U)$ como se quería. Q.E.D.

Para el caso de la imagen de un morfismo se tiene, sin embargo:

Si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de *gavillas*, entonces la pregavilla $\text{Im}\varphi \subseteq G$ *no* es, en general, una gavilla. Un *contraejemplo* es el siguiente: Sea $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

Consideremos las gavillas $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}^*$ en $X = \mathbb{C}^*$ y al morfismo exponencial $\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$. Veremos que la pregavilla imagen $\text{Im}(\exp) \subseteq \mathcal{O}^*$ no es una gavilla (de hecho veremos que el axioma (ii) de la definición de gavilla no se satisface en este caso):

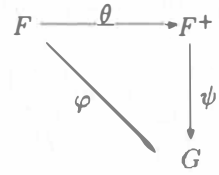
En efecto, para el abierto $U = X = \mathbb{C}^*$ consideremos la *cubierta* dada por $U_1 := \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ y $U_2 := \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^+$. Claramente cada uno de estos U_j es *simplemente conexo* y $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}$.

Ahora, como U_j es simplemente conexo, las funciones (secciones) $s_j \in \mathcal{O}^*(U_j)$ dadas por $s_j(z) := z$, $(s_j : U_j \to \mathbb{C}^*)$ se pueden escribir de la forma: $s_j(z) = \exp 2\pi i(f_j)(z)$ con $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ ya que como U_j es simplemente conexo entonces existe una rama holomorfa (univaluada) de log en U_j. Entonces, $s_j \in \text{Im}(\exp)$, $j = 1, 2$. Obsérvese que $s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2}$.

Sin embargo, como $U = U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}^*$ *no* es simplemente conexo, entonces no existe una rama holomorfa (univaluada) de log en $U = \mathbb{C}^*$, y así la función (sección) $s \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ dada por $s(z) = z$ *no* se puede escribir de la forma $s(z) = z = \exp(2\pi i(f))(z)$ con $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, i.e., no existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\exp(f)|_{U_j} = s_j$, i.e., no existe una sección global $t \in \text{Im}(\exp)$ tal que $t|_{U_j} = s_j$, y así $\text{Im}(\exp)$ no es una gavilla.

Para remediar lo anterior se introduce la construcción de la *gavilla asociada a una pregavilla*:

Teorema 4.6 (Gavilla Asociada a una Pregavilla) *: Sea F una pregavilla sobre un espacio X. Entonces: Existe una gavilla F^+ y un morfismo de (pre)gavillas $\theta : F \to F^+$ tal que para toda gavilla G y cualquier morfismo $\varphi : F \to G$, existe un único morfismo $\psi : F^+ \to G$ que hace conmutar el diagrama:*



A F^+ se le llama la *gavilla asociada a la pregavilla* F.

DEMOSTRACIÓN: Sea $|F|$ el espacio topológico asociado a la pregavilla F (3.5) con proyección $p : |F| \to X$. Así $|F| := \bigcup_{x \in X} F_x$.

Para cada abierto $U \subseteq X$, definamos

$$F^+(U) := \{s : U \to |F| \ : \ s \text{ es continua y } s(x) \in F_x\}.$$

Ahora, como F es pregavilla de grupos abelianos, entonces también $F^+(U)$ es un grupo abeliano definiendo $(s+s')(x) := s(x)+s'(x)$ (estamos sumando en F_x que es grupo abeliano, ya que $s(x), s'(x) \in F_x$).

Las restricciones de $F^+(U)$ son las usuales: Si $V \subseteq U$ son abiertos, entonces $\rho : F^+(U) \to F^+(V)$ es $\rho(s) := s|_V$.

(1) Claramente F^+ es una pregavilla en X. Más aún F^+ es una gavilla (la "gavilla de secciones" de $p : |F| \to X$) ya que:

(i): Supongamos que $U = \bigcup_i U_i$ y sean $s, s' \in F^+(U)$ tales que $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ para toda i. Entonces, si $x \in U = \bigcup_i U_i$ se tiene que $x \in U_j$ para algún índice j y así $s(x) = s'(x)$, i.e., $s = s'$ en U.

(ii): De nuevo, sea $U = \bigcup_i U_i$ y sean $s_i \in F^+(U_i)$ tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos los pares (i, j).

Defínase la sección $s \in F^+(U)$, $s : U \to |F|$, como $s(x) := s_i(x)$ si $x \in U_i$. Por la condición de compatiblidad de las s_j, s está bien definida, y por su misma definición $s|_{U_i} = s_i$.

Claramente s es continua y es una sección de p, i.e., $s \in F^+(U)$.

(2): El morfismo $\theta : F \to F^+$ se define como sigue:

Si $U \subseteq X$ es un abierto, $\theta_U : F(U) \to F^+(U)$ es el homomorfismo que manda $s \in F(U)$ a $s^+ : U \to |F|$, donde $s^+(x) := [s]_x \in F_x$.

Claramente $\theta_U(s + s')(x) = (s + s')^+(x) = [s + s']_x = [s]_x + [s']_x = \theta_U(s)(x) + \theta_U(s')(x)$.

Más aún, los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\theta_U} & F^+(U) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho^+ \\ F(V) & \xrightarrow{\theta_V} & F^+(V) \end{array}$$

conmutan, ya que si $s \in F(U)$,

$$\rho^+ \circ \theta_U(s) = \rho^+(s^+) = s^+|_V \quad \text{y} \quad \theta_V \circ \rho(s) = (\rho(s))^+.$$

Así para toda $x \in V$ se tiene que: $(\rho(s))^+(x) = [\rho(s)]_x$ y $(s^+|_V)(x) = [s]_x$. Pero $[\rho(s)]_x = [s]_x$ en el límite directo F_x.

Se sigue que $\theta : F \to F^+$ es en efecto un morfismo de pregavillas. Q.E.D.

Observaciones: (1): Como consecuencia de la propiedad universal del par (F^+, θ) anterior, se sigue que este par es único, salvo isomorfismo.

(2): Así si F misma es una gavilla entonces $F \approx F^+$.

(3): En general, para cada $x \in X$ existe un isomorfismo natural en las fibras: $\theta_x : F_x \to F_x^+$.

Definición 4.7 Sea $\varphi : F \to G$ un morfismo de gavillas.

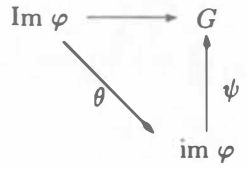
(1): La *gavilla núcleo* de φ, denotada $\ker \varphi$, es la pregavilla $\ker \varphi \subseteq F$ que es de hecho una gavilla por (4.5).

(2): La *gavilla imagen* de φ, denotada $\operatorname{im} \varphi$, es la gavilla asociada a la pregavilla $\operatorname{Im} \varphi \subseteq G$, i.e., $\operatorname{im} \varphi = (\operatorname{Im} \varphi)^+$.

(3): Sea F una subgavilla de la gavilla G en X. La *gavilla cociente*, denotada F/G es la gavilla asociada a la pregavilla cociente F/G de (4.4).

(4): Si $\phi : F \to G$ es un morfismo de gavillas, la *gavilla conúcleo*, denotada $\operatorname{coker} \phi$, es la gavilla asociada a la pregavilla $\operatorname{Coker} \phi$.

Observación: Si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de gavillas e $\operatorname{Im} \varphi \hookrightarrow (\operatorname{Im} \varphi)^+ = \operatorname{im} \varphi$ es el morfismo canónico (4.6), como G es gavilla, por la propiedad universal (4.6) existe un único morfismo $\psi : \operatorname{im} \varphi \to G$ tal que el diagrama siguiente conmuta:



En la proposición siguiente (4.9)(1) veremos que ψ es *inyectiva*, y así $\operatorname{im} \varphi$ se puede identificar con una subgavilla de G.

Definición 4.8 Sea $\varphi : F \to G$ un morfismo de gavillas.

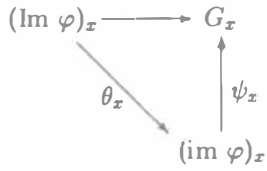
(1) φ es un *monomorfismo* si $\ker \varphi = 0$.

(2) φ es un *epimorfismo* si $\operatorname{im} \varphi \approx G$, (i.e., ψ es un isomorfismo).

Proposición 4.9 *Sea $\varphi : F \to G$ un morfismo de gavillas. Entonces,*

(1) φ es un monomorfismo si y sólo si $\varphi_x : F_x \to G_x$ es inyectivo para todo $x \in X$, si y sólo si $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ es inyectivo para todo abierto $U \subseteq X$.

Se sigue que el morfismo $\psi : im\ \varphi \to G$ de arriba es un monomorfismo, ya que el diagrama de arriba, en las fibras es:



con θ_x un isomorfismo. Por conmutatividad se sigue que ψ_x es inyectiva.

(2) φ es epimorfismo si y sólo si $\varphi_x : F_x \to G_x$ es suprayectivo para todo $x \in X$.

En general, si φ es epimorfismo los homomorfismos $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ no tienen por que ser suprayectivos.

DEMOSTRACIÓN: La parte (1) es un ejercicio fácil.

Para (2): Si φ es un epimorfismo, entonces $\psi : \operatorname{im} \phi \to G$ es un isomorfismo y así en el diagrama siguiente ψ_x es un isomorfismo por (4.3):

$$\begin{array}{ccc} F_x & \xrightarrow{\varphi_x} & G_x \\ \tilde{\varphi}_x \downarrow & & \downarrow \psi_x \\ (\operatorname{Im} \varphi)_x & \xrightarrow{\theta_x} & (\operatorname{im} \varphi)_x \end{array}$$

y θ_x es, siempre, un isomorfismo por la observación (3) después de (4.6), y claramente $\tilde{\varphi}_x : F_x \to (\operatorname{Im} \varphi)_x$ es suprayectivo. Se sigue que $\varphi_x : F_x \to G_x$ es suprayectivo.

El recíproco se sigue de la conmutatividad del diagrama anterior, que muestra que $\psi_x \circ \theta_x \circ \tilde{\varphi_x}^{-1} = \varphi_x$ con φ_x suprayectivo por hipótesis. Se sigue que ψ_x es suprayectivo, y como siempre es inyectivo por la observación en la parte (1), entonces cada ψ_x es un isomorfismo. Así , por (4.3) ψ es un isomorfismo. Q.E.D.

Finalmente un contraejemplo para justificar la segunda parte de (2) y la observación antes de (4.3):

Sea $X = \mathbb{C}^*$. El morfismo exponencial: $\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*$ es un epimorfismo ya que para cada $x \in X = \mathbb{C}^*$ fijo, $\exp : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}^*$ es un epimorfismo porque localmente cada función en $\mathbb{C}^*$ que no se anula tiene un logaritmo. Sin embargo, para $U = X = \mathbb{C}^*$ globalmente no existe un logaritmo y así $\exp : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X^*(U)$ no es suprayectiva.

Definición 4.10 Una sucesión de gavillas y morfismos de gavillas:

$$(*) \qquad \cdots \to F^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} F^i \xrightarrow{\varphi^i} F^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \cdots$$

se llama *exacta*, en el nivel i, si $\ker \varphi^i = \operatorname{im} \varphi^{i-1}$.

Proposición 4.11 *La sucesión anterior es exacta, en el nivel i si y sólo si para cada $x \in X$ la sucesión de fibras*

$$(**) \qquad \cdots \longrightarrow F_x^{i-1} \xrightarrow{\varphi_x^{i-1}} F_x^i \xrightarrow{\varphi_x^i} F_x^{i+1} \xrightarrow{\varphi_x^{i+1}} \cdots$$

es una sucesión exacta de grupos y homomorfismos, en el nivel i.

DEMOSTRACIÓN: ($\Rightarrow$): Si $(*)$ es exacta, entonces $\ker \varphi^i = \operatorname{im} \varphi^i$ y así $(\ker \varphi^i)_x = (\operatorname{im} \varphi^i)_x$. Pero, por definición (4.7)(1) $(\ker \varphi^i)_x = \ker \varphi_x^i$, y por la observación después de (4.7), $(\operatorname{im} \varphi^i)_x = (\operatorname{Im}\varphi^i)_x^+ \approx (\operatorname{Im}\varphi^i)_x = \operatorname{Im}\varphi_x^i$. Se sigue que $\ker \varphi_x^{i-1} = \operatorname{Im}\varphi_x^i$.

($\Leftarrow$): Se sigue de las igualdades de la primera parte y de (4.3). Q.E.D.

De la proposición (4.9) y de la anterior se sigue que:

(1): Una sucesión $O \to F \xrightarrow{\varphi} G$ de gavillas es exacta $\Leftrightarrow$ φ es un monomorfismo.

(2): Una sucesión $F \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 0$ es exacta $\Leftrightarrow$ $\psi : F \to G$ es un epimorfismo.

(3): Pero, obsérvese que por la parte (2) de (4.9), la exactitud de una sucesión de gavillas *no* es equivalente a la exactitud de las sucesiones correspondientes de secciones. Sin embargo, (4.10) dice que *sí* es equivalente a la exactitud de las sucesiones correspondiente de fibras. Esto refleja de nuevo la naturaleza *local* de las gavillas.

Definición 4.12 Una *sucesión exacta corta* de gavillas es una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} L \to 0.$$

Así en las fibras, se tienen sucesiones exactas cortas

$$0 \to F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} L_x \to 0,$$

sin embargo, por la observación (3) de arriba, no es cierto en general que se tengan sucesiones exactas cortas en las sucesiones de la forma:

$$0 \to F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G \xrightarrow{\psi_U} L(U) \to 0$$

ya que el ejemplo después de (4.9) es un contraejemplo a la suprayectividad de ψ_U. Lo que sí se tiene es:

Lema 4.13 *Si* $0 \to F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} L \to 0$ *es una sucesión exacta de gavillas en un espacio* X*, entonces para todo abierto* $U \subseteq X$ *la sucesión de secciones*

$$0 \to F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U) \xrightarrow{\psi_U} L(U)$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Por (4.9)(1) ϕ_U es inyectiva, y así $0 \to F(U) \xrightarrow{\phi_U} G(U)$ es exacta.

Para ver que $\operatorname{Im} \phi_U \subseteq \ker \psi_U$ basta ver que $\psi_U \circ \phi_U = 0$, pero esto se sigue del hecho que $\psi_U \circ \phi_U = (\psi \circ \phi)_U = (0)_U = 0$. La otra contención es directa. Q.E.D.

Ejemplos. Sea X una superficie de Riemann.

Ejemplo 1: La *sucesión exponencial* es una sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathbb{Z}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0, \ .$$

ya que exp es suprayectiva y su núcleo es $\mathbb{Z}_X$.

Ejemplo 2: Si $\bar{\partial}$ es el morfismo dado por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \to \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_X^\infty,$$

pero en general $\bar{\partial}$ no siempre es epimorfismo.

Formas Diferenciales. A continuación revisamos, en forma suscinta, algunos resultados sobre formas diferenciales en una superficie de Riemann, y aprovechando la estructura compleja de la misma veremos cómo se simplifican y enriquecen muchos de los conceptos geométrico-diferenciales en estas variedades.

Después de recordar las propiedades básicas de las formas diferenciales, en forma natural aparecerán ciertas gavillas (de formas diferenciales u holomorfas) que juegan un papel importante en el estudio de las variedades complejas.

Comenzamos recordando los conceptos de vectores tangentes, espacios tangentes, y diferenciales en una variedad diferencial cualquiera. Después se introducen los conceptos, importantes, de *haz tangente* y *haz cotangente* sobre una variedad diferencial.

Vectores tangentes. Un vector $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ se puede pensar como un operador en funciones diferenciales como sigue: Si f es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de un punto $x \in \mathbb{R}^n$, entonces v asigna a la función f un número real $v(f)$, que es la *derivada direccional* de f en la dirección de v, i.e.,

$$v(f) := v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}|_x + \cdots + v_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}|_x.$$

Como es bien conocido, esta operación satisface:

(i) v es $\mathbb{R}$-*lineal*: $v(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot v(f) + \beta \cdot (g)$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f, g funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ alrededor de x.

(ii) v satisface la *regla de Leibniz*: $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g)$.

La operación v depende sólo de las *propiedades locales* de la función f, i.e., depende sólo de las propiedades de f en vecindades arbitrariamente pequeñas del punto $x \in \mathbb{R}^n$ en el cual se está calculando la derivada direccional de f. Estas propiedades locales de las funciones diferenciales están englobadas en el concepto de *gavilla*, y como estamos considerando funciones diferenciales, la gavilla que interesa es la gavilla $\mathcal{C}^\infty$, a la que denotaremos a partir de ahora como $\mathcal{E}$.

El concepto de derivada direccional anterior se generaliza a una variedad diferencial arbitraria como sigue:

Dada una variedad diferencial X y un punto $x \in X$, sea $\mathcal{E}_{X,x}$ la fibra de gérmenes de funciones diferenciales en x. Así, $\mathcal{E}_{X,x}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Mas aún, como podemos multiplicar gérmenes, de hecho $\mathcal{E}_{X,x}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra asociativa y conmutativa.

Definición 4.14 Sea X una variedad diferencial y $x \in X$ un punto. Un *vector tangente* a X en el punto x es una *derivación* en el álgebra $\mathcal{E}_{X,x}$, es decir, es una función $v : \mathcal{E}_{X,x} \to \mathbb{R}$ que satisface:

(i) v es $\mathbb{R}$-*lineal*, i.e.,

$$v(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot v(f) + \beta \cdot v(g),$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{E}_{X,x}$.

(ii) v satisface la *regla de Leibniz*, i.e.,

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g),$$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{E}_{X,x}$.

Observación. Si denotamos con T_xX al conjunto de vectores tangentes a X en x, y definimos las operaciones:

$(v + w)(f) := v(f) + w(f)$, para $v, w \in T_xX$ y $f \in \mathcal{E}_{X,x}$.

$(\alpha \cdot v)(f) := \alpha \cdot (v(f))$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in T_xX$, $f \in \mathcal{E}_{X,x}$,

entonces, T_xX es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, al que se llama el *espacio tangente* a X en el punto x.

Nuestro primer objetivo es mostrar que si X es una n-variedad diferencial, entonces $\dim_{\mathbb{R}} T_xX = n = \dim X$. Para esto, es conveniente tener otra descripción del espacio tangente T_xX:

Sea $M_x \subseteq \mathcal{E}_{X,x}$ el conjunto de gérmenes que se anulan en x, i.e.,

$$M_x := \{f \in \mathcal{E}_{X,x} \ : \ f(x) = 0\},$$

(recuérdese que un germen f en x sólo tiene un valor bien definido en x, y este valor es: $f(x) = \tilde{f}(x)$, donde $\tilde{f}$ es cualquier representante del germen f).

El conjunto M_x es un *ideal* del álgebra $\mathcal{E}_{X,x}$, y considerando potencias M_x^k de este ideal (M_x^k es el ideal generado por las combinaciones lineales finitas de productos de k elementos de M_x), se tiene una cadena decreciente de ideales:

$$\cdots \subseteq M_x^k \subseteq \cdots \subseteq M_x^2 \subseteq M_x \subseteq \mathcal{E}_{X,x}.$$

Nos interesa el *cociente* M_x/M_x^2 que claramente es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Lema 4.15 *El espacio vectorial T_xX es naturalmente isomorfo al espacio vectorial dual $(M_x/M_x^2)^*$.*

DEMOSTRACIÓN. (i): Definamos $\phi : T_xX \to (M_x/M_x^2)^*$ como sigue: Si $v \in T_xX$, entonces $v : \mathcal{E}_{X,x} \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal tal que su restricción a $M_x \subseteq \mathcal{E}_{X,x}$ se anula en M_x^2 ya que M_x^2 está generado por los productos $f \cdot g$, con $f, g \in M_x$, i.e., $f(x) = 0 = g(x)$, y como v es derivación, entonces:

$$v(fg) = f(x) \cdot v(g) + v(g) \cdot g(x) = 0,$$

y así v induce una funcional lineal $v : M_x/M_x^2 \to \mathbb{R}$. Se define entonces $\phi : T_xX \to (M_x/M_x^2)^*$ como $\phi(v) := v|_{M_x}$. Claramente ϕ es lineal.

(ii): Recíprocamente, se define $\psi : (M_x/M_x^2)^* \to T_xX$ como sigue: Dada $m \in (M_x/M_x^2)^*$, $\psi(m) := v_m \in T_xX$ es la derivación definida, para $f \in \mathcal{E}_{X,x}$, como:

$$v_m(f) := m([f - f(x)])$$

donde $f(x)$ es el germen constante y $[f - f(x)]$ es la clase lateral del germen $f - f(x) \in M_x$ en el espacio cociente M_x/M_x^2. Entonces:

(a): $v_m : \mathcal{E}_{X,x} \to \mathbb{R}$ es lineal ya que m lo es.

(b): v_m satisface la regla de Leibniz ya que

$$\begin{aligned} v_m(fg) &= m([fg - f(x)g(x)]) \\ &= m([(f - f(x))(g - g(x)) + f(x)(g - g(x)) + (f - f(x))g(x)]) \\ &= m([f - f(x)][g - g(x)]) + f(x)m[g - g(x)] + g(x)m[f - f(x)] \\ &= 0 + f(x)v_m(g) + g(x)v_m(f) \\ &= v_m(f)g(x) + f(x)v_m(g). \end{aligned}$$

(iii): Es claro que ϕ y ψ son inversas una de la otra. Q.E.D.

Usando este lema, se tiene que

$$\dim_{\mathbb{R}} T_xX = \dim_{\mathbb{R}}(M_x/M_x^2)^* = \dim_{\mathbb{R}}(M_x/M_x^2)$$

y así es suficiente probar la siguiente proposición, pero antes introducimos la siguiente definición:

Definición 4.16 Si X es una variedad diferenciable, $x \in X$ es un punto, y $f : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en una vecindad U del punto x, la *diferencial* de f en x es el elemento

$$df|_x := f - f(x) \in M_x/M_x^2$$

Obsérvese que la diferencia $f - f(x) \in \mathcal{E}_{X,x}$ claramente se anula en x, i.e., $f - f(x) \in M_x$, y así su diferencial es su clase módulo M_x^2.

Proposición 4.17 *Sea X una n-variedad diferencial y sea $x \in X$ un punto. Entonces,*

$$\dim_{\mathbb{R}}(M_x/M_x^2) = n = \dim X.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea (U, ϕ) una carta coordenada alrededor de $x \in X$, $\phi = (x_1, \ldots, x_n) : U \subseteq X \to \mathbb{R}^n$. Así, se tienen n funciones reales alrededor de $x \in X$:

$$x_i : U \subseteq X \to \mathbb{R}$$

y podemos considerar sus gérmenes $x_i \in \mathcal{E}_{X,x}$, $1 \leq i \leq n$, y las diferencias $x_i - x_i(x) \in \mathcal{E}_{X,x}$ que claramente se anulan en x nos definen n gérmenes

$$dx_i := x_i - x_i(x) \in M_x \subseteq \mathcal{E}_{X,x}.$$

Probaremos que sus clases son una base de M_x/M_x^2:

(1) *Generan:* Sea $f \in M_x$ y consideremos un representante $[\tilde{f}, W]$ del germen f, $\tilde{f} : W \subseteq X \to \mathbb{R}$, y consideremos la expansión de Taylor de la función $\tilde{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap W) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ alrededor del punto $\phi(x)$:

$$f - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\tilde{f} \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}|_{\phi(x)}(x_i - x_i(x)) + \sum_{i,j}^{n}(x_i - x_i(x))(x_j - x_j(x))h$$

con h de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Ahora, como $f \in M - X$, entonces $f(x) = 0$, y así tomando clases laterales mod(M_x^2) se obtiene:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\tilde{f} \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}|_{\phi(x)}[x_i - x_i(x)] \ \text{mod}(M_x^2)$$

i.e., poniendo $a_i := \partial(\tilde{f} \circ \phi^{-1})/\partial u_i|_{\phi(x)} \in \mathbb{R}$, se tiene

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i[x_i - x_i(x)] = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i|_x \quad \text{en} \ M_x/M_x^2.$$

(2) *Independencia lineal:* Si $\sum_{i=1}^{n} a_i[x_i - x_i(x)] = 0$ en M_x/M_x^2, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_i(x)) \in M_x^2$ y así

$$\sum a_i(x_i - x_i(x)) \circ \phi^{-1} = \sum a_i(x_i \circ \phi^{-1} - x_i(x) \circ \phi^{-1}) = \sum a_i(u_i - u_i(\phi(x)))$$

es decir, $\sum a_i(u_i - u_i(\phi(x))) \in M^2_{\phi(x)}$, y entonces tomando derivadas parciales con respecto a u_j se obtiene

$$a_j = \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum a_j(u_i - u_i(\phi(x))\right)|_{\phi(x)} = 0$$

la última igualdad porque $\sum a_i(u_i - u_i(\phi(x))) \in M^2_{\phi(x)}$. Q.E.D.

El haz tangente y el haz cotangente. Si X es una n-variedad diferenciable, a la colección de todos los espacios tangentes $T_x X$, $x \in X$, se le puede dar una estructura de variedad diferenciable, y esta nueva variedad,

denotada TX, viene equipada con una aplicación diferencial $\pi : TX \to X$ que juega un papel importante en el estudio de la topología y geometría de X. Las definiciones formales son como sigue:

$$TX := \bigcup_{x \in X} T_x X$$

es la unión disjunta de los espacios tangentes a X. A los puntos de TX los denotaremos como pares ordenados (x, v) donde $x \in X$ y $v \in T_x X$. La proyección natural

$$\pi : TX \to X$$

está definida por $\pi(T_x) := x$, i.e., π proyecta todo un espacio tangente $T_x X \subseteq TX$ al punto de tangencia $x \in X$.

La estructura diferenciable que se le da a TX está naturalmente determinada por la estructura diferenciable de X. Formalmente, si $\mathcal{A} = \{(U, \phi)\}$ es un atlas diferenciable en X, para cada carta (U, ϕ) de $\mathcal{A}$, con $\phi = (x_1, \ldots, x_n)$, definimos funciones

$$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \subseteq TX \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

como sigue: Para cada $(x, v) \in \pi^{-1}(U) \subseteq TX$,

$$\tilde{\phi}(x, v) := (x_1(x), \ldots, x_n(x); dx_1(v), \ldots, dx_n(v))$$

donde $x_j : U \subseteq X \to \mathbb{R}$ y $dx_j : T_x X \to T_{x_j(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ es la diferencial de la función x_j en $x \in U$. Se prueba fácilmente que:

(i) $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \subseteq TX \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ es biyectiva, con imagen un abierto $\tilde{V}$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

(ii) Así, la colección

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{\tilde{\phi}^{-1}(W) \ : \ (U, \phi) \in \mathcal{A} \text{ y } W \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ es un abierto } \}$$

forma la base para una topología en TX.

(iii) Sea $\tilde{\mathcal{A}}$ la colección maximal, con respecto a (ii), que contiene al conjunto de cartas $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi}) \ : \ (U, \phi) \in \mathcal{A}\}$. Entonces, $\tilde{\mathcal{A}}$ es una estructura diferenciable en TX.

A TX, con esta estructura diferenciable, junto con la aplicación (diferenciable) $\pi : X \to X$, se le llama el *haz tangente* asociado a la variedad X.

Similarmente se define el *haz cotangente* T^*X asociado a X como sigue:

$$T^*X := \bigcup_{x \in X} (T_x X)^*$$

es la unión disjunta de los espacios tangentes duales $(T_xX)^* := M_x/M_x^2$. La proyección natural

$$\pi^* : T^*X \to X$$

está dada por: $\pi^*(T_xX)^* = x$.

Si (U, ϕ) es una carta en X, se define

$$\tilde{\phi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \subseteq T^*X \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

como:

$$\tilde{\phi}^*(x, v) := (x_1(x), \ldots, x_n(x); v(\partial/\partial x_1), \ldots, v(\partial/\partial x_n)),$$

donde pensamos a $v \in (T_xX)^*$ como a una funcional lineal $v : T_xX \to \mathbb{R}$, y $\partial/\partial x_1$, ..., $\partial/\partial x_n$ es la base de T_xX.

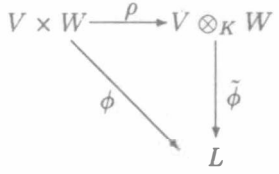
Procediendo como en el caso del haz tangente, se prueba que T^*X es una $2n$-variedad diferenciable y $\pi^* : T^*X \to X$ es una aplicación diferenciable.

Si $q \geq 0$ es un entero, las *q-formas diferenciales* que queremos definir serán secciones de haces vectoriales similares al haz cotangente, obtenidos con las q-ésimas *potencias exteriores* de los espacios vectoriales $(T_xX)^*$. Recordamos a continuación los conceptos pertinentes de álgebra multilineal.

Producto tensorial. Sean V y W espacios vectoriales sobre un campo K. Si L es otro K-espacio vectorial, recordemos que una *función bilineal* $\phi : V \times W \to L$ es una función que es K-lineal en cada una de sus dos variables, es decir,

(i): $\phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w)$
(ii): $\phi(\lambda v, w) = \lambda \cdot \phi(v, w)$
(iii): $\phi(v, w_1 + w_2) = \phi(v, w_1) + \phi(v, w_2)$
(iv): $\phi(v, \lambda w) = \lambda \cdot \phi(v, w)$
para $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, y $\lambda \in K$.

El producto tensorial de V y W es un K-espacio vectorial que *linealiza* en forma universal a las funciones bilineales definidas en $V \times W$. En términos precisos, el *producto tensorial* de V con W consiste de un K-espacio vectorial, denotado $V \otimes_K W$, y de una aplicación bilineal $\rho : V \times W \to V \otimes W$, que satisface la propiedad universal siguiente: Para cualquier otro K-espacio vectorial L y para cualquier aplicación bilineal $\phi : V \times_K W \to L$, existe una única aplicación lineal $\tilde{\phi} : V \otimes_K W \to L$ que hace conmutar el diagrama siguiente:



Como es usual con objetos definidos por propiedades universales, si el producto tensorial de dos espacios vectoriales existe, este es *único* salvo isomorfismo. Para mostrar la *existencia* del producto tensorial de dos espacios vectoriales la construcción es como sigue: Sean V y W dos K-espacios vectoriales y sea M el K-espacio vectorial cuya base es $V \times W$. En M consideremos el subespacio vectorial $N \subseteq M$ generado por los elementos de la forma:

(i): $(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$
(ii): $(\lambda v, w) - \lambda(v, w)$
(iii): $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$
(iv): $(v, \lambda w) - \lambda(v, w)$

y consideremos el espacio vectorial cociente

$$V \otimes_K W := M/N,$$

y al epimorfismo canónico

$$\rho : V \times W \to V \otimes_K W,$$

cuya imagen denotamos por $\rho(v, w) := v \otimes w$.

Nótese que las relaciones que definen al subespacio $N \subseteq M$ son tales que al pasar al espacio cociente M/N se vuelven *cero* y así el epimorfismo $\rho : V \times W \to V \otimes_K W$ es entonces bilineal.

Para ver que $V \otimes_K W$ y ρ satisfacen la propiedad universal del producto tensorial, sea $\phi : V \times W \to L$ cualquier aplicación bilineal. Defínase $\tilde{\phi} : V \otimes_K W \to L$ como $\tilde{\phi}(v \otimes w) := \phi(v, w)$. Que $\tilde{\phi}$ está bien definida es porque si $(v, w) \in N$ entonces (v, w) es una combinación lineal de los generadores de N, y como ϕ es bilineal, entonces se anula en estos generadores y así se anula en (v, w). Claramente $\tilde{\phi}$ es lineal, hace conmutar el diagrama correspondiente y es única con esta propiedad.

Las propiedades siguientes son inmediatas:

1: Si V y W son K-espacios vectoriales de dimensiones m y n respectivamente y si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ son bases de V y W, entonces los

mn elementos $e_i \otimes f_j \in V \otimes_K W$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, forman una base de $V \otimes_K W$. Se sigue que:

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K V \cdot \dim_K W.$$

2: Si V es cualquier K-espacio vectorial, entonces

$$V \otimes_K K \approx V.$$

3: Si V y W son K-espacios vectoriales, entonces existe un isomorfismo natural

$$V \otimes_K W \approx W \otimes_K V.$$

4: Si U, V, W son K-espacios vectoriales, se tiene un isomorfismo natural

$$U \otimes (V \otimes W) \approx (U \otimes V) \otimes W.$$

Estas propiedades se prueban fácilmente, por ejemplo para (3) obsérvese que la aplicación $\phi : V \times W \to W \otimes V$ dada por $\phi(v, w) = w \otimes v$ es bilineal y así por la propiedad universal del producto tensorial induce un único morfismo $\tilde{\phi} : V \otimes W \to W \otimes V$ tal que $\tilde{\phi}(v \otimes w) = w \otimes v$. Similarmente se tiene una aplicación lineal $\tilde{\psi} : W \otimes V \to V \otimes W$ tal que $\tilde{\psi}(w \otimes v) = v \otimes w$, y se prueba fácilmente que $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ son inversas una de la otra.

Ahora, usando la asociatividad natural (4) del producto tensorial, si V es un K-espacio vectorial podemos considerar, para cada entero $n \geq 1$ las ***potencias tensoriales***

$$\bigotimes^n V := V \otimes_K \cdots \otimes_K V,$$

(n factores.) Y para $n = 0$ se define $\bigotimes^0 V := K$. A los elementos $T \in \bigotimes^n V$ se les llama ***tensores.***

Tensores alternantes y potencias exteriores. Sea $n \geq 1$ un entero y denotemos con S_n al ***grupos simétrico*** en n letras, i.e., al grupo de permutaciones de un conjunto con n letras. Obsérvese que si V es un K-espacio vectorial, entonces el grupo S_n actúa en forma natural en

la n-ésima potencia tensorial $\bigotimes^n V$ como sigue: Dada cualquier permutación $\sigma \in S_n$ se tiene un isomorfismo $\sigma : \bigotimes^n V \to \bigotimes^n V$ definido por $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := v_{\sigma(v_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(v_n)}$.

Recuérdese ahora que toda permutación $\sigma \in S_n$ es el producto de transposiciones, y una permutación σ se llama *par* (respectivamente, *impar*) si σ es el producto de un número par (respectivamente, impar) de transposiciones. El *signo* de una permutación se define como

$$\text{sgn } (\sigma) := \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

Un tensor $T \in \bigotimes^n V$ se llama *alternante* si $\sigma(T) = (\text{sgn } \sigma) \cdot T$ para todo $\sigma \in S_n$. Obsérvese entonces que como el signo de una transposición τ es -1, y como toda permutación es el producto de transposiciones, entonces un tensor $T \in \bigotimes^n V$ es alternante si y sólo si $\tau(T) = -T$ para todas las transposiciones $\tau \in S_n$.

Si $u = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in \bigotimes^n V$ es un tensor alternante y si $u_i = u_j$ para algún $i \neq j$, entonces $u = 0$, ya que si $\tau = (i, j) \in S_n$ es una transposición, entonces $u = \tau(u) = (\text{sgn } \tau) \cdot u = -u$ y así $u = 0$ (si la característica del campo K no es 2).

En el espacio vectorial $\bigotimes^n V$ consideremos al subespacio $M \subseteq \bigotimes^n V$ generado por los tensores de la forma $u_1 \otimes \cdots u \otimes \cdots \otimes u \otimes \cdots u_n$. La *potencia exterior n-ésima* de V es el espacio vectorial cociente:

$$\bigwedge^n V := (\bigotimes^n V)/M.$$

Si $\pi : \bigotimes^n V \to \bigwedge^n V$ es el epimorfismo canónico, para $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in \bigotimes^n V$ usaremos la notación $\pi(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) =: u_1 \wedge \cdots \wedge u_n$. Con la notación anterior, se tiene:

1: Si $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_n \in \bigwedge^n V$ y si $u_i = u_j$ para algún $i \neq j$, entonces $u = 0$.

2: En $\bigwedge^n V$ se tiene que

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_n = -u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_n.$$

La parte (1) se sigue de la definición de potencia exterior, y para la parte (2) se tiene, por (1), que:

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 \wedge \cdots \wedge (u_i + u_j) \wedge \cdots \wedge (u_i + u_j) \wedge \cdots \wedge u_n \\ &= u_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge (u_i + u_j) \wedge \cdots \wedge u_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge (u_i + u_j) \wedge \cdots \wedge u_n \\
&= \quad u_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_n + u_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_n \\
&+ \quad u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_n + u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_n \\
&= \quad u_1 \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_n + u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_i \wedge \cdots \wedge u_n
\end{aligned}
$$

ya que en la penúltima igualdad el primero y el cuarto sumandos son cero por la parte (1).

Proposición 4.18 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n, y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Sea $p \geq 0$ un entero. Entonces,*

(1): $\bigwedge^p V = 0$ *para* $p > n$.

(2): $\dim_K(\bigwedge^p V) = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ *para* $0 \leq p \leq n$.

Y una base para $\bigwedge^p V$ *está dada por*

$$\mathcal{B}_p = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \ : \ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que el conjunto $\mathcal{B} = \{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} : 1 \leq i_j \leq n\}$ es una base para $\bigotimes^p V$.

Como $\pi : \bigotimes^p V \to \bigwedge^p V$ es suprayectiva y como $\mathcal{B}$ genera $\bigotimes^p V$, entonces sus imágenes bajo π, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} : 1 \leq i_j \leq n\}$ generan a $\bigwedge^p V$.

(1): Si $p > n$, para cada generador $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ de $\bigwedge^p V$ existen al menos dos subíndices $i_j = i_k$ con $j \neq k$ y así por la observación (1) previa a la proposición, el generador $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = 0$, i.e., $\bigwedge^p V = 0$ para $p > n$.

(2): Supongamos ahora que $0 \leq p \leq n$ y consideremos al conjunto

$$\mathcal{B}_p := \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \ : \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$$

y obsérvese primero que este conjunto tiene $\binom{n}{p}$ elementos ya que cada elemento $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ de $\mathcal{B}_p$ corresponde a una sucesión de números $i_1, \ldots, i_p$ tales que $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, i.e., a un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ de exactamente p elementos, y el número de estos subconjuntos es precisamente $\binom{n}{p}$. Así, una vez que mostremos que $\mathcal{B}_p$ es una base de $\bigwedge^p V$, se tendrá que $\dim_{\mathbb{R}}(\bigwedge^p V) = \#\mathcal{B}_p = \binom{n}{p}$. Mostraremos que $\mathcal{B}_p$ es, en efecto, una base de $\bigwedge^p V$.

(i): $\mathcal{B}_p$ genera $\bigwedge^p V$: Sea $v \in \bigwedge^p V$ y sea $\bar{v} \in \bigotimes^p V$ tal que $\pi(\bar{v}) = v$. Como $\mathcal{B}$ es una base de $\bigotimes^p V$, entonces $\bar{v}$ se puede escribir como

$$\bar{v} = \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$$

con $a_{i_1\cdots i_p} \in K$. Y como $v = \pi(\bar{v})$, entonces

$$v = \pi(\bar{v}) = \sum a_{i_1\cdots i_p} \cdot \pi(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = \sum a_{i_1\cdots i_p} \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

de tal forma que si en algún sumando $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ se tuviera que $e_{i_j} = e_{i_k}$ con $j \neq k$, entonces se tendría que $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = 0$, por lo que podemos considerar en $\bar{v}$ sólo aquellos sumandos que no tengan esta propiedad. Consideremos entonces al sumando $\tilde{v}$ de $\bar{v}$ correspondiente:

$$\tilde{v} := \sum a_{i_1\cdots i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \in \bigotimes^p V.$$

Nótese que todavía se tiene que $\pi(\tilde{v}) = v \in \bigwedge^p V$.

Cada sumando de $\tilde{v}$ está dado por un conjunto $(i_1, \ldots, i_p)$ de exactamente p elementos, $1 \leq i_j \leq n$. Entonces, existe una permutación $\sigma \in S_p$ tal que $(i_1, \ldots, i_p) = \sigma(\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_p)$ con $1 \leq \hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p \leq n$.

Entonces podemos escribir a $\tilde{v}$ como

$$\tilde{v} = \sum a_{i_1\cdots i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} = \sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} a_{\sigma(\hat{i}_1)\cdots\sigma(\hat{i}_p)} \cdot e_{\sigma(\hat{i}_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(\hat{i}_p)}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} v = \pi(\bar{v}) &= \sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} a_{\sigma(\hat{i}_1)\cdots\sigma(\hat{i}_p)} \cdot e_{\sigma(\hat{i}_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(\hat{i}_p)} \\ &= \sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} \sigma(a_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p} \cdot e_{\hat{i}_1} \wedge \cdots \wedge e_{\hat{i}_p}) \\ &= \sigma\left(\sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} a_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p} \cdot e_{\hat{i}_1} \wedge \cdots \wedge e_{\hat{i}_p}\right) \\ &= (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot \sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} a_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p} \cdot e_{\hat{i}_1} \wedge \cdots \wedge e_{\hat{i}_p} \\ &= \sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot a_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p} \cdot e_{\hat{i}_1} \wedge \cdots \wedge e_{\hat{i}_p} \end{aligned}$$

donde cada $e_{\hat{i}_1} \wedge \cdots \wedge e_{\hat{i}_p} \in \mathcal{B}_p$ y $(\operatorname{sgn}\sigma) \cdot a_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p} \in K$, y así cada $v \in \bigwedge^p V$ es una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}_p$.

(ii): $\mathcal{B}_p$ es linealmente independiente: En efecto, si

$$\sum_{\hat{i}_1 < \cdots < \hat{i}_p} a_{\hat{i}_1\cdots\hat{i}_p} \cdot e_{\hat{i}_1} \wedge \cdots \wedge e_{\hat{i}_p} = 0$$

en $\bigwedge^p V$, entonces levantando la suma a $\bigotimes^p V$ se tiene que

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \in M$$

donde M es el subespacio de $\bigotimes^p V$ de la definición de $\bigwedge^p V$. Se sigue que

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} = \sum b_{j_1\cdots j_p} \cdot e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p}$$

donde en cada sumando del lado derecho existen índices $s \neq r$ tales que $e_{j_r} = e_{j_s}$ por definición del subespacio M.

En particular, todos los generadores del lado derecho son distintos de los generadores del lado izquierdo ya que para estos se tiene que $i_1 < \cdots < i_p$. Así, en $\bigotimes^p V$ se tiene que

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p} \cdot e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} - \sum b_{j_1\cdots j_p} \cdot e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} = 0$$

con generadores distintos entre sí . Y como $\mathcal{B} = \{e_{k_1} \ldots e_{k_p}\}$ es una base de $\bigotimes^p V$, se sigue que todos los $a_{i_1,\ldots,i_p} = 0$ y todos los $b_{j_1,\ldots,j_p} = 0$ y así $\mathcal{B}_p$ es linealmente independiente. Q.E.D.

Para aplicar lo anterior al estudio de las variedades diferenciales tenemos que considerar, por supuesto, los espacios tangentes a la variedad.

Sea X una n-variedad diferenciable y sea $q \geq 0$ un entero. Para cada punto $p \in X$ consideremos el espacio cotangente $(T_pX)^*$ y sus q-ésimas potencias exteriores $\bigwedge^q (T_pX)^*$. Por (4.18), si $q > n = \dim_{\mathbb{R}} (T_pX)^* = \dim X$ se tiene que $\bigwedge^q (T_pX)^* = 0$, y para $q \leq n$, en la notación de la demostración de la proposición (4.17), si (U, ϕ) es una carta coordenada alrededor de $p \in X$, $\phi = (x_1, \ldots, x_n) : U \subseteq X \to \mathbb{R}^n$, los n gérmenes

$$dx_j := x_j - x_j(p) \in (T_pX)^*$$

son una base del espacio vectorial $(T_pX)^*$. Así, por (4.18), una base para $\bigwedge^q (T_pX)^*$ está dada por los elementos de la forma $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n$, y $\dim_{\mathbb{R}} (\bigwedge^q (T_pX)^*) = \binom{n}{q}$.

Ahora, si X es una variedad holomorfa, por ejemplo una superficie de Riemann, la estructura compleja de X nos provee de otra base para el espacio $(T_pX)^*$. Por simplicidad describiremos esta base sólo para el caso cuando X es una superficie de Riemann.

De nuevo, sean $p \in X$ un punto y (U, z) una carta coordenada (compleja) alrededor de p. Separando z en sus partes real e imaginaria escribamos $z = x + iy : U \subseteq X \to \mathbb{C}$ y consideremos a la gavilla $\mathcal{E}$ de funciones diferenciables en X. Además de las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U)$$

se tienen los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ahora, como las funciones $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ están en $\mathcal{E}(U)$ y claramente los gérmenes $z - z(p)$ y $\bar{z} - \bar{z}(p)$ se anulan en p, i.e., pertenecen a $M_p \subseteq \mathcal{E}_{X,p}$, entonces tiene sentido el considerar sus diferenciales en p

$$d_p z := z - z(p) \in (T_p X)^* \quad \text{y} \quad d_p \bar{z} := \bar{z} - \bar{z}(p) \in (T_p X)^*.$$

El resultado siguiente, que incluye a la proposición (4.17), nos dice que dz y $d\bar{z}$ también forman una base de $(T_p X)^*$.

Proposición 4.19 *Sean X una superficie de Riemann, $p \in X$ un punto y (U, z) una carta coordenada compleja alrededor de p. Escribamos $z = x + iy$ separando a z en sus partes real e imaginaria. Entonces,*

(1): Las diferenciales dx y dy forman una base del espacio cotangente $(T_p X)^*$.

(2): Similarmente, las diferenciales dz y $d\bar{z}$ forman una base de $(T_p X)^*$.

(3): Más aún, si f es un germen diferenciable en p, entonces

$$\begin{aligned} d_p f &= \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(p) \cdot dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) \cdot d\bar{z}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. La parte (1) se demostró en (4.17) y la parte (2) es similar. Para la parte (3), supongamos que $f \in \mathcal{E}_{X,p}$. Entonces, expandiendo f en serie de Taylor

$$f - f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot (x - x(p)) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot (y - y(p)) + \psi$$

donde $\psi \in M_p^2$. Reduciendo módulo M_p^2 se obtiene

$$d_p f := (f - f(p)) \bmod M_p^2 = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot dy$$

y similarmente para la base dz, $d\bar{z}$. Q.E.D.

Los básicos dz y $d\bar{z}$ de $(T_p X)^*$ generan subespacios vectoriales de dimensión 1. Si escogemos otra carta coordenada (U', z') alrededor de $p \in X$, se tiene otra base dz' y $d\bar{z}'$ de $(T_p X)^*$. Sin embargo, observemos que para las funciones $z', \bar{z}' : U' \to \mathbb{C}$, escribiendo $z' = u + iv$ y $\bar{z}' = u - iv$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z'}{\partial z}(p) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(z') - i\frac{\partial}{\partial y}(z')\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u) + i\frac{\partial}{\partial x}(v) - i\frac{\partial}{\partial y}(u) - i^2\frac{\partial}{\partial y}(v)\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left((\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} - (\frac{\partial u}{\partial y})\right)(p) \\
&=: a \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

y similarmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(p) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u - iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u - iv)\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left((\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) - i(\frac{\partial v}{\partial x} - (\frac{\partial u}{\partial y})\right)(p) \\
&= \bar{a} \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(p) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u + iv)\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\left((\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) + i(\frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial y})\right)(p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $z' = u + iv$ es holomorfa, i.e., está en el núcleo del operador de Cauchy-Riemann $\partial/\partial\bar{z}$.

Similarmente,

$$\frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(p) = 0.$$

Finalmente, usando (4.19)(3),

$$dz' = \frac{\partial z'}{\partial z}(p) \cdot dz + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(p) \cdot d\bar{z} = \frac{\partial z'}{\partial z}(p) \cdot dz = a \cdot dz$$

y similarmente

$$d\bar{z}' = \bar{a} \cdot d\bar{z}.$$

Se sigue que los subespacios vectoriales de dimensión 1 generados por dz y $d\bar{z}$ *no* dependen de la elección de la coordenada local (U, z) alrededor del punto $p \in X$. Usaremos la notación

$$T_p^{1,0} := \mathbb{C} \cdot dz \quad \text{y} \quad T_p^{0,1} := \mathbb{C} \cdot d\bar{z}$$

para estos subespacios de $(T_pX)^*$. Así, por construcción

$$(T_pX)^* = T_p^{1,0} \oplus T_p^{0,1}.$$

A los elementos de $T_p^{1,0}$ (respectivamente, $T_p^{0,1}$) se les llama *vectores cotangentes de tipo* $(1,0)$ (respectivamente, $(0,1)$).

Para cada germen $f \in \mathcal{E}_{X,p}$ se definen $d'_p f \in T_p^{1,0}$ y $d''_p f \in T_p^{0,1}$ mediante la regla

$$d_p f = d'_p f + d''_p f$$

es decir,

$$d'_p f := \frac{\partial f}{\partial z}(p) \cdot dz \qquad \text{y} \qquad d''_p f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) \cdot d\bar{z}$$

Definición 4.20 Sea $U \subseteq X$ un abierto de una superficie de Riemann X. Una 1-*forma diferencial* en U es una función

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} (T_pX)^*$$

tal que $\omega(p) \in (T_pX)^*$ para cada $p \in U$.

Si $\omega(p) \in T_p^{1,0}$ (respectivamente, $T_p^{0,1}$) para todo $p \in U$, diremos que ω es una 1-*forma de tipo* $(1,0)$ (respectivamente, $(0,1)$).

Ejemplo (1): Sea $f \in \mathcal{E}(U)$ y definamos

$$df : U \to \bigcup_{p \in U} (T_pX)^*$$

como $(df)(p) := d_p f \in (T_pX)^*$. Claramente df es una 1-forma.

Similarmente, para $f \in \mathcal{E}(U)$, las funciones

$$d'f : U \to \bigcup_{p \in U} (T_pX)^* \qquad \text{y} \qquad d''f : U \to \bigcup_{p \in U} (T_pX)^*$$

dadas por $(d'f)(p) := d'_p f$ y $(d''f)(p) := d''_p f$ son 1-formas de tipos $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente.

Obsérvese que una función $f \in \mathcal{E}(U)$ es *holomorfa* si y sólo si $d''f = 0$.

Ejemplo (2): Si ω es una 1-forma en $U \subseteq X$ y si $f : U \to \mathbb{C}$ es cualquier función, entonces la aplicación

$$f\omega : U \to \bigcup_{p \in U} (T_p X)^*$$

definida por $(f\omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p)$ es, también, una 1-forma en U.

Obsérvese ahora que si (U, z) es una carta coordenada de X, con $z = x + iy$, entonces, por (4.19), toda 1-forma ω en U se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \omega &= f \cdot dx + g \cdot dy \\ &= \phi \cdot dz + \psi \cdot d\bar{z} \end{aligned}$$

donde las funciones f, g, ϕ, ψ no necesariamente son continuas en general.

Definición 4.21 Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X. Una 1-forma ω en Y se llama *diferenciable* si con respecto a cualquier carta (U, z), $z = x + iy$, ω se puede escribir como $\omega = f dx + g dy$ en $U \cap Y$, con $f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y)$.

Una 1-forma ω en Y se llama *holomorfa* si con respecto a cualquier carta (U, z), ω se puede escribir como $\omega = f dz$ en $U \cap Y$ con $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$.

Con las definiciones obvias de suma y producto por un escalar complejo, el conjunto de 1-formas diferenciales en un abierto $U \subseteq X$, denotado $\mathcal{E}^{(1)}(U)$, es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Similarmente, se tienen los subespacios vectoriales de $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ de *1-formas diferenciales de tipo* $(1,0)$, denotado por $\mathcal{E}^{1,0}(U) \subseteq \mathcal{E}^{(1)}(U)$, y el *subespacio vectorial de 1-formas diferenciales* de tipo $(0,1)$, denotado por $\mathcal{E}^{0,1}(U) \subseteq \mathcal{E}^{(1)}(U)$.

En forma similar se tienen los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de *1-formas holomorfas* en U, denotados $\Omega^{(1)}(U)$.

Obsérvese ahora que si $U \subseteq V$ son abiertos de X, se tienen restricciones naturales

$$\mathcal{E}^{(1)}(V) \to \mathcal{E}^{(1)}(U)$$

(similarmente para $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$ y $\Omega^{(1)}$), que hacen que $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$ y $\Omega^{(1)}$ sean *gavillas de espacios vectoriales* en el espacio X.

Diferenciales abelianas. Así como se definen las funciones meromorfas como aquellas funciones que son holomorfas salvo por polos (aislados), podemos definir 1-*formas meromorfas* una vez que tengamos a la mano el concepto de *polo* de una 1-forma ω. Para esto, procedemos como sigue:

Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X, sea $p \in Y$ un punto y ω una 1-forma holomorfa en $Y - \{p\}$. Escojamos una carta coordenada (U, z) alrededor de p tal que $U \subseteq Y$ y tal que $z(p) = 0$. Entonces, en $U - \{p\} \subseteq Y - \{p\}$, la 1-forma holomorfa ω se puede escribir como $\omega = f\,dz$ con $f \in \mathcal{O}(U - \{p\})$. Consideremos ahora la expansión de Laurent de f alrededor de p con respecto a la coordenada z:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Si $c_n = 0$ para toda $n < 0$ entonces ω se puede extender en forma holomorfa a todo Y. En este caso p se llama una *singularidad removible* de ω.

Si existe $k < 0$ tal que $c_k \neq 0$ y $c_n = 0$ para toda $n < k$, entonces se dice que ω tiene un *polo de orden* k en p.

Si hay una infinidad de $n < 0$ con $c_n \neq 0$, se dice que ω tiene una *singularidad esencial* en p.

Definición 4.22 Una 1-forma ω en un abierto Y de una superficie de Riemann X se llama una 1-*forma meromorfa* en Y, si existe un abierto $Y' \subseteq Y$ tal que:

(i): ω es holomorfa en Y',
(ii): $Y - Y'$ consiste de puntos aislados,
(iii): ω tiene un polo en cada uno de los puntos de $Y - Y'$.

Denotaremos con $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$ al conjunto de todas las 1-formas meromorfas en Y. Con las operaciones naturales y la restricción usual, $\mathcal{M}^{(1)}$ es una *gavilla de espacios vectoriales* en X.

Las 1-formas meromorfas en X se llaman *diferenciales abelianas*.

Ahora, como $\dim_{\mathbb{R}}(T_pX)^* = 2$, la 2-potencia exterior

$$T_p^{(2)} := \bigwedge^2 (T_pX)^*$$

tiene dimensión 1 por (4.18), y si (U, z) es una carta coordenada alrededor de $p \in X$, con $z = x + iy$, entonces $d_p x \wedge d_p y$ es una base de $T_p^{(2)}$. Otra

base está dada por $d_p z \wedge d_p \bar{z}$. El cambio de base está dado por:

$$\begin{aligned} d_p z \wedge d_p \bar{z} &= (d_p(x+iy) \wedge d_p(x-iy)) \\ &= (d_p x + i d_p y) \wedge (d_p x - i d_p y) \\ &= d_p x \wedge d_p x - i d_p x \wedge d_p y + i d_p y \wedge d_p x - i^2 d_p y \wedge d_p y \\ &= 0 - i d_p x \wedge d_p y - i d_p x \wedge d_p y - 0 \\ &= -2i(d_p x \wedge d_p y) \end{aligned}$$

Definición 4.23 Sea Y un abierto de una superficie de Riemann X. Una *2-forma* en Y es una función

$$\omega : Y \to \bigcup_{p \in Y} T_p^{(2)},$$

tal que $\omega(p) \in T_p^{(2)}$ para cada $p \in Y$.

Una 2-forma ω en Y se llama *diferenciable* si se puede escribir como:

$$\omega = f \cdot dz \wedge d\bar{z}$$

con $f \in \mathcal{E}(U \cap Y)$, para cualquier carta (U, z) en X. Aquí $\omega = f dz \wedge d\bar{z}$ quiere decir que $\omega(p) = f(p) d_p z \wedge d_p \bar{z}$ para todo $p \in U \cap Y$.

Con las definiciones naturales, el conjunto $\mathcal{E}^{(2)}(Y)$ de 2-formas diferenciables en Y, es un espacio vectorial, y con las restricciones usuales, se tiene una gavilla, denotada por $\mathcal{E}^{(2)}$, la *gavilla de 2-formas diferenciables* en X.

Ejemplo 1: Si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ son 1-formas, entonces se tiene una 2-forma $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$ definida por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) := \omega_1(p) \wedge \omega_2(p),$$

para todo $p \in Y$.

Ejemplo 2: Si $f \in \mathcal{E}(Y)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$ entonces se tiene otra 2-forma $f\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$ dada por

$$(f\omega)(p) := f(p)\omega(p),$$

para todo $p \in Y$.

4.2 Cohomología de Čech

En esta sección asociamos a un espacio topológico X y a una gavilla (de grupos abelianos) F en X, grupos de cohomología $\check{H}^q(X,F)$ que son razonablemente fáciles de computar en el caso que nos interesa, (X paracompacto) y coinciden en ese caso y cuando F es la gavilla constante, con los grupos de cohomología singular usuales.

Estos grupos de cohomología serán una herramienta poderosa para el estudio de las superficies de Riemann como veremos en el capítulo siguiente.

Comenzamos asociando a cada *cubierta abierta* $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\Lambda$ de X y a cada gavilla F en X, grupos $H^q(\mathcal{U},F)$ tales que para $q = 0$ recuperan las secciones globales de F, i.e., $H^0(\mathcal{U},F) \approx \Gamma(X,F)$; después veremos que, con el orden natural en las cubiertas abiertas de X, los grupos $H^q(-,F)$ forman una *familia directa* y así, al considerar su *límite directo* tendremos grupos de cohomología asociados a X y a F, los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^q(X,F)$.

Cohomología de una cubierta: Sea X un espacio topológico. Recordemos que una *cubierta abierta* de X es una familia de abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, $U_\alpha \subseteq X$ tal que su unión es X.

Sea F una gavilla (de grupos abelianos) en X. Para definir los grupos de cohomología $H^q(\mathcal{U},F)$ asociados a $\mathcal{U}$ y a F, $q \geq 0$ un entero, definimos primero los grupos de cocadenas y los operadores cofrontera:

Cocadenas: Asociado a una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X y a una gavilla F en X, está un *complejo simplicial*, el *nervio* $N(\mathcal{U})$ de la cubierta $\mathcal{U}$, definido como sigue:

(i): Los *vértices* de $N(\mathcal{U})$ son los abiertos $U_\alpha \in \mathcal{U}$.

(ii): Los *q-simplejos* de $N(\mathcal{U})$ son las $(q+1)$-adas de abiertos: $(U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_q})$ con $(\alpha_0,\ldots,\alpha_q) \in \Lambda^{q+1}$.

El conjunto de q-simplejos de $N(\mathcal{U})$ lo denotamos por $N^q(\mathcal{U})$.

Definición 4.24 Sea $q \geq 0$ un entero. Una *q-cocadena* de $\mathcal{U}$ con coeficientes en la gavilla F es una función $f : N^q(\mathcal{U}) \to \{$ secciones de $F\}$ que asocia a cada q-simplejo $\sigma = (U_{\alpha_0},\ldots,U_{\alpha_q}) \in N^q(\mathcal{U})$ una sección $f(\sigma) \in \Gamma(|\sigma|,F)$, donde $|\sigma| := U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$.

Al conjunto de q-cocadenas lo denotamos por $C^q(\mathcal{U},F)$. Así,

$$C^q(\mathcal{U},F) := \{f : N^q(U) \to \bigcup_{\sigma\in N^q(U)} F(\sigma) \ : \ f(\sigma) \in F(\sigma)\}.$$

Es claro entonces, que para $q \geq 0$,

$$C^q(\mathcal{U}, F) = \prod_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_q)\in\Lambda^{q+1}} F(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}),$$

y como F es una gavilla de grupos abelianos, entonces el producto directo $C^q(\mathcal{U}, F)$ también es un grupo abeliano para cada $q \geq 0$ (la suma de dos q-cocadenas se hace componente a componente).

Definición 4.25 Los *operadores cofrontera*

$$\delta : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$$

se definen como sigue: Dada una q-cocadena $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$, $\delta f \in C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$ es la $(q+1)$-cocadena dada por: Si $\sigma = (U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_{q+1}}) \in N^{q+1}(\mathcal{U})$ es cualquier $(q+1)$-simplejo, pongamos $\sigma_j = (U_{\alpha_0}, \ldots, \widehat{U}_{\alpha_j}, \ldots, U_{\alpha_{q+1}})$ donde $\widehat{U}_{\alpha_j}$ quiere decir que se omite ese abierto, y entonces de define

$$(\delta f)(\sigma) := \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f(\sigma_j)\,|_{|\sigma|}$$

donde $f(\sigma_j)\,|_{|\sigma|}$ significa la *restricción* (en la gavilla F) de la sección $f(\sigma_j)$ de $F(|\sigma_j|)$ al abierto "más chico" $|\sigma|$, y así $f(\sigma_j)\,|_{|\sigma|} \in F(|\sigma|)$ como se quería, i.e., $\delta f \in C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$.

Es claro que:

(1): $\delta : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, F)$ es un homomorfismo de grupos, i.e., $\delta(f + g) = \delta f + \delta g$.

(2): Un cálculo directo muestra que

$$\delta \circ \delta = 0.$$

(3): En consecuencia, se tiene un *co-complejo* de grupos abelianos:

$$C^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U}, F) \to \cdots \to C^q(\mathcal{U}, F) \to \cdots.$$

(4): Como es usual, se definen los grupos de *cociclos* y *cofronteras*:

(i): *q-cociclos*: $Z^q(\mathcal{U}, F) := \text{Ker}\,(C^q(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^{q+1}(\mathcal{U}, F))$.

(ii): *q-cofronteras:* $B^q(\mathcal{U}, F) := \text{Im}\,(C^{q-1}(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^q(\mathcal{U}, F)$.

De la observación (2) se sigue que $B^q(\mathcal{U}, F) \subseteq Z^q(\mathcal{U}, F)$ para toda $q \geq 1$.

Definición 4.26 Sea $q \geq 0$ un entero. los q-ésimos *grupos de cohomología* de la gavilla F con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$ de X son:

$$H^q(\mathcal{U}, F) := Z^q(\mathcal{U}, F)/B^q(\mathcal{U}, F)$$

si $q \geq 1$, y

$$H^0(\mathcal{U}, F) := Z^0(\mathcal{U}, F)$$

si $q = 0$.

El lema siguiente identifica los 0-ésimos grupos de cohomología:

Lema 4.27 *Para X, $\mathcal{U}$, F como antes, se tiene $H^0(\mathcal{U}, F) \approx \Gamma(X, F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición,

$$H^0(\mathcal{U}, F) := \ker\,(C^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U}, F)).$$

Ahora, dada $f \in C^0(\mathcal{U}, F)$, $\delta f \in C^1(\mathcal{U}, F)$ es la 1-cocadena dada por:

$$(\delta f)(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}) := f(U_{\alpha_0})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}} - f(U_{\alpha_1})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}}$$

y así, $f \in \ker \delta$ si y sólo si para todo par $(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1})$ se tiene que

$$f(U_{\alpha_0})|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}} = f(U_{\alpha_1})\,|_{U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}},$$

es decir, si y sólo si las secciones $f(U_{\alpha_i})$ se pueden "pegar" para definir una *única* sección global (ya que F es gavilla) $g \in \Gamma(X, F)$ tal que $g|_{U_{\alpha_i}} = f(U_{\alpha_i})$. Entonces se define $\phi : H^0(X, F) \to \Gamma(X, F)$ como $\phi(f) := g$. Claramente ϕ es un homomorfismo biyectivo Q.E.D.

Para cálculos en dimensiones bajas conviene escribir los operadores cofrontera

$$\delta : C^0(\mathcal{U}, F) \to C^1(\mathcal{U}, F)$$

y

$$\delta : C^1(\mathcal{U}, F) \to C^2(\mathcal{U}, F)$$

en forma explícita:

(i): Dar una 0-cocadena $f \in C^0(\mathcal{U}, F)$ es dar una sección $f(U_\alpha) \in \Gamma(U_\alpha, F)$ por cada abierto $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Así podemos usar la notación $f = (f_\alpha)$ para indicar que $f(U_\alpha) = f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, F)$.

Similarmente, dar una 1-cocadena $g \in C^1(\mathcal{U}, F)$ es dar una sección $g(U_\alpha, U_\beta) \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, F)$ por cada par (U_α, U_β) de abiertos de $\mathcal{U}$.

Usaremos la notación $g = (g_{\alpha\beta})$ para indicar que $g(U_\alpha, U_\beta) = g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, F)$.

Análogamente para las 2-cocadenas, etc.

(ii): Como vimos en la demostración del lema previo, una 0-cocadena $f = (f_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, F)$ es un 0-cociclo si y sólo si las secciones $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, F)$ y $f_\beta \in \Gamma(U_\beta, F)$ coinciden en las intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta$, para cada par de abiertos U_α y U_β de $\mathcal{U}$.

(iii): Ahora, dada una 1-cocadena $g = (g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, F)$ su *cofrontera* es la 1-cocadena $\delta g \in C^2(\mathcal{U}, F)$ dada por: $\delta g = (h_{\alpha\beta\gamma})$ donde $h_{\alpha\beta\gamma} := g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\varphi, F)$.

(iv): Así, la 1-cocadena $g = (g_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U}, F)$ es un 1-*cociclo* si y sólo si $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma}$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

(v): Una 1-cocadena $g = (g_{\alpha\beta})$ es una 1-cofrontera si y sólo si existe una 0-cocadena $f = (f_\alpha) \in C^0(\mathcal{U}, F)$ tal que para todo $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que $g_{\alpha\beta}(z) = f_\beta(z) - f_\alpha(z)$.

Los grupos de cohomología $H^q(\mathcal{U}, F)$ dependen, en su definición, de la cubierta $\mathcal{U}$ de X. Si queremos grupos de cohomología asociados a X, debemos primero hacer variar estas cubiertas y ver lo que sucede. La variación que nos interesa es la natural: "refinar" las cubiertas.

Definición 4.28 Una cubierta $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_B$ de un espacio X se dice que es *más fina* que otra cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_A$ denotado $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, si todo V_β está contenido en un U_α, i.e., si existe una función $\mu : B \to A$ (entre los conjuntos de índices) tal que para todo $\beta \in B$ se tiene que $V_\beta \subseteq U_{\mu(\beta)}$. A una tal función $\mu : B \to A$ se le llama un *refinamiento*. Por supuesto que la cubierta $\mathcal{V}$ puede refinar a otra cubierta $\mathcal{U}$ de varias maneras, i.e., por diferentes funciones $\mu : B \to A$.

Lema 4.29 *Si $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es un refinamiento de cubiertas de X, entonces:*

(1): μ induce un homomorfismo de complejos de cadena:

$$\mu^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(\mathcal{V}, F).$$

(2): Y así, μ^+ induce homomorfismos de los grupos de cohomología:

$$\mu^* : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(\mathcal{V}, F).$$

DEMOSTRACIÓN. (1): $\mu^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(\mathcal{V}, F)$ se define como sigue:

Dado $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$, $\mu^+(f) \in C^q(\mathcal{V}, F)$ está dado por:

$$\mu^+(f)(V_0, \ldots, V_q) := f(\mu V_0, \ldots, \mu V_q)|_{V_0 \cap \ldots \cap V_q},$$

obsérvese que como $V_i \subseteq \mu V_i$ entonces $V_0 \cap \ldots \cap V_q \subseteq \mu V_0 \cap \ldots \cap \mu V_q$.

Claramente $\mu^+(f+g) = \mu^+(f) + \mu^+(g)$, y los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(\mathcal{U}, F) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu^+} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^+} \\ C^q(\mathcal{V}, F) & \xrightarrow[\delta]{} & C^{q+1}(\mathcal{V}, F) \end{array}$$

conmutan ya que para $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ y para todo $(V_0, \ldots, V_{q+1}) \in N(\mathcal{V})$ se tiene:

$$\begin{aligned} (\mu^+ \circ \delta)(f)(V_0, \ldots, V_{q+1}) &= (\delta f)(\mu V_0, \ldots, \mu V_{q+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f(\mu V_0, \ldots, \mu \hat{V}_j, \ldots, \mu V_{q+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \mu f(V_0, \ldots, \hat{V}_j, \ldots, V_{q+1}) \\ &= (\delta \circ \mu^+)(f)(V_0, \ldots, V_{q+1}) \end{aligned}$$

(2): Se sigue de (1). Q.E.D.

El lema siguiente nos dice que aun cuando $\mathcal{V}$ puede refinar a $\mathcal{U}$ de varias formas, en cohomología los morfismos inducidos son iguales:

Lema 4.30 *Si $\mu, \nu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ son dos refinamientos cualesquiera entre cubiertas de X, entonces*

$$\mu^* = \nu^* : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(\mathcal{V}, F).$$

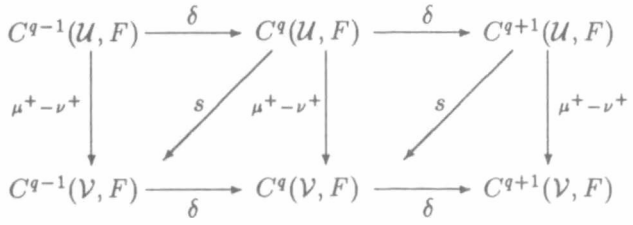
DEMOSTRACIÓN: Mostraremos que los morfismos de complejos

$$\mu^+, \nu^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(\mathcal{V}, F)$$

son homótopos, i.e., mostraremos que existen morfismos

$$s : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^{q-1}(\mathcal{V}, F)$$

tales que en el diagrama



se tenga que: $\mu^+ - \nu^+ = \delta \circ s + s \circ \delta : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(\mathcal{V}, F)$. Las homotopías s se definen como sigue:

(i): Si $q = 0$, como $C^{q-1}(\mathcal{V}, F) = 0$ (ya que $q - 1 < 0$) se tiene que definir $s : C^0(\mathcal{U}, F) \to C^{q-1}(\mathcal{V}, F) = 0$ como $s = 0$.

(ii): Si $q > 0$, dada $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ y $\sigma = (V_0, \ldots V_{q-1}) \in N(\mathcal{V})$, se define $sf \in C^{q-1}(\mathcal{V}, F)$ como:

$$(sf)(\sigma) := \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k f(\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \nu V_k, \ldots, \nu V_{q-1})$$

(nótese que al repetirse k se añadió un vértice más al simplejo).

Es claro que s es un homomorfismo. Para poder probar que es en efecto una homotopía, conviene considerar la siguiente función

$$\phi_k : N^q(\mathcal{V}) \to N^{q+1}(\mathcal{U})$$

dada por

$$\phi_k(V_0, \ldots, V_q) := (\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \nu V_k, \ldots, \nu V_q)$$

donde $0 \leq k \leq q - 1$.

Nótese que como $V_i \subseteq \mu V_i$ y $V_j \subseteq \nu V_j$, entonces $|\sigma| \subseteq |\phi_k \sigma|$. Y observemos que si $\sigma_j := (V_0, \ldots, \widehat{V}_j, \ldots, V_q)$ entonces directamente se prueba que:

$$\phi_k(\sigma_j) = \begin{cases} (\phi_k \sigma)_{j+1} & \text{si } 0 \leq k < j \leq q - 1 \\ (\phi_{k+1} \sigma)_j & \text{si } 0 \leq j \leq k \leq q - 2 \end{cases}$$

por ejemplo, en el primer caso $0 \leq k < j \leq q - 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\phi_k(\sigma_j) = \phi_k(V_0, \ldots, \widehat{V}_j, \ldots, V_q) &= (\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \nu V_k, \ldots, \nu\hat{V}_j, \ldots, \nu V_q) \\ &= (\phi_k\sigma)_{j+1}\end{aligned}$$

ya que se aumentó un lugar al repetir el índice k en μV_k y νV_k. Usando esta función ϕ_k, la homotopía s está definida por:

$$(sf)(\sigma) := \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k f(\phi_k\sigma)|_\sigma.$$

Si ahora calculamos, para toda $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ y para todo $\sigma \in N^q(\mathcal{V})$:

$$\begin{aligned}(s \circ \delta)(f)(\sigma) &= \sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k(\delta f)(\phi_k\sigma) \\ &= \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{k+j} f((\phi_k\sigma)_j)\end{aligned}$$

y por otra parte:

$$\begin{aligned}(\delta \circ s)(f)(\sigma) &= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j(sf)(\sigma_j) = \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^{j+k} f(\phi_k\sigma_j) \\ &= \sum_{k=0}^{q-2}\sum_{j=k+2}^{q}(-1)^{j+k+1} f(\phi_k\sigma)_j + \sum_{j=0}^{q-2}\sum_{k=j+1}^{q-1}(-1)^{j+k+1} f(\phi_k\sigma)\end{aligned}$$

(por definición de ϕ_k). Y sumando estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}(s\delta)(f)(\sigma) + (\delta s)(\sigma) &= \sum_{\substack{k=0 \\ j=k}}^{q-1}(-1)^{j+k} f(\phi_k\sigma)_j + \sum_{\substack{k=0 \\ j=k+1}}^{q-1}(-1)^{j+k} f(\phi_k\sigma)_j \\ &\quad \text{(ya que los otros términos se cancelan)} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} f(\mu V_0, \ldots, \mu V_{k-1}, \nu V_k, \ldots, \nu V_q) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{q-1} f(\mu V_0, \ldots, \mu V_k, \nu V_{k+1}, \ldots, \nu V_q) \\ &= f(\mu V_0, \ldots, \mu V_q) - f(\nu V_0, \ldots, \nu V_q) \\ &= \mu^+ f(\sigma) - \nu^+ f(\sigma).\end{aligned}$$

Y así, $s\delta + \delta s = \mu^+ - \nu^+$ como se quería probar.

(iii): Finalmente, obsérvese que si f es un cociclo (i.e., $\delta f = 0$) entonces $\mu^+ f - \nu^+ f = \delta s f$ y así los cociclos $\mu^+ f$ y $\nu^+ f$ difieren por una cofrontera $\delta(sf)$, i.e., representan la misma clase de cohomología en $H^q(\mathcal{V}, F)$, i.e., $\mu^*(f) = \nu^*(f)$. Q.E.D.

Los morfismos μ^* son transitivos:

Lema 4.31 *Si $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ son cubiertas de X con refinamientos $\alpha : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$, $\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, entonces $\beta \circ \alpha : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ es un refinamiento, y se tiene que:*

$$(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^* : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(\mathcal{W}, F).$$

DEMOSTRACIÓN: Que $\beta \circ \alpha : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ es un refinamiento es claro, ya que para cualquier $W_i \in \mathcal{W}$ se tiene que $W_i \subseteq \alpha W_i \in \mathcal{V}$ y así $\alpha W_i \subseteq \beta(\alpha W_i) \in \mathcal{U}$, i.e., $W_i \subseteq (\beta \circ \alpha) W_i$.

Para probar la última afirmación, basta probar que $(\beta \circ \alpha)^+ = \alpha^+ \circ \beta^+ : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(\mathcal{W}, F)$.

Pero esto es claro, ya que dado $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ y cualquier $(W_0, \ldots, W_q) \in N(\mathcal{W})$, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)^+(f)(W_0, \ldots, W_q) &= f(\beta\alpha W_0, \ldots, \beta\alpha W_q) \\ &= \beta^+(f)(\alpha W_0, \ldots, \alpha W_q) \\ &= \alpha^+(\beta^+ f)(W_0, \ldots, W_q). \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Observación: La colección de todas las cubiertas de X está *parcialmente ordenada* por $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{V}$ *refina* a $\mathcal{U}$, i.e., existe un refinamiento $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Más aún, esta colección es un *conjunto dirigido* ya que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas de X, entonces ambas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ *refinan* a la unión $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ (que es claramente una cubierta de X), i.e., $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \leq \mathcal{V}$ mediante los refinamientos $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Corolario 4.32 *La colección de grupos de cohomología $\{H^q(\mathcal{U}, F), \mu^*\}$ obtenida variando las cubiertas $\mathcal{U}$ de X y con morfismos μ^* inducida por los refinamientos $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, es un conjunto directo.*

DEMOSTRACIÓN: (i): Por el lema previo, si $\alpha : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ y $\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ son refinamientos, entonces: $(\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*$.

(ii): Claramente, si id: $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ es el refinamiento identidad, entonces $\mathrm{id}^* : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(\mathcal{U}, F)$ es el morfismo identidad. Q.E.D.

Definición 4.33 Sea X un espacio topológico y F una gavilla de grupos abelianos en X. Los *grupos de cohomología de Čech* de X con coeficientes en la gavilla F son

$$\check{H}^q(X,F) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U},F).$$

Una consecuencia inmediata de la definición anterior y del lema (4.27) es:

$$\check{H}^0(X,F) \approx \Gamma(X,F).$$

La sucesión larga de cohomología: Consideremos ahora una sucesión exacta corta de gavillas sobre un espacio X:

$$0 \to F \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} K \to 0. \tag{1}$$

Sabemos que para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene una sucesión exacta:

$$0 \to F(U) \xrightarrow{\phi} G(U) \xrightarrow{\psi} K(U),$$

pero en general, el morfismo ψ no es suprayectivo.

Así, en particular para $U = X$, considerando secciones globales, la sucesión (1) induce una sucesión exacta de secciones (i.e., en 0-cohomología ya que $\Gamma(X,-) \approx \check{H}^0(X,-)$ por la observación después de (4.33):

$$0 \to \Gamma(X,F) \xrightarrow{\phi} \Gamma(X,G) \xrightarrow{\psi} \Gamma(X,K). \tag{2}$$

A continuación veremos cómo, con ciertas restricciones en el espacio X (por ejemplo X Hausdorff y paracompacto), los grupos de cohomología $\check{H}^q(X,-)$ extienden la sucesión (2) a una sucesión exacta larga, i.e., los grupos $\check{H}^q(X,-)$ proveen una "medida" de la inexactitud de (2).

La restricción a espacios Hausdorff paracompactos no es grave, ya que por definición toda variedad compleja lo es.

Recordemos que un espacio Hausdorff X se llama *paracompacto* si toda cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X tiene un *refinamiento localmente finito*, i.e., existe un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ de $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta W que intersecta a lo más a un número finito de los V_β.

Primero extendemos los morfismos entre los grupos de secciones $\Gamma(X,-)$ inducidos por morfismos de gavillas $\varphi : F \to G$ (i.e, $\varphi : \Gamma(X,F) \to \Gamma(X,G)$) a morfismos entre complejos:

Lema 4.34 *Si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de gavillas y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ es una cubierta de X entonces, para todo $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ si definimos $\varphi(f) \in C^q(\mathcal{U}, G)$ como $\varphi(f)(U_0, \ldots, U_q) = \varphi(f(U_0, \ldots, U_q))$, entonces se tiene un* morfismo de complejos

$$\varphi : C^*(\mathcal{U}, F) \to C^*(\mathcal{U}, G).$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente, para cada $q \geq 0$, la función $\varphi : C^q(\mathcal{U}, F) \to C^q(\mathcal{U}, G)$ es un homomorfismo de grupos.

Sólo falta ver que conmuta con los morfismos cofrontera $\delta : C^q(\mathcal{U}, -) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, -)$, i.e., queremos probar que los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\phi} & C^q(\mathcal{U}, G) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ C^{q+1}(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow[\phi]{} & C^{q+1}(\mathcal{U}, G) \end{array}$$

En efecto, si $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ y $(U_0, \ldots, U_{q+1}) \in N(\mathcal{U})$, entonces

$$\begin{aligned} \delta \circ \varphi(f)(U_0, \ldots, U_{q+1}) &= \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \varphi f(U_0, \ldots, \widehat{U}_j, \ldots, U_{q+1}) \\ &= \varphi \left(\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f(U_0, \ldots, \widehat{U}_j, \ldots, U_{q+1} \right) \\ &= \varphi \circ \delta(f)(U_0, \ldots, U_{q+1}). \end{aligned}$$

Corolario 4.35 *Si $\varphi : F \to G$ es un morfismo de gavillas y $\mathcal{U}$ es una cubierta de X, entonces φ induce morfismos en cohomología*

$$\varphi : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(\mathcal{U}, G).$$

Teorema 4.36 (Sucesión Exacta de Cohomología) *Sea X un espacio Hausdorff paracompacto y sea $0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \to 0$ una sucesión exacta corta de gavillas en X. Entonces, existe una sucesión exacta larga de grupos de cohomología:*

$$0 \to \check{H}^0(X, F) \xrightarrow{\varphi} \check{H}^0(X, G) \xrightarrow{\psi} \check{H}^0(X, K) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, F) \xrightarrow{\varphi} \check{H}^1(X, G) \to \cdots.$$

DEMOSTRACIÓN: La idea de la demostración es la siguiente: Usando la sucesión exacta corta de gavillas

$$0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \to 0 \tag{1}$$

queremos producir una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \to C^*(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varphi} C^*(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\psi} C^*(\mathcal{U}, K) \to 0 \tag{2}$$

para cada cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X.

Después, argumentos usuales de álgebra homológica nos producirán la sucesión larga deseada.

Sin embargo, la sucesión de complejos (2) no es en general exacta, ya que si recordamos que por definición

$$C^q(\mathcal{U}, L) := \prod_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_q)\in\Lambda^{q+1}} L(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q})$$

para cualquier gavilla L sobre X. Así, para producir (2), como el producto directo es un funtor exacto, bastaría saber que para todo abierto $U \subseteq X$ (digamos $U = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_q}$) se tienen sucesiones exactas cortas:

$$0 \to F(U) \xrightarrow{\varphi} G(U) \xrightarrow{\psi} K(U) \to 0,$$

pero esto es precisamente lo que falla en general y así (2) no es exacta en general. Para tratar de remediar esta situación, recordando que la sucesión:

$$0 \to F(U) \xrightarrow{\varphi} G(U) \xrightarrow{\psi} K(U), \tag{3}$$

sí es exacta en general, y lo que falla es la suprayectividad de ψ, si en lugar de $K(U)$ se toman las imágenes de ψ, $\tilde{K}(U) := \operatorname{Im}\psi \subseteq K$, entonces sí se tendrían sucesiones exactas cortas:

$$0 \to F(U) \xrightarrow{\varphi} G(U) \xrightarrow{\psi} \tilde{K}(U) \to 0. \tag{4}$$

Hagamos pues esto primero y luego nos entendemos con la identificación de los grupos de cohomología del complejo que resultará de los $\tilde{K}$.

Ahora, la sucesión exacta de gavillas (1) induce sucesiones exactas:

$$0 \to C^q(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varphi} C^q(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\psi} C^q(\mathcal{U}, K) \tag{5}$$

ya que el producto directo es un funtor exacto y en vista de (3).

Claramente las imágenes $\tilde{C}^q(\mathcal{U}, K) := \operatorname{Im}\psi \subseteq C^q(\mathcal{U}, K)$ forman un *subcomplejo*, y así de nuevo se tiene una sucesión exacta corta de complejos:

$$0 \to C^*(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varphi} C^*(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\psi} \tilde{C}^*(\mathcal{U}, K) \to 0. \tag{6}$$

Y entonces, como es usual, (6) induce una sucesión exacta larga de cohomología:

$$0 \to H^0(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}^0(\mathcal{U}, K) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\varphi} H^1(\mathcal{U}, G) \xrightarrow{\psi} \cdots$$

donde $\tilde{H}^*(\mathcal{U}, k)$ es la cohomología del complejo $\tilde{C}^*(\mathcal{U}, K)$.

Ahora, si $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, entonces μ induce morfismos de complejos $\mu : C^*(\mathcal{U}, -) \to C^*(\mathcal{V}, -)$ que hacen conmutar los diagramas:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to C^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\phi} & C^q(\mathcal{U}, G) & \xrightarrow{\psi} & \tilde{C}^q(\mathcal{U}, K) \to 0 \\
\downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\
0 \to C^q(\mathcal{V}, F) & \xrightarrow[\phi]{} & C^q(\mathcal{V}, G) & \xrightarrow[\psi]{} & \tilde{C}^q(\mathcal{V}, K) \to 0
\end{array}$$

En efecto, para ver, por ejemplo, que el primer cuadrado conmuta, sea $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ y $(V_0, \ldots, V_q) \in N(\mathcal{V})$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\mu \circ \varphi)(f)(V_0, \ldots, V_q) &= \varphi(f(\mu V_o, \ldots, \mu V_q)) \\
&= (\varphi \circ \mu)(f)(V_0, \ldots, V_q).
\end{aligned}$$

Ahora, pasando a cohomología μ induce un diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to H^q(\mathcal{U}, F) & \xrightarrow{\phi} & H^q(\mathcal{U}, G) & \xrightarrow{\psi} & \tilde{H}^q(\mathcal{U}, K) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(\mathcal{U}, F) \to \cdots \\
\downarrow \mu^* & & \downarrow \mu^* & & \downarrow \mu^* & & \downarrow \mu^* \\
\cdots \to H^q(\mathcal{V}, F) & \xrightarrow[\phi]{} & H^q(\mathcal{V}, G) & \xrightarrow[\psi]{} & \tilde{H}^q(\mathcal{V}, K) & \xrightarrow[\delta]{} & H^{q+1}(\mathcal{V}, F) \to \cdots
\end{array}$$

Y así, pasando al límite directo (que preserva exactitudes) se obtiene una sucesión exacta larga:

$$0 \to \check{H}^0(X,F) \xrightarrow{\varphi} \check{H}^0(X,G) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}^0(X,K) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X,F) \xrightarrow{\varphi} \cdots.$$

Nótese que hasta ahora *no* hemos usado la hipótesis de la *paracompacidad* de X. Es ahora cuando la invocaremos para identificar a los grupos de cohomología $\tilde{H}^q(X,K)$ con $\check{H}^q(X,K)$ y así finalizar la demostración del teorema.

Ahora, recordando que $\check{H}^q(X,K)$ es el límite directo de los grupos de cohomología del complejo $C^q(\mathcal{U},K)$ y que $\tilde{H}^q(X,K)$ es a su vez el límite directo de los grupos de cohomología del complejo $\tilde{C}^q(\mathcal{U},K) := \psi C^q(\mathcal{U},K)$, para probar que $\tilde{H}^q(X,K) \approx \check{H}^q(X,K)$ es suficiente probar que dada cualquier cocadena $f \in C^q(\mathcal{U},K)$ existe un refinamiento $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ y una cocadena $g \in C^q(\mathcal{V},G)$ tal que $\mu f = \psi g$, es decir, veremos que cualquier cocadena $f \in C^q(\mathcal{U},G)$ está, en algún nivel $C^q(\mathcal{V},G)$, en el subcomplejo $\tilde{C}^q(\mathcal{V},K)$.

Para poder producir este refinamiento $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, recordemos que como X es paracompacto y Hausdorff, podemos suponer que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ es *localmente finita*. También, como paracompacto y Hausdorff implica normal, entonces la cubierta localmente finita $\mathcal{U}$ la podemos "encoger", i.e., existe una cubierta $\{W_\alpha\}$ de X tal que $\overline{W}_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada índice α. Esta cubierta $\{W_\alpha\}$ todavía no es la que nos sirve.

Ahora, como $\{W_\alpha\}$ es cubierta de X, dado cualquier $x \in X$ podemos escoger una vecindad V_x de x suficientemente pequeña, tal que

(i): $V_x \subseteq W_\alpha$ para al menos un α.

Y como $\mathcal{U}$ es localmente finita, podemos elegir los V_x tales que sólo intersectan a un número finito de los U_α, y más aún, eligiendo los V_x suficientemente pequeños podemos suponer que

(ii): Si $V_x \cap W_\alpha \neq \emptyset$ entonces $V_x \subseteq U_\alpha$.

También, como $0 \to F \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} K \to 0$ es una sucesión exacta de gavillas, entonces para todo $x \in X$ la sucesión de fibras

$$0 \to F_x \xrightarrow{\varphi_x} G_x \xrightarrow{\psi_x} K_x \to 0$$

es exacta.

Entonces, para la cocadena $f \in C^q(\mathcal{U},K)$, si tomamos un simplejo $\sigma = (U_0,\ldots,U_q) \in N(\mathcal{U})$ tal que $x \in |\sigma|$ (y así por (ii) se tiene que $V_x \subseteq |\sigma|$), entonces el germen $[f(\sigma)]_x \in K_x$ de la sección $f(\sigma)$ *proviene* de algún germen $[g]_x \in G_x$ ya que ψ_x es suprayectiva, i.e., $\psi_x[g]_x = [f(\sigma)]_x$.

Es decir, existe una vecindad de x y una sección g en esa vecindad tal que $\psi(g)$ coincide con $f(\sigma)$ en esa vecindad. Escogiendo a V_x suficientemente pequeña podemos suponer que V_x es esa vecindad, y así $g \in G(V_x)$ es tal que $\psi(g) = f(\sigma)|_{V_x}$.

El refinamiento $\mathcal{V}$ deseado se define como sigue: Ponemos $\mathcal{V} = \{V_x\}$ y el refinamiento $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ se define como sigue: Para cada $x \in X$ escojamos un conjunto $\mu(V_x) = U_x \in \mathcal{U}$ tal que $V_x \subseteq W_x \subseteq U_x$ (esto es posible por (i)). Claramente $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es un refinamiento.

Finalmente, para probar que $\mu f = \psi g$ en $C^q(\mathcal{V}, K)$, sea $\sigma(V_{x_0}, \ldots, V_{x_q}) \in N(\mathcal{V})$ cualquier q-simplejo y nótese que

$$\emptyset \neq |\sigma| = V_{x_0} \cap \cdots \cap V_{x_q} \subseteq W_{x_0} \cap \cdots \cap W_{x_q}.$$

Como $V_{x_0} \cap W_{x_i} \neq \emptyset$, de (ii) se sigue que $V_{x_0} \subseteq U_{x_i}$ para cada i, y consecuentemente

$$|\sigma| \subseteq V_{x_0} \subseteq U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q} = |\mu\sigma|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu f(\sigma) &= f(\mu V_{x_0}, \ldots, \mu V_{x_q})|_{|\sigma|} \\ &= f(U_{x_0}, \ldots, U_{x_q})|_{V_{x_0}}|_{|\sigma|}, \end{aligned}$$

pero como observamos previamente a la definición de la cubierta $\mathcal{V}$, la restricción

$$f(U_{x_0}, \ldots, U_{x_q})|_{V_{x_0}} = f(\mu V_{x_0}, \ldots, \mu V_{x_q}) = \psi(g)|_{V_{x_0}},$$

y entonces

$$\mu f(\sigma) = \psi(g)|_{V_{x_0}}|_{|\sigma|} = \psi(g)|_{|\sigma|}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

4.3 Resoluciones Finas y Cubiertas de Leray

En la sección anterior se definieron los grupos de cohomología de Čech, $\check{H}^q(X, F)$, como límites directos de grupos de cohomología de complejos asociados a cubiertas X. Así, los grupos de cohomología de Čech *no* aparecen como grupos de cohomología de un complejo.

En el caso cuando X es Hausdorff paracompacto, veremos en esta sección que los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^q(X, F)$ con coeficientes en una gavilla F, se pueden describir como los grupos de cohomología de un complejo que se obtiene al aplicar el *funtor secciones globales* $\Gamma(X, -)$ a una cierta *resolución "fina"* de la gavilla F. La propiedad importante de estas gavillas finas es que son cohomológicamente triviales.

Finalmente, probaremos también, que en el caso cuando X es Hausdorff paracompacto, en algunos casos importantes (cuando X tiene una *cubierta de Leray*) la cohomología de Čech de X $\check{H}^q(X, F)$ se puede leer directamente de la cohomología de esa cubierta especial de X, $H^q(\mathcal{U}, F)$.

Particiones de la unidad: Recordemos que si X es Haussdorff paracompacto, entonces X tiene cubiertas localmente finitas $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y asociadas a estas cubiertas se tienen *particiones de la unidad*, i.e., existen funciones continuas $\varphi_\alpha : X \to \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:

(i) Para cada $x \in X$, $\varphi_\alpha(x) = 0$ excepto a lo más para un número finito de índices $\alpha \in \Lambda$.

(ii) $\sum_{\alpha\in\Lambda} \varphi_\alpha(x) = 1$ (la suma es finita por (i)).

(iii) La partición $\{\varphi_\Lambda\}_{\alpha\in\Lambda}$ está *subordinada* a la cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, i.e., cada φ_α se anula fuera de algún $U \in \mathcal{U}$ (al que podemos indicar por U_α), i.e., $\varphi_\alpha|_{X-U_\alpha} = 0$.

Definición 4.37 Sea F una gavilla (de grupos abelianos) en X y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta localmente finita de X. Una *partición de la unidad, para la gavilla F, subordinada a la cubierta $\mathcal{U}$*, es una familia de morfismos de gavillas $\eta_\alpha : F \to F$ tales que:

(i) $\eta_\alpha(F_x) = 0$ para toda $x \in X - U_\alpha$ (la partición está subordinada a $\mathcal{U}$).

(ii) $\sum_{\alpha\in\Lambda} \eta_\alpha(s) = s$ para cada $s \in F(X)$.

Observación: Como $\mathcal{U}$ es una cubierta localmente finita de X entonces cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta V_x que intersecta a lo más a un número finito de los $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Así, dada cualquier sección $s \in F(X)$ y un punto $x \in X$, sea V_x una vecindad con la propiedad anterior. Entonces, toda $z \in V_x$ está sólo en un número finito de U_α, digamos $z \in U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$, y así por (4.37)(i) $\eta_\alpha(F_z) \neq 0$ sólo, a lo más, para $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Así, para los gérmenes $[s]_z$, $z \in V_x$, se tiene que $\eta_\alpha[s]_z \neq 0$ sólo, a lo más, para $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Esto significa que la suma en (4.37)(ii) es *finita*.

Definición 4.38 Una gavilla F (de grupos abelianos) en X se llama *fina* si tiene una partición de la unidad subordinada a cualquier cubierta localmente finita de X.

Veamos algunos ejemplos: Sea X una superficie de Riemann.

Ejemplo 1.: La gavilla de funciones continuas $\mathcal{C}_X$ es una gavilla fina.

En efecto, como X es variedad, es paracompacta y Hausdorff y así dada cualquier cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X, existe una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada a U.

Usando estas φ_α se definen morfismos de gavillas $\eta_\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ como sigue: Sea $U \subseteq X$ un abierto. Entonces $\eta_\alpha(U) : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(U)$ está dado por $\eta_\alpha(U)(s) := \varphi_\alpha \cdot s$ (producto de s con φ_α, que está definido ya que $\varphi_\alpha : X \to \mathbb{R}^+$ y $s : U \to \mathbb{C}$).

Claramente η_α es, en efecto, un morfismo de gavillas para cada α. Finalmente:

(i): Si $x \in X - U_\alpha$ entonces $\eta_\alpha(\mathcal{C}_x) = 0$ ya que para cualquier germen $[s]_x \in \mathcal{C}_x$, representado, digamos, por $\langle s, U\rangle$ con $x \in U$, podemos elegir U tal que $U \subseteq X - U_\alpha$ y así $\eta_\alpha[s]_x = [\eta_\alpha(U)(s)]_x := [\varphi_\alpha \cdot s]_x = [0]_x = 0$.

(ii): Sea $s \in \mathcal{C}(X)$ una sección. Entonces, para toda $x \in X$ se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \eta_\alpha(s)(x) &= \sum_\alpha (\varphi_\alpha \cdot s)(x) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \cdot s(x) \\ &= s(x) \cdot \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = s(x) \cdot 1 = s(x),\end{aligned}$$

y así $\sum_\alpha \eta_\alpha(s) = s$.

Ejemplo 2: En general, si X es una Superficie de Riemann, y consideramos las gavillas $\mathcal{E}_X^{(0)} = \mathcal{C}_X^\infty$, $\mathcal{E}_X^{(1)}$, $\mathcal{E}_X^{(2)}$, $\mathcal{E}_X^{1,0}$, $\mathcal{E}_X^{0,1}$, de 0-formas diferenciales, 1-formas, 2-formas, 1-formas de tipo $(1,0)$ y de tipo $(0,1)$ respectivamente (ver 4.21). Todas estas gavillas son *finas*.

La demostración es similar al ejemplo anterior usando el hecho de que como X es una variedad diferencial existen particiones de la unidad $\{\varphi\}$ subordinadas a cualquier cubierta localmente finita de X, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de tal forma (y esto es lo importante) que las $\varphi_\alpha : X \to \mathbb{R}^+$ no sólo son continuas si no que son $\mathcal{C}^\infty$, i.e., $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty_X$.

Así, por ejemplo, para probar que $\mathcal{E}^{0,1}_X$ es *fina*, formalmente procedemos como en el ejemplo (1):

Se definen morfismos $\eta_\alpha : \mathcal{E}^{0,1}_X \to \mathcal{E}^{0,1}_X$ como sigue: Si $U \subseteq X$ es un abierto, $\eta_\alpha(U) : \mathcal{E}^{0,1}_X(U) \to \mathcal{E}^{0,1}_X(U)$ es $\eta_\alpha(U)(f d_p \bar{z}) := (\varphi_\alpha \cdot f) d_p \bar{z}$, (donde $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$).

Así, como $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty_X$, entonces el producto $\varphi_\alpha f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

El resto sigue exactamente como en el ejemplo (1).

El teorema siguiente, la propiedad más importante de las gavillas finas, nos dice que estas son cohomológicamente triviales:

Teorema 4.39 *Sea F una gavilla fina en un espacio topológico X y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta abierta localmente finita. Entonces, para toda $q > 0$, $H^q(\mathcal{U}, F) = 0$.*

Consecuentemente, si X es Hausdorff paracompacto y F es una gavilla fina en X, entonces para toda $q > 0$, $\check{H}^q(X, F) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: La segunda parte se sigue de la primera, ya que siendo X paracompacto Hausdorff toda cubierta de X tiene un refinamiento localmente finito, y así por la primera parte la cohomología de esta cubierta se anula. Pasando al límite directo se sigue que $\check{H}^q(X, F) = 0$ para $q > 0$.

Para probar la primera parte: Como F es fina, sea $\eta_\alpha : F \to F$ una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$.

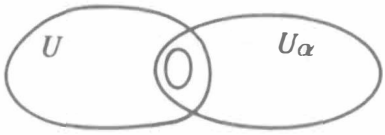
Sea $q > 0$. Probaremos que todo q-cociclo $f \in Z^q(\mathcal{U}, F)$ es una q-cofrontera.

Con este fin, para un abierto $U_\alpha \in \mathcal{U}$ arbitrario y para cada $(q-1)$-simplejo $\sigma = (U_0, \ldots, U_{q-1}) \in N(\mathcal{U})$, consideremos al q-simplejo $(U_\alpha, \sigma) := (U_\alpha, U_0, \ldots, U_{q-1})$, y al morfismo $\eta_\alpha : F(U_\alpha \cap \cdots \cap U_{q-1}) \to F(U_\alpha \cap \cdots \cap U_{q-1})$. Entonces, aplicando η_α a la sección $f(U_\alpha, \ldots, U_{q-1}) \in F(U_\alpha \cap \cdots \cap U_{q-1})$ obtenemos la sección $f_\alpha := \eta_\alpha f(U_\alpha, \ldots, U_{q-1}) \in F(U_\alpha \cap \cdots \cap U_{q-1})$.

Ahora, como $\eta_\alpha = 0$ en $X - U_\alpha$, entonces $\eta_\alpha f = 0$ en $U - (U \cap U_\alpha)$. De hecho, el soporte

$$\mathrm{Supp}(f_\alpha) := \overline{\{x \in U : [\eta_\alpha f]_x \neq 0\}} \subsetneq U \cap U_\alpha,$$

ya que $\mathrm{Supp}(f_\alpha)$ es *cerrado* y si sucediera que para algún $x \in U \cap$(cerradura de $U \cap U_\alpha$) se tuviera $[f_\alpha]_x \neq 0$, entonces, en algún nivel (V_x, U_α) de tendría que para todo $u \in V_x$ (vecindad de x) $[f_\alpha]_u \neq 0$ (ya que $[f_\alpha]_x = 0 \Leftrightarrow$ en



$\mathrm{Supp}(\eta_\alpha f)$

cualquier vecindad V_x de x, suficientemente pequeña, $[f_\alpha]_u = 0$ para todo $u \in V_x$), pero esto no puede pasar ya que si $x \in$ frontera de $(U \cap U_\alpha)$, entonces $V_x \cap (U - (U \cap U_\alpha)) \neq \emptyset$ y allá $f_\alpha = 0$ y por lo tanto para todo $u \in V_x \cap (U - (U \cap U_\alpha))$ se tendría $[f_\alpha]_u = 0$.

Se sigue que $\mathrm{Supp}(f_\alpha) \subsetneq U \cap U_\alpha$ y así $f_\alpha = 0$ en $\emptyset \neq (U \cap U_\alpha) - \mathrm{Supp}(f_\alpha) \subsetneq U \cap U_\alpha$.

Así, podemos *extender la sección* $f_\alpha \in F(U_\alpha \cap \cdots \cap U_{q-1})$ *por cero* a $F(U_0 \cap \cdots \cap U_{q-1})$ de la forma siguiente:

El abierto $U := U_0 \cap \cdots \cap U_{q-1}$ tiene una cubierta abierta dada por: $U_1 := U - \mathrm{Supp}(f_\alpha)$ y $U_2 := U \cap U_\alpha$. (Nótese que U_1 es abierto ya que $\mathrm{Supp}(f_\alpha)$ es cerrado. Ver la figura anterior).

Se tienen secciones $f_\alpha \in F(U_2)$ y $0 \in F(U_1)$ tales que coinciden (i.e., $f_\alpha = 0$) en $F(U_1 \cap U_2)$. Entonces, como F es *gavilla*, existe una única sección, denotada

$$F_{|\sigma|}(\eta_\alpha f) := E_{U_0 \cap \ldots \cap U_{q-1}}(\eta_\alpha f) \in F(U) = F(U_0 \cap \cdots \cap U_{q-1})$$

y llamada la *extensión por cero* de $\eta_\alpha f$ a $U_0 \cap \cdots \cap U_{q-1})$, y tal que:

$$E_{|\sigma|}(\eta_\alpha f) \mid_{U \cap U_\alpha} = \eta_\alpha f \quad \text{en} \quad F(U \cap U_\alpha).$$

Ahora, estas secciones $E_{|\sigma|}(\eta_\alpha f)$ definen una $(q-1)$-cocadena, denotada $g_\alpha \in C^{q-1}(U, F)$ de la forma natural: Dado un $(q-1)$-simplejo $\sigma = (U_0, \ldots, U_{q-1})$, entonces se define:

$$g_\alpha(\sigma) := E_\sigma(\eta_\alpha f)(U_\alpha, U_0, \ldots, U_{q-1}) \in F(U_0 \cap \cdots \cap U_{q-1}).$$

Observemos ahora que esta $(q-1)$-cocadena $g_\alpha \in C^{q-1}(U, F)$ satisface que para cualquier q-simplejo $\sigma = (U_0, \ldots, U_q)$, si $\sigma_j := (U_0, \ldots, \widehat{U}_j, \ldots, U_q)$ es el q-simplejo que se obtiene al suprimir U_j, entonces:

$$\begin{aligned}\delta g_\alpha(\sigma) &:= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j g_\alpha(\sigma_j)|_\sigma \\ &= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j E_{\sigma_j}(\nu_\alpha f)(U_\alpha \cap \sigma_j)|_\sigma \\ &= \eta_\alpha f(\sigma) - E_\sigma \delta\eta_\alpha f(U_\alpha \cap U_0 \cap \cdots \cap U_q),\end{aligned}$$

esta última igualdad es porque

$$\begin{aligned}E_\sigma \delta\eta_\alpha f(U_\alpha \cap \cdots \cap U_q) &= E_\sigma(\eta_\alpha f(U_0 \cap \cdots \cap U_q) \\ &+ \sum_{j=0}^{q}(-1)^{j+1}\eta_\alpha f(U_\alpha, U_0, \ldots, \widehat{U}_j, \ldots, U_q) \\ &= E_\sigma(\eta_\alpha f(\sigma)) \\ &- \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \eta_\alpha f(U_\alpha, U_0, \ldots, \widehat{U}_j, \ldots, U_q) \\ &= \eta_\alpha f(\sigma) - E_\sigma(\delta\eta_\alpha f(U_\alpha \cap |\sigma_j|)) \\ &= \eta_\alpha f(\sigma) - \sum_{j=0}^{q}(-1)^j E_{\sigma_j}(\eta_\alpha f)(U_\alpha \cap |\sigma_j|).\end{aligned}$$

Se sigue que: $\delta g_\alpha(\sigma) = \eta_\alpha f(\sigma)$ ya que $\delta\eta_\alpha f = 0$ porque f es un *cociclo*. Ahora, como esto es cierto para todo $(q-1)$-simplejo, entonces

$$(*) \qquad \delta g_\alpha = \eta_\alpha f$$

y esto para todo índice α.

Si ahora definimos $g := \sum_\alpha g_\alpha \in C^{q-1}(\mathcal{U}, F)$, la suma es finita ya que para cada índice α y para todo $(q-1)$-simplejo σ se tiene que $g_\alpha(\sigma) = 0$ fuera de U_α, y así dado cualquier punto $x \in X$, como existe sólo un número finito de abiertos U_α que lo contienen (ya que $\mathcal{U}$ es localmente finita), entonces sólo en esos U_α es posible que $g_\alpha \neq 0$ y así en la suma los únicos sumandos posiblemente no cero son los de estos índices.

Finalmente, para todo $(q-1)$-simplejo $\sigma \in N(\mathcal{U})$,

$$\begin{aligned} \delta g(\sigma) &= \delta(\sum_{\alpha} g_\alpha(\sigma)) && \text{por definición de } g \\ &= \sum_{\alpha} \delta g_\alpha(\sigma) && \text{ya que } \delta \text{ es morfismo} \\ &= \sum_{\alpha} \nu_\alpha f(\sigma) && \text{por } (*) \text{ arriba} \\ &= f(\sigma) && \text{ya que } \{\eta_\alpha\} \text{ es una partición} \\ & && \text{de la unidad asociada a } F \end{aligned}$$

y así todo q-cociclo f es una frontera para $q > 0$. Q.E.D.

El resultado siguiente, después de las necesarias definiciones, nos dice que dada una gavilla cualquiera F sobre un espacio Hausdorff paracompacto X, usando gavillas finas podemos calcular la cohomología de Čech $\check{H}^q(X, F)$ como la cohomología de un cierto complejo.

Definición 4.40 Sea F una gavilla arbitraria en un espacio X. Una *resolución fina* de F es una sucesión exacta de gavillas, de la forma:

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} F_1 \xrightarrow{d_1} F_2 \longrightarrow \cdots$$

donde las F_i son *gavillas finas* sobre X, y las flechas son morfismos de gavillas.

Observación: Si aplicamos el funtor "secciones globales"

$$\Gamma(X, -) : \text{Gavillas} \to \text{Grupos},$$

a un morfismo de gavillas, $\varphi : F \to G$ se obtiene un morfismo de grupos $\varphi^* : \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G)$ dado por $s \mapsto \varphi^*(s) := \varphi_X(s)$, y así, como $d_{i+1} \circ d_i = 0$ entonces $0 = (d_{i+1} \circ d_i)^* = d_{i+1}^* \circ d_i^*$. Entonces, de la sucesión exacta de gavillas

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} F_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

aplicando el funtor covariante $\Gamma(X, -)$ y "descabezando", se obtiene el complejo de grupos (no necesariamente exacto):

$$\Gamma(X, F_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(X, F_1) \xrightarrow{d_1^*} \Gamma(X, F_2) \xrightarrow{d_2^*} \cdots$$

Teorema 4.41 *Sean X un espacio Hausdorff paracompacto y F una gavilla cualquiera sobre X. Sea*

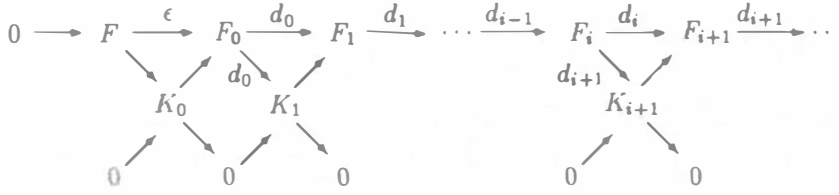
$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} F_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

una resolución fina de F. Entonces para todo $q > 0$,

$$\check{H}^q(X, F) \approx \ker d_q^* / \operatorname{im} d_{q-1}^*$$

(la q-cohomología del complejo anterior).

DEMOSTRACIÓN: Sean $K_i := \ker d_i \subseteq F_i$, $i \geq 0$. Entonces, la resolución fina dada se puede escribir como:



donde las flechas oblícuas etiquetadas d_i son en efecto los morfismos d_i ya que $\operatorname{im} d_i = \ker d_{i+1} =: K_i$.

Así, la resolución fina dada se puede escribir como la colección de sucesiones exactas cortas:

(0) $$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} K_1 \to 0$$

(*i*) $$0 \to K_i \hookrightarrow F_i \xrightarrow{d_i} K_{i+1} \to 0 \quad (i \geq 1)$$

Ahora hacemos inducción sobre $q > 0$:

(1) Para $q = 1$: Consideremos la sucesión larga de cohomología de Čech asociada a la sucesión exacta corta de gavillas (0):

$$\cdots \to \check{H}^{q-1}(X, F_0) \to \check{H}^{q-1}(X, K_1) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(X, F) \to \check{H}^q(X, F) \to \cdots$$

donde $\check{H}^q(X, F_0) = 0$ ya que $q > 0$, F_0 es fina y (4.39). Y para $q = 1$ esta sucesión es:

$$0 \to \Gamma(X, F) \to \Gamma(X, F_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(X, K_1) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, F) \to 0$$

y así

(†) $$\check{H}^1(X, F) \approx \operatorname{Coker} d_0^* = \Gamma(X, K_1)/\operatorname{im} d_0^*$$

Ahora, la sucesión (i) para $i = 1$, es:

$$0 \to K_1 \hookrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} K_2 \to 0$$

que induce la sucesión exacta larga:

$$0 \to \Gamma(X, K_1) \longrightarrow \Gamma(X, F_1) \xrightarrow{d_1^*} \Gamma(X, K_2) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, K_1) \longrightarrow 0$$

ya que $\check{H}^1(X, F_1) = 0$ porque F_1 es fina. Entonces:

$$\begin{aligned} \Gamma(X, K_1) &\approx \text{im } (\Gamma(X, K_1) \to \Gamma(X, F_1)) \\ &\approx \ker d_1^* \qquad \text{por exactitud,} \end{aligned}$$

y así de (†)

$$\check{H}^1(X, F) \approx \ker d_1^* / \text{im } d_0^*$$

lo que prueba el teorema para $q = 1$.

(2): Para $q = 2$: De la sucesión (0) se obtiene la sucesión exacta larga:

$$\cdots \to 0 \to \check{H}^{q-1}(X, K_1) \xrightarrow{\delta} \check{H}^q(X, F) \to 0 \to \cdots$$

ya que $\check{H}^{q-1}(X, F_0) = 0 = \check{H}^q(X, F_0)$ porque F_0 es fina y $q - 1 \geq 1$ y así,

(††) $$\check{H}^{q-1}(X, K_1) \overset{\delta}{\approx} \check{H}^q(X, F)$$

Ahora, de la sucesión (i) para $i = 1$ se obtiene:

$$\cdots \to \check{H}^{q-2}(X, F_1) \xrightarrow{d_1^*} \check{H}^{q-2}(X, K_2) \xrightarrow{\delta} \check{H}^{q-1}(X, K_1) \to 0 \to \cdots$$

ya que $q - 1 \geq 1$ y así $\check{H}^{q-1}(X, F_1) = 0$. Entonces,

(†††) $$\check{H}^{q-1} \approx \text{coker } d_1^* = \check{H}^{q-2}(X, K_2)/\text{im } d_1^*,$$

y si $q = 2$, $\check{H}^{q-2}(X, K_2) = \check{H}^0(X, K_2) \approx \Gamma(X, K_2) \approx \ker d_2^*$ y usando la sucesión (i) para $i = 2$:

$$0 \to K_2 \to F_2 \xrightarrow{d_2} K_3 \to 0$$

que induce $\Gamma(X, K_2) \approx \ker d_2^*$ como en el paso (1), se obtiene

$$\begin{aligned} \check{H}^2(X, F) &\overset{\delta}{\approx} \check{H}^1(X, K_1) \qquad \text{por (††)} \\ &\approx \ker d_2^* / \text{im } d_1^* \quad \text{por (†††).} \end{aligned}$$

El resultado se sigue por recursión sobre q. Q.E.D.

El teorema siguiente nos garantiza la existencia de resoluciones finas:

Teorema 4.42 *Sean X un espacio topológico y F una gavilla sobre X. Entonces, existe una resolución fina de F:*

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_1} F_1 \to \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Las gavillas F_i y los correspondientes morfismos se contruirán recursivamente:

Primero contruimos una gavilla (de "secciones discontinuas") asociada a la gavilla F:

(i): Sea $U \subseteq X$ cualquier abierto y pongamos

$$F^*(U) := \{s : U \to |F| : p \circ s = id_U\}$$

donde $|F| := \bigcup_{x \in X} F_x$ y $p : |F| \to X$ es la proyección canónica. A las secciones $s : U \to |F|$ *no* se les exige que sean continuas.

(ii): $F^*(U)$ es un *grupo abeliano* ya que dadas $s, s' \in F^*(U)$ y dado $u \in U$ entonces $s(u)$, $s'(u) \in F_u$ (están en la misma fibra ya que $ps(u) = u = ps'(u)$). Entonces tiene sentido definir $s + s' \in F^*(U)$ como $(s + s')(u) := s(u) + s'(u)$ (suma en F_u).

(iii): Si $U \subseteq V \subseteq X$ son abiertos, se define el morfismo restricción

$$\rho : F^*(V) \to F^*(U)$$

como

$$\rho(s : V \to |F|) := (s|_U : U \to |F|)$$

(la restricción usual).

Claramente F^* es entonces una *pregavilla* de grupos abelianos sobre X.

Definición: A la gavilla asociada a la pregavilla F^* se le llama la *gavilla de secciones discontinuas de* F. Se le denotará con el mismo símbolo F^*.

(iv): Se tiene un *monomorfismo* natural

$$\epsilon : F \longrightarrow F^*$$

dado como sigue: Si $U \subseteq X$ es un abierto, $\epsilon_U : F(U) \to F^*(U)$ se define como: $\epsilon_U(s) := (\tilde{s} : U \to |F|)$ donde $\tilde{s} : U \to |F|$ es la función dada por:

$$\tilde{s}(x) := [s]_x \in F_x \quad \text{para} \quad x \in U.$$

Obsérvese que para toda $x \in U$, $p \circ \tilde{s}(u) = p[s]_x = x$, es decir, $p \circ \tilde{s} = id_U$, i.e., $\tilde{s} \in F^*(U)$.

Claramente $\epsilon : F \to F^*$ es un morfismo de pregavillas y denotamos también por $\epsilon : F \to F^*$ al morfismo correspondiente a la gavilla F^*.

El morfismo ϵ es monomorfismo ya que para cada abierto $U \subseteq X$ los morfismos $\epsilon_U : F(U) \to F^*(U)$ son inyectivos porque si $\epsilon(s) := \tilde{s} = 0$ en $F^*(U)$, entonces para todo $x \in U$ se tiene que $0 = \tilde{s}(x) := [s]_x$, i.e., los gérmenes de $s \in F(U)$ son cero para todo $x \in U$ y así $s = 0$ en $F(U)$.

(v): Finalmente, la gavilla F^* es *fina* (ejercicio).

Ahora, para terminar la demostración del teorema, ponemos $F_0 := F^*$. Así, F_0 es fina y se tiene un monomorfismo

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0.$$

Después, considerando la pregavilla cociente F_0/F y su gavilla asociada $(F_0/F)^+$, se tiene una sucesión exacta corta:

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} (F_0/F)^+ \to 0$$

pero la gavilla $(F_0/F)^+$ no tiene por qué ser fina. De nuevo, sea $(F_0/F)^*$ la gavilla fina asociada a $(F_0/F)^+$ y sea

$$d_0 : F_0 \xrightarrow{d_0} (F_0/F)^+ \to (F_0/F)^* =: F_1$$

Entonces, la sucesión

$$0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} F_1$$

es exacta con F_0 y F_1 finas.

Se procede inductivamente. Q.E.D.

Lo anterior termina la demostración de que la cohomología de Čech de un espacio Hausdorff paracompacto es, en efecto, la cohomología de un complejo de cocadenas (asociado a una resolución fina de la gavilla dada). Existen otros enfoques posibles para probar este hecho importante, a saber, considerando "gavillas fláccidas" (Godement) o, más de acuerdo al enfoque del álgebra homológica a la Grothendieck, usando "resoluciones inyectivas". Para esto pueden consultarse [Hartshorne] y [Godement] de la bibliografía.

Cubiertas de Leray: A pesar de que los grupos de cohomología de Čech $\check{H}^q(X, F)$ se han definido como límites directos de grupos de cohomología de cubiertas $\mathcal{U}$ de X, $H^q(\mathcal{U}, F)$, en algunos casos los grupos $\check{H}^q(X, F)$ se pueden calcular directamente usando una sola cubierta $\mathcal{U}$ de X. El teorema siguiente nos dice cuándo esto es posible.

Teorema 4.43 (Leray) *Sean X un espacio Hausdorff paracompacto, F una gavilla de grupos abelianos sobre X, y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ una cubierta de X que satisface:*

$$(*) \qquad \check{H}^q(U_0 \cap \cdots \cap U_p,\ F) = 0$$

para todo $q \geq 1$ y para todo p-simplejo $(U_0, \ldots, U_p) \in N(\mathcal{U})$.

Entonces, $\check{H}^q(X, F) \approx H^q(\mathcal{U}, F)$ para todo $q \geq 0$.

Definición 4.44 Una cubierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ de X que satisfaga la condición $(*)$ se llama *cubierta de Leray* para la gavilla F.

DEMOSTRACIÓN: Si $q = 0$, entonces $\check{H}^0(X, F) \approx \Gamma(X, F) \approx H^0(\mathcal{U}, F)$.

Supongamos ahora que $q \geq 1$: Escogiendo una resolución fina de F:

$$(\dagger) \qquad 0 \to F \xrightarrow{\epsilon} F_0 \xrightarrow{d_0} F_1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

para cada $q \geq 1$, por (4.41), se tiene que:

$$\check{H}^q(X, F) \approx \ker d_q^*/\mathrm{im}\, d_{q-1}^*$$

donde $d_i^* : \Gamma(X, F_i) \to \Gamma(X, F_{i+1})$.

Ahora, si $\sigma = (U_0, \ldots, U_p) \in N(\mathcal{U})$ es cualquier p-simplejo, entonces $|\sigma| = U_0 \cap \cdots \cap U_p \subseteq X$ es un abierto, y restringiendo las gavillas F y F_i a $|\sigma|$ se tiene una resolución fina como $(\dagger)$ de gavillas sobre $|\sigma|$. Entonces, por el mismo teorema (4.41) se tiene que para $q \geq 1$:

$$\check{H}^q(|\sigma|, F) \approx \ker d_q^*/\mathrm{im}\, d_{q-1}^*$$

donde $d_i^* : \Gamma(|\sigma|, F_i) \to \Gamma(|\sigma|, F_{i+1})$.

Pero, por hipótesis $\check{H}^q(|\sigma|, F) = 0$ para $q \geq 1$, y así $\ker d_q^* = \mathrm{im}\, d_{q-1}^*$ para $q \geq 1$, i.e., el complejo

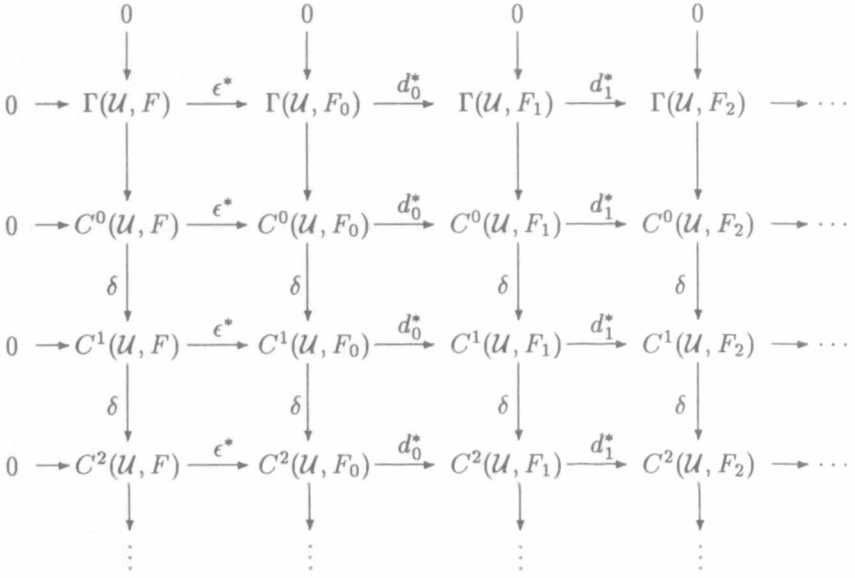
$$(\dagger\dagger) \qquad 0 \to \Gamma(|\sigma|, F) \xrightarrow{\epsilon^*} \Gamma(|\sigma|, F_0) \xrightarrow{d_0^*} \Gamma(|\sigma|, F_1) \to \cdots$$

es *exacto* (para todo p-simplejo $\sigma \in N(\mathcal{U})$).

Ahora, como $C^q(\mathcal{U}, F) := \prod_{\sigma \in N(\mathcal{U})} \Gamma(|\sigma|, F)$, y como las sucesiones $(\dagger\dagger)$ son exactas y $\prod$ es un funtor exacto (preserva sucesiones exactas), entonces se tiene una sucesión exacta:

$$(\dagger\dagger\dagger) \qquad \cdots \to C^q(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\epsilon^*} C^q(\mathcal{U}, F_0) \xrightarrow{d_0^*} C^q(\mathcal{U}, F_1) \to \cdots$$

donde los morfismos d_i^* conmutan con las diferenciales de los complejos involucrados, i.e., son morfismos de complejos, i.e., se tiene un diagrama conmutativo:



donde:

(i) Todos los renglones, excepto el primero, son exactos por (†††)

(ii) Todas las columnas, excepto la primera, son exactas ya que las gavillas F_i son finas ($i \geq 0$).

(iii) Por el Teorema (4.41) la medida de la inexactitud del primer renglón es la cohomología $\check{H}^*(X, F)$.

(iv) Por definición la medida de la inexactitud de la primera columna es la cohomología $H^*(\mathcal{U}, F)$.

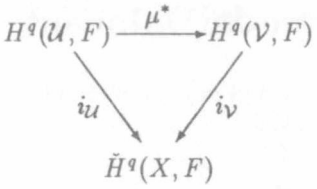
Una cacería en el diagrama produce el isomorfismo deseado. Q.E.D.

Corolario 4.45 *Sean X un espacio Hausdorff paracompacto y F una gavilla sobre X. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cubiertas de Leray de X, para la gavilla F, y si $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es un refinamiento, entonces*

$$\mu^* : H^q(\mathcal{U}, F) \to H^q(\mathcal{V}, F)$$

es un isomorfismo para todo $q \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, los morfismos canónicos $i_{\mathcal{U}}$ y $i_{\mathcal{V}}$ en el diagrama siguiente son isomorfismos para toda $q \geq 0$:



y el diagrama conmuta ya que μ es un refinamiento. Se sigue que μ^* es un isomorfismo. Q.E.D.

4.4 El Teorema de Dolbeaut

En la sección anterior vimos que para una superficie de Riemann X (de hecho, para una variedad diferenciable X) las gavillas $\mathcal{C}_X$, $\mathcal{C}_X^\infty$, $\mathcal{E}_X^{(1)}$, $\mathcal{E}_X^{(2)}$, $\mathcal{E}_X^{0,1}$ y $\mathcal{E}_X^{1,0}$ resultaban ser *finas* y por lo tanto cohomológicamente triviales. Así, de las gavillas importantes sobre X, la siguiente a considerar es $\mathcal{O}_X$, la gavilla de funciones holomorfas en X. Para esto, al calcular $\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X)$, sería conveniente tener una resolución fina de $\mathcal{O}_X$ y es natural que pensemos en las gavillas anteriores, que ya sabemos que son finas.

Comenzamos con un caso sencillo: Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ una *región*, i.e., un abierto conexo de $\mathbb{C}$. Sea

$$\bar{\partial} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{C}_X^\infty \to \mathcal{C}_X^\infty$$

el morfismo inducido por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y recordemos que como $\mathcal{O}_X = \ker \bar{\partial}$, se tiene una sucesión exacta de gavillas en X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_X^\infty,$$

y como sabemos que C_X^∞ es fina, es natural preguntarnos:

(1) ¿Cuándo es $\bar{\partial}$ un epimorfismo?

(2) ¿Cuándo se puede extender la sucesión anterior a una resolución fina de $\mathcal{O}_X$?

La pregunta (1) es, por supuesto, una pregunta sobre ecuaciones diferenciales: Dada $g \in \mathcal{C}_X^\infty$ ¿existe $f \in \mathcal{C}_X^\infty$ tal que $\partial f(z)/\partial \bar{z} = g(z)$ para toda $z \in X$?

Nótese que una respuesta afirmativa nos diría que la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_X^\infty \to 0$$

es una resolución fina de $\mathcal{O}_X$ con $F_0 = F_1 = \mathcal{C}_X^\infty$ y $F_q = 0$ para $q \geq 2$. En consecuencia se tendría que:

$$\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

para $q \geq 2$, ya que ese caso $F_q = 0$. Y también, como $\bar{\partial}$ es epimorfismo, se tendría que:

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \approx \left(\Gamma(X, \mathcal{C}_X^\infty)/\text{im}\,(\bar{\partial} : \Gamma(X, \mathcal{C}_X^\infty) \to \Gamma(X, \mathcal{C}_X^\infty))\right) = 0$$

y así:

$$\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

para $q \geq 1$.

El lema siguiente resuelve la ecuación diferencial $\partial f/\partial \bar{z} = g$ en el caso cuando $X \subseteq \mathbb{C}$ es una región y $g \in \mathcal{C}^\infty_X$ tiene soporte compacto. Después veremos, en el teorema siguiente, que se puede quitar la hipótesis de que g tenga soporte compacto.

Lema 4.46 (Dolbeaut) *(1): Sean $X = \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{C}^\infty_X$ con soporte compacto. Entonces, existe $f \in \mathcal{C}^\infty_X$ tal que $\partial f/\partial \bar{z} = g$ en $\mathbb{C}$.*

(2): Supongamos ahora $X \subseteq \mathbb{C}$ una región y $g \in \mathcal{C}^\infty_X$. Si $M \subseteq X \subseteq \mathbb{C}$ es una región tal que $\overline{M}$ es compacta y $\overline{M} \subseteq X$, entonces existe $f \in \mathcal{C}^\infty_X$ tal que $\partial f(z)/\partial \bar{z} = g(z)$ para toda $z \in M$.

DEMOSTRACIÓN. (2) se sigue de (1) ya que si consideramos la función $\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{g}(z) := \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \overline{M} \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} - X \\ \neq 0 & \text{sólo en un compacto de } \mathbb{C} \end{cases}$$

(así $\mathrm{Supp}(\tilde{g})$ es compacto), entonces la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) := \begin{cases} \tilde{g}(z) \cdot g(z) & \text{si } z \in X \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C} - X \end{cases}$$

es tal que $h \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$, $h|_M = g$ y $\mathrm{Supp}(h)$ es compacto por la tercera condición en la definición de $\tilde{g}$.

Así, por la parte (1) existe $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$ tal que $\partial f(z)/\partial \bar{z} = h(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$, y en particular para toda $z \in M$ se tiene que $\partial f(z)/\partial \bar{z} = h(z) = g(z)$, $(z \in M)$ que es lo que se quería probar en (2).

Para demostrar (1), sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por:

$$f(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int\int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}$$

(donde usamos la notación de formas diferenciales complejas §4.1, i.e., si $z = x + iy$ entonces $dz = dx + i dy$ y así $dz \wedge d\bar{z} = (dx + i dy) \wedge (dx - i dy) = dx \wedge dx - i dx \wedge dy + i dy \wedge dy - i^2 dy \wedge dy = -i dx \wedge dy - i dx \wedge dy = -2i dx \wedge dy$, i.e., $dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$, i.e., $dz \wedge d\bar{z}$ es $-2i$ veces la medida ordinaria del plano).

Obsérvese ahora que como el integrando tiene una singularidad cuando $z = \zeta$, tenemos entonces que probar que la integral *existe* y depende diferenciablemente de ζ.

Para esto, primero simplificamos haciendo una traslación $z \mapsto z + \zeta$, y luego introducimos coordenadas polares (r, θ) escribiendo $z = re^{i\theta}$. Así, el cambio de variable que hacemos es:

$$z = \zeta + re^{i\theta},$$

y antes de sustituir en la integral calculamos

$$dz \wedge \bar{z} = (-2i)\, dx \wedge dy = (-2i) r\, dr \wedge d\theta$$

(ya que ζ es constante con respecto a la integral). Ahora, sustituyendo en la integral para $f(\zeta)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int\int \frac{g(\zeta + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} (-2i) r\, dr \wedge d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \int\int g(\zeta + re^{i\theta}) \cdot e^{-i\theta} dr \wedge d\theta, \end{aligned}$$

y es claro entonces que f ya no tiene singularidades en el integrando, y por lo tanto la integral existe y es $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{C}$.

Probaremos finalmente que $\partial f(\zeta)/\partial\bar{\zeta} = g(\zeta)$ para todo $\zeta \in \mathbb{C}$. En efecto, diferenciando bajo el signo de integral (lo cual se puede porque f es $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{C}$) se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int\int \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} g(\zeta + re^{i\theta}) \right] \cdot e^{-i\theta} dr\, d\theta$$

y regresando a las coordenadas originales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) &= -\frac{1}{\pi} \int\int \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} g(z + \zeta) \frac{r}{z} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{-2ir} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\int \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} g(z + \zeta) \cdot \frac{1}{z} dz \wedge d\bar{z} \right]. \end{aligned}$$

Y ahora, como por hipótesis g tiene soporte compacto, la integral que define a f sólo se tiene que calcular en un rectángulo B en el plano (r, θ): $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, con R suficientemente grande, i.e., tal que g se anule fuera del rectángulo B. Elijamos ahora rectángulos

$$B_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} : \ \epsilon \leq |z| \leq R\}$$

pequeños tales que $\bar{B}_\epsilon \subseteq B$. Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} [g(\zeta + z)] \cdot \frac{1}{z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [g(\zeta + z)] \cdot \frac{1}{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left[\frac{g(\zeta + z)}{z} \right], \end{aligned}$$

para $z \neq 0$, y así:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{B_\epsilon}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{g(\zeta+z)}{z}\right]dz\wedge d\bar{z}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{B_\epsilon} d\omega\end{aligned}$$

donde

$$\omega := \frac{1}{2\pi i}\frac{g(\zeta+z)}{z}dz$$

es una 1-forma diferencial, (z variable, ζ constante). Entonces, por el Teorema de Stokes:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = -\lim_{\epsilon\to 0}\int\int_{B_\epsilon} d\omega = -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial B_\epsilon}\omega = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|=\epsilon}\omega,$$

y parametrizando al círculo $|z| = \epsilon$ mediante $z = \epsilon\cdot e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z|=\epsilon}\omega = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi_i}\frac{g(\zeta+\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}}\,\epsilon\cdot ie^{i\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi} g(\zeta+\epsilon e^{i\theta})d\theta,\end{aligned}$$

y finalmente, como la integral da el valor promedio de la función g sobre el círculo $\zeta + \epsilon e^{i\theta}$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y como g es continua, entonces estos valores convergen a $g(\zeta)$ cuando $\epsilon \to 0$, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = g(\zeta). \qquad \text{Q.E.D.}$$

La generalización siguiente muestra que podemos quitar la hipótesis de que g tenga soporte compacto:

Teorema 4.47 (Lema de Dolbeaut) *(1): Sea $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $0 < R \leq \infty$, y sea $g \in \mathcal{C}^\infty_X$. Entonces, existe $f \in \mathcal{C}^\infty_X$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = g(z) \qquad (z \in X).$$

(2): Sea $X \subseteq \mathbb{C}$ una región y sea $g \in \mathcal{C}^\infty_X$. Entonces, existe $f \in \mathcal{C}^\infty_X$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = g(z) \qquad (z \in X).$$

DEMOSTRACIÓN. (2) se sigue de (1) ya que para cada punto $x \in X$ existe un disco $B_x \subseteq X$ centrado en x, y así para la función $g|_{B_x}$ por (1) se tiene que existe $f_x \in \mathcal{C}^\infty_{B_x}$ tal que

$$\frac{\partial f_x}{\partial \bar{z}}(z) = g|_{B_x}(z) \qquad (\text{para } z \in B_x).$$

Para demostrar (1) obsérvese primero que *no* se puede dar una solución de $\partial f/\partial \bar{z} = g$ con

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\int \frac{g(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}$$

como en el lema (4.46) previo ya que no teniendo g soporte compacto la integral no convergerá en general. Es por esto que usaremos un proceso recursivo para poder aplicar el lema en cada paso.

Consideremos pues una sucesión de radios $0 < R_0 < \cdots < R_n$ tales que $\lim_{n\to\infty} R_n = R$. Sean $X_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R_n\} \subseteq X$, y obsérvese que:

(i): $\overline{X}_n$ es compacto y $\overline{X}_n \subseteq X_{n+1}$.

(ii): $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = X$

(iii): Por el lema (4.46) previo, para $X_n = M \subseteq X \subseteq \mathbb{C}$, se tiene que para $g \in \mathcal{C}^\infty_X$ existe $f_n \in \mathcal{C}^\infty_X$ tal que $\partial f_n(z)/\partial \bar{z} = g(z)$ para $z \in X_n$.

Ahora, por inducción sobre n cambiamos la sucesión $\{f_n\}$ a otra sucesión $\{\tilde{f}_n\}$, $n \geq 1$, que satisface:

(iv): $\tilde{f}_n \in \mathcal{C}^\infty_{X_n}$.

(v): $\bar{\partial}\tilde{f}_n = g$ en X_n.

(vi): $\|\tilde{f}_{n+1}(z) - \tilde{f}_n(z)\|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}$ (para $z \in X_{n-1}$).

(Aquí $\|h\|_K := \sup_{x\in K} |f(x)|$ es la norma del supremo). Para esto, inductivamente procedemos como sigue:

(a): Pongamos $\tilde{f}_1 := f_1$.

(b): Si $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ ya han sido definidas con las propiedades requeridas, observemos que por (v) y (iii)

$$\bar{\partial}(f_{n+1} - \tilde{f}_n) = \bar{\partial} f_{n+1} - \bar{\partial}\tilde{f}_n = g - g = 0$$

en X_n y consecuentemente $f_{n+1} - \tilde{f} \in \mathcal{O}_{X_n}$.

Se sigue que existe un polinomio $P \in \mathcal{O}_{X_n}$ (por ejemplo un número finito de términos de la expansión de Taylor de $f_{n+1} - \tilde{f}_n$), tal que

$$(*) \qquad \|f_{n+1} - \tilde{f}_n - P\|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}.$$

Pongamos entonces $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P \in \mathcal{C}^\infty_{X_{n+1}}$, y entonces claramente (iv) se satisface. Para (v) observemos que

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\tilde{f}_{n+1} &= \bar{\partial}f_{n+1} - \bar{\partial}P \\ &= \bar{\partial}f_{n+1} \qquad \text{ya que } P \text{ es holomorfo, i.e., } P \in \ker \bar{\partial} \\ &= g \qquad\qquad \text{en } X_{n+1}, \text{ por (iii).} \end{aligned}$$

Y para (vi):

$$\|\tilde{f}_{n+1}(z) - \tilde{f}(z)\|_{X_{n-1}} = \|f_{n+1} - P - \tilde{f}_n\|_{X_{n-1}} \leq 2^{-n}$$

por $(*)$.

Finalmente construimos la solución f a $\bar{\partial}f = g$ como sigue:

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} \{\tilde{f}_n(z)\} \qquad (z \in X),$$

y obsérvese que la sucesión $\{\tilde{f}_n(z)\}$, para $z \in X$ fijo, converge por (vi). Observemos ahora que:

$$\sum_{k=n}^{m} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) = \tilde{f}_{n+m} - \tilde{f}_n$$

(en donde están todas estas funciones definidas, i.e., en X_n), y así, tomando el límite cuando $m \to \infty$ se obtiene:

$$\sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) = f - \tilde{f}_n \qquad (\text{en } X_n)$$

y observemos que (para $k \geq n$) las funciones $\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k$ son holomorfas en X_n ya que $\bar{\partial}(\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k) = g - g = 0$ por (v).

Ahora, por (vi) se sigue que la serie $F_n := \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k)$ converge uniformemente en X_n y como sus términos son holomorfos se sigue que F_n también es holomorfa en X_n.

Así, $f = \tilde{f}_n + F_n \in \mathcal{C}^\infty_{X_n}$ para toda n, y consecuentemente $f \in \mathcal{C}^\infty_X$ ya que $X = \bigcup_n X_n$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f &= \bar{\partial}\tilde{f}_n + \bar{\partial}F_n \\ &= g + 0 \\ &= g \qquad\qquad \text{en } X. \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Obsérvese que la solución $f := \tilde{f}_n + F_n$ de la ecuación $\bar{\partial} f = g$ *no* es única (sólo lo es salvo un sumando holomorfo como F_n).

Como observamos previamente al lema (4.46), los resultados anteriores tienen la siguiente consecuencia, que anotamos aquí para su posterior uso:

Corolario 4.48 *Si $X \subseteq \mathbb{C}$ es una región, entonces para toda $q \geq 1$, se tiene que:*

$$\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Usando este corolario y el teorema de Leray (4.43) se obtiene el siguiente ejemplo:

Corolario 4.49 *Para la esfera de Riemann $X = \mathbb{P}^1$ se tiene*

$$\check{H}^q(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$$

para toda $q \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Usaremos una cubierta de Leray (4.44) de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: Sean

$$U_1 := \mathbb{P}^1 - \{\infty\} = \mathbb{C} \quad \text{y} \quad U_2 := \mathbb{P}^1 - \{0\} \approx \mathbb{C}$$

(biholomorfo a $\mathbb{C}$). Entonces, por el corolario anterior se tiene que

$$\check{H}^1(U_1, \mathcal{O}) = 0 = \check{H}^1(U_2, \mathcal{O}).$$

Se sigue que $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ es una cubierta de Leray de $\mathbb{P}^1$, y así por el teorema de Leray (4.43) se tiene que

$$\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) \approx H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}).$$

Así, basta probar que, para esta cubierta $\mathcal{U}$ todo cociclo $f \in Z^1(U, \mathcal{O})$ es una cofrontera. Es decir, debemos hallar funciones $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, $j = 1, 2$, tales que

$$f = f_1 - f_2 \qquad \text{en} \qquad U_1 \cap U_2 = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Sea pues $f(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$ la expansión de Laurent de f en $\mathbb{C} - \{0\}$. Pongamos

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$f_2(z) := -\sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n,$$

entonces $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ y claramente $f_1 - f_2 = f$ en $\mathbb{C} - \{0\}$. Q.E.D.

El resultado principal de esta sección es una reformulación invariante del lema de Dolbeaut (4.47) que nos dá una resolución fina de $\mathcal{O}_X$ para cualquier superficie de Riemann X:

Corolario 4.50 (Teorema de Dolbeaut) *Sea X una superfice de Riemann. Entonces:*
(1): Se tiene una sucesión exacta (la sucesión de Dolbeaut):

$$0 \to \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_X \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,1}_X \to 0.$$

(2): Y como la sucesión anterior es una resolución fina de $\mathcal{O}_X$, se sigue que

$$\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad \text{para} \qquad q \geq 2$$

y

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \approx \mathcal{E}^{0,1}(X)/d''\mathcal{C}^\infty(X).$$

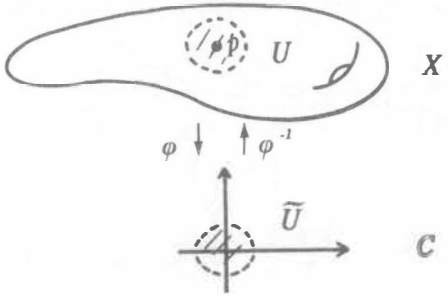
DEMOSTRACIÓN. Por supuesto que basta probar (1). Para esto, basta probar que para todo punto $p \in X$ la sucesión de fibras

$$0 \to \mathcal{O}_{X,p} \to \mathcal{C}^\infty_{X,p} \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{0,1}_{X,p} \to 0$$

es exacta. Obsérvese que como $\mathcal{O}_X = \ker \bar{\partial} = \ker d''$ entonces sólo se necesita probar que d'' es suprayectiva en la sucesión anterior.

Sea pues $[g]_p \in \mathcal{E}^{0,1}_{X,p}$ un germen en $p \in X$ (de una forma diferencial de tipo (0,1)). Así, $[g]_p$ está representado por una 1-forma $g \cdot d\bar{z} \in \mathcal{E}^{0,1}(U)$ donde $U \subseteq X$ es un abierto que contiene a p.

Claramente, podemos elegir U *conexo* y contenido en una carta de X alrededor de p. Sea $\varphi : U \subseteq X \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{C}$ una carta elegida de tal forma que $\varphi(p) = 0$ y de hecho podemos escogerla de tal forma que $\tilde{U} \subseteq \mathbb{C}$ sea un disco centrado en $0 \in \mathbb{C}$:



Usando la inversa φ^{-1} de la carta, el levantamiento $(\varphi^{-1})^* g \cdot d\bar{z} \in \mathcal{E}^{0,1}(\tilde{U})$ es una 1-forma de tipo (0,1) en $\tilde{U}$ y así, la podemos representar como:

$$(\varphi^{-1})^* g \, d\bar{z} =: \tilde{g} d\bar{z} \qquad \text{con} \qquad \tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U}).$$

Entonces, por el lema de Dolbeaut (4.47) existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ tal que $\bar{\partial}\tilde{f} = \tilde{g}$ y así

$$(\dagger) \qquad d''\tilde{f} := \partial\tilde{f} \cdot d\bar{z} = \tilde{g} \cdot d\bar{z}.$$

Considerando ahora el levantamiento $\varphi^*(\tilde{f}) \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d''(\varphi^*(\tilde{f})) &= \varphi^*(d''\tilde{f}) \quad \text{por propiedades del levantamiento} \\ &= \varphi^*(\tilde{g} \cdot d\bar{z}) \quad \text{por}(\dagger) \\ &= g \cdot d\bar{z} \end{aligned}$$

ya que $(\varphi^{-1})^* g \cdot d\bar{z} =: \tilde{g} \cdot d\bar{z}$ y φ^* es la inversa de $(\varphi^{-1})^*$. Q.E.D.

Capítulo 5

Superficies de Riemann Compactas

Hemos visto en capítulos anteriores cómo las superficies de Riemann compactas tienen propiedades que las hacen geométricamente interesantes. En este capítulo comenzamos el estudio sistemático de estas superficies.

Los resultados principales que se obtienen en este capítulo son: La finitud de la dimensión de los espacios $\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X)$ y como consecuencia inmediata, la existencia de funciones meromorfas no constantes en X. Después, probamos el celebrado Teorema de Riemann-Roch, uno de los puntos más altos de la Teoría de Funciones del siglo XIX, y el punto de partida para el estudio geométrico de las superficies compactas. Luego, reinterpretamos uno de los términos de la fórmula de Riemann-Roch, probando el igualmente importante Teorema de Dualidad de Serre. Después, culminamos con la demostración del Teorema de Abel-Jacobi concluyendo así con otro de los grandes resultados de los matemáticos del siglo XIX. Varias aplicaciones geométricas ilustrarán la importancia de los resultados anteriores.

5.1 El Teorema de Finitud

Si X es una superficie de Riemann, por el Teorema de Dolbeaut se tiene que $\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ para toda $q \geq 2$, y así los únicos grupos de cohomología que sobreviven son $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_X) \approx \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ y $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Obsérvese que como $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}_X(U)$ para $U \subseteq X$ abierto, los grupos de cohomología son de hecho espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$.

Para X compacta, por el Teorema del Módulo Máximo , $\Gamma(X, \mathcal{O}) \approx \mathbb{C}$, y así $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X, \mathcal{O}) = 1$.

En esta sección probaremos que si X es compacta entonces también $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O})$ es finita. Una consecuencia inmediata de la finitud anterior es la existencia de funciones meromorfas no constantes sobre una superficie de Riemann compacta X, en contraste con $\mathcal{O}(X) \approx \mathbb{C}$.

Para probar el teorema de finitud, le daremos una cierta topología a un subespacio de las cocadenas correspondientes, de tal forma que los espacios vectoriales topológicos resultantes serán espacios de Hilbert. Antes de proceder, recordamos y adaptamos, los resultados que se necesitarán.

La Norma L^2 para Funciones Holomorfas. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto del plano complejo. Dado $z \in U$ escribamos $z = x + iy$. Consideremos la medida usual en el plano Euclidiano restringida a U. Dada $f \in \mathcal{O}(U)$ su norma L^2 es:

$$\|f\|_{L^2(U)} = \left(\int\int_U |f(z)|^2 dxdy \right)^{1/2},$$

y f se llama *cuadrado-integrable* si $\|f\| < \infty$.

Claramente: (i) la suma de dos funciones cuadrado-integrables en U es de nuevo cuadrado integrable y, (ii) el producto de una función cuadrado integrable por un escalar de $\mathbb{C}$ también lo es. Denotaremos por

$$L^2(U, \mathcal{O}) = \Gamma_{L^2}(U, \mathcal{O}) = \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}) : \|f\| < \infty\}$$

al espacio vectorial de las funciones cuadrado-integrables en U.

Observación. Si $\text{vol}(U) = \int\int_U dxdy < \infty$ entonces para toda $f \in \mathcal{O}(U)$ *acotada* y si $|f|_U = \sup\{|f(z)| : z \in U\}$ es la *norma del supremo*, se tiene:

$$\|f\|_{L^2(U)} = \left(\int\int_U |f(z)|^2 dxdy) \right)^{1/2} \leq \left(\int\int_U |f|_U^2 dxdy \right)^{1/2}$$

$$\leq |f|_U \left(\int\int_U dxdy \right)^{1/2} = \mathrm{vol}(U)^{1/2} |f|_U .$$

Ahora, si $f, g \in L^2(U, \mathcal{O})$ y ponemos

$$\langle f, g \rangle := \int\int_U f(z)\overline{g(z)}\, dxdy,$$

entonces, $\langle\ ,\ \rangle$ es un *producto interno Hermitiano positivo definido* en el espacio vectorial $L^2(U, \mathcal{O})$.

En efecto, lo único que tenemos que verificar es que la integral existe. Pero esto se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|f(z)\overline{g(z)}| \leq \frac{1}{2}(|f(z)|^2 + |g(z)|^2).$$

Con este producto interno $L^2(U, \mathcal{O})$ es un espacio *pre-Hilbert*, i.e., lo único que le falta para ser un *espacio de Hilbert* es la completez. La norma de este espacio está, por supuesto, dada por:

$$\|f\|^2 = \|f\|_{L^2(U,\mathcal{O})} := \langle f, f \rangle .$$

Para probar que $L^2(U, \mathcal{O})$ es, en efecto, un espacio de Hilbert, comenzamos calculando la norma L^2 de una función cuadrado integrable en el disco de centro a y radio r en $\mathbb{C}$: $B = B(a; r)$.

Lema 5.1 *Los monomios $\psi_n(z) = (z-a)^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $z \in B(a; r)$, forman un sistema ortogonal en $L^2(B, \mathcal{O})$, y su norma es*

$$\|\psi_n\|_{L^2(B)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, cambiando a coordenadas polares

$$z = a + \rho e^{i\theta},\ 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

y si $m \neq n$, se obtiene:

$$\left\langle \psi_m(z), \overline{\psi_n(z)} \right\rangle = \int\int_B \psi_m(z)\overline{\psi_n(z)} dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int_B (z-a)^m \overline{(z-a)}^n dxdy \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^m e^{im\theta} \rho^n e^{-in\theta} \rho \, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^{m+n+2}}{m+n+2} \Big|_0^r e^{i\theta(m-n)} d\theta \\
&= \frac{r^{m+n+2}}{m+n+2} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta \\
&= \frac{r^{m+n+2}}{m+n+2} \cdot \frac{1}{i(m-n)} \cdot e^{i\theta(m-n)} \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{r^{m+n+2}}{m+n+2} \cdot \frac{1}{i(m-n)} \cdot \left(e^{2\pi i(m-n)} - e^0 \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Y finalmente, con el mismo cambio de coordenadas, pero poniendo $m = n$ en el cálculo anterior se obtiene la norma:

$$
\begin{aligned}
\|\psi_n\|^2_{L^2(B)} &:= \langle \psi_n, \psi_n \rangle = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^{2n+1} e^0 d\rho d\theta \\
&= \frac{r^{2n+2}}{2n+2} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi r^{2n+2}}{2(n+1)} = \frac{\pi r^{2(n+1)}}{n+1}
\end{aligned}
$$

y así

$$
\|\psi_n\|_{L^2(B)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.
$$

Observación. Si $f \in L^2(B, \mathcal{O})$ y consideramos su desarrollo de Taylor alrededor del punto $a \in B \subseteq \mathbb{C}$,

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,
$$

como los monomios $(z-a)^n$ son ortogonales en $L^2(B, \mathcal{O})$ por el lema previo, del Teorema de Pitágoras en $L^2(B, \mathcal{O})$ se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(B)} &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|(z-a)^n\|^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}.
\end{aligned}
$$

El resultado principal es:

Proposición 5.2 *Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $r > 0$. Sea $U_r := \{z \in U : B(z;r) \subseteq U\}$ el conjunto de puntos de U cuya distancia a la frontera de U es $\geq r$. Entonces, para toda $f \in L^2(U, \mathcal{O})$ se tiene que*

$$|f|_{U_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(U)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $a \in U_r$ y $f(z) = \sum c_n(z-a)^n$ la expansión de Taylor de f alrededor de a. Entonces, por (5.1) y la observación que le sigue, se obtiene:

$$\|f\|^2_{L^2(B(a;r))} = |c_0|^2\pi r^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}|c_n|^2 \geq |c_0|^2\pi r^2,$$

y así :

$$|f(a)| = |c_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(B(a;r))} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f\|_{L^2(U)},$$

ya que $B(a;r) \subseteq U$. Y como $|f|_{U_r} := \sup\{|f(a)| : a \in U_r\}$, entonces el resultado se sigue. Q.E.D.

Corolario 5.3 *Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, entonces $L^2(U, \mathcal{O})$ es completo, y por lo tanto es un espacio de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f_n \in L^2(U, \mathcal{O})$ una sucesión de Cauchy (en la norma de $L^2(U, \mathcal{O})$. Sea $K \subseteq U$ cualquier compacto. Sea $r > 0$ un real tal que para toda $z \in K$ se tenga $B(z;r) \subseteq U$ (para elegir a esta $r > 0$ cubrimos K con discos abiertos y luego usamos el hecho de que K es compacto).

Entonces, por la proposición anterior aplicada a cada f_n se tiene que:

$$|f_n| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_n\|_{L^2(U)},$$

y así :

$$|f_m - f_n|_K \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|f_m - f_n\|_{L^2(U)},$$

y por lo tanto la sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente* en el compacto K, y esto para todo $K \subseteq U$ compacto. Se sigue que la función límite $f(z) := \lim_{n\to\infty}\{f_n(z)\}$ se puede derivar, i.e., es holomorfa y además su norma es:

$$\|f\|_{L^2(U)} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2(U)} < \infty,$$

es decir $f \in L^2(U, \mathcal{O})$. Q.E.D.

Para la demostración del teorema de finitud necesitaremos una generalización del clásico lema de Schwarz. Este lema se puede formular como sigue (ver [Conway]):

Lema de Schwarz. *Sean D, D' discos centrados en el origen de $\mathbb{C}$ con radios $0 < r' < r$ respectivamente. Sea $a = r'r^{-1}$. Supongamos que $f \in \mathcal{O}(D)$ se anula en el origen $0 \in \mathbb{C}$ con orden e. Entonces,*

$$|f|_{D'} \leq a^e |f|_D.$$

Para la norma L^2 de los espacios de Hilbert de las funciones cuadrado-integrables se tiene la siguiente generalización:

Proposición 5.4 (Lema de Schwarz para la norma de Hilbert) *Sean D, D' discos centrados en el origen de $\mathbb{C}$ de radios $0 < r' < r$ respectivamente. Sea a cualquier número real tal que $r'r^{-1} < a < 1$. Entonces, existe una constante M (que depende de r, r' y a) tal que si $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ se anula en el origen $0 \in \mathbb{C}$ con orden e, entonces,*

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq a^e \cdot M \|f\|_{L^2(D)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tilde{r} := a^{-1}r'$ y sea $\widetilde{D} := \{z \in \mathbb{Z} : |z| < \tilde{r}\}$. Entonces, $r' < \tilde{r} < r$ y $D' \subsetneq \widetilde{D} \subsetneq D$. De la proposición (5.2) se tiene que

$$|f|_{\widetilde{D}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(\widetilde{D})} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

Ahora, por el lema de Schwarz aplicado a los discos $D' \subseteq D$, se tiene que

$$|f|_{D'} \leq a^e |f|_{\widetilde{D}},$$

y como $\|f\|_{L^2(D')} \leq \sqrt{\mathrm{vol}(D')}|f|_{D'}$ por la observación antes de (5.1), entonces poniendo $M := \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \cdot \sqrt{\mathrm{vol}(D')}$ se tiene el resultado deseado. Q.E.D.

Una consecuencia inmediata es:

Corolario 5.5 *Sean D, D' discos centrados en el origen de $\mathbb{C}$ con radios $0 < r' < r$ respectivamente. Entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un subespacio vectorial cerrado $A \subseteq L^2(D, \mathcal{O})$ de codimensión finita, tal que*

$$\|f\|_{L^2(D')} \leq \epsilon \|f\|_{L^2(D)}$$

para toda $f \in A$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, sea A el conjunto de todas las funciones $f \in L^2(D, \mathcal{O})$ que se anulan en el origen $0 \in D$ con orden $e \geq m$. Entonces, toda $f \in A$ tiene una expansión de Taylor, alrededor del $0 \in D$, de la forma

$$f(z) = \sum_{j=n}^{\infty} c_j z^j,$$

y como por (5.1) los monomios $\psi_j(z) = z^j$ forma una base ortogonal de $L^2(D, \mathcal{O})$, entonces claramente A es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(D, \mathcal{O})$ de codimensión $\leq n$.

Finalmente, sea a cualquier número real tal que $r'r^{-1} < a < 1$ y sea M la constante en la proposición (5.4). Escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \cdot M \leq \epsilon$, y para esta n sea $A \subseteq L^2(D, \mathcal{O})$ el subespacio de codimensión $\leq n$ anterior. Entonces, para toda $f \in A$, el resultado se sigue de (5.4). Q.E.D.

Corolario 5.6 *Sean $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{C}$ abiertos tales que $\overline{U'}$ es compacto y $\overline{U'} \subseteq U$. Entonces, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un subespacio vectorial cerrado $A \subseteq L^2(U, \mathcal{O})$ de codimensión finita, tal que*

$$\|f\|_{L^2(U')} \leq \epsilon \|f\|_{L^2(U)}$$

para toda $f \in A$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\overline{U'}$ es compacto contenido en U, lo podemos cubrir con un número finito de discos con centro en U y un radio $r > 0$ fijo, i.e., existen $a_1, \ldots, a_k \in U$ y $r > 0$ tales que:

(i) $B(a_j;\, r) \subseteq U, \qquad 1 \leq j \leq k.$

(ii) $U' \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} B(a_j;\, r/2)$.

Ahora, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, sea A el conjunto de todas las funciones $f \in L^2(U, \mathcal{O})$ que se anulan en *cada* $a_j \in U$ con orden $e \geq n$. Claramente A es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(U, \mathcal{O})$ de codimensión $\leq kn$. Escojamos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que $k/(2^{n+1}) \leq \epsilon$, y para esta n sea A el

correspondiente subespacio de codimensión $\leq kn$ anterior. Entonces, para toda $f \in A$, considerando su expansión de Taylor alrededor de a_j,

$$f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} c_i (z - a_j)^i,$$

para $r/2 < r$, de la observación previa a (5.2) se sigue que

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(B(a_j;\, r/2))} &= \sum_{i=n}^{\infty} |c_i|^2 \frac{\pi (r/2)^{2i+2}}{i+1} \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\pi r^{2i+2}}{2^{2i+2}(i+1)} |c_i|^2 \\ &\leq \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\pi r^{2i+2}}{i+1} |c_i|^2 \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \|f\|^2_{L^2(B(a_j;\, r))}, \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(U')} &\leq \sum_{j=1}^{k} \|f\|_{L^2(B(a_j;\, r/2))} && \text{por (ii)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(B(a_j;\, r))} && \text{por la desigualdad de arriba} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=1}^{k} \|f\|_{L^2(U)} && \text{por (i)} \\ &= \frac{k}{2^{n+1}} \|f\|_{L^2(U)} \\ &\leq \epsilon \cdot \|f\|_{L^2(U)} && \text{por la elección de } n \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

A continuación, aplicaremos lo anterior a las cocadenas asociadas a una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de una superficie de Riemann compacta X. Recordando (4.50) que $\check{H}^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ para $q \geq 2$, los únicos grupos de cocadenas que nos interesan son

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) := \prod_{U_i \in U} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = \{f_i : N(\mathcal{U}) &\to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)\} \\ U_i &\mapsto f(U_i) \end{aligned}$$

y

$$C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) := \prod_{U_i,U_j\in U} \Gamma(U_i,\cap U_j,\ \mathcal{O}_X) = \{f_{ij} : N(\mathcal{U}) \ \rightarrow \ \Gamma(U_i,\cap U_j,\ \mathcal{O}_X)\}$$

$$U_i \cap U_j \ \mapsto \ f_{ij}(U_i \cap U_j).$$

Lo que haremos ahora es introducir una norma L^2 en estos grupos de cocadenas y después consideraremos los respectivos subespacios vectoriales de las cocadenas que tengan norma finita para probar que $\dim_{\mathbb{C}}\check{H}^1(X,\ \mathcal{O}_X) < \infty$ para X compacta.

Cocadenas cuadrado integrables. Sea X una superficie de Riemann compacta. Como X es compacta, podemos elegir una familia finita de cartas $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}_i, z_i\}$, $1 \leq i \leq n$, que cubran a X y tales que cada $z_i(\widetilde{U}_i) \subseteq \mathbb{C}$ es un disco (de hecho, podemos elegir el mismo disco, digamos centrado en el origen).

Ahora, si tenemos abiertos $U_i \subseteq \widetilde{U}_i$, $1 \leq i \leq n$, tales que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{1\leq i\leq n}$ es una cubierta de X, entonces el lema siguiente nos dice que $\mathcal{U}$ es de Leray.

Lema 5.7 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sean $\mathcal{U} = \{U_i\}$ y $\widetilde{\mathcal{U}} = \{U_i\}$, $1 \leq i \leq n$ como arriba. Entonces, $\mathcal{U}$ es una cubierta de Leray de X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea σ un simplejo de $\mathcal{U}$. Como cada U_i de $\mathcal{U}$ está contenido en una sola carta coordenada $\widetilde{U}_i$ de X, entonces $|\sigma| := U_0 \cap \cdots \cap U_q$ está totalmente contenido en una sola carta coordenada de X, digamos $(\widetilde{U}_0, z_0)$. Más aún, $|\sigma|$ es conexo abierto, y por lo tanto $z_0(|\sigma|) \subseteq \mathbb{C}$ es también conexo abierto y biholomorfo a $|\sigma|$. Se sigue que, para $p \geq 1$,

$$\check{H}^p(|\sigma|,\mathcal{O}) \approx \check{H}^p(z_0(|\sigma|),\mathcal{O}) = 0,$$

la última igualdad por (4.48) ya que $z_0(|\sigma|) \subseteq \mathbb{C}$ es una región. Q.E.D.

Con las mismas hipótesis que antes. Sean $\mathcal{U} = \{U_i\}$, y $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}_i\}$, $1 \leq i \leq n$ cubiertas de X como arriba.

Usando el hecho de que cada abierto U_i está contenido en una carta $(\widetilde{U}_i, z_i)$ de X, podemos hacer la siguiente

Definición 5.8 En los grupos de cocadenas $C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ y $C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ se definen las *normas L^2* siguientes:

(i) Si $\alpha = (f_i) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$, se define

$$\|\alpha\|^2_{L^2(\mathcal{U})} := \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2_{L^2(U_i)}.$$

(ii) Si $\beta = (f_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, se define

$$\|\beta\|^2_{L^2(\mathcal{U})} := \sum_{i,j} \|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)}.$$

Nótese que aquí las normas L^2 de f_i, y de f_{ij} respectivamente, se calculan con respecto a las cartas correspondientes $(\tilde{U}_i, z_i)$, es decir,

(i) $\|f_i\|_{L^2(U_i)} := \|f_i \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i))}$,

(ii) $\|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)} := \|f_{ij} \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i \cap U_j))}$,

donde las normas en el lado derecho, son las normas L^2 definidas previamente. Con la misma notación. Sean

$$C^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \subseteq C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$$

para $q = 0, 1$, los subespacios vectoriales de las q-cocadenas que tienen norma L^2 finita. A los elementos de $C^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ se les llama *q-cocadenas cuadrado integrables de la cubierta $\mathcal{U}$*, con coeficientes en la gavilla $\mathcal{O}_X$.

Lema 5.9 *Sea X una superficie de Riemann compacta y sean $\mathcal{U}$, $\tilde{\mathcal{U}}$ como antes. Entonces,*

(i) Para cada $q = 0, 1$, $C^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ es un espacio de Hilbert.

(ii) Los 1-cociclos en $C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, i.e., $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \cap C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ forman un subespacio vectorial cerrado, al que denotaremos por $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$.

(iii) La cofrontera δ se restringe a una aplicación

$$\delta : C^0_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \to C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X).$$

DEMOSTRACIÓN. (i) Claramente $C^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ es un subespacio vectorial de $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, y es normado con la norma L^2 de (5.8); más aún, por el corolario (5.3), $C^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ es completo.

(ii) Como $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) := \ker(\delta : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \to C^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X))$, entonces $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \cap C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ es un subespacio vectorial, y es cerrado ya que $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = \delta^{-1}(0)$ y δ es claramente continua.

(iii) Por definición $\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ involucra solo sumas finitas de restricciones f_{ij} de f_i en U_i a $U_i \cap U_j$, y así, si las f_i son cuadrado integrables, también lo son las f_{ij}. Q.E.D.

Gracias a este lema, podemos hacer las siguientes definiciones: Sean X, $\mathcal{U}$, $\widetilde{\mathcal{U}}$ como antes. Se tienen los grupos:

$$\begin{aligned} H^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) &:= Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)/\delta C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X), \\ H^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) &:= \ker\,(\delta : C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}) \to C^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_x)) \\ &:= Z^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = Z^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \cap C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X). \end{aligned}$$

Nótese que las inclusiones $i : C^q_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \hookrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$, $q = 0, 1$, inducen morfismos

$$i^* : H^q_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{O}_X).$$

Obsérvese ahora que, como en el Lema 5.9 (ii) previo, $H^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = Z^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ es un subespacio de Hilbert de $C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$. Sin embargo, aún cuando $Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ también es espacio de Hilbert, del cociente $H^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ no podemos concluir que sea también espacio de Hilbert ya que no sabemos que las cofronteras $\delta C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ formen un subespacio cerrado de $Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$.

El lema siguiente nos asegura que los grupos definidos arriba son de hecho los grupos de cohomología de la cubierta $\mathcal{U}$:

Lema 5.10 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sean $\widetilde{\mathcal{U}} = \{(\widetilde{U}_i, z_i)\}$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}$, $1 \le i \le n$ cubiertas abiertas finitas de X como antes. Entonces, el morfismo $i^* : H^q_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \to H^q(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ es un isomorfismo, y así se tienen isomorfismos*

$$H^q_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \approx H^q(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \approx \check{H}^q(X,\mathcal{O}_X).$$

El último isomorfismo es consecuencia de (5.7) que asegura que $\mathcal{U}$ es cubierta de Leray.

DEMOSTRACIÓN. *Inyectividad*: Primero, para $q = 0$, el morfismo $i^* : H^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \to H^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ es inducido por la inclusión $i^* : C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \hookrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$, y como

$$H^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) := Z^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \hookrightarrow Z^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) = H^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X),$$

entonces no hay nada que probar.

Para $q = 1$, consideremos el morfismo

$$i^* : Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)/\delta C^0_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X) \to Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)/\delta C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$$

Supongamos que el 1-cociclo $(f_{ij} \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$ es tal que $i^*(f_{ij}) = 0$ en $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$. Entonces, $(f_{ij}) = f_i - f_j$ para algún $(f_i) \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$.

Probaremos que cada f_i es cuadrado integrable en $U_i \in \mathcal{U}$, i.e., probaremos que $(f_i) \in C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ (y consecuentemente, ya que $(f_{ij}) = f_i - f_j$ con $(f_i) \in C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, se tendrá que (f_{ij}) será cohomólogo a cero en $H^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$).

Ahora, para probar que f_i es cuadrado integrable en $U_i \in \mathcal{U}$, para cada punto $x \in \partial U_i$ (frontera de U_i), escojamos un abierto $U_j \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_j$. Por hipótesis $f_{ij} = f_i - f_j$ en $U_i \cap U_j$, y así $f_i = f_{ij} + f_j$ en $U_i \cap U_j$. Ahora, como $(f_{ij}) \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$, entonces f_{ij} es cuadrado integrable en $U_i \cap U_j$. Y como f_j también es cuadrado integrable en $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, entonces f_i también es cuadrado integrable en $U_i \cap U_j$. Así, f_i es cuadrado integrable en la intersección de U_i con una vecindad abierta de $x \in \partial U_i$. Estas intersecciones cubren ∂U_i, y como $\overline{U}_i$ es compacto, entonces, un número finito de estas intersecciones cubren ∂U_i. Se sigue que f_i es cuadrado integrable en U_i, como se quería probar.

Suprayectividad: Como en la demostración de (4.36), p. 155, la cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ la podemos encoger a otra cubierta $\mathcal{V} = \{V_i\}$ (mismo conjunto de índices) tal que $\overline{V}_i \subseteq U_i$ para toda i. Así, se tiene un refinamiento $\mu : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, y ambas cubiertas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son tales que sus abiertos están contenidos en una sola carta de $\tilde{\mathcal{U}}$. Se sigue de (5.7) que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son de Leray y así por (4.45) se tienen isomorfismos $\mu^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ para todo $q \geq 0$.

Ahora, para cualquier simplejo $\sigma \in N(\mathcal{V})$ se tiene que

$$|\sigma| = V_0 \cap \cdots \cap V_q \subseteq \overline{V}_0 \cap \cdots \overline{V}_q \subseteq \mu U_0 \cap \cdots \cap \mu U_q =: \mu(\sigma),$$

y por lo tanto $|\sigma|$ está contenido en un subconjunto compacto de $|\mu(\sigma)|$. Entonces, para cada $f \in C^q(\mathcal{V}, \mathcal{O})$, y para cada $\sigma \in N(\mathcal{V})$ se tiene que

$$(\mu f)(\sigma) = \mathrm{res}_{|\sigma|} f(\mu\sigma) \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O})$$

con $|\sigma| \subseteq$ compacto $\subseteq |\mu(\sigma)|$. Se sigue que $\mathrm{res}_{|\sigma|} f(\mu\sigma)$ es cuadrado integrable, i.e., $(\mu f)(\sigma) \in C^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. En consecuencia, el morfismo $\mu^* : H^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \to H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ se puede factorizar como

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\mu^*} & H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}) \\ & {\scriptstyle \mu_0^*} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle i^*} & \\ & H^q_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) & \end{array}$$

i.e., $\mu^* = i^* \mu_0^*$ con μ^* un isomorfismo e i^* inyectivo. Se sigue que i^* debe ser suprayectivo. Q.E.D.

Es conveniente ahora tener un bosquejo de lo que nos falta para probar que $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) < \infty$. Primero, como X es compacta, podemos escoger cubiertas abiertas finitas $\mathcal{U}'' \leq \mathcal{U}' \leq \widetilde{\mathcal{U}}$ con $\widetilde{\mathcal{U}} = \{(\widetilde{U}_i, z_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ cartas de X tales que $z_i(\widetilde{U}_i) \subseteq \mathbb{C}$ son discos, y los abiertos de $\mathcal{U}''$ y $\mathcal{U}'$ contenidos en una sola carta de $\widetilde{\mathcal{U}}$, como antes. Ahora, por (5.7) estas cubiertas son de Leray, y así en el diagrama conmutativo siguiente los morfismos del renglón inferior son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccc} Z^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) & \xrightarrow{\mu} & Z^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \\ H^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) & \xrightarrow{\approx} & H^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}) & \xrightarrow{\approx} & \check{H}^1(X, \mathcal{O}) \end{array}$$

(los morfismos verticales son los epimorfismos canónicos). Como π'' es suprayectivo, se sigue que

$$\pi' \left(\mu Z^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O})\right) = H^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}).$$

Usando la compacidad de X mostraremos en (5.13) (lema de finitud) que las cubiertas $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{U}''$ se pueden elegir de tal forma que existe un subespacio vectorial de dimensión finita $S \subseteq Z^1(\mathcal{U}', \mathcal{O})$ tal que

$$\mu Z^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) \subseteq S + \delta C^0(\mathcal{U}', \mathcal{O}).$$

Pero como $\ker \pi' = \delta C^0(\mathcal{U}', \mathcal{O})$, entonces

$$H^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}) = S,$$

y por lo tanto $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}) = \dim_{\mathbb{C}} S < \infty$.

Para mostrar la existencia del subespacio $S \subseteq Z^1(\mathcal{U}', \mathcal{O})$ de dimensión finita con las propiedades requeridas, usaremos la siguiente consecuencia de (5.6) en el contexto que necesitamos:

Corolario 5.11 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sean $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U} \leq \widetilde{\mathcal{U}}$ cubiertas abiertas finitas de X, con $\widetilde{\mathcal{U}}$ dada por cartas $(\widetilde{U}_i, z_i)$ tal que $z_i(\widetilde{U}_i) \subseteq \mathbb{C}$ es un disco. Supongamos que los abiertos de $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{U}$ están contenidos en una sola carta de $\widetilde{\mathcal{U}}$. Supongamos además que para toda i $\overline{U}_i \subseteq U_i$ (diremos que $\mathcal{U}'$ es encogimiento de $\mathcal{U}$). Entonces para toda $\epsilon > 0$ existe un subespacio vectorial cerrado $A \subseteq Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ de codimensión finita, tal que*

$$\|\xi\|_{L^2(\mathcal{U}')} \leq \epsilon \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

para toda $\xi \in A$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier cocadena $\xi \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ se tiene que $\|\xi\|_{L^2(\mathcal{U}')} < \infty$. Como $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \prod_{i,j}^n \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)$, el resultado se sigue de (5.6). Q.E.D.

El lema de alisamiento. Si $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U} \leq \widetilde{\mathcal{U}}$ son cubiertas finitas de X que son encogimientos de $\widetilde{\mathcal{U}}$, el corolario previo nos dice que las cocadenas $\xi \in C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ se ven "más lisas" que aquellas en $C^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. El lema siguiente nos dice que dado un cociclo $\xi' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O})$ lo podemos "alisar" encontrando otro cociclo $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ tales que ξ y ξ' determinan la misma clase de cohomología en $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Lema 5.12 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sea $\widetilde{\mathcal{U}}$ una familia finita de cartas como antes, y sean $\mathcal{U}'' < \mathcal{U}' < \mathcal{U} < \widetilde{\mathcal{U}}$ encogimientos de $\widetilde{\mathcal{U}}$ dados como antes. Entonces, existe una constante $L > 0$ tal que para todo cociclo $\xi' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O})$ existen elementos $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\eta \in C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$ que satisfacen:*

(i) $\xi' = \xi + \delta\eta$ *en* $\mathcal{U}''$, *y*

(ii) $\max\{\|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathcal{U}'')}\} \leq L \cdot \|\xi'\|_{L^2(\mathcal{U}')}$.

DEMOSTRACIÓN. (i) Consideremos la función

$$Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O}) \to Z^1_{L^2}(U', \mathcal{O})$$

dada por $(\xi, \eta') \mapsto \xi|_{\mathcal{U}'} + \delta\eta'$, donde usamos la notación $\xi|_{\mathcal{U}'} := \mu(\xi)$ para $\mu : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ el refinamiento $\mathcal{U}' \leq \mathcal{U}$, y $\delta : C^0_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O}) \to C^1_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O})$ es la cofrontera.

Esta función es continua claramente, y es suprayectiva, ya que por el lema (5.10) se tiene un isomorfismo $\mu^* : H^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\approx} H^1_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O})$, y por lo tanto, dado cualquier cociclo $\xi' \in Z^1_{L^2}(U', \mathcal{O})$ existe un cociclo $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ cohomólogo a ξ', i.e., $\xi' = \xi|_{\mathcal{U}'} + \delta\eta'$ con $\eta \in C^0_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O})$. Restringiendo a $\mathcal{U}''$ tenemos el resultado deseado, i.e., la función

$$Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) \to Z^1_{L^2}(U', \mathcal{O})$$

es suprayectiva.

(ii) Como $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$ es un espacio de Hilbert con la norma natural

$$\|(\xi, \eta'')\| := \left(\|\xi\|^2_{L^2(\mathcal{U})} + \|\eta''\|_{L^2(\mathcal{U}'')}\right)^{1/2},$$

y como la función

$$\phi : Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) \to Z^1_{L^2}(\mathcal{U}', \mathcal{O})$$

es continua y suprayectiva (por la parte (i)) entre espacios de Hilbert, entonces por el teorema de Banach, ϕ es *abierta*.

Sean B y B'' las bolas en $Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O})$ y $C^0_{L^2}(\mathcal{U}'',\mathcal{O})$ respectivamente, y sea $W = B \times B''$. Entonces, W es una vecindad abierta del 0 en $Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathcal{U}'',\mathcal{O})$, y como ϕ es abierta entonces $\phi(W)$ es una vecindad abierta del 0 en $Z^1_{L^2}(\mathcal{U}',\mathcal{O})$. Así, existe $c > 0$ tal que

$$(*) \qquad \{\xi' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}',\mathcal{O}) : \|\xi'\|_{L^2(\mathcal{U}')} = c\} \subseteq \phi(W).$$

Sea $L = c^{-1} > 0$. Probaremos que esta L nos sirve. En efecto, si $\xi' \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}',\mathcal{O})$ es arbitrario, $\xi' \neq 0$, podemos encontrar una $c \in \mathbb{C}$ tal que $\|c\xi'\|_{L^2} = C$. Por lo tanto, por (*) existen elementos $(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \in W \subseteq Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathcal{U}'',\mathcal{O})$ tales que $\phi(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \tilde{\xi}|_{\mathcal{U}'} + \delta\tilde{\eta}$, y como $W = B \times B'$ entonces $\|\tilde{\xi}\|_{L^2} \leq 1$ y $\|\tilde{\eta}\|_{L^2} \leq 1$. Entonces, poniendo $\xi := c^{-1}\tilde{\xi} \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O})$ y $\eta := c^{-1}\tilde{\eta} \in C^0_{L^2}(\mathcal{U};\mathcal{O})$, se tiene que

$$\xi' = c^{-1}(c\xi') = c^{-1}\tilde{\xi}|_{\mathcal{U}'} + \delta c^{-1}\tilde{\eta} = \xi|_{\mathcal{U}'} + \delta\eta,$$

y además

$$\|\xi\|_{L^2} = \|c^{-1}\tilde{\xi}\|_{L^2} = c^{-1}\|\tilde{\xi}\|_{L^2} \leq c^{-1} = L,$$

y similarmente $\|\eta\|_{L^2} \leq L$. Q.E.D.

Lema 5.13 (Lema de finitud) . *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sea $\tilde{\mathcal{U}}$ una familia finita de cartas en X como antes y sean $\mathcal{U}'' < \mathcal{U}' < \mathcal{U} < \tilde{\mathcal{U}}$ encogientos dados. Entonces, existe un subespacio vectorial $S \subseteq Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$ tal que*

$$Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})|_{\mathcal{U}''} = S + \delta C^0(\mathcal{U}'',\mathcal{O}),$$

i.e., dado $\xi \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$ existen elementos $\sigma \in S$ y $\eta \in C^0(\mathcal{U}'',\mathcal{O})$ tales que

$$\xi = \sigma + \delta\eta \quad \text{en} \quad \mathcal{U}''.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $L > 0$ la constante del lema anterior. Para $\epsilon := 1/(2L) > 0$, por el corolario (5.11) existe un subespacio vectorial cerrado $A \subseteq Z^1_{L^2}(U,\mathcal{O})$ de codimensión finita tal que

$$(1) \qquad \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U}')} \leq \epsilon\|\xi\|_{L^2(\mathcal{U})}$$

para todo $\xi \in A$.

Sea S el complemento ortogonal de A en $Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O})$, i.e.,

$$A \oplus S = Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}).$$

Ahora, sea $\xi \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$ arbitrario. Como $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$ es un encogimiento, como observamos en la primera línea de la demostración de (5.11), se tiene que

$$M := \|\xi\|_{L^2(\mathcal{U}')} < \infty,$$

y así $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}',\mathcal{O})$. Ahora, por el lema de alisamiento, existen elementos $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O})$ y $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathcal{U}'',\mathcal{O})$ tales que

$$\xi = \zeta_0 + \delta\eta_0 \quad \text{en} \quad \mathcal{U}'', \tag{2}$$

y además

$$\|\zeta_0\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq LM \quad \text{y} \quad \|\eta_0\|_{L^2(\mathcal{U}'')} \leq LM. \tag{3}$$

Ahora, como $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}) = A \bigoplus S$, podemos escribir

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0, \tag{4}$$

con $\xi_0 \in A$ y $\sigma_0 \in S$.

Construiremos ahora, por inducción, dos sucesiones

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \quad \text{en} \quad Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O})$$

y

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \quad \text{en} \quad C^0_{L^2}(\mathcal{U}'',\mathcal{O}),$$

tales que, como $\zeta_j \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}) = A \bigoplus S$, si consideramos su descomposición

(i) $\zeta_i = \xi_j + \sigma_j$ con $\xi_j \in A$ y $\sigma_j \in S$,

se tenga que:

(ii) $\xi|_{\mathcal{U}''} = \tilde{\zeta}_0$,

(iii) $\xi_j = \xi_{j+1} + \delta\eta_{j+1}, \quad j \geq 0$,

(iv) $\|\zeta_j\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-j}LM$ y $\|\eta_j\|_{L^2(\mathcal{U}'')} \leq 2^{-j}LM$, $j \geq 0$.

La construcción es como sigue: Para $j = 0$, las ecuaciones (2) y (4), y las desigualdades de (3) son lo que se requiere. Obsérvese que (2) implica (ii).

Por inducción supongamos construídos hasta ζ_j y η_j. Nótese que las descomposición de $\zeta_j \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U},\mathcal{O}) = A \bigoplus S$, $\zeta_j = \xi_j + \sigma_j$ implica que

$$\|\xi_j\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq \|\zeta_j\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-j}LM,$$

y como $\xi_j \in A$, por (1) se tiene que

$$\|\xi_j\|_{L^2(\mathcal{U}')} \leq \epsilon \|\xi_j\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq (1/2L)\|\zeta_j\|_{L^2(U)} \leq 2^{-j-1}M, \tag{5}$$

ya que $\epsilon = 1/2L$.

Ahora, por el lema de alisamiento, para $\xi_j \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, existen elementos $\zeta_{j+1} \in Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $\eta_{j+1} \in C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$ tales que

$$\xi_j = \zeta_{j+1} + \delta\eta_{j+1} \quad \text{en} \quad \mathcal{U}'',$$

y además

$$\max\left(\|\zeta_{j+1}\|_{L^2(\mathcal{U})}, \|\eta_{j+1}\|_{L^2(\mathcal{U}'')}\right) \leq L \cdot \|\xi_j\|_{L^2(\mathcal{U}')},$$

combinando esta desigualdad con (5) se obtiene en resultado deseado.

Finalmente usando estas sucesiones, observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \sigma_j &= \sum_{j=0}^{n} (\zeta_j - \xi_j) && \text{por (i)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (\zeta_j - \zeta_{j+1} - \delta\eta_{j+1}) && \text{por (iii)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} (\zeta_j - \zeta_{j+1}) - \delta \sum_{j=0}^{n} \eta_{j+1} \\
&= \zeta_0 - \zeta_{n+1} - \delta \sum_{j=0}^{n} \eta_{j+1} \\
&= \xi - \delta\eta_0 - \zeta_{n+1} - \delta \sum_{j=0}^{n+1} \eta_j, \\
&= \xi - \delta\eta_0 - \zeta_{n+1} - \delta\eta_{n+1} - \delta \sum_{j=0}^{n} \eta_j \\
&= \xi - \delta\eta_0 - \xi_{n+1} - \delta \sum_{j=0}^{n} \eta_j && \text{por (iii)},
\end{aligned}$$

y así

$$\sum_{j=0}^{n} \sigma_j = \xi - \xi_{n+1} - \delta\eta_0 - \delta \sum_{j=0}^{n} \eta_j, \tag{6}$$

y como por (iv)

$$\max\{\|\zeta_j\|, \|\eta_j\|\} \leq 2^{-j} LM,$$

y como $\xi_j = \zeta_j - \sigma_j$, entonces $\|\xi_j\|_{L^2(\mathcal{U})} \leq 2^{-j} LM$ también y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, y las series

$$\sigma := \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$$

y

$$\eta := \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j+1}$$

convergen en S y $C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$ respectivamente. Más aún, de (6) se sigue que

$$\sigma = \xi + \delta\eta \quad \text{en} \quad \mathcal{U}''$$

con $\sigma \in S$ y $\eta \in C^0_{L^2}(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$. Q.E.D.

Finalmente, podemos probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.14 (Teorema de finitud) . *Si X es una superficie de Riemann compacta, entonces* $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\tilde{\mathcal{U}}$ una cubierta finita de cartas de X como antes y sean $\mathcal{U}'' < \mathcal{U} < \tilde{\mathcal{U}}$ encogimientos dados. Observemos que $Z^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O})|_{\mathcal{U}} \subseteq Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ ya que

$$Z^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O})|_{\mathcal{U}} \subseteq Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \subseteq Z^1(\mathcal{U}', \mathcal{O}) \subseteq Z^1_{L^2}(\mathcal{U}, \mathcal{O}),$$

la última inclusión es como en la primera línea de la demostración de (5.11).

Por el lema de finitud previo existe un subespacio vectorial de dimensión finita $S \subseteq Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \subseteq Z^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$ tal que

$$Z^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O})|_{\mathcal{U}''} \subseteq Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})|_{\mathcal{U}''} \subseteq S + \delta C^0(\mathcal{U}'', \mathcal{O}).$$

Finalmente, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
Z^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\mu} & Z^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi''} & & \\
H^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\approx} & H^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) & \xrightarrow{\approx} & \check{H}^1(X, \mathcal{O})
\end{array}$$

donde las flechas verticales son pasos al cociente, y los morfismos del renglón inferior son isomorfismos ya que las cubiertas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}''$ son de Leray. Como π es suprayectivo se tiene que

$$\pi'' Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})|_{\mathcal{U}''} = H^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}),$$

y como $\ker \pi'' = \delta C^0(\mathcal{U}'', \mathcal{O})$, de (*) se sigue que

$$H^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) = \sum_{j=1}^{d} \mathbb{C}[g_j]$$

donde las g_j son una base del espacio S y $[g_j]$ son las clases de cohomología correspondientes. Entonces,

$$\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{U}'', \mathcal{O}) \leq d < \infty. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Definición 5.15 Si X es una superficie de Riemann compacta, al entero $g := g(X) := \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^1(X, \mathcal{O}) < \infty$ se le llama el *género de* X.

Este género es una de los invariantes topológicos más importantes de X como veremos en las secciones siguientes.

Ejemplo. Para la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$, ya sabemos (4.49) que $\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$, y así $g(\mathbb{P}^1) = 0$.

Una consecuencia importante del teorema de finitud anterior es la existencia de funciones meromorfas no constantes en una superficie de Riemann compacta. Esto será consecuencia de la proposición siguiente:

Proposición 5.16 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces, para todo punto $p \in X$ existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ que tiene un polo en p y es holomorfa en $X - \{p\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Finitud anterior,

$$g := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) < \infty$$

Sea pues (U_1, z) una carta coordenada de X alrededor de p, con $z(p) = 0$.

Sea $U_2 := X - \{p\}$. Entonces $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ es una cubierta abierta de X con $U_1 \cap U_2 = U_1 - \{p\}$.

Como $z(p) = 0$ y z es un biholomorfismo en U_1, entonces $z^{-j}(x) \neq 0$ para toda $x \in U_1 - \{p\}$ y para toda $j \in \mathbb{N}$. Así las funciones $z^{-j} : U_1 \cap U_2 = U_1 - \{p\} \to \mathbb{C}$ son holomorfas en particular para $j = 1, \ldots, g+1$.

Y como $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) \subseteq C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) = \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O})$, entonces las funciones holomorfas $z^{-j} \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O})$ representan 1-cociclos

$$\zeta_j \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}), \quad 1 \leq j \leq g+1,$$

y como $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}) = g$ entonces las clases de cohomología

$$\overline{\zeta}_j = \zeta_j + \delta C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}) \in H^1(X,\mathcal{O}),$$

$1 \leq j \leq g+1$, son linealmente dependientes. En otras palabras, los cociclos ζ_j son linealmente dependientes módulo cofronteras. Así existen complejos $c_1, \ldots, c_{g+1}$ no todos cero y una cocadena $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{O})$ tales que:

$$c_1\zeta_1 + \cdots + c_{g+1}\zeta_{g+1} = \delta\eta \in B^1(\mathcal{U},\mathcal{O}),$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{g+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{en} \quad U_1 \cap U_2,$$

donde $f_1 \in \mathcal{O}(U_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(U_2)$.

Así, existe una función $f \in \mathcal{M}(X)$ que coincide con $f_1 + \sum_{j=1}^{g+1} c_j z^{-j}$ en U_1 (y por lo tanto tiene un polo en p) y que es igual a f_2 en $U_2 = X - \{p\}$ (y así es holomorfa en $X - \{p\}$ porque f_2 lo es). Esta es la función deseada. Q.E.D.

Corolario 5.17 (Existencia de funciones Meromorfas no Constantes en una Superficie de Riemann Compacta). *Sea X una superficie de Riemann compacta, y sean $p_1, \ldots, p_n$ puntos distintos de X. Entonces, para cualesquiera números complejos dados $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que $f(p_i) = c_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier par $i \neq j$, por la proposición anterior tomando $p = p_i$, existe una función $f_{ij} \in \mathcal{M}(X)$ que tiene un polo en p_i y es holomorfa en p_j (de hecho en $X - \{p_i\}$).

Para este (i,j) escojamos una constante $\lambda_{ij} \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que

$$f_{ij}(p_k) \neq f_{ij}(p_j) - \lambda_{ij}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Así, la función

$$g_{ij} := \frac{f_{ij} - f_{ij}(p_j)}{f_{ij} - f_{ij}(p_j) + \lambda_{ij}} \in \mathcal{M}(X)$$

(donde $f_{ij}(p_j)$ y λ_{ij} son constantes) es tal que:

(i) $g_{ij}(p_i) = 1$ ya que en el numerador y denominador que definen g_{ij} aparece f_{ij} que tiene un polo en p_i con el mismo orden.

(ii) Así g_{ij} es holomorfa en los puntos p_k, $1 \leq k \leq n$ ya que el denominador no se anula allá.

(iii) Más aún, $g_{ij}(p_j) = 0$ ya que el numerador se anula entonces.

Consideremos ahora las funciones

$$h_i := \prod_{j \neq i} g_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Claramente las $h_i \in \mathcal{M}(X)$ y satisfacen:

$$h_i(p_j) = \prod_{\ell \neq i} g_{ij}(p_j).$$

Finalmente, la función

$$f := \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot h_i \in \mathcal{M}(X),$$

y satisface:

$$f(p_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i(p_j) = c_j \cdot 1 = c_j,$$

y es la función requerida. Q.E.D.

5.2 El Teorema de Riemann-Roch

En la sección anterior, como consecuencia del Teorema de Finitud, se demostró la existencia de funciones meromorfas no constantes en una superficie de Riemann compacta.

El paso siguiente es considerar estas funciones meromorfas y es aquí donde la noción de *divisor* aparece para tomar en cuenta los *polos* (y *ceros*) de una función meromorfa. A continuación, es importante conocer cuántas funciones meromorfas linealmente independientes hay en X, con ciertas restricciones en sus polos. El Teorema de Riemann-Roch, uno de los pilares de la Teoría de Superficies de Riemann compactas, provee una respuesta a esta pregunta y es el punto de partida para el estudio a profundidad de las superficies de Riemann compactas.

Para comenzar, recordaremos que si $f : X \to \mathbb{C}$ es una función meromorfa en una superficie de Riemann compacta X, entonces por (2.31) el conjunto de *ceros* y *polos* de f es un *subconjunto finito* de X.

Cada *cero* z_k de f tiene un cierto *orden* $\operatorname{ord}_{z_k}(f) =: \nu_k$, y también cada *polo* p_k de f tiene un *orden* $\operatorname{ord}_{p_k}(f) =: -\eta_k$. Para distinguir si un cierto orden es de un cero ó de un polo, los tomamos con signo: Para los ceros $\nu_k \geq 0$ y para los polos $-\eta_k \leq 0$.

Definición 5.18 Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función meromorfa no idénticamente cero. El *divisor asociado* a f, también llamado *divisor de ceros y polos* de f, es la función:

$$(f) : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dada por:

$$(f)(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ no es cero ni polo de } f \\ \nu_k & \text{si } x \text{ es un cero de orden } \nu_k \text{ de } f \\ -\nu_k & \text{si } x \text{ es un polo de orden } \nu_k \text{ de } f. \end{cases}$$

En otras palabras, el divisor (f) asigna "pesos" (números enteros) a los puntos de X, de tal forma que los pesos son *nulos* excepto a lo más en un número finito de puntos de X. El concepto anterior se generaliza como sigue:

Definición 5.19 Sea X una superficie de Riemann compacta. Un *divisor* en X es una función

$$D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tal que $D(p) = 0$ excepto a la más en un número finito de puntos $p \in X$.

Observación. El conjunto de divisores en X, denotado $\mathrm{Div}(X)$, es un grupo abeliano con la suma usual de funciones como operación.

Más aún, un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ puede verse como una *combinación lineal formal* de puntos de X con sus pesos u órdenes asociados, ya que si $D : X \to \mathbb{Z}$ es tal que $D(p_i) = n_i \in \mathbb{Z}$ (con $n_i = 0$ para casi todo punto $p_i \in X$). Entonces, formalmente podemos escribir:

$$(*) \qquad D := \sum n_i \cdot p_i \qquad \text{con } n_i \in \mathbb{Z},\ p_i \in X.$$

y como podemos "agrupar" puntos iguales, sin perder generalidad se puede suponer que los p_i son distintos en la expresión $(*)$ arriba, de tal forma que los enteros $n_i = \mathrm{ord}_{p_i}(D)$ son el *orden* ó *multiplicidad* del divisor D en el punto p_i.

Con esta notación, la *suma* en $\mathrm{Div}(X)$ es la suma obtenida sumando coeficientes correspondientes a puntos iguales. Claramente $\mathrm{Div}(X)$ es de hecho el *grupo libre abeliano* generado por los puntos de X. Algunas veces, en lugar de *notación aditiva* $D = \sum n_i \cdot p_i$ para un divisor en X, también se usa la *notación multiplicativa* $D = \prod n_i^{p_i}$.

Observemos ahora que el grupo de divisores $\mathrm{Div}(X)$ se puede *ordenar parcialmente* como sigue: Dados $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ diremos que $D \leq D'$ si y sólo si $D(p) \leq D'(p)$ para todo punto $p \in X$. Claramente éste es un orden parcial en $\mathrm{Div}(X)$.

Obsérvese también que si $f \in \mathcal{M}_X - \{0\}$, entonces f es *holomorfa* si y sólo si $(f) \geq 0$.

Definición 5.20 Un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ se llama *efectivo* (ó positivo) si $D \geq 0$.

Así $D \geq D' \iff D - D' \geq 0$, i.e., $\iff D - D'$ es efectivo.

En la notación multiplicativa, la relación $D \leq D'$, algunas veces se expresa diciendo que D *divide* a D'. Esto es porque si $D = \prod p_i^{D(p_i)}$, y $D' = \prod p_i^{D'(p_i)}$, entonces $D \leq D' \Leftrightarrow D(p_i) \leq D'(p_i)$ y así el "producto" D divide al "producto" D'.

Divisores principales. Para distinguir a los divisores en $\mathrm{Div}(X)$ que provienen de funciones meromorfas $f \in \mathcal{M}_X$, llamaremos a estos *divisores principales*. Es decir, un divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ se llama *principal* si existe una función $f \in \mathcal{M}_X - \{0\}$ tal que $D = (f)$.

Lema 5.21 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Si $f, g \in \mathcal{M}_X - \{0\}$, entonces:*

(i) $(f \cdot g) = (f) + (g)$.

(ii) $(\frac{1}{f}) = -(f)$.

DEMOSTRACIÓN. (ii) es obvio ya que $1/f$ intercambia ceros con polos de f. Para (i): Si $x \in X$ no es cero ni polo de f y g, entonces no lo es de $f \cdot g$, y así $(f \cdot g)(x) = 0 = (f)(x) + (g)(x)$.

Si $x \in X$ es cero (o polo) de f pero no de g, entonces es cero (o polo) de $f \cdot g$, y así, $(f \cdot g)(x) = (f)(x) + 0 = (f)(x) + (g)(x)$. Los otros casos son similares. Q.E.D.

Corolario 5.22 *La aplicación natural* $\mathcal{M}_X^* \to \mathrm{Div}(X)$ *que manda* f *en* (f), *es un morfismo de grupos.*

Aquí $\mathcal{M}_X^* = \mathcal{M}_X - \{0\}$.

Los elementos de la imagen de este morfismo, que forman un subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$, son los divisores principales de X.

Al cociente $\mathrm{Div}(X)/\{\text{divisores principales}\}$ se le llama el *grupo de clases de divisores* de X.

El grado de un divisor. Sea X una superficie de Riemann compacta. Se tiene un morfismo de grupos

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

llamado el *grado*, y definido por: $\deg(D) := \sum_{p \in X} D(p)$.

Es decir, si $D = \sum n_i \cdot p_i$ entonces $\deg(D) = \sum n_i$. Es claro que deg es en efecto un morfismo (aditivo), y es suprayectivo claramente.

Obsérvese que si $(f) \in \mathrm{Div}(X)$ es un divisor principal entonces $\deg(f) = 0$, ya que en una superficie de Riemann compacta el número de ceros (con sus multiplicidades) de f es igual al número de polos (con sus multiplicidades).

Definición 5.23 Dos divisores $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ se llaman *linealmente equivalentes*, denotado $D \sim D'$, si su diferencia $D - D'$ es un divisor principal.

Obsérvese que si $D \sim D'$ entonces $\deg(D) = \deg(D')$ ya que $D \sim D'$ significa $D - D' = (f)$ y así, $\deg(D) - \deg(D') = \deg(D - D') = \deg(f) = 0$.

Divisor de una 1-forma meromorfa. En forma análoga a como se definió el divisor de una función (0-forma) meromorfa $f \in \mathcal{M}_X - \{0\}$ se define el divisor de una 1-forma meromorfa $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} - \{0\}$ como sigue:

Sea $p \in X$ un punto cualquiera. Escojamos una carta (U, z) de X alrededor de p. Así el divisor asociado a $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} - \{0\}$ se define como:

$$(\omega) := \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(\omega).$$

En forma análoga al lema (5.22) se tiene: Si $f \in \mathcal{M}_X - \{0\}$ y $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} - \{0\}$, entonces $(f \cdot \omega) = (f) + (\omega)$.

Definición 5.24 Sea X una superficie de Riemann. Un *divisor canónico* en X es el divisor (ω) de una 1-forma meromorfa $\omega \in \mathcal{M}_X^{(1)} - \{0\}$.

Obsérvese que cualesquiera dos divisores canónicos en X son equivalentes ya que si $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}_X^{(1)} - \{0\}$, entonces localmente $\omega_1 = f_1\, dz$ y $\omega_2 = f_2\, dz$ con $f_1,\ f_2 \in \mathcal{M}_X - \{0\}$, entonces poniendo $f := f_1/f_2 \in \mathcal{M}_X - \{0\}$ se tiene que $\omega_1 = f \cdot \omega_2$, y así $(\omega_1) = (f) + (\omega_2)$, i.e., $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$.

A continuación veremos cómo asociar una gavilla a un divisor de X.

La gavilla $\mathcal{O}_D$ asociada a un divisor. Sea X una superficie de Riemann y sea D un divisor en X. Definamos una gavilla, denotada $\mathcal{O}_D$, de la forma siguiente:

(i) Si $U \subseteq X$ es un abierto, definimos

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}_U \ :\ f = 0 \quad \text{ó} \quad (f)(x) \geq -D(x) \quad \forall x \in U\}.$$

(ii) Si $U \subseteq V$ son abiertos de X, las restricciones usuales

$$\mathcal{O}_D(V) \longrightarrow \mathcal{O}_D(U)$$
$$f \mapsto f|_U$$

son morfismos.

Claramente $\mathcal{O}_D$ es una *pregavilla* en X. De hecho, es una *gavilla* (ejercicio).

Observaciones. (1): Si $D = 0$ es el *divisor cero* en X, entonces $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$, ya que si $f \in \mathcal{O}_0(U)$ entonces $(f) \geq 0$, i.e., f es holomorfa en U y así $f \in \mathcal{O}(U)$. El recíproco es similar.

(2): Si $D \sim D'$ son divisores equivalentes en X, entonces las gavillas asociadas son isomorfas: $\mathcal{O}_D \approx \mathcal{O}'_D$

En efecto, como $D \sim D'$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{M}_X - \{0\}$ tal que $D - D' = (\varphi)$.

Defínase un morfismo $\Phi : \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}'_D$ como sigue:

Si $U \subseteq X$ es un abierto, $\Phi_U : \mathcal{O}_D(U) \to \mathcal{O}'_D(U)$ es la función dada por: $\Phi_U(f) := \varphi \cdot f$ (producto de f con $\varphi|_U$).

Claramente Φ_U es un morfismo de grupos, y por la definición de los morfismos restricción en las gavillas $\mathcal{O}_D$ y $\mathcal{O}_{D'}$, Φ es de hecho un morfismo de gavillas.

Si finalmente se define $\tilde{\Phi} : \mathcal{O}'_D \to \mathcal{O}_D$ como $\tilde{\Phi}_U : f \mapsto \varphi^{-1} \cdot f$ (ya que $\varphi \in \mathcal{M}_X - \{0\}$ implica $\varphi^{-1} \in \mathcal{M}_X - \{0\}$), entonces claramente $\tilde{\Phi}$ es la inversa de Φ.

(3): Si $D \leq D'$ son divisores en X, entonces se tiene una inclusión natural $\mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{O}'_D$ ya que si $(f) \geq -D$, como $-D \geq -D'$, entonces $(f) \geq -D'$.

Proposición 5.25 *Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $D \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor tal que $\deg(D) < 0$. Entonces $\check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $0 \neq f \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D(X)$. Entonces $(f) \geq -D$ y así $\deg(f) \geq \deg(-D) = -\deg(D) > 0$ ya que $\deg D < 0$ por hipótesis. Pero esto es una contradicción ya que $\deg(f) = 0$. Q.E.D.

La proposición anterior nos dice que tienen mayor interés los divisores D tales que $\deg(D) \geq 0$ ya que en este caso pueden existir funciones meromorfas en X con $(f) \geq -D$. Obsérvese que mientras "mayor" sea el divisor D, i.e., mientras más puntos de X tenga con pesos distintos de cero, entonces el número de polos permitidos para una f tal que $(f) \geq -D$ aumenta.

Más adelante, como parte del Teorema de Riemann-Roch, probaremos que si X es compacta, entonces $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^q(X, \mathcal{O}_D) < \infty$ para $q = 0, 1$, generalizando así el Teorema de Finitud de la sección previa con $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$.

Antes de proceder al Teorema de Riemann-Roch, necesitamos unos resultados previos.

La Gavilla Rascacielos. Sea X una superficie de Riemann y sea $p \in X$ un punto. La *gavilla rascacielos* en X, denotada $\mathbb{C}_p$, se define como sigue:

(i): Si $U \subseteq X$ es un abierto, se define

$$\mathbb{C}_p(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } p \in U \\ 0 & \text{si } p \notin U \end{cases}$$

(ii): Si $U \subseteq V$ son abiertos, el morfismo $\mathbb{C}_p(V) \to \mathbb{C}_p(U)$ es el *morfismo identidad* si $p \in U$, y el morfismo cero en caso contrario.

Claramente $\mathbb{C}_p$ es una pregavilla que de hecho es gavilla de anillos.

Lema 5.26 *Si $p \in X$ es un punto entonces:*

(i): $\check{H}^0(X, \mathbb{C}_p) \approx \mathbb{C}$.

(ii): $\check{H}^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: (i) es obvio ya que como $p \in X$, por definición de $\mathbb{C}_p$ se tiene que

$$\check{H}^0(X, \mathbb{C}_p) \approx \Gamma(X, \mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p(X) := \mathbb{C}.$$

(ii): Sea $\bar{\xi} \in \check{H}^1(X, \mathbb{C}_p)$ representado en el límite directo por un $\xi \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_p)$. Sea $\xi \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_p)$ un cociclo cuya clase de cohomología es $\bar{\xi}$.

Escojamos un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ de $\mathcal{U}$ de tal forma que el punto p está contenido sólo en un V_α. Entonces, $Z^1(\mathcal{V}, \mathbb{C}_p) = 0$ y por lo tanto $\xi = 0$. Q.E.D.

Observaciones. (1): Supongamos que $D \in \mathrm{Div}(X)$ es un divisor arbitrario. Sea $p \in X$ un punto y sea $P \in \mathrm{Div}(X)$ el divisor definido por:

$$P(X) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = p \\ 0 & \text{si } x \neq p. \end{cases}$$

Claramente $D \leq D + P$ y así se tiene la inclusión natural (observación (3) antes de (5.25)): $\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D+P}$.

(2): Se tiene un morfismo de gavillas

$$\beta : \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_p$$

definido como sigue:

Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces:

(a) Si $p \notin U$, se define $\beta_U := 0$.

(b) Si $p \in U$, para definir $\beta_U : \mathcal{O}_{D+P}(U) \to \mathbb{C}_p(U) = \mathbb{C}$, sea $s \in \mathcal{O}_{D+P}(U)$ una sección.

Escojamos una carta (V, z) de X alrededor de p, con $z(p) = 0$, y consideremos la expansión de Laurent de la función meromorfa s alrededor del punto p con respecto a la coordenada local z:

$$s = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n \cdot z^n$$

con $c_n \in \mathbb{C}$ y $k := D(p) \in \mathbb{Z}$.

Nótese que como $(s) \leq -D - P$, ya que $s \in \mathcal{O}_{D+P}(\mathcal{U})$, entonces $\text{ord}_p(S) \leq -D(p) - P(p) = -D(p) - 1 = -k - 1$, y así la expansión de Laurent de s alrededor de p en efecto comienza a lo más en $-k - 1$.

Finalmente se define:

$$\beta_U : \mathcal{O}_{D+P}(U) \to \mathbb{C}_p(U) = \mathbb{C}$$

como: $\beta_U(s) := c_{-k-1}$.

Claramente β_U no depende de la coordenada local (V, z) elegida para la expansión de s. Más aún, β_U es en efecto un morfismo, y así, induce un morfismo de gavillas:

$$\beta : \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_p.$$

(3): De hecho, β es un *epimorfismo* con núcleo $\mathcal{O}_D$, y asi se tiene una sucesión exacta corta de gavillas en X:

$$0 \to \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D+P} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_p \to 0.$$

En efecto, que β es epimorfismo es obvio.

Para ver que $\ker(\beta) = \mathcal{O}_D$, claramente se tiene que $\mathcal{O}_D \subseteq \ker(\beta)$ ya que si $s \in \mathcal{O}_D(\mathcal{U})$ entonces $\text{ord}_p(s) \leq -k$, i.e., $c_{-k-1} = 0$ en la expansión de Laurent de s alrededor de p.

Ahora, si $\sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n \cdot z^n$, $k = D(p) \in \mathbb{Z}$, entonces $\text{ord}_p(s) > -k - 1$, i.e., $\text{ord}_p(s) \leq -k = -D(p)$ y así $(s)(p) \leq -D(p)$, y claramente para toda $x \neq p$ se tiene que $(s)(x) \leq -D(x)$ (ya que $P(x) = 0$ si $x \neq p$) y entonces $(s) \leq -D$, i.e., $s \in \mathcal{O}_D$ y así $\ker\beta \subseteq \mathcal{O}_D$.

(4): La sucesión exacta corta de gavillas (3) induce la sucesión (larga) de cohomología:

$$0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \check{H}^0(X, \mathbb{C}_P) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0$$

ya que $\check{H}^1(X, \mathbb{C}_p) = 0$ por (5.26).

Corolario 5.27 *Sean X un a superficie de Riemann compacta, y $D \leq D'$ divisores en X. Entonces, la inclusión natural $\mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_{D'}$ induce un epimorfismo:*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $D \leq D'$ entonces $D' = D + P_1 + \cdots + P_n$ con $P_j \in X$ puntos (que pueden ser repetidos). Inducción sobre el número n:

(1): $n = 1$: Así $D' = D + P$ y el epimorfismo deseado es precisamente el de la observación (4) anterior:

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0.$$

(2): Claramente el morfismo $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ se factoriza como:

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P_1}) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D+P_1+P_2}) \to \cdots \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'})$$

y el resultado se sigue por inducción, ya que en esta factorización, cada flecha es un epimorfismo por **(1)**. Q.E.D.

Usaremos la notación $h^q(X, \mathcal{O}_D) := \dim_{\mathbb{C}} \check{H}^q(X, \mathcal{O}_D)$. Parte del Teorema de Riemann-Roch que probaremos a continuación nos dice que estas dimensiones son finitas si X es compacta.

Riemann había observado, en la notación y terminología actual, que si X es una superficie de Riemann compacta de *género* g, entonces

$$h^0(X, \mathcal{O}_D) \geq \deg(D) - g + 1,$$

y Roch, un estudiante doctoral de Riemann, estudió la posibilidad para tener la igualdad en la *desigualdad de Riemann* anterior. El término necesario para tener la igualdad resultó ser $h^1(X, \mathcal{O}_D)$, y el Teorema de Riemann-Roch que probaremos nos dice precisamente esto:

$$h^0(X, \mathcal{O}_D) - h^1(X, \mathcal{O}_D) = \deg(D) + 1 - g$$

para X compacta de género g.

El término de la izquierda en la fórmula anterior, es la *característica de Euler* de X, y de acuerdo a nuestras construcciones, es un invariante que toma en cuenta la estructura compleja de X. El término de la derecha es un invariante topológico-algebraico "crudo" de X.

Teorema 5.28 (Riemann-Roch) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g. Sea D un divisor en X. Entonces:*

(i): *$\check{H}^0(X, \mathcal{O}_D)$ y $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_D)$ son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita.*

(ii): $h^0(X, \mathcal{O}_D) - h^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D)$.

DEMOSTRACIÓN: **(a):** El teorema es cierto para el divisor $D = 0$ ya que entonces $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$ y así, $h^0(X, \mathcal{O}_0) = 1$, $h^1(X, \mathcal{O}_0) = g$ por definición, y $\deg(0) = 0$.

(b): Sea $D \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor arbitrario y sea $p \in X$ un punto. Sea $D' = D + P$.

Probaremos ahora que si el teorema es verdadero para uno de los divisores D ó D' entonces también lo es para el otro:

En efecto, considerando la sucesión larga de cohomología asociada a la sucesión exacta corta:

$$0 \to \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}_P \to 0,$$

$$0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to \check{H}^0(X, \mathbb{C}_P) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to$$

$$\check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0,$$

y poniendo $V := \mathrm{Im}(\check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}) = \ker(\delta)$, se obtienen las sucesiones exactas cortas:

$$(1) \qquad 0 \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to V \to 0$$

$$(2) \qquad 0 \to \mathbb{C}/V \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_D) \to \check{H}^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0$$

$$(3) \qquad 0 \to V \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}/V \to 0$$

De la sucesión (3) se obtiene:

$$(4) \qquad \dim V + \dim \mathbb{C}/V = 1 = \deg(D') - \deg(D)$$

ya que $D' = D + P$.

Así la ecuación (4) nos dice que $\dim(V)$ y $\dim(\mathbb{C}/V)$ son finitas.

Consecuentemente, las sucesiones (1) y (2) nos dicen que si una de las $h^q(X, -)$ es finita también lo es la otra.

Más aún, (1) implica que $h^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = h^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim(V)$ y (2) implica que $h^1(X, \mathcal{O}_D) = h^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim(\mathbb{C}/V)$. Así, sumando estas dos igualdades se obtiene:

$$\begin{aligned} h^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + h^1(X, \mathcal{O}_D) &= h^0(X, \mathcal{O}_D) + h^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + 1 \\ &= h^0(X, \mathcal{O}_D) + h^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \deg(D') - \deg(D) \end{aligned}$$

por (4). Se sigue que:

$$h^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - h^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg(D') = h^0(X, \mathcal{O}_D) - h^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg(D).$$

Así, si la fórmula de Riemann-Roch es válida para alguno de los divisores D ó $D' = D + P$ (es decir, si uno de los lados de la igualdad anterior es $1 - g$) entonces también es verdadera para el otro divisor.

(c): los incisos (a) y (b) implican que el Teorema es verdadero para todo divisor $D \geq 0$.

(d): Sea Ahora D un divisor arbitrario en X. Entonces, D se puede escribir como:

$$D = P_1 + \cdots + P_m - P_{m+1} - \cdots - P_{m+n}$$

con $P_j \in X$ puntos.

Por el inciso (c), el Teorema es válido para el divisor $D' = P_1 + \cdots + P_m$.

Ahora, si $D'' := D' - P_{m+1}$ i.e., $D' = D'' + P_{m+1}$, por el inciso (b) el Teorema también es cierto para D''.

El resultado se sigue por inducción sobre n. Q.E.D.

Definición 5.29 Obsérvese que como $h^1(X, \mathcal{O}_D) \geq 0$, de la fórmula de Riemann-Roch se sigue que:

$$h^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg(D),$$

la *desigualdad de Riemann.*

Se suele usar la notación $\mathcal{L}(D) := \mathcal{O}_D$, y $\ell(D) := \dim_C \mathcal{L}(D) := h^0(X, \mathcal{O}_D)$.

Esta desigualdad tiene como consecuencias importantes algunos teoremas clásicos:

Teorema 5.30 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g, y sea $q \in X$ un punto. Entonces, existe una función meromorfa no constante f en X, la cual tiene un único polo en q de orden a lo más $g + 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D : X \to \mathbb{Z}$ el divisor dado por

$$D(x) := \begin{cases} g+1 & \text{si } x = q \\ 0 & \text{si } x \neq q. \end{cases}$$

Entonces, $\deg(D) = g + 1$, y así de la desigualdad de Riemann se tiene que:

$$h^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + (g+1) = 2$$

es decir, $\dim_{\mathbb{C}} \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 2$ así existe $f \in \check{H}^0(X, \mathcal{O}_D) \approx \mathcal{O}_D(X)$ una función meromorfa no constante.

Por definición de $\mathcal{O}_D(X)$ se tiene que $(f) \geq -D$ y así para $x = q$ se tiene que $(f)(q) \geq -D(q) = -(g+1)$, i.e., $-\text{ord}_q(f) \geq -(g+1)$, i.e., $\text{ord}_q(f) \leq g+1$.

Más aún, para $x \neq q$ se tiene $(f)(x) \geq -D(x) = 0$, i.e., f es holomorfa en todo $x \neq q$. Q.E.D.

Este teorema se puede reformular como:

Corolario 5.31 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g. Entonces, existe existe una aplicación cubriente holomorfa (posiblemente ramificada) $p : X \to \mathbb{P}^1$ con a lo más $g+1$ hojas.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema previo, existe una función meromorfa no constante $p : X \to \mathbb{P}^1$ con un único polo de orden $\leq g+1$, en un punto $a \in X$. Así , el punto $\infty \in \mathbb{P}^1$ es tomado por p con multiplicidad $\leq g+1$.

Como $p : X \to \mathbb{P}^1$ es holomorfa, no constante, y propia porque X es compacta, por (2.29) el número de hojas de $p : X \to \mathbb{P}^1$ es $\leq g+1$. Q.E.D.

Corolario 5.32 *Toda superficie de Riemman compacta de género 0 es isomorfa a la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$.*

DEMOSTRACIÓN: Si el género de X es $g = 0$, por el colorario previo existe una aplicación cubriente holomorfa $p : X \to \mathbb{P}^1$ con a lo más $0+1 = 1$ hoja. Es decir, $p : X \to \mathbb{P}^1$ es cubriente con una sola hoja y por lo tanto tiene que ser un biholomorfismo. Q.E.D.

En (5.17) se demostró la existencia de funciones meromorfas no constantes en una superficie de Riemann compacta, con polos sólo en puntos prescritos de antemano. La mejora introducida aquí por el teorema (5.30) es que el orden del polo que puede prescribirse, puede ser estimado, independientemente del punto q, por el género g de X.

5.3 El Teorema de dualidad de Serre.

En esta sección demostramos el Teorema de dualidad de Serre que establece un isomorfismo natural entre el dual del ($\mathbb{C}$-espacio vectorial) grupo de cohomología $\check{H}^1(X, \mathcal{O}(-D))$, donde D es un divisor dado en X, y el grupo ($\mathbb{C}$-espacio vectorial) de formas diferenciales $H^0(X, \Omega(D))$, donde $\Omega(D)$ es la gavilla de 1-formas diferenciales multiplos del divisor $-D$:

$$H^0(X, \Omega(D)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}(-D))^*$$

Este isomorfismo, que manda una 1-forma $\omega \in \Omega(X) = \Gamma(X, \Omega(D))$ a la funcional lineal $\Theta(\omega) := H^1(X, \mathcal{O}(-D)) \to \mathbb{C}$ se define como el *residuo* de una cierta 1-forma obtenida a partir de ω. Comenzamos entonces con la definición y propiedades del residuo de 1-forma diferencial:

El Residuo. Sea X una superficie de Riemann y sean $Y \subseteq X$ un abierto, $p \in Y$ un punto y ω una 1-forma holomorfa en $Y - \{p\}$. Sea (U, z) una carta coordenada alrededor de p tal que $U \subseteq Y$ y $z(p) = 0$. Entonces, en $U - \{p\}$ podemos representar ω como $\omega = f dz$ con $f \in \mathcal{O}(U, -\{p\})$. Consideremos entonces la expansión en serie de Laurent de f alrededor de p, con respecto a la coordenada local z:

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Si $c_n = 0$ para todos los $n < 0$, entonces f tiene una singularidad removible en p y así f se puede extender holomórfamente a todo Y. En este caso diremos que ω tiene una *singularidad removible en p*.

Si existe un $N < 0$ tal que $c_n = 0$ para todo $n < N$ y $c_N \neq 0$, entonces f tiene un polo (de orden N) en p, y diremos que la 1-forma ω tiene un *polo de orden N* en p.

Si $c_n \neq 0$ para un número infinito de $n < 0$, diremos que ω tiene una singularidad esencial en p.

El coeficiente c_{-1} se llama el *residuo* de la 1-forma ω en p, y lo denotamos por

$$c_{-1} = \mathrm{Res}_p(\omega).$$

Esta definición se hizo en términos de la carta (U, z) de X alrededor de p. El lema siguiente nos dice que en realidad no depende de la carta elegida:

Lema 5.33 *Con la notación anterior. El residuo* $\mathrm{Resp}_p(\omega)$ *no depende de la elección de la carta* (U, z).

DEMOSTRACIÓN. Sea V una vecindad abierta de $p \in X$, y supongamos que $\omega = f dz$, donde $f \in \mathcal{O}(U - \{p\})$. Entonces,
(1): Si $f \in \mathcal{O}(V - \{p\})$, entonces el residuo de df en p es cero, y por lo tanto es independiente de la carta.

En efecto, si (U, z) es una carta alrededor de p tal que $z(p) = 0$, y si

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

es la expansión de Laurent de f alrededor de p, entonces

$$df = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1} \right) dz,$$

y por lo tanto el coeficiente de $z^{-1}dz$ es $0 \cdot c_0 = 0$, i.e., $\mathrm{Res}_p(df) = 0$.

(2): Si ϕ es una función holomorfa en V que tiene un cero de primer orden en p, entonces, $\mathrm{Res}_p(\phi^{-1}d\phi) = 1$, y por lo tanto es independiente de la carta elegida.

En efecto, si (U, z) es una carta alrededor de p con $z(p) = 0$, entonces

$$\phi = z \cdot h,$$

donde h de holomorfa en p y no se anula allá. Entonces,

$$d\phi = h\, dz + z dh,$$

y

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{h dz + z d^h}{zh} = \frac{dz}{z} + \frac{dh}{h}.$$

Ahora, como $h(p) \neq 0$, la forma diferencial $h^{-1}dh$ es holomorfa en p y por lo tanto tiene residuo cero.

Así,

$$\mathrm{Res}_p\left(\frac{d\phi}{\phi}\right) = \mathrm{Res}_p\left(\frac{dz}{z}\right) = 1.$$

(3): Usando (1) y (2) terminamos la demostración: Si (U, z) es una carta cualquiera alrededor de $p \in X$ tal que $z(p) = 0$, sea $\omega = f\, d\, z$ y sea

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

su expansión de Laurent alrededor de p.

Pongamos ahora

$$g := \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Claramente,

$$\omega = dg + c_{-1} z^{-1} dz,$$

con g holomorfa en $U - \{p\}$ y z con un cero de primer orden en p. De (1) y (2) se sigue que

$$\mathrm{Res}_p(\omega) = \mathrm{Res}_p(dg) + c_{-1}\mathrm{Res}_p(z^{-1}d\phi) = 0 + c_{-1} = c_{-1},$$

el cual no depende de la carta elegida. Q.E.D.

Se sigue que si $p \in X$, podemos elegir una carta coordenada (U, z) alrededor de p tal que $z(p) = 0$ y $z(U) \subseteq \mathbb{C}$ es un disco pequeño Δ, alrededor del $0 \in \mathbb{C}$ y entonces para $\omega = f\,d\,z$ en este disco se tiene que

$$\mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} f\,d\,z.$$

Teorema 5.34 (Teorema de Residuo) *Sea X una superficie de Riemann compacta y sean $p_1, \ldots, p_n$ puntos distintos de X. Sea $X' := X - \{p_1, \ldots, p_n\}$. Entonces, para toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(X')$ se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{p_k}(\omega) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Escojamos cartas coordenadas (U_k, z_k) alrededor de cada p_k tales que cada $z_k(p_k) = 0$ y cada $z_k(U_k)$ es un disco Δ_k en $\mathbb{C}$, y tales que $U_j \cap U_k = \phi$ si $j \neq k$.

Ahora, para cada k escojamos una función f_k con soporte compacto $\mathrm{Supp}(f_k) \subseteq U_k$ y tal que exista una vecindad abierta $U_k' \subseteq U_k$ de p_k con $f_k|_{U_k'} = 1$. Sea

$$g := 1 - (f_1 + \cdots + f_n).$$

Entonces, $g|_{U_k'} = 0$, y por lo tanto $g \cdot \omega$ puede ser extendida al punto p_k asignándole el valor cero, y así podemos considerar a $g\omega$ como elemento de $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ con soporte compacto. Por el Teorema de Stokes se tiene que

$$\int\int_X d(g\omega) = 0. \tag{1}$$

Ahora, $g\omega = (1 - (f_1 + \cdots + f_n))\omega = \omega - f_1\omega - \cdots - f_n\omega$, y entonces

$$d(g\omega) = d\omega - \sum_{k=1}^{n} d(f_k\omega).$$

Pero, ω holomorfa en X' implica $d\omega = 0$ en X'; y en $U_k' \cap X'$ se tiene que $f_k\omega = \omega$ y por lo tanto $d(f_k\omega) = 0$. Así, $d(f_k\omega)$ se puede ver como un elemento de $\mathcal{E}^{(2)}(X)$ cuyo soporte es un subconjunto compacto de $U_k - \{p_k\}$. De (1) y (2) se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} \int\int_X d(f_k\omega) = 0. \tag{3}$$

Entonces, para terminar la demostración basta probar que:

$$\int\int_X d(f_k\omega) = -2\pi i \mathrm{Res}_{p_k}(\omega).$$

Para esto, observemos que como el soporte de $d(f_k\omega)$ está contenido en U_k, entonces basta integrar sobre U_k, y usando la carta z_k podemos identificar U_k con el disco Δ_k (al que podemos suponer de radio 1 centrado en el origen). Escojamos r y R tal que $0 < r < R < 1$ y tal que

$$\mathrm{Supp}(F_k) \subseteq \{z_k : |z_k| < R\} \quad \text{y} \quad f_k|_{\{z_k : |z_k| \leq r\}} = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int\int_X d(f_k\omega) = \int\int_{\Delta_k} d(f_k\omega) &= \int\int_{\epsilon \leq |z_k| \leq R} d(f_k\omega) \\
&= \int_{|z_k|=R} f_k\omega - \int_{|z_k|=r} f_k\omega \\
&= 0 - \int_{|z_k|=r} \omega \\
&= -2\pi i \mathrm{Res}_{p_k}(\omega),
\end{aligned}$$

la última igualdad por la observación antes del enunciado del teorema. Q.E.D.

Un teorema de anulamiento. Usando la desigualdad de Riemann (5.29) mostraremos que para todo divisor D en una superficie de Riemann compacta X y para todo punto $p \in X$, los grupos de cohomología $H^1(X, \mathcal{O}(D + np))$ se anulan para n suficientemente grande. Como consecuencia inmediata probaremos que $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$. Comenzamos con el siguiente lema:

Lema 5.35 *Sean D, D' divisores en una superficie de Riemann compacta X. Si $D \leq D'$ entonces $h^1(X, \mathcal{O}(D')) \leq h^1(X, \mathcal{O}(D))$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la sucesión exacta corta de gavillas

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{O}(D) \hookrightarrow \mathcal{O}(D') \longrightarrow \mathcal{Q} \to 0$$

donde $\mathcal{Q}$ es la gavilla cociente $\mathcal{O}(D')/\mathcal{O}(D)$.

Observemos que el soporte de la gavilla $\mathcal{Q}$ es el soporte del divisor $D'-D$ y por lo tanto $\mathcal{Q}$ tiene soporte finito. Se sigue entonces que

$$H^1(X, \mathcal{Q}) = 0,$$

y por lo tanto, de la sucesión exacta larga de cohomología asociada a (*) se obtiene un epimorfismo

$$\cdots \to H^1(X, \mathcal{O}(D)) \to H^1(X, \mathcal{O}(D')) \to 0,$$

y en consecuencia

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}(D')) \leq \dim_{\text{cjs } \mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}(D)). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Ahora, sean D un divisor en X, $p \in X$ un punto y $n \geq 0$ un entero fijo. Observemos que cada función $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}(np))$ induce un morfismo $\psi_f : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D+np)$ dado, en las fibras, por: $h_x \mapsto f_x \cdot h_x$. Es claro que si $f \neq 0$, el morfismo ψ_f es inyectivo, y así podemos considerar la sucesión exacta corta de gavillas:

$$0 \to \mathcal{O}(D) \xrightarrow{\psi_f} \mathcal{O}(D + np) \to \mathcal{Q}(\psi_f) \to 0,$$

donde $\mathcal{Q}(\psi_f)$ es la gavilla cociente $\mathcal{O}(D + np)/\psi_f \mathcal{O}(D)$. Como en el lema anterior, la gavilla $\mathcal{Q}(\psi_f)$ tiene soporte finito y por lo tanto $H^1(X, \mathcal{Q}(\psi_f)) = 0$, y se tiene un epimorfismo

$$\cdots \to H^1(X, \mathcal{O}_{(D)}) \xrightarrow{\psi_f} H^1(x, \mathcal{O}(D + np)) \to 0$$

de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

Si $f = 0$, se define $\psi_f = 0$.

Lema 5.36 *La función*

$$\psi : \Gamma(X, \mathcal{O}(np)) \to \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O}(D)), H^1(X, \mathcal{O}(D + np))$$

dada por $f \mapsto \psi_f$, es $\mathbb{C}$-lineal.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos describiendo las funciones ψ_f usando directamente la definición de los grupos de cohomología de Čech.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de X y consideremos los grupos de 1-cocadenas

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) := \prod_{i,j} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}(D))$$

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D+np)) := \prod_{i,j} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}(D+np)).$$

Para cada $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}(np))$ y el morfismo correspondiente $\psi_f : \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D+np)$ dado por $h_x \mapsto f_x \cdot h_x$, se tienen los, morfismos en las secciones correspondientes,

$$(*) \qquad \psi_f(i,j) : \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}(D)) \to \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}(D+np))$$

dados por $h \mapsto (f|_{U_{ij}}) \cdot h$, para cada $i, j \in I$. Pasando al producto directo se tiene un morfismo entre los grupos de cocadenas

$$\Psi_f := (\psi_f(i,j)) : C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D)) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(D+np)),$$

el cual es el que induce el morfismo $\psi_f : H^1(X, \mathcal{O}(D)) \to H^1(X, \mathcal{O}(D+np))$. Ahora, para cada $f, g \in \Gamma(X, \mathcal{O}(np))$ y cada $a, b \in \mathbb{C}$, de la definición (*) se tiene que (para toda $i, j \in I$):

$$\psi_{af+bg}(i,j) = a\psi_f(i,j) + b\psi_g(i,j),$$

y por lo tanto

$$\Psi_{af+bg} = a\Psi_f + b\Psi_g,$$

y consecuentemente $\psi_{af+bg} = a\psi_f + b\psi_g$. Q.E.D.

Una consecuencia del lema previo y de la desigualdad de Riemann (5.29) es el siguiente teorema de anulamiento, que será hecho más preciso, una vez que hayamos probado el teorema de dualidad:

Teorema 5.37 *Sean D un divisor de X y $p \in X$ un punto. Entonces,*

$$H^1(X, \mathcal{O}(D+np)) = 0$$

para todos los $n \geq (h^1(X, \mathcal{O}(D))^2 + g$.

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $d := h^1(X, \mathcal{O}(D))$. Por el lema (5.35),

$$h^1(X, \mathcal{O}(D+np)) \leq d$$

para toda $n \geq 0$. Así, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O}(D)), H^1(X, \mathcal{O}(D + np))$$

tiene dimensión $\leq d^2$, y d no depende de n.

Ahora, para el divisor np de X, se tiene la desigualdad de Riemann:

$$\ell(np) \geq n + 1 - g.$$

Por lo tanto, si $n \geq d^2 + g$, la aplicación $\mathbb{C}$-lineal.

$$\psi : \Gamma(X, \mathcal{O}(np)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O}(D)), H^1(X, \mathcal{O}(D + np)))$$

no es inyectiva ya que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{O}(np)) &\geq n + 1 - g \geq d^2 + 1 \\ &> \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O}(D)), H^1(X, \mathcal{O}(D + np))). \end{aligned}$$

Así, para $n \geq d^2 + g$ existe $f \neq 0$ en $\Gamma(X, \mathcal{O}(np))$ tal que $\psi_f = 0$. Pero como $f \neq 0$ implica que ψ_f debe ser un epimorfismo, entonces se debe tener que $H^1(X, \mathcal{O}(D + np)) = 0$. Q.E.D.

Una consecuencia inmediata es:

Teorema 5.38 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces, $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\xi} \in H^1(X, \mathcal{M})$ una clase de cohomología arbitraria. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una cubierta finita de X y sea $\xi \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ un cociclo que representa a $\bar{\xi}$. Sea $\mathcal{V} = \{V_i\}$ un encogimiento de $\mathcal{U}$, i.e., cada $\bar{V}_i \subseteq U_i$. Así, si $\xi = (f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ entonces

$$\xi' := \xi|_{\mathcal{V}} := (f_{ij}|_{V_i \cap V_i}) \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{M})$$

también es un representante de $\bar{\xi}$.

Ahora, como cada $\bar{V}_i \subseteq U_i$, cada función f_{ij} tiene un número finito de ceros y polos en $V_{ij} = V_i \cap V_j$. Así, el número total de polos de todas las f_{ij} es finito. Entonces, existe un divisor D tal que $\xi' \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(D))$. Sea $|D|$ el soporte del divisor D, i.e., el conjunto de puntos que tienen coeficiente (peso) distinto de cero. Sea $p \in X - |D|$.

Como $\mathcal{O}(D) \subseteq \mathcal{O}(D + np)$ para toda $n \geq 0$, entonces $\xi' \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(D + np))$ para toda $n \geq 0$. En particular, para $n \geq d^2 + g$ y para $d = h^1(X, \mathcal{O}(D))$, como por el teorema previo $H^1(X, \mathcal{O}(D + np)) = 0$, entonces $\xi' \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}(D + np))$ debe ser cohomólogo a cero con respecto a la gavilla

$\mathcal{O}(D+np)$, pero como $\mathcal{O}(D+np) \subseteq \mathcal{M}$ entonces ξ' también es cohomólogo a cero con respecto a la gavilla $\mathcal{M}$, i.e., como elemento de $Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{M})$. Por lo tanto $\bar{\xi} = 0$ y así $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$. Q.E.D.

Adéles. Antes de proceder al teorema de dualidad, siguiendo a [Sérre] interpretaremos al espacio vectorial

$$I(D) := H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

en términos del lenguaje de *adéles* o *reparticiones* de Weil. Recordamos primero los conceptos necesarios:

En el producto directo

$$\prod_{x \in X} \mathcal{M}_{X,x}$$

consideremos el subanillo A dado por:

$$A := \{(f_x)_{x \in X} : f_x \in \mathcal{O}_{X,x} \quad \text{para casi toda} \quad x \in X\}.$$

Los elementos de A se llaman *adéles* o *reparticiones*, y claramente A es una $\mathbb{C}$-álgebra.

Ahora, si D es un divisor en X, pongamos

$$A(D) := \{(f_x) \in A : f_x \in \mathcal{O}_{D,x}\},$$

es decir, $(f_x) \in A(D)$ si y sólo si $\text{ord}_x(f_x) \geq -\text{ord}_x(D)$. Es obvio que $A(D)$ es un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial de A.

Nótese que al hacer variar D sobre el conjunto ordenado $\text{Div}(X)$, los anillos $A(D)$ forman una familia filtrada cuya unión es todo A.

Comenzamos identificando el espacio vectorial cociente $A/A(D)$: Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \to \mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{O}_D \to 0,$$

y observemos que la gavilla cociente $\mathcal{Q}_D := \mathcal{M}/\mathcal{O}_D$ es una gavilla rascacielos ya que toda sección s de $\mathcal{Q}_D$ sobre un abierto $V \subseteq X$ tiene soporte discreto en U, i.e., dado $x \in U$ existe un abierto $V' \subseteq V$ vecindad de x tal que $s = 0$ en $U' - \{x\}$. Ahora, como cada fibra $\mathcal{Q}_{D,x}$ es isomorfa al cociente $\mathcal{M}_x/\mathcal{O}_{D,x}$, se sigue que el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de secciones globales $\mathcal{Q}_D(X)$ es naturalmente isomorfo a la suma directa de los $\mathcal{Q}_{D,x}$, i.e.,

$$\mathcal{Q}_D(X) \approx \bigoplus_{x \in X} \mathcal{M}_x/\mathcal{O}_{D,x} \approx \bigoplus_{x \in X} \mathcal{M}_x / \bigoplus_{x \in X} \mathcal{O}_{D,x}.$$

Observemos ahora que como, por definición de suma directa, todo elemento de $\bigoplus_{x \in X} \mathcal{M}_x$ es un elemento $(f_x) \in \prod_{x \in X} \mathcal{M}_x$ tal que casi todos

los $f_x = 0$ (y similarmente, los elementos de $\bigoplus_{x\in X} \mathcal{O}_{D,x}$ son elementos $(h_x) \in \prod_{x\in X} \mathcal{O}_{D,x}$ tal que casi todos los $h_x = 0$), entonces se tiene una $\mathbb{C}$-inyección natural

$$\bigoplus_{x\in X} \mathcal{M}_x \hookrightarrow A$$

que manda $\bigoplus_{x\in X} \mathcal{O}_D, x$ en $A(D)$, e induce in $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$\mathcal{Q}_D(X) \approx \bigoplus_{x\in X} \mathcal{M}_x / \bigoplus_{x\in X} \mathcal{O}_{D,x} \approx A/A(D).$$

Por otra parte, observemos que a toda función meromorfa $f \in \mathcal{M}_X$ le podemos asociar un adéle $(f(x)) \in A$ mediante $f_x := f$ para toda $x \in X$ (como f es meromorfa sólo tiene un número finito de polos y así $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ para casi toda $x \in X$), y por lo tanto se tiene una inyección

$$\mathcal{M}_X \hookrightarrow A,$$

y es claro que $\mathcal{M}_X \cap A(D) = \mathcal{O}_D(X)$.

Usando que $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$, (5.38), probaremos el resultado principal, en este contexto:

Proposición 5.39 *Para todo divisor D en X, existe un $\mathbb{C}$-isomorfismo natural*

$$I(D) := H^1(X, \mathcal{O}_D) \approx A/(A(D) + \mathcal{M}_X).$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{M}_X \to \mathcal{Q}_D \to 0,$$

y la sucesión exacta de cohomología asociada:

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_D) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X) \xrightarrow{\phi} \Gamma(X, \mathcal{Q}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{M}_X) \to$$

Por (5.38), $H^1(X, \mathcal{M}_X) = 0$, por lo que

(1): $H^1(X, \mathcal{O}_D) \approx \Gamma(X, \mathcal{Q}_D)/\text{im } (\phi)$, donde, por definición de $\mathcal{Q}_D = \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_D$, se tiene que

(2): im $(\phi) \approx \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_D(X)$, y si ahora recordamos que

(3): $\mathcal{Q}_D(X) \approx A/A(D)$, y que

(4): $\mathcal{M}_X \cap A(D) = \mathcal{O}_D(X)$,

sustituyendo estos últimos isomorfismos en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} I(D) := H^1(X, \mathcal{O}_D) &\approx \frac{A/A(D)}{\mathcal{M}_X/(\mathcal{M}_X \cap A(D))} \\ &\approx \frac{A/A(D)}{A(D)/(\mathcal{M}_X + A(D))} \approx A/\mathcal{M}_X + A(D) \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

El dual del espacio de clases de adéles $I(D)$. Sea $J(D)$ el dual del $\mathbb{C}$-espacio vectorial $I(D) \approx A/(A(D) + \mathcal{M}_X)$. Así, los elementos de $J(D)$ son formas $\mathbb{C}$-lineales en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I(D), \mathbb{C})$ a las que podemos pensar como elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$ que se anulan en $A(D)$ y en $\mathcal{M}_X$.

Observemos ahora que con el producto natural definido mediante: si $(f_x), (g_x) \in A$ se define $(f_x) \cdot (g_x) = (f_x g_x)$, entonces A es una $\mathbb{C}$-álgebra, y más aún, es un álgebra sobre el campo $\mathcal{M}_X \subseteq A$.

También, si definimos

$$\mathcal{M}_X \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$$

mediante $(f, \phi) \mapsto f \cdot \phi$, donde $(f \cdot \phi)(g_x) := \phi((f) \cdot (g_x))$, para $(g_x) \in A$, entonces claramente $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$ es un $\mathcal{M}_X$-espacio vectorial.

Observemos ahora que si $D' \geq D$ entonces $A(D') \supseteq A(D)$, y consecuentemente $J(D') \subseteq J(D)$, y por lo tanto los $\mathbb{C}$-espacios $J(D)$ forman una familia filtrada decreciente. A la unión de toda esta familia la denotamos:

$$J := \bigcup_{D \in \mathrm{Div}(X)} J(D).$$

Así, J es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial filtrado por los subespacios $J(D)$. Ahora, dado $f \in \mathcal{M}_X$ y $\alpha \in J$ entonces, sea $D \in \mathrm{Div}(X)$ tal que $\alpha \in J(D)$ y pensemos a α como una forma $\mathbb{C}$-lineal $\alpha : A \to \mathbb{C}$ que se anula en $A(D)$ y $\mathcal{M}_X$ como antes. Usando a $f \in \mathcal{M}_X$ definimos ahora la forma $\mathbb{C}$-lineal

$$f\alpha : A \to \mathbb{C}$$

mediante $f\alpha(h_x) := \alpha(f \cdot h_x)$.

Es claro entonces que como α se anula en $\mathcal{M}_X$ entonces $f\alpha$ se anula en $\mathcal{M}_X$ también. Más aún, como α se anula en $A(D)$ entonces $f\alpha$ se anula en $A(D + (f))$ ya que si $(h_x) \in A(D + (f))$ entonces $h_x \in \mathcal{O}_{D+(f),x}$ por definición, y así $\mathrm{ord}_x(h_x) \geq -\mathrm{ord}_x(D + (f)) = -\mathrm{ord}_x D - \mathrm{ord}_x(f)$, i.e., $\mathrm{ord}_x(h_x) + \mathrm{ord}_x(f) \geq -\mathrm{ord}_x D$, i.e., $\mathrm{ord}_x(f \cdot h_x) \geq -\mathrm{ord}_x D$, i.e., $(f \cdot h_x) \in A(D)$, y por lo tanto $\alpha(f h_x) = 0$, i.e., $f\alpha(h_x) = 0$, i.e., $f\alpha$ se anula en $A(D + (f))$. Se sigue inmediatamente que:

Lema 5.40 *La operación $\mathcal{M}_X \times J \to J$ dada por $(f, \alpha) \mapsto f \cdot \alpha$ provee al $\mathbb{C}$-espacio vectorial J la estructura de espacio vectorial sobre $\mathcal{M}_X$.*

La proposición siguiente es el punto clave en la demostración del teorema de dualidad, y en su demostración se usa fundamentalmente la desigualdad de Riemann (5.29):

Proposición 5.41 *La dimensión de J como $\mathcal{M}_X$-espacio vectorial es ≤ 1.*

DEMOSTRACIÓN. Argumentamos por contradicción: Supongamos que existen dos elementos α, $\alpha' \in J$ linealmente independientes sobre $\mathcal{M}_X$. Como J es la unión de la familia filtrada $J(D)$, existe un divisor D tal que α, $\alpha' \in J(D)$.

Ahora, sea $p \in X$ un punto fijo. Para cada $f \in \mathcal{O}(n \cdot p)(X)$ se tiene que $D - np \leq D + (f)$ y por lo tanto $J(D + (f)) \subseteq J(D - np)$, y como por las observaciones previas al Lema (5.40) se tiene que $f \cdot \alpha \in J(D + (f))$, entonces $f \cdot \alpha \in J(D - np)$. Similarmente $g \cdot \alpha' \in J(D - np)$ para toda $g \in \mathcal{O}(np)(X)$. Se sigue que la aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\mathcal{M}_M \oplus \mathcal{M}_X \to J$$

dada por $(f, g) \mapsto f\alpha + g\alpha'$, induce al restringirnos a $\mathcal{O}(np)(X) \subseteq \mathcal{M}_X$, la aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\mathcal{O}(np)(X) \oplus \mathcal{O}(np)(X) \to J(D - np), \tag{1}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, como por hipótesis α y α' son linealmente independientes sobre $\mathcal{M}_X$, si $f\alpha + g\alpha' = 0$ entonces $f = 0 = g$, i.e., (1) es una apicación inyectiva. Pero esto implica que

$$2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(np)(X) \leq \dim_{\mathbb{C}} J(D - np) \tag{2}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora, de la desigualdad de Riemann (5.29) se sigue que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(np)(X) = \ell(np) \geq \deg(np) + 1 - g = n + 1 - g, \tag{3}$$

y más aún, como $\deg(D - np) = \deg(D) - n$, para $n > \deg(D)$, se tiene que $\deg(D - np) < 0$ y así por (5.37) se tiene que $\ell(D - np) = 0$.

Ahora, como $J(D - np)$ es el dual de $I(D - np) = H^1(X, \mathcal{O}(D - np))$, entonces, de la versión preliminar de Riemann-Roch (5.28):

$$h^0(X, \mathcal{O}(D - np)) - h^1(X, \mathcal{O}(D - np)) = \deg(D - np) + 1 - g,$$

se sigue que para $\deg(D-np) < 0$, que $\ell(\mathcal{O}(D-np)) = h^0(X, \mathcal{O}(D-np)) = 0$, y así

$$\dim_{\mathbb{C}} J(D-np) = \dim_{\mathbb{C}} I(D-np) = h^1(X, \mathcal{O}(D-np)) = g-1-\deg(D-np),$$

i.e.,

$$\dim_{\mathbb{C}} J(D-np) = g-1-\deg D+n, \tag{4}$$

para $n > \deg D$.

De (3) y (4) se sigue que (para $n > \deg(D)$):

$$2\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(np)(X) \geq 2n+2(1-g) > n+(g-1)-\deg(D) = \dim_{\mathbb{C}} J(D-np),$$

donde la desigualdad estricta se da para n suficientemente grande ya que tanto g como $\deg(D)$ son constantes.

Pero, la desigualdad

$$2\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(np)(X) > \dim_{\mathbb{C}} J(D-np)$$

contradice la desigualdad (2), y por lo tanto α y α' deben ser linealmente dependientes. Q.E.D.

Más adelante probaremos que J tiene dimensión exactamente 1.

El Teorema de dualidad. Usando la estimación $\dim_{\mathcal{M}_X} J \leq 1$, y las propiedades del residuo (5.33) y (5.34) probaremos ahora el teorema de dualidad de Serre. Comenzamos definiendo un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ entre formas diferenciales meromorfas globales $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ y adéles $r = (r_x) \in A$ mediante la fórmula

$$\langle \omega, r \rangle := \sum_{x \in X} \mathrm{Res}_x(r_x \omega_x) \in \mathbb{C}.$$

Nótese que como para casi toda $x \in X$, $r_x\omega_x \in \Omega_x$, los residuos $\mathrm{Res}_x(r_x\omega_x) = 0$ para casi toda $x \in X$, y así la suma anterior es finita. Este apareamiento tiene las propiedades siguientes

Lema 5.42 *El apareamiento* $\langle , \rangle : \mathcal{M}^{(1)}(X) \times A \to \mathbb{C}$ *satisface:*

1. *Es* $\mathbb{C}$*-bilineal.*
2. *Si* $h \in \mathcal{M}_X$, $\langle h\omega, r \rangle = \langle \omega, hr \rangle$
3. *Si* $\omega \in \Omega(D)(X)$ *y* $r \in A(-D)$ *entonces* $\langle \omega, r \rangle = 0$.

4. Si $h \in \mathcal{M}_X$ entonces $\langle \omega, h \rangle = 0$ para todo $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) y (2) son directos de la definición. Para (3), si $\omega \in \Omega(D)(X)$ y $r = (r_x) \in A(-D)$, entonces

$$\operatorname{ord}_x(r_x\omega_x) = \operatorname{ord}_x(r_x) + \operatorname{ord}_x(\omega_x) \geq \operatorname{ord}_x(D) - \operatorname{ord}_x(D) = 0,$$

es decir, para todo $x \in X$, $r_x\omega \in \Omega_x$, y por lo tanto $\operatorname{Res}_x(r_x\omega) = 0$ para todo $x \in X$, y así $\langle \omega, r \rangle = 0$.

Para (4), si $h \in \mathcal{M}_X \subseteq A$, como $h\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$, entonces es suficiente probar (4) para $h = 1$ (la función constante 1). Pero en este caso, el resultado no es otro que el Teorema del Residuo (5.34):

$$\sum_{x \in X} \operatorname{Res}_x(\omega_x) = 0. \qquad \text{Q.E.D.}$$

El apareamiento $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}^{(1)}(X) \times A \to \mathbb{C}$ induce una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$(\dagger) \qquad \mathcal{M}^{(1)}(X) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$$

mediante $\omega \mapsto \omega^*$ donde $\omega^* : A \to \mathbb{C}$ está dada por $\omega^*(r) := \langle \omega, r \rangle$. Más aún, como tanto $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ como $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \mathbb{C})$ son $\mathcal{M}_X$-espacios vectoriales, de hecho la aplicación $(\dagger)$ es $\mathcal{M}_X$-lineal: en efecto, si $h \in \mathcal{M}_X$, $r \in A$ y $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$, entonces por la parte (2) del lema previo y por definición de $h\omega^*$ se tiene que

$$(h\omega)^*(r) := \langle h\omega, r \rangle = \langle \omega, hr \rangle =: \omega^*(hr) = h\omega^*(r),$$

i.e., $(h\omega)^* = h\omega^*$, como se quería probar.

Finalmente, observemos que por la parte (4) del lema previo, $\mathcal{M}_X \subseteq \ker(\omega^*)$. Más aún, por la parte (3) del mismo lema, se tiene que si $\omega \in \Omega(D)(X)$, entonces $A(-D) \subseteq \ker(\omega^*)$. Así, si $\omega \in \Omega(D)(X)$, entonces ω^* induce una aplicación $\mathbb{C}$-lineal,

$$\Theta_D(\omega) : A/(A(-D) + \mathcal{M}_X) \to \mathbb{C},$$

y como $I(-D) \approx A/(A(-D) + \mathcal{M}_X)$ por (5.39), entonces si $\omega \in \Omega(D)(X)$, se tiene que $\Theta_D(\omega) \in I(-D)^* := J(-D)$. Así, para cada divisor D en X, existe una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\Theta_D : \Omega(D)(X) \to J(-D),$$

que se extiende en forma única a una aplicación $\mathbb{C}$-lineal

$$\Theta : \mathcal{M}^{(1)}(X) \to J,$$

notando para esto que si $\omega \in \Omega(D) \cap \Omega(D')(X)$, entonces $\Theta_D(\omega) = \Theta_{D'}(\omega)$ en J.

Lema 5.43 *La aplicación* $\Theta : \mathcal{M}^{(1)}(X) \to J$ *es el* $\mathcal{M}_X$*-lineal, y si* $\Theta(\omega) \in J(-D)$, *entonces* $\omega \in \Omega(D)(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Que Θ es el $\mathcal{M}_X$-lineal se sigue de la definición de la estructura de $\mathcal{M}_X$-espacio vectorial de J (lema (5.40)) y de la $\mathcal{M}_X$-linealidad de la aplicación (†).

Supongamos ahora que $\Theta(\omega) \in J(-D)$ pero $\omega \notin \Omega(D)(X)$. Entonces, existe un punto $p \in X$ tal que $\mathrm{ord}_p(\omega) < \mathrm{ord}_p(-D)$. Pongamos $n := \mathrm{ord}_p(\omega) + 1$, y consideremos el adéle r definido mediante:

$$r_x := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq p \\ t^{-n} & \text{si } x = p, \end{cases}$$

donde t es una coordenada local en $p \in X$.

Claramente $\mathrm{ord}_p(r_p\omega_p) = -1$, y por lo tanto

$$(*) \qquad 0 \neq \mathrm{Res}_p(r_p\omega_p) = \omega^*(r) = \langle \omega, r \rangle.$$

Ahora, como $n \leq \mathrm{ord}_p(-D)$, entonces $r \in A(-D)$, y por lo tanto (*) es una contradicción ya que $\Theta(\omega) \in J(-D)$ quiere decir que ω^* se anula en $A(-D)$, en particular $\omega^*(r) = 0$. Q.E.D.

Como una consecuencia se tiene:

Proposición 5.44 *Las aplicaciones* $\Theta : \mathcal{M}^{(1)}(X) \to J$ *y* $\Theta_D : \Omega(D)(X) \to J(-D)$ *son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. (1): Θ *es inyectiva*: en efecto, si $\Theta(omega) = 0$, entonces para todo divisor D en X, $0 = \Theta(\omega) \in J(-D)$, y así por el lema anterior $\omega \in \Omega(D)(X)$ para todo $D \in \mathrm{Div}(X)$. Pero como $\bigcap_D \Omega(D)(X) = 0$, entonces $\omega = 0$.

(2): Θ *es suprayectiva*: en efecto, como $\mathcal{M}^{(1)}(X) \neq 0$ y como por (5.41) $\dim_{\mathcal{M}_X}(J) \leq 1$, entonces el $\mathcal{M}_X$-monomorfismo Θ debe de ser automáticamente suprayectivo.

(3): Sea D un divisor de X. Como Θ es inyectivo, su restricción Θ_D a $\Omega(D)(X)$ también lo es.

(4): Finalmente, si $\alpha \in J(-D)$ como Θ es suprayectivo sea $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ su preimagen bajo Θ. Por el lema (5.43) previo se tiene $\omega \in \Omega(D)(X)$ y así Θ_D es suprayectivo. Q.E.D.

El teorema de dualidad es una consecuencia de la proposición (5.44) anterior y de la proposición (5.39) que identifica $I(D) := H^1(X, \mathcal{O}_D)$ con $A/(A(D) + \mathcal{M}_X)$:

Teorema 5.45 (Dualidad de Serre) *Sea X una superficie de Riemann compacta y sea D un divisor en X. Entonces, existe un $\mathbb{C}$-isomorfismo natural.*

$$H^0(X, \Omega(D)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}(-D))^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Por (5.39) existe un $\mathbb{C}$-isomorfismo:

$$H^1(X, \mathcal{O}(-D) \approx A/A(-D) + \mathcal{M}_X.$$

Pasando a los duales se tiene un $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$J(-D) \xrightarrow{\approx} H^1(X, \mathcal{O}(-D))^*, \tag{1}$$

y por la proposición previa existe un $\mathbb{C}$-isomorfismo

$$\Theta_D : \Omega(D)(X) = H^0(X, \Omega(D)) \to J(-D). \tag{2}$$

La composición de (1) y (2) da al isomorfismo deseado. Q.E.D.

El Teorema de Riemann-Roch. Usando el Teorema de Dualidad de Serre que implica igualdad entre las dimensiones:

$$h^1(X, \mathcal{O}(D)) = h^0(X, \Omega(-D)),$$

podemos reformular el teorema de Riemann-Roch (5.28) como:

Teorema 5.46 (Riemann-Roch) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g , y sea D un divisor en X. Entonces,*

$$h^0(X, \mathcal{O}(D)) - h^0(X, \Omega(-D)) = 1 - g + \deg D.$$

Para obtener la versión final del Teorema de Riemann-Roch, probaremos primero que si $K = (\omega)$ es un *divisor canónico* (5.24) en X, entonces se tiene un isomorfismo de gavillas

$$\mathcal{O}(K) \xrightarrow{\sim} \Omega$$

dado por $f \mapsto f\omega$. Esto es un caso especial de:

Proposición 5.47 (Reciprocidad de Brill-Noether) *Sea X una superficie de Riemann compacta y sean D, E divisores en X y $\omega \in \Omega^1(X)$ una 1-forma holomorfa no trivial tales qye $D - E = (\omega)$. Entonces,*

$$\mathcal{O}(D) \approx \Omega^1(E) \quad \text{y} \quad \mathcal{O}(E) \approx \Omega^1(D).$$

DEMOSTRACIÓN. Multiplicación por ω induce un morfismo $\mathcal{O}(D) \to \Omega^1(E)$ dado por $f \mapsto f\omega$. Nótese que si $(f) \geq -D$ entonces

$$(f\omega) = (f) + (\omega) \geq -D + D - E = -E,$$

y así $f\omega \in \Omega^1(E)$. Es claro que esta función es $\mathbb{C}$-lineal.

Ahora, la función $\Omega^1(E) \to \mathcal{O}(D)$ dada por división por ω, $f \mapsto f/\omega$ es claramente un inverso del $\mathbb{C}$-morfismo previo. Nótese que como $(f) \geq -E$, entonces

$$(f/\omega) = (f) - (\omega) \geq -E - D + E \geq -D,$$

i.e., $f/\omega \in \mathcal{O}(D)$.

Para el segundo isomorfismo las funciones correspondientes son

$$\mathcal{O}(E) \to \Omega^1(D), \quad f \mapsto f/\omega$$

y

$$\Omega^1(D) \to \mathcal{O}(E), \quad f \mapsto f\omega. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Poniendo $D = K$ y $E = 0$, y recordando que $\Omega(0) = \Omega$, obtenemos:

Corolario 5.48 *Si X es una superficie de Riemann compacta y $K = (\omega)$ es un divisor canónico en X, entonces*

$$\mathcal{O}(K) \approx \Omega.$$

Finalmente, de $\Omega \approx \mathcal{O}(K)$ se sigue que $\Omega(-D) \approx \mathcal{O}(K - D)$ para cualquier divisor D en X, y así

$$(*) \qquad h^0(X, \mathcal{O}(K - D)) = h^0(X, \Omega(-D)) = h^1(X, \mathcal{O}(D)),$$

la última igualdad por el Teorema de Dualidad de Serre. Si ahora escribimos

$$\ell(D) := h^0(X, \mathcal{O}(D)),$$

de (5.28) y de (*) obtenemos la versión final del Teorema de Riemann-Roch:

Teorema 5.49 (Riemann-Roch) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y sea D un divisor en X. Sea K un divisor canónico en X. Entonces,*

$$\ell(D) - \ell(K - D) = 1 - g + \deg D.$$

Una consecuencia inmediata es el cálculo del grado del divisor canónico en una superficie de Riemann:

Teorema 5.50 *Si $K = (\omega)$ es un divisor canónico en una superficie de Riemann compacta X de género g, entonces*

$$\deg K = 2g - 2.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que

$$\begin{aligned} \ell(K) &= \ell(K-0) = h^0(X, \mathcal{O}(K-0)) && \text{poniendo } D = 0. \\ &= h^1(X, \mathcal{O}) && \text{por dualidad de Serre.} \\ &= g && \text{definición de género.} \end{aligned}$$

y

$$\ell(0) = h^0(X, \mathcal{O} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X) = 1,$$

entonces poniendo $D = K$ en la fórmula de Riemann-Roch (5.49) obtenemos:

$$\ell(K) - \ell(0) = \deg K + 1 - g,$$

i.e.,

$$g - 1 = \deg K + 1 - g,$$

i.e.,

$$\deg K = 2 - 2g. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Otra consecuencia directa es la versión óptima del teorema de anulamiento (5.37):

Teorema 5.51 *Sea X una uperficie de Riemann compacta de género y sea D un divisor en X. Si* $\deg D \geq 2g - 1$, *entonces*

(i) $H^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0$

(ii) $\ell(D) = \deg D + 1 - g$.

DEMOSTRACIÓN. Si K es un divisor canónico en X, por el teorema anterior $\deg K = 2g - 2$ y por lo tanto

$$\deg (K - D) = \deg K - \deg D \leq 2g - 2 - (2g - 1) \leq -1,$$

i.e., $\deg (K - D) < 0$, y así por (5.25) $H^0(X, \mathcal{O}(K - D)) = 0$.

Por dualidad de Serre,

$$H^1(X, \mathcal{O}(D))^* \approx H^0(X, \Omega(-D)) \approx H^0(X, \mathcal{O}(K - D)) = 0,$$

el último isomorfismo como consecuencia de (5.48).

Esto prueba (i), y (ii) es consecuencia de (i) y el teorema de Riemann-Roch (5.49). Q.E.D.

Nótese que este teorema es, en efecto, la versión óptima del teorema de anulamiento (5.37) ya que si el grado del divisor D es *menor* que $2g-1$, entonces el grupo de cohomología $H^1(X,\mathcal{O}(D))$ puede que no se anule. En efecto, para el divisor canónico $D=K$ cuyo grado es (5.50) $\deg K = 2g-2 < 2g-1$, se tiene, por dualidad de Serre, que:

$$H^1(X,\mathcal{O}(K)) \approx H^0(X,\mathcal{O}) \approx \mathbb{C} \neq 0.$$

Para el sigiente teorema necesitaremos los siguientes conceptos:

Definición 5.52 Sea D un divisor en una superficie de Riemann X. Diremos que la gavilla $\mathcal{O}(D)$ está *generada globalmente*, si para todo punto $x \in X$ existe una sección global $s \in \Gamma(X,\mathcal{O}_D)$ tal que

$$\mathcal{O}_{D,x} = \mathcal{O}_x \cdot s,$$

i.e., todo germen $\varphi \in \mathcal{O}_{D,x}$ se puede escribir de la forma $\varphi = \psi \cdot s$ con $\psi \in \mathcal{O}_x$.

Proposición 5.53 *Sea D un divisor en una superficie de Riemann compacta X. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{O}_D$ está generada globalmente.

(ii) Existe una sección $s \in \Gamma(X,\mathcal{O}_D)$ tal que $\operatorname{ord}_x(s) = -D(x)$.

Demostración. (ii) $\Rightarrow$ (i): Claramente el gérmen s_x de s en x genera $\mathcal{O}_{D,x}$ como $\mathcal{O}_x$-módulo.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es un ejercicio. Q.E.D.

Teorema 5.54 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y sea D un divisor en X. Si* $\deg D \geq 2g$ *entonces $\mathcal{O}_D$ está generada globalmente.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto fijo y consideremos el divisor $D' := D - x$. Entonces,

$$\deg D' = \deg (D-x) = \deg D - 1 \geq 2g-1,$$

y así por el teorema B (5.51) se tiene que

$$H^1(X,\mathcal{O}_D) = H^1(X,\mathcal{O}_{D'}) = 0.$$

Entonces, aplicando el Teorema de Riemann-Roch a cada uno de los divisores D y D' se obtiene:

$$\begin{aligned} h^0(X, \mathcal{O}_D) = 0 &= \deg D + 1 - g \\ h^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = 0 &= \deg D' + 1 - g, \end{aligned}$$

y substituyendo:

$$h^0(X, \mathcal{O}_D - h^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \deg D - \deg D' = 1 > 0,$$

y como $D' \leq D$, la desigualdad anterior implica que la inclusión inducida $H^0(X, \mathcal{O}_D) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D'})$ es propia, i.e., existe una sección $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_{D'}) - \Gamma(X, \mathcal{O}_D)$ que claramente satisface la condición $\mathrm{ord}_x(s) = -D(x)$. Q.E.D.

Observemos ahora que el teorema anterior también es óptimo en el sentido de que si $\deg D < 2g$, la gavilla $\mathcal{O}(D)$ puede que no sea generada globalmente. Por ejemplo, si K es un divisor canónico en X y $p \in X$ es un punto, sea $D = K + p$. Entonces,

$$\mathcal{O}(D) = \mathcal{O}(K + p) = \mathcal{O}(K)(p) = \Omega(p),$$

(usamos el corolario (5.48): $\mathcal{O}(K) = \Omega$). Así, una sección global $s \in \mathcal{O}(D)(X) = \Omega(p)(X)$ es una forma diferencial ω que es holomorfa en $X - \{p\}$, y si generara a $\mathcal{O}(D)_p$ entonces tendría un (único) polo de orden 1 en p. Pero esto contradice el teorema del residuo (la suma de sus residuos no sería cero).

Los teoremas (5.51) y (5.54) son los casos 1-dimensionales de los teoremas A y B de Cartan respectivamente, para las gavillas $\mathcal{O}_D$.

La fórmula de Riemann-Hurwitz. Finalmente, usando el hecho de que en una superficie de Riemann compacta existen diferenciales meromorfas no triviales (consecuencia de Riemann-Roch) obtendremos la fórmula de Riemann-Hurwitz que relaciona los géneros de dos superficies de Riemann relacionadas mediante una aplicación holomorfa no constante, usando el número de hojas de la cubierta y un número relacionado con los puntos de ramificación del cubriente. Comenzamos definiendo este número.

Definición 5.55 Sea $f : Y \to X$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$ sea $\nu_f(y)$ la multiplicidad (orden) de f en $y \in Y$. Recordemos que el conjunto de puntos de ramificación de f, i.e., aquellos puntos $q \in Y$ tales que $\nu_f(q) > 1$, es finito. El divisor

$$R := \sum_{q \in Y} (\nu_f(q) - 1)q \in \mathrm{Div}(Y)$$

se llama el *divisor de ramificación de* f. El grado de este divisor

$$r(f) := \deg R := \sum_{q \in Y} (\nu_f(q) - 1)$$

se llama el *orden de ramificación total* del morfismo f. El número

$$r_f(q) := \nu_f(q) - 1$$

se llama el *orden de ramificación* de f en el punto $q \in Y$.

Teorema 5.56 (Riemann-Hurwitz) *Sea $f : Y \to X$ una aplicación cubriente holomorfa no constante de n hojas entre superficies de Riemann compactas, y sea $r = r(t)$ el orden de ramificación total de f. Sean g_X y g_Y los géneros de X y Y respectivamente. Entonces,*

$$2g_Y - 2 = n(2g_X - 2) + r.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\omega \in \Omega^1(X)$ una diferencial meromorfa no trivial. Entonces su levantamiento $f^*\omega \in \Omega^1(Y)$ es una 1-forma meromorfa también.

Ahora, localmente a f la podemos representar como sigue: sean $y \in Y$, $x = f(y) \in X$. Escojamos cartas coordenadas (V, z) alrededor de $y \in Y$ y (U, u) alrededor de $x \in X$ tales que $z(y) = 0$ y $u(x) = 0$. Entonces en términos de estas coordenadas f es de la forma

$$u = z^\nu,$$

donde $\nu = \nu_f(y) = \mathrm{ord}_y(f)$. Y la diferencial ω la escribimos como

$$\omega = \phi(u)du \quad \text{en} \quad U.$$

Entonces, en V tenemos que

$$f^*\omega = \phi(z^\nu)dz^\nu = \nu\phi(z^\nu)z^{\nu-1}dz,$$

y así

$$\mathrm{ord}_y(f^*\omega) = \nu_f(y) \cdot \mathrm{ord}_f(y)(\omega) + (\nu_f(y) - 1),$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}(f^*\omega) &= \sum_{y \in Y} \mathrm{ord}_y(f^*\omega) \cdot y \\ &= \sum_{y \in Y} (\nu_f(y) \cdot \mathrm{ord}_f(y)(\omega)) \cdot y + \sum_{y \in Y} (\nu_f(y) - 1) \cdot y \\ &= \sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(\omega) \sum_{y \in f^{-1}(x)} \nu_f(y) \cdot x + R.\end{aligned}$$

Calculando los grados de estos divisores en esta igualdad, recordando (5.50) que

$$\deg(\omega) = 2g_X - 2 \quad \text{y} \quad \deg(f^*\omega) = 2g_Y - 2,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} 2g_Y - 2 &= \deg(f^*\omega) \\ &= \sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x(\omega) \cdot \sum_{y \in f^{-1}(x)} \nu_f(y) + \deg R \\ &= (\deg(\omega)) \cdot n + r_f \quad \text{ya que el número de hojas es} \\ &\quad n = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \nu_f(y) \\ &= (2g_X - 2)n + r_f. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Ejemplo. Sea $n \geq 3$ y consideremos la *ecuación de Fermat*

$$x^n + y^n = 1.$$

La superficie de Riemann X de la función algebraica definida por el polinomio

$$y^n = 1 - x^n = \prod_{k=0}^{n-1} (\omega^k - x), \tag{1}$$

donde ω es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, tiene género

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

ya que (1) define un cubriente $f : X \to \mathbb{P}^1$ de n hojas, y el orden de ramificación total de f es:

$$b(f) = \sum_{x \in X} b(f, x) = \sum_{x \in X} (\nu(f, x) - 1) = n(n-1),$$

porque sólo hay ramificación en los n puntos ω^k, $0 \leq k \leq n-1$.

Ahora, por Riemann-Hurwitz el género de X es:

$$g_X = \frac{b}{2} + n(0-1) + 1$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{b}{2} - n + 1 \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - n + 1 \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2}
\end{aligned}
$$

5.4 Aplicaciones de Riemann-Roch

En esta sección veremos algunas aplicaciones geométricas de los resultados obtenidos hasta ahora. Comenzamos, en forma natural, considerando la pregunta: ¿ Dada una superficie de Riemann compacta X, existen funciones meromorfas en X con polos sólo en un punto dado ? Es fácil ver que si el género de X es 1, las funciones meromorfas en X son funciones meromorfas doblemente periódicas en $\mathbb{C}$, y por el Teorema del Residuo no pueden existir funciones meromorfas doblemente periódicas con un único polo ya que tal función tendría residuo no cero. Mostraremos en esta sección que si el género de X es $g > 1$, existe un número finito de puntos $p \in X$, llamados *puntos de Weierstrass*, tales que existen funciones meromorfas f en X que tienen un polo de orden $\leq g$ en $p \in X$ y son holomorfas en $X - \{p\}$. Después, aplicaremos lo anterior al estudio de aquellas superficies de Riemann compactas para las cuales el número de puntos de Weierstrass es el mínimo posible. Estas superficies, llamadas *superficies hiperelípticas*, resultan ser cubrientes ramificados de 2 hojas de $\mathbb{P}^1$, y mostraremos que existen para cada género $g \geq 1$, y el número de puntos de Weierstrass en ellas es precisamente $2g + 2$. Para desarrollar lo anterior necesitaremos algunos conceptos preliminares:

Definición 5.57 Sea X una superficie de Riemann compacta. Un número natural $n \geq 1$ se llama una *laguna de Weierstrass* del punto $p \in X$ si no existe una función $f \in \mathcal{O}(X - \{p\})$ que tenga un polo de orden n en p.

Obsérvese que si $X = \mathbb{P}^1$, siempre existe una función en $\mathbb{P}^1$ con un polo en cualquier punto dado, y por lo tanto no existen lagunas en $\mathbb{P}^1$.

Ahora, si $p \in X$ y $n \geq 0$ es un natural, consideremos los divisores $D_n := np$, y sea $\ell_n := \ell(D_n) := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_n)$. Nótese que $\ell_n \leq \ell_{n+1} \leq \ell_n + 1$, *y un número natural* $n \geq 1$ *es una laguna del punto* $p \in X$ *si y sólo si* $\ell_n = \ell_{n-1}$.

En efecto, para $p \in X$, consideremos la sucesión exacta:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}(np)) \to H^0(X, \mathcal{O}(n+1)p) \to H^0(X, \mathcal{Q}) \to \cdots,$$

donde la gavilla $\mathcal{Q}$ es la gavilla cociente $\mathcal{O}((n+1)p)/\mathcal{O}(np)$, y así el espacio $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}_p = \mathcal{O}((n+1)p)_p/\mathcal{O}(np)_p$ es de dimensión 1. Se sigue que $\ell_n \leq \ell_{n+1} \leq \ell_n + 1$.

Ahora, por definición, $n \geq 1$ es una laguna en p si y sólo si toda $f \in \mathcal{O}(np)(X)$ ya estaba en $\mathcal{O}((n-1)p)(X)$, i.e., $\mathcal{O}(np)(X) \subseteq \mathcal{O}((n-1)p)(X)$, y como la inclusión opuesta siempre se da, entonces $\mathcal{O}(np)(X) = \mathcal{O}((n-1)p)(X)$, i.e., $\ell_n = \ell_{n-1}$.

Finalmente, observemos que si $n \geq 2g-1$, por el Teorema (5.51) se sigue que $\ell_n = \deg(D_n) + 1 - g = n + 1 - g$. Así, para $n \geq 2g$ se tiene que $\ell_n = \ell_{n-1} + 1$, y por lo tanto no existen lagunas mayores que $2g-1$. Esta observación queda mejorada por el teorema siguiente:

Teorema 5.58 (Teorema de las lagunas de Weierstrass) *Sea X una superficie de Riemann de género $g > 0$. Entonces, para todo $p \in X$, existen exactamente g lagunas $n_1, \ldots, n_g$, ordenadas como*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g \leq 2g-1.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema (5.51), $\ell_{2g-1} = g$ y así $1 = \ell_0 \leq \ell_1 \leq \cdots < \ell_{2g-1} = g$. Ahora, como $\ell_{j+1} - \ell_j \leq 1$, entonces deben existir $g-1$ índices j tales que $\ell_{j+1} - \ell_j = 1$. Ahora, como $\ell_0 = 1$ y $\ell_{2g-1} = g$, entonces deben existir g índices j tales que $\ell_{j+1} = \ell_j$, i.e., existen exactamente g lagunas. Q.E.D.

Observaciones. Los números naturales que no son lagunas en $p \in X$ se llaman *no-lagunas*. Claramente, las no-lagunas forman un semigrupo con la suma de $\mathbb{N}$, ya que si $n, m \in \mathbb{N}$ son no-lagunas en p, entonces existen funciones $f, g \in \mathcal{O}(X - \{p\})$ con polos en p de orden n y m respectivamente; claramente $fg \in \mathcal{O}(X - \{p\})$ tiene un polo de orden $m+n$ en p.

Por (5.58) existen precisamente g no lagunas en el conjunto $\{2, \ldots, , 2g\}$ y $2g$ siempre es una no laguna. Así, el semigrupo de no lagunas comienza precisamente con estas g no lagunas. Supongamos ahora que

$$1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_g = 2g$$

son las primeras g no lagunas.

Proposición 5.59 *Para cada entero j, $0 < j < g$, se tiene que*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g.$$

DEMOSTRACIÓN. Si sucediera que $\alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g$ para algún j, entonces para cada $k \leq j$ se tendría también que $\alpha_k + \alpha_{g-k} < 2g$ ya que $\alpha_k \leq \alpha_j$. Ahora, como la suma de no lagunas sigue siendo una no laguna, entonces las desigualdades $\alpha_k + \alpha_{g-j} < 2g$ para $k \leq j$ nos dicen que tenemos al menos j no lagunas estrictamente entre α_{g-j} y α_g. Así, existen $(g-j)+j+1 = g+1$ no lagunas $\leq 2g$, en contradicción con el hecho de que sólo hay g no lagunas $\leq 2g$. Q.E.D.

Proposición 5.60 *Si $\alpha_1 = 2$, entonces $\alpha_j = 2j$ y $\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g$ para $0 < j < g$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la suma de no lagunas es una no laguna, entonces $2, 4, \ldots, 2g$ son las no lagunas $\leq 2g$, y por lo tanto son todas las no lagunas $\leq 2g$. Q.E.D.

Proposición 5.61 *Si $\alpha_1 > 2$, entonces para algún j tal que $0 < j < g$, se tiene que*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} > 2g.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g$ para toda j tal que $0 < j < g$. Entonces, $\alpha_1, 2\alpha_1, \ldots, [2g/\alpha_1]\alpha_1$ son las no lagunas $\leq g$. Aquí $[x]$ para $x \in \mathbb{R}$ es el mayor entero $\leq x$.

Si $\alpha_1 > 2$, entonces la lista anterior toma en cuenta a lo más $\frac{2}{3}g < g$ no lagunas, y así debe haber otra no laguna $\leq 2g$. Sea α la primer no laguna $\leq 2g$ que no aparece en la lista anterior. Entonces, para algún entero r, $1 \leq r \leq [2g/\alpha_1] < g$, se tiene que

$$r\alpha_1 < \alpha < (r+1)\alpha_1.$$

Así, se tienen las no lagunas

$$\alpha_1, \alpha_2 = 2\alpha_1, \ldots, \alpha_r = r\alpha_1, \alpha_{r+1} = \alpha,$$

y como hemos asumido que $\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g$ para toda $0 < j < g$, entonces

$$\alpha_{g-1} = 2g - \alpha_1, \ldots, \alpha_{g-r} = 2g - r\alpha_1, \alpha_{g-(r+1)} = 2g - \alpha,$$

(nótese que si $r + 1 = g$ entonces $\alpha = 2g$, y la última igualdad en la lista previa es $\alpha_0 = 0$, la cual se puede añadir consistentemente a la lista anterior). Estas son todas las no lagunas $\geq \alpha_{g-(r+1)}$ y $\leq 2g$. Se sigue que

$$\alpha_1 + \alpha_{g-(r+1)} = \alpha_1 + 2g - \alpha = 2g - (\alpha - \alpha_1) > 2g - r\alpha_1 = \alpha_{g-r}.$$

Por lo tanto, existe una no laguna $< 2g$, mayor que α_{g-r}, y que no está en la lista $\alpha_{g-1}, \ldots, \alpha_{g-(r+1)}$. Una contradicción. Q.E.D.

Corolario 5.62 *Se tiene que $\sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \geq g(g-1)$, y la igualdad sucede si y sólo si $\alpha_1 = 2$.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición (5.59) se tiene que

$$(*) \qquad 2\sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \geq 2g(g-1),$$

y así se tiene la desigualdad deseada.

Más aún, si $\alpha_1 = 2$, entonces por (5.60) se tiene la igualdad en (*).

Finalmente, si $\alpha_1 > 2$, por (5.61) se tendría la desigualdad estricta en (*). Q.E.D.

Puntos de Weierstrass. En las observaciones previas al teorema (5.58) vimos que un número natural $m \geq 1$ es una laguna en $p \in X$ si y sólo si

$$\ell(mp) - \ell((m-1)p) = 0. \tag{1}$$

Ahora, si $i(D) := \dim_{\mathbb{C}}\Omega(D)$, para los divisores $D = mp$ y $D' := (m-1)p$ se tiene, por Riemann-Roch, que

$$\ell(mp) - i(mp) = m + 1 - g$$

y

$$\ell((m-1)p) - i((m-1)p) = m - 1 + 1 - g = m + g,$$

y restando estas dos igualdades se obtiene

$$\ell(mp) - \ell((m-1)p) + i((m-1)p) - i(mp) = 1,$$

y por lo tanto (1) es válida si y sólo si

$$i((m-1)p) - i(mp) = 1, \tag{2}$$

es decir, $m \geq 1$ es una laguna en $p \in X$ si y sólo si

$$\dim_{\mathbb{C}}\Omega((m-1)p) - \dim_{\mathbb{C}}\Omega(mp) = 1,$$

i.e., si y sólo si existe una diferencial abeliana ω en X con un cero de orden $m-1$ en p.

Entonces, si $1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g \leq 2g-1$ son las lagunas de Weierstrass en $p \in X$ (5.58), entonces los posibles órdenes de las diferenciales abelianas en p son precisamente

$$0 = n_1 - 1 < n_2 - 1 < \cdots < n_g - 1 \leq 2g - 2.$$

Obsérvese ahora que, por (5.58) $n_1 = 1$ siempre es una laguna de Weierstrass para $p \in X$, si el género de X es $g > 0$, y como

$$i((1-1)p) - i(p) = 1,$$

i.e.,

$$\dim_{\mathbb{C}}\Omega(0) - \dim_{\mathbb{C}}\Omega(p) = 1,$$

entonces existe una diferencial abeliana $\omega \in \Omega(0) = \Omega$ que no se anula en p, i.e., $\mathrm{ord}_p(\omega) = 0$.

A continuación, asociamos a cada punto $p \in X$ un *peso*, un número natural $\tau(p)$, asociado al espacio vectorial $\Omega(X)$, cuya dimensión es $\dim_{\mathbb{C}}\Omega(X) = g$. Para esto procedemos como sigue: Para $p \in X$ sea (U, z) una coordenada local en $p \in X$. Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $\Omega(X)$. Con respecto a la coordenada (U, z) podemos escribir cada $\omega_k = f_k dz$, y el orden $\mathrm{ord}_p(\omega_k) = \mathrm{ord}_p(f_k)$. Diremos que la base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega(X)$ está *adaptada* a $p \in X$ si

$$\mathrm{ord}_p(\omega_1) < \mathrm{ord}_p(\omega_2) < \cdots < \mathrm{ord}_p(\omega_g).$$

Nótese que siempre podemos construir una tal base de $\Omega(X)$ ya que si ponemos

$$\mu_1 := \min_{\omega \in \Omega}\{\mathrm{ord}_p(\omega)\},$$

y escogemos $\omega_1 \in \Omega(X)$ tal que $\mathrm{ord}_p(\omega_1) = \mu_1$, entonces poniendo

$$\Omega_1 := \{\omega \in \Omega : \mathrm{ord}_p(\omega) > \omega_1\},$$

se tiene que Ω_1 es un subespacio vectorial de Ω de dimensión $g - 1$, y ponemos entonces

$$\mu_2 := \min_{\omega \in \Omega_1}\{\mathrm{ord}_p(\omega)\},$$

y escogemos $\omega_2 \in \Omega_1$ con $\mathrm{ord}_p(\omega_2) = \mu_2$. Procediendo inductivamente obtenemos una base como la requerida.

Nótese que esta base depende de la elección de la coordenada local (U, z) alrededor del punto $p \in X$.

Es claro que $\mu_j \geq j - 1$ para cada $j = 1, \ldots, g$. Definimos entonces el *peso* de $p \in X$ con respecto a $\Omega(X)$, como

$$\tau(p) := \sum_{j=1}^{g}(\mu_j - j + 1).$$

Nótese que, aparentemente, este peso depende de la elección de la coordenada local (U, z) alrededor de $p \in X$. El teorema (5.64) mostrará que en efecto *no* depende de la elección de la coordenada local, pero antes necesitaremos algunos resultados acerca del Wronskiano de una base de $\Omega(X)$.

El Wronskiano. Si $f_1, \ldots, f_g$ son funciones holomorfas en un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$, el *Wronskiano* de $f_1, \ldots, f_g$ es el determinante

$$W(f_1, \ldots, f_g)(z) := \det \begin{pmatrix} f_1(z) & f_2(z) & \cdots & f_g(z) \\ f_1'(z) & f_2'(z) & \cdots & f_g'(z) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(g-1)}(z) & f_2^{(g-1)}(z) & \cdots & f_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Las siguientes propiedades elementales del Wronskiano nos serán útiles:

1. *Si las funciones $f_1, \ldots, f_g$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$, entonces su Wronskiano no es idénticamente cero.*

Esto se prueba fácilmente por inducción sobre g. En efecto, supongamos que ya sabemos que $W(f_1, \ldots, f_{g-1}) \not\equiv 0$ (no idénticamente cero). Consideremos la ecuación diferencial (con variable la función w):

(*)

$$W(f_1, \ldots, f_{g-1}, w) := \det \begin{pmatrix} f_1(z) & \cdots & f_{g-1}(z) & w(z) \\ f_1'(z) & \cdots & f_{g-1}'(z) & w(z) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(g-1)}(z) & \cdots & f_{g-1}^{(g-1)}(z) & w(z) \end{pmatrix} = 0.$$

Expandiendo por cofactores a lo largo de la última columna, obtenemos:

$$(**) \qquad a_0 w^{(g-1)}(z) + a_1 w^{9g-2)}(z) + \cdots + a_{g-1} w(z) = 0,$$

donde $a_0 = W(f_1, \ldots, f_{g-1}) \not\equiv 0$.

Claramente las $f_1, \ldots, f_{g-1}$ son soluciones de la ecuación diferencial (**). Ahora, si sucediera que $W(f_1, \ldots, f_g) = 0$ entonces f_g sería otra solución de (**), y por lo tanto la última columna de (*) sería combinación lineal de las restantes. En particular, f_g sería combinación lineal de $f_1, \ldots, f_{g-1}$ sobre el conjunto $U' := \{z \in U \ : \ a_0(z) \neq 0\}$, y como $a_0(z) = 0$ sólo en un conjunto discreto, entonces por el Teorema de la Identidad se tendría que f_g sería combinación lineal de $f_1, \ldots, f_{g-1}$ sobre U, una contradicción.

2. *Si $f_1, \ldots, f_g$ son funciones holomorfas en $U \subseteq \mathbb{C}$ y f es cualquier otra función holomorfa en U, entonces*

$$W(ff_1, \ldots, ff_g) = f^g W(f_1, \ldots, f_g).$$

En efecto,

$$W(ff_1,\dots,ff_g)$$

$$= \det\begin{pmatrix} ff_1 & \cdots & ff_g \\ ff_1' + f'f_1 & \cdots & ff_g' + f'f_g \\ ff_1'' + 2f'f_1' + f''f_1 & \cdots & ff_g'' + 2f'f_g' + f''f_g \\ \vdots & & \vdots \\ ff_1^{(g-1)} + \cdots + f^{(g-1)}f_1 & \cdots & ff_g^{(g-1)} + \cdots + f^{(g-1)}f_g \end{pmatrix}$$

$$= f \cdot \det\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_g \\ ff_1' + f'f_1 & \cdots & ff_g' + f'f_g \\ ff_1'' + 2f'f_1' + f''f_1 & \cdots & ff_g'' + 2f'f_g' + f''f_g \\ \vdots & & \vdots \\ ff_1^{(g-1)} + \cdots + f^{(g-1)}f_1 & \cdots & ff_g^{(g-1)} + \cdots + f^{(g-1)}f_g \end{pmatrix}$$

$$= f \cdot \det\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_g \\ ff_1' & \cdots & ff_g' \\ ff_1'' + 2f'f_1' + f''f_1 & \cdots & ff_g'' + 2f'f_g' + f''f_g \\ \vdots & & \vdots \\ ff_1^{(g-1)} + \cdots + f^{(g-1)}f_1 & \cdots & ff_g^{(g-1)} + \cdots + f^{(g-1)}f_g \end{pmatrix}$$

donde la última igualdad se obtiene al sumar $-f'$ veces el primer renglón al segundo renglón. En forma similar se remueve de cada columna el múltiplo correspondiente de f_j:

$$= f \cdot \det\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_g \\ ff_1' & \cdots & ff_g' \\ ff_1'' + 2f'f_1' & \cdots & ff_g'' + 2f'f_g' \\ \vdots & & \vdots \\ ff_1^{(g-1)} + \cdots & \cdots & ff_g^{(g-1)} + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= f^2 \cdot \det\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_g \\ ff_1' & \cdots & ff_g' \\ ff_1'' + 2f'f_1' & \cdots & ff_g'' + 2f'f_g' \\ \vdots & & \vdots \\ ff_1^{(g-1)} + \cdots & \cdots & ff_g^{(g-1)} + \cdots \end{pmatrix}$$

procediendo recursivamente se llega al resultado deseado:

$$W(ff_1, \ldots, ff_g) = f^g W(f_1, \ldots, f_g).$$

3. Ahora, si X es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, y $\omega_1, \ldots, \omega_g$ es una base de $\Omega(X)$, para cualquier coordenada local (U, z), si $\omega_k = f_k dz$ en U, definimos la función holomorfa, en U, dada por

$$W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g) := W(f_1, \ldots, f_g),$$

donde las derivadas de las f_j se toman con respecto a la coordenada local z. La proposición siguiente nos dice cómo se comporta el Wronskiano de $\omega_1, \ldots, \omega_g$ bajo un cambio de coordenadas:

Proposición 5.63 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $\Omega(X)$ y sean (U, z) y (V, ζ) cartas coordenadas locales en X. Entonces, en $U \cap V$ se tiene que:*

$$W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^N W_\zeta(\omega_1, \ldots, \omega_g),$$

donde $N = g(g+1)/2$.

DEMOSTRACIÓN. En términos de las coordenadas (U, z) y (V, ζ) escribamos cada

$$\omega_k = f_k dz = \phi_k d\zeta.$$

Es claro entonces que $f_k = (d\zeta/dz)\phi_k$. Pongamos

$$\psi := (d\zeta/dz) \in \mathcal{O}^*(U \cap V).$$

Por inducción sobre m se tiene que

$$\frac{d^m f_k}{dz^m} = \psi^{m+1} \frac{d^m \phi_k}{d\zeta^m} + \sum_{j=0}^{m-1} \psi_{mj} \frac{d^j \phi_k}{d\zeta^j},$$

donde las $\psi_{mj} \in \mathcal{O}(U \cap V)$ son independientes de k. Se sigue que

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{d^m f_k}{dz^m}\right)_{\substack{m=0,\ldots,g-1 \\ k=1,\ldots,g.}} &= \det\left(\psi^{m+1} \frac{d^m f_k}{dz^m}\right)_{\substack{m=0,\ldots,g-1 \\ k=1,\ldots,g.}} \\ &= \psi^{1+2+\cdots+g} \det\left(\frac{d^m f_k}{dz^m}\right)_{\substack{m=0,\ldots,g-1 \\ k=1,\ldots,g.}} \\ &= \psi^N \det\left(\frac{d^m f_k}{dz^m}\right)_{\substack{m=0,\ldots,g-1 \\ k=1,\ldots,g.}}, \end{aligned}$$

donde $N = 1 + 2 + \cdots + g = g(g+1)/2$. Q.E.D.

El resultado principal en este contexto es el siguiente teorema que, en particular, implica que el *peso* $\tau(p)$ de un punto $p \in X$, definido arriba antes del Wronskiano, no depende de la elección de la carta local alrededor de ese punto, ni de la elección de la base adaptada a ese punto.

Teorema 5.64 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $\Omega(X)$. Sea $p \in X$ un punto y sea (U, z) una coordenada local alrededor de p. Sea $W(z) := W(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ el Wronskiano definido arriba. Entonces,*

$$\mathrm{ord}_p W(z) = \tau(p).$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, un cambio de coordenadas sólo altera el Wronskiano por una constante no cero. También, si cambiamos la base de $\Omega(X)$ el Wronskiano sólo se afecta por una constante no cero. Así, podemos suponer de entrada que la base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega(X)$ está adaptada al punto $p \in X$. Probaremos el teorema por inducción sobre $g \geq 1$.

El resultado es cierto para $g = 1$ ya que en este caso sólo hay un $\omega_1 = f_1 dz$ y por lo tanto

$$W(z) = W(\omega_1) = W(f_1) = f_1,$$

y $\mu_1 = \mathrm{ord}_p(\omega_1) = \mathrm{ord}_p(f_1)$, y por lo tanto

$$\tau(p) = \mu_1 - 1 + 1 = \mu_1,$$

i.e.,

$$\mathrm{ord}_p W(z) = \mathrm{ord}_p(f_1) = \mu_1 = \tau(p).$$

Supongamos ahora que el teorema es cierto para $g = k$, i.e., que

$$\mathrm{ord}_p W(\omega_1, \ldots, \omega_k) = \tau(p) = \sum_{j=1}^{k} (\mu_j - j + 1),$$

donde $\mu_j := \mathrm{ord}_p(\omega_j) := \mathrm{ord}_p(f_j)$ si $\omega_j = f_j dz$.

Consideremos ahora $W(\omega_1, \ldots, \omega_{k+1})$. De la observación (2) previa a (5.63) se sigue que

$$W(\omega_1, \ldots, \omega_{k+1}) := W(f_1, \ldots, f_{k+1}) = f_1^{k+1} W(1, f_2/f_1, \ldots, f_{k+1}/f_1).$$

Observemos ahora que para el lado derecho de la ecuación anterior, al desarrollar por menores el determinante correspondiente a lo largo de la primera columna, se obtiene:

$$f_1^{k+1}\det\begin{pmatrix} 1 & f_2/f_1 & \cdots & f_{k+1}/f_1 \\ 0 & (f_2/f_1)' & \cdots & (f_{k+1}/f_1)' \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= f_1^{k+1}\det\begin{pmatrix} (f_2/f_1)' & \cdots & (f_{k+1}/f_1)' \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= f_1^{k+1} W((f_2/f_1)', \cdots, (f_{k+1}/f_1)'),$$

y por hipótesis de inducción se tiene que
$\mathrm{ord}_p(f_1^{k+1} W((f_2/f_1)', \cdots, (f_{k+1}/f_1)'))$

$$\begin{aligned} &= (k+1)\mathrm{ord}_p(f_1) + \mathrm{ord}_p W((f_2/f_1)', \cdots, (f_{k+1}/f_1)') \\ &= (k+1)\mu_1 + \sum_{j=2}^{k+1}(\mathrm{ord}_p(f_j/f_1)' - (j-2)) \\ &= (k+1)\mu_1 + \sum_{j=2}^{k+1}(\mathrm{ord}_p(f_j) - \mathrm{ord}_p(f_1) - 1 - j + 2) \\ &= (k+1)\mu_1 + \sum_{j=2}^{k+1}(\mu_j - \mu_1 - j + 1) \\ &= k\mu_1 + \mu_1 - k\mu_1 + \sum_{j=2}^{k+1}(\mu_j - j + 1) = \mu_1 + \sum_{j=2}^{k+1}(\mu_j - j + 1), \end{aligned}$$

siempre que para cada j se tenga que $\mu_j - (j-1) - \mu_1 \geq 0$; pero como $\{\omega_j\}$ es una base adaptada a $p \in X$, esta desigualdad se cumple siempre, y por lo tanto

$$\mathrm{ord}_p W(\omega_1, \ldots, \omega_{k+1}) = \mu_1 + \sum_{j=2}^{k+1}(\mu_j - j + 1) = \sum_{j=1}^{k+1}(\mu_j - j + 1).$$

Q.E.D.

Corolario 5.65 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. El conjunto de puntos $p \in X$ de peso $\tau(p)$ positivo con respecto a $\Omega(X)$ es discreto, y por lo tanto finito.*

DEMOSTRACIÓN. Los puntos de peso positivo son ceros del Wronskiano de la base por el teorema previo, y el Wronskiano no es idénticamente cero por la observación **(1)** arriba. Q.E.D.

Corolario 5.66 *Si $\omega_1, \ldots, \omega_g$ es una base de $\Omega(X)$ adaptada a $p \in X$, entonces para p en un conjunto abierto denso de X se tiene que*

$$\operatorname{ord}_p(\omega_j) = j - 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Como la base $\{\omega_j\}$ está adaptada a $p \in X$, entonces $\mu_j = \operatorname{ord}_p(\omega_j)$. Ahora, por el corolario anterior

$$\tau(p) = \sum_{j=1}^{g} (\mu_j - j + 1) = 0$$

para un conjunto denso abierto abierto en X. Y como $\mu_j \geq j - 1$ siempre, entonces en este conjunto denso cada sumando en (*) debe ser cero, i.e., $\mu_j = j + 1$ para cada j. Q.E.D.

Definición 5.67 Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Un punto $p \in X$ se llama un *punto de Weierstrass* si para una carta local (U, z) en p y para una base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega(X)$, p es un cero del Wronskiano $W(\omega_1, \ldots, \omega_g)$. El orden $\tau(p)$ del cero p de W se llama el *peso* del punto de Weierstrass.

Equivalentemente, por (5.64), $p \in X$ es un punto de Weierstrass de peso $\tau(p)$ si para cada carta local (U, z) de X alrededor de p, y para una base $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega(X)$ adaptada a p, el peso $\tau(p)$ es *positivo*.

Como observamos al principio de esta sección, claramente no hay puntos de Weierstrass sobre una superficie de género 1, y por lo tanto podemos restringirnos a género $g \geq 2$.

Teorema 5.68 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. El número de puntos de Weierstrass $p \in X$ contados de acuerdo con sus pesos $\tau(p)$, es*

$$\sum_{p \in X} \tau(p) = (g - 1)g(g + 1).$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos (5.65) que el número de puntos de Weierstrass es finito y así la suma de arriba es finita.

Sea $\{(U_i, z_i)\}_{i \in I}$ una cubierta de X por cartas coordenadas. La función $\psi_{ij} := (dz_j/dz_i) \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

Para una base fija $\omega_1, \ldots, \omega_g$ de $\Omega(X)$, consideremos los Wronskianos

$$W_i := W_{z_i}(\omega_1, \ldots, \omega_g) \in \mathcal{O}(U_i).$$

Por (5.63) se tiene que

$$W_i = \psi_{ij}^N W_j \tag{1}$$

en $U_i \cap U_j$, y $N = g(g+1)/2$.

Consideremos ahora el divisor D definido por los puntos de Weierstrass $p \in X$ y sus pesos $\tau(p) > 0$, i.e.,

$$D := \sum_{p \in X} \tau(p)p,$$

i.e., $D(p) = \tau(p) = \mathrm{ord}_p(W_i)$ para $p \in U_i$. Entonces,

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} \tau(p).$$

Mostraremos que $\deg(D) = (g-1)g(g+1)$.

Para esto, sea $K = (\omega_1)$ el divisor correspondiente a $\omega_1 \in \Omega(X)$. Sabemos que para un divisor canónico como el anterior, que $\deg(K) = 2g - 2$. Más aún, si $\omega_1 = f_{1i}dz_i$ en U_i, entonces $K(x) = \mathrm{ord}_x(f_{1i})$ para toda $x \in U_i$. También,

$$f_{1i} = \psi_{ij} f_{1j} \tag{2}$$

en $U_i \cap U_j$. De (1) y (2) se sigue que, ya que ψ_{ij} no tiene ceros,

$$W_i f_{1i}^{-N} = W_j f_{1j}^{-N} \tag{3}$$

en $U_i \cap U_j$. Es decir, las secciones (3) de $\mathcal{M}$ son compatibles, y como $\mathcal{M}$ es gavilla, entonces existe una sección global $f \in \mathcal{M}(X)$ tal que

$$f|_{U_i} = W_i f_{1i}^{-N} \tag{4}$$

para toda $i \in I$.

Ahora, como para el divisor $K = (\omega_1)$ con $\omega_1 = f_{1i}dz_i$ en U_i se tiene que $K(x) = \mathrm{ord}_x(f_{1i})$, de (4) se sigue que, para el divisor de ceros y polos de f, se tiene

$$\begin{aligned} (f)(x) &= \mathrm{ord}_x W_{z_i} + \mathrm{ord}_x(f_{1i}^{-N}) \\ &= \tau(x) - NK(x), \end{aligned}$$

la última igualdad por (5.64). Así,

$$(f) = D - NK, \tag{5}$$

por definición de D.

Finalmente, como (f) es principal, $\deg(f) = 0$, y de (5) se sigue que

$$0 = \deg(f) = \deg(D) - N\deg(K),$$

i.e.,

$$\deg(D) = N \cdot \deg(K) = \frac{1}{2}g(g+1)(2g-2),$$

ya que $N = g(g+1)/2$ por (5.63) y $\deg(K) = 2g-2$. Se sigue que

$$\deg(D) = g(g+1)(2g-2)/2 = g(g+1)(g-1).$$

Q.E.D.

Corolario 5.69 *Si X es una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, entonces existen puntos de Weierstrass en X.*

DEMOSTRACIÓN. Si $g \geq 2$, el número $(g-1)g(g+1) \geq 1$. Q.E.D.

Teorema 5.70 *Si el género de X es $g \geq 2$, el peso $\tau(p)$ de un punto $p \in X$, con respecto a $\Omega(X)$, satisface*

$$\tau(p) \leq g(g-1)/2.$$

Esta cota se alcanza sólo en los puntos $p \in X$ donde la sucesión de no lagunas comienza en $\alpha_1 = 2$

DEMOSTRACIÓN. Por (5.68),

$$\sum_{p \in X} \tau(p) = (g-1)g(g+1).$$

Ahora, sea

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

la sucesión de lagunas de Weierstrass en p (ver (5.58)), y sean

$$2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_g = 2g,$$

las primeras g no lagunas en p. Entonces,

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \sum_{j=1}^{g}(n_j - j) \\ &= (\sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^{g} \alpha_j) - \sum_{j=1}^{g} j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \text{ya que los } \alpha_j \text{ son el complemento} \\
& \text{en } \{1, \ldots, 2g\} \text{ de los } n_j. \\
= & \sum_{j=g+1}^{2g} j - \sum_{j=1}^{g} \alpha_j = \sum_{j=g+1}^{2g-1} j - \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \\
& \text{ya que } \alpha_g = 2g. \\
\leq & \frac{3}{2} g(g-1) - g(g-1) \\
& \text{por el corolario (5.62),}
\end{aligned}
$$

y por el mismo corolario (5.62), la igualdad es válida si y sólo si $\alpha_1 = 2$. Q.E.D.

Corolario 5.71 *Sea W el número de puntos de Weierstrass en una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. Entonces,*

$$2g - 2 \leq W \leq g^3 - g.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior, el peso máximo de un punto de Weierstrass es $g(g-1)/2 > 0$, y por (5.68) el número de puntos de Weierstrass, contados con sus pesos, es

$$(*) \qquad \sum_{p \in X} \tau(p) = (g-1)g(g+1),$$

así, que dividiendo (*) por el peso máximo posible $g(g-1)/2$, se obtiene la primera desigualdad de este corolario.

La segunda desigualdad se sigue del hecho de que el peso mínimo de un punto de Weierstrass es 1, y al dividir (*) entre 1 se obtiene la segunda desigualdad del corolario. Q.E.D.

Observemos ahora que por (5.70), la cota inferior $2g + 2$ del corolario anterior se alcanza cuando la sucesión de no lagunas de Weierstrass en cualquier punto de Weierstrass comienza en $\alpha_1 = 2$, y así, por (5.60), la sucesión de no lagunas comienza como $2 < 4 < \cdots < 2g$, y la sucesión de lagunas de cualquier punto de Weierstrass es por lo tanto de la forma $1 < 3 < \cdots < 2g-1$. Las superficies de Riemann compactas para las cuales esto sucede se estudiarán a continuación.

Antes, finalizamos nuestra discusión de puntos de Weierstrass con el teorema siguiente que contiene el objetivo enunciado en la introducción de esta sección:

Teorema 5.72 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 2$ y sea $p \in X$ un punto. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(1): Existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante que tiene un polo de orden $\leq g$ en p y es holomorfa en $X - \{p\}$.

(2): Existe una diferencial holomorfa no idénticamente cero ω en X con un cero de orden $\geq g$ en p.

(3): p es un punto de Weierstrass.

(4): $\ell(gp) \geq 2$, i.e., al menos uno de los naturales $2, \ldots, g$ es una no laguna.

(5): $i(gp) \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Claramente (1) y (2) son equivalentes, y (4) y (5) son equivalentes por Riemann-Roch.

(2) $\iff$ (3) es directo ya que $i(gp) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega(X)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Si alguno de los naturales $2, \ldots, g$ no es laguna, entonces debe existir una laguna en $g+1, \ldots, 2g-1$. Así, si $g+k$, $k \geq 1$, es una laguna, por las observaciones en la subsección **Puntos de Weierstrass**, se tiene que

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega((g+k-1)p) - \dim_{\mathbb{C}} \Omega((g+k)p) = 1,$$

i.e., existe una diferencial holomorfa ω en X con un cero en p de orden $g+k-1 \geq g$, y por lo tanto el peso de p con respecto a $\Omega(X)$ es $\tau(p) \geq 1$, i.e., p es un punto de Weierstrass.

(4) $\Rightarrow$ (3): Si $\ell(gp) \geq 2$, entonces existe una función meromorfa no constante f tal que $(f) + (gp) \geq 0$. Claramente una tal función no puede tener un polo mas que en el punto p. Más aún, el orden de este polo p es a lo mas g, i.e., p es un punto de Weierstrass.

(3) $\Rightarrow$ (4) es similar.

(3) $\Rightarrow$ (1) es similar también. Q.E.D.

Corolario 5.73 *Si X es una superficie de Riemann de género $g \geq 2$, entonces existe una aplicación cubriente (ramificada) holomorfa $f : X \to \mathbb{P}^1$ con a lo más g hojas.*

DEMOSTRACIÓN. Como $g \geq 2$, por (5.69) existen puntos de Weierstrass p en X, y así por (5.72) existe $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante con un polo de orden $\leq g$ en p y holomorfa en $X - \{p\}$. Como en (5.31) $f : X \to \mathbb{P}^1$ es un cubriente holomorfo con a lo más g hojas. Q.E.D.

Superficies de Riemann hiperelípticas. Para finalizar esta sección, estudiamos aquellas superficies de Riemann compactas para las cuales el número de puntos de Weierstrass es precisamente $2g+2$. Así, estas superficies de Riemann son aquellas para las cuales la cota inferior de (5.71) se alcanza. Mostraremos que estas superficies de Riemann son cubrientes ramificados de 2 hojas de $\mathbb{P}^1$, existen para cada género $g \geq 1$ y sus puntos de ramificación son precisamente los puntos de Weierstrass de estas superficies.

Definición 5.74 Una superficie de Riemann compacta X se llama *hiperelíptica*, si existe un divisor positivo $D \geq 0$ en X tal que $\deg(D) = 2$ y $\ell(D) \geq 2$.

Lema 5.75 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Son equivalentes:*

(1): X es hiperelíptica.

(2): Existe $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante con 2 polos.

(3): X es cubriente ramificado de $\mathbb{P}^1$ con 2 hojas y con $2g+2$ puntos de ramificación.

DEMOSTRACIÓN. Claramente (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): La función $f \in \mathcal{M}(X)$ no constante con precisamente 2 polos es un cubriente $f : X \to \mathbb{P}^1$ con 2 hojas, y así, cada punto del divisor de ramificación R debe tener coeficiente 1 (i.e., su orden de ramificación es $2-1=1$), y por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que

$$\deg(R) = 2(2+g-1) = 2g+2,$$

y por lo tanto R es de la forma

$$R = p_1 + \cdots + p_{2g+2},$$

donde los $p_j \in X$ son $2g+2$ puntos distintos.

(3) $\Rightarrow$ (2): Si $f : X \to \mathbb{P}^1$ es cubriente de 2 hojas con $2g+2$ puntos de ramificación, como $2g+2$ es par, por el ejemplo después de (3.28), f no se ramifica en ∞, y por lo tanto tiene dos polos simples. Q.E.D.

Corolario 5.76 *Si X es una superficie de Riemann de género $1 \leq g \leq 2$, entonces X es hiperelíptica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea D un divisor en X de grado 2. Por Riemann-Roch,

$$\ell(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g,$$

y por lo tanto

$$\ell(D) = 2 + 1 - g + i(D).$$

Entonces, si $g = 1$ $\ell(D) \geq 2$, y por lo tanto X es hiperelíptica.

Ahora, para $g = 2$ por (5.73) existe un cubriente $f :\rightarrow \mathbb{P}^1$ con a lo más 2 hojas, y no puede ser de 1 hoja porque entonces sería un biholomorfismo, en contradicción con $g(X) = 2 \neq 0 = g(\mathbb{P}^1)$. Q.E.D.

Observación. Superficies de género 1 también se llaman *superficies elípticas*. Se suele reservar el término hiperelíptica para aquellas superficies de género $g \geq 2$ que lo son.

Ahora, sea X una superficie hiperelíptica y sea $f : X \to \mathbb{P}^1$ el correspondiente cubriente de 2 hojas. Si $p \in X$ es un punto de ramificación de f, entonces como alrededor de p f es 2 a 1, se tienen dos posibilidades:

(1): Si $f(p) = \infty$, entonces f tiene un polo de orden 2 en p, y como X es hiperelíptica, por (5.75)(2) este es el único polo de f, y p resulta un punto de Weierstrass entonces.

(2): Si $f(p) \neq \infty$, entonces $1/(f - f(p)$ tiene un polo de orden 2 en p, y como en (1) arriba p resulta de Weierstrass.

Hemos así probado que todos los puntos de ramificación de f son puntos de Weierstrass de X. Veremos a continuación que son todos: Para cada punto de ramificación p de f (que ya sabemos que es punto de Weierstrass de X), y como hay precisamente $2g + 2$ puntos de ramificación por (5.75)(3), entonces por (5.70) y las observaciones después de (5.71), la sucesión de lagunas de Weierstrass n_j en p es de la forma:

$$1 < 3 < \cdots < 2g - 1,$$

y así el peso $\tau(p)$ de cada uno de estos puntos es:

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \sum_{j=1}^{g}(n_j - j) = \sum_{j=1}^{g}(2j - 1 - j) = \sum_{j=1}^{g}(j - 1) \\ &= \frac{g(g+1)}{2} - g = \frac{g(g-1)}{2}. \end{aligned}$$

Así, los $2g + 2$ puntos de ramificación tienen un peso igual al

$$(2g + 2)\frac{g(g-1)}{2} = (g + 1)g(g - 1),$$

que, por (5.68), es igual a $\sum_{p \in X} \tau(p)$.

Por lo tanto, estos deben ser todos los puntos de Weierstrass de X. Hemos probado así la mitad del siguiente teorema:

Teorema 5.77 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 2$. Entonces, X es hiperelíptica si y sólo si X tiene exactamente $2g+2$ puntos de Weierstrass. Más aún, estos puntos de Weierstrass son precisamente los puntos de ramificación de X como cubriente de $\mathbb{P}^1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo falta probar que si X tiene $2g+2$ puntos de Weierstrass, entonces X es hiperelíptica con puntos de ramificación estos puntos de Weierstrass.

En efecto, si X tiene $2g+2$ puntos de Weierstrass, por (5.68)

$$\sum_{p \in X} \tau(p) = (g-1)g(g+1),$$

y por (5.70) el peso $\tau(p) \leq g(g-1)/2$. Así, como $(2g+2)\tau(p) \leq (g+1)g(g-1)$, entonces el peso de cada punto de Weierstrass p debe ser precisamente

$$\tau(p) = \frac{1}{2}g(g-1),$$

y por el mismo (5.70) se sigue que la sucesión de no lagunas en p debe comenzar en $\alpha_1 = 2$, i.e., existe $f \in \mathcal{M}(X)$ con un polo en p de orden 2. Esta $f : X \to \mathbb{P}^1$ es el cubriente de 2 hojas requerido. Q.E.D.

Finalmente, construimos para cada $g \geq 1$ una superficie hiperelíptica de género g: Sean $a_1, \ldots, a_{2g+2} \in \mathbb{C}$ complejos distintos, y consideremos el polinomio en dos variables w, z:

$$w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2}).$$

Sea X la superficie de Riemann asociada a esta función algebraica (3.27). Así, X es un cubriente de 2 hojas de $\mathbb{P}^1$ ramificado en cada p_j arriba de a_j (y no está ramificado en ∞ ya que $2g+2$ es par (ejemplo después de (3.28)):



El género de X se obtiene dando una base explícita para $\Omega(X)$ como sigue: Sean

$$\omega_j := \frac{z^{j-1}dz}{w} = \frac{z^{j-1}dz}{\sqrt{(z-a_1)\cdots(z-a_{2g+2})}},$$

$1 \leq j \leq g$, y donde $z : X \to \mathbb{P}^1$ es de grado 2.

Es claro que las $\omega_1, \ldots, \omega_g$ son linealmente independientes, y es un ejercicio el probar que son holomorfas.

Así, el género de X es g, y por (5.77) X es hiperelíptica de género g. Hemos probado así la mitad del teorema siguiente:

Teorema 5.78 *Las superficies hiperelípticas de género $g \geq 1$ son las superficies de Riemann asociadas a las funciones algebraicas de la forma*

$$w = \sqrt{(z-a_1)\cdots(z-a_{2g+2})},$$

con $a_j \in \mathbb{C}$ complejos distintos.

DEMOSTRACIÓN. Sólo falta probar que si X es hiperelíptica de género $g > 0$, entonces es de la forma requerida.

Ahora, como X es hiperelíptica, existe $z : X \to \mathbb{P}^1$ cubriente de 2 hojas, y por (5.75)(3), z tiene $2g+2$ puntos de ramificación. Por (3.27) existe $w \in \mathcal{M}(X)$ tal que X es la superficie de Riemann asociada a un polinomio $p(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$, cuyo grado en w es 2, i.e.,

$$p(z,w) = w^2 - 2a(z)w + b(z) \in \mathbb{C}(z)[w].$$

Completando cuadrados so obtiene

$$(w - a(z))^2 + (b(z) - a^2(z)) = 0, \tag{1}$$

y mediante el cambio de variables

$$w_1 := w - a(z); \qquad z_1 := z,$$

se obtiene

$$w_1^2 = a^2(z) - b(z) \in \mathbb{C}(z), \tag{2}$$

y así podemos escribir

$$a^2(z) - b(z) = c^2(z) \prod_{j=1}^{r} (z - e_j),$$

poniendo los denominadores y términos repetidos en $c^2(z) \in \mathbb{C}(z)$, y así podemos suponer los $e_j \in \mathbb{C}$ distintos.

Cambiando coordenadas de nuevo:

$$w_2 := w_1/c; \qquad z_2 := z_1 := z,$$

se obtiene de (2)

$$c^2 w_2^2 = c^2 \prod_{j=1}^{r} (z - e_j),$$

i.e., reescribiendo $w = w_2$,

$$w^2 = \prod_{j=1}^{r} (z - e_j), \tag{3}$$

y como bajo todos los cambios de coordenadas anteriores z quedó fija, entonces los e_j son los puntos de ramificación en $\mathbb{C}$ de $z : X \to \mathbb{P}^1$. Ahora, por (5.77) hay $2g + 2$ puntos de ramificación, y como X es hiperelíptica ∞ no se ramifica, y por lo tanto $r = 2g + 2$. Q.E.D.

5.5 Formas armónicas y la descomposición de Hodge

En esta sección obtenemos los resultados más importantes sobre formas armónicas diferenciales en una superficie de Riemann compacta, incluyendo el Teorema de Descomposición de Hodge de $H^1(X,\mathbb{C})$. Como consecuencia de lo anterior se obtendrá que $H^1(X,\mathbb{C}) \approx \mathbb{C}^{2g}$, donde g es el género de X, mostrando así la invarianza topológica del género g de X. Los resultados de esta sección son básicos para la siguiente.

Definición 5.79 Sea X una superficie de Riemann. Una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ se llama *armónica* si para todo punto $p \in X$ existe una carta (U,z) alrededor de p tal que $\omega = df$ con f una función en U que es armónica, i.e., si $z = x + iy$ es la coordenada local y

$$\Delta f := \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) dx \wedge dy$$

es el *Laplaciano* de f (en coordenadas locales), entonces, $\Delta(f) = 0$.

Como X es una superficie de Riemann (y no sólo una 2-variedad diferencial) es fácil probar que el operador Laplaciano está bien definido.

Para obtener otras caracterizaciones de las formas armónicas y algunas de sus propiedades, necesitamos recordar los siguientes conceptos: sea $U \subseteq X$ un abierto de una superficie de Riemann; se tienen los siguientes operadores (llamados *derivaciones exteriores*):

$$d, d', d'' : \mathcal{E}^{(1)}(U) \to \mathcal{E}^{(2)}(U)$$

dados como sigue: $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se puede escribir localmente como una suma finita

$$(\dagger) \qquad \omega = \sum f_k dg_k,$$

donde f_k y g_k son funciones diferenciables. Se define entonces,

$$\begin{aligned} d\omega &:= \sum df_k \wedge dg_k, \\ d'\omega &:= \sum d'f_k \wedge dg_k, \\ d''\omega &:= \sum d''f_k \wedge dg_k, \end{aligned}$$

donde df_k, $d'f_k$, $d''f_k$ son las derivaciones definidas en el capítulo 4. Es un ejercicio el probar que estas definiciones son independientes de la representación $(\dagger)$ de ω.

Directamente de las definiciones anteriores, se tienen las siguientes propiedades elementales: sean $f \in \mathcal{E}(U)$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$, entonces,

(1): $ddf = d'd'f = d''d''f = 0$.

(2): $d\omega = d'\omega + d''\omega$.

(3): $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$ (y similarmente para d' y d'').

Por ejemplo, (1) se prueba así:

$$ddf = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0 \wedge df = 0.$$

(4): Observemos ahora que si $f \in \mathcal{E}(U)$ con (U, z) una carta y $z = x + iy$, entonces con respecto a es coordenada local:

$$\begin{aligned}
d'd''f &= d'\Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}\Big) && \text{por definición de } d''f \\
&= d'\Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \wedge d\overline{z} && \text{por definición de } d'\omega \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz\Big) \wedge d\overline{z} && \text{por definición de } d'g \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z} \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) dx \wedge dy && \text{cambio de coordenadas} \\
&= \frac{1}{2i} \Delta f dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Así, $f \in \mathcal{E}(U)$ es armónica si y sólo si $d'd''f = 0$.

Nótese que de (1) y (2) se sigue que si $f \in \mathcal{E}(U)$, entonces

$$0 = ddf = (d' + d'')(d' + d'')f = d'df + d''d'f,$$

y por lo tanto:

(5): $d'd''f = -d''d'f$.

Definición 5.80 Si $U \subseteq X$ es un abierto, una 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ se llama *cerrada* si $d\omega = 0$, y se llama *exacta* si existe $f \in \mathcal{E}(U)$ tal que $\omega = df$.

Obsérvese que como $ddf = 0$, entonces toda forma exacta es cerrada.

Proposición 5.81 *Sea $U \subseteq X$ un abierto. Entonces,*

(i): Toda 1-forma holomorfa $\omega \in \Omega(U)$ es exacta.

(ii): Toda 1-forma cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ es holomorfa.

DEMOSTRACIÓN. Si $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$, con respecto a una coordenada local z, escribamos $\omega = f dz$ con f diferenciable. Entonces,

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}\right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz \qquad \text{ya que } dz \wedge dz = 0 \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz \wedge \overline{z}. \end{aligned}$$

Entonces, si ω es cerrada, $d\omega = 0$, y por lo tanto $\partial f/\partial \overline{z} = 0$, i.e., f es holomorfa.

La parte (i) es directa también. Q.E.D.

Corolario 5.82 *Si $f \in \mathcal{E}(U)$ es armónica, entonces $d'f \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ es una forma holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN. f armónica implica, por (4) y (5) arriba, que

$$(\dagger) \qquad d'd''f = 0 = d''d'f.$$

Se sigue que

$$dd'f = (d' + d'')d'f = d'd'f + d''d'f = 0,$$

por (1) arriba y (†). Entonces, $d'f \in \mathcal{E}^{1,0}(U)$ es cerrada, y por la proposición previa, debe ser holomorfa. Q.E.D.

El operador *. Si X es una superficie de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, y escribimos localmente

$$\omega = \sum f_j dg_j,$$

con f_j, g_j funciones diferenciables, podemos definir

$$\overline{\omega} := \sum \overline{f}_j d\overline{g}_j,$$

donde $\overline{h}$ es el conjugado complejo de la función h.

La *parte real* de ω se define como

$$\mathrm{Re}(\omega) := \frac{1}{2}(\omega + \overline{\omega}).$$

Claramente, $\omega = \overline{\omega} \iff \omega = \mathrm{Re}(\omega)$. A estas formas se les llama *formas reales.*

Si $\omega \in \Omega(X)$ es una forma holomorfa, a su conjugada $\overline{\omega}$ se le llama *anti-holomorfa.* El espacio vectorial de las formas anti-holomorfas en X se le denota por $\overline{\Omega}(X)$.

Definición 5.83 Recordemos ahora que $\mathcal{E}^{(1)}(X) = \mathcal{E}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(X)$, y así, dada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, la podemos descomponer en forma única como: $\omega = \omega_1 + \omega_2$, con $\omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$ y $\omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$. Definimos entonces,

$$*\omega := i(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2).$$

Se tiene así una función

$$* : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(1)}(X),$$

que es un $\mathbb{R}$-isomorfismo y manda $\mathcal{E}^{1,0}$ en $\mathcal{E}^{0,1}$ y viceversa. A este operador se le llama el *operador * de Hodge.*

Las propiedades siguientes de * son directas de las definiciones: sean $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, $\omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$, $\omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ y $f \in \mathcal{E}(X)$. Entonces,

(a): $** \omega = -\omega$.

(b): $\overline{*\omega} = *\overline{\omega}$.

(c): $d*(\omega_1 + \omega_2) = id'\overline{\omega}_1 - id''\overline{\omega}_2$.

(d): $*d'f = id''\overline{f}$, y $*d''f = -id'\overline{f}$.

(e): $d*df = 2id'd''f$.

Proposición 5.84 *Si $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a): ω es armónica.

(b): $d\omega = d*\omega = 0$.

(c): $d'\omega = d''\omega = 0$.

DEMOSTRACIÓN. (b) y (c) son equivalentes por las propiedades de * arriba.

(b) $\Rightarrow$ (a): $d\omega = 0$ quiere decir que ω es cerrada, y entonces localmente $\omega = df$ con f diferenciable. Se sigue que

$$0 = d*\omega = d*(df) = 2id'd''f$$

por (e) arriba. Por lo tanto, $d'd''f = 0$, y por la propiedad **(4)** de arriba se sigue que f es armónica.

(a) $\Rightarrow$ (b): Si $\omega = df$ con f una función armónica, entonces

$$d\omega = d(df) = 0,$$

y

$$d * \omega = d * df = 2id'd''f = 2i(0) = 0,$$

por (e) y (5). Q.E.D.

Teorema 5.85 *Sea X una superficie de Riemann y sea $\mathcal{H}^1(X)$ el espacio vectorial de las formas armónicas en X. Entonces,*

$$\mathcal{H}^1(X) = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

En particular, si X es compacta de género g, entonces

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^1(X) = 2g.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\omega \in \mathcal{H}^1(X)$ escribamos, en una coordenada local z,

$$\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z},$$

con $f_1 dz \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$ y $f_2 d\bar{z} \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$.

Entonces, para $d = d' + d''$, se tiene que

$$d\omega = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big) d\bar{z} \wedge dz,$$

y

$$d * \omega = -i\Big(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big) d\bar{z} \wedge dz.$$

Entonces, como ω es armónica si y sólo si $d\omega = 0 = d^*\omega$, entonces ω es armónica si y sólo si f_1 y $\overline{f}_2$ son holomorfas, y por lo tanto ω es armónica si y sólo si existen diferenciales holomorfas únicas ω_1 y $\overline{\omega}_2$ tales que $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Q.E.D.

Producto interno en $\mathcal{E}^{(1)}$. Para X una superficie de Riemann compacta, y para $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ definimos

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle := \int\int_X \omega_1 \wedge * \wedge \omega_2.$$

Es claro que $\langle\ ,\ \rangle$ es lineal en la primera variable y semilineal en la segunda. Más aún, si $\omega_1 = f_1 dz + g_1 d\bar{z}$ y $\omega_2 = f_2 dz + g_2 d\bar{z}$, entonces $*\omega_2 = i(\bar{f}_2 d\bar{z} - \bar{g}_2 dz)$, y así:

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge *\omega_2 &= (f_1 dz + g_1 d\bar{z}) \wedge i(\bar{f}_2 d\bar{z} - \bar{g}_2 dz) \\ &= i(f_1 \bar{f}_2 + g_1 \bar{g}_2) dz \wedge d\bar{z}), \end{aligned}$$

y similarmente

$$\omega_2 \wedge *\omega_1 = i(f_2 \bar{f}_1 + g_1 \bar{g}_2) dz \wedge d\bar{z},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle &= \overline{\int\int_X \omega_1 \wedge *\omega_2 = i \int\int_X (f_1 \bar{f}_2 + g_1 \bar{g}_2) dz \wedge d\bar{z}} \\ &= \overline{i \int\int_X (\bar{f}_1 f_2 + g_2 \bar{g}_1) d\bar{z} \wedge dz} \\ &= \overline{\int\int_X \omega_2 \wedge *\omega_1} = \overline{\langle \omega_2, \omega_1 \rangle}. \end{aligned}$$

Más aún, $\langle\ ,\ \rangle$ es positivo definido, ya que si $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, escribiendo $\omega = f dz + g d\bar{z}$, con respecto a una carta local $z = x + iy$, entonces $*\omega = i(\bar{f} d\bar{z} - \bar{g} dz)$, y así, como calculamos arriba,

$$\begin{aligned} \omega \wedge *\omega &= i(|f|^2 + |g|^2) dz \wedge d\bar{z} \\ &= i(|f|^2 + |g|^2)(-2i dx \wedge dy) \\ &= 2(|f|^2 + |g|^2) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Se sigue que $\langle \omega, \omega \rangle \geq 0$ y $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ si y sólo si $\omega = 0$.

Así $(\mathcal{E}^{(1)}(X), \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio vectorial unitario (que en general, no es completo). A continuación veremos cómo este producto interno nos da información acerca de los espacios $\mathcal{E}(X)$, $\mathcal{E}^{(1)}(X)$, $\Omega(X)$, $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ y $\mathcal{E}^{0,1}(X)$:

Lema 5.86 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces,*

(a): $d'\mathcal{E}(X)$, $d''\mathcal{E}(X)$, $\Omega(X)$ y $\overline{\Omega}(X)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ ortogonales por pares.

(b): $d\mathcal{E}(X)$ y $*d\mathcal{E}(X)$ son subespacios ortogonales de $\mathcal{E}^{(1)}(X)$, y

$$d\mathcal{E}(X) \oplus *d\mathcal{E}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X).$$

DEMOSTRACIÓN. (a): Como $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ y $\mathcal{E}^{0,1}(X)$ ya sabemos que son ortogonales, es suficiente probar que $d'\mathcal{E}(X) \perp \Omega(X)$ y $d''\mathcal{E}(X) \perp \overline{\Omega}(X)$.

Ahora, sean $f \in \mathcal{E}(X)$ y $\omega \in \Omega(X)$. Entonces,

$$\omega \wedge *d'f = i\omega \wedge d''\bar{f} = i\omega \wedge d\bar{f} = id(\bar{f}\omega).$$

Así,

$$\langle \omega, d'f \rangle = -i \int\int_X d(\bar{f}\omega) = 0,$$

por Stokes. Similarmente, $\langle \bar{\omega}, d''f \rangle = 0$.

(b): Sean $f, g \in \mathcal{E}(X)$. Entonces,

$$df \wedge *(*dg) = -df \wedge dg = -d(fdg).$$

Así,

$$\langle df, *dg \rangle = -\int\int_X d(fdg) = 0,$$

por Stokes.

Las igualdades deseadas se siguen por la propiedad (c) de *. Q.E.D.

Proposición 5.87 *Sea X una superficie de Riemann de género $g > 0$, entonces, se tiene una descomposición ortogonal*

$$\mathcal{E}^{0,1}(X) = d''\mathcal{E}(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Dolbeaut,

$$H^1(X, \mathcal{O}) \approx \mathcal{E}^{0,1}(X)/d''\mathcal{E}(X),$$

y así

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}^{0,1}(X)/d''\mathcal{E}(X) = g.$$

Por otro lado, $\dim_{\mathbb{C}} \overline{\Omega}(X) = g$ por (5.85), y así el resultado se sigue del lema previo (5.86)(a). Q.E.D.

Corolario 5.88 *Sean X compacta y $\sigma \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$. La ecuación $d''f = \sigma$ tiene una solución $f \in \mathcal{E}(X)$ si y sólo si*

$$\int\int_X \sigma \wedge \omega = 0$$

para todo $\omega \in \Omega(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición del producto interno, la condición del corolario es equivalente a $\sigma \perp \overline{\Omega}(X)$. Q.E.D.

Proposición 5.89 *Sea X compacta. Entonces, existe una descomposición ortogonal*

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = *d\mathcal{E}(X) \oplus d\mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{H}^1(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Conjugando en (5.87) se obtiene

$$\mathcal{E}^{1,0}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X).$$

Así,

$$\mathcal{E}(X) = d'\mathcal{E}(X) \oplus d''\mathcal{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X),$$

y así el resultado se sigue del lema (5.86). Q.E.D.

Proposición 5.90 *Si X es compacta, entonces*

$$\ker\left(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X)\right) = d\mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{H}^1(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\mathcal{K}(X) := \ker\left(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X)\right) \subseteq d\mathcal{E}(X) \oplus \mathcal{H}^1(X).$$

Por la proposición previa es suficiente probar que

$$\mathcal{K}(X) \perp *d\mathcal{E}(X).$$

Para esto, sean $\omega \in \mathcal{K}(X)$ y $f \in \mathcal{E}(X)$. Entonces,

$$\omega \wedge *(*df) = -\omega \wedge df = d(d\omega).$$

Por lo tanto,

$$\langle \omega, *df \rangle = \int\int_X d(f\omega) = 0,$$

por Stokes. Q.E.D.

Ahora,

$$\mathcal{K} := \ker\left(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}\right)$$

es una gavilla (de formas diferenciales cerradas), y la sucesión de gavillas

$$(\dagger) \qquad 0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{K} \to 0$$

es exacta ya que d es un epimorfismo porque localmente toda forma diferencial ω es cerrada, i.e., de la forma df.

Sabemos que toda 1-forma exacta es cerrada, pero el recíproco no necesariamente es cierto. Esta falla es medida por la *homología de de Rham*:

$$H_{DR}(X) := \frac{\ker\,(\mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X))}{\operatorname{im}\,(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X))}.$$

Ahora, como $H^1(X,\mathcal{E}) = 0$ ya que $\mathcal{E}$ es fina, de (†) se sigue que

$$H^1(X,\mathbb{C}) \approx H_{DR}(X). \tag{††}$$

Hemos probado así la mitad del teorema siguiente:

Teorema 5.91 (de Rham-Hodge.) *Si X es una superficie de Riemann de género g, entonces*

$$H^1(X,\mathbb{C}) \approx H_{DR}(X) \approx \mathcal{H}^1(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de (††) y de (5.90). Q.E.D.

Observemos ahora que, como la gavilla $\mathbb{C}$ de funciones complejas localmente constantes en X depende sólo de la estructura topológica de X, entonces $b_1(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathbb{C})$ es un invariante topológico. Pero por (5.91) $b_1(X) = 2g$. Se sigue que:

Corolario 5.92 (Invarianza topológica del género) *El género g de una superficie de Riemann compacta es un invariante topológico.*

Formas armónicas asociadas a una curva en X. Sea D un divisor en X y sea

$$X_D := \{x \in X \,:\, D(x) \geq 0\}.$$

Una función $f \in \mathcal{E}(X_D)$ tal que para todo punto $a \in X$ existe una carta (U,z) con $z(a) = 0$ y existe $\psi \in \mathcal{E}(U)$ tal que $\psi'(a) \neq 0$, y tal que $f = \psi z^k$ en $U \cap X_D$, con $k = D(a)$, se llamará un *solución de D*.

Nótese que si $f \in \mathcal{O}(D)$ entonces $f \in \mathcal{M}_X^*$ y su divisor de ceros y polos es $(f) = D$.

También, si f es una solución del divisor D, entonces df/f es una función diferenciable en el complemento del soporte del divisor.

Ahora, como $f = \psi z^k$ con $k = D(a)$, si $d \in \operatorname{supp}(D)$, entonces

$$\frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi},$$

y como $d\psi/\psi$ es diferenciable en una vecindad de a, y por lo tanto no tiene singularidades allá, entonces para toda 1-forma $\omega \in \mathcal{E}^{1)}(X)$ con soporte compacto, la integral

$$\int\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega$$

existe. También, notemos que la 1-forma $d''f/f$ es diferenciable en todo X ya quq $d''f/f = d''\psi/\psi$.

Lema 5.93 *Sean $a_1, \ldots, a_n$ puntos distintos en X y sean $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{Z}$. Sea D el divisor dado por $D(a_j) = n_j$ y $D(x) = 0$ para los otros puntos. Sea f una solución débil de D. Entonces, para cualquier $g \in \mathcal{E}(X)$ con soporte compacto,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\int_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{m} n_j g(a_j).$$

DEMOSTRACIÓN. Escojamos cartas disjuntas (U_j, z_j) alrededor de cada a_j tal que $z(a_j) = 0$ y $z(U_j)$ es el disco unitario en $\mathbb{C}$ y tal que en U_j podamos escribir

$$f = \psi_j z^{n_j}$$

con $\psi_j \in \mathcal{E}(U_j)$ y $\psi_j(x) \neq 0$ para todo $x \in U_j$.

Sean $0 < r_1 < r_2 < 1$. Entonces, existen funciones $\phi \in \mathcal{E}(X)$ tales que

$$\operatorname{supp}(\phi_j) \subset \{|z_j| < r_2\} \quad \text{y} \quad \phi_j|_{\{|z|\leq r_1\}} = 1.$$

Sean $g_j := \phi_j g$ y sea $h = g - (g_1 + \cdots + g_m)$. Entonces

$$\int\int_X \frac{df}{f} \wedge dh = -\int\int_X dh \wedge \frac{df}{f} = -\int\int_X d\left(h\frac{df}{f}\right) = 0$$

ya que el soporte de h es compacto en $X - \{a_1, \ldots, a_m\}$.

Entonces,

$$\int\int_X \frac{df}{f} \wedge dh = \sum_{j=1}^{m} \int\int_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=1}^{m} n_j \int\int_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j.$$

Pero, por Stokes,

$$\begin{aligned}\int_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j &= -\int\int_{U_j} dg_j \wedge \frac{dz_j}{z_j} = lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z_j|=\epsilon} g_j \frac{dz_j}{z_j} \\ &= 2\pi i g_j(a_j) = 2\pi i g(a_j). \qquad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

Lema 5.94 *Sea X una superficie de Riemann y sea $c : [0,1] \to X$ una curva. Sea U una vecindad abierta relativamente compacta de la imagen de c. Sea $\partial c = c(1) - c(0)$ el divisor que tiene el valor $+1$ en $c(1)$ y -1 en $c(0)$, y cero en los otros puntos de X. Entonces, existe una solución f para el divisor ∂c con $f|_{X-U} = 1$, y tal que para toda forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ se tiene*

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i} \int\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

DEMOSTRACIÓN. (1): Consideremos primero el caso cuando (U, z) es una carta en X tal que $z(U)$ es el disco unitario. Por medio de esta carta identificamos U con el disco unitario en $\mathbb{C}$.

Sean $a = c(0)$ y $b = c(1)$. Escojamos $r < 1$ tal que $c[0,1] \subset \{|z| < r\}$, y escojamos una función $\psi \in \mathcal{E}(U)$ tal que $\psi|_{\{|z| \le r\}} = 1$ y $\psi_{\{|z| \ge r'\}} = 0$, donde $r < r' < 1$. Definamos una función $f_0 \in \mathcal{E}(U - \{a\})$ mediante

$$f_0 := \begin{cases} \exp\left(\psi \log \frac{z-b}{z-a}\right) & \text{si} \quad r < |z| < 1, \\ \frac{z-b}{z-a} & \text{si} \quad |z| \le r. \end{cases}$$

Aquí hemos elegido una rama holomorfa del log en la región anular indicada.

Ahora, como $f_0|_{\{r' < |z| < 1\}} = 1$, podemos extender continuamente f_0 a una función $f \in \mathcal{E}(X - a)$ definiéndola como 1 en $X - U$. Por construcción f es una solución para el divisor ∂c. Ahora, si ω es una forma diferencial cerrada en X, como ω es de la forma $\omega = dg$ en $\{|z| \le r'\}$, entonces por el lema previo

$$\frac{1}{2\pi i} \int\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \int\int_X \frac{df}{f} \wedge dg = g(b) - g(a) = \int_c \omega.$$

(2): En el caso general, existe una partición $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$, y cartas $(U_j z_j)$ tales que $z([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j \subset U$, y $z(U_j)$ el disco unitario en $\mathbb{C}$. Entonces, para la restricción c_j de c al subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$, por la parte (1) existe una solución f_j para el divisor ∂c_j con las condiciones requeridas.

El producto $f := f_1 \cdots f_n$ satisface las condiciones del lema. Q.E.D.

El resultado principal en este contexto es:

Teorema 5.95 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces, dada cualquier curva cerrada c en X, existe una forma diferencial armónica única $\gamma_c \in \mathcal{H}^1(X)$ tal que*

$$\int_c \omega = \int\int_X \gamma_c \wedge \omega,$$

para toda forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema anterior existe una solución f para el divisor $\partial c = 0$ que satisface las condiciones del lema. Como f no se anula, df/f es diferenciable y cerrada en X. Por (5.90) existe una forma diferencial $\gamma_c \in \mathcal{H}^1(X)$ y una función $g \in \mathcal{E}(X)$ tales que

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f} = \gamma_c + dg.$$

Ahora, si ω es cerrada, entonces $dg \wedge \omega = d(g\omega)$, y por Stokes

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i}\int\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \int\int_X \gamma_c \wedge \omega.$$

La unicidad es por que si γ_c' es una segunda solución, entonces para $\alpha = \gamma_c - \gamma_c'$ se tiene

$$\int\int_X \alpha \wedge \omega = 0$$

para toda forma cerrada ω. En particular, para $\omega = *\alpha$. Entonces,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \int\int_X \alpha \wedge *\alpha = 0,$$

i.e., $\alpha = 0$ ya que $\langle\ ,\ \rangle$ es positivo definido. Q.E.D.

5.6 El Teorema de Abel-Jacobi

En esta sección consideramos el problema de determinar cuándo un divisor D en una superficie de Riemann compacta X es principal, i.e., cuándo existe $f \in \mathcal{M}_X$ tal que $D = (f)$. Es claro que de entrada se necesita que $\deg(D) = 0$, y en la esfera $\mathbb{P}^1$ esta condición es suficiente, pero para una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, la condición $\deg(D) = 0$ no es suficiente. El Teorema de Abel da una condición necesaria y suficiente para que D sea principal. Después, haremos un estudio más detallado del grupo cociente $\mathrm{Div}_0(X)/(\mathcal{M}_X^*)$ de los divisores de grado cero $\mathrm{Div}_0(X) \subseteq \mathrm{Div}(X)$ módulo el subgrupo de divisores principales $(\mathcal{M}_X^*) \subseteq \mathrm{Div}_0(X)$. El Teorema de Inversión de Jacobi muestra que este cociente es isomorfo a un toro complejo de dimensión g, $\mathrm{Jac}(X)$, asociado a la superficie de Riemann X de género g. Para construir este toro necesitaremos algunos resultados acerca de curvas, cadenas y ciclos en una superficie X, y también la noción de homología de ciclos, definiendo así los grupos de homología $H_1(X, \mathbb{Z})$ asociados a X. Después, mostramos que $H_1(X, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^g$ usando resultados de la sección anterior, en particular el Teorema de Hodge.

Homología. Sea X una superficie de Riemann compacta, y sean $c_j : [0,1] \to X$ curvas en X. Una *1-cadena* en X es una expresión de la forma

$$c := \sum_{j=1}^{m} n_j c_j, \qquad n_j \in \mathbb{Z}.$$

El conjunto de 1-cadenas en X es un grupo abeliano en forma natural (sumando coeficientes si las curvas c_j correspondientes son iguales), al que denotamos por $C_1(X)$.

Siguiendo esta analogía, una *0-cadena* en X no es otra cosa que un *divisor* en X, y el grupo de 0-cadenas es $C_0(X) = \mathrm{Div}(X)$.

Se tiene un *operador frontera*

$$\partial : C_1(X) \to C_0(X) = \mathrm{Div}(X)$$

dado como sigue: si $c : [0,1] \to X$ es una curva, ponemos $\partial(c) = 0$ si c es cerrada, i.e., si $c(0) = c(1)$. Y si c no es cerrada, $\partial(c)$ es el divisor dado por

$$\partial c(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = c(1) \\ -1 & \text{si} \quad x = c(0) \\ 0 & \text{si} \quad x \neq c(0), c(1). \end{cases}$$

Si $c = \sum n_j c_j$ es cualquier 1-cadena, se define $\partial c := \sum n_j \partial c_j$.

De las definiciones anteriores es claro que

$$\deg(\partial c) = 0$$

para toda $c \in C_1(X)$. Recíprocamente, si D es un divisor en X de grado $\deg(D) = 0$, existe una 1-cadena $c \in C_1(X)$ tal que $D = \partial c$. En efecto, como $\deg(D) = 0$, entonces D lo podemos escribir como

$$D = D_{a_1} + \cdots + D_{a_r} - D_{b_1} - \cdots - D_{b_r},$$

donde para $x \in X$, D_x es el divisor dado por

$$D_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = x \\ 0 & \text{si} \quad y \neq x. \end{cases}$$

Ahora, sea c_j una curva de a_j a b_j y sea $c := c_1 + \cdots + c_r$. Entonces, $\partial c = D$.

El núcleo del operador ∂,

$$Z_1(X) := \ker\left(C_1(X) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Div}(X)\right),$$

se llama el *grupo de 1-ciclos* en X. Es claro que toda curva cerrada en X es un 1-ciclo.

Ahora, dada una 1-cadena $c \in C_1(X)$ y una 1-forma cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ se define la *integral de ω sobre c* mediante

$$\int_c \omega := \sum_{j=1}^{m} n_j \int_{c_j} \omega,$$

si $c = n_1 c_1 + \cdots + n_m c_m$.

Definición 5.96 Dos ciclos $c, c' \in Z_1(X)$ se llaman *homólogos* si para toda forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ se tiene que

$$\int_c \omega = \int_{c'} \omega.$$

Es claro que ser homólogos es una relación de equivalencia. Al conjunto de clases de equivalencia de 1-ciclos, que hereda una estructura de grupo abeliano de $Z_1(X)$, se le llama el *primer grupo de homología* de X, y se le denota

$$H_1(X, \mathbb{Z}),$$

y a sus elementos se les llama *clases de homología*.

Nótese que si $\gamma \in H_1(X,\mathbb{Z})$ y $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es cerrada, la integral $\int_\gamma \omega$ está bien definida.

Ahora, por el Teorema de Cauchy, si c, c' son dos curvas cerradas en X, y $c \simeq c'$ (son homótopas en X), entonces $c \sim c'$ (son homólogas en X). Se tiene así una función

$$h : \pi_1(X) \to H_1(X,\mathbb{Z})$$

que resulta un homomorfismo de grupos, llamado el *morfismo de Hurewicz*. En general h no es inyectivo ya que $\pi_1(X)$ casi nunca es abeliano, sin embargo, es un ejercicio sencillo el probar que h siempre es suprayectivo, y de hecho $H_1(X,\mathbb{Z})$ es la abelianización de $\pi_1(X)$.

A continuación probaremos que si X es de género $g > 0$, entonces $H_1(X,\mathbb{Z})$ es un grupo libre abeliano de rango $2g$, i.e.,

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{2g}.$$

Para esto, usaremos los resultados acerca de formas armónicas y el Teorema de Hodge de la sección anterior, y un poco de teoría de intersección en X que desarrollamos a continuación.

Teoría de intersección. Sea $c : [0,1] \to X$ una curva cerrada en$X$. Hemos visto en (5.95) que existe una única forma diferencial armónica $\gamma_c \in \mathcal{H}^1(X)$ tal que

$$\int_c \omega = \int\int_X \gamma_c \wedge \omega,$$

para cualquier forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.

Proposición 5.97 *Sea X una superficie de Riemann compacta. Sean a, b curvas cerradas en X y sean γ_a y γ_b las formas armónicas asociadas. Entonces,*

$$\int\int_X \gamma_a \wedge \gamma_b$$

es un entero.

DEMOSTRACIÓN. En general, si c es una curva cerrada en X y γ_c es la forma armónica asociada, entonces para toda forma diferencial cerrada $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ se tiene que

$$\gamma_c = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f} - dg$$

por (5.95). Así,

$$\langle \gamma_c, \omega \rangle = \int\int_X \gamma_c \wedge \omega \;=\; \int\int_X \Big[\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f} - dg\Big] \wedge \omega$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i}\int\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega - \int\int_X dg\wedge\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega - \int\int_X d(g\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega \\ &= \int_c \omega \qquad \text{por (5.94).} \end{aligned}$$

Se sigue que si γ_a y γ_b son las formas armónicas asociadas a las curvas a y b, entonces

$$\int\int_X \gamma_a\wedge\gamma_b = \langle\gamma_a,\gamma_b\rangle = \int_a \gamma_b,$$

y como γ_b es de la forma

$$\gamma_b = \frac{1}{2\pi i}\frac{df_b}{f_b} - dg_b,$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int\int_X \gamma_a\wedge\gamma_b &= \int_a \gamma_b = \int_a \Big[\frac{1}{2\pi i}\frac{df_b}{f_b} - dg_b\Big] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{df_b}{f_b} - \int_a dg_b \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a \frac{df_b}{f_b} \end{aligned}$$

que claramente es un entero. Q.E.D.

Definición 5.98 Sean a, b curvas cerradas en X y sean γ_a, γ_b las formas armónicas asociadas. El entero

$$a\cdot b := \langle\gamma_a,\gamma_b\rangle = \int\int_X \gamma_a\wedge\gamma_b$$

se llama el *número de intersección* de a y b.

Si a, b son ciclos en X, se define en forma similar $a\cdot b$.

Proposición 5.99 *Los números de intersección satisfacen:*

(1): $a\cdot b$ depende sólo de las clases de homología de a y b.

(2): $a\cdot b = -b\cdot a$.

(3): $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

DEMOSTRACIÓN. (2) y (3) son directos. Para (1), si $a \sim a'$ y $b \sim b'$ (homólogos), se tiene:
(i): Si $b = b'$, entonces $\gamma_b = \gamma_{b'}$, y así

$$a \cdot b = \int\int_X \gamma_a \wedge \gamma_b = \frac{1}{2\pi i} \int_a \frac{df_b}{f_b}$$

como arriba; y similarmente

$$a' \cdot b = \frac{1}{2\pi i} \int_{a'} \frac{df_b}{f_b},$$

que son iguales ya que $a \sim a'$.

(ii): Similarmente si $a = a'$.

(iii): El caso general se sigue de los anteriores. Q.E.D.

Con ideas similares, dejamos como un ejercicio probar:

Proposición 5.100 *Sea X una superficie de Riemann de género $g > 0$. Entonces, existen curvas cerradas $a_1, \ldots, a_{2g}$ en X tales que si γ_{a_j} son las formas armónicas asociadas, entonces*

$$\mathcal{H}^1(X) = \bigoplus_{j=1}^{2g} \mathbb{C} \cdot \gamma_{a_j}.$$

Recordemos ahora que por el Teorema de Hodge,

$$H^1(X, \mathbb{C}) \approx \mathcal{H}^1(X) \approx \mathbb{C}^{2g},$$

y

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{2g} \subseteq \mathbb{C}^{2g} \approx H^1(X, \mathbb{C}).$$

Y una base para $H^1(X, \mathbb{Z})$ está dada por las formas armónicas γ_{a_j} asociadas a curvas cerradas en X, $1 \leq j \leq 2g$.

Podemos entonces definir el apareamiento

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \times H^1(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

mediante

$$([a], \omega) \mapsto \int_a \omega.$$

Este apareamiento está bien definido ya que la integral sólo depende de la clase de homología $[a]$, y claramente es no degenerado. Se sigue que si

$\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ es una base de $H^1(X, \mathbb{Z})$ como arriba, las clases de homología de las curvas correspondientes $[a_1], \ldots, [a_{2g}]$ forman una base de $H_1(X, \mathbb{Z})$, y así,

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^{2g}.$$

La Jacobiana de una superficie de Riemann compacta. Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$. Escojamos una base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $\Omega(X)$. Para cada γ_j se define el vector columna

$$\pi_j := {}^t\Big(\int_{\gamma_j} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_j} \omega_g\Big) \in \mathbb{C}^g,$$

t = transpuesto.

Como las $\omega_i \in \Omega(X)$ son armónicas, $d\omega_i = 0$, $1 \leq i \leq g$, y así por el Teorema de Stokes, la integral $\int_{\gamma_j} \omega_i$ sólo depende de la clase de homología de γ_j, y por lo tanto, los vectores columna π_j están bien definidos. Estos vectores se llaman los *vectores de períodos* de X, y la matriz

$$\Pi := (\pi_1, \ldots, \pi_{2g})_{g \times 2g}$$

se llama la *matriz de períodos* de X.

A continuación probaremos que las columnas de Π son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, pero antes necesitamos un par de lemas:

Lema 5.101 *Si $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ es cerrada y si para todos los básicos γ_j, $1 \leq j \leq 2g$, de $H_1(X, \mathbb{Z})$ se tiene que*

$$\int_{\gamma_j} \omega = 0,$$

entonces ω es exacta.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in X$ un punto dado. Para cualquier otro punto $x \in X$ escojamos una curva γ de x_0 a x, y pongamos

$$f(x) := \int_{\gamma} \omega.$$

Observemos que si γ' es otra curva de x_0 a x, entonces $\gamma - \gamma'$ es un ciclo en X, y por lo tanto (su clase de homología) es combinación lineal de los básicos γ_j, i.e.,

$$\gamma - \gamma' = \sum_{j=1}^{2g} n_j \gamma_j + c,$$

donde $c \sim 0$, i.e., $\int_c \omega = 0$ para toda forma cerrada ω. Se sigue que

$$\int_{\gamma-\gamma'} \omega = \sum_{j=1}^{2g} \int_{n_j\gamma_j} \omega + \int_c \omega = 0,$$

ya que $\int_{\gamma_j} \omega = 0 = \int_c \omega$. Por lo tanto, $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$.

Entonces, $f : X \to \mathbb{C}$ es una función bien definida, y de hecho es diferenciable, y claramente $df = \omega$. Q.E.D.

Lema 5.102 *Sea X una superficie de Riemann compacta, y sean $\omega, \vartheta \in \Omega(X)$. Considerando a ω y ϑ en $\mathcal{E}^{(1)}(X)$, si*

$$\omega + \vartheta = df,$$

donde $f : X \to \mathbb{C}$ es diferenciable, entonces

$$\omega = \vartheta = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $\omega = h dz$ y $\vartheta = g dz$, para una coordenada local z. Entonces, $\omega \wedge \vartheta = 0$, y

$$\frac{i}{2} \vartheta \wedge \overline{\vartheta} = |g(z)|^2 \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = |g(z)|^2 du \wedge dv.$$

Supongamos que $\vartheta \neq 0$. Entonces,

$$\frac{i}{2} \int\int_X \vartheta \wedge \overline{\vartheta} = \int\int_X |g(z)|^2 du \wedge dv > 0. \tag{1}$$

Pero,

$$\vartheta \wedge \overline{\vartheta} = \vartheta \wedge \omega + \vartheta \wedge \overline{\vartheta} = \vartheta \wedge (\omega + \overline{\vartheta}) = \vartheta \wedge df,$$

(por hipótesis). Y si mostramos que

$$\int\int_X \vartheta \wedge df = 0, \tag{2}$$

esto sería una contradicción con (1), y por lo tanto $\vartheta = 0$.

Para probar (2), observemos que

$$d(f\vartheta) = df \wedge \vartheta + f \wedge d\vartheta.$$

Y como $\vartheta \in \Omega(X)$, $\vartheta = g dz$ con g holomorfa, y así $\partial g / \partial \bar{z} = 0$. Se sigue que

$$\begin{aligned} d\vartheta &= d(g dz) = dg \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial z} dz \right) \wedge dz = 0, \end{aligned}$$

y así $\vartheta \wedge df = -df \wedge \vartheta = -d(f\vartheta)$ ya que $d\vartheta = 0$.

Finalmente, como $f\vartheta \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, entonces por el Teorema de Stokes,

$$\int\int_X d(f\vartheta) = 0,$$

y así

$$\int\int_X \vartheta \wedge df = -\int\int_X d(d\vartheta) = 0.$$

Similarmente se prueba que $\omega = 0$. Q.E.D.

Proposición 5.103 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g > 0$. Los vectores de períodos $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que son linealmente dependientes. Entonces existen reales $a_1, \ldots, a_{2g}$ no todos cero tales que

$$a_1\pi_1 + \cdots + a_{2g}\pi_{2g} = 0. \tag{1}$$

Conjugando esta ecuación obtenemos

$$a_1\bar{\pi}_1 + \cdots + a_{2g}\bar{\pi}_{2g} = 0, \tag{2}$$

donde $\bar{\pi}_j = {}^t(\int_{\gamma_j} \bar{\omega}_1, \ldots, \int_{\gamma_j} \bar{\omega}_g)$. Consideremos ahora la matriz $2g \times 2g$:

$$\Pi^* := \begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{2g} \\ \bar{\pi}_1 & \cdots & \bar{\pi}_{2g} \end{pmatrix}.$$

Por (1) y (2) se tiene que las columnas de Π^* son linealmente dependientes, y así el rango de Π^* es $< 2g$. En particular, los $2g$ renglones de Π^* son linealmente dependientes, y así existen complejos $a_1, \ldots, a_g$ y $b_1, \ldots, b_g$ no todos cero, tales que

$$a_1\left(\int_{\gamma_1} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_1} \omega_g\right) + \cdots + b_g\left(\int_{\gamma_{2g}} \bar{\omega}_g, \ldots, \int_{\gamma_{2g}} \bar{\omega}_g\right) = 0,$$

i.e.,

$$\int_{\gamma_i}\left(\sum_{j=1}^{g} a_j\omega_j + \sum_{j=1}^{g} b_j\bar{\omega}_j\right) = 0$$

$1 \leq i \leq 2g$.

Pongamos ahora

$$\omega := \sum_{j=1}^{g} a_j \omega_j \qquad \text{y} \qquad \vartheta := \sum_{j=1}^{g} b_j \omega_j . \tag{3}$$

Entonces,

$$\int_{\gamma_i} (\omega + \bar{\vartheta}) = 0,$$

$1 \leq i \leq 2g$. De los lemas previos se sigue que $\omega = 0 = \vartheta$, donde ω es como en (3), lo cual contradice la independencia lineal, sobre $\mathbb{C}$, de $\omega_1, \ldots, \omega_g$. Q.E.D.

Como una consecuencia de esta proposición, se tiene que los vectores de períodos $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$ generan una *retícula* en $\mathbb{C}^g$, a saber

$$\Lambda = \Lambda(\pi_1, \ldots, \pi_{2g}) := \mathbb{Z}\pi_1 + \cdots + \mathbb{Z}\pi_{2g} \subseteq \mathbb{C}^g.$$

Definición 5.104 Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Con la notación anterior, al espacio cociente (que es un toro complejo de dimensión g)

$$\mathrm{Jac}(X) := \mathbb{C}^g / \Lambda,$$

se le llama la *Jacobiana* de X.

La Jacobiana de X es una variedad compleja de dimensión g, que también es un grupo abeliano. En muchos sentidos es más manejable que la superficie original X.

Es tiempo ahora de regresar al problema original de esta sección: determinar cuándo un divisor D en X de grado 0, es principal. Veremos cómo las construcciones anteriores son las adecuadas para tratar este problema.

El morfismo de Abel-Jacobi. Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$ y sea $\mathrm{Div}(X)$ el grupo de divisores de X. Sea $\mathrm{Div}_0(X) \subseteq \mathrm{Div}(X)$ el subgrupo de divisores de grado 0, i.e., $\mathrm{Div}_0(X)$ es el núcleo del morfismo

$$\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}.$$

Identifiquemos a $f \in \mathcal{M}_X^*$ con su divisor $(f) \in \mathrm{Div}(X)$. Así se tiene que $(\mathcal{M}_X^*) \subseteq \mathrm{Div}_0(X)$ ya que el divisor asociado a una función meromorfa no constante, tiene grado 0.

Se tiene un homomorfismmo

$$u : \mathrm{Div}_0(X) \to \mathrm{Jac}(X),$$

dado como sigue: sea $c \in C_1(X)$ una cadena tal que $\partial c = D$ y sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $\Omega(X)$. Definimos

$$(*) \qquad u(D) := \left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g.$$

Observemos que si $\partial c = D = \partial c'$, para $c, c' \in C_1(X)$, entonces $c - c' \in \ker \partial = Z_1(X)$ y así su clase de homología $[c - c']$ es una combinación de la base de la homología $[\gamma_i]$, $1 \leq i \leq 2g$, y así en (*) cada integral

$$\int_c \omega_j - \int_{c'} \omega_j = \sum_{i=1}^{2g} n_i \int_{\gamma_i} \omega_i,$$

i.e., (*) está bien definida módulo la retícula de períodos Λ, y por lo tanto (*) define una función

$$u : \mathrm{Div}_0() \to \mathrm{Jac}(X),$$

llamada el *morfismo de Abel-Jacobi*. Claramente es un homomorfismo de grupos. Podemos ahora formular el Teorema de Abel:

Teorema 5.105 (Abel) *Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$. Entonces,*

$$(\mathcal{M}_X^*) = \ker \left(\mathrm{Div}_0(X) \xrightarrow{u} \mathrm{Jac}(X) \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero que $(\mathcal{M}_X^*) \subseteq \ker (u)$. En efecto, sea $f \in \mathcal{M}_X^*$, y para $t \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sea

$$D_t := f^{-1}(t) \in \mathrm{Div}(X).$$

Entonces,

$$D := (f) = f^{-1}(0) - f^{-1}(\infty) =: D_0 - D_\infty,$$

separando los ceros de los polos de f.

Probaremos que $u(D_t)$ es constante, para $t \in \mathbb{P}^1$, y como consecuencia inmediata tendremos que

$$u(D) = u(f) = u(D_0) - u(D_\infty) = 0,$$

que es lo que queremos probar.

Para probar que $u(D_t)$ es constante, consideremos su derivada

$$\frac{d}{dt} u(D_t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \omega_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \omega_g \right),$$

donde $D_t = \partial c = \partial(\gamma_1 + \cdots + \gamma_n)$, con n el número de hojas del cubriente $f : X \to \mathbb{P}^1$.

Ahora, sea $R \subseteq X$ el conjunto de puntos de ramificación de f. Sabemos que R es finito. Sea $t_0 \in \mathbb{P}^1$ tal que $f^{-1}(t_0) \cap R = \emptyset$. Entonces, existe un disco $\Delta \subseteq \mathbb{P}^1$ y abiertos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ en X vecindades de $p_1(t_0), \ldots, p_n(t_0)$ (los puntos de $f^{-1}(t_0)$), tales que

$$f : \Delta_j \to \Delta$$

es un biholomorfismo para cada $j = 1, \ldots, n$.

Podemos entonces elegir como cartas coordenadas alrededor de cada $p_j(t_0)$ a $(\Delta_j, z = f|_\Delta)$. Con respecto a estas coordenadas escribamos

$$\omega_i = g_{ij} dz.$$

Entonces, si $D_{t_0} = \partial c_0 = \partial(\gamma_{10} + \cdots + \gamma_{n0})$, se tiene, para $t \in \Delta$ y para $D_t = \partial c_t \partial(\gamma_{1t} + \cdots + \gamma_{nt})$, que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{jt}} \omega_i &= \int_{p_{j-1}(t)}^{p_{j-1}(t_0)} \omega_i + \int_{\gamma_{j0}} \omega_i + \int_{p_j(t_0)}^{p_j(t)} \omega_i \\ &= \int_t^{t_0} g_{i,j-1}(z) dz + \int_{\gamma_{j0}} \omega_i + \int_{t_0}^{t} g_{ij} dz, \end{aligned}$$

(ver la figura siguiente, recordando que Δ es simplemente conexo)

$$p_{j-1}(t) \quad \gamma_{jt} \quad p_j(t)$$

$$p_{j-1}(t_0) \qquad p_j(t_0)$$

Y por lo tanto,

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} \int_{\gamma_{jt}} \omega_i = -g_{i,j-1}(t) + 0 + g_{ij}(t) = g_{ij}(t) - g_{i,j-1}(t).$$

Y por otra parte, como $z = f|_{\Delta_j}$, en Δ_j se tiene que

$$\frac{\omega_i}{f - t} = \frac{g_{ij}(z) dz}{z - t},$$

y así

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Res}_{p_j(t)}\left(\frac{\omega_i}{f-t}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} g_{ij}(t).$$

De (1) y (2) se obtiene

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma_{jt}} \omega_i = 2\pi\sqrt{-1}\operatorname{Res}_{p_j(t)}\left(\frac{\omega_i}{f-t}\right),$$

y por lo tanto, ya que los polos de $\omega_i/(f-t)$ provienen de los $p_1(t), \ldots, p_n(t) \in f^{-1}(t)$, entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\int_{\gamma_{jt}} \omega_i &= 2\pi\sqrt{-1}\sum \operatorname{Res}_{p_j(t)}\left(\frac{\omega_i}{f-t}\right) \\ &\quad -2\pi\sqrt{-1}\sum \operatorname{Res}_{p_{j-1}(t)}\left(\frac{\omega_i}{f-t}\right) = 0\end{aligned}$$

por el Teorema del Residuo. Se sigue que

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_{jt}} \omega_i\right) = 0,$$

y hemos probado entonces que para toda $t \notin R$, $u(D_t)$ es holomorfa, y de hecho

$$\frac{d}{dt}(u(D_t)) = 0.$$

Finalmente, como $\mathbb{P}^1 - f(R)$ es conexo, se sigue que para todo $t \in \mathbb{P}^1 - f(R)$, $u(D_t)$ es constante, y así por el Teorema de la Identidad, $u(D_t)$ es constante para toda $t \in \mathbb{P}^1$, como queríamos probar.

Recíprocamente, si $D \in \operatorname{Div}_0(X)$ es tal que $u(D) = 0$, sea $c \in C_1(X)$ una 1-cadena tal que $\partial c = D$. Entonces,

$$0 = u(D) = \left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g\right).$$

Por el lema (5.93) existe $f \in \mathcal{E}(X_D)$ tal que

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i}\int\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega$$

para toda $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ cerrada.

Ahora, para todo básico ω_j de $\Omega(X)$ se tiene

$$0 = \int_c \omega_j = \frac{1}{2\pi i} \int\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega_j = \frac{1}{2\pi i} \int\int_X \frac{d''f}{f} \wedge \omega_j$$

y como observamos antes de (5.93), la forma

$$\frac{d''f}{f} \in \mathcal{E}^{(1)}(X).$$

Entonces, por (5.88) existe una función $g \in \mathcal{E}(X)$ tal que

$$(\dagger) \qquad d''g = \frac{d''f}{f}.$$

Pongamos entonces

$$F := \exp(-g) \cdot f.$$

Se sigue que F también es una solución para D (en la terminología previa a (5.93)), y además

$$\begin{aligned} d''F &= (d''\exp(-g))f + \exp(-g)d''f \\ &= -\exp(-g)d''g \cdot f + \exp(-g)d''f \\ &= -\exp(-g)d''f + \exp(-g)d''f \quad \text{por } (\dagger) \\ &= 0, \end{aligned}$$

y así F es holomorfa en X_D, y como observamos previamente a (5.93), entonces $F \in \mathcal{M}_X^*$ satisface $D = (F)$. Q.E.D.

El problema de inversión de Jacobi. Si X es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, y $u : \mathrm{Div}_0(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ es el morfismo de Abel-Jacobi, hemos visto (Teorema de Abel) que $\ker(u) = (\mathcal{M}_X^*)$, y el problema de inversión de Jacobi es la pregunta por la suprayectividad de u. En otras palabras, considerando el grupo cociente $\mathrm{Div}_0(X)/(\mathcal{M}_X^*)$, por el Teorema de Abel u induce un morfismo inyectivo

$$u : \mathrm{Div}_0(X)/(\mathcal{M}_X^*) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X),$$

y el problema de inversión corresponde a la biyectividad de este morfismo. La respuesta es afirmativa, y es el Teorema de Jacobi que probaremos a continuación. Antes un poco de notación.

Definición 5.106 Sea X una superficie de Riemann compacta. El grupo cociente

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X)/(\mathcal{M}_X^*)$$

se llama el *grupo de Picard* asociado a X. También consideraremos al subgrupo

$$\mathrm{Pic}_0(X) := \mathrm{Div}_0(X)/(\mathcal{M}_X^*)$$

de $\mathrm{Pic}(X)$.

Con esta notación, el problema de inversión de Jacobi es considerar la suprayectividad del morfismo de Abel-Jacobi

$$u : \mathrm{Pic}_0(X) \to \mathrm{Jac}(X).$$

Antes de probar el Teorema de Jacobi, necesitamos un lema:

Lema 5.107 *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Entonces, existen g puntos distintos $a_1, \ldots, a_g$ en X tales que toda forma holomorfa $\omega \in \Omega(X)$ que se anula en todos esos puntos, es idénticamente cero.*

DEMOSTRACIÓN. Para $a \in X$, sea

$$H_a := \{\omega \in \Omega(X) \ : \ \omega(a) = 0\} \subseteq \Omega(X).$$

Es claro que cada H_a es igual a $\Omega(X)$ o tiene codimensión 1 en $\Omega(X)$. También es claro que la intersección de todos los H_a es 0. Por lo tanto, como $\Omega(X)$ tiene dimensión g, entonces existen g puntos $a_1, \ldots, a_g \in X$ tales que

$$H_{a_1} \cap \cdots \cap H_{a_g} = 0,$$

y estos son los puntos que nos sirven. Q.E.D.

Teorema 5.108 (Jacobi) *Si X es una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, el morfismo*

$$u : \mathrm{Pic}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in \mathrm{Jac}(X)$ un punto cualquiera, representado por un vector $\xi \in \mathbb{C}^g$. Escojamos puntos $a_1, \ldots, a_g \in X$ como en el lema previo, y cartas coordenadas simplemente conexas y disjuntas (U_j, z_j) alrededor de cada a_j, con $z_j(a_j) = 0$. Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base de $\Omega(X)$, y con respecto a las cartas anteriores pongamos

$$\omega_i = f_{ij} dz_j \qquad \text{en } U_j.$$

Por el lema anterior, la matriz $A := (f_{ij}(a_j))_{1 \leq i,j \leq g}$ tiene rango g. Ahora, definamos la función

$$F : U_1 \times \cdots \times U_g \to \mathbb{C}^g$$

como sigue: para $x = (x_1, \ldots, x_g) \in U_1 \times \cdots \times U_g$, pongamos

$$F(x_1, \ldots, x_g) := (F_1(x), \ldots, F_g(x)),$$

donde

$$F_i(x) := \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i,$$

$1 \leq i \leq g$, y la integral $\int_{a_i}^{x_i} \omega_i$ es a lo largo de una curva de a_i a x_i en U_i, y como U_i es simplemente conexa, la integral no depende de la curva elegida.

Observemos ahora que F es compleja-diferenciable con respecto a las coordenadas z_j, y su matriz Jacobiana es

$$J_F(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x)\right)|_{x=a} = (f_{ij}(a_j)) = A,$$

en el punto $a = (a_1, \ldots, a_g)$, y por lo tanto tiene rango g, i.e., es invertible, y así por el Teorema de la Función Inversa,

$$W := F(U_1 \times \cdots \times U_g) \subseteq \mathbb{C}^g$$

es una vecindad de $F(a) = 0$.

Ahora, regresando al punto $p \in \mathrm{Jac}(X)$ representado por $\xi \in \mathbb{C}^g$, para un número natural N suficientemente grande, el vector $\frac{1}{N}\xi$ está cerca del $0 \in \mathbb{C}^g$, y así, está en la imagen de F, i.e., para los puntos $a_j, x_j \in X$ como arriba y curvas γ_j de a_j a x_j, $1 \leq j \leq g$, poniendo

$$c := \gamma_1 + \cdots + \gamma_g,$$

se tiene que

$$\left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g\right) = \frac{1}{N}\xi.$$

Entonces, para el divisor $D := \partial c \in \mathrm{Div}_0(X)$, se tiene que

$$u(D) = \left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g\right) = \frac{1}{N}\xi \bmod (\Lambda),$$

por definición de u. Entonces, para el punto $\Delta \in \mathrm{Pic}_0(X)$, representado por el divisor $ND \in \mathrm{Div}_0(X)$ se tiene que $u(\Delta) = p$. Q.E.D.

Ya para terminar, formulamos y probamos una versión más fina del Teorema de Jacobi, obteniendo después un resultado importante para superficies de género 1.

Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$, y sea $d \geq 1$ un entero. Sea X^d el producto cartesiano de X consigo misma d veces. Sean $a_1, \ldots, a_d \in X$ puntos arbitrarios. Se define una función

$$\phi : X^d \to \mathrm{Pic}_0(X)$$

como sigue: si $(x_1, \ldots, x_d) \in X$, ponemos

$$\phi(x_1, \ldots, x_d) := \sum_{j=1}^{d} (D_{x_j} - D_{a_j}) \bmod \mathcal{M}_X^*,$$

donde D_x, para $x \in X$, es el divisor dado por

$$D_x(y) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = x \\ 0 & \text{si} \quad y \neq x. \end{cases}$$

La composición

$$X^d \xrightarrow{\phi} \mathrm{Pic}_0(X) \xrightarrow{u} \mathrm{Jac}(X)$$

define una función

$$\tilde{u} : X^d \to \mathrm{Jac}(X),$$

que recordando la definición de u, está dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1, \ldots, x_d) &= u\left(\sum_{j=1}^{d} (D_{x_j} - D_{a_j})\right) \bmod \mathcal{M}_X^* \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left(\int_{a_j}^{x_j} \omega_1, \ldots, \int_{a_j}^{x_j} \omega_g\right) \bmod \Lambda. \end{aligned}$$

El teorema siguiente refina a (5.108):

Teorema 5.109 (Jacobi) *Sea X una superficie de Riemann de género $g \geq 1$. Entonces, la aplicación*

$$\tilde{u} : X^g \to \mathrm{Jac}(X)$$

es suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente mostrar que $\phi : X^g \to \mathrm{Pic}_0(X)$ es suprayectiva. Así lo que queremos probar es que todo divisor $D \in \mathrm{Div}_0(X)$ es equivalente mod $\mathcal{M}_X^*$ a un divisor de la forma

$$\sum_{j=1}^{g} (D_{x_j} - D_{a_j})$$

con $(x_1, \ldots, x_g) \in X^g$.

Ahora, si $D' := D + D_{a_1} + \cdots + D_{a_g}$, entonces $\deg(D') = \deg(D) + g = g$, y por Riemann-Roch se tiene que

$$h^0(X, \mathcal{O}(D')) - h^1(X, \mathcal{O}(D')) = g + 1 - g = 1,$$

y así $h^0(X, \mathcal{O}(D')) \geq 1$. Por lo tanto, existe una función meromorfa $f \in \mathcal{M}_X^*$ tal que $(f) \geq -D'$, i.e., tal que

$$D'' := (f) + D' \geq 0.$$

Entonces, $\deg(D'') = g$, y como $D'' \geq 0$, existen puntos $x_1, \ldots, x_g \in X$ tales que

$$D_{x_1} + \cdots + D_{x_g}.$$

Se sigue que

$$D_{x_1} + \cdots + D_{x_g} = D'' = (f) + D' = (f) + D + D_{a_1} + \cdots + D_{a_g},$$

y por lo tanto

$$D + (f) = \sum_{j=1}^{g} (D_{x_j} - D_{x_j}). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Finalizamos esta sección estudiando $\tilde{u} : X^g \to \mathrm{Jac}(X)$ en el caso de género 1. Observemos primero que en este caso $\mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}/\Lambda$ es una superficie de Riemann (un toro).

Teorema 5.110 *Sea X una superficie de Riemann de género $g = 1$. Entonces la aplicación*

$$\tilde{u} : X \to \mathrm{Jac}(X)$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. La aplicación $\tilde{u}$ se puede describir explícitamente como sigue: dado $\omega \in \Omega(X) - \{0\}$, $\Lambda = \Lambda(\omega) \subseteq \mathbb{C}$, y sea $a \in X$. Entonces, para cada $x \in X$ la función $\tilde{u}$ es:

$$\tilde{u}(x) := \int_a^x \omega \bmod \Lambda \in \mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}/\Lambda.$$

Claramente $\tilde{u}$ es holomorfa y por (5.109) $\tilde{u}$ es suprayectiva. Que $\tilde{u}$ es inyectiva, es porque si $p \neq q$ en X y $\tilde{u}(p) = \tilde{u}(q)$, entonces $u(p - q) = 0$, y así por el Teorema de Abel el divisor $p - q \in \mathrm{Div}_0(X)$ sería principal, i.e., existiría $f : X \to \mathbb{P}^1$ tal que $(f) = p - q$, i.e., f tendría un sólo polo q de

orden 1, lo cual implicaría que $X \approx \mathbb{P}^1$, pero esto es una contradicción ya que el género de X es 1. Q.E.D.

Observación. Es claro de las definiciones anteriores que la función $\tilde{u}$: $X^g \to \mathrm{Jac}(X)$ es tal que $\tilde{u}(x_1, \ldots, x_g)$ permanece invariante bajo cualquier permutación de $(x_1, \ldots, x_g)$, y por lo tanto $\tilde{u}$ induce una función

$$\hat{u} : X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X),$$

donde $X^{(g)}$ es el g-ésimo producto simétrico de X, i.e., es el conjunto de g-adas no ordenadas de elementos de X, $\{x_1, \ldots, x_g\}$, al cual también podemos pensar como al conjunto de divisores efectivos de grado g, $D = x_1 + \cdots + x_g$, donde los x_j no tienen que ser distintos.

Ya para terminar, el producto simétrico $X^{(g)}$ tiene una estructura natural de variedad compleja de dimensión g, y la aplicación $\hat{u} : X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X)$ es holomorfa suprayectiva, pero no es biyectiva, en general. El estudio de la variedad Jacobiana $\mathrm{Jac}(X)$, que es un toro g-dimensional, proporciona información importante sobre la superficie de Riemann X.

5.7 Encajes en espacios proyectivos

En esta sección veremos cómo las superficies de Riemann compactas se pueden encajar, en forma natural, en espacios proyectivos $\mathbb{P}^n$. Comenzamos recordando la definición de los espacios proyectivos complejos $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, que de hecho es una generalización de la definición de la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1$.

El espacio proyectivo complejo. Sea $n \geq 1$ un natural, y consideremos el espacio $\mathbb{C}^{n+1}$. En el conjunto $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ introducimos la relación de equivalencia siguiente (análoga a la usada para definir $\mathbb{P}^1$):

$$(z_0, \ldots, z_n) \sim (z'_0, \ldots, z'_n) \iff \begin{array}{l} \text{existe} \quad \lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\} \\ \text{tal que} \quad z_j = \lambda z'_j \quad \text{para} \quad 0 \leq j \leq n. \end{array}$$

Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Al conjunto de clases de equivalencia se le denota

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim,$$

y se le llama el *espacio proyectivo complejo de dimensión n*.

A la clase de equivalencia del punto $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ se le denota $[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Con la topología cociente $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ es un espacio Hausdorff compacto. De hecho, $\mathbb{P}^n$ es una $2n$-variedad real, i.e., es un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$. Explícitamenate, si identificamos $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$, un atlas en $\mathbb{P}^n$ está dado por los conjuntos

$$U_j := \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n \ : \ z_j \neq 0\}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

que claramente son abiertos y cubren a $\mathbb{P}^n$; las cartas coordenadas son las funciones

$$\zeta_j : U_j \to \mathbb{C}^n$$

dadas por

$$\zeta_j[z_0 : \cdots : z_n] := \left(\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_n}{z_j}\right),$$

y es fácil ver que son homeomorfismos de U_j en $\mathbb{C}^n$. De hecho, los cambios de coordenadas

$$\zeta_k \circ \zeta_j^{-1} : \zeta_j(U_j \cap U_k) \subseteq \mathbb{C}^n \to \zeta_k(U_j \cap U_k) \subseteq \mathbb{C}^n$$

son funciones holomorfas (de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$). En este sentido, decimos que el atlas $\{(U_j, \zeta_j)\}_{0 \le j \le n}$ es un *atlas holomorfo* para $\mathbb{P}^n$, y diremos que $\mathbb{P}^n$ es una *variedad compleja de dimensión n*.

En forma análoga a (1.4) se puede definir el concepto de *aplicación holomorfa* $f : X \to Y$ entre dos variedades complejas, de dimensiones m y n respectivamente.

Una aplicación holomorfa $f : X \to Y$ entre variedades complejas, se llama una *inmersión* si para cada punto $x \in X$ la diferencial $df|_x$ es inyectiva.

Una aplicación holomorfa $f : X \to Y$ entre variedades complejas, se llama un *encaje* si f es una inmersión *inyectiva*.

Por lo que a nosotros interesa, X será una superficie de Riemann compacta y $Y = \mathbb{P}^n$, y en este caso ejemplos de aplicaciones holomorfas $f : X \to \mathbb{P}^n$ pueden obtenerse como sigue: Sean $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ funciones meromorfas no cero (las cuales existen por (5.17) ya que X es compacta). Para cualquier punto $p \in X$ sea (U, z) una carta coordenada de X alrededor de p, tal que $z(p) = 0$, y sea

$$k := \min_j \{\mathrm{ord}_p(f_j)\}.$$

Escribamos

$$f_j = z^k \cdot g_j \quad \text{en} \quad U,$$

donde g_j es holomorfa en una vecindad de p. Para al menos alguna j se tiene que $g_j(p) \neq 0$. Definamos entonces

$$F := [f_0 : \cdots : f_n] : X \to \mathbb{P}^n$$

mediante

$$(\dagger) \qquad F(p) := [g_0(p) : \cdots : g_n(p)].$$

Es claro que si $p \in U \cap U'$, donde (U, z) y (U', z') son cartas coordenadas de X alrededor de p, entonces para

$$f_j = z^k g'_j \qquad \text{en} \qquad U'$$

como arriba, se tiene que

$$g_j(p) = \frac{dz}{dz'}(p) \cdot g'_j(p),$$

con $\frac{dz}{dz'}(p) \in \mathbb{C} - \{0\}$, y por lo tanto

$$[g_0(p) : \cdots : g_N(p)] = [g'_0(p) : \cdots : g'_N(p)].$$

En otras palabras, la definición (†) de F no depende de la carta local elegida. Tenemos, por lo tanto, una función

$$F : X \to \mathbb{P}^N.$$

Finalmente, observamos que F es una aplicación holomorfa ya que si $p \in X$, con la notación anterior, existe j tal que $g_j(p) \neq 0$, y por lo tanto

$$F(p) = [g_0(p) : \cdots : g_j(p) : \cdots : g_N(p)] \in U_j$$

(una de las cartas coordenadas (U_j, ζ_j) de $\mathbb{P}^N$), y así $p \in F^{-1}(U_j) =: W_j$ un abierto de X, y las funciones

$$F_j := \zeta_j \circ F : W_j \to \mathbb{C}^N$$

tienen la forma

$$F_j = \left(\frac{g_0}{g_j}, \ldots, \frac{g_{j-1}}{g_j}, \frac{g_{j+1}}{g_j}, \ldots, \frac{g_N}{g_j} \right),$$

en una vecindad de p, con cada $\frac{g_i}{g_j}$ holomorfa. Por lo tanto, F es holomorfa.

El resultado principal de esta sección es:

Teorema 5.111 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y sea D un divisor en X de grado $\geq 2g+1$. Sea $f_0, \ldots, f_N$ una base de $\Gamma(X, \mathcal{O}_D)$. Entonces,*

$$F := [f_0 : \cdots : f_N] : X \to \mathbb{P}^N$$

es un encaje.

DEMOSTRACIÓN. Las observaciones previas nos dicen que F es una aplicación holomorfa.

(i): *F es inyectiva.* Supongamos que $p_1 \neq p_2$ en X, y sea D' el divisor definido por

$$D'(x) := \begin{cases} D(x) & \text{si} \quad x \neq p_2 \\ D(x) - 1 & \text{si} \quad x = p_2. \end{cases}$$

Como $\deg D' = \deg D - 1 \geq 2g$, la gavilla $\mathcal{O}_{D'}$ está generada globalmente (5.54), y por lo tanto existe una sección $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_{D'})$ tal que

$$(\dagger) \qquad \operatorname{ord}_{p_1}(f) = -D(p_1).$$

Y por definción de D' se tiene que

$$(\dagger\dagger) \qquad \operatorname{ord}_{p_2}(f) \geq -D(p_2) + 1.$$

Ahora, como $D' \leq D$ entonces $\Gamma(X, \mathcal{O}_D) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_{D'})$ y así $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_D)$ y por lo tanto, ya que $f_0, \ldots, f_N$ es una base de $\Gamma(X, \mathcal{O}_D)$, se tiene que

$$f = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j f_j$$

con $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

Sean (U_1, z_1) y (U_2, z_2) cartas locales de X alrededor de p_1 y p_2 respectivamente, tales que $z_j(p_j) = 0$.

Como deg $(D) \geq 2g + 1 \geq 2g$, por (5.54) $\mathcal{O}_D$ está generada globalmente y por lo tanto (5.53)

$$k_i := \operatorname{ord}_{p_i}(f_j) = -D(p_i)$$

y así, en una vecindad de p_i podemos escribir

$$f_j = z_i^{k_i} g_{ij} \qquad \text{y} \qquad f = z_i^{k_i} g_i.$$

Entonces, por definición de $F = [f_0 : \cdots : f_N]$, se tiene que

$$F(p_i) = [g_{i0}(p_i) : \cdots : g_{iN}(p_i)]$$

y como $f = \sum \lambda_j f_j$, entonces

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j g_{ij}(p_i) = g_i(p_i).$$

Pero, de (†) y (‡) se sigue que $g_1(p_1) \neq 0$ y $g_2(p_2) \neq 0$, y por lo tanto $F(p_1) \neq F(p_2)$.

(ii): *F es una inmersión.* Sea $p_0 \in X$ un punto dado, y como antes sea D' el divisor definido por

$$D'(x) := \begin{cases} D(x) & \text{si} \quad x \neq p_0 \\ D(x) - 1 & \text{si} \quad x = p_0. \end{cases}$$

Así $\mathcal{O}_{D'}$ está globalmente generada y por lo tanto existe $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_{D'})$ tal que

$$\operatorname{ord}_{p_0}(f) = -D(p_0) + 1.$$

También, como $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_D)$ y $f_0, \ldots, f_N$ es base de $\Gamma(X, \mathcal{O}_D)$ entonces $f = \sum \lambda_j f_j$ con $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

Ahora, sea (V, z) una carta local alrededor de p_0 tal que $z(p_0) = 0$ y como en (i) si ponemos

$$k := \operatorname{ord}_{p_0}(f_j) = -D(p_0)$$

entonces, en una vecindad de p_0, podemos escribir

$$f_j = z^k g_j \qquad \text{y} \qquad f = z^k g,$$

y existe una j tal que $g_j(p_0) \neq 0$. Sin perder generalidad podemos suponer que $j = 0$.

Ahora, sea (U_0, ζ_0) una de las cartas de $\mathbb{P}^N$, sea $W_0 = F^{-1}(U_0)$ y consideremos la función

$$F_0 = \zeta_0 \circ F : W_0 \to \mathbb{C}^N.$$

Recordemos que en una vecindad de p_0 la función F_0 está dada por

$$F_0 = (F_{01}, \ldots, F_{0N}) = \left(\frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_N}{g_0}\right),$$

y así obtenemos

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j F_{0j} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left(\frac{g_j}{g_0}\right) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \left(\frac{g_j}{g_0}\right) - \lambda_0 = \frac{g}{g_0} - \lambda_0,$$

y por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, dF_{0j} = d\left(\frac{g}{g_0} - \lambda_0\right) = d\left(\frac{g}{g_0}\right),$$

y como $g_0(p_0) \neq 0$ y g tiene un cero de primer orden en p_0, se debe tener entonces que

$$d\left(\frac{g}{g_0}\right)(p_0) \neq 0.$$

Se sigue que $dF_{0j} \neq 0$ para algún índice j. Es decir, F es una inmersión. Q.E.D.

5.8 El grupo de automorfismos

Sea X una superficie de Riemann compacta de género g. En esta sección consideraremos el grupo (bajo la composición de funciones):

$$\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \ : \ f \text{ es un isomorfismo } \}$$

de automorfismos de X.

Si el género $g = g(X) = 0$, i.e., si $X \approx \mathbb{P}^1$, es fácil ver (ejercicio) que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \approx PGL(2, \mathbb{C}).$$

También, si $g = g(X) = 1$, en cuyo caso $X \approx \mathrm{Jac}(X) \approx \mathbb{C}/\Lambda$ por (5.110), entonces X es un grupo abeliano (X es una curva elíptica sobre $\mathbb{C}$), entonces es un ejercicio el calcular

$$\mathrm{Aut}(X) \approx \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda),$$

y ver que es un grupo infinito.

Así, en estos dos casos $g = 0$ y $g = 1$, el grupo de automorfismos de X es infinito, y de hecho está calculado con los ejercicios de arriba.

Ahora, si $g = g(X) \geq 2$, probaremos el resultado clásico que $\mathrm{Aut}(X)$ es un *grupo finito*. De hecho, un teorema de Hurwitz es más preciso y nos dice que el orden de este grupo es $\leq 84(g-1)$. Aquí sólo probaremos la finitud de $\mathrm{Aut}(X)$. El teorema de Hurwitz puede verse en [Farkas-Kra] por ejemplo.

Comenzamos con las observaciones siguientes: Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g = g(X) \geq 2$. Por (5.69) X tiene puntos de Weierstrass.

(1): Observemos que un automorfismo $\phi : X \to X$ permuta el conjunto de puntos de Weierstrass de X, ya que si $P \in X$ es un punto de Weierstrass, por (5.72)(1) existe una función meromorfa f en X tal que su divisor de polos $(f)_\infty = nP$, para algún $1 \leq n \leq g$. Entonces, la función $f \circ \phi^{-1}$ también es meromorfa y su divisor de polos es $(f \circ \phi^{-1})_\infty = n\phi(P)$, i.e., $\phi(P)$ también es un punto de Weierstrass de X.

(2): Observemos también que si un automorfismo $\phi \in \mathrm{Aut}(X)$ tiene más de $2g+2$ puntos fijos, entonces $\phi = \mathrm{id}_X$, ya que si ϕ no fuera la identidad, entonces existe un punto $P \in X$ que no está fijo bajo ϕ.

Si P es un punto de Weierstrass, por (5.72)(1) existe una función meromorfa f en X tal que $(f)_\infty = nP$ para algún $1 \leq n \leq g$.

Si P no es un punto de Weierstrass, entonces existe una función meromorfa f en X tal que $(f)_\infty = (g+1)P$, ya que por (5.72)(4) se tiene que $\ell(gP) = 1$, y por Riemann-Roch

$$\ell((g+1)P) = (g+1) + 1 - g + \ell(\omega - (g+1)P) \geq 2,$$

donde ω es un divisor canónico de X. Y así, por (5.72) se sigue que existe una función f meromorfa tal que $(f)_\infty = (g+1)P$.

Resumiendo, para este punto $P \in X$ existe una función meromorfa f en X tal que $(f)_\infty = nP$ con $1 \leq n \leq g+1$. Entonces, $f \circ \phi$ es una función meromorfa cuyo divisor de polos es

$$(f \circ \phi)_\infty = n\phi^{-1}(P).$$

Se sigue que el divisor de polos de la función $h := f - f \circ \phi$ es

$$(*) \qquad (h)_\infty = (f - f \circ \phi)_\infty = nP + n\phi^{-1}(P).$$

Pero como para cualquier función h, el grado $\deg(h) = 0$, entonces de (*) se sigue que h debe tener $2n$ ceros, contados con sus multiplicidades, y como todo punto fijo P de ϕ claramente es un cero de h, y como $n \leq g+1$, la afirmación (2) se sigue.

El resultado principal de esta sección es:

Teorema 5.112 *Sea X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Entonces, el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(X)$ es finito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G := \mathrm{Aut}(X)$ y sea S el grupo de permutaciones del conjunto de puntos de Weierstrass de X. Por la observación (1) de arriba se tiene un homomorfismo de grupos

$$\alpha : G \to S.$$

Escribamos $G_1 := G$, $\alpha_1 := \alpha$ y $G_2 := \ker(\alpha_1)$. Escojamos un punto de Weierstrass P_0 y sea n el *menor entero* tal que $1 \leq n \leq g$ y tal que exista una función meromorfa no constante f cuyo divisor de polos es $(f)_\infty = nP_0$. Nótese que necesariamente $n \geq 2$ ya que de lo contrario $f : X \to \mathbb{P}^1$ sería una aplicación holomorfa no ramificada de una sola hoja y por lo tanto un biholomorfismo, y en consecuencia se tendría que $g(X) = g(\mathbb{P}^1) = 0$, en contradicción con $g \geq 2$. Nótese también que $\ell(nP_0) = 2$ por (5.72)(4).

Sea $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots, P_r\}$ el conjunto de puntos de ramificación de $f : X \to \mathbb{P}^1$. Como $(f)_\infty = nP_0$, entonces f tiene grado n y así $\nu(f,P) \leq n$ para cada $P \in \mathcal{R}$. Se sigue que $r \geq 4$ ya que si $r \leq 3$, por la fórmula de Riemann-Hurwitz

$$\begin{aligned} 2g-2 = 2g(X)-2 &= n(2g(\mathbb{P}^1)-2) + \sum(\nu(f,P)-1) \\ &= n(0-2) + \sum(\nu(f,P)-1) \\ &\leq -2n + 4(n-1) \quad \text{si } r \leq 3 \\ &= 2n-4 \\ &\leq 2g-4 \qquad \text{ya que } n \leq g, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

Ahora, sea S_2 el grupo de permutaciones de $\{P_1, \ldots, P_r\}$. Nótese que este conjunto es estable bajo la acción de $G_2 = \ker(\alpha_1)$ ya que si $F \in G_2 \subseteq G$, y P_j es uno de esos puntos, entonces claramente $F(P_j) \in \mathcal{R}$ y además $F(P_j) \neq P_0$ ya que $\ell(nP_0) = 2$.

Podemos definir entonces un homomorfismo

$$\alpha_2 : G_2 \to S_2$$

mediante

$$\alpha_2(F)(P_j) := F(P_j).$$

Sea $G_3 := \ker(\alpha_2)$. Nótese ahora que cada elemento $F \in G_3$ fija al conjunto $\mathcal{R}$ y así fija al menos 5 elementos de X ya que $r \geq 4$. Pongamos ahora

$$\mathcal{B} := \{f(P_1), \ldots, f(P_r)\} \subseteq X.$$

Así, el conjunto de valores de ramificación de $f : X \to \mathbb{P}^1$ es $\mathcal{B} \cup \{\infty\}$. De nuevo, usando la fórmula de Riemann-Hurwitz, se sigue que la cardinalidad del conjunto $\mathcal{B}$ es ≥ 4. Sea $F \in G_3$ cualquier elemento. Ahora, como $f \circ F \in \mathcal{L}(nP_0)$ y como

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP_0) = \ell(nP_0) = 2,$$

entonces existen constantes $a, b \in \mathbb{C}$ tales que

$$f \circ F = a \cdot 1 + b \cdot f = a + bf.$$

Ahora, el automorfismo

$$\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

dado por $\beta(z) := a + bz$ fija al conjunto $\mathcal{B} \cup \{\infty\}$ ya que F fija al conjunto $\mathcal{R}$.

Pero como $\#\mathcal{B} \cup \{\infty\} \geq 5 > 2 \cdot 0 + 2 = 2 \cdot g(\mathbb{P}^1) + 2$, entonces por la observación (2) de arriba β debe ser la identidad, y por lo tanto $a = 0$ y $b = 1$, y así $f \circ F = f$ para todo $F \in G_3$.

Escojamos ahora cualquier $z_1 \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$ y sea S_3 el grupo de permutaciones del conjunto $f^{-1}(z_1)$. Como antes, cualquier $F \in G_3$ induce una permutación en $f^{-1}(z_1)$, y así se tiene un homomorfismo

$$\alpha_3 : G_3 \to S_3.$$

Cualquier elemento de $G_4 := \ker(\alpha_3)$ fija los puntos del conjunto de ramificación de X, i.e., de $\mathcal{B} \cup \{\infty\}$, y también los n puntos de $f^{-1}(z_1)$. Así, cada elemento de G_4 tiene al menos $n + 5 \geq 7$ puntos fijos.

Iteremos este proceso como sigue: Escojamos $z_2 \in \mathbb{C} - \mathcal{B}$ y sea S_4 el grupo de permutaciones de $f^{-1}(z_2)$. Se define entonces un homomorfismo

$$\alpha_4 : G_4 \to S_4,$$

y todo elemento de $G_5 := \ker(\alpha_4)$ tiene al menos $2n + 5 \geq 9$ puntos fijos. Continuando inductivamente se construye un grupo de automorfismos G_{g+3} del cual cada uno de sus elementos tiene al menos

$$n(g + 3 - 3) + 5 > 2g + 2$$

puntos fijos. Por la observación (2) de arriba se sigue que $G_{g+3} = 1$ es el grupo trivial, y así

$$1 = G_{g+3} = \ker(\alpha_{g+2} : G_{g+2} \to S_{g+2})$$

implica α_{g+2} inyectiva y por lo tanto G_{g+2} es finito ya que S_{g+2} lo es. Recorriendo en sentido inverso el proceso anterior se prueba que cada grupo G_k, y en particular $G_1 = G = \mathrm{Aut}(X)$, debe ser finito. Q.E.D.

Unas observaciones finales: El teorema anterior tiene un refinamiento, cuya demostración escapa el alcance de este libro, a saber:

Teorema (de Franchis). *Sean X_1, X_2 superficies de Riemann compactas, y supongamos que el género $g(X_2) > 1$. Entonces, existen sólo un número finito de aplicaciones holomorfas no constantes $f : X_1 \to X_2$.*

Una demostración de este resultado puede verse, por ejemplo, en [Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*. Springer-Verlag (1983), p. 283]. Este Teorema de de Franchis juega un papel importante (es el último eslabón) en la demostración reciente de la conjetura de Mordell por G. Faltings, véase [G. Faltings, *Endlichkeitsätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Inv. Math. 73 (1983), 349-366)].

Finalmente, quisiéramos mencionar el problema inverso al resuelto por el teorema anterior: Dado un grupo finito G, existe una superficie de Riemann compacta X (de género $g \geq 2$) tal que

$$\mathrm{Aut}(X) \approx G.$$

Este resultado fue probado por L. Greenberg: *Maximal Fuchsian Groups*, Bull. A.M.S. 69 (1963), 569-573.

Nótese que como X es un cubriente (ramificado) de $\mathbb{P}^1$, la aplicación $p : X \to \mathbb{P}^1$ induce una extensión de campos $p^* : \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \approx \mathbb{C}(z) \to \mathcal{M}_X$, y resulta que ésta es una extensión finita de Galois, y como en (3.31) se tiene un isomorfismo

$$G \approx \mathrm{Aut}(X) \approx \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1) \approx \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_X/\mathbb{C}(z));$$

en otras palabras, el grupo finito G es realizable como grupo de Galois de una extensión finita de Galois del campo de funciones $\mathbb{C}(z)$. Es una conjetura, atribuida a Hilbert y a Noether, que dado cualquier grupo finito G y dado un campo K, existe una extensión de Galois L/K tal que $G \approx \mathrm{Gal}(L/K)$ (*el problema inverso de la teoría de Galois*). La conjetura sigue abierta aún en el caso original e importante cuando $K = \mathbb{Q}$. Métodos álgebro-geométricos, de los cuales este libro es una introducción, son básicos para entender estos problemas.

Bibliografía

[1] Ahlfors, L.V . *Complex Analysis.* New York, McGraw-Hill.

[2] Artin, E. *Galois Theory.* Notre Dame Math. Lectures.

[3] Conway, J. *Functions of one Complex Variable.* Springer Verlag.

[4] Farkas, H. y Kra, J. *Riemann Surfaces.* Springer Verlag.

[5] Forster, O. *Riemannsche Flächen.* Springer Verlag.

[6] Godement, R. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux.* Hermann.

[7] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer Verlag.

[8] Rotman, J. *Notes on Homological Algebra.* Van Nostrand.

[9] Serre, J.P. *Groupes Algébriques et Corps de Classes.* Hermann.

Índice alfabético

adéles o reparticiones 218
anillo de funciones holomorfas 12
atlas 2
  holomorfo 3
  equivalentes 3
  máximo 4
aplicación
  holomorfa 19
  ramificada 19
  cubriente 30
    ramificada 46
    no ramificada 30
    ramificada de n hojas 47
    normal o de Galois 56, 101
categoría
  de superficies de Riemann compactas 103, 109
  de extensiones finitas de $\mathbb{C}(z)$ 103, 109
  de gavillas 112, 113
  de pregavillas 112, 113
campo de funciones meromorfas 24
cambios de coordenadas 2
cartas coordenadas 2
ciclos homólogos 266
conjunto dirigido 65
continuación analítica 72
  a lo largo de una curva 74
  de un germen 78
  máxima 79, 81
continuación de funciones meromorfas 82
coordenada local 12
coordenadas homogéneas 6
cohomología 143
  de una cubierta 143
  de Čech 151
  sucesión larga de 151, 152
complejo simplicial 143
co-complejo 144
cociclos 144
cocadenas cuadrado integrables 187, 188
cofronteras 144
cubierta abierta 142
  más fina 146
  de Leray 166, 167
derivaciones exteriores 253
diferencial 127
  abeliana 141
discriminante de un polinomio 84
desigualdad de Riemann 207, 209
divisor 200
  canónico 203
  de ceros y polos 200
  de una 1-forma meromorfa 202
  de ramificación 229, 230
  efectivo 201
  grado de 202
  grado del divisor canónico 227
  orden o multiplicidad 201
  principal 201
encajes 284

encogimiento de una cubierta 191
espacio
cotangente 126
cubriente 31, 37
cubriente universal 52, 51, 53
Hausdorff 2
localmente compacto 29
paracompacto 151
proyectivo complejo 283
tangente 126
vectorial de formas armónicas 257
esfera de Riemann 5
estructura compleja 4
existencia de funciones meromorfas no constantes 198, 209
familia directa o filtrada 65
Fermat, ecuación de 231
fibra de una función 28
formas 124
armónicas 253
armónicas asociadas a una curva 261, 263
diferenciales 130
cerradas 254
exactas 254
meromorfas 141
fórmula de Riemann-Hurwitz 229, 230
función
abierta 15
algebraica 61, 83, 94
discreta 28
holomorfa 12
meromorfa 22
funciones simétricas elementales 91, 92
función cuadrado integrable 180
gavilla 62
asociada a un divisor 203
asociada a una pregavilla 119
de funciones
continuas 63
diferenciables 63
holomorfas 63
meromorfas 64
que nunca se anulan 64
localmente constantes 64
de diferenciales abelianas 141
de secciones discontinuas 165
generada globalmente 228
cociente 121
conucleo 121
imagen 121
nucleo 121
rascacielos 204
isomorfismo de 113, 114
espacio asociado a 69
proyección asociada a 69
gérmenes de polinomios 85
grupo
de Galois 101
de transformaciones cubrientes 55
de clases de divisores 202
de divisores 201
de Picard 277, 278
fundamental 35
simétrico 132
género 197
haz cotangente 130
haz tangente 129
Hilbert, espacio de 181, 183
homología 265
homología de de Rham 261
Jacobiana 273
laguna de Weierstrass 233
Laplaciano 253
lema
de alisamiento 192
de Dolbeaut 171, 173
de finitud 193
de Gauss 84
de Schwarz 184

línea proyectiva 5, 6
morfismo
de Abel-Jacobi 274
de anillos 13
de campos 25
exponencial 116
de gavillas 113
de grupos 35
de Hurewicz 267
de pregavillas 112
nervio de una cubierta 143
norma L^2 180, 187
operador * de Hodge 256
operador cofrontera 144
orden de una función 19
orden de ramificación 19
orden de ramificación total 230
particiones de la unidad 157, 159
peso de un punto de Weierstrass 243
polo de una 1-forma meromorfa 211
potencia exterior 133
producto tensorial 130
punto de ramificación 19
punto de Weierstrass 243, 236
pregavilla
constante 64
fibra de una 65
gémenes de 68
secciones de 62
restricciones de 62
secciones globales 62
ramas 20
refinamiento de cubiertas 146
refinamiento localmente finito 151
resolución fina 162, 157, 164
reciprocidad de Brill-Noether 225
residuo 211
retícula 8
sucesión exacta
de gavillas 123
de pregavillas 123
de Dolbeaut 177
larga de cohomología
superficie de Riemann 4
elíptica 249
hiperelíptica 247, 248
tensores 132
alternantes 132, 133
Teorema
de anulamiento 214, 216, 217, 227
de Abel 274
de de Franchis 291
de la conducta local de las aplicaciones holomorfas 18
de Dolbeaut 177
de dualidad de Serre 225
de Finitud 196
de de Rham-Hodge 261
del elemento primitivo 100
de la función abierta 15
de la invarianza topológica del género 261
de Jacobi 278, 280
de las lagunas de Weierstrass 234
del módulo máximo 16
del residuo 213
de la identidad 14, 24
de Leray 167
de Liouville 17
de monodromía 76
de monodromía abstracto 39
de Riemann-Roch 207, 225, 226
de las singularidades removibles de Riemann 14
de Stokes 213
toro 8, 9
variedad 2
vectores de períodos 270
Wronskiano 238

Funciones algebraicas de una variable compleja
se terminó de imprimir el 24 de febrero de 1995
en los talleres de Editorial Marsa S. A. de C. V.
El tiraje consta de 1 000 ejemplares.

La Teoría de Funciones Algebraicas de una Variable Compleja,como el Análisis Complejo en general, se encuentra en forma privilegiada en la intersección de las principales ramas de la Matemática, y en este libro encontraremos algunas de las formas en que se presentan los objetos asociados a las funciones algebraicas, las superficies de Riemann compactas: (i) como objetos analíticos-geométricos, i.e., variedades complejas de una dimensión uno; (ii) como objetos topológico-geométrticos, i.e., como espacios cubrientes de la recta proyectiva compleja; (iii) como objetos aritmético-geométricos, i.e., como extensiones de grado de trascendencia uno del campo de los números complejos.

Al considerar superficies de Riemann compactas, probaremos dos de los resultados de la Teoría de Funciones del siglo XIX que ameritan inmortalidad, a saber, el Teorema de Riemann-Roch y el Teorema de Abel-Jacobi. Después, con el Teorema de Dualidad de Serre, empezaría propiamente el anális profundo de las superficies de Riemann compactas, y aquí presentaremos tan sólo algunas consecuencias geométricas de los teoremas arriba mencionados, apenas esbozando la riqueza de esta teoría.

El carácter introductorio de este libro nos permite tan sólo dar un panorama de los resultados clásicos desarrollados por los matemáticos de la segunda mitad del siglo pasado, principlamente Riemann, Abel, Jacobi y Weierstrass, pero usando el enfoque moderno de la cohomología de gavillas introducido por Serre, Grothendieck y otros matemáticos de nuestro siglo, que ha aclarado muchas de las ideas involucradas en este campo y áreas afines, permitiendo un punto de vista unificador, no sólo para ir de una a varias variables complejas, sino también incluyendo, además del campo complejo, otros campos no necesariamente algebraicamente cerrados de tal froma que se pueda hacer aritmética, uno de los requerimientos impuestos por Weil para fundamentar la Geometría Algebraica,de la cual este texto puede considerarse una introducción a una de sus partes clásicas. Hemos dejado fuera muchos otros temas clásicos importantes, que la falta de espacio nos ha impedido considerar: variedades Jacobianas, divisores theta, el Teorema de Torelli, el Teorema de de Franchis, y otros más, ameritan un libro mucho mayor que éste.

Libros de texto, manuales de prácticas y antologías